By kelompok 5

Transformasi Linier Umum

Anggota

Nama :	NIM
Justicio Caesario	H1D021055
Muhammad Hanif	H1D021056
Devyan Aby Rifa’i	H1D021058
Mohammad Nafiis Septiano	H1D021080
Andhanu Prakoso Aji	H1D021096

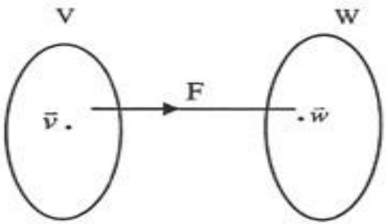
Definisi

Jika $T: V \rightarrow W$ adalah suatu fungsi dari suatu ruang vektor V ke ruang vektor W, maka T disebut **tranformasi linier dari V ke W** jika untuk semua vektor **u** dan **v** pada **V** dan semua **skalar c**:

- $T(u+v) = T(u) + T(v)$
- $T(cu) = cT(u)$

Transformasi Linier

Pada kasus khusus dimana $V=W$, transformasi linier $T:V\rightarrow V$ disebut operator linier V.



Gambar 7.1 Transformasi linier atau pemetaan linier dari V ke W

Transformasi Nol

Pemetaan $T:V \rightarrow W$, disebut transformasi nol jika ,

$T(u+v) = 0 \rightarrow T(u) = 0,\ T(v) = 0$ dan $T(ku) = 0$

Dengan demikian,

$T(u+v) = T(u) + T(v)$ dan $T(ku) = kT(u)$

01

Operator Identitas

Pemetaan I: V→V yang didefinisikan oleh

I (v)= vdisebut operator identitas pada V.

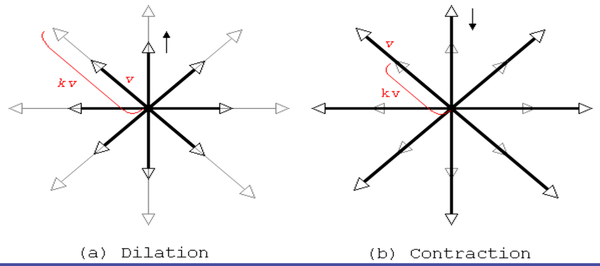
Dilation and Contraction operators

Jika V sebarang vektor dan k sebarang skalar, maka fungsi

$T: V \rightarrow V$ yang didefinisikan oleh

$T(v) = k\,v$ → **operator linier pada V**

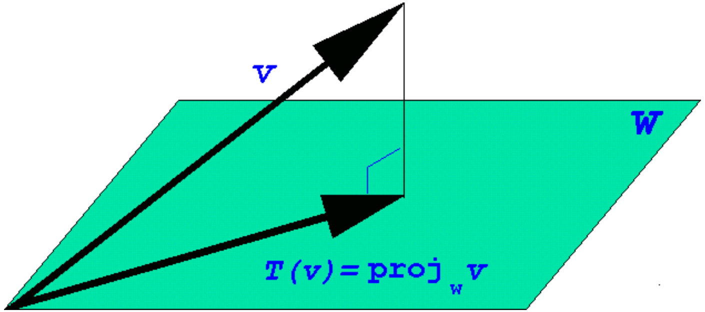
- **Dilation/Pelebaran V :** $k > 1$
- **Contraction/ Penyempitan V:** $0 < k < 1$



Proyeksi Orthogonal

Jika W adalah sub ruang berdimensi terhingga dari suatu ruang hasil kali dalam V, maka *proyeksi orthogonal* dari V pada W adalah transformasi yang didefinisikan oleh:

$$T(v) = \text{proj}_W v$$



Proyeksi Orthogonal

$T(v) = \text{proj}_W v$

Jika $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\} \rightarrow$ sebarang basis ortonormal untuk W, maka T (v) :

$T(v) = \text{proj}_W v = \langle v, w_1\rangle w_1 + \langle v, w_2\rangle w_2 + \ldots + \langle v, w_r\rangle w_r$

Bukti bahwa T adalah suatu transformasi linier diperoleh dari sifat- sifat hasil kali dalam, sbb":

$T(u+v) = \langle u+v, w_1\rangle w_1 + \langle u+v, w_2\rangle w_2 + \ldots + \langle u+v, w_r\rangle w_r$

$= \langle u, w_1\rangle w_1 + \langle u, w_2\rangle w_2 + \ldots + \langle u, w_r\rangle w_r$

$+ \langle v, w_1\rangle w_1 + \langle v, w_2\rangle w_2 + \ldots + \langle v, w_r\rangle w_r$

$= T(u) + T(v)$

Dengan cara yang sama: $T(ku) = kT(u)$

Computing an Orthogonal Projection

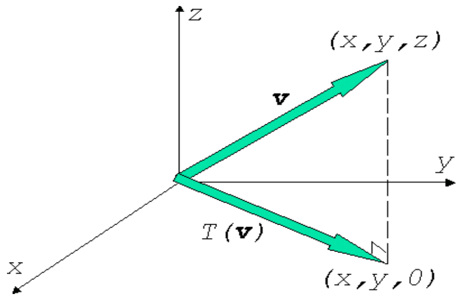
Anggap $V = R^3$ memiliki hasil kali dalam Euclidean.

Vektor $w_1 = (1,0,0)$ dan $w_2 = (0,1,0)$ membentuk basis ortonormal bidang xy. Jika $v = (x,y,z)$ adalah sebarang vektor R^3, **proyeksi ortogonal** dari R^3 pada bidang xy adalah:

$$T(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2$$

$$= x(1,0,0) + y(0,1,0)$$

$$= (x, y, 0)$$



Proyeksi Ortogonal R^3 pada bidang xy

Transformasi Linier Ruang Vektor V to R^n

Jika S = $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ adalah suatu basis untuk suatu ruang vektor V, dan

$(\mathbf{v})_s = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$

adalah vektor koordinat relatif terhadap S dari suatu vector v dalam V sehingga;

$$v = k_1 w + k_2 w_2 + \ldots + k_n w_n$$

Definisikan $T: V \to R^n$ sebagai fungsi yang memetakan v pada vektor koordinat relatif terhadap S; yaitu,

$$T(v) = (v)_s = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

Transformasi Linier Ruang Vektor V to R^n

Fungsi T adalah suatu transformasi linier, dimana:

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{w_1} + c_2\mathbf{w_2} + \ldots + c_n\mathbf{w_n}$$

dan

$$\mathbf{v} = d_1\mathbf{w_1} + d_2\mathbf{w_2} + \ldots + d_n\mathbf{w_n}$$

Jadi

$(\mathbf{u})_s = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ dan $(\mathbf{v})_s = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$

Tapi:

$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (c_1+d_1)\,\mathbf{w_1} + (c_2+d_2)\,\mathbf{w_2} + \ldots + (c_n+d_n)\,\mathbf{w_n}$

$k\,\mathbf{u} = (kc_1)\ \mathbf{w_1} + (kc_2)\ \mathbf{w_2} + \ldots + (kc_n)\ \mathbf{w_n}$

Sehingga:

$(\mathbf{u}+\mathbf{v})_s = (c_1+d_1, c_2+d_2 \ldots, c_n+d_n)$

$(k\,\mathbf{u})_s = (kc_1, kc_2, \ldots, kc_n)$

Dengan demikian:

$$(u+v)_s = (u)_s + (v)_s \text{ dan } (k\,u)_s = k\,(u)_s$$

Transformasi Linier Ruang Vektor V to R^n

Dengan demikian:

$(u+v)_s = (u)_s + (v)_s$ dan $(k\,u)_s = k\,(u)_s$

Jika persamaan dalam bentuk T, maka:

$T(u+v) = T(u) + T(v)$ and $T(k\,u) = kT(u)$

Yang menunjukkan bahwa T adalah suatu transformasi linier.

REMARK. Penulisan dalam bentuk matriks: $[\mathbf{u}+\mathbf{v}] = [\mathbf{u}]_s + [\mathbf{v}]_s$ and $[k\,\mathbf{u}]_s = k\,[\mathbf{u}]_s$

Contoh : Transformasi linier pn ke pn+1

Jika **p** $= p(x) = C_0 X + C_1X^2 + ...+ C_nX^{n+1}$ adalah polinom dalam

P_n, maka fungsi $\mathbf{T: P_n \to P_{n+1}}$:

$$\mathbf{T(p) = T(p(x)) = xp(x) = C_0 X + C_1X^2 + ...+ C_nX^{n+1}}$$

Fungsi T adalah suatu transformasi linier, dimana untuk skalar k dan sebarang polinom $\mathbf{p_1}$ dan $\mathbf{p_2}$ dalam P_n

$$T(\mathbf{p_1}+\mathbf{p_2}) = T(p_1(x) + p_2(x)) = x(p_1(x)+p_2(x))$$

$$= x\,p_1(x) + x\,p_2(x) = T(\mathbf{p_1}) + T(\mathbf{p_2})$$

dan

$$\mathbf{T(k\,p) = T(k\,p(x)) = x(k\,p(x)) = k(x\,p(x)) = k\,T(p)}$$

Operator Linier dalam P_n

Jika **p** $= p(x) = c_0 X + c_1X^2 + \ldots + c_nX^{n+1}$ adalah polinom dalam P_n, dan anggap a dan b

sebarang skalar. Fungsi T didefinisikan sbb:

$$T(p) = T(p(x)) = p(ax+b) = c_0 + c_1(ax+b) + \ldots + c_n(ax+b)^n$$

adalah suatu operator linier.

Contoh, jika $ax+b = 3x - 5$, maka $T: P_2 \rightarrow P_2$ akan menjadi operator linier sbb:

$$T(c_0 + c_1x + c_2x^2) = c_0 + c_1(3x-5) + c_2(3x-5)^2$$

A Linear Transformation Using an Inner Product

Jika V adalah suatu hasil kali dalam dan $\mathbf{v}_0$ adalah sebarang vektor tetap pada V.

Anggap $T: V \to R$ adalah transformasi yang memetakan suatu vektor $\mathbf{v}$ ke hasil kali dalamnya dengan $\mathbf{v}_0$;
yaitu,

$$T(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle$$

Dari sifat-sifat suatu hasil kali dalam:

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle$$

dan

$$T(k\,\mathbf{u}) = \langle k\,\mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle = k \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle = kT(\mathbf{u})$$

Sehingga T adalah suatu transformasi linear..

Sifat-sifat Transformasi Linear

Jika $T:V\rightarrow W$ adalah suatu transformasi linear, maka untuk sebarang vektor $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$ dalam V dan sebarang skalars c_1 dan c_2, kita dapatkan:

$$T\,(c_1\,v_1 + c_2\,v_2) = T\,(c_1\,v_1) + T\,(c_2\,v_2) = c_1T\,(v_1) + c_2T\,(v_2)$$

Dan secara lebih umum $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ adalah vektor-vektor pada V dan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ adalah skalar, maka:

$$T\,(c_1\,v_1 + c_2\,v_2 + \ldots + c_n\,v_n) = c_1T\,(v_1) + c_2T\,(v_2) + \ldots + c_nT\,(v_n) \qquad {}^{1)}$$

[1]) *transformasi linear mempertahankan kombinasi linear.*

Tiga Sifat Dasar Transformasi Linear

Theorem 8.1.1

Jika $T:V \rightarrow W$ adalah suatu transformasi linear, maka:

(a) $T(0) = 0$

(b) $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ untuk semua $\mathbf{v}$ dalam V

(c) $T(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w})$ untuk semua $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ dalam V

Tiga Sifat Dasar Transformasi Linear

Proof.

(a) Let $\mathbf{v}$ be any vector in V. Since $\mathbf{v}=0$, we have

$T(\mathbf{0})=T(0\mathbf{v})=0T(\mathbf{v})=\mathbf{0}$

(b) $T(-\mathbf{v}) = T((-1)\mathbf{v}) = (-1)T(\mathbf{v})=-T(\mathbf{v})$

(c) $\mathbf{v}-\mathbf{w}=\mathbf{v}+(-1)\mathbf{w}$; thus,

$$T(\mathbf{v}-\mathbf{w})= T(\mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + (-1)T(\mathbf{w})$$
$$= T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w})$$

Mencari Transformasi Linear dari Bayangan Vektor Basis

Jika $T:V \rightarrow W$ adalah suatu transformasi linear dan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah sebarang basis untuk V, maka bayangan $T(\mathbf{v})$ dari sebarang vektor **v** pada V dapat dihitung dari bayangan:

$$T(\mathbf{v}_1),\ T(\mathbf{v}_2),\ \ldots,\ T(\mathbf{v}_n)$$

dari vektor-vektor basis.

Nyatakan **v** sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basis;

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + c_n \mathbf{v}_n$$

Mencari Transformasi Linear dari Bayangan Vektor Basis

Gunakan rumus (1) untuk menulis:

$$T(v) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \ldots + c_n T(v_n)$$

Suatu transformasi linear secara lengkap ditentukan oleh bayangan sebarang vektor-vektor basis.

$$T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \ldots + c_n T(v_n)$$

Computing with Images of Basis Vectors

Contoh:

Tinjau basis $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ untuk R^3, dimana $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,0)$, dan $\mathbf{v}_3 = (1,0,0)$.
Anggap $T: R^3 \rightarrow R^2$ adalah transformasi linear sedemikian sehingga:

$$T(\mathbf{v}_1) = (1,0), \quad T(\mathbf{v}_2) = (2,-1), \quad T(\mathbf{v}_3) = (4,3)$$

Carilah rumus untuk $T(x_1, x_2, x_3)$; kemudian gunakan untuk menghitung $T(2,-3,5)$.

Computing with Images of Basis Vectors

Jawab:

Nyatakan $x = (x_1, x_2, x_3)$ sebagai kombinasi linear

$\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,0)$, and $\mathbf{v}_3 = (1,0,0)$.

$$(x_1, x_2, x_3) = c_1(1,1,1) + c_2(1,1,0) + c_3(1,0,0)$$

Dengan menyamakan komponen yang bersepadanan:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= x_1 \\ c_1 + c_2 &= x_2 \\ c_1 &= x_3 \end{aligned}$$

$c_1 = x_3$, $c_2 = x_2 - x_3$, $c_3 = x_1 - x_2$

$c_1 = x_3$, $c_2 = x_2 - x_3$, $c_3 = x_1 - x_2$, sehingga
Kombinasi Liner:

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2, x_3) &= x_3(1,1,1) + (x_2 - x_3)(1,1,0) + (x_1 - x_2)(1,0,0) \\
&= x_3 \mathbf{v}_1 + (x_2 - x_3)\mathbf{v}_2 + (x_1 - x_2)\mathbf{v}_3
\end{aligned}
$$

Jadi transformasi linear:

$$
\begin{aligned}
T(x_1, x_2, x_3) &= x_3 T(\mathbf{v}_1) + (x_2 - x_3) T(\mathbf{v}_2) + (x_1 - x_2) T(\mathbf{v}_3) \\
&= x_3(1,0) + (x_2 - x_3)(2,-1) + (x_1 - x_2)(4,3) \\
&= (4x_1 - 2x_2 - x_3 , 3x_1 - 4x_2 + x_3)
\end{aligned}
$$

Dari rumus ini kita dapatkan

$$T(2, -3, 5) = (9, 23)$$

Komposisi T_2 dengan T_1

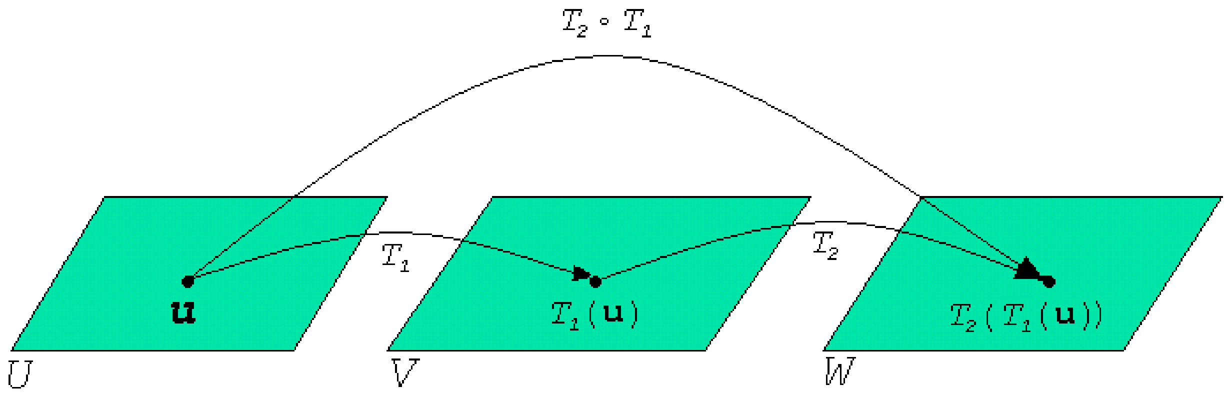
Jika $T_1 : U \rightarrow V$ dan $T_2 : V \rightarrow W$ adalah transformasi linear, *komposisi T_2 dan T_1*, dinotasikan $T_2 \circ T_1$ (baca "T_2 circle T_1"), adalah fungsi yang didefinisikan oleh rumus

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = T_2(T_1(\mathbf{u})) \qquad (2)$$

dimana **u** adalah vektor dalam U

Theorem 8.1.2

Jika $T_1 : U \to V$ dan $T_2 : V \to W$ adalah transformasi linear maka $(T_2 \circ T_1) : U \to W$ juga merupakan transformasi linear.



The composition of T_2 with T_1

Theorem 8.1.2

Proof. If $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ are vectors in U and c is a scalar, then it follows from (2) and the linearity of T_1 and T_2 that

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T_2(T_1(\mathbf{u}+\mathbf{v})) = T_2(T_1(\mathbf{u})+T_1(\mathbf{v}))$$
$$= T_2(T_1(\mathbf{u})) + T_2(T_1(\mathbf{v}))$$
$$= (T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) + (T_2 \circ T_1)(\mathbf{v})$$

and

$$(T_2 \circ T_1)(c\,\mathbf{u}) = T_2(T_1(c\,\mathbf{u})) = T_2(cT_1(\mathbf{u}))$$
$$= cT_2(T_1(\mathbf{u})) = c\,(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u})$$

Thus, $T_2 \circ T_1$ satisfies the two requirements of a linear transformation.

Composition with the Identify Operator

Jika $T: V \rightarrow V$ adalah sebarang operator linear dan jika $I: V \rightarrow V$ adalah operator identitas, maka untuk semua vektor **v** pada V kita dapatkan:

$$(T \circ I)(\mathbf{v}) = T(I(\mathbf{v})) = T(\mathbf{v})$$

$$(I \circ T)(\mathbf{v}) = I(T(\mathbf{v})) = T(\mathbf{v})$$

Kita dapatkan bahwa $T \circ I$ dan $I \circ T$ sama dengan T;

$$T \circ I = T \quad \text{and} \quad I \circ T = T \qquad (3)$$

Contoh

Diberikan T: $R^2 \to P_1$ dan S: $P_1 \to P_2$ dengan:

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a + (a+b)x \qquad \text{dan} \qquad S(p(x)) = xp(x)$$

Tentukan: $(SoT)\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ dan $(SoT)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$!!

Jawab:

$$(SoT)\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = S\left(T\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = S(3+(3-2)x) = S(3+x) = x(3+x) = 3x + x^2$$

Sehingga $(SoT)\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 3x + x^2$ dan

$$(SoT)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = S\left(T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = S(a+(a+b)x) = x(a+(a+b)x) = ax + (a+b)x^2$$

$T_3 \circ T_2 \circ T_1$

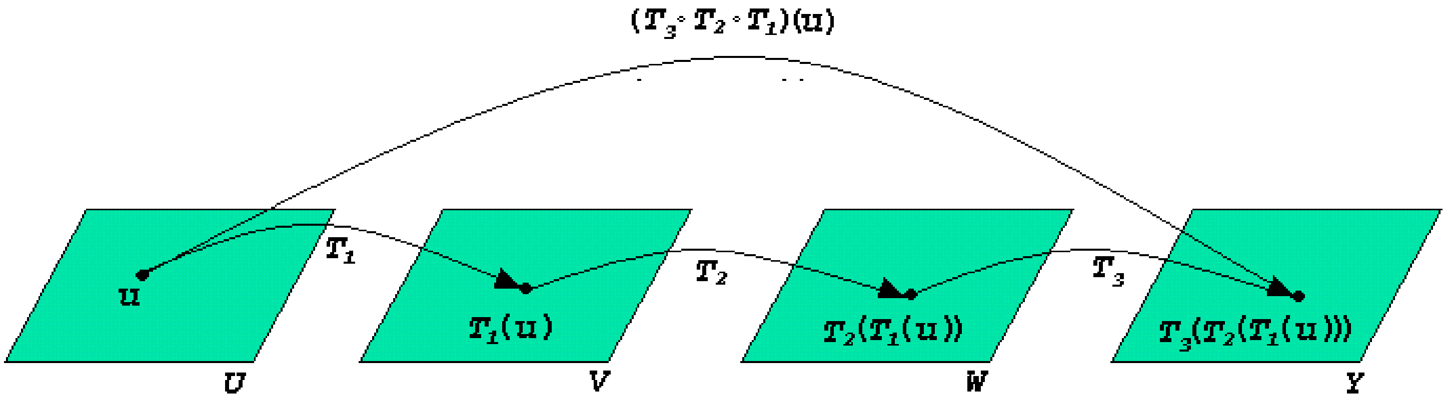
Dapat disimpulkan bahwa komposisi bisa didefinisikan untuk lebih dari dua transformasi linear. Misalnya:

$T_1 : U \rightarrow V$ and $T_2 : V \rightarrow W$,dan $T_3 : W \rightarrow Y$

adalah transformasi linear, maka komposisi $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ didefinisikan oleh:

$$(T_3 \circ T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = T_3(T_2(T_1(\mathbf{u}))) \quad (4)$$

$T_3 \circ T_2 \circ T_1$



The composition of three linear transformations

Contoh

Anggap $T_1 : P_1 \rightarrow P_1$ dan $T_2 : P_2 \rightarrow P_2$ adalah transformasi linear yang diberikan oleh rumus

$$T_1(p(x)) = xp(x) \quad \text{dan} \quad T_2(p(x)) = p(2x+4)$$

Komposisi $(T_2 \circ T_1): P_1 \rightarrow P_2$ diberikan oleh rumus:

$$(T_2 \circ T_1)(p(x)) = (T_2)(T_1(p(x))) = T_2(xp(x)) = (2x+4)p(2x+4)$$

SEKIAN

TERIMA KASIH