RWTH Aachen · AVT **Systemverfahrenstechnik** · 52056 Aachen · **Prof. Alexander Mitsos, Ph.D.**

Schriftliche Prüfung: Aufgaben des AVT-Teils. Jeder Punkt entspricht 1 Minute.

Simulationstechnik

Sommersemester 2020

1. Aufgabe: Fragen (21,5 Punkte)

1.1. Was ist der Unterschied zwischen konzentrierten und verteilten Systemen? Mit welchen Gleichungen werden die Systeme jeweils beschrieben?

(2 Punkte)

1.2. Wie kann man ein zeitvariantes nichtlineares dynamisches System in ein zeit**in**variantes nichtlineares dynamisches System umformulieren? Wie verändern sich dabei die Systemgleichungen und die Anfangsbedingungen?

(1,5 Punkte)

1.3. Was ist der Unterschied zwischen unbeaufsichtigtem und überwachtem maschinellem Lernen?

(2 Punkte)

1.4. Beschreiben Sie kurz das Problem der Überanpassung beim maschinellen Lernen. Wie kann eine Aufteilung der Daten in eine Trainings- und eine Validierungsmenge helfen, Überanpassung zu vermeiden?

(2 Punkte)

1.5. Was besagt das Abtasttheorem von Shannon? **(1 Punkt)**

1.6. Gegeben ist die folgende Differentialgleichung für konvektiven Temperaturverlust

$$\dot{T}(t) = -kA \cdot (T(t) - T^*)$$

mit Anfangswert $T(t_0) = T_0$, bekanntem Wärmeübertragungskoeffizienten kA und bekannter Umgebungstemperatur T^*. Formen Sie durch Wahl einer geeigneten Variable θ diese Gleichung in eine autonome lineare Differentialgleichung um. Geben Sie die neue Anfangsbedingung an.

(1,5 Punkte)

1.7. Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = 1 - x(t) \cdot \exp(-0,5 \cdot x^2(t)) \tag{1}$$

mit dem Anfangswert $x(t = 0s) = 1$.

a) Geben Sie die allgemeine Gleichung des expliziten Euler-Verfahrens für die allgemeine Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ bei Verwendung einer Schrittweite Δt an. Geben Sie darüber hinaus die Formel zur Abschätzung des lokalen Fehlers zweiter Ordnung an.

b) Aus welchem mathematischen Verfahren leitet sich das explizite Euler-Verfahren ab?

c) Approximieren Sie den Zustand des Systems (1) zum Zeitpunkt $t = 3s$ mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens für die Schrittweite $\Delta t = 3s$.

d) Welche quantitative Veränderung des Fehlers in der Approximation des tatsächlichen Systemverhaltens erwarten Sie, wenn Sie stattdessen die Schrittweite $\Delta t = 1s$ verwenden?

e) Nennen Sie jeweils einen Nachteil und einen Vorteil der Approximation mittels des expliziten Euler-Verfahrens gegenüber der Approximation mittels des impliziten Euler-Verfahrens.

(6 Punkte)

1.8. Der hybride Automat in Abb. 1 beschreibt die Kühlung eines Kühlschranks, welche bei Erreichen einer Temperatur T_{ein} bzw. T_{aus} sprunghaft ein- bzw. ausschaltet.

a) Benennen Sie die Elemente (1) bis (5) des hybriden Automaten.

Hinweis: Schreiben Sie nicht auf das Aufgabenblatt.

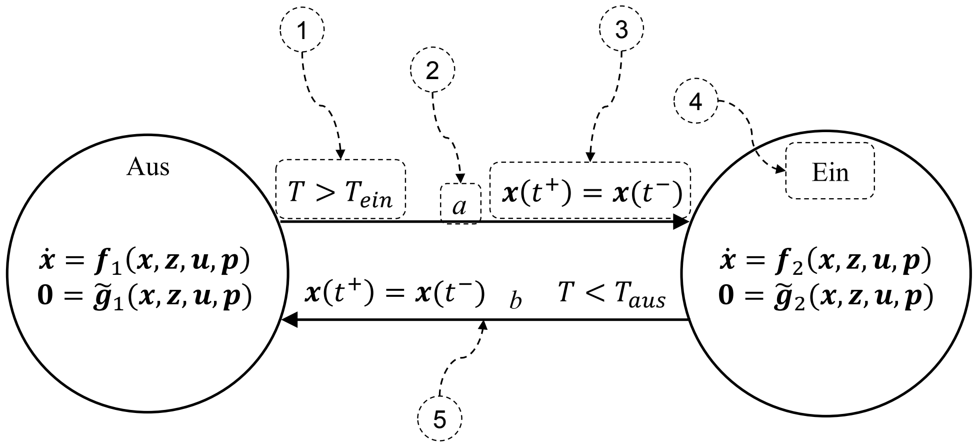


Abbildung 1: Hybrider Automat

b) Wie sollte T_{aus} in Relation zu T_{ein} gewählt werden („kleiner“, „kleiner gleich“, „gleich“, „größer gleich“ oder „größer“)? Begründen Sie physikalisch.

c) Muss die Anfangsbedingung $T(t_0)$ zwischen T_{aus} und T_{ein} liegen für einen physikalisch sinnvollen Verlauf? Begründen Sie.

(5,5 Punkte)

2. Aufgabe: Systemtheorie (20 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten Sie einen Feder-Masse-Schwinger (Abb. 2). Der Bewegung der Masse wirkt dabei eine Federkraft F_F entgegen, die proportional zur Auslenkung der Feder s ist, d.h. $F_F(t) = D \cdot s(t),\ D > 0$. Zudem wirkt eine Reibkraft F_R, die proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist, d.h. $F_R(t) = c \cdot \dot{s}(t) \cdot |\dot{s}(t)|,\ c > 0$. Die Masse m ist bekannt. s_0 bezeichnet die Länge der ungedehnten Feder.

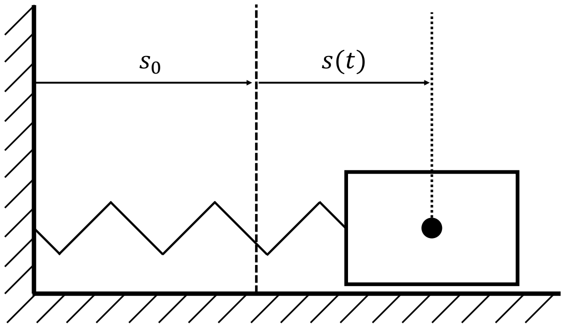


Abbildung 2: Feder-Masse-Schwinger

2.1. Stellen Sie eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Auslenkung $s(t)$ auf. Verwenden Sie ausschließlich Größen, die in der Aufgabenstellung genannt sind. **(1,5 Punkte)**

Sie wollen nun die Stabilität des Systems mit der direkten Ljapunow-Methode prüfen.

2.2. Wählen Sie eine geeignete physikalisch-motivierte Ljapunow-Funktion aus. Schreiben Sie diese explizit als Funktion von $s(t)$ und $\dot{s}(t)$ auf. **(2 Punkte)**

Im Folgenden wird das Systemverhalten durch das nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{2}$$

$$\dot{x}_2(t) = -\alpha \cdot x_1(t) - \beta \cdot x_2(t) \cdot |x_2(t)| \tag{3}$$

beschrieben mit $\alpha, \beta > 0$. Als Ljapunow-Funktion wird $V(\boldsymbol{x}) = \frac{\alpha}{2} \cdot x_1^2 + \frac{1}{2} \cdot x_2^2$ verwendet.

