RWTH Aachen · AVT **Systemverfahrenstechnik** · 52056 Aachen · **Prof. Alexander Mitsos, Ph.D.**

Schriftliche Prüfung: Aufgaben des AVT-Teils. Jeder Punkt entspricht 1 Minute.

Simulationstechnik

Wintersemester 2023/2024

1. Aufgabe: Fragenteil (20 Punkte)

1.1. Lea (5 Jahre alt) baut aus ihren Klemmbausteinen Spielzeug-Autos und spielt damit ein Autorennen nach, um zu sehen welche Bauweise die höchste Geschwindigkeit ermöglicht. Entspricht dieser Sachverhalt einer Simulation in der Definition nach Shannon (1975)? Begründen Sie. **(2 Punkte)**

1.2. Nennen Sie das Abtasttheorems nach Shannon. **(2 Punkte)**

1.3. Sie möchten ein hybridese, diskret-kontinuierliches System modellieren. Nennen Sie dafür die **beiden** in der Vorlesung behandelten Methoden zur Implementierung von diskretem Verhalten. **(1 Punkt)**

1.4. In der Vorlesung haben Sie das explizite und das implizite Euler-Verfahren kennengelernt. Nennen Sie **ein** weiteres Verfahren zur numerischen Lösung eines Anfangswertproblems. **(1 Punkt)**

1.5. Sie wollen ein Anfangswertproblem in Modelica implementieren. Wo und wie geben Sie die Startwerte im Code an? Schreiben Sie den Code für den Fall, dass Sie der Variable x den Startwert 2 geben möchten. Was wird passieren, wenn Sie die Startwerte weglassen? **(2 Punkte)**

1.6. Was sind die Freiheitsgrade eines Systems? Wie lassen sie sich klassifizieren? **(2 Punkte)**

1.7. Wie viele Anfangsbedingungen braucht man höchstens für ein Index-2 DA-System mit 8 differentiellen und 3 algebraischen Variablen? **(1 Punkt)**

1.8. Beschreiben Sie grob die experimentelle Methode, die zur Bestimmung der Stabilität genutzt wird. **(1 Punkt)**

1.9. Wenn Sie künstliche neuronalen Netzwerk trainieren, teilen Sie zunächst Ihren Datensatz in mehrere Teile auf.

a) Wie werden dabei die drei Teile genannt?

b) Welcher ist üblicherweise der größte Teil?

(2 Punkte)

1.10. Als Teil des maschinellen Lernens haben Sie das überwachte Lernen kennengelernt.

a) Was ist der Unterschied zwischen Regression und Klassifizierung?

b) Benennen Sie **eine** Anwendung für die Regression und **eine** Anwendung für die Klassifizierung.

(3 Punkte)

1.11. Schreiben Sie die nichtlineare zeitinvariante Zustandsraumdarstellung auf (inklusive der Startwerte). Machen Sie die Zeitabhängigkeit von Symbolen kenntlich. **(3 Punkte)**

2. Aufgabe: Systemtheorie (20 Punkte)

2.1. Betrachten Sie die *allgemeine* Funktion $V : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.

a) Welche Eigenschaften muss $\mathcal{D}$ für die Anwendung der direkten Ljapunow-Methode aufweisen?

b) Nennen Sie die zwei Bedingungen die V erfüllen muss, damit V positiv definit auf $\mathcal{D}$ ist. Nehmen Sie an, dass die Menge $\mathcal{D}$ die Bedingungen aus a) erfüllt.

(2 Punkte)

Betrachten Sie für die folgenden Teilaufgaben 2.2 bis 2.4 das System

$$\dot{x}(t) = -x(t) + x(t)^3. \tag{1}$$

2.2. Berechnen Sie die Ruhelagen des Systems (1). Geben Sie Ihren Rechenweg explizit an.
(2 Punkte)

2.3. Wählen Sie eine geeignete Ljapunow-Funktion V aus, um die Ruhelage $\boldsymbol{x}_R = 0$ zu analysieren und bestimmen Sie die Ableitung $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{\boldsymbol{x}(t)}$. Was muss nach der direkten Ljapunow-Methode für die Ableitung $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{\boldsymbol{x}(t)}$ gelten, damit Sie die lokale Stabilität der Ruhelage nachweisen können? **(4 Punkte)**

2.4. Bestimmen Sie die Nullstellen von $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{\boldsymbol{x}(t)}$ und skizzieren Sie anhand dieser den Verlauf von $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{\boldsymbol{x}(t)}$ qualitativ. Geben Sie zudem eine Menge $\mathcal{D}$ an, welche die Eigenschaften aus 2.1 a) für Ihre gewählte Ljapunow-Funktion V erfüllt.

(5 Punkte)

2.5. Gegeben ist ein neues System:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 3x_1(t) - x_2(t) \cdot \cos\left(x_2(t)\right) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t)^3 + 4x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -x_3(t).\end{aligned} \tag{2}$$

Analysieren Sie anhand der indirekten Ljapunow-Methode die Stabilität des Systems um die Ruhelage $\boldsymbol{x}_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

a) Geben Sie die **allgemeine Formel der Taylorentwicklung** um den allgemeinen Punkt $\boldsymbol{x}_*$ für das System (2) an.

b) **Linearisieren** Sie das System (2) um den allgemeinen Punkt $\boldsymbol{x}_*$ und geben Sie die auftretenden Terme explizit an.

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Systemmatrix des linearisierten Systems für die Ruhelage $\boldsymbol{x}_\mathrm{R}$.

Hinweis: Die Determinante einer 3×3*-Matrix* $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ *berechnet sich wie folgt:*

$$\det A = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g - a \cdot f \cdot h - b \cdot d \cdot i. \tag{3}$$

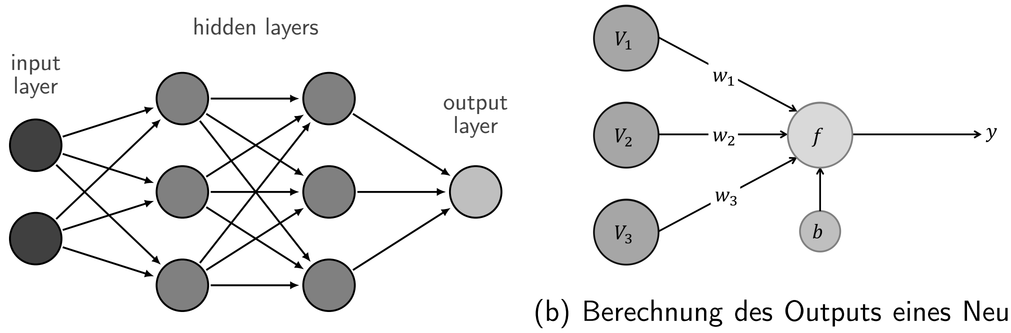
d) Was lässt sich anhand der Eigenwerte der Systemmatrix bezüglich der Stabilität und Schwingungsfähigkeit des linearen Systems um die Ruhelage $\boldsymbol{x}_\mathrm{R}$ aussagen?

(7 Punkte)

3. Aufgabe: Parameterschätzung und Sensitivitätsanalyse (20 Punkte)

Parameterschätzung für Maschinelles Lernen

Abbildung 1a zeigt ein Künstliches Neuronales Netzwerk (KNN). Der Output y eines beliebigen Neurons kann mit Gleichung (4) berechnet werden (siehe Abbildung 1b). N ist die Anzahl an Neuronen im vorherigen Layer, V_i der Output der Neuronen im vorherigen Layer, w_i die Weigths der Outputs, b der Bias des Neurons und f die Aktivierungsfunktion.



(a) Struktur eines KNNs.

(b) Berechnung des Outputs eines Neurons ($N = 3$).

Abbildung 1: Skizzen eines KNNs und der Berechnung des Outputs.

$$y = f\left(\sum_{i=1}^{N=3} w_i \cdot V_i + b\right) \tag{4}$$

3.1. Analyse des künstlichen neuronales Netzwerks

a) Das Training eines KNNs kann als Parameterschätzproblem aufgefasst werden. Geben Sie die Gütefunktion des Trainings eines KNNs nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate für die Trainingsdaten $\hat{y}_k$, ($k = 1, ..., N_{Data}$), an. Geben Sie weiterhin die Parameter, nach denen das Parameterschätzproblem aufgestellt wird, explizit an.

b) Wie viele Parameter müssen im Training des in Abbildung 1b dargestellten Neuron bestimmt werden?

c) Beim Training von komplexen neuronalen Netzen kann es zur Überanpassung des Modells an die Trainingsdaten kommen. Was versteht man unter Überanpassung?

d) Nennen Sie eine Methode, um Überanpassung zu verhindern.

(4,5 Punkte)

Parameterschätzung für ein mechanistisches Modell

Von Ihrem ersten Gehalt nach Beendigung Ihres Studiums haben Sie sich einen Pool mit einem Sprungbrett gekauft. Dieses haben Sie mit zwei Freunden ausprobiert. Dabei ist Ihnen aufgefallen, dass sich das Sprungbrett bei allen drei Personen unterschiedlich weit durchbiegt, was Sie an Ihre Mechanikvorlesung erinnert hat. Um die Durchbiegung abhängig von der Gewichtskraft zu modellieren, haben Sie das Sprungbrett als Biegebalken nach Abbildung 2 freigeschnitten.

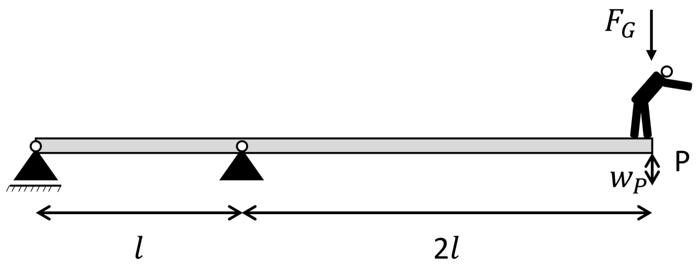


Abbildung 2: Skizze des Sprungbretts als Biegebalken mit eingezeichneter Kraft F_G und der Durchbiegung w_P an Punkt P.

