RWTH Aachen · AVT **Systemverfahrenstechnik** · 52056 Aachen · **Prof. Alexander Mitsos, Ph.D.**

Schriftliche Prüfung: Aufgaben des AVT-Teils. Jeder Punkt entspricht 1 Minute.

Simulationstechnik

Wintersemester 2022/2023

1. Aufgabe: Fragen (17 Punkte)

1.1. Nennen Sie **einen** der in der Vorlesung vorgestellten Modellierungsansätze für ereignisdiskrete Syteme.
Hinweis: Wenn Sie mehrere Beispiele angeben und ein falsches darunter ist, werden keine Punkte vergeben. **(1 Punkt)**

1.2. Ist das Training von künstlichen neuronalen Netzen eine lineare oder eine nichtlineare Regression? Begründen Sie kurz. **(1 Punkt)**

1.3. Ist ein lineares, zeitinvariantes System mit nur einem Zustand schwingungsfähig? Begründen Sie Ihre Antwort. **(1 Punkt)**

1.4. Was ist der Unterschied zwischen konzentrierten und verteilten Systemen? **(1 Punkt)**

1.5. Was ist der Unterschied zwischen Fluss- und Potentialvariablen? Geben Sie auch jeweils an, ob und durch welches Schlüsselwort diese in Modelica gekennzeichnet werden.
(2 Punkte)

1.6. Betrachten Sie das Petri-Netz in Abb. 1:

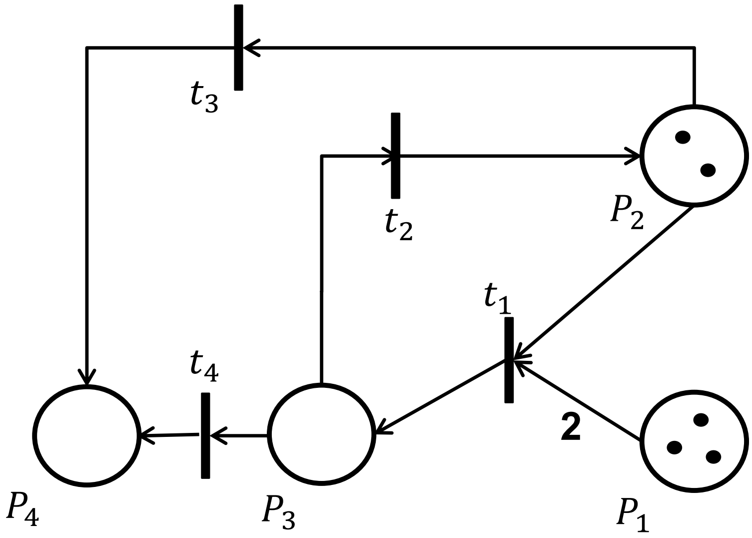

Abbildung 1: Petri-Netz

a) Wie nennt man allgemein die Verteilung von Token in einem Petri-Netz?

b) Sie schalten im Petri-Netz aus Abb. 1 einmal Transition t_1. Geben Sie die Anzahl der Token auf den Stellen P_1, P_2 und P_3 an.

c) Geben Sie die Definition eines sicheren Petri-Netzes an. Ist das Petri-Netz in Abb. 1 sicher?

d) Was ist beim Verknüpfen zweier Stellen in einem Petri-Netz nicht erlaubt?

(5 Punkte)

1.7. Da Prof. Mitsos in diesem Winter sowohl Gaskosten sparen als auch ein schönes Ambiente im Wohnzimmer haben möchte, will er sich einen Kamin anschaffen. Er hat die Wahl zwischen einem „realen Kamin", der Holz verbrennt, und einem „virtuellen Kamin", der auf seinem Fernseher als Video abgespielt wird. Im Folgenden sollen Sie die **Heizleistung der beiden Varianten berechnen**. Nutzen Sie für die Berechnung der Leistungen die folgenden Annahmen und Angaben:

- **„realer Kamin":**
  - die Verbrennung im „realen Kamin" ist verlustfrei und findet bei konstanter Temperatur T statt,
  - die Brennkammer des „realen Kamins" ist vollständig mit Holz gefüllt,
  - die Verbrennung im „realen Kamin" wird als chemische Reaktion mittels der Arrhenius-Kinetik modelliert: $k = k_0 \cdot \exp\left(\frac{-E_A}{\mathrm{R} \cdot T}\right)$,
  - betrachten Sie die Verbrennung im „realen Kamin" als stationären Fließprozess,
  - die in Tab. 1 gegebenen Parameter.
- **„virtueller Kamin":**
  - der komplette „Energieverbrauch" des Fernsehers wird in Wärme umgesetzt,
  - Wechselstromeffekte werden vernachlässigt; nehmen Sie Gleichstrom an,
  - die in Tab. 2 gegebenen Parameter.

Hinweis: Geben Sie jeweils die korrekten Einheiten an. **(6 Punkte)**

Tabelle 1: Parameter des „realen Kamins".

Verbrennungstemperatur	T	$800\,\mathrm{K}$
Volumen Brennkammer	V	$0{,}001\,\mathrm{m}^3$
Arrhenius Parameter	k_0	$0{,}002\,\frac{1}{\mathrm{s}}$
	E_A	$6672{,}8\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}}$
Universelle Gaskonstante	R	$8{,}314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K\,mol}}$
Heizwert Holz	H_i	$15\,000\,\frac{\mathrm{kW\,s}}{\mathrm{kg}}$
Holzdichte	ρ	$460\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

Tabelle 2: Datenblatt des Fernsehers von Prof. Mitsos.

Kategorie	Feature	Beschreibung
Artikelinformationen	Artikelname	85QN900A
	EAN	8806092043497
	Bildschirmtyp	NEO QLED 8K
	UVP	7.819,00 €
Display	Bildschirmdiagonale	214 cm (85 Zoll)
	Bildschirmauflösung	8K (7.680 x 4.320)
	Upscaling	8K AI Upscaling
	Bild-Engine	NEO Quantum Prozessor 8K
	Quantum Dot Display	Ja
	Anti-Reflektions-Display (Ultra Black)	Ja
Video	HDR (High Dynamic Range)	Quantum HDR 4000
	HDR 10+ / HDR 10+ Adaptive zertifiziert	Ja / Ja
	HLG (Hybrid Log Gamma)	Ja
	Kontrast	Quantum Matrix Technology Pro
	Farbdarstellung	100 % Farbvolumen durch Quantum Dot
	Viewing Angle (Betrachtungswinkel)	Ultra Viewing Angle
	Micro Dimming	Ultimate 8K Dimming Pro
	Contrast Enhancer	Ja
Audio	Dolby Digital Plus	Ja
	Object Tracking Sound	Ja, OTS+
	Q-Symphony	Ja
	Lautsprecher-Typ, Ausgangsleistung (RMS)	6.2.2-Kanal, 80W
	Woofer	Ja
	Multiroom-Unterstützung	Ja
	Bluetooth Audio	Ja
Smart TV	Smart TV	Ja
	Sprachsteuerung / Multi-Sprachassistent	Ja
	Bixby	Ja
	Kompatible Sprachassistenten	Google Assistant eingebaut / Alexa eingebaut
	Far Field Voice (Fern-Sprachsteuerung)	Ja
	TV Plus	Ja
	Web Browser	Ja
	SmartThings App Unterstützung	Ja
	Galerie	Ja
Konvergenz	Bildschirmübertragung TV auf Mobilgerät	Ja
	Bildschirmübertragung Mobilgerät auf TV (DLNA)	Ja
	PC on TV	Ja
	Digital Butler	Ja
	Tap View	Ja
	Multi View	Ja (bis zu 4 Videos)
	Music Wall	Ja
	WiFi Direct	Ja
Ausstattung	AI Technology	Ja
	Adaptive Picture	Ja
	Active Voice Amplifier	Ja
	Adaptive Sound+	Ja
	Ambient Modus	Ambient Modus+ mit Helligkeits- und Farbsensor
	Instant On (Schnelles Einschalten)	Ja
	Elektronische Programmzeitschrift (EPG)	Ja
	Expert Calibration	Ja
	Game Modus	Ja
	Game Features	Super Ultra Wide Game View, Game bar
	Bild-in-Bild	Ja
	Teletext (TTX)	Ja
	Aufnahmefunktion (PVR) über USB	Ja
	Time-Shift (zeitversetztes Fernsehen)	Ja
TV-Empfang	Digitaler Fernsehempfang (DVB)	2 Tuner, DVB-T2/C/S2
	Data Broadcasting	HbbTV 2.0.2
Leistung/ Verbrauch	Energieeffizienzklasse	G
	Stromstärke (A) im Betrieb	1,42
	Blei	vorhanden
	Ökosensor	Ja
	Stromversorgung	AC230V 50/60Hz
Abmessungen (B x H x T) mm	Maße ohne Fuß (mm)	1876.6 x 1071.5 x 15.4
	Maße mit Fuß (mm)	1876.6 x 1144.8 x 343.7
	Verpackung (mm)	2097 x 1253 x 220
Gewicht (kg)	Gewicht ohne Fuß (kg)	43.1
	Gewicht mit Fuß (kg)	54.1
Lieferumfang / Zubehör	Fernbedienung	Solar Sprachfernbedienung (TM2180E)
	Stromkabel	Ja
	Anleitung	Ja

2. Aufgabe: Systemtheorie (21,5 Punkte)

Gegeben sei das nichtlineare, gewöhnliche Differentialgleichungssystem (1) mit $p < 2\pi$:

$$
\begin{aligned}
-4 \cdot x_1(t)^3 + \dot{x}_2(t) &= \sin(x_2(t)) \cdot [x_1(t)^2 + x_2(t)^2 - p] \\
0 &= x_1(t) \cdot [x_1(t)^2 + x_2(t)^2 - p] - \dot{x}_1(t) - \sin(x_2(t)) \,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Das System (1) hat eine Ruhelage bei $\boldsymbol{x}_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$.

2.1. Betrachten Sie das oben gegebene System (1).

a) Ist das System autonom oder nicht autonom? Begründen Sie kurz.

b) Überführen Sie das System in die Zustandsraumdarstellung.

(2 Punkte)

2.2. Betrachten Sie die *allgemeine* Funktion $V : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.

a) Welche Eigenschaften muss $\mathcal{D}$ für die Anwendung der direkten Ljapunow-Methode aufweisen?

b) Nennen Sie die zwei Bedingungen die V erfüllen muss, damit V positiv definit auf $\mathcal{D}$ ist. Nehmen Sie an, dass die Menge $\mathcal{D}$ die Bedingungen aus a) erfüllt.

c) Geben Sie explizit eine Menge $\mathcal{D}$ an, auf der die Funktion $V(\boldsymbol{x}) = x_1^4 + 1 - \cos(x_2)$ positiv definit ist. Achten Sie darauf, dass die Menge $\mathcal{D}$ die Eigenschaften aus a) erfüllt.