2.3. Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{x}_R = (0\ 0)^T$ eine Ruhelage des Systems (2)-(3) ist. **(1 Punkt)**

2.4. Zeigen Sie, dass die Funktion $V(\boldsymbol{x}) = \frac{\alpha}{2} \cdot x_1^2 + \frac{1}{2} \cdot x_2^2$ unbeschränkt positiv definit ist. **(1,5 Punkte)**

2.5. Zeigen Sie mit Hilfe der direkten Ljapunow-Methode, dass die Ruhelage $\boldsymbol{x}_R = (0\ 0)^T$ des Systems (2)-(3) global stabil ist. Gehen Sie in dieser Aufgabe davon aus, dass bereits gezeigt wurde, dass $V(\boldsymbol{x}) = \frac{\alpha}{2} \cdot x_1^2 + \frac{1}{2} \cdot x_2^2$ unbeschränkt positiv definit ist. **(3,5 Punkte)**

2.6. Verwenden Sie das Theorem von LaSalle, um zu zeigen, dass die Ruhelage auch global asymptotisch stabil ist. **(2 Punkte)**

Im letzten Teil der Aufgabe wiederholen Sie Ihre Untersuchungen mit Hilfe der indirekten Ljapunow-Methode.

2.7. Geben Sie die Taylorreihenentwicklung erster Ordnung um einen Punkt $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*\ x_2^*)^T$ für das System (2)-(3) an. Geben Sie die Einträge aller auftretenden Vektoren/Matrizen explizit an.
Hinweis: Es gilt $\frac{\partial(z \cdot |z|)}{\partial z} = 2 \cdot |z|$. **(3,5 Punkte)**

Das um die Ruhelage linearisierte System wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

2.8. Charakterisieren Sie das Systemverhalten des linearisierten Systems (4).

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$.

b) Klassifizieren Sie anhand der Eigenwerte das Systemverhalten des linearisierten Systems nach Schwingungsfähigkeit und Stabilität (asymptotisch stabil, grenzstabil, instabil). Begründen Sie Ihre Aussagen.

c) Zeichnen Sie das Phasenportrait und benennen Sie es korrekt.
Hinweis: Zeichnen Sie ggfs. auch die Drehrichtung ein und zeigen Sie explizit durch eine Nebenrechnung, wie Sie die Drehrichtung bestimmt haben.

d) Setzen Sie Ihre Ergebnisse aus b) hinsichtlich der Stabilität des linearisierten Systems (4) in Bezug zu der Aussage, dass das nichtlineare System (2)-(3) global asymptotisch stabil ist (vgl. **2.5**). Handelt es sich hier um einen Widerspruch? Begründen Sie. **(5 Punkte)**

3. Aufgabe: Parameterschätzung (19 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten Sie die Parameterschätzung für elektrische Systeme. Zunächst betrachten Sie einen Schaltkreis (Abb. 3) mit den Zuständen $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} i_\mathrm{L}(t) & u_\mathrm{C}(t) \end{pmatrix}^T$, den Parametern $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} R & L & C \end{pmatrix}^T$, dem Eingang $\boldsymbol{u}(t) = u_\mathrm{in}(t)$ und den Ausgängen $\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} i_\mathrm{R}(t) & u_\mathrm{R}(t) \end{pmatrix}^T$.

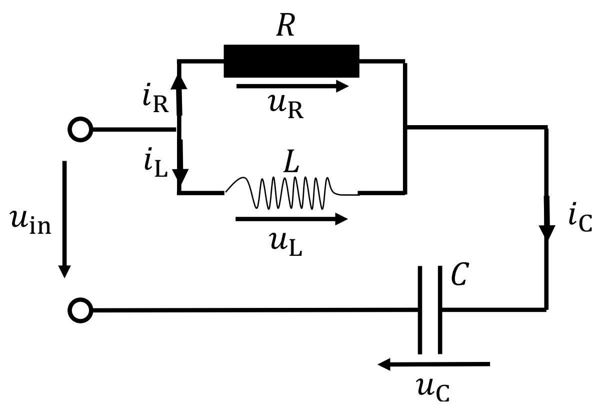


Abbildung 3: Elektrischer Schaltkreis 1

Das System wird mit folgender Zustandsraumdarstellung beschrieben:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}}{\mathrm{d}t}\right|_t &= -\frac{1}{L}u_\mathrm{C}(t) + \frac{1}{L}u_\mathrm{in}(t) \\ \left.\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t}\right|_t &= -\frac{1}{C}i_\mathrm{L}(t) - \frac{1}{CR}u_\mathrm{C}(t) + \frac{1}{CR}u_\mathrm{in}(t) \\ i_\mathrm{R}(t) &= -\frac{1}{R}u_\mathrm{C}(t) + \frac{1}{R}u_\mathrm{in}(t) \\ u_\mathrm{R}(t) &= -u_\mathrm{C}(t) + u_\mathrm{in}(t) \end{aligned} \tag{5}$$

3.1. Stellen Sie zunächst für das allgemeine System (6) die Definitionen der Zustands- und Ausgangssensivitäten und die Sensitivitätsgleichungen auf.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}(t)) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}(t)) \\ \boldsymbol{x}(0) &= \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{p}) \end{aligned} \tag{6}$$

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass die Eingänge $\boldsymbol{u}$ unabhängig von den Parametern $\boldsymbol{p}$ sind.

(3,5 Punkte)

3.2. Stellen Sie die Sensitivitätsgleichungen bezüglich der Parameter $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} R & L & C \end{pmatrix}^T$ für das Modell (5) auf. Sie müssen keine Anfangsbedingungen angeben. **(5 Punkte)**

Im Folgenden soll der Widerstand R für ein Bauteil bestimmt werden. Dieses ist in den in Abb. 4 gezeigten Schaltkreis eingebaut.

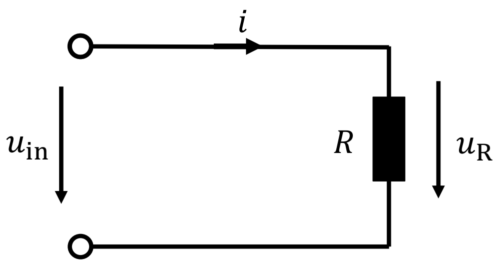


Abbildung 4: Elektrischer Schaltkreis 2

Dieser Schaltkreis wird mit folgender Gleichung beschrieben:

$$u_{\text{in}} = R \cdot i \tag{7}$$

3.3. Stellen Sie zunächst das allgemeine Parameterschätzproblem nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate für algebraische Systeme auf und benennen Sie alle vorkommenden Größen. Was ist die notwendige Bedingung dafür, dass ein gegebener Parametervektor $\boldsymbol{p}$ eine Lösung des Parameterschätzproblems ist? **(4 Punkte)**

3.4. Stellen Sie nun das Parameterschätzproblem für den Parameter R im System (7) auf. **(2 Punkte)**

3.5. Leiten Sie **aus der notwendigen Bedingung für die Lösung des Parameterschätzproblems** eine Formel für den Widerstand her. Berechnen Sie diesen anschließend mit Hilfe der in Tab. 1 gegebenen Messwerten. **(4,5 Punkte)**

i/A	$\tilde{u}_{\text{in}}/V$
24	100
52	200
69	300

Tabelle 1: Gemessene Spannung $\tilde{u}_{\text{in}}$ bei eingestellter Stromstärke i.