Daraus haben Sie das folgende Gleichungssystem hergeleitet:

$$w_P = 4 \cdot \frac{F_G \cdot l^3}{EI} \tag{5}$$

$$F_G = m \cdot g \tag{6}$$

mit der Länge l, der Durchbiegung des Sprungbretts w_P an Punkt P, die Gewichtskraft F_G abhängig der Masse m und der Erdbeschleunigung g sowie der Biegesteifigkeit gegen die aufgezeichnete Belastung EI.

3.2. Sie betrachten zunächst das Gleichungssystem aus den Gleichungen (5) und (6). Geben Sie explizit die Parameter, Ausgänge und Eingänge des Systems an. Ist das System in dieser Form linear in den Parametern? Begründen Sie kurz.

(2,5 Punkte)

3.3. Sie wollen nun aus Messwerten der Durchbiegung w_P im Punkt P am Ende des Sprungbretts die Biegesteifigkeit EI des Sprungbretts bestimmen. Dazu haben Sie sich und Ihre zwei Freunde nacheinander an Punkt P gestellt und die Durchbiegung w_i abhängig des Körpergewichts m_i gemessen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 angegeben.

a) Geben Sie die **allgemeine** Gleichung der notwendigen Bedingung für die Lösung eines Parameterschätzproblems an.

m_i / kg	$w_{P,i}$ / m
76,2	0,192
86,1	0,261
82,7	0,249

Tabelle 1: Körpergewichte m_i und zugehörige Durchbiegung des Sprungbretts $w_{P,i}$.

b) Stellen Sie das Parameterschätzproblem für die Biegesteifigkeit EI in Gleichung (5) nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate auf und geben Sie die Gütefunktion explizit an.

c) Leiten Sie aus der notwendigen Bedingung und der Gütefunktion eine Formel zur Berechnung von EI her und geben Sie diese explizit an.

d) Bestimmen Sie den Wert von EI mit Hilfe der Messwerte aus Tabelle 1.
Hinweis: Geben Sie das Endergebnis mit einer sinnvollen Anzahl signifikanter Stellen an. Nehmen Sie folgende Werte an: $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $l = 2\,\mathrm{m}$.

(8 Punkte)

3.4. Sollte das Sprungbrett-Experiment (siehe Aufgabenteil 3.2) mit dem in Abbildung 1a gezeigten künstlichen neuronalen Netz oder mit dem mechanistischen Ansatz (Gleichung (5)) modelliert werden? Begründen Sie kurz. **(1 Punkt)**

Sensitivitätsanalyse

3.5. Abschließend wollen Sie eine Sensitivitätsanalyse der Biegesteifigkeit auf die Durchbiegung des Sprungbretts durchführen.

a) Geben Sie zunächst die allgemeine Definition der lokalen Sensitivität $\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{y}}(t)$ der Parameter auf die Ausgänge eines allgemeinen Systems (siehe Gleichung (7)) zum Zeitpunkt t an.

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{p}) \tag{7}$$

b) Leiten Sie daraus die Gleichung der lokalen Sensitivität $\boldsymbol{S}_{EI}^{w_P}$ der Biegesteifigkeit EI auf die Durchbiegung des Sprungbretts w_P explizit her. Setzen Sie dazu Gleichung (6) in Gleichung (5) ein.

(4 Punkte)

4. Aufgabe: Strukturierte Systeme & Modelica (20 Punkte)

Der elektrische Schaltkreis aus Abbildung 3 soll als strukturiertes System modelliert werden. Der Schaltkreis besteht aus einer Batterie (B) und zwei Lampen (LR1 und LR2) in Parallelschaltung. Der Strom fließt durch widerstandslose Leitungen. Zusätzlich ist ein Schalter (S) vorhanden, mit dem die zweite Lampe in den Schaltkreis eingebunden werden kann. Spannungen sind mit v und elektrische Ströme mit i gekennzeichnet.

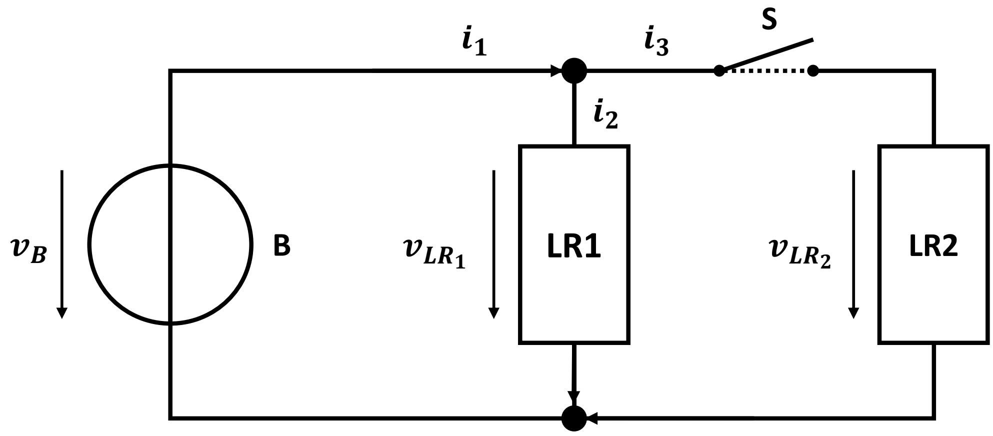


Abbildung 3: Schaltkreis mit einer Spannungsquelle und zwei Lampen in Parallelschaltung sowie einem Schalter.

Es gelten folgende Modellannahmen:

- Die Batterie kann als Spannungsquelle modelliert werden.
- Die Lampen können jeweils als Ohm'scher Widerstand modelliert werden. Es gilt $v_{LR_k}(t) = R_k \cdot i(t)$ für $k \in \{1, 2\}$.
- Ist der Schalter geöffnet gilt $i_3 = 0$.
- Die Leiter sind widerstandslos, sodass keine Spannungsänderungen auftreten.
- Die widerstandslosen Leitungen können als ein Teilsystem angesehen werden.

Modellierung

4.1. Erläutern Sie die Begriffe Dekomposition und Aggregation zur Strukturierung von Systemen gemäß der Vorlesung. **(2 Punkte)**

4.2. Nennen Sie einen charakteristischen Unterschied zwischen Speichersystemen und Verknüpfungssystemen. **(1 Punkt)**

4.3. Strukturieren Sie den gegebenen elektrischen Schaltkreis in **fünf** sinnvolle Teilsysteme. Ordnen Sie die Teilsysteme jeweils einer der beiden folgenden Kategorien zu: Speichersystem, Verknüpfungssystem. **(2,5 Punkte)**

Implementierung in Modelica

Hinweis zur Implementierung: Sie können für die Deklaration der Variablen und Parameter einen generischen Typ verwenden.

4.4. Es soll nun eine Klemme (aus der Vorlesung auch bekannt als „Pin"), welche die elektrischen Ströme i und die Spannungen v koppelt, als Konnektor-Modell implementiert werden. Schreiben Sie den Modelica-Code für den Konnektor mit dem Namen `Klemme`.
(3 Punkte)

Im Folgenden ist das partielle Modelica-Modell `OnePort` für die widerstandlosen Leitungen (s. Modelica-Modell Nr. 1) gegeben.

```
partial model OnePort
    import Modelica.SIunits.*;
    Voltage v;
    Current i;
    Klemme p;
    Klemme n;
equation
    v = p.v - n.v;
    0 = p.i + n.i;
    i = p.i;
end OnePort;
```

Modelica-Modell Nr. 1: Partial model OnePort.

4.5. Gegeben ist weiterhin die unvollständige Implementierung des partiellen Modelica-Modells `Lampe` (s. Modelica-Modell Nr. 2). Vervollständigen Sie den Modelica-Code des partiellen Modells `Lampe`, welches zur Implementierung von individuellen Lampen (hier LR1 und LR2) weiterverwendet werden kann. Das Modell Lampe soll dabei von One-Port (Modelica-Modell Nr. 1) erben und einen Widerstand von $R_L = 0.1$ haben.

(3,5 Punkte)

```
partial model Lampe
// fehlender Code
end Lampe;
```

Modelica-Modell Nr. 2: Partial model Lampe.

4.6. Gehen Sie davon aus, dass Sie alle Teilmodelle, d.h., B, LR1 und LR2, erfolgreich implementiert haben. Fügen Sie nun die Teilmodelle zu einem Gesamtmodell gemäß Abb. 3) zusammen. Ergänzen Sie dazu den fehlenden Code im unten dargestellten Modell `Schaltkreis` (s. Modellica-Modell Nr. 3). Sie brauchen **kein** vollständiges Modell zu schreiben, sondern nur die geforderten Code-Zeilen! Beachten Sie Folgendes:

- Der Schalter S wird direkt aus Modelica importiert, vgl. Zeile 2 in Modellica-Modell Nr. 3. Das Modell des Schalters enthält die Variable `control` vom Typ `Boolean`, die die Position des Schalters angibt, d.h. **`true`**: Schalter geöffnet und **`false`**: Schalter geschlossen.
- Der Schalter ist im Ausgangszustand geschlossen, was dem Default-Wert für das Attribut `control` beim Initialisieren von S entspricht.
- Bei der Zeit $time = 10$ soll das Umschalten des Schalters auf die geöffneten Position erfolgen.
- Die Zeit kann direkt mit `time` im Modelica-Code aufgerufen werden.
- Die connect-Funktionen für den Schalter (S) sind bereits vollständig implementiert.
- Die Erdung (E) ist bereits implementiert und braucht nicht weiter betrachtet werden.