(3,5 Punkte)

2.3. Für welche Parameterwerte p kann für das System (1) lokal asymptotisch Stabilität nachgewiesen werden? Bestimmen Sie die Parameterwerte mithilfe der direkten Ljapunow-Methode und der positiv definiten Funktion $V(\boldsymbol{x}) = x_1^4 + 1 - \cos(x_2)$. Gehen Sie hierfür folgendermaßen vor:

i) Berechnen Sie die Ableitung $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{\boldsymbol{x}(t)}$.

ii) Bestimmen Sie welche Werte der Parameter p unabhängig von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ annehmen darf, damit $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{\boldsymbol{x}(t)}$ die Bedingungen der direkten Ljapunow-Methode erfüllen kann.

iii) Bestimmen Sie die Menge $\widetilde{\mathcal{D}}(p) \subseteq \mathbb{R}^2$ für die direkte Ljapunow-Methode. Die Menge $\widetilde{\mathcal{D}}$ ist hierbei abhängig von p.

(6 Punkte)

2.4. Im folgenden soll das System (1) linearisiert werden. Nutzen Sie hierfür die Zustandsraumdarstellung des Systems (1) aus Teilaufgabe 2.1.

a) Geben Sie die **allgemeine Formel der Taylorentwicklung** um den allgemeinen Punkt $\boldsymbol{x}_*$ für das System (1) an.

b) **Linearisieren** Sie das System (1) um den allgemeinen Punkt $\boldsymbol{x}_*$ und geben Sie alle auftretenden Terme explizit an!

(5 Punkte)

2.5. Nehmen Sie an, dass das um die Ruhelage linearisierte System lautet

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)\,, \qquad \text{mit } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -p & -1 \\ 0 & -p \end{bmatrix}. \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte des Systems (2).

b) Was lässt sich anhand der Eigenwerte der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ bezüglich der Stabilität und Schwingungsfähigkeit des linearen Systems (2) um die Ruhelage für $p > 0$ und für $p < 0$ aussagen? Begründen Sie jeweils kurz, ob das linearisierte System schwingungsfähigkeit ist, welche Art der Ruhelagen vorliegt, und wie das Phasenportrait heißt.

c) Sei $p \neq 0$. Können Sie Ihre Ergebnisse aus b) hinsichtlich der Stabilität des linearisierten Systems (2) auf das nichtlineare System (1) übertragen? Begründen Sie.

(5 Punkte)

3. Aufgabe: DA-Systeme (20 Punkte)

Das Solow-Swan-Modell oder exogenes Wachstumsmodell ist ein ökonomisches Modell für langfristiges Wirtschaftswachstum. Eine modifizierte Version des Solow-Swan-Modells wird durch das DA-System (3) - (8) beschrieben.

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} H(t)^{\beta} \left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha-\beta} \tag{3}$$

$$L(t) = W A(t) e^{m \cdot t} \tag{4}$$

$$\dot{K}(t) = s_K Y(t) - \delta_K K(t) \tag{5}$$

$$\dot{H}(t) = s_H Y(t) - \delta_H H(t) \tag{6}$$

$$d_K K(t) = R(t)^2 \tag{7}$$

$$\dot{R}(t) = -\delta_R R(t) \tag{8}$$

Wobei gilt:

- $L(t)$ und $A(t)$ sind die Arbeitskraft bzw. die arbeitserweiternde Technologie.
- $K(t)$ und $H(t)$ sind das Wirtschafts- bzw. Humankapital.
- α und β sind die Elastizität des Outputs in Bezug auf das Kapital.
- $Y(t)$ und $R(t)$ sind die Gesamtproduktion bzw. die natürlichen Ressourcen.
- W ist das anfängliche Verhältnis von Arbeitskraft zu effektiver Arbeitskraft und m ist ihre relative Wachstumsrate.
- s_K und s_H sind die Raten der eingesparten Anteile für $K(t)$ bzw. $H(t)$.
- δ_K, δ_H und δ_R sind die Abschreibungsraten für $K(t)$, $H(t)$ bzw. $R(t)$.
- d_K ist die Abhängigkeitsrate von natürlichen Ressourcen.

3.1. a) Geben Sie an, welche Gleichungen des DA-Systems (3) - (8) differentiell und welche algebraisch sind.
b) Geben Sie an, welche im autonomen DA-System (3) - (8) auftretenden Größen differentielle Variablen, algebraische Variablen und Parameter sind. **(4 Punkte)**

3.2. a) Geben Sie die aus der Vorlesung bekannte Definition des *differentiellen Index* an.

b) Stellen Sie die Inzidenzmatrix des DA-Systems (3) - (8) auf und prüfen Sie damit, ob es ein Index-1-System vorliegen kann. Begründen Sie kurz.

Hinweis: Beschriften Sie die Zeilen und die Spalten der Inzidenzmatrix.

c) Können Sie die Anfangsbedingungen für das gegebene DA-System frei wählen? Begründen Sie kurz. **(5 Punkte)**

3.3. Bestimmen Sie den differentiellen Index des gegebenen DA-Systems (3) - (8). Geben Sie Zwischenschritte an und machen Sie versteckte Gleichungen explizit kenntlich. **(5 Punkte)**

3.4. Die Indexreduktion des Systems (3) - (8) ergibt ein überbestimmtes System.

a) Mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe 3.3, welche Gleichungen sollten Sie laut der Vorlesung wählen, um ein vollständig bestimmtes Index-1-System für die Simulation des Modells zu erhalten.

b) Geben Sie algebraische und differentielle Variablen Ihres Index-1-Systems explizit an.

c) Erstellen Sie die neue Inzidenzmatrix des gewählten DA-Systems.

d) Ausgehend von dem in Teilaufgabe 3.4 gewählten Index-1-System, wie viele Anfangsbedingungen sollten Sie wählen und für welche Variablen? **(5 Punkte)**

3.5. War es auf der Grundlage der Ergebnisse der vorherigen Teilaufgaben möglich, das ursprünglich vorgegebene ökonomische Modell direkt zu implementieren und zu simulieren, bevor der Systemindex analysiert wurde? Begründen Sie kurz. **(1 Punkt)**

4. Aufgabe: Strukturierte Systeme und hybride Automaten (21,5 Punkte)

Sie betrachten einen Soft-Close Mechanismus für Schubladen, siehe Abb. 2.

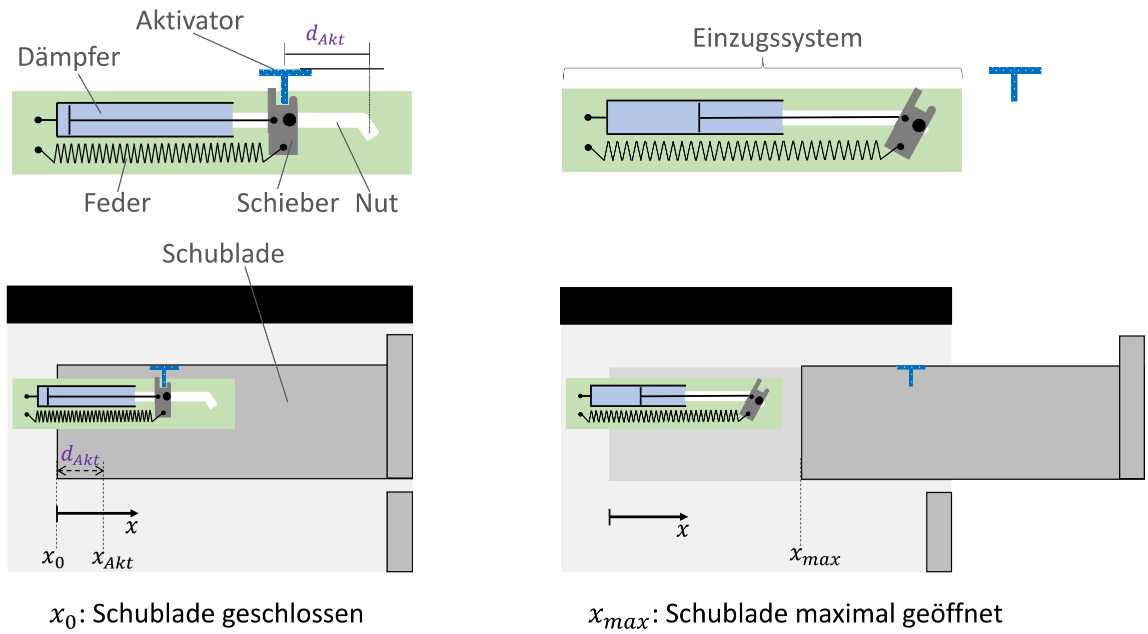

Abbildung 2: Soft-Close Schubladen System-Szenario.

Zur Funktionsweise:

- Der Mechanismus basiert auf einem gedämpften Einzugssystem, das fest im Schubladenschrank montiert ist und aus einer Einzugs-Feder, einem Dämpfer und einem Schieber besteht. An der Schublade ist ein Aktivator (Akt) montiert, der dazu dient, dass die Schublade beim Schließen sanft in die geschlossene Position geführt wird (Soft-Close). Die Masse des Aktivators ist im Vergleich zur Schublade sehr gering und vernachlässigbar.

- Die Schublade ist im geschlossenen Zustand an der Position $x = x_0$ und bei maximaler Öffnung an der Position $x = x_{max}$.

- Beim Ausziehen der Schublade wird der Schieber durch eine Nut in x-Richtung verschoben, wobei die Einzugs-Feder, der Arbeitskolben im Dämpfer und der Aktivator von dem Schieber mitgezogen werden. Die Nut ist so geformt, dass der Schieber am

Ende der Nut ($x_{Akt} - x_0 = d_{Akt}$) eine gekippte Position einnimmt, wodurch sich der Aktivator aus der Schieberhalterung löst. Die Schublade kann dann weiter bis zur Position x_{max} ausgezogen werden. Bei maximaler Öffnung kann die Schublade ein- bzw. ausgeräumt werden.

- Beim Schließen der Schublade erfolgt zunächst ein ungedämpftes Schließen. Wenn die Schublade die Position x_{Akt} erreicht, gelangt der Aktivator in die Schieberhalterung (Position $x = x_{Akt}$). Es erfolgt dann ein gedämpftes Schließen der Schublade. Die Einzugsfeder sorgt dafür, dass die Schublade in die Ausgangsposition x_0 gelangt.

Struktuierte Systeme

4.1. Erläutern Sie die Begriffe Dekomposition und Aggregation zur Strukturierung von Systemen gemäß der Vorlesung. **(2 Punkte)**

4.2. Beschreiben Sie die Eigenschaften von Speichersystemen und Verknüpfungssystemen gemäß der Vorlesung und erläutern Sie dabei den Unterschied zwischen den beiden Systemarten. **(2 Punkte)**

4.3. Strukturieren Sie das gegebene Soft-Close Schubladen System (vgl. Abb. 2) inklusive der Schublade für die Position $x \in [x_0, x_{Akt})$ in **drei** sinnvolle Teilsysteme. Ordnen Sie die Teilsysteme jeweils einer der beiden folgenden Kategorien zu: Speichersystem, Verknüpfungssystem. **(3 Punkte)**

Hybride Automaten

4.4. Sie möchten nun die Schublade mit dem Soft-Close Mechanismus modellieren. Stellen Sie die Funktionsweise der Schublade mit Soft-Close Mechanismus als einen hybriden Automaten mit vier sinnvollen Moden dar. Benennen Sie dabei die Moden eindeutig und verwenden Sie die Bezeichnungen aus der Beschreibung der Funktionsweise.
Hinweis: Sie müssen keine Zustandsgleichungen und Sprünge angeben. Berücksichtigen Sie für die Guards die Position der Schublade. **(7 Punkte)**

Implementierung in Modelica

4.5. Nennen Sie eine geeignete Hilfskonstruktion / einen geeigneten Befehl um die in einem hybriden Automaten dargestellten Übergänge zwischen verschiedenen Moden in Modelica zu implementieren. **(1 Punkt)**

4.6. Ergänzen Sie den Modelica-Code eines vereinfachten Schubladenmodells ohne Soft-Close Mechanismus (s. Modellica-Modell Nr. 1) mit den zwei Fällen:

i. Öffnen der Schublade bei Position $0 < x(t) < x_{max}$ mit den Zustandsgleichungen $\dot{x}(t) \ = v$ und $\dot{v}(t) = F$ mit dem Parameter $F = 3$;

ii. andernfalls gilt $\dot{x}(t) = 0$ und $\dot{v}(t) = 0$.

Gehen Sie davon aus, dass sich die Schublade zu Beginn an der Position $x(t = 0) = 0,01$ mit $\dot{x}(t = 0) = 0$ und $\dot{v}(t = 0) = 0$ befindet.

Hinweis: Deklarieren Sie Parameter explizit. Schreiben Sie **nicht** *in die Aufgabenstellung. Machen Sie kenntlich, welcher Code an welche Stelle gehört. Falls Sie die Modelica-Einheitenbezeichnungen nicht kennen, benutzen Sie einen generischen Typ.* **(6,5 Punkte)**

```
model Schublade
    parameter Real x_max = 0.5;
    // fehlender Code (1)
equation
    // fehlender Code (2)
end Schublade;
```

Modelica-Modell Nr. 1: Unvollständiges vereinfachtes Schubladenmodell.

5. Aufgabe: Sensitivitätsanalyse und Parameterschätzung (20 Punkte)

Sie untersuchen die Reaktion A $\longrightarrow$ B in einem Laborreaktor. A und B sind inkompressible Flüssigkeiten und nehmen das gesamte Reaktorvolumen V ein. Zudem bleibt die Gesamtstoffmenge n bei der Reaktion konstant. Die Reaktionsgeschwindigkeit wird über den Stoßfaktor k_0 und die Aktivierungsenergie E_A beschrieben. Um den Reaktor auf die Reaktortemperatur T zu heizen, ist ein Heizpilz mit der Temperatur T_w mit der Fläche A angebracht. Die Wärmezufuhr kann mithilfe des Wärmeübergangskoeffizienten α beschrieben werden. Das System wird über die Bilanzgleichung der Stoffmenge von A im Reaktor n_A und der Energiebilanz beschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
\dot{n}_\mathrm{A}(t) &= -k_0 \exp\left(-\frac{E_\mathrm{A}}{RT(t)}\right) n_\mathrm{A}(t) \\
\dot{T}(t) &= \frac{V(-\Delta h_\mathrm{R})}{nc_p} k_0 \exp\left(-\frac{E_\mathrm{A}}{RT(t)}\right) n_\mathrm{A}(t) - \frac{A\alpha}{nc_p} T(t) + \frac{A\alpha}{nc_p} T_\mathrm{w}
\end{aligned} \tag{9}
$$

R ist die universelle Gaskonstante mit dem Wert $8,314 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol \cdot K}}$.

5.1. Stellen Sie zunächst für das allgemeine System (10) die Definitionen der Zustands- und Ausgangssensivitäten sowie die Sensitivitätsgleichungen für die Parameter $\boldsymbol{p}$ auf.

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}(t)) \\
\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}(t)) \\
\boldsymbol{x}(0) &= \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{p})
\end{aligned} \tag{10}
$$

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass die Eingänge $\boldsymbol{u}(t)$ unabhängig von den Parametern $\boldsymbol{p}$ sind. Sie müssen keine Anfangsbedingungen angeben. **(3 Punkte)**

5.2. Betrachten Sie nun das System (9). Stellen Sie die beiden Matrizen auf, die auf der rechten Seite der Gleichung für die Zustandssensitivitäten bezüglich der Parameter k_0, E_A und Δh_R vorkommen. **(10,5 Punkte)**

Im Folgenden geht es um die Parameterschätzung von k_0 und E_A. Sie lassen die Reaktion bei verschiedenen Temperaturen ablaufen und ermitteln Werte für die temperaturabhängige Reaktionsgeschwindigkeitskonstante k, die durch folgende Gleichung beschrieben wird:

$$
k(T) = k_0 \exp\left(-\frac{E_\mathrm{A}}{RT}\right)
$$

In Tab. 3 sind die aus den Experimenten ermittelten Werte für k bei den Temperaturen T aufgelistet. Durch Multiplikation mit der Einheit s und anschließender Logarithmierung lässt sich eine Gleichung zwischen k, k_0 und E_A herleiten, die linear im Kehrwert der Temperatur $\frac{1}{T}$ ist:

$$\ln\left(k \cdot \mathsf{s}\right) = \ln\left(k_0 \cdot \mathsf{s}\right) - \frac{E_\mathrm{A}}{R}\frac{1}{T}$$

Damit lässt sich die logarithmierte Reaktionsgeschwindigkeitskonstante $\ln k$ als lineares Modell mit den Parametern $\boldsymbol{p} = \left[\ln\left(k_0 \cdot \mathsf{s}\right), \frac{-E_\mathrm{A}}{R}\right]^T$ und den Eingängen $\boldsymbol{u} = \left[1, \frac{1}{T}\right]^T$ betrachten.

T [K]	$k\ [\mathsf{s}^{-1}]$
700	$8,75 \cdot 10^{11}$
800	$8,86 \cdot 10^{11}$
900	$8,97 \cdot 10^{11}$

Tabelle 3: Messwerte

5.3. Stellen Sie das Gütemaß für ein allgemeines lineares Modell nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate auf. Wie lautet die notwendige Bedingung für die Minimierung der Summe der Fehlerquadrate? **(2 Punkte)**

5.4. Wie lautet die Normalengleichung für die Parameterschätzung eines linearen Modells? Berechnen Sie mit Hilfe der Werte aus Tab. 3 den Vektor $\tilde{\boldsymbol{y}}$ sowie die Matrix $\boldsymbol{A}$ für die Schätzung von $\ln k$ mit der Normalengleichung. Geben Sie 5 signifikante Stellen an. **(4,5 Punkte)**

Schriftliche Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Wintersemester 2022/2023

6. Aufgabe: Finite Differenzen (12 Punkte)

Betrachten Sie folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - 2y = 0 \quad \forall x, y \in [0, X] \times [0, Y]. \tag{1}$$

Diese Gleichung soll mit einem Finite-Differenzen-Verfahren auf einem strukturierten, äquidistanten Gitter der Schrittweite Δx bzw. Δy gelöst werden.

6.1. Stellen Sie die Taylorreihe für h am Punkt (x_{i-1}, y_j) entwickelt um Punkt (x_i, y_j) auf. Berücksichtigen Sie die ersten drei Glieder.

(2 Punkte)

6.2. Bestimmen Sie nun den Rückwärts-Finite-Differenzen-Ausdruck mit zwei Stützstellen für $\frac{\partial h}{\partial x}$. Geben Sie den Abbruchfehler und die Genauigkeitsordnung an.

(2,5 Punkte)

6.3. Stellen Sie eine diskrete Form von Gl. (1) auf. Nutzen Sie hierfür die zentralen Differenzenausdrücke für $\frac{\partial h}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$, welche wie folgt gegeben sind:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\Delta x}. \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{\Delta y^2}. \tag{3}$$

(2 Punkte)

6.4. Im nächsten Schritt ist das Rechengitter aus Abbildung 5 gegeben. Am unteren und linken Rand (Knoten $K_{1,1}, K_{1,2}, K_{1,3}, K_{1,4}, K_{2,1}, K_{3,1}, K_{4,1}$) hat die Funktion h einen konstanten Wert $h = 3$. Stellen Sie nun die Gleichung aus Aufgabe 6.3 für den Knoten $K_{2,2}$ auf und setzten Sie bekannte Werte ein.

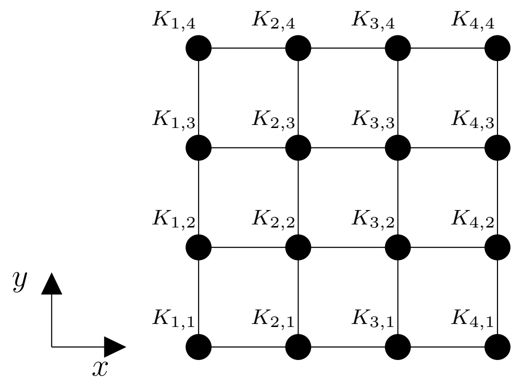

Abbildung 5: Rechengitter: Angabe der Knotennummerierung und der Struktur des Gitters

(2,5 Punkte)

6.5.

a) Nennen Sie die beiden aus der Vorlesung bekannten Typen von Randbedingungen.
b) Welche Randbedingung wird in Aufgabe 6.4 am unteren und linken Rand verwendet? Begründen Sie ihre Antwort.
c) Wie viele Unbekannte hat das in Aufgabe 6.4 beschriebene Problem?

(3 Punkte)

7. Aufgabe: Finite Elemente (12,5 Punkte)

Es ist der in Abbildung 6 gezeigte Balken gegeben. Das linke Ende des Balkens ist fest eingespannt. Das rechten Ende des Balkens wird um eine vorgeschriebene Strecke u_r verschoben. Die Verschiebung des Balkens $u(x)$ kann als eindimensionales Finite-Elemente-Problem modelliert werden.

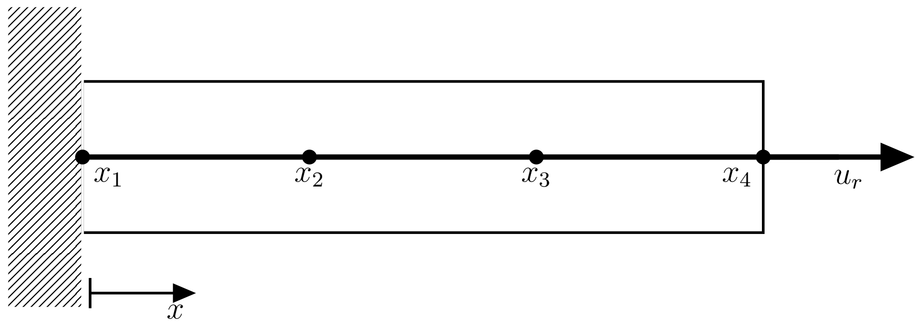

Abbildung 6: Eingespannter Balken.

Bei konstantem Elastizitätsmodul E und konstantem Balkenquerschnitt A, wird die axiale Verschiebung u des Balkens durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$EA\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = 0, \qquad x \in [x_1, x_4]. \tag{4}$$

7.1. Bilden Sie die schwache Form der Gleichung (4) und reduzieren Sie den maximalen Grad der auftretenden Ableitung mittels partieller Integration, sodass diese mit linearen Finiten-Element diskretisierbar ist. Identifizieren Sie im Weiteren alle gegebenen Randbedingungen und ordnen Sie diese den Ihnen aus der Vorlesung bekannten Kategorien für Randbedingungen zu. Nutzen Sie die Randbedingungen, um die schwache Form weiter zu vereinfachen. Begründen Sie alle Rechenschritte ausreichend, dass gilt auch für evtl. zuvernachlässigende Terme.

Hinweis: Der Zusammenhang zwischen Kraft und Verschiebung ist wie folgt gegeben:

$$F(x) = EA\frac{\partial u(x)}{\partial x}.$$

(5,5 Punkte)

7.2. Diskretisieren Sie jetzt die Verschiebung $u(x)$ unter Verwendung der linearen Interpolationsfunktionen $\phi_k(x)$ und den Einträgen des Lösungsvektors $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$. Anschließend diskretisieren Sie noch alle weiteren Größen die zur Diskretisierung der schwachen Form aus Aufgabe 7.1 nötig sind und setzen Sie die diskretisierten Größen in die schwache Form ein.

Bemerkung: *Für $\phi_k(x)$ muss keine Funktion aufgestellt werden.* **(3 Punkte)**

Mittels der Diskretisierung und Verwendung der Galerkin-Methode lässt sich die Gleichung in die Matrixschreibweise überführen:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}. \tag{5}$$

7.3. Durch welche Vorgehensweise ist die Galerkin-Methode gekennzeichnet?

(1 Punkt)

7.4. Die Matrixform aus Gleichung (5) lässt sich schematisch wie in Gleichung (6) gezeigt darstellen. Hierbei werden alle Einträge in **K**, **u** und **f**, die ungleich Null sind, durch ein • dargestellt. Der Vektor **u enthält** hierbei ebenfalls die bekannten Dirichlet Randwerte.

Damit das in Gleichung (6) gezeigte Schema zum beschriebenen Problem passt, müssen drei Einträge verändert werden. Geben Sie die drei Stellen an, welche verändert werden müssen. Den Punkt erhalten Sie nur in Verbindung mit einer **korrekten Begründung**. Verwenden Sie hierzu die Indexnotation um sich auf Einträge in **K** und **f** zu beziehen, bspw. $\mathbf{K}_{i,j}, \mathbf{f}_i$. Index i bezieht sich dabei auf die Zeilen und j auf die Spalten.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bullet & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \bullet \\ 0 \\ \bullet \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}} \tag{6}$$

(3 Punkte)

8. Aufgabe: Finite Volumen (13 Punkte)

Betrachten Sie im Folgenden die für eine skalare Größe $\phi\,(x, y, t)$ gegebene zweidimensionale, instationäre, partielle Differentialgleichung mit konstanten Parametern λ und $\mathbf{a}$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nabla} \phi - \lambda \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \phi = 0, \qquad \forall (x, y) \in \Omega, t \in [0, t_{final}]\,. \tag{7}$$

8.1. Bestimmen Sie die integrale Form der Gleichung im allgemeinen Gebiet Ω und vereinfachen Sie analytisch so weit wie möglich. Nutzen Sie den Satz von Gauss:

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{g}\, \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}s. \tag{8}$$

Beachten Sie, dass für eine skalarwertige Funktion f und einen konstanten Vektor $\mathbf{g}$ ebenfalls gilt:

$$\int_V \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\nabla} f\, \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \mathbf{g} \cdot f \mathbf{n}\, \mathrm{d}s. \tag{9}$$

(2 Punkte)

Auf der folgenden Seite ist nun ein aus gleichseitigen Dreiecken bestehende Auschnitt eines zweidimensionalen Gitters gegeben.

8.2. Zeichen Sie in den Gitterauschnitt das knotenzentrierte Kontrolvolumen V_0 um Φ_0 ein und stellen Sie die integrale Form für dieses Volumen V_0 auf. Sie können die Zeichnung innerhalb der Aufgabenstellung anfertigen. **(2 Punkte)**

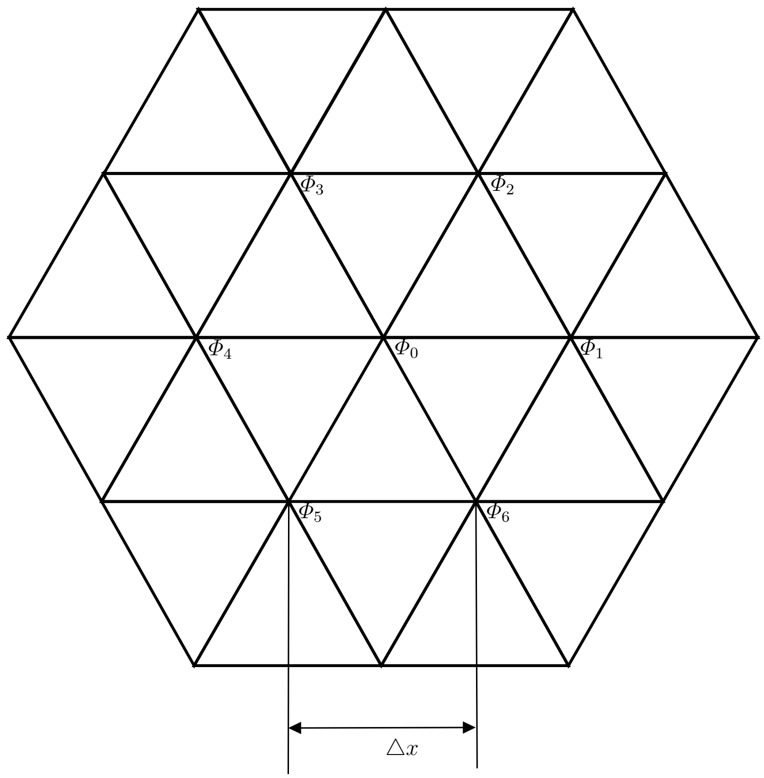

Abbildung 7: 2D Gitter.

8.3. Überführen Sie als nächstes alle Randterme für das Element V_0 nach der Ihnen bekannten Vorgehensweise in Summenform und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

Diskretisieren Sie anschließend die Flussterme unter Verwendung möglichst einfacher, zentraler Approximationen.

Hinweis: Die Flüsse entlang jeder einzelnen Randlinie sind konstant. Nehmen Sie die Randnormalen $\mathbf{n}_k$ *und die Kantenlaengen des Kontrolvolumens* Δs *als gegeben an.*

(5 Punkte)

8.4. Vervollständigen Sie die Diskretisierung der Gleichung in Abhängigkeit der gegebenen Größen. Verwenden Sie hierzu die Volumenmittelung und eine Euler-Rückwärts Zeitdiskretisierung.

Hinweis 1: Ein gleichseitiges Sechseck mit Kantenlänge l lässt sich in sechs gleichseitige Dreiecke mit Kantenlänge l zerlegen.
Hinweis 2: Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit Kantenlänge l beträgt $h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$.

(4 Punkte)

9. Aufgabe: Fehler (12,5 Punkte)

Gegeben sei die instationäre eindimensionale Diffusionsgleichung zur Modellierung des Transports einer chemischen Spezies ϕ auf dem Gebiet $x \in [0, 2]$ im Zeitraum $t \in [0, 5]$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0\,, \tag{10}$$

mit dem Diffusionskoeffizienten $\lambda = 1.6$. Die Gleichung kann mit dem folgenden expliziten Differenzenschema diskretisiert werden:

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} - \lambda \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0\,. \tag{11}$$

Gehen Sie dabei von einem äquidistanten Gitter aus

$$x_i = i \cdot \Delta x. \tag{12}$$

9.1. Bestimmen sie mit Hilfe der v. Neumann-Stabilitätsanalyse die Stabilitätsgrenze

des Verfahrens. Verwenden sie als Ansatz:

$$\phi(x, t) = V(t)e^{I(k \cdot x)}, \qquad I = \sqrt{-1}, \qquad k \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Hinweis: $e^{\pm I\phi} = \cos(\phi) \pm I \cdot \sin(\phi)$

(6 Punkte)

9.2. Die Diskretisierung aus Gleichung (11) soll auf einem Gitter mit 5 Elementen und mit einer Zeitschrittweite $\Delta t = 0.1$ durchgeführt werden.

Sollten sie Aufgabe nicht gelöst haben, verwenden sie die Stabilitätsgrenze $r = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$.

a) Warum ist die angegebene Diskretisierung nicht sinnvoll? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Wie müsste sinnvollerweise die Diskretisierung jeweils angepasst werden. Geben Sie je ein Beispiel für eine korrekte Wahl der Diskretisierung in Raum und Zeit an, halten Sie dabei alle weiteren Größen jeweils konstant. Beachten Sie die äquidistante Gitterschrittweite.

c) Welche Größe darf nicht verändert werden? Welche Fehlerart würde aus der Änderung dieser Größe resultieren.

(4,5 Punkte)

9.3. Wie kann das Diskretisierungsschema (11) modifiziert werden, dass ein bedingungslos stabiles Verfahren entsteht? Geben Sie das Diskretisierungsschema an und begründen Sie ihre Antwort. **(2 Punkte)**

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik

Wintersemester 2022/2023

1. Aufgabe: Fragen (17 Punkte)

* Lösung *

1.1. Lösung: Petri-Netze / endliche Automaten (1 TP)

Bewertung: Eine der beiden Antworten reicht aus. **(1 Punkt)**

1.2. Lösung: Nichtlineare Regression (0,5 TP), da die Ausgänge aufgrund der nichtlinearen Aktivierungsfunktion (0,5 TP) nichtlinear von den zu optimierenden Gewichten abhängt.

Bewertung: Siehe Oben. **(1 Punkt)**

1.3. Lösung: Nein, ein System mit nur einem Zustand kann keine komplex konjugierten Eigenwerte haben und ist daher nicht schwingungsfähig.

Bewertung: Siehe Oben. **(1 Punkt)**

1.4. Lösung: Der Unterschied zwischen konzentrierten und verteilten Systemen ist, dass konzentrierte Systeme ortsunabhängig (Beschreibung mittels gewöhnlicher Differentialgleichungen) (0,5 TP) und verteile Systeme ortabhängig sind (Beschreibung mittels partieller Differentialgleichungen) (0,5 TP).

Bewertung: Siehe Oben. Es kann entweder mit "ortsunabhängig" und "ortsabhängig" oder mit der Art der DGLs argumentiert werden. **(1 Punkt)**

1.5. Lösung: Potentialvariablen werden beim Verkoppeln gleich gesetzt (0,5 TP), Flussvariablen werden zu Null addiert (0,5 TP). Flussvariablen werden in Modelica durch das Schlüsselwort **`flow`** (0,5 TP) gekennzeichnet, für Potentialvariablen gibt es kein Schlüsselwort (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

1.6. Lösung:

a) Eine bestimmte Verteilung von Token nennt man Markierung. (1 TP)

b) P_1: 1 Token, P_2: 1 Token, P_3: 1 Token. (1,5 TP)

c) Ein Petri-Netz ist sicher, wenn in keiner einzigen Stelle P jemals mehr als ein maximale Anzahl von Token $n = 1$ ist. Das Petri-Netz ist also nicht sicher. (1,5 TP)

d) Es ist nicht erlaubt, zwei Stellen ohne eine Transition miteinander zu verknüpfen. (1 TP)

Bewertung: a) 1 TP für Stichwort Markierung. b) volle Punktzahl, nur wenn alle Stellen korrekt. c) 0,5 TP für richtige Antwort zu Sicherheit. 1 TP für korrekte Definition mit zeitlicher Einordnung. d) 1 TP bei Nennung der richtigen Regel. **(5 Punkte)**

1.7. Lösung: Die Leistung des „virtuellen Kamins" berechnet sich, unter der Annahme von Gleichstrom, über

$$\begin{aligned} \dot{W}_v &= U \cdot I && \text{(1 TP)} && (1)\\ &= 230\,\mathsf{V} \cdot 1{,}42\,\mathsf{A} && \text{(1 TP)} && (2)\\ &\approx 327\,\mathsf{W}. && \text{(1 TP)} && (3) \end{aligned}$$

Nun berechnen wir die Leistung des „realen Kamins". Die Leistung des „realen Kamins" berechnet sich entsprechend zu

$$\begin{aligned} \dot{W}_r &= V \cdot \rho \cdot k \cdot H_i && \text{(1 TP)} && (4)\\ &= V \cdot \rho \cdot k_0 \cdot \exp\left(\frac{-E_A}{\mathrm{R} \cdot T_V}\right) \cdot H_i && && (5)\\ &= 0{,}001\,\mathsf{m}^3 \cdot 460\,\frac{\mathsf{kg}}{\mathsf{m}^3} \cdot 0{,}002\,\frac{1}{\mathsf{s}} \\ &\quad \cdot \exp\left(\frac{-6672{,}8\,\frac{\mathsf{J}}{\mathsf{mol}}}{8{,}314\,\frac{\mathsf{J}}{\mathsf{K\,mol}} \cdot 800\,\mathsf{K}}\right) \cdot 15\,000\,\frac{\mathsf{kW\,s}}{\mathsf{kg}} && \text{(1 TP)} && (6)\\ &\approx 5\,\mathsf{kW} && \text{(1 TP)} && (7) \end{aligned}$$

Bewertung: Siehe oben. Für das Endergebnis werden jeweils 0,5 TP für den richtigen Wert und 0,5 TP für die richtige Einheit vergeben. **(6 Punkte)**

2. Aufgabe: Systemtheorie (21,5 Punkte)

* Lösung *

2.1. Lösung:

a) Das System ist autonom, da es keine Eingänge besitzt (1 TP)

b) Die Zustandsraumdarstellung lautet

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) \cdot \left[x_1(t)^2 + x_2(t)^2 - p\right] - \sin\left(x_2(t)\right) \qquad \text{(0,5 TP)} \tag{8}$$

$$\dot{x}_2(t) = 4 \cdot x_1(t)^3 + \sin\left(x_2(t)\right) \cdot \left[x_1(t)^2 + x_2(t)^2 - p\right] \qquad \text{(0,5 TP)} \tag{9}$$

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

2.2. Lösung:

a) $\mathcal{D}$ muss offen und zusammenhängend sein (0,5 TP). Außerdem muss $\mathbf{0} \in \mathcal{D}$ sein (0,5 TP).

b) Für V muss gelten:

(i) $V(\mathbf{0}) = 0$ (0,5 TP)

(ii) $V(\boldsymbol{x}) > 0$ für $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{0}\}$ (0,5 TP)

c) $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2k\pi \end{pmatrix}^T, k \in \mathbb{Z} \setminus 0 \right\}$ (1,5 TP)

Bewertung: Siehe oben. Für Mengen $\hat{\mathcal{D}} \subsetneq \mathcal{D}$, die die Bedingungen von a) erfüllen, z.B. $\hat{\mathcal{D}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, -2\pi < x_2 < 2\pi\}$, werden ebenfalls volle Punkte vergeben. **(3,5 Punkte)**

2.3. Lösung: Da V laut Aufgabenstellung eine positiv definite Funktion ist, muss noch gezeigt werden, dass $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{\boldsymbol{x}(t)}$ eine negativ definite Funktion auf der (noch unbekannten und von p abhängigen Menge) $\widetilde{\mathcal{D}}(p) \subseteq \mathcal{D}$ ist.
Wir folgen den Schritten aus Teilaufgabe 2.3.

i)

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{\boldsymbol{x}(t)} = \left.\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}(t)} \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right|_{t} \qquad \text{(0,5 TP)}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x_1(t)^3 & \sin(x_2(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \cdot [x_1(t)^2 + x_2(t)^2 - p] - \sin(x_2(t)) \\ 4 \cdot x_1(t)^3 + \sin(x_2(t)) \cdot [x_1(t)^2 + x_2(t)^2 - p] \end{pmatrix} \quad \text{(1 TP)}$$

$$= 4x_1(t)^4 \left[x_1(t)^2 + x_2(t)^2 - p\right] + \sin^2(x_2(t)) \left[x_1(t)^2 + x_2(t)^2 - p\right] \quad \text{(1 TP)}$$

$$= \underbrace{\left[4x_1(t)^4 + \sin^2(x_2(t))\right]}_{\text{„Faktor 1“}} \underbrace{\left[x_1(t)^2 + x_2(t)^2 - p\right]}_{\text{„Faktor 2“}} \quad \text{(1 TP)}$$

ii) Offensichtlich gilt $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{\boldsymbol{x}(t)=\mathbf{0}} = 0$, da $\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}} = \mathbf{0}$ die Ruhelage des Systems ist. Wir bestimmen nun alle Werte des Parameters p, sodass bei geeigneten $\boldsymbol{x}(t)$ die Ableitung $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{\boldsymbol{x}(t)} < 0$ ist. Weder „Faktor 1“ noch „Faktor 2“ darf gleich 0 sein. Da „Faktor 1“ immer größer gleich Null ist (0,5 TP), muss „Faktor 2“ kleiner Null sein (0,5 TP). Mit $\underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{\geq 0} - p \overset{!}{<} 0$ („Faktor 2“) und $p < 2\pi$ (siehe Aufgabenstellung) folgt

$$0 < p < 2\pi \quad \text{(0,5 TP).} \tag{10}$$

iii) Für $\widetilde{\mathcal{D}}(p)$ folgt z.B. entsprechend

$$\widetilde{\mathcal{D}}(p) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \Big| \underbrace{x_1^2 + x_2^2 < p}_{\text{„Faktor 2“}<0}, \quad \underbrace{-\pi < x_2 < \pi}_{\text{„Faktor 1“}\neq 0\text{, außer bei } \mathbf{0}} \right\} \quad \text{(1 TP).} \tag{11}$$

Bewertung: Siehe oben. Bei der Verwendung von “$\leq$ „ in den Mengen können maximal die Hälfte der TP erreicht werden **(6 Punkte)**

2.4. Lösung:

a) Die allgemeine Taylorentwicklung lautet

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_*)}_{\text{(0,5 TP)}} + \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big|_{\boldsymbol{x}_*}}_{\text{(0,5 TP)}} \underbrace{(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_*)}_{\text{(0,5 TP)}} + \underbrace{\text{T.h.O.}}_{\text{(0,5 TP)}} \tag{12}$$

b) Die Linearisierung des Systems (9) um den allgemeinen Punkt $\boldsymbol{x}_*$ berechnet sich zu

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \approx \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,*} \cdot \left[x_{1,*}^2 + x_{2,*}^2 - p\right] - \sin(x_{2,*}) \\ 4 \cdot x_{1,*}^3 + \sin(x_{2,*}) \cdot \left[x_{1,*}^2 + x_{2,*}^2 - p\right] \end{bmatrix}}_{\text{(1 TP)}}$$
$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 3x_{1,*}^2 + x_{2,*}^2 - p & 2x_{1,*}x_{2,*} - \cos(x_{2,*}) \\ 12x_{1,*}^2 + 2\sin(x_{2,*})x_{1,*} & \cos(x_{2,*}) \left[x_{1,*}^2 + x_{2,*}^2 - p\right] + 2\sin(x_{2,*})x_{2,*} \end{bmatrix}}_{\text{(2 TP)}} (\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_*) \tag{13}$$

Bewertung: In Gleichung (12) kann anstatt von „T.h.O." auch die unendl. Summe angegeben werden. Falls T.h.O. in Gleichung (13) angegeben werden, können maximal 2,5 TP für Gleichung (13) erreicht werden. **(5 Punkte)**

2.5. Lösung:

a) Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ lösen das charakteristische Polynom

$$\det\left(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}\right) = \det\begin{pmatrix} -p-\lambda & -1 \\ 0 & -p-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Dies führt zu dem quadratischen Polynom

$$(-\lambda - p)^2 = 0 \quad \text{(0,5 TP)},$$

welche die Lösung

$$\lambda = -p \quad \text{(0,5 TP)}$$

hat.

b)

$p > 0$: Da der doppelte Eigenwert einen Realteil < 0 hat, ist das linearisierte System asymptotisch stabil (0,5 TP). Es liegen keine komplex-konjugierten Eigenwerte vor. Das linearisierte System ist daher schwingungsunfähig (0,5 TP). Es handelt sich um einen stabilen Knoten (0,5 TP).

$p < 0$: Da der doppelte Eigenwert einen Realteil > 0 hat, ist das linearisierte System instabil (0,5 TP). Es liegen keine komplex-konjugierten Eigenwerte vor. Das linearisierte System ist daher schwingungsunfähig (0,5 TP). Es handelt sich um einen instabilen Knoten (0,5 TP).

c) Gemäß des Satzes von Hartmann-Grobmann kann man lokal die Dynamiken des linearisierten Systems auf die des nichtlinearen Systems abbilden, wenn $\boldsymbol{A}$ keinen Eigenwert mit Realteil 0 hat (0,5 TP). Dies ist in diesem Fall erfüllt, sodass Aussagen über das Verhalten des nichtlinearen Systems möglich sind (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(5 Punkte)**

3. Aufgabe: DA-Systeme (20 Punkte)

* Lösung *

3.1. Lösung: a) Die algebraischen Gleichungen sind (3), (4) und (7) (0,5 TP). Die differentiellen Gleichungen sind (5), (6) und (8) (0,5 TP).
b) Die differentiellen Variablen, algebraischen Variablen und Parameter lauten:

$$\boldsymbol{x}(t) = [K(t)\ \ H(t)\ \ R(t)]^T \qquad (1\ \text{TP}) \tag{14}$$

$$\boldsymbol{z}(t) = [Y(t)\ \ A(t)\ \ L(t)]^T \qquad (1\ \text{TP}) \tag{15}$$

$$\boldsymbol{p} = [\alpha\ \ \beta\ \ W\ \ m\ \ s_K\ \ \delta_K\ \ s_H\ \ \delta_H\ \ \delta_R\ \ d_K]^T \qquad (1\ \text{TP}) \tag{16}$$

Bewertung: Siehe oben. Wenn 2 der algebraischen Variablen, 2 der differentiellen Variablen und 7 der Parameter richtig gewählt sind, werden jeweils 0,5 TP gegeben. Doppelte Zuweisung eines Symbols ist mit 0 TP zu bewerten. **(4 Punkte)**

3.2. Lösung:

a) Die *Zahl der zeitlichen Ableitungen der algebraischen Gleichungen* (0,5 TP)(alle oder nur Teil), die für die *Herleitung von expliziten Dgln.* (0,5 TP) mit kontinuierlicher Funktion in der rechten Seite für alle algebraische Variablen eines DA-Systems erforderlich ist , wird differentieller Index des DA-Systems genannt (die Ausgänge betrachtet man nicht).

b) Inzidenzmatrix für das gegebene DA-System:

	$Y(t)$	$A(t)$	$L(t)$
(3)	$\times$	$\times$	$\times$
(4)		$\times$	$\times$
(7)			

Tabelle 1: Inzidenzmatrix für das gegebene DA-System (3)-(8) (2 TP).

Die *quadratische* Inzidenzmatrix hat einen strukturellen Rangdefekt (0,5 TP). Folglich liegt ein Index > 1 vor (es kann kein Index-1-System sein.) (0,5 TP).

c) Nein(0,5 TP). Das System hat einen *Index größer als 1* (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. Für die richtige Benennung der Zeilen und Spalten der Inzidenzmatrix werden 0.5 TP gegeben. Für jede richtige Gleichung bzw. Zeile werden 0.5 TP vergeben. **(5 Punkte)**

3.3. Lösung: Wir differenzieren (7) nach der Zeit:

$$d_K \dot{K}(t) = 2\dot{R}(t)R(t) \quad (1\text{ TP})$$

Wir setzen (5) und (8) ein und erhalten (0,5 TP):

$$d_K s_K Y(t) - d_K \delta_K K(t) = -2\delta_R R(t)^2 \quad (1\text{ TP}) \tag{p}$$

Daher ist Gl. (p) eine neue (versteckte) algebraische Gleichung (1 TP).
Nach einer zeitlichen Ableitung von (7) ist *nur noch eine zeitliche Ableitung* (0,5 TP) für die Herleitung von expliziten Dgln. mit kontinuierlicher Funktion in der rechten Seite für alle algebraischen Variablen eines DA-Systems erforderlich. Daher hat das ursprünglich gegebene DA-System einen *Index 2* (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(5 Punkte)**

3.4. Lösung: Es gibt die folgenden zwei möglichen Lösungen.

Lösung 1: a) Wir wählen die folgenden Gleichungen.
Algebraische Gleichungen: (3), (4), (7) und (p) (0.5 TP).
Differentialgleichungen: (5) und (6) (0,5 TP).
b) Algebraische Variablen: $\boldsymbol{z}(t) = [Y(t) \;\; A(t) \;\; L(t) \;\; R(t)]^T$ (0,5 TP).
Differentielle Variablen: $\boldsymbol{x}(t) = [H(t) \;\; K(t)]^T$ (0,5 TP).
c) Die neue Inzidenzmatrix ist:

	$Y(t)$	$A(t)$	$L(t)$	$R(t)$
(3)	×	×	×	
(4)		×	×	
(7)				×
(p)	×			×

Tabelle 2: Neue Inzidenzmatrix für das gewählte DA-System (2 TP).

d) Wir haben zwei Anfangsbedingungen (0,5 TP), $\boldsymbol{x}(0) = [H(0) \;\; K(0)]^T$ (0,5 TP).

Lösung 2: a) Wir wählen die folgenden Gleichungen.

Algebraische Gleichungen: ($\boxed{3}$), ($\boxed{4}$), ($\boxed{7}$) und ($\boxed{p}$) (0.5 TP).

Differentialgleichungen: ($\boxed{6}$) und ($\boxed{8}$) (0,5 TP).

b) Algebraische Variablen: $\boldsymbol{z}(t) = [Y(t) \;\; A(t) \;\; L(t) \;\; K(t)]^T$ (0,5 TP).

Differentielle Variablen: $\boldsymbol{x}(t) = [H(t) \;\; R(t)]^T$ (0,5 TP).

c) Die neue Inzidenzmatrix ist:

	$Y(t)$	$A(t)$	$L(t)$	$K(t)$
($\boxed{3}$)	×	×	×	×
($\boxed{4}$)		×	×	
($\boxed{7}$)				×
($\boxed{p}$)	×			×

Tabelle 3: Neue Inzidenzmatrix für das gewählte DA-System (2 TP).

d) Wir haben zwei Anfangsbedingungen (0,5 TP), $\boldsymbol{x}(0) = [H(0) \;\; R(0)]^T$ (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. Sollte durch die Auswahl von algebraischen und differentiellen Gleichungen in Aufgabenteil a) kein Index 1 System entstehen, werden Teil- und Folgepunkte für b)-d) vergeben. Die Benennung der Zeilen und Spalten der Inzidenzmatrix muss zu den Teilen a) und b) passen. Wenn dies gegeben ist, werden pro richtiger Zeile 0,5 TP vergeben. In d) kann die Nennung der Variablen für die Anfangsbedingungen auch indirekt, z.b. 'diff. Variablen' erfolgen, vorausgesetzt diese wurden zuvor richtig angegeben. **(5 Punkte)**

3.5. Lösung: Nein (0,5 TP), für das gegebene Index-2-System *war die freie Wahl der Anfangsbedingungen aufgrund der versteckten algebraischen Gleichungen nicht möglich* (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben.

Alternative Lösung: Ja, *spezielle Software* (0.5 TP) wie z.B. Dymola kann DA-Systeme mit Index > 1 *Umformen und direkt Lösen* (0.5 TP). Das ist allerdings nur bei kleineren Systemen praktikabel. **(1 Punkt)**

4. Aufgabe: Strukturierte Systeme und hybride Automaten (21,5 Punkte) * Lösung *

4.1. Lösung: Bei der Dekomposition handelt es sich um die Zerlegung (0,5 TP) eines Systems in seine Teilsysteme (0,5 TP). Die Aggregation beschreibt das Zusammenfügen (0,5 TP) von Teilsystemen zu größeren Systemen (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

4.2. Lösung: Speichersysteme sind Speicher von Materie, Engerie, Impuls und/oder anderen extensiven Größen (0,5 TP) und sind durch Zustandsgrößen, welche das Verhalten der Speicher wiedergeben, und "Bilanzgleichungen", die die Zu- und Abnahme der Speicher beschreiben, gekennzeichnet (0,5 TP). Verknüpfungssysteme hingegeben beschreiben die Übertragung von (extensiven) Flussgrößen zwischen Speichersystemen (0,5 TP) und können selber keine extensiven Größen speichern (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

4.3. Lösung: Drei Teilsysteme: Einzugssystem (Speichersystem), Schublade (Speichersystem), Akt (Verknüpfungssystem)

Bewertung: Jeweils 0,5 TP für richtige Nennung des Teilsystems und jeweils 0,5 TP für richtige Zuordnung. **(3 Punkte)**

4.4. Lösung:

Bewertung: Jede eindeutig benannte Mode: 0,5 TP (insgesamt 2 TP); Korrekte Zeichnung eines hybriden Automaten mit vier Moden: 1 TP, Sechs Kanten (mit richtigen Pfeilrichtungen): 1 TP (ab drei richtigen Kanten: 0,5 TP), Jeder Guard (Wert und Position): 0,5 TP (insgesamt 3 TP). **(7 Punkte)**

4.5. Lösung: Beispiele für Hilfskonstruktionen: "if-then-else", "when-then" **(1 Punkt)**

4.6. Lösung: Implementierung vereinfachtes Schubladenmodell:

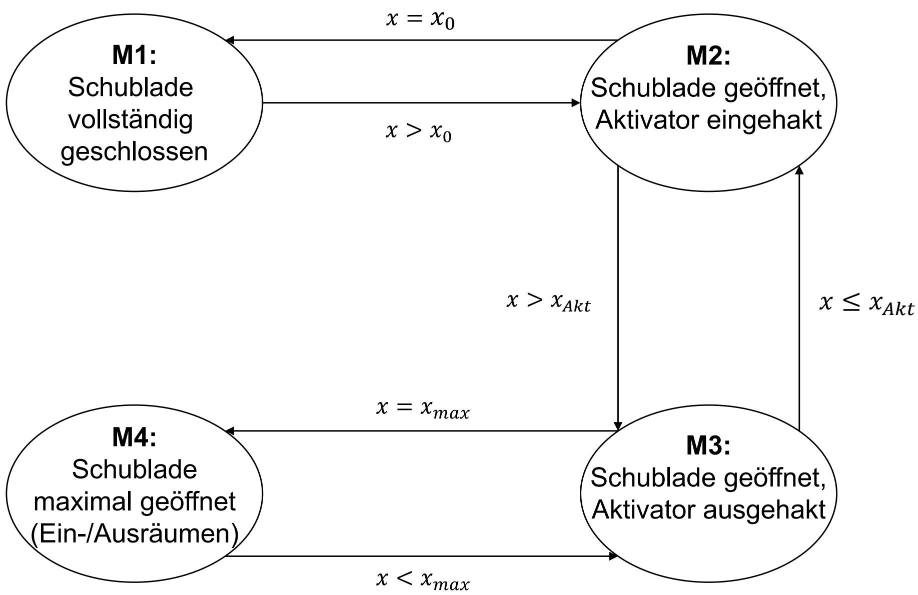

Abbildung 1: Hybrider Automat des Soft-Close Schubladen Mechanismus.

```
model Schublade
    parameter Real x_max = 0.5;
    // fehlender Code (1)
    Real x(start=0.01);                  // 1,0 TP
    Real v(start=0);                     // 0,5 TP
    parameter Real F = 3;                // 0,5 TP
equation
    // fehlender Code (2)
    if x > 0 and x < x_max then          // 1,5 TP
        der(x) = v;                      // 0,5 TP
        der(v) = F;                      // 0,5 TP
    else                                 // 0,5 TP
        der(x) = 0;                      // 0,5 TP
        der(v) = 0;                      // 0,5 TP
    end if;                              // 0,5 TP
end Schublade;
```

Modelica-Modell Nr. 2: Vollständiges vereinfachtes Schubladenmodell.

Bewertung: Teilpunkte werden nur mit Semikolon vergeben. Mehrfach fehlende Semikola werden als Folgefehler gewertet (vorausgesetzt, dass nicht an anderer Stelle ein Semikolon zu viel ist). Angabe des Startwertes für v ist nicht notwendig, da Default-Wert. Angabe des Startwertes für x gibt 0,5 TP. **(6,5 Punkte)**

5. Aufgabe: Sensitivitätsanalyse und Parameterschätzung (20 Punkte)
* Lösung *

5.1. Lösung: Die Sensitivitätsgleichungen für ein allgemeines System sind gegeben durch

$$\boldsymbol{S}^x = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}} \qquad \text{(0,5 TP)} \tag{17a}$$

$$\boldsymbol{S}^y = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}} \qquad \text{(0,5 TP)} \tag{17b}$$

$$\dot{\boldsymbol{S}}^x = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{S}^x + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{p}} \qquad \text{(1 TP)} \tag{17c}$$

$$\boldsymbol{S}^y = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{S}^x + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{p}} \qquad \text{(1 TP)} \tag{17d}$$

Bewertung: Siehe oben. Wird anstatt eines totalen Differentials ein partielles Differential verwendet, werden keine Punkte vergeben. Wird anstatt eines partiellen Differentials ein totales Differential verwendet, werden ebenfalls keine Punkte vergeben. **(3 Punkte)**

5.2. Lösung: Die Matrizen $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}$ und $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{p}}$ lauten:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial n_\mathrm{A}} & \frac{\partial f_1}{\partial T} \\ \frac{\partial f_2}{\partial n_\mathrm{A}} & \frac{\partial f_2}{\partial T} \end{pmatrix} \quad \text{(0,5 TP)}$$

mit

$$\frac{\partial f_1}{\partial n_\mathrm{A}} = -k_0 \exp\left(-\frac{E_\mathrm{A}}{RT}\right) \qquad \text{(0,5 TP)}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial T} = -k_0 \exp\left(-\frac{E_\mathrm{A}}{RT}\right) n_\mathrm{A} \frac{E_\mathrm{A}}{RT^2} \qquad \text{(1,0 TP)}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial n_\mathrm{A}} = \frac{V(-\Delta h_\mathrm{R})}{nc_p} k_0 \exp\left(-\frac{E_\mathrm{A}}{RT}\right) \qquad \text{(1,0 TP)}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial T} = \frac{V(-\Delta h_\mathrm{R})}{nc_p} k_0 \exp\left(-\frac{E_\mathrm{A}}{RT}\right) n_\mathrm{A} \frac{E_\mathrm{A}}{RT^2} - \frac{A\alpha}{nc_p} \qquad \text{(1,5 TP)}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial k_0} & \frac{\partial f_1}{\partial E_\mathrm{A}} & \frac{\partial f_1}{\partial \Delta h_\mathrm{R}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial k_0} & \frac{\partial f_2}{\partial E_\mathrm{A}} & \frac{\partial f_2}{\partial \Delta h_\mathrm{R}} \end{pmatrix} \quad \text{(0,5 TP)}$$

mit

$$\frac{\partial f_1}{\partial k_0} = -\exp\left(-\frac{E_\mathrm{A}}{RT}\right) n_\mathrm{A} \qquad \text{(0,5 TP)}$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial E_\mathrm{A}} = k_0 \exp\left(-\frac{E_\mathrm{A}}{RT}\right) n_\mathrm{A} \frac{1}{RT} \qquad \text{(1,0 TP)}$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial \Delta h_\mathrm{R}} = 0 \qquad \text{(0,5 TP)}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial k_0} = \frac{V(-\Delta h_\mathrm{R})}{n c_p} \exp\left(-\frac{E_\mathrm{A}}{RT}\right) n_\mathrm{A} \qquad \text{(1,0 TP)}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial E_\mathrm{A}} = -\frac{V(-\Delta h_\mathrm{R})}{n c_p} k_0 \exp\left(-\frac{E_\mathrm{A}}{RT}\right) n_\mathrm{A} \frac{1}{RT} \qquad \text{(1,5 TP)}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial \Delta h_\mathrm{R}} = -\frac{V}{n c_p} k_0 \exp\left(-\frac{E_\mathrm{A}}{RT}\right) n_\mathrm{A} \qquad \text{(1,0 TP)}$$

Bewertung: Siehe oben. Die ersten 0,5 TP werden für die richtige Dimension sowie die mathematisch korrekte Schreibweise gegeben (Matrix mit offener und geschlossener Klammmer). Je ein halber TP für die richtige äußere Ableitung eines Terms und 0,5 TP fuer die Richtige innere Ableitung. **(10,5 Punkte)**

5.3. Lösung:

Die Gütefunktion für das Parameterschätzproblem eines linearen Modells lautet:

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{p}) &= \sum_{k=1}^{n_t} \left(\tilde{y}_k - g(u_k, \boldsymbol{p})\right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n_t} \left(\tilde{y}_k - \sum_{j=1}^{n_p} a_j(u_k) p_j\right)^2 \\ &= \left(\tilde{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}\right)^T \left(\tilde{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}\right) \quad \text{(1 TP)} \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für die Minimierung der Summe der Fehlerquadrate lautet:

$$\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\right|_{\boldsymbol{p}} = 0 \quad \text{(1 TP)}$$

Bewertung: Beim ersten TP ist für die rechte Seite die Angabe einer der Zeilen ausreichend. Den vollen TP kann es nur geben, wenn die Gleichung ein Gleichheitszeichen enthält. Darüber hinaus muss die Laufvariable im Index von $\tilde{y}$ enthalten sein. **(2 Punkte)**

5.4. Lösung: Die Normalengleichung lautet:

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}^T \tilde{\boldsymbol{y}}$$

$$\boldsymbol{p} = \left(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{A}^T \tilde{\boldsymbol{y}} \quad \text{(1 TP)}$$

Die beiden Matrizen lauten:

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \ln\left(8,75 \cdot 10^{11}\mathsf{s}^{-1}\mathsf{s}\right) \\ \ln\left(8,86 \cdot 10^{11}\mathsf{s}^{-1}\mathsf{s}\right) \\ \ln\left(8,97 \cdot 10^{11}\mathsf{s}^{-1}\mathsf{s}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27,497 \\ 27,510 \\ 27,522 \end{pmatrix} \qquad \text{(1,5 TP)}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{700}\frac{1}{\mathsf{K}} \\ 1 & \frac{1}{800}\frac{1}{\mathsf{K}} \\ 1 & \frac{1}{900}\frac{1}{\mathsf{K}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1,4286 \cdot 10^{-3}\frac{1}{\mathsf{K}} \\ 1 & 1,2500 \cdot 10^{-3}\frac{1}{\mathsf{K}} \\ 1 & 1,1111 \cdot 10^{-3}\frac{1}{\mathsf{K}} \end{pmatrix} \qquad \text{(2 TP)}$$

Bewertung: Für die Normalengleichung kann es nur 1 TP geben, wenn die Gleichung richtig ist und ein Gleichheitszeichen enthält. Bei $\boldsymbol{A}$ gibt es 0,5 TP für die erste Spalte und jeweils 0,5 TP für jeden Eintrag in der zweiten Spalte. Wird in $\tilde{\boldsymbol{y}}$ nur der Logarithmus bzw in der zweiten Spalte von $\boldsymbol{A}$ nur der Bruch angegeben, können jeweils nur 0,5 TP gegeben werden. **(4,5 Punkte)**

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Wintersemester 2022/2023

6. Aufgabe: Finite Differenzen (12 Punkte)

* Lösung *

6.1. Lösung:

$$h_{i-1,j} \approx h_{i,j} - \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x_i,y_j} \Delta x + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right|_{x_i,y_j} \Delta x^2 + \ldots \tag{1}$$

Richtiger Entwicklungspunkt und Ungleichzeichen oder +... 0.5

Richtiger Auswertepunkt 0.5

2. Term 0.5

3. Term 0.5

$\frac{2}{2}$

6.2. Lösung:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x_i,y_j} \approx \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{\Delta x} \underbrace{+ \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right|_{x_i,y_j} \Delta x}_{Abbruchfehler} \tag{2}$$

Linke Seite und Ungleichzeichen oder +... : 0.5

Richtiger Ausdruck Differenzenstern 0.5

Richtiger Ausdruck für den Abbruchfehler 0.5

Richtige Makierung des Abbruchsfehlers 0.5

Der Ausdruck ist 1. Ordnung genau. 0.5 $\frac{2.5}{2.5}$

6.3. Lösung:

$$\frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{\Delta y^2} - 2y_j = 0. \tag{3}$$

Einsetzen der gegebenen Terme 1

Für y mit Index 1 $\frac{2}{2}$

6.4. Lösung:

$$\frac{h_{3,2} - h_{1,2}}{2\Delta x} + \frac{h_{2,3} - 2h_{2,2} + h_{2,1}}{\Delta y^2} - 2y_2 = 0. \tag{4}$$

Einsetztten der bekannten Größen

$$\frac{h_{3,2} - 3}{2\Delta x} + \frac{h_{2,3} - 2h_{2,2} + 3}{\Delta y^2} - 2y_2 = 0. \tag{5}$$

Jeder richtige Term mit Indizes jeweils 0.5

Einsetzen der Randbedingung jeweils 0.5 $\frac{2.5}{2.5}$

6.5. Lösung:

a) Dirichlet 0.5 und Neumann 0.5 Randbedingung

b) Dirichlet 0.5 : Die Dirichlet-Randbedingung geben Werte der Variablen am Rand des betrachteten Gebiets vor, hier h=3. 0.5 .

c) 9 oder 3, da Aufgabenstellung nicht Eindeutig 1 $\frac{3.0}{3.0}$

$$\sum_{A1} = \frac{12}{12}$$

7. Aufgabe: Finite Elemente (12.5 Punkte)

* Lösung *

7.1. Lösung: Aus der starken Form können wir durch Integration über das Rechengebiet und Multiplikation mit der Testfunktion $w(x)$ die schwache Form der Gleichung herleiten.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \qquad x \in [x_1, x_4] \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{7}$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_4} w(x)\left(EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall w(x). \tag{8}$$

+ Multiplikation mit Testfunktion $w(x)$. 0.5

+ $\forall w(x)$ 0.5 .

+ Integrale Form mit richtigen Grenzen, dx und vollständige Gleichung vorhanden. 0.5

Anwendung der partiellen Integration zur Reduzierung des Grad der Ableitung:

$$\int_{x_1}^{x_4} w(x)\left(EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall w(x), \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow -E\,A\int_{x_1}^{x_4} \frac{\partial w(x)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \left[w(x)\,E\,A\,\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x_1}^{x_4} = 0. \tag{10}$$

+ Korrekter integraler Ausdruck (inkl Vorzeichen) 0.5 ,

+ korrekter Ausdruck für Randterme (inkl Vorzeichen+Grenzen) 0.5 .

Identifizieren von Randbedingungen und Begründung das die **Testfunktion** per Definition bei Dirichlet RB null ist:

Linker Rand:

+ Dirichlet RB bei x_1, d.h. $u(x_1) = 0$ 0.5

+ Testfunktion ist bei Dirichlet-RB null, d.h. $w(x_1) = 0$ 0.5

Rechter Rand:

+ Dirichlet RB bei x_4, d.h. $u(x_4) = u_r$ 0.5

+ Testfunktion ist bei Dirichlet-RB null, d.h. $w(x_4) = 0$ 0.5

Setzen wir beide Randbedingungen in die schwache Form ein:

$$-E\,A \int_{x_1}^{x_4} \frac{\partial w(x)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}x = 0. \quad 1 \tag{11}$$

Den letzten Punkt erhält man nur, bei formal korrekter Gleichung. $\frac{5.5}{5.5}$

7.2. Lösung: Die gesuchte Funktion $u(x)$ kann mittels der Interpolationsfunktionen und den bekannten Werten an den Knotenpunkte wie folgt geschrieben werden:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{4} \phi_k(x)\, u_k. \quad 1 \tag{12}$$

Damit ergibt sich die Ableitung zu:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} u_k. \quad 1 \tag{13}$$

Einsetzen in die schwache Form ergibt:

$$\sum_{k=1}^{4} -E\,A \int_{x_1}^{x_4} \frac{\partial w(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} u_k \mathrm{d}x = 0. \quad 1 \tag{14}$$

Die Punkte werden nur dann gegeben, wenn die Summe in den Gleichungen mit korrekten Indize gegeben sind, sowie die richtigen Variabeln für Interpolationsfunktionen und Unbekannte verwendet werden, d.h. ϕ und $\mathbf{u}$

$\frac{3}{3}$

7.3. Lösung: Galerkin Ansatz: Für die Testfunktion $w(x)$ und die Lösungsfunktion $u(x)$ werden die gleichen Interpolationsfunktionen $\phi_k(x)$ verwendet 1 . $\frac{1}{1}$

7.4. Lösung: Da bei x_1 und x_4 eine Dirichlet Randbedingung vorliegt haben wir nur zwei Unbekannte: u_2 und u_3. Da die bekannten Verschiebungen u_1 und u_4 allerdings im Vektor $\mathbf{u}$ enthalten sein sollen hat auch die Matrix $\mathbf{K}$ die Dimensionen 4x4. Die entsprechenden Gleichungen sind also $u_1 = 0$ und $u_4 = u_r$. Daraus ergibt sich die Matrix:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -EA\int_{x_1}^{x_4} \frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\mathrm{d}x & -EA\int_{x_1}^{x_4} \frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\mathrm{d}x & -EA\int_{x_1}^{x_4} \frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial x}\mathrm{d}x & 0 \\ 0 & -EA\int_{x_1}^{x_4} \frac{\partial\phi_3}{\partial x}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\mathrm{d}x & -EA\int_{x_1}^{x_4} \frac{\partial\phi_3}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial x}\mathrm{d}x & -EA\int_{x_1}^{x_4} \frac{\partial\phi_3}{\partial x}\frac{\partial\phi_4}{\partial x}\mathrm{d}x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{bzw.} \tag{15}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \bullet & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix} \; 2 \tag{16}$$

Einen Pkt. für Erkennen von $K_{3,1} = 0$, aber nur wenn eine Begründung vorliegt. Begründung: Es gibt kein Teilgebiet des Rechengebiets, auf dem das Produkt von $\phi_1(x)$ und $\phi_3(x)$ ungleich 0 ist.

Einen Pkt. für Erkennen von $K_{4,3} = \bullet$, aber nur wenn eine Begründung vorliegt. Begründung: Der Wert $u_4(x)$ ist nur vom gegebenen Dirichlet-Wert abhängig, der mit u_r bekannt ist und in der rechten Seite auftaucht.

Der Lösungsvektor lautet: $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$. Die rechte Seite ergibt sich zu:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_r \end{pmatrix} \; 1 \tag{17}$$

Hier gibt es einen Pkt. um zuerkennen, dass es keine gegebenen Einträge für u_2 gibt, d.h. $f_2 = 0$. $f_1 = 0$ ist korrekt, da der Balken fest eingespannt ist und somit die Verschiebung an dieser Stelle null ist. $\frac{3}{3}$

$$\sum_{A2} = \frac{12.5}{12.5}$$

8. Aufgabe: Finite Volumen (13 Punkte)

* Lösung *

8.1. Lösung:

Integrale Form und Umformen mit Satz von Gauss:

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi\,\mathrm{d}\Omega - \lambda\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi)\,\mathrm{d}\Omega = 0, \qquad 1 \tag{18}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{a}\phi\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s - \lambda\oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = 0. \qquad 1 \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

$\frac{2}{2}$

8.2. Lösung:

Zeichung auf dem Blatt 1

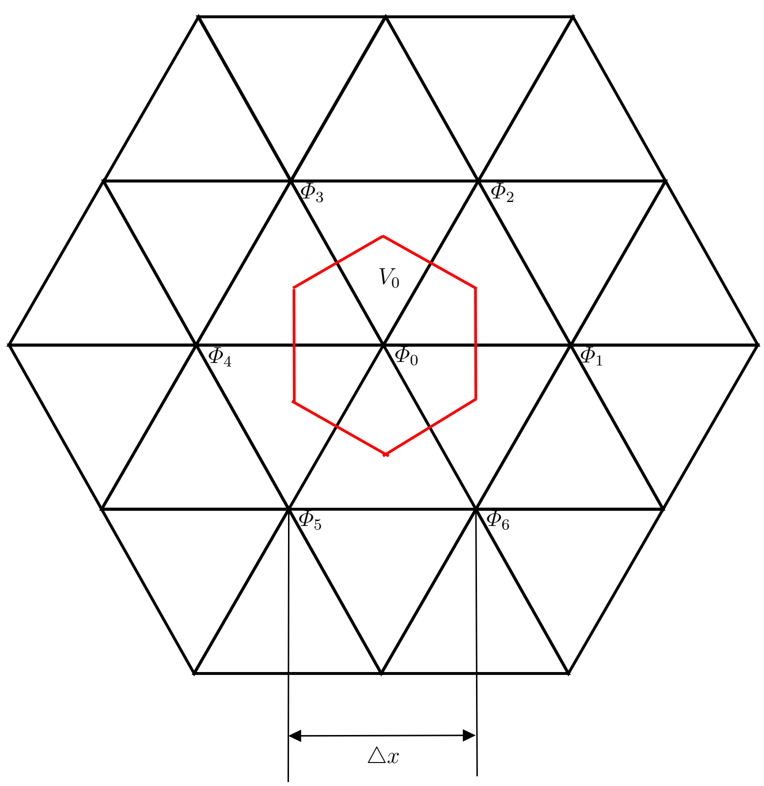

Abbildung 1: 2D Gitter mit V_0

Integrale Form angewendet auf V_0:

$$\int_{V_0} \frac{\partial \phi}{\partial t} \,\mathrm{d}V + \oint_{\partial V_0} \mathbf{a}\phi \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}s - \lambda \oint_{\partial V_0} \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}s = 0. \quad 1 \tag{21}$$

$\frac{2}{2}$

8.3. Lösung:

Vereinfachung der Randintegrale jeweils durch Summation über stückweise lineare Kanten (∂V). Unter Benutzung von Mittelung können die gesuchten Größen des ersten Integrals auf dem Rand bestimmt werden:

$$\oint_{\partial V_0} \mathbf{a}\phi \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}s = \sum_{j=1}^{6} \mathbf{a}\phi_{0,j} \cdot \mathbf{n}_j \Delta s \quad 1 \tag{22}$$

$$\approx \sum_{j=1}^{6} \mathbf{a}\frac{1}{2}\left(\phi_0 + \phi_j\right) \cdot \mathbf{n}_j \Delta s \quad 1 \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

Verwendung der Richtungsableitung sowie zentraler Differenzen liefert entsprechend für den zweiten Term:

$$\lambda \oint_{\partial V_0} \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}s = \lambda \sum_{j=1}^{6} \int_{(\partial V_0)_j} \boldsymbol{\nabla}\phi_{0,j} \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}s_j \quad 1 \tag{25}$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{6} \left(\boldsymbol{\nabla}\phi_{0,j} \cdot \mathbf{n}\right)\Big|_j \Delta s \quad 1 \tag{26}$$

$$\approx \lambda \sum_{j=1}^{6} \frac{\phi_j - \phi_0}{\Delta x} \Delta s \quad 1 \tag{27}$$

$$\tag{28}$$

$\frac{5}{5}$

8.4. Lösung:

Bestimmen des Flächeninhaltes von V_0:

$$|V_0| = 6l\frac{1}{2}h = 6\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}l^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\Delta s^2 \quad 1 \tag{29}$$

oder mit:

$$\Delta s = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta x => \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta x^2 \tag{30}$$

Vereinfachung der Zeitableitung durch Volumenmittelung:

$$\int_{V_0} \frac{\partial \phi}{\partial t}\,\mathrm{d}V = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0} \phi\,\mathrm{d}V \approx \frac{\partial}{\partial t}\phi_0 \int_{V_0} \mathrm{d}V \qquad 1 \tag{31}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\phi_0 \frac{3\sqrt{3}}{2}\Delta s^2 \qquad 0.5 \tag{32}$$

Mit implizietem Euler ergibt sich:

$$\frac{\phi_0^{n+1} - \phi_0^n}{\Delta t}\frac{3\sqrt{3}}{2}\Delta s^2 + \sum_{j=1}^{6} \mathbf{a}\frac{1}{2}\left(\phi_0^{n+1} + \phi_j^{n+1}\right)\cdot \mathbf{n}_j \Delta s - \lambda \sum_{j=1}^{6} \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_0^{n+1}}{\Delta x}\Delta s \tag{33}$$

1 für richtige approximation der zeitableitung 0.5 fuer richtiges zeit level bei den Flußtermen $\frac{4}{4}$

$$\sum\nolimits_{A3} = \frac{13}{13}$$

9. Aufgabe: Fehler (12.5 Punkte)

* Lösung *

9.1. Lösung: Das Einsetzen des Ansatzes an den Stützstellen, z.B.

$$\phi_i^n = \phi(x_i, t^n) = V(t^n)e^{I(k\cdot x_i)} = V^n e^{I(k\cdot i\cdot\Delta x)}, 1 \tag{34}$$

ergibt

$$\frac{V^{n+1}-V^n}{\Delta t}e^{I(k\cdot i\cdot\Delta x)} - \frac{\lambda V^n}{\Delta x^2}(e^{I(k\cdot(i+1)\cdot\Delta x)} - 2e^{I(k\cdot i\cdot\Delta x)} + e^{I(k\cdot(i-1)\cdot\Delta x)}) = 0 \,. 1 \tag{35}$$

Durch Auflösen nach $\frac{V^{n+1}}{V^n}$ folgt

$$\frac{V^{n+1}}{V^n} = 1 + \frac{\Delta t\lambda}{\Delta x^2}\left(e^{Ik\Delta x} - 2 + e^{-Ik\Delta x}\right) . 1 \tag{36}$$

Unter Verwendung der Euler'schen Formel $e^{\pm I\Phi} = cos(\Phi) \pm I sin(\Phi)$ und der Stabilitätsbedingung $\left|\frac{V^{n+1}}{V^n}\right| \leq 1$ 0.5 erhält man

$$\left|\frac{V^{n+1}}{V^n}\right| = \left|1 + \underbrace{\frac{\Delta t\lambda}{\Delta x^2}\cdot 2\cdot \underbrace{\left(\underbrace{cos(k\Delta x)}_{[-1,1]\,0.5} -1\right)}_{[-2,0]}}_{[-4,0]\,1}\right| \leq 1 \tag{37}$$

und daraus

$$r = \frac{\lambda\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}. 1 \tag{38}$$

$\frac{6}{6}$

9.2. Lösung:

a) Mit der von Neumann-Zahl $r = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$ erhält man für die angegebene Disretisierung und den vorgebenen Diffusionskoeffizienten:

$$r = \frac{1.6 \cdot 0.1}{(0.4)^2} = 1 > \frac{1}{2}, \tag{39}$$

d.h. die Stabilitätsgrenze wird nicht eingehalten. 1

b) Die für eine stabile Lösung maximale Zeitschrittweite kann wie folgt berechnet werden:

$$\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t_{stabil} \leq \frac{\Delta x^2}{2\lambda} = \frac{(0.4)^2}{2\lambda} = 0.05s \quad 1. \tag{40}$$

Analog ergibt sich für die räumliche Diskretisierung:

$$\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta x_{stabil} \geq \sqrt{2\lambda \Delta t} \approx 0.5657m. \tag{41}$$

Da eine äquidistante Diskretisierung gefordert ist, darf das Gebiet ($L = 2m$) mit maximal 3 Elementen diskretisiert werden. 1

c) Der Diffusionskoeffizient λ darf nicht angepasst werden. 0.5 Dies würde zu einem Modellierungsfehler führen. 1

$\frac{4.5}{4.5}$

9.3. Lösung: Das Verfahren könnte zu einem impliziten Verfahren (Euler-Rückwärts Verfahren) verändert werden:

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} - \lambda \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \,. \, 1 \tag{42}$$

Implizite Verfahren sind unbedingt stabil. 1

$\frac{2}{2}$

$$\sum\nolimits_{A4} = \frac{12.5}{12.5}$$