4. Aufgabe: DA-Systeme (20 Punkte)

Sie möchten für die Tumorforschung ein Modell in Modelica implementieren. Die Tumorzellen $T(t)$ können durch körpereigene Immunzellen $E(t)$ inaktiviert werden. Tumor- und Immunzellen bilden hierzu zuerst einen reversiblen Komplex $K(t)$. Bei erfolgreicher Inaktivierung löst sich der Komplex in die Immunzelle und eine inaktivierte Tumorzelle $D(t)$ auf. Die Kinetik der Komplexbildung und Inaktivierung folgt

$$E + T \rightleftharpoons K \xrightarrow{k_2} E + D.$$

Das Tumorgewebe kann mit dem DA-System (8)-(14) modelliert werden.

$$\dot{E}(t) = E_{zu}(t) - R_1(t) + R_2(t) \tag{8}$$
$$\dot{T}(t) = k_T\,(T(t))^3 - R_1(t) - T_{ab}(t) \tag{9}$$
$$\dot{K}(t) = R_1(t) - R_2(t) \tag{10}$$
$$\dot{D}(t) = R_2(t) - D_{ab}(t) \tag{11}$$
$$K(t) = G\,(E(t))^2\,T(t) \tag{12}$$
$$0 = R_2(t) - k_2 K(t) \tag{13}$$
$$c_D(t) = \frac{D(t)}{E(t) + T(t) + D(t) + K(t)} \tag{14}$$

k_T und k_2 sind konstante Reaktionsraten, $R_1(t), R_2(t)$ normalisierte Reaktionsraten, G die Gleichgewichtskonstante und $c_D(t)$ die Konzentration an inaktivierten Tumorzellen. $E_{zu}(t)$, $T_{ab}(t)$ und $D_{ab}(t)$ sind Eingänge.

Nehmen Sie für die Teilaufgaben 1-4 an, dass die Tumorzellen und inaktivierten Tumorzellen nicht in umliegendes Gewebe abwandern, d.h. $T_{ab}(t) = D_{ab}(t) = 0$.

4.1. Geben Sie an welche Gleichungen des DA-Systems (8)-(14) differentiell und welche algebraisch sind. Ordnen Sie alle vorkommenden Größen des DA-Systems (8)-(14) den differentiellen Variablen, den algebraischen Variablen und den Parametern zu.

*Hinweis: Sie müssen $\boldsymbol{u}(t)$ **nicht** angeben.* **(2,5 Punkte)**

4.2. Stellen Sie die Inzidenzmatrix auf und überprüfen Sie damit, ob es sich um ein Index-1 System handeln kann. Begründen Sie kurz ihr Ergebnis. **(3 Punkte)**

4.3. Bestimmen Sie den differentiellen Index des Systems. Geben Sie Zwischenschritte an und machen Sie versteckte Gleichungen kenntlich. **(3,5 Punkte)**

4.4. Durch Indexreduktion des Systems (8)-(14) erhält man ein überbestimmtes System.
a) Warum sollten DA-Systeme mit Index-1 und nicht etwa mit Index-0 für die Simulation verwendet werden?
b) Geben Sie ein mögliches Index-1 System zur Simulation an. Folgen Sie hierbei den Empfehlungen der Vorlesung. Geben Sie algebraische und differentielle Variablen Ihres Index-1 DA-Systems explizit an.
c) Wie viele Anfangsbedingungen können Sie für Ihr Index-1 System frei wählen? Begründen Sie kurz. Für welche Variablen würden Sie Anfangsbedingungen wählen? **(5,5 Punkte)**

Im Folgenden soll ein Modell der Niere strukturiert in Modelica implementiert werden (vgl. Abb. 5). Zwischen den drei Modellen findet ein Austausch der Tumorzellen und der inaktivierten Tumorzellen $T_{ab}(t), D_{ab}(t) \neq 0$ statt. Das Modell `niere` ist hierzu mit den beiden Konnektoren `b1` und `b2` des Typs `blut` mit den anderen Modellen verknüpft. Es findet ein **Abbau** der **inaktivierten Tumorzellen** $D_{abbau}(t)$ in der `niere` statt. In der `niere` werden **keine** Turmorzellen und **keine** inaktivierten Tumorzellen gespeichert. $D_{abbau}(t)$ ist abhängig von der Konzentrationen c_D im Tumorgewebe und im gesundem Gewebe:

$$D_{abbau}(t) = k_{abbau}\left(c_{D_{gesundes\_gewebe}}(t) + c_{D_{tumor}}(t)\right)^2 \tag{15}$$

Benutzen Sie im Folgenden für alle Variablen einen generischen Typ und verwenden Sie nur die in Abb. 5 dargestellten Größen.

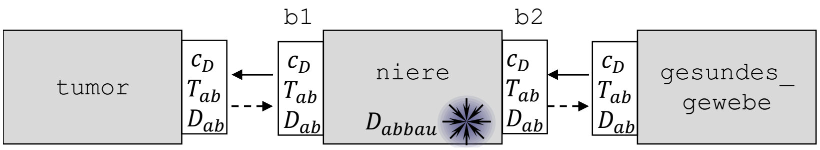


Abbildung 5: Struktur des Systems.

4.5. Implementieren Sie den Konnektor `blut` in Modelica. **(2 Punkte)**

4.6. Ergänzen Sie den unten angegeben Code des Modells `niere`. Verwenden Sie die dargestellte Struktur mit den zwei Konnektoren `b1` und `b2` des Typs `blut`.
*Hinweis: Schreiben Sie **nicht** auf die Aufgabenstellung. Ordnen Sie Ihren Code eindeutig den Stellen (A) und (B) zu.*

```
model niere
    Parameter real k_abbau = 0.1;
    // fehlender Code (A): ...
equation
    // fehlender Code (B): "Zellenbilanz" ...
end niere;
```

(3,5 Punkte)

5. Aufgabe: Thermodynamische/diskrete Systeme (19,5 Punkte)

In dem in Abb. 6 gezeigten Reaktor wird aus einem Rohstoff A ein Produkt B hergestellt. Der Stoffmengenstrom von A ($F_{\mathsf{A}}(t)$) mit molarer Enthalpie ($h_{\mathsf{A}}(t)$) tritt in den Reaktor ein bis dieser voll ist. Das Zulaufventil wird geschlossen und es findet die **kontinuierliche** Umwandlung von A in das Produkt B statt. Dabei übt ein Motor über einen Rührer das Moment $M(t)$ bei einer Winkelgeschwindikeit $\omega(t)$ aus und ein Heizmantel überträgt den Wärmestrom $\dot{Q}(t)$. Nachdem A umgewandelt ist, wird das Ablaufventil geöffnet und der Stoffmengenstrom des Produktes ($F_{\mathsf{B}}(t)$) mit molarer Enthalpie ($h_{\mathsf{B}}(t)$) verlässt den Reaktor.

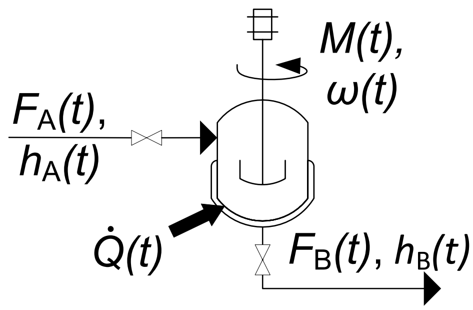


Abbildung 6: Skizze eines gerührten, beheiztern Reaktors zur Herstellung von B aus A.