Hinweis: Schreiben Sie **nicht** *in die Aufgabenstellung. Machen Sie kenntlich, welcher Code an welche Stelle gehört.*

(8 Punkte)

```
model Schaltkreis
    Modelica.Electrical.Analog.Ideal.IdealOpeningSwitch S;
    Modelica.Electrical.Analog.Basic.Ground E;
    // fehlender Code (1)
equation
    connect(b.p, E.p);
    connect(b.n, S.p);
    connect(S.n, lr2.p);
    // fehlender Code (2)
end Schaltkreis;
```

Modelica-Modell Nr. 3: Model Schaltkreis.

5. Aufgabe: Thermodynamische Systeme und Numerische Integration (20 Punkte)

Der Kölner Käsefabrikant Karl Kaaskopp betreibt eine Lagerhalle für seine Käseprodukte. Die Temperatur in der Lagerhalle $T(t)$ muss zwischen $8\,°\mathrm{C}$ und $15\,°\mathrm{C}$ liegen. Aufgrund der Differenz mit der zeitlich veränderliche Umgebungstemperatur $T_\mathsf{U}(t)$ wirkt auf die Lagerhalle ein Wärmestrom $\dot{Q}_\mathsf{U}(t)$. Die Lagerhalle wird bei Bedarf mit einer variablen Kühlleistung $P_\mathsf{K}(t)$ gekühlt oder mit einer variablen Heizleistung $P_\mathsf{H}(t)$ erwärmt. Um die Temperatur zu regeln, benötigt Karl ein Modell für das Kühlhaus. Gehen Sie davon aus, dass kein Käse an- und abtransportiert wird, und dass keine Personen das Lagerhaus betreten oder verlassen.

5.1.

a) Stellen Sie die allgemeine Energiebilanz in Enthalpieform auf. Benennen Sie die **Energietransport**-Terme auf der rechten Seite.

b) Ordnen Sie die in der Aufgabenstellung gegebenen Ströme und Leistungen den Termen auf der rechten Seite der Energiebilanz zu. Geben Sie darüber hinaus ggf. auch Terme an, die vernachlässigt werden.

(6 Punkte)

5.2. Stellen Sie die konstitutive Gleichung für den Wärmestrom $\dot{Q}_\mathsf{U}(t)$ vom Lagerhaus auf die Umgebung auf. Der Wärmestrom ist proportional zur Kühlhausoberfläche A, dem Wärmeübergangskoeffizienten k und der Temperaturdifferenz zwischen der Lagerhalle und Umgebung. **(1 Punkt)**

5.3. Nennen Sie Eingangsgröße(n) und Ausgangsgröße(n) für das System Lagerhalle. **(2 Punkte)**

Die Energiebilanz der Lagerhalle kann durch Umformung auf folgende Weise geschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = a \cdot T(t) + b \cdot T_\mathsf{U}(t) + c \tag{8}$$

5.4. Geben Sie die allgemeine Berechnungsvorschrift des **expliziten** Euler-Verfahrens an. Führen Sie einen Integrationsschritt von Gleichung (8) mit dem expliziten Euler-Verfahren von t_0 bis $t_0 + \Delta t$ mit der Schrittweite $\Delta t = 0{,}1\,\mathrm{s}$ durch. Benutzen Sie hierzu folgende Werte: $T_0 = 285\,\mathrm{K}$, $T_{\mathsf{U}}(t_0) = 294\,\mathrm{K}$, $a = -0{,}0025\,\frac{1}{\mathrm{s}}$, $b = 0{,}0025\,\frac{1}{\mathrm{s}}$, $c = -0{,}005\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$. Geben Sie Ihr Ergebnis mit vier Nachkommastellen an. **(4 Punkte)**

5.5. Nennen Sie die Bedingung für ein A-stabiles Verfahren. Zeigen Sie anhand der Dahlquist'schen Testgleichung (9), dass das **explizite** Euler-Verfahren nicht A-stabil ist. In welchem Beriech muss Δt für $\lambda = -0,0025$ liegen, damit das Verfahren **stabil** ist?

$$\dot{x}(t) = \lambda \cdot x(t), \quad Re(\lambda) < 0 \tag{9}$$

(4 Punkte)

5.6. Geben Sie die allgemeine Berechnungsvorschrift des **impliziten** Euler-Verfahrens an. Wenden Sie die Berechnungsvorschrift auf Gleichung (8) an. Formen Sie die erhaltene Gleichung so um, dass Sie einem iterativen Verfahren zur Bestimmung der Nullstelle übergeben werden kann. Ist hier für die Berechnung der Nullstelle ein iteratives Verfahren notwendig? Begründen Sie anhand der umgeformten Gleichung. **(3 Punkte)**

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik

Wintersemester 2023/2024

1. Aufgabe: Fragenteil (20 Punkte)

* Lösung *

1.1. Lösung: Ja, das Bauen des Spielzeug-Autos ist als Prozess der Entwicklung eines *Modells eines realen Systems* zu betrachten und ein Autorennen entspricht der Durchführung von Experimenten. (1 TP)
Wenn Lea herausfinden möchte welche Bauweise die höchste Geschwindigkeit ermöglicht dann entspricht das *verschiedene Entwürfe diese künstlichen Systems* bewerten. (1 TP) (oder das *Verhalten des Systems* und die ihm zugrunde liegenden Ursachen verstehen oder um Strategien für den Betrieb des Systems zu bewerten)

Bewertung: Punkte werden nur mit sinnvoller Begruendung vergeben. **(2 Punkte)**

1.2. Lösung: Abtasttheorem (Shannon, 1949): Ein zeitkontinuierliches Signal mit einer Maximal-Frequenz f_{max} muss mit einer Frequenz $f_s > 2f_{max}$ (1 TP) abgetastet werden, um eine näherungsweise Rekonstruktion (1 TP) zu ermöglichen.

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

1.3. Lösung: Die zwei Methoden nennen sich Glättung (0,5 TP) und Überwachung (0,5 TP).

Bewertung: Wenn statt Überwachung der Begriff Schaltfunktionen genannt wird, werden auch 0,5 TP vergeben. Petri Netze, endliche Automaten etc. werden mit 0 TP bewertet. **(1 Punkt)**

1.4. Lösung: Runge-Kutta, Heun-Verfahren, Dormand–Prince method, Backwards Difference Formula, Radau Kollokation, Predictor-corrector etc. (1 TP)

Bewertung: Bei Nennung mehrerer Methoden werden keine Punkte vergeben, falls eine davon falsch ist. Analytische Methoden sind keine numerischen Methoden. **(1 Punkt)**

1.5. Lösung: Die Startwerte werden unter `initial equation` angegeben:

```
initial equation
x=2
```

Alternativlösung: Die Startwerte können bei der Deklaration der Variablen mit `start` angegeben werden: `Real x(start=2)`) (1 TP)

Wenn die Startwerte weggelassen werden greift Dymola auf default Werte zurück. (1 TP)

Bewertung: `initial equation` oder `start` müssen genannt werden, um Punkte zu erlangen. **(2 Punkte)**

1.6. Lösung: Als Freiheitsgrade werden die Variablen bezeichnet, die vorgegeben werden müssen um ein System eindeutig zu spezifizieren. Die Anzahl an Freiheitsgraden entspricht der Differenz aus der Anzahl der Gleichungen und Variablen. (1 TP) Sie lassen sich als konstruktionsbedingte (0,5 TP) und betriebsbedingte (0,5 TP) Freiheitsgrade klassifizieren.

Bewertung: Alternative Notationsformen (z.b. dim()), oder nur die #DOF-Gleichung werden auch akzeptiert. **(2 Punkte)**

1.7. Lösung: Höchstens 7 Anfangsbedingungen (1 TP), denn Index-2 bedeutet, dass wir zweimal differenzieren müssen bis Index-0 bzw. einmal differenzieren bis Index-1 (eine Anfangsbedingung pro differentieller Gleichung). Dabei ist mindestens eine (es können aber auch mehrere sein) versteckte algebraische Gleichungen entdeckt worden.

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

1.8. Lösung: Führe verschiedene Simulationsexperimente aus verschiedenen Anfangspunkten um Ruhelage (Auslenkungen) durch und beobachte die dabei erhaltenen Trajektorien.

Bewertung: Analytische Ansätze werden mit 0 TP bewertet, da nach einem experimentellen Vorgehen gefragt wurde. **(1 Punkt)**

1.9. Lösung:

a) Trainingsdaten (0,5 TP), Testdaten (0,5 TP) und Validierungsdaten (0,5 TP)

b) Trainingsdaten (0,5 TP)

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

1.10. Lösung:

a) Regression prädiziert kontinuierliche Ausgänge (1 TP)
Klassifizierung prädiziert diskrete Ausgänge (1 TP)

b) Regression: Vorhersagemodelle der Kursentwicklungen an der Börse (0,5 TP)
Klassifizierung: Bilder von Katzen von Hunden unterscheiden (0,5 TP)

Bewertung: Es werden werden auch andere äquivalente Beispiele akzeptiert, so lange diese in die diskrete/kontinuierliche Einteilung passen. **(3 Punkte)**

1.11. Lösung:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{p}) \\
\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{p}) \\
\boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}_0
\end{aligned} \tag{1}$$

Bewertung: Für jede Zeile gibt es einen TP. Die Zeitabhängigkeit der zeitabhängigen Variablen muss enthalten sein. Wenn $\boldsymbol{u}(t)$ vergessen wird gibt es in den jeweiligen Zeilen nur 0,5 TP. **(3 Punkte)**

2. Aufgabe: Systemtheorie (20 Punkte)

* Lösung *

2.1. Lösung:

a) $\mathcal{D}$ muss offen und zusammenhängend sein (0,5 TP). Außerdem muss $\mathbf{0} \in \mathcal{D}$ sein (0,5 TP).

b) Für V muss gelten:

(i) $V(\mathbf{0}) = 0$ (0,5 TP)

(ii) $V(\boldsymbol{x}) > 0$ für $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{0}\}$ (0,5 TP)

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

2.2. Lösung: Bestimmen der Ruhelagen:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_R(t) &= 0 \\
0 &= -x_R(t) + x_R(t)^3 && \text{(0,5 TP)} \\
0 &= x_R(t) \cdot (x_R(t)^2 - 1) \\
x_{R,1} &= 0 && \text{(0,5 TP)} \\
0 &= x_R(t)^2 - 1 \\
x_{R,2/3} &= \pm 1 && \text{(1 TP)}
\end{aligned}
$$

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

2.3. Lösung: Geeignete Ljapunow-Funktion beispielsweise:

$$
V(x) = \frac{1}{2} x(t)^2 \qquad \text{(1 TP)}
$$

Es muss gezeigt werden, dass $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{\boldsymbol{x}(t)}$ eine negativ semi-definite Funktion auf der (noch unbekannten) Menge $\mathcal{D}$ ist. Dafür muss gelten:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\boldsymbol{x}(t)=\mathbf{0}} &= 0 && \text{(0,5 TP)} \\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\boldsymbol{x}(t)} &\leq 0 \text{ für } \boldsymbol{x} \in \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{0}\} && \text{(0,5 TP)}
\end{aligned}
$$

Bestimmen der Ableitung:

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{\boldsymbol{x}(t)} = \left.\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}(t)} \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right|_{t} \qquad \text{(1 TP)}$$
$$= x(t) \cdot \left(-x(t) + x(t)^3\right) \qquad \text{(1 TP)}$$
$$= -x(t)^2 + x(t)^4$$

Bewertung: Siehe oben. Wird eine andere geeignete Ljapunow-Funktion gewählt kann ebenfalls die volle Punktzahl erreicht werden. **(4 Punkte)**

2.4. Lösung:

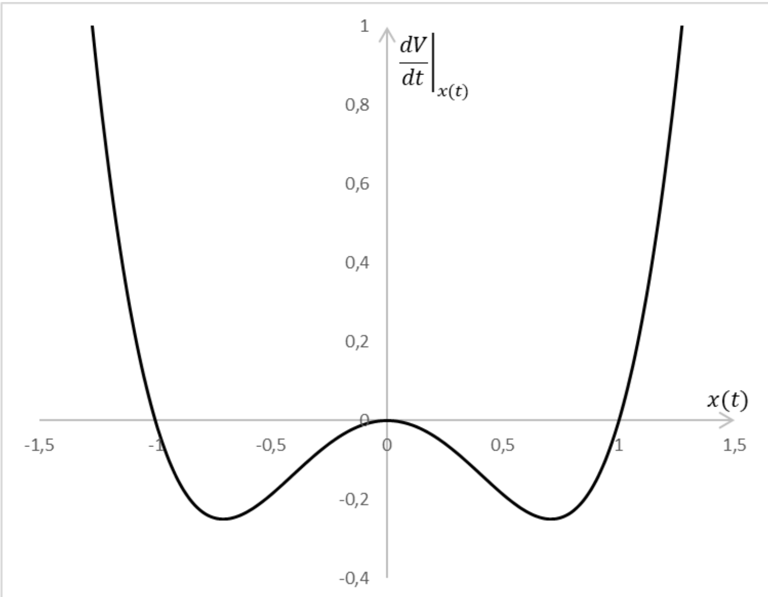


Abbildung 1: Verlauf von $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{\boldsymbol{x}(t)} = -x(t)^2 + x(t)^4$ (4 TP).

Angabe der Menge $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = \{\boldsymbol{x} \in (-1, 1)\} \quad \text{(1,0 TP)}$$

Bewertung: Siehe oben. Bei der Skizze werden für die drei Nullstellen und den qualitativen Verlauf auf (-1,0), (0,1) und außerhalb jeweils 0,5 TP vergeben (3,5 TP insgesamt). Die korrekte Achsenbeschriftung gibt insgesamt 0,5 TP. Wird eine andere geeignete Ljapunow-Funktion gewählt kann mit korrekter Ableitung, Nullstellenbestimmung und Skizze ebenfalls die volle Punktzahl erreicht werden. Teilmengen von $\mathcal{D}$, welche die entsprechenden Bedingungen für $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{\boldsymbol{x}(t)}$ erfüllen sind ebenfalls mit voller Punktzahl zu bewerten. **(5 Punkte)**

2.5. Lösung:

a) Die allgemeine Taylorentwicklung lautet

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \underbrace{\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_*\right)}_{\text{(0,5 TP)}} + \underbrace{\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}_*}}_{\text{(0,5 TP)}} \underbrace{\left(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_*\right)}_{\text{(0,5 TP)}} + \underbrace{\text{T.h.O.}}_{\text{(0,5 TP)}} \tag{2}$$

b) Die Linearisierung des Systems (2) um den allgemeinen Punkt $\boldsymbol{x}_*$ berechnet sich zu

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \approx \underbrace{\begin{bmatrix} 3x_{1,*} - x_{2,*} \cdot \cos(x_{2,*}) \\ -x_{1,*}^3 + 4 \cdot x_{2,*} \\ -x_{3,*} \end{bmatrix}}_{\text{(1 TP)}}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -\cos(x_{2,*}) + x_{2,*} \cdot \sin(x_{2,*}) & 0 \\ -3x_{1,*}^2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{(1 TP)}} \left(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_*\right) \tag{3}$$

c) Das Einsetzen der Ruhelage $\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}$ in die Systemmatrix des linearisierten Systems führt zu der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{(0,5 TP)}$$

Aus der Anwendung der in der Aufgabenstellung gegebenen Regel von Sarrus folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \det\left(A - I\lambda\right) \\ &= (3-\lambda)(4-\lambda)(-1-\lambda) \\ \lambda_1 &= 3 && \text{(0,5 TP)} \\ \lambda_2 &= 4 && \text{(0,5 TP)} \\ \lambda_3 &= -1 && \text{(0,5 TP)} \end{aligned}$$

d) Da zwei der Eigenwerte einen Realteil > 0 haben, ist das linearisierte System instabil (0,5 TP). Es liegen keine komplex-konjugierten Eigenwerte vor. Das linearisierte System ist daher nicht schwingungsfähig (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. Für die allgemeine Taylorentwicklung sind auch andere Notationen zulässig, welche beispielsweise die Therme höherer Ordnung explizit mit aufführen oder anderweitig (...) andeuten. Die Eigenwerte des linearisierten Systems können alternativ direkt von der Diagonalen der Matrix A abgelesen werden, da es sich um eine obere Dreiecksmatrix handelt. **(7 Punkte)**

3. Aufgabe: Parameterschätzung und Sensitivitätsanalyse (20 Punkte)
* Lösung *

3.1. Lösung:

a) Die Gütefunktion des Trainings von KNNs ist definiert als:

$$J(\boldsymbol{w}, b) = \frac{1}{N_{Data}} \sum_{k=1}^{N_{Data}} (y_k - \hat{y}_k)^2 \quad (1 \text{ TP}) \tag{4}$$

Das Parameterschätzproblem wird nach den Parametern der künstlichen Neuronen aufgestellt. Diese sind die Gewichte $\boldsymbol{w} = [w_1, w_2, w_3]^T$ (0,5 TP) sowie die Bias b (0,5 TP).

b) Im Training des in Abbildung 1b dargestellten Neurons müssen 3 Gewichte $\boldsymbol{w} = [w_1, w_2, w_3]^T$ und ein Bias b bestimmt werden. Daher müssen 4 Parameter bestimmt werden. (1 TP)

c) Überanpassung bedeutet, dass das neuronale Netz sehr gut an die Trainingsdaten angepasst ist und diese sehr gut wiedergeben kann, der Vorhersagefehler bei den Validierungsdaten oder einem neuen Datensatz jedoch stark zunimmt. (1 TP)

d) Überanpassung kann durch Regularisierung verhindert werden. Beispiele für Methoden zur Regularisierung sind Weigth decay, Early-Stopping oder Dropout. (0,5 TP)

Bewertung: Siehe oben. In Aufgabenteil a) werden es pro Parameter (w_i, b) 0,5 TP vergeben. Pro falsch genannten Parameter (z.B. V_i) können 0,5 TP weniger erzielt werden. In b) werden 1 TP für die explizite Angabe der Parameter (w_1-w_3, b) oder der Angabe der benötigten Anzahl (4 Parameter) vergeben. In d) können durch die Nennung von Regularisierung oder einer Regularisierungsmethode die vollen 0,5 TP erreicht werden. **(4,5 Punkte)**

3.2. Lösung: Die Parameter, Ausgänge und Eingänge sind:

$$\boldsymbol{p} = [g, EI, l]^T \qquad (0,5 \text{ TP}) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{y} = [w_p] \qquad (0,5 \text{ TP}) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{u} = [m] \qquad (0,5 \text{ TP}) \tag{7}$$

Das System ist nicht-linear in den Parametern, da der Parameter l mit dem Exponenten 3 und der Parameter EI mit dem Exponenten -1 eingeht. (1 TP)

Bewertung: Siehe oben. Wenn als Ausgang zusätzlich zu w_p auch F_g genannt wird, werden de vollen 0,5 TP vergeben. Es gibt für die Linearitätsanalyse nur bei richtiger Begründung 1 TP. **(2,5 Punkte)**

3.3. Lösung:

a) Die allgemeine notwendige Bedingung des Parameterschätzproblems lautet:

$$\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\right|_{\boldsymbol{p}} = 0 \quad (1 \text{ TP}) \tag{8}$$

b) Die Gütefunktion für das vorliegende Parameterschätzproblem lautet:

$$\underbrace{J(EI)}_{(0{,}5 \text{ TP})} = \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \left(4 \cdot \frac{m_i \cdot g \cdot l^3}{EI} - \hat{w}_{P,i}\right)^2}_{(0{,}5 \text{ TP})} \tag{9}$$

Das Parameterschätzproblem soll bezüglich EI aufgestellt werden:

$$\min_{EI} J(EI) \quad (1 \text{ TP}) \tag{10}$$

c) Zunächst wird die Gütefunktion (Gleichung (9)) in die notwendige Bedingung (Gleichung (8)) eingesetzt und die Ableitung berechnet:

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}EI} = \underbrace{2 \cdot \sum_{i=1}^{3} \left(4 \cdot \frac{m_i \cdot g \cdot l^3}{EI} - \hat{w}_{P,i}\right)}_{(0{,}5 \text{ TP})} \cdot \underbrace{\left(-4 \cdot \frac{m_i \cdot g \cdot l^3}{EI^2}\right)}_{(0{,}5 \text{ TP})}$$

Gleich Null setzen (0,5 TP) und umformen (0,5 TP):

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2 \cdot \sum_{i=1}^{3} \left[\left(4 \cdot \frac{m_i \cdot g \cdot l^3}{EI} - \hat{w}_{P,i}\right) \cdot \left(-4 \cdot \frac{m_i \cdot g \cdot l^3}{EI^2}\right)\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} \left[\left(4 \cdot \frac{m_i \cdot g \cdot l^3}{EI} - \hat{w}_{P,i}\right) \cdot m_i\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{4 \cdot g \cdot l^3}{EI} \cdot \sum_{i=1}^{3} m_i^2 = \sum_{i=1}^{3} \hat{w}_{P,i} \cdot m_i \qquad (0{,}5 \text{ TP})
\end{aligned}$$

Folgt die Formel für EI:

$$EI = 4 \cdot g \cdot l^3 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i^2}{\sum_{i=1}^{3} \hat{w}_{P,i} \cdot m_i} \quad (1 \text{ TP}) \tag{11}$$

d) Einsetzen der Werte:

$$EI = 4 \cdot 9,81 \cdot 2^3 \cdot \frac{76,2^2 + 86,1^2 + 82,7^2}{0,192 \cdot 76,2 + 0,261 \cdot 86,1 + 0,249 \cdot 82,7} \qquad (1\ \text{TP})$$

$$EI = 109\,141{,}59\,\mathrm{N\,m^2}$$

$$EI \approx 109\,000\,\mathrm{N\,m^2} \qquad (0,5\ \text{TP})$$

Bewertung: Siehe oben. In b) kann als obere Grenze sowohl N als auch 3 (da 3 Experimente) benutzt werden. Es kann entweder $F_{G,i}$ oder $m_i \cdot g$ eingesetzt werden. Die Gütefunktion kann auch mit $w_{p,i}$ aufgestellt werden. Wenn in c) die richtige Gleichung über andere Umformungsschritte hergeleitet wird, wird die volle Punktzahl vergeben. Bei Umrechnungsfehlern werden die jeweiligen Punkte nicht vergeben. Wenn das Endergebnis in d) nicht auf 3 signifikante Stellen gerundet wird, werden die dafür vorgesehenen 0,5 TP nicht vergeben. Die Messwerte sind auf 3 Stelle angegeben, weswegen auch das Ergebnis mit 3 Stellen angegeben werden soll. **(8 Punkte)**

3.4. Lösung: Das Sprungbrett-Experiment sollte aufgrund der geringen Anzahl an Datenpunkten mit dem mechanistischen Modell modelliert werden. Die Anzahl an Messwerte reichen nicht aus, um die vielen Parameter des KNNs verlässlich zu bestimmen. (1 TP)

Bewertung: Siehe oben. Es gibt nur bei sinnvoller Begründung 1 TP. **(1 Punkt)**

3.5. Lösung:

a) Die Definition der lokalen Sensitivität der Parameter auf die Ausgänge zum Zeitpunkt t lautet:

$$\boldsymbol{S}^y(t) = \left.\frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{p}}\right|_t = \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{x(t),p,u(t)} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\right|_t + \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{p}}\right|_{x(t),p,u(t)} \qquad (1\ \text{TP}) \tag{12}$$

b) In dem betrachteten System gibt es keine Zustände $\boldsymbol{x}$, weshalb die Ableitung von $\boldsymbol{x}$ nach den Parametern $\boldsymbol{p}$ wegfällt ($\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\right|_t = 0$) (1 TP). Damit ergibt sich die lokale Sensitivität zu:

$$\boldsymbol{S}_{EI}^{w_P} = \left.\frac{\partial w_p}{\partial EI}\right|_{EI,m} \qquad (1\ \text{TP}) \tag{13}$$

Ableiten:

$$\boldsymbol{S}_{EI}^{w_P} = \frac{-4 \cdot m \cdot g \cdot l^3}{EI^2} \qquad (1\ \text{TP}) \tag{14}$$

Bewertung: Siehe oben. in a) gibt es bereits für $\left.\frac{dy}{dp}\right|_t$ 1 TP. in b) gibt es bei korrekter Ableitung 1 TP wenn direkt das totale Differential gebildet wird ohne $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}\right|_t = 0$ zu zeigen **(4 Punkte)**

4. Aufgabe: Strukturierte Systeme & Modelica (20 Punkte)
* Lösung *

4.1. Lösung: Bei der Dekomposition handelt es sich um die Zerlegung (0,5 TP) eines Systems in seine Teilsysteme (0,5 TP). Die Aggregation beschreibt das Zusammenfügen (0,5 TP) von Teilsystemen zu größeren Systemen (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

4.2. Lösung: Mögliche alternative Lösungen:

- Speichersysteme können im Gegensatz zu Verknüpfungssystemen extensive Größen speichern (z. B. Materie, Energie, Impuls)
- Speichersysteme sind durch Zustandsgrößen und "Bilanzgleichungen", die die Zu- und Abnahme der Speicher beschreiben, gekennzeichnet, während Verknüpfungssysteme die Übertragung von Flussgrößen beschreiben

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

4.3. Lösung: B (Speichersystem), LR1 (Speicher- oder Verknüpfungssystem), LR2 (Speicher- oder Verknüpfungssystem), widerstandslose Leitungen (Verknüpfungssystem), S (Verknüpfungssystem)

Bewertung: Jeweils 0,5 TP für richtige Nennung des Teilsystems inklusive Zuordnung. **(2,5 Punkte)**

4.4. Lösung:

```
connector Klemme                    // 0,5 TP: "connector", 0,5 TP: "Klemme"
  import Modelica.SIunits.*;
  flow Current i;                   // 1 TP: "flow" + Deklaration
```

```
    Voltage v;                          // 0,5 TP: Deklaration
end Klemme;                             // 0,5 TP: Modellumgebung
```

Modelica-Modell Nr. 4: Partial model Klemme.

Bewertung: Siehe Kommentare. Deklaration alternativ über Real. Importieren der SIunits nicht notwendig. **(3 Punkte)**

4.5. Lösung:

```
partial model Lampe
// fehlender Code
    import Modelica.SIunits.*;
    parameter Resistance R=0.01;        // 1 TP
    extends OnePort;                    // 1 TP
equation                                // 0,5 TP
    v = R * i;                          // 1 TP
end Lampe;
```

Modelica-Modell Nr. 5: Partial model Lampe.

Bewertung: Siehe oben. Deklaration alternativ über Real. **(3,5 Punkte)**

4.6. Lösung:

```
model Schaltkreis
    Modelica.Electrical.Analog.Ideal.IdealOpeningSwitch S;
    Modelica.Electrical.Analog.Basic.Ground E;
    // fehlender Code (1)
    B b;                                // 0,5 TP
    LR1 lr1;                            // 0,5 TP
    LR2 lr2;                            // 0,5 TP
equation
    connect(b.p, E.p);
    connect(b.n, S.p);
```

```
    connect(S.n, lr2.p);
    // fehlender Code (2)
    connect(b.p, lr2.n);
    // connect (0,5 TP) + b.p (0,5 TP) + l2.n (0,5 TP)
    connect(b.n, lr1.p);
    // b.n (0,5 TP) + lr1.p (0,5 TP)
    connect(b.p, lr1.n);
    // b.p (0,5 TP) + lr1.n (0,5 TP)
    when time > 10 then
    // when (0,5 TP) + time > 10 (0,5 TP) + then (0,5 TP)
        S.control = true;                   // 1 TP
    end when;                               // 0,5 TP
end Schaltkreis;
```

Modelica-Modell Nr. 6: Model Schaltkreis.

Bewertung: Siehe oben. Deklaration alternativ über Real. **(8 Punkte)**

5. Aufgabe: Thermodynamische Systeme und Numerische Integration (20 Punkte) * Lösung *

5.1. Lösung:

a)

$$\underbrace{\dot{H}(t)}_{0{,}5\ \text{TP}} = \underbrace{\sum_{j \epsilon \Lambda_H} J_j^H(t)}_{0{,}5\ \text{TP}} + \underbrace{\sum_{k \epsilon \Lambda_Q} J_k^Q(t)}_{0{,}5\ \text{TP}} + \underbrace{\sum_{l \epsilon \Lambda_{w_{tech}}} J_l^{w_{tech}}(t)}_{0{,}5\ \text{TP}} + \underbrace{V \left.\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}\right|_t}_{0{,}5\ \text{TP}}$$

J_j^H: An **Masse** gebundener Energietransport (0,5 TP)

J_k^Q: Energietransport durch **Wärme**übertragung (0,5 TP)

$J_l^{w_{tech}}$ Energietransport in Form von **Arbeit** (0,5 TP)

b)

$$\sum_{j \epsilon \Lambda_H} J_j^H(t) = 0 \qquad 0,5\ \text{TP} \qquad (15)$$

$$\sum_{k \epsilon \Lambda_Q} J_k^Q(t) = \dot{Q}_{\mathsf{U}}(t) \qquad 0,5\ \text{TP} \qquad (16)$$

$$\sum_{l \epsilon \Lambda_{w_{tech}}} J_l^{w_{tech}}(t) = P_{\mathsf{K}}(t) + P_{\mathsf{H}}(t) \qquad 0,5\ \text{TP} \qquad (17)$$

$$V \left.\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}\right|_t = 0 \qquad 0,5\ \text{TP} \qquad (18)$$

Bewertung: In a) können alternative Formelzeichen verwendet werden, solange Sie eindeutig sind. Bei fehlenden Indices kann ein Teilpunkt nicht gegeben werden. Alternative Bezeichnungen sind zulässig, solange die fett gedruckten Begriffe vorkommen. In b) können Heiz- und Kühlleistung auch als Wärmeströme gezählt werden. **(6,0 Punkte)**

5.2. Lösung:

$$\dot{Q}_{\mathsf{U}}(t) = kA\left(T_{\mathsf{U}}(t) - T(t)\right)$$

Bewertung: Siehe oben. **(1,0 Punkte)**

5.3. Lösung: Eingangsgrößen: P_K, P_H, T_U
Ausgangsgrößen: T

Bewertung: Je richtiger Größe gibt es 0,5 TP. **(2,0 Punkte)**

5.4. Die Berechnugnsvorschrift für das explizite Euler-Verfahren lautet:

$$\underbrace{x_{n+1} = x_n}_{0{,}5\,\mathsf{TP}} + \underbrace{\Delta t f(x_n, t_n)}_{1\,\mathsf{TP}} \tag{19}$$

Wir wenden die Berechnungsvorschrift für den expliziten Euler (19) auf Gl. (8) an:

$$\underbrace{T(t_0 + \Delta t) = T_0}_{0{,}5\,\mathsf{TP}} + \underbrace{\Delta t\,(a \cdot T + b \cdot T_\mathsf{U} + c)}_{1\,\mathsf{TP}}$$

Anschließend setzten wir die Werte ein und rechnen aus:

$$\begin{aligned} T(t_0 + \Delta t) &= 285\,\mathrm{K} + 0{,}1\,\mathrm{s}\left(-0{,}0025\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 285\,\mathrm{K} + 0{,}0025\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 294\,\mathrm{K} - 0{,}005\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}\right) \\ &= 285{,}0018\,\mathrm{K} \quad \text{(1,0 TP)} \end{aligned}$$

Bewertung: Siehe oben. Ist das Endergebnis nicht richtig gerundet oder fehlt die Einheit, wird dafür kein TP vergeben. **(4,0 Punkte)**

5.5. Lösung: Wenn bei Anwendung eines Verfahrens auf die (Dahlquist'sche) Testgleichung für **alle Schrittweiten** (0,5 TP) gilt: $|x_{n+1}| < |x_n|$ (0,5 TP) dann ist das Verfahren A-stabil.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta t \cdot \lambda \cdot x_n \quad \text{(0,5 TP)} \\ x_{n+1} &= x_n \cdot (1 + \Delta t \cdot \lambda) \quad \text{(0,5 TP)} \end{aligned}$$

Nur bei einer Schrittweite, die

$$|1 + \Delta t \cdot \lambda| < 1 \quad \text{(0,5 TP)}$$

erfüllt, ist das Verfahren stabil. Somit ist das explizite Euler-Verfahren nicht A-stabil (0,5 TP). Für $\lambda = -0,0025$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} &|1 - \Delta t \cdot 0,0025| < 1 \quad \text{(0,5 TP)} \\ &0 < \Delta t < 800 \quad \text{(0,5 TP)} \end{aligned}$$

Bewertung: Siehe oben. **(4,0 Punkte)**

5.6. Lösung: Die Berechnungsvorschrift für das implizite Euler-Verfahren lautet:

$$\underbrace{x_{n+1} = x_n}_{0{,}5\,\mathsf{TP}} + \underbrace{\Delta t f(x_{n+1}, t_n + \Delta t_n)}_{1\,\mathsf{TP}}$$

Angewandt auf (8) ergibt sich:

$$T_{n+1} = T_n + \Delta t \left(a \cdot T_{n+1} + b \cdot T_{\mathsf{U},n+1} + c\right)$$

Um die Gleichung einem interativen Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen zu übergeben, muss die linke Seite per Subtraktion auf die rechte Seite überführt werden:

$$0 = T_n - T_{n+1} + \Delta t \left(a \cdot T_{n+1} + b \cdot T_{\mathsf{U},n+1} + c\right) \quad \text{(0,5 TP)}$$

Ein iteratives Verfahren zur Bestimmung der Nullstelle ist nicht notwendig, da die Gleichung nach T_{n+1} aufgelöst werden kann (1 TP).

Bewertung: Der letzte Teilpunkt wird nur bei korrekter Begründung vergeben. **(3,0 Punkte)**

Schriftliche Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Wintersemester 2023/2024

6. Aufgabe: Finite Differenzen (13 Punkte)

Ein Rohr wird von einem Flüssigkeitsstrom durchströmt, der eine chemische Substanz enthält. Der Flüssigkeitsstrom kann als 1D-Problem modelliert werden. Die Konzentration der Substanz an jeder Stelle des Rohrs kann über eine Advektions-Diffusions-Gleichung beschrieben werden:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + a\frac{\partial C}{\partial x} - \lambda\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0 \quad a \geq 0, \lambda \geq 0 \tag{1}$$

Gesucht wird die Konzentration $C(x,t)$. Gegeben sind die Advektionsgeschwindigkeit a der Flüssigkeitsströmung sowie die Diffusionskonstante λ. Gleichung (1) soll mit einem Finite-Differenzen-Verfahren auf einem äquidistanten Gitter mit Gitterschrittweite Δx diskretisiert werden.

Gegeben sei außerdem folgende Taylorreihe von $C(x)$, entwickelt um x_i und ausgewertet bei x_{i+1}:

$$C_{i+1} = C_i + \left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=x_i}\Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right|_{x=x_i}\Delta x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 C}{\partial x^3}\right|_{x=x_i}\Delta x^3 + \dots \tag{2}$$

6.1. Bestimmen Sie eine weitere Taylorreihe von C, welche Ihnen die Herleitung eines **Vorwärts-**Differenzenausdrucks mit drei Stützstellen für $\frac{\partial C}{\partial x}$ ermöglicht. **(2.5 Punkte)**

6.2. Leiten Sie nun den Vorwärts-Differenzenausdruck mit drei Stützstellen für $\frac{\partial C}{\partial x}$ her. Bestimmen und kennzeichnen Sie den Abbruchfehler und die Genauigkeitsordnung.
(5.5 Punkte)

Das Problem soll auf einem Rechengebiet mit 4 Knoten gelöst werden. Die Nummerierung der Knoten ist aufsteigend von 1 bis 4. An Knoten 1 gilt für alle Zeitschritte $\frac{\partial C}{\partial x}\big|_{x=x_1} = 0{,}05\,\mathrm{kg\,m^{-4}}$ und die zweite Ableitung an Knoten 1 muss nicht approximiert werden, sondern kann vereinfachend als 0 angenommen werden. Knoten 4 hat eine konstante Konzentration von $C(x_4, t) = 0{,}2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

6.3. Diskretisieren Sie nun die Gleichung (1) mit dem expliziten Euler-Verfahren in der Zeit mit der Zeitschrittweite Δt. Unabhänging vom Ergebnis aus Aufgabe 6.2, verwenden Sie folgende räumliche Differenzenausdrücke:

$$\left.\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} \approx \frac{C_{i+1} - 2C_i + C_{i-1}}{\Delta x^2} \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=x_i} \approx \frac{C_{i+1} - C_{i-1}}{2\Delta x}. \tag{4}$$

Stellen Sie die Gleichungen für alle Knoten C_i^{n+1} für Zeitschritt $n+1$ in Abhängigkeit von C_i^n von Zeitschritt n auf. Begründen Sie, falls keine Gleichung für einen Knoten aufgestellt werden muss und setzen Sie alle bekannten Werte ein.
Hinweis: Die Gleichungen müssen nicht vereinfacht oder umgestellt werden. Einheiten müssen nicht eingesetzt werden.

(5 Punkte)

7. Aufgabe: Finite Elemente (12 Punkte)

Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung ist durch folgende partielle Differentialgleichung gegeben:

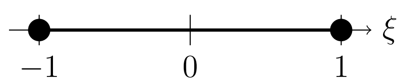
$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0,\ x \in [-4, 2]. \tag{5}$$

$\Theta(x,t)$ ist das Temperaturfeld und α ist die konstante Temperaturleitfähigkeit. Am linken Rand ($x = -4$) liegt ein gegebener Wärmestrom $\phi = k \frac{\partial \Theta}{\partial x}\Big|_{x=-4}$ an. Am rechten Rand ($x = 2$) beträgt die Temperatur Θ_{in}.

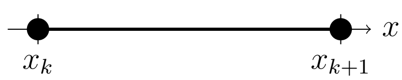
7.1. Bestimmen Sie die schwache Form der Gleichung (5). Vereinfachen Sie die Gleichung so, dass lineare Finite Elemente verwendet werden können. Beachten Sie die Randbedingungen. **(4 Punkte)**

7.2. Ordnen Sie die angegebenen Randbedingungen den aus der Vorlesung bekannten Kategorien zu. **(1 Punkt)**

7.3. Für lineare Finite Elemente kann die Transformation von einem Referenzelement



auf ein gegebenes globales Element



als

$$x(\xi) = x_k + \frac{x_{k+1} - x_k}{2}(\xi + 1) \tag{6}$$

angegeben werden. Leiten Sie diesen Zusammenhang nachvollziehbar mithilfe des isoparametrischen Prinzips her. (*Hinweis:* $\phi_1^e(\xi) = (1-\xi)/2$; $\phi_2^e(\xi) = (1+\xi)/2$.) **(2 Punkte)**

7.4. Die Einträge der Massenmatrix folgen dem Schema

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_\Omega \phi_i(x)\, \phi_j(x)\, d\Omega \tag{7}$$

Berechnen Sie den Eintrag $\mathbf{M}_{21}^e$ der Elementmassenmatrix für ein Element $x \in [x_k, x_{k+1}]$, in Abhängigkeit von x_k und x_{k+1}. Gehen Sie von linearen Finiten Elementen aus. Verwenden Sie die Transformation aus Gleichung (6). **(4 Punkte)**

7.5. Welche Dimension hat die zur Integraltransformation gehörende Jacobi-Matrix? **(1 Punkt)**

8. Aufgabe: Finite Volumen (13 Punkte)

Der in Abbildung 5 gezeigte Transistor wird über einen Kühlkörper gekühlt. Mit Hilfe der Finite Volumen Methode soll die Temperaturverteilung im Kühlkörper untersucht werden.

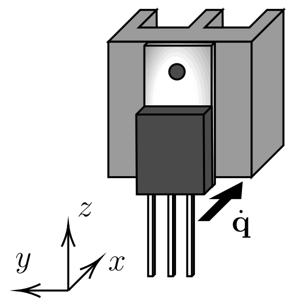


Abbildung 5: Physikalisches Problem.

Die allgemeine zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung ($\lambda > 0$, konstant) ist gegeben als

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \nabla \cdot \nabla T = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega, t \in [0, t_{\text{final}}]. \tag{8}$$

8.1. Bestimmen Sie die integrale Form von Gleichung (8) auf einem allgemeinen Rechengebiet Ω und vereinfachen Sie analytisch.
Hinweis: Satz von Gauß:

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{g} \, \mathrm{d}\Omega = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s. \tag{9}$$

(2 Punkte)

Für die folgenden Aufgabenteile genügt es den in Abbildung 6 dargestellten zweidimensionalen Schnitt durch den Kühlkörper zu betrachten. Die Wärmestromdichte $\dot{\mathbf{q}} = -\lambda \nabla T$ am linken Rand ist über die gesamte Breite konstant und gegeben. Auf den übrigen Rändern soll die Temperatur des Kühlkörpers als konstant angenommen werden.

8.2. Welche Besonderheit ist bei einer zellzentrierten Finiten Volumen Diskretisierung bei Volumina mit Kanten auf den isothermen Wänden zu beachten? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

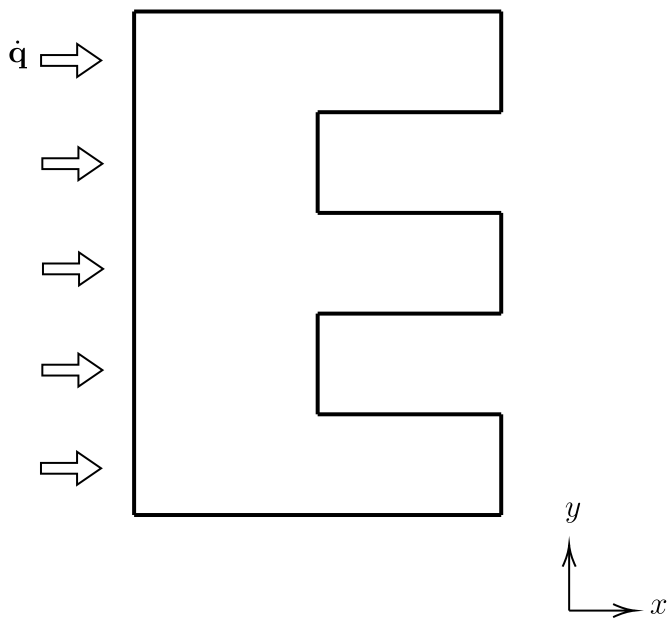


Abbildung 6: Zweidimensionler Schnitt FV.

8.3. Diskretisieren Sie nun die zweidimensionale Darstellung aus Abbildung 6 mit einem geeigneten Rechengitter und verwenden Sie anschließend eine zellzentrierte Volumenanordnung. Wählen Sie ein Volumen am linken Rand des Gebiets und kennzeichnen Sie dieses als V_0, makieren Sie zusätzlich die Lage der Unbekannten T_0. Diese Aufgabe kann auf dem Aufgabenblatt (Abbildung 6) bearbeitet werden. **(2 Punkte)**

8.4. Stellen Sie nun die integrale Form für V_0 auf. **(1 Punkt)**

8.5. Diskretisieren Sie die Flussterme und setzen Sie alle aus der Aufgabenstellung bekannten Größen ein.
Hinweis: Die Normalen n_i, die Abstände zwischen Unbekannten Δr_i und die Kantenlängen Δs_i müssen nicht berechnet, sondern können als gegeben angenommen werden.
(4 Punkte)

8.6. Diskretisieren Sie Ihre integrale Form nun vollständig. Verwenden Sie hierzu die Volumentmittelung und eine beliebige Zeitdiskretisierung aus der Vorlesung.
(2 Punkte)

9. Aufgabe: Fehler (12 Punkte)

Zur Lösung einer eindimensionalen Advektionsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} + a\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

soll das folgende Finite-Differenzen-Verfahren

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + a\frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{11}$$

untersucht werden. Für dieses Verfahren sind der Abbruchfehler

$$||L - L_\Delta|| = \left|\left|\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2)\right|\right| \tag{12}$$

und das aus der von-Neumann-Stabilitätsanalyse resultierende Amplitudenverhältnis

$$\left|\left|\frac{V^{n+1}}{V^n}\right|\right| = \sqrt{1 + \frac{a^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\sin^2(k\Delta x)}, \tag{13}$$

in Abhängigkeit der Wellenzahl k gegeben.

Ausserdem sind die Zeitschrittweite $\Delta t = 0.01\text{s}$, die Gitterschrittweite $\Delta x = 0.1\text{m}$ und der Advektionskoeffizient $a = 0.4\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$ gegeben.

9.1. Welche Bedingungen muss ein Finite-Differenzen Verfahren erfüllen, damit es konvergiert? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

9.2. Zeigen oder widerlegen Sie nachvollziehbar die Konsistenz des angegebenen Finite-Differenzen Verfahrens. **(3 Punkte)**

9.3. Zeigen oder widerlegen Sie nachvollziehbar die Stabilität des angegebenen Finite-Differenzen Verfahrens. **(3 Punkte)**

9.4. Welche Bedingungen muss ein Anfangswertproblem erfüllen, damit es korrekt gestellt ist? **(2 Punkte)**

9.5. Nennen Sie je einen Vor- und einen Nachteil von impliziten Verfahren gegenüber expliziten Verfahren. **(2 Punkte)**

Lehrstuhl für Computergestützte Analyse Technischer Systeme

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Wintersemester 2023/2024

6. Aufgabe: Finite Differenzen (13 Punkte)

* Lösung *

6.1. Lösung:

$$C_{i+2} \approx C_i + 2\frac{\partial C}{\partial x}\bigg|_{x=x_i}\Delta x + 2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^2 + \frac{8}{6}\frac{\partial^3 C}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^3 + \dots \quad (1)$$

0.5 Für richtige Auswerte- und Entwicklungsstelle

0.5 Für ungefähr Zeichen oder + ...

Je 0.5 für jede der drei Stützstellen

$\frac{2.5}{2.5}$

6.2. Lösung:

Ansatz: -3 C_i + 4 C_{i+1} - C_{i+2} 2

$$-3C_i + 4C_{i+1} - C_{i+2} \approx 2\frac{\partial C}{\partial x}\bigg|_{x=x_i}\Delta x - \frac{2}{3}\frac{\partial^3 C}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^3 + \dots \; 1 \quad (2)$$

Umformen nach der gesuchten Ableitung:

$$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=x_i} 0.5 \approx \frac{-3C_i + 4C_{i+1} - C_{i+2}}{2\Delta x} \; 0.5 + \underbrace{\frac{1}{3}\left.\frac{\partial^3 C}{\partial x^3}\right|_{x=x_i}\Delta x^2}_{Abbruchfehler \; 0.5} \; 0.5 \tag{3}$$

Der Ausdruck ist 2. Ordnung genau. 0.5

$\frac{5.5}{5.5}$

6.3. Lösung:

Explizites Euler Verfahren:

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} \; 0.5 + a\frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x} \; 0.5 - \lambda\frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \; 0.5 \tag{4}$$

Gleichung für Knoten 1:

$$\frac{C_1^{n+1} - C_1^n}{\Delta t} = -a0.05 \; 1 \tag{5}$$

Gleichung für Knoten 2:

$$\frac{C_2^{n+1} - C_2^n}{\Delta t} + a\frac{C_3^n - C_1^n}{2\Delta x} - \lambda\frac{C_3^n - 2C_2^n + C_1^n}{\Delta x^2} = 0 \; 1 \tag{6}$$

Gleichung für Knoten 3:

$$\frac{C_3^{n+1} - C_3^n}{\Delta t} + a\frac{0.2 - C_2^n}{2\Delta x} - \lambda\frac{0.2 - 2C_3^n + C_2^n}{\Delta x^2} = 0 \; 1 \tag{7}$$

Gleichung für Knoten 4:

Keine Gleichung benötigt, da

$$C_4^{n+1} = 0.2 \; 0.5 \tag{8}$$

$\frac{5}{5}$

$\sum_{A1} = \frac{13}{13}$

7. Aufgabe: Finite Elemente (12 Punkte)

* Lösung *

7.1. Lösung:

$$\underbrace{\int_{-4}^{2}}_{0.5} \overbrace{w\left(\frac{\partial\Theta}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\right) dx = 0}^{0.5} \quad \underbrace{\forall w}_{0.5} \tag{9}$$

Partielle Integration des Terms mit der räumlichen Ableitung sowie Einsetzen der Randbedingungen:

$$\alpha\int_{-4}^{2} w\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\,dx = \underbrace{-\alpha\int_{-4}^{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\,dx}_{0.5} \overbrace{+\alpha\left[w\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right]_{-4}^{2}}^{0.5} \tag{10}$$

$$= -\alpha\int_{-4}^{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\,dx + \alpha\; w(2)\;\frac{\partial\Theta}{\partial x}\bigg|_{x=2} - \alpha\; w(-4)\;\frac{\partial\Theta}{\partial x}\bigg|_{x=-4} \tag{11}$$

Mit $w(2) = 0$ aufgrund der Dirichlet-Randbedingung 0.5 und $\phi = k\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big|_{x=-4} \Rightarrow \frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big|_{x=-4} = \frac{\phi}{k}$ aus der Neumann-Randbedingung 0.5 ergibt sich insgesamt:

$$\int_{-4}^{2} w\frac{\partial\Theta}{\partial t}\,dx + \underbrace{\int_{-4}^{2}\alpha\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\,dx + \frac{\alpha\phi}{k}w(-4)}_{0.5} = 0 \tag{12}$$

$\frac{4}{4}$

7.2. Lösung:

$x = -4 \Rightarrow$ Neumann-Randbedingung, denn es wird ein Fluss (Ableitung der Temperatur) aufgeprägt 0.5

$x = 2 \Rightarrow$ Dirichlet-Randbedingung, denn es wird ein Funktionswert aufgeprägt 0.5

$\frac{1}{1}$

7.3. Lösung: Isoparametrische Darstellung:

$$x(\xi) = \underbrace{\sum_{i=1}^{2}}_{0.5} \phi_i^e(\xi) x_i \quad 0.5 \tag{13}$$

Für das gegebene globale Element gilt $x_1 = x_k$ und $x_2 = x_{k+1}$ 0.5 .

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \frac{1-\xi}{2} x_k + \frac{1+\xi}{2} x_{k+1} \quad 0.5 && (14) \\ &= \frac{\xi}{2}(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2}(x_{k+1} + x_k) + \left[\frac{1}{2} x_k - \frac{1}{2} x_k\right] && (15) \\ &= x_k + \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2}(1 + \xi) && (16) \end{aligned}$$

$\frac{2}{2}$

7.4. Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{21}^e &= \underbrace{\int_{-1}^{1}}_{0.5} \overbrace{\phi_2^e(\xi)\phi_1^e(\xi)}^{0.5} \, d\xi \underbrace{\left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|}_{0.5} && (17) \\ &= \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{(1+\xi)}{2}\frac{(1-\xi)}{2}}_{0.5} \, d\xi \left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right| && (18) \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1-\xi^2}{4} \, d\xi \left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right| && (19) \\ &= \underbrace{\left[\frac{1}{4}\left(\xi - \frac{1}{3}\xi^3\right)\right]_{-1}^{1}}_{0.5} \left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right| && (20) \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right] \left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right| \tag{21}$$

$$= \frac{1}{3} \left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right| \quad 0.5 \tag{22}$$

Berechnung der Ableitung der Transformation:

$$\left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right| = \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \quad 0.5 \tag{23}$$

Insgesamt:

$$\mathbf{M}_{21}^e = \frac{x_{k+1} - x_k}{6} \quad 0.5 \tag{24}$$

$\frac{4}{4}$

7.5. Lösung: Dimension 1, skalar, 1×1 1 $\frac{1}{1}$

$\sum_{A7} = \frac{12}{12}$

8. Aufgabe: Finite Volumen (13,5 Punkte)

* Lösung *

8.1. Lösung:

Integrale Form:

$$\int_\Omega \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \lambda \nabla \cdot \nabla T\,\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{25}$$

Richtige Wahl des Integrationsgebiets: 0,5

Richtige integrale Form: 1

Durch Einsetzen des Satz von Gauss folgt

$$\int_V \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}V - \lambda \oint_{\partial V} \nabla T \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = 0 \qquad 0{,}5 \tag{26}$$

$\frac{2}{2}$ **8.2. Lösung:**

Da die Luft als isotherm und mit konstanter Temperatur betrachtet werden soll, muss auf den Raendern: oben, unten und rechts eine Dirichlet-Randbedingung vorgegeben werden. 1 Anders als die am Rand zwischen Kühlkörper und Transistor vorgegeben Neumann-Randbedingung, lässt sich diese bei zellzentrierter Anordnung der Kontrollvolumen nicht direkt in die diskretisierte Gleichung einsetzen. 1 $\frac{2}{2}$

8.3. Lösung: Eine valide Diskretisieren ist alles, was das Gebiet lücken los ausfüllt.. Vor allem Rechtecke machen bei dieser Geometrie Sinn. 1 V_0 sollte am linke Rand liegen und T_0 mitting im Volumen. 0,5 + 0,5 $\frac{2}{2}$

8.4. Lösung: Die integrale Form für das Kontrollvolumen V_0 ergibt sich durch Integration über V_0:

$$\int_{V_0} \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}V - \lambda \oint_{\partial V_0} \nabla T \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = 0 \qquad 1 \tag{27}$$

$\frac{1}{1}$

8.5. Lösung: Zur Diskretisierung der Flussterme werden die verbleibenden Ableitungen auf den inneren Rändern mittels finiter Differenzen diskretisiert. Am linken Rand wird daneben die Neumann-Randbedingung eingesetzt.

$$\lambda \oint_{\partial V_0} \nabla T \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{k} \lambda \int\limits_{\partial V_{0_i}} \nabla T \cdot \mathbf{n_i} \, \mathrm{d}s_i \tag{28}$$

$$= \dot{q}_x \int\limits_{\partial V_{0_l}} 1 \, \mathrm{d}s_l + \lambda \sum_{i=2}^{k} \frac{T_i - T_0}{\Delta r_i} \int\limits_{\partial V_{0_i}} 1 \, \mathrm{d}s_i \tag{29}$$

$$= \dot{q}_x \Delta s_l + \lambda \sum_{i=2}^{k} \frac{T_i - T_0}{\Delta r_i} \Delta s_i \tag{30}$$

Aufstellen der Summenform mit k Summanden ($k :=$ Anzahl der Kanten): 1
Approximation der Gradienten mit zentralen Differenzen: 1
Einsetzen der Randbedingung: 1
Auflösen aller Randlängen: 0.5
Anpassen der Summe ($i = 2$ oder bis $k - 1$) 0,5
Ein Problem entsteht falls ein Volumen gewählt wird, welches auch am oberen oder unteren Rand liegt. Da dort laut Aufgabenstellung eine Dirichlet Randbedingung gilt. Falls ein solches Volumen genutzt wird muss der entsprechende Rand ebenfalls separat berücksichtigt werden. Die Approximation ist dann über eine einseitige Finite Differenz durch zu führen z.b.: $\frac{T_u - T_0}{r_u}$ dabei ist zu beachten, dass der Abstand r_u nur der hälfte des Abstands von Unbekannten entspricht. Falls ein Volumen gewählt wird, welches nur mit dem Knoten am linken Rand angrenzt (z.B. ein Dreieck) ist die volle Punktzahl auch ohne Betrachtung der Randbedingung zu geben. $\frac{4}{4}$

8.6. Lösung: Zur vollständigen Diskretisierung muss noch in der Zeit diskretisiert werden. Vereinfachung der Zeitableitung mithilfe der Volumenmittelung: Mit Volumenmittelung vereinfacht sich der zeitliche Term zu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} T \, \mathrm{d}V \approx \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} T_0 \int_{V_0} \mathrm{d}V}_{0,5} = \frac{\partial}{\partial t} T_0 \underbrace{|V_o|}_{0,5} \tag{31}$$

Mit dem expliziten Eulerverfahren ergbit sich:

$$0 = \underbrace{\frac{T_0^{n+1} - T_0^n}{\Delta t} |V_0|}_{0,5} - \dot{q}_x \Delta s_l - \sum_{i=2}^{k} \lambda \frac{\Delta s_i}{\Delta r_i} \left(T_i^n - T_0^n\right) \tag{32}$$

Alternativ kann auch eine andere Zeitdiskretisierung gewählt werden, solange die Gleichung konsistent diskretisiert wird.

0,5 für die richtige Wahl aller Zeitlevels. $\frac{2}{2}$

$\sum_{A3} = \frac{13}{13}$

9. Aufgabe: Fehler (12 Punkte)

* Lösung *

9.1. Lösung:

Nach dem Satz von Lax muss ein Verfahren konsistent und stabil sein, damit es konvergiert. 2

9.2. Lösung: Für Konsistenz muss gelten: $\lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} ||L - L_\Delta|| \stackrel{!}{=} 0$ 1

Nachweis:

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} ||L - L_\Delta|| = \lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} \left|\left| \underbrace{\underbrace{\mathcal{O}(\Delta t)}_{0} + \underbrace{\mathcal{O}(\Delta x^2)}_{0}}_{1} \right|\right| = 0$$

Damit ist das Verfahren konsistent. 1

3/3

9.3. Lösung: Das Verfahren ist stabil, wenn gilt: $\left|\left|\frac{V^{n+1}}{V^n}\right|\right| \leq 1$ 1

$$\left|\left|\frac{V^{n+1}}{V^n}\right|\right| = \sqrt{\underbrace{1 + \frac{a^2 \Delta t^2}{\underbrace{\Delta x^2}_{>0}} \underbrace{\sin^2(k\Delta x)}_{>0}}_{>1}} > 1. \quad 1 \tag{33}$$

Daraus folgt, das Verfahren ist immer instabil. 1

3/3

9.4. Lösung:

Nach Hadamard ist ein Anfangswertproblem korrekt gestellt, wenn für das Problem eine eindeutige Lösung existiert 1 und diese stetig von den Daten/Randbedingungen abhängt 1 .

$\frac{2}{2}$

9.5. Lösung:

Vorteil: Nach Von-Neumann Stabilitätsanalyse unbedingt stabil. 1 Nachteil: Höherer Aufwand durch notwendige Lösung eines Gleichungssystems. 1

$\frac{2}{2}$

$$\sum_{A4} = \frac{12}{12}$$