5.1. a) Wie lautet die allgemeine Bilanzgleichung für eine beliebige extensive Größe? Benennen Sie alle Terme korrekt.
b) Stellen Sie eine Energiebilanz um den Reaktor auf. Verwenden Sie dazu alle Größen, die in Abb. 6 zu sehen sind und nutzen Sie die Vorzeichenkonvention aus der Vorlesung.

(5,5 Punkte)

5.2. Der Konzentrationsverlauf von A und B während der Reaktion wird durch das folgende kontinuierliche Differentialgleichungssystem mit den Konzentrationen $c_A(t)$ und $c_B(t)$ und der konstanten Reaktionsrate k beschrieben:

$$\begin{aligned} \dot{c}_A(t) &= -k \cdot c_A^2(t) \\ \dot{c}_B(t) &= k \cdot c_A^2(t) \\ c_A(t=0) &= c_{A,0} \\ c_B(t=0) &= c_{B,0} \end{aligned} \tag{16}$$

Stellen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (16) durch die aus der Vorlesung bekannte Approximation mittels Differenzengleichung zur **zeitdiskreten** Modellierung auf. Verwenden Sie dazu das feste Abtastintervall $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. **(2 Punkte)**

5.3. Der Konzentrationsverlauf des Produktes B soll nun während der Reaktion experimentell gemessen werden. Folgende zwei Messverfahren sind gegeben:
a) ein Messgerät, das die Konzentration genau angibt, wird alle 30 min exakt abgelesen,
b) Teststreifen, die die gerundete Konzentration anzeigen, werden alle 30 min verwendet,
Zeichnen Sie den gemessenen Konzentrationsverlauf für die Messverfahren a) - b) qualitativ in die zugehörigen Diagramme in Abb. 7 ein. Nutzen Sie dazu das vorgegebene Diskretisierungsgitter. Tragen Sie zudem die dazugehörigen Systemklassen in die Felder darunter ein.
Hinweis: Sie dürfen in dieser Teilaufgabe ausnahmsweise auf das Aufgabenblatt schreiben.

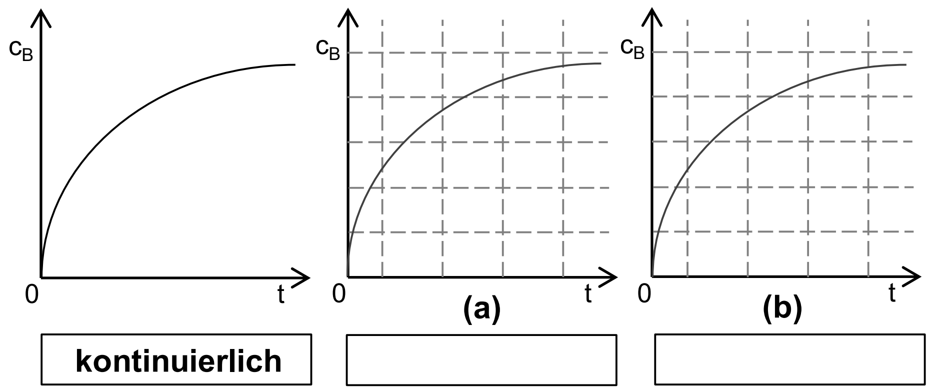


Abbildung 7: Kontinuierlicher Konzentrationsverlauf von B und einzutragende Messverläufe.

(3 Punkte)

5.4. Der Reaktor aus Abb. 6 soll nun für ein zusätzliches Produktionsprogramm verwendet werden, das aus Rohstoff C ein Produkt D herstellt. Dies passiert nach folgendem Schema: Im Anfangszustand ist der Reaktor **leer**. Von diesem Zustand ausgehend, kann er entweder **mit A befüllt** werden und erreicht so den Zustand **voll A** oder er wird **mit C befüllt** und ist danach **voll C**. Vom Zustand **voll A** kann die **Reaktion zu B** stattfinden, sodass er danach **voll B** ist. War der Reaktor **voll C**, kann er über die **Reaktion zu D** nur den Zustand **voll D** erreichen. Durch **leeren von B** bzw. **leeren von D** kehrt der Reaktor in den Zustand **leer** zurück.

a) Modellieren Sie den beschriebenen **ereignisdiskreten** Vorgang als Petrinetz. Beschriften Sie Stellen und Transitionen eindeutig. Geben Sie die Markierung des Anfangszustands an.
b) Ist das Petrinetz aus a) beschränkt? Begründen Sie kurz.
c) An welcher Stelle des Petrinetzes aus a) gibt es einen Konflikt? Begründen Sie kurz.
d) Beschreiben Sie, wie man das Petrinetz aus a) um n weitere unabhängig voneinander befüllbare Reaktoren mit gleichem Produktionsprogramm ergänzen kann.
e) Welche aus der Vorlesung bekannte Alternative zu Petrinetzen kennen Sie, um ereignisdiskrete Systeme zu modellieren? Nennen Sie den aus der Vorlesung bekannten Vorteil von Petrinetzen gegenüber dieser Alternative. **(9 Punkte)**

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik

Sommersemester 2020

---

1. Aufgabe: Fragen (21,5 Punkte)

* Lösung *

1.1. Lösung: Der Unterschied zwischen konzentrierten und verteilten Systemen ist, dass konzentrierte Systeme ortsunabhängig (0,5 TP) sind, daher werden sie mittels gewöhnlicher Differentialgleichungen beschrieben (0,5 TP). Verteilte Systeme sind ortsabhängig (0,5 TP), sie werden mittels partieller Differentialgleichungen beschrieben (0,5 TP).

Bewertung: Bei Nennung von „Zustandsgleichungen“, „DA-Systemen“, etc. zur Beschreibung konzentrierter Systeme werden ebenfalls 0,5 TP vergeben. **(2 Punkte)**

1.2. Lösung: Man kann ein zeitvariantes nichtlineares System in ein zeitinvariantes nichtlineares System umformulieren, indem man eine zusätzliche differentielle Variable $x_{\mathrm{n+1}}$ hinzufügt, welche die Zeit in den anderen Gleichungen ersetzt (0,5 TP), die differentielle Gleichung $\dot{x}_{\mathrm{n+1}}(t) = 1$ definiert (0,5 TP) und die Anfangsbedingung $x_{\mathrm{n+1}}(t_0) = t_0$ ergänzt (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(1,5 Punkte)**

1.3. Lösung: Der Unterschied zwischen unbeaufsichtigem und überwachtem Lernen ist, dass unbeaufsichtigtes Lernen auf unstrukturierten Daten basiert (1 TP), während überwachtes Lernen auf Eingangs-Ausgangs (Daten) Paaren basiert (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

1.4. Lösung: Überanpassung liegt vor, wenn durch eine Erhöhung der Modellkomplexität die Vorhersagefehler für die Trainingsmenge zwar weiter reduziert werden, die Fähigkeit, zusätzliche Daten zu prädizieren, aber abnimmt (1 TP). Zur Vermeidung von Überanpassung können die Daten in eine Trainings- und eine Validierungsmenge aufgeteilt werden. Die Parameter des Modells werden nur anhand der Trainingsmenge geschätzt, die Qualität des Modell wird hingegen anhand der Validierungsmenge bewertet (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

1.5. Lösung: Ein zeitkontinuierliches Signal mit einer Maximal-Frequenz f_{max} muss mit einer Frequenz $f_S > 2 \cdot f_{\mathsf{max}}$ abgetastet werden, um eine zeitdiskrete Rekonstruktion in guter Näherung zu ermöglichen (1 TP).

Bewertung: Es reicht auch nur die Ungleichung $f_S > 2 \cdot f_{\mathsf{max}}$ anzugeben. Falls die Parameternamen für f_S und f_{max} anders gewählt wurden, müssen diese erklärt werden, um die Punkte zu erhalten. **(1 Punkt)**

1.6. Lösung: Die rechte Seite ist linear in der Variable $\theta = T - T^*$, d.h., in der Temperaturdifferenz. Da somit $\dot{\theta} = \dot{T}$ gilt, lautet eine äquivalente autonome lineare Differentialgleichung

$$\dot{\theta}(t) = -kA \cdot \theta(t) \text{ (1 TP)} \quad \text{mit} \quad \theta(t_0) = T(t_0) - T^* \text{ (0,5 TP)}.$$

Bewertung: Siehe oben. **(1,5 Punkte)**

1.7. Lösung:

a) Die allgemeine Gleichung für das explizite Euler-Verfahren ist gegeben durch

$$\underbrace{x_{n+1}}_{\text{0,5 TP}} = \underbrace{x_n}_{\text{0,5 TP}} + \underbrace{\Delta t \cdot f(t_n, x_n)}_{\text{0,5 TP}}.$$

Der Fehler zweiter Ordnung wird abgeschätzt zu

$$\Theta(\Delta t_n^2) = \underbrace{\frac{\Delta t^2}{2}}_{\text{0,5 TP}} \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=t_n}}_{\text{0,5 TP}}.$$

Bewertung: Statt $f(t_n, x_n)$ ist auch $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t_n}$ oder $\dot{x}(t_n)$ möglich.

b) Das explizite Euler-Verfahren folgt aus der Taylorreihenentwicklung erster Ordnung (0,5 TP) bzw. aus einer Linearisierung.

c) Wir wenden die Formel von oben an, d.h.

$$x(t = 3s) = 1 + 3 \cdot \big(1 - 1 \cdot \exp(-0,5 \cdot 1^2)\big) \approx 2,1804. \qquad (1\ \text{TP})$$

d) Gemäß der oben angegebenen Formel für den Fehler der Approximation ist bei einer Verringerung der Schrittweite auf ein Drittel von einer Reduzierung des Fehlers auf ein Neuntel auszugehen (1 TP).

e) Das explizite Euler-Verfahren ist nicht A-stabil, d.h. bei Wahl zu großer Schrittweiten können Instabilitäten und Oszillationen auftreten (0,5 TP). Die Approximation mittels des expliziten Euler-Verfahrens ist jedoch (bei gleichbleibender Schrittweite) numerisch weniger aufwendig, da die Gleichung explizit nach der gesuchten Größe aufgelöst ist (0,5 TP).

Bewertung: Es reicht für den Nachteil eine der Aussagen „nicht (A-)stabil“ oder „Oszillationen möglich“. Ebenso reicht für den Vorteil eine der Aussagen „Numerisch weniger aufwendig“ oder „Explizite Rechenvorschrift“. **(6 Punkte)**

1.8. Lösung:

a)

(1) Transitionsbedingung, guard, guard-Bedingung

(2) Symbol, Name der Kante, Name der Transition, Name

(3) Sprungbedingung, Jump, Jump-Anweisung, Sprunganweisung

(4) Name der Mode, System, Mode, Modus, Zustand

(5) Hybride Kante, Kante, Transition

Bewertung: Für jedes richtige Element 0,5 TP.

b) Es muss $T_{aus} < T_{ein}$ gelten (0,5 TP). Andernfalls würde die Kühlung, nachdem sie bei Unterschreiten von T_{aus} ausgeschaltet wird, sofort wieder eingeschaltet (1 TP).

Bewertung: Bei Angabe von $T_{aus} \leq T_{ein}$ werden bei korrekter Begründung ebenfalls volle Punkte vergeben.

c) Nein (0,5 TP), das hybride Modell ist auch über den Temperaturbereich von T_{aus} bis T_{ein} hinaus gültig (1 TP), daher kann die Anfangsbedingung $T(t_0)$ frei gewählt werden.

Bewertung: Siehe oben.

(5,5 Punkte)

2. Aufgabe: Systemtheorie (20 Punkte)

* Lösung *

2.1. Lösung: Für die Bewegung der Masse gilt folgende Differentialgleichung

$$\underbrace{m \cdot \ddot{s}(t)}_{\text{0,5 TP}} = \sum_i F_i = \underbrace{-D \cdot s(t)}_{\text{0,5 TP}} - \underbrace{c \cdot \dot{s}(t) \cdot |\dot{s}(t)|}_{\text{0,5 TP}}.$$

Bewertung: Siehe oben. **(1,5 Punkte)**

2.2. Lösung: Für mechanische Systeme bietet sich die mechanische Gesamtenergie als Ljapunow-Funktion an (1 TP). Diese besteht aus einem potentiellen und einem kinetischen Anteil und berechnet sich zu:

$$E(s,\ \dot{s}) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2}_{\text{0,5 TP}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{s}^2}_{\text{0,5 TP}}.$$

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

2.3. Lösung: Zur Überprüfung setzen wir $\boldsymbol{x}_R = (0\ 0)^T$ in das Differentialgleichungssystem ein.

$$\begin{aligned} x_{R,2} &= 0 \quad \text{(0,5 TP)} \\ -\alpha \cdot x_{R,1} - \beta \cdot x_{R,2} \cdot |x_{R,2}| &= -\alpha \cdot 0 - \beta \cdot 0 \cdot |0| = 0 \quad \text{(0,5 TP)} \end{aligned}$$

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

2.4. Lösung: Für $V(\boldsymbol{x}) = \frac{\alpha}{2} \cdot x_1^2 + \frac{1}{2} \cdot x_2^2$ gilt:

(i) $V(\mathbf{0}) = \frac{\alpha}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 0$ (0,5 TP)

(ii) $V(\boldsymbol{x}) = \frac{\alpha}{2} \cdot x_1^2 + \frac{1}{2} \cdot x_2^2 > 0$ für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$
da $\alpha > 0$ und $x_1^2 > 0$ für $x_1 \neq 0$ und $x_2^2 > 0$ für $x_2 \neq 0$ (0,5 TP)

(iii) $V(\boldsymbol{x}) \to \infty$, für $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$
da $\alpha > 0$ und $x_1^2 \to \infty$ für $|x_1| \to \infty$ und $x_2^2 \to \infty$ für $|x_2| \to \infty$ (0,5 TP)

Entsprechend ist $V(\boldsymbol{x})$ eine unbeschränkt positiv definite Funktion.

Bewertung: Siehe oben. **(1,5 Punkte)**

2.5. Lösung: Da $V(\boldsymbol{x})$ laut Aufgabenstellung eine unbeschränkt positiv definite Funktion ist, muss nur noch gezeigt werden, dass $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{\boldsymbol{x}(t)}$ eine negativ semi-definite Funktion ist. Die Zeitableitung berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{\boldsymbol{x}(t)} &= \left.\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right|_t \quad \text{(0,5 TP)} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -\alpha \cdot x_1(t) - \beta \cdot x_2(t) \cdot |x_2(t)| \end{pmatrix} \quad \text{(1 TP)} \\
&= \alpha \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) - \alpha \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) - \beta \cdot x_2(t)^2 \cdot |x_2(t)| \\
&= -\beta \cdot x_2(t)^2 \cdot |x_2(t)|. \quad \text{(1 TP)}
\end{aligned}$$

Da $x_2(t)^2 \geq 0$ und $|x_2(t)| \geq 0$ gilt, ist $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{\boldsymbol{x}(t)} = -\beta \cdot x_2(t)^2 \cdot |x_2(t)| \leq 0$, d.h. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{\boldsymbol{x}(t)}$ ist eine negativ semi-definite Funktion (0,5 TP) und die Ruhelage gemäß dem Ljapunow-Theorem global stabil (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(3,5 Punkte)**

2.6. Lösung: Zur Anwendung des Theorems von LaSalle muss als erstes die Menge $S = \left\{ \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{\boldsymbol{x}(t)} = 0 \right\}$ aufgestellt werden. Hier gilt:

$$S = \left\{ \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x_2(t) = 0 \right\}. \quad \text{(0,5 TP)}$$

Die Ableitung an einem beliebigen Punkt $\boldsymbol{x}|_S \in S$ lautet:

$$\dot{\boldsymbol{x}}|_S = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \cdot x_1(t) \end{pmatrix}. \quad \text{(0,5 TP)}$$

Diese zeigt für jeden $\boldsymbol{x}|_S \in S \neq \boldsymbol{0}$ aus S heraus (0,5 TP). Gemäß dem Theorem von LaSalle ist die Ruhelage daher global asymptotisch stabil (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

2.7. Für die Taylorreihenentwicklung erster Ordnung gilt

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \approx f(\boldsymbol{x}^*) + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\bigg|_{\boldsymbol{x}^*} (\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*) \quad \text{(0,5 TP)}$$

mit

$$f(\boldsymbol{x}^*) = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2^* \\ -\alpha \cdot x_1^* - \beta \cdot x_2^* \cdot |x_2^*| \end{pmatrix}}_{\text{1 TP}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\bigg|_{\boldsymbol{x}^*} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -2 \cdot \beta \cdot |x_2^*| \end{pmatrix}}_{\text{2 TP}}.$$

Bewertung: Siehe oben. Die ersten 0,5 TP gibt es für die richtige Formel, es kann „=“ statt „≈“ angegeben werden. Es werden explizit keine Punkte vergeben bei Nennung von Termen höherer Ordnung (da nach einer Approximation erster Ordnung gefragt ist) sowie bei einer falschen Reihenfolge der Multiplikation $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\big|_{\boldsymbol{x}^*} (\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*)$. **(3,5 Punkte)**

2.8. Lösung:

a) Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ lösen die charakteristische Gleichung

$$\det\left(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Dies führt zu der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 + \alpha = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lambda^2 = -\alpha. \quad \text{(0,5 TP)}$$

Die Eigenwerte lauten daher:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}\cdot i. \quad \text{(0,5 TP)}$$

b) Es gilt Re$(\lambda_{1,2}) = 0$, daher ist das um die Ruhelage linearisierte System grenzstabil (0,5 TP). Weiter gilt Im$(\lambda_{1,2}) \neq 0$, also ist das System schwingungsfähig (0,5 TP).

c) Gemäß der Vorlesung handelt es sich bei dem Phasenportrait um ein Zentrum (0,5 TP). Die Drehrichtung kann durch Einsetzen eines Testpunktes (z.B. $\boldsymbol{x}_T = (0\ 1)^T$) in die Systemgleichung ermittelt werden, hier z.B. $\dot{\boldsymbol{x}}|_{\boldsymbol{x}_T} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}_T = (1\ 0)^T$, womit gezeigt wird, dass das Zentrum sich im Uhrzeigersinn dreht (0,5 TP). Für das korrekte Skizzieren eines Zentrums (siehe unten) werden weiterhin 0,5 TP vergeben sowie 0,5 TP für das Einzeichnen der korrekten bzw. folgerichtigen Drehrichtung. Bei Inkonsistenzen zwischen berechneter und gezeichneter Drehrichtung bzw. bei Nichteinzeichnen einer Drehrichtung werden die letzten 0,5 TP nicht vergeben.

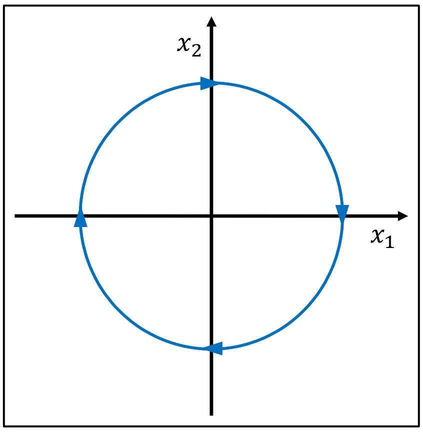


Abbildung 1: Phasenportrait

d) Die Ruhelage des nichtlinearen Systems ist global asymptotisch stabil, das um die Ruhelage linearisierte System ist hingegen grenzstabil, d.h. stabil, aber nicht asymptotisch stabil. Hierbei handelt es sich nur scheinbar um einen Widerspruch (0,5 TP), welcher sich durch den Satz von Hartman-Grobman auflösen lässt. Dieser sagt, das nur dann von der Dynamik des linearisierten Systems auf die Dynamik des nichtlinearen geschlossen werden kann, wenn kein Realteil eines Eigenwerts gleich Null ist. Dies ist hier jedoch nicht erfüllt (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. In d) können Punkte für Folgefehler vergeben werden, wenn in b) ein stabiles Verhalten identifiziert wird mit Verweis, dass gemäß des Satzes von Hartman-Grobmann keine Widersprüche bestehen. Wird in b) ein instabiles Verhalten angegeben, muss der Verweis erfolgen, dass dies mathematisch nicht möglich sein kann. **(5 Punkte)**

3. Aufgabe: Parameterschätzung (19 Punkte)

* Lösung *

3.1. Lösung: Die Sensitivitätsgleichungen für ein allgemeines System sind gegeben durch

$$\boldsymbol{S}^x = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}} \qquad \text{(0,5 TP)} \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{S}^y = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}} \qquad \text{(0,5 TP)} \tag{1b}$$

$$\dot{\boldsymbol{S}}^x = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{S}^x + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{p}} \qquad \text{(1 TP)} \tag{1c}$$

$$\boldsymbol{S}^y = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{S}^x + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{p}} \qquad \text{(1 TP)} \tag{1d}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\boldsymbol{S}^x(t=0) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_0}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}} \qquad \text{(0,5 TP).} \tag{1e}$$

Bewertung: Siehe oben.

Wird in (1a) und (1b) ein partielles Differential verwendet, gibt es keine Punkte. Wird für $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{f}$ in (1c) und (1d) ein totales Differential verwendet, kann jeweils nur max. die Hälfte der Teilpunkte in (1c) und (1d) erreicht werden. **(3,5 Punkte)**

3.2. Lösung: Aus (1) folgt für diesen speziellen Fall mit $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} R & L & C \end{pmatrix}^T$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} i_\mathrm{L} & u_\mathrm{C} \end{pmatrix}^T$, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L}u_\mathrm{C} + \frac{1}{L}u_\mathrm{in} & -\frac{1}{C}i_\mathrm{L} - \frac{1}{CR}u_\mathrm{C} + \frac{1}{CR}u_\mathrm{in} \end{pmatrix}^T$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} i_\mathrm{R} & u_\mathrm{R} \end{pmatrix}^T$, und $\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R}u_\mathrm{C} + \frac{1}{R}u_\mathrm{in} & -u_\mathrm{C} + u_\mathrm{in} \end{pmatrix}^T$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial i_\mathrm{L}} & \frac{\partial f_1}{\partial u_\mathrm{C}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial i_\mathrm{L}} & \frac{\partial f_2}{\partial u_\mathrm{C}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{CR} \end{pmatrix} \quad \text{(1 TP)} \tag{2a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial R} & \frac{\partial f_1}{\partial L} & \frac{\partial f_1}{\partial C} \\ \frac{\partial f_2}{\partial R} & \frac{\partial f_2}{\partial L} & \frac{\partial f_2}{\partial C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{u_\mathrm{C}-u_\mathrm{in}}{L^2} & 0 \\ \frac{u_\mathrm{C}-u_\mathrm{in}}{CR^2} & 0 & \frac{u_\mathrm{C}-u_\mathrm{in}}{C^2R} + \frac{i_\mathrm{L}}{C^2} \end{pmatrix} \quad \text{(1,5 TP)} \tag{2b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial i_\mathrm{L}} & \frac{\partial g_1}{\partial u_\mathrm{C}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial i_\mathrm{L}} & \frac{\partial g_2}{\partial u_\mathrm{C}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{R} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(1 TP)} \tag{2c}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial R} & \frac{\partial g_1}{\partial L} & \frac{\partial g_1}{\partial C} \\ \frac{\partial g_2}{\partial R} & \frac{\partial g_2}{\partial L} & \frac{\partial g_2}{\partial C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_\mathrm{C}-u_\mathrm{in}}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(1,5 TP)} \tag{2d}$$

Durch Einsetzen in (1c) und (1d) erhalten wir:

$$\dot{\boldsymbol{S}}^x = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR} \end{pmatrix} \boldsymbol{S}^x + \begin{pmatrix} 0 & \frac{u_\mathrm{C}-u_\mathrm{in}}{L^2} & 0 \\ \frac{u_\mathrm{C}-u_\mathrm{in}}{CR^2} & 0 & \frac{u_\mathrm{C}-u_\mathrm{in}}{C^2R} - \frac{i_\mathrm{L}}{C^2} \end{pmatrix} \tag{2e}$$

$$\boldsymbol{S}^y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{R} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{S}^x + \begin{pmatrix} \frac{u_\mathrm{C}-u_\mathrm{in}}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2f}$$

Bewertung: Für die volle Punktzahl ist die Angabe der Zwischenschritte nicht nötig. Die Angabe der Gleichungen (2e) und (2f) alleine genügen zum Erreichen der vollen Punktzahl. **(5 Punkte)**

3.3. Lösung: Die Gütefunktion für das allgemeine Parameterschätzproblem lautet

$$J(\boldsymbol{p}) = \sum_{k=1}^{N} \left(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_k) - \tilde{\boldsymbol{y}}_k\right)^2 \quad \text{(1 TP)} \tag{3}$$

mit der Anzahl an Messungen N, den Ausgängen $\boldsymbol{y}$, den Eingängen $\boldsymbol{u}$, den Messzeiten t_k, den Parametern $\boldsymbol{p}$ und den Messwerten $\tilde{\boldsymbol{y}}_k$ (1 TP).

Das Parameterschätzproblem lautet dann

$$\min_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p}) = \min_{\boldsymbol{p}} \sum_{k=1}^{N} \left(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_k) - \tilde{\boldsymbol{y}}_k\right)^2 \quad \text{(1 TP).} \tag{4}$$

Die notwendige Bedingung für die Lösung des Parameterschätzproblems ist, dass der Gradient der Gütefunktion nach den Parametern $\boldsymbol{p}$ verschwindet:

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{p}} = \boldsymbol{0} \quad \text{(1 TP).} \tag{5}$$

Bewertung: Ab drei richtig benannten Größen werden 0,5 TP gegeben. Die Gütefunktion muss nicht aufstellt werden, für die richtige Gleichung (4) gibt es 2 TP. **(4 Punkte)**

3.4. Lösung: Das Gütefunktion lautet:

$$J(R) = \sum_{k=1}^{N} \left(u_\mathrm{in}(R, i_k) - \tilde{u}_{\mathrm{in},k}\right)^2 \quad \text{(1 TP)} \tag{6}$$

Das Parameterschätzproblem lautet dann:

$$\min_{R} J(R) = \min_{R} \sum_{k=1}^{N} \left(R i_k - \tilde{u}_{\mathrm{in},k}\right)^2 \quad \text{(1 TP)} \tag{7}$$

Bewertung: Die Gütefunktion muss nicht aufgestellt werden, für die richtige Gleichung (7) gibt es 2 TP. $u_{\text{in}}(R, i_k)$ und Ri_k werden äquivalent bewertet.

(2 Punkte)

3.5. Lösung: Für die notwendige Bedingung (5) wird die Ableitung der Gütefunktion benötigt:

$$\frac{\partial J}{\partial R} = \sum_{k=1}^{N} 2\left(Ri_k - \tilde{u}_{\text{in},k}\right) \cdot i_k \quad \text{(1 TP)} \tag{8}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} 2\left(Ri_k^2 - \tilde{u}_{\text{in},k} i_k\right) \quad \text{(0,5 TP)} \tag{9}$$

Nun wird die Ableitung gleich Null gesetzt (vgl. Gl. (5))

$$0 = \sum_{k=1}^{N} 2\left(Ri_k^2 - \tilde{u}_{\text{in},k} i_k\right) \quad \text{(0,5 TP)} \tag{10}$$

Anschließend wird die Gleichung nach R umgeformt:

$$0 = R \sum_{k=1}^{N} i_k^2 - \sum_{k=1}^{N} 2\tilde{u}_{\text{in},k} i_k \quad \text{(0,5 TP)} \tag{11}$$

$$R = \frac{\sum_{k=1}^{N} \tilde{u}_{\text{in},k} i_k}{\sum_{k=1}^{N} i_k^2} \quad \text{(0,5 TP)} \tag{12}$$

Schließlich werden die Messwerte eingesetzt und so der Widerstand berechnet:

$$R = \frac{100 \cdot 24 + 200 \cdot 52 + 300 \cdot 69}{24^2 + 52^2 + 69^2} \Omega \quad \text{(1 TP)} \tag{13}$$

$$= 4{,}2\Omega \quad \text{(0,5 TP)} \tag{14}$$

Bewertung: Siehe oben. Für das Aufschreiben der Normalengleichung gibt es keine Punkte, da eine Formel für den Widerstand aus der notwendigen Bedingung hergeleitet werden soll. Für die Lösung des Problems mit der Normalengleichung gibt es 1,5 Teilpunkte für richtiges Einsetzten und Ausrechnen. **(4,5 Punkte)**

4. Aufgabe: DA-Systeme (20 Punkte)

* Lösung *

4.1. Lösung: Die differentiellen Gleichungen sind (8), (9), (10), (11) (0,5 TP).
Die algebraischen Gleichungen sind (12), (13) und (14) (0,5 TP).
Die differentiellen Variablen, algebraischen Variablen und Parameter lauten

$$\boldsymbol{x}(t) = (E, T, K, D)^T \qquad (0,5 \text{ TP}) \qquad (15)$$

$$\boldsymbol{z}(t) = (R_1, R_2, c_D) \qquad (0,5 \text{ TP}) \qquad (16)$$

$$\boldsymbol{p} = (k_T, G, k_2)^T . \qquad (0,5 \text{ TP}) \qquad (17)$$

$$\boldsymbol{u}(t) = (E_{zu}, T_{ab}, D_{ab})^T \qquad \text{(Zusatz aus Gründen der Vollständigkeit.)} \qquad (18)$$

Bewertung: Siehe oben. **(2,5 Punkte)**

4.2. Lösung: Die *quadratische* Inzidenzmatrix hat einen strukturellen Rangdefekt.

	R_1	R_2	c_D
(12)			
(13)		$\times$	
(14)			$\times$

Tabelle 1: Inzidenzmatrix für das gegebene DA-System (8)-(14).

Folglich liegt ein Index > 1 vor (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. Struktur der Inzidenzmatrix richtig (1,5 TP). Inzidenzmatrix richtig ausgefüllt (1 TP). **(3 Punkte)**

4.3. Lösung: Wir differenzieren (12) nach der Zeit

$$\rightarrow \dot{K} = 2E\dot{E}TG + E^2\dot{T}G \text{ (1 TP).} \qquad (19)$$

Anschließend setzen wir (8),(9) und (10) ein und erhalten

$$R_1 - R_2 = 2E\left(E_{zu} - R_1 + R_2\right)TG + E^2\left(k_T T^3 - R_1 - \cancelto{0}{T_{ab}}\right)G \text{ (1 TP).} \qquad \text{(N)}$$

Gl. (N) ist eine neue (versteckte) algebraische Gleichung (0,5 TP). Gl. (N) lässt sich nach R_1 auflösen. Das DA-System (8)-(14) hat somit den Index 2 (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(3,5 Punkte)**

4.4. Lösung:

a) Ein Index-0 System sollte nicht zur Simulation gewählt werden, da die numerische Lösung des Index-0 Systems angesichts unvermeidlicher numerischer Fehler nicht äquivalent zu der des Originalmodells ist. Die numerische Lösungen des indexreduzierten Modelles erfüllen i.d.R. nicht mehr die algebraischen Gleichungen des Originalmodells (1 TP).

b) Zur Simulation wählen wir alle algebraischen Gleichungen (12), (13), (14), (N) (1 TP) und (folgende Alternativen sind möglich)

Alt. 1: die differentiellen Gleichungen (9), (10), (11) aus (1 TP).
Somit sind die algebraischen Variablen $\boldsymbol{z}(t) = (R_1, R_2, c_D, E)^T$ (0,5 TP) und die differentiellen Variablen $\boldsymbol{x}(t) = (T, K, D)^T$ (0,5 TP).

Alt. 2: die differentiellen Gleichungen (8), (10), (11) aus (1 TP).
Somit sind die algebraischen Variablen $\boldsymbol{z}(t) = (R_1, R_2, c_D, T)^T$ (0,5 TP) und die differentiellen Variablen $\boldsymbol{x}(t) = (E, K, D)^T$ (0,5 TP).

Alt. 3: die differentiellen Gleichungen (8), (9), (11) aus (1 TP).
Somit sind die algebraischen Variablen $\boldsymbol{z}(t) = (R_1, R_2, c_D, K)^T$ (0,5 TP) und die differentiellen Variablen $\boldsymbol{x}(t) = (E, T, D)^T$ (0,5 TP).

Hinweis: Die Auswahl aller algebraischen Gleichungen (12), (13), (14), (N) und der differentiellen Gleichungen (8), (9), (10) ist ***falsch****, da dies zu keinem Index-1 System führt.*

c) Das Index-1 System hat drei differentielle Größen (0,5 TP), aus diesem Grund hat das System drei unabhängige Anfangsbedingungen (0,5 TP).
Abhängig von Aufgabenteil b) können für die differentiellen Variablen beliebige Anfangswerte $x_i(t_0) \geq 0$ spezifiziert werden (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. Sollte durch die Auswahl von algebraischen und differentiellen Gleichungen in Aufgabenteil b) kein Index-1 System entstehen, werden Teil- und Folgepunkte vergeben. **(5,5 Punkte)**

4.5. Lösung:

```
connector blut          // + letzte Zeile 0,5 TP
    flow Real T_ab;     // 0,5 TP
    flow Real D_ab;     // 0,5 TP
    Real c_D;           // 0,5 TP
end blut;
```

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

4.6. Lösung:

```
    model niere
        Parameter Real k_abbau = 0.1;
        blut b1;                                    // 0,5 TP
        blut b2;                                    // 0,5 TP
    equation
        0 = b1.T_ab + b2.T_ab                       // 1   TP
        0 = b1.D_ab + b2.D_ab
            + k_abbau * (b1.c_D + b2.c_D)^2         // 1,5 TP
    end niere;
```

Bewertung: Siehe oben. Alternativ kann explizit eine Variable und Gleichung für D_{abbau} eingeführt werden. **(3,5 Punkte)**

5. Aufgabe: Thermodynamische/diskrete Systeme (19,5 Punkte) * Lösung *

5.1. Lösung:

a) Die allgemeine Bilanzgleichung für eine zu bilanzierende Größe Ψ lautet:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}\right|_t = \sum_{j\in\Lambda_J}^{n_s} J_j^{\Psi}(t) + \sum_{k\in\Lambda_\Gamma}^{n_q} \Gamma_k^{\Psi}(t) \quad \text{(0,5 TP für jeden Term)}$$

Für die Anwendung sind die zu bilanzierenden Größe Ψ $(0,5$ TP$)$, Flüsse J^{Ψ} und $(0,5$ TP$)$ und Quellen/Senken Γ^{Ψ} $(0,5$ TP$)$ festzulegen.

b)

$$\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right|_t = F_{\mathsf{A}}(t)\cdot h_{\mathsf{A}}(t) + F_{\mathsf{B}}(t)\cdot h_{\mathsf{B}}(t) + \dot{Q}(t) + M(t)\cdot\omega(t) \quad \text{(0,5 TP für jeden Term)}$$

Bewertung: Siehe oben. Wenn die Studierenden in b) $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ (statt $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$) schreiben, ist das ebenfalls richtig. **(5,5 Punkte)**

5.2. Lösung:

Die allgemeine Lösung des zeitdiskreten Systems lautet wie folgt:

$$c_{\mathsf{A}}(t_{n+1}) = c_{\mathsf{A}}(t_n) + \Delta t\cdot(-k\cdot c_A^2(t_n)) \quad \text{(1 TP)} \tag{20}$$

$$c_{\mathsf{B}}(t_{n+1}) = c_{\mathsf{B}}(t_n) + \Delta t\cdot(k\cdot c_A^2(t_n)) \quad \text{(1 TP)} \tag{21}$$

Bewertung: Es gibt keinen Punktabzug wenn die Anfangsbedingungen mit aufgeschrieben werden. Es gibt ggf. Folgefehler, falls die gleichen Fehler in beiden Gleichungen gemacht wurden. **(2 Punkte)**

5.3. Lösung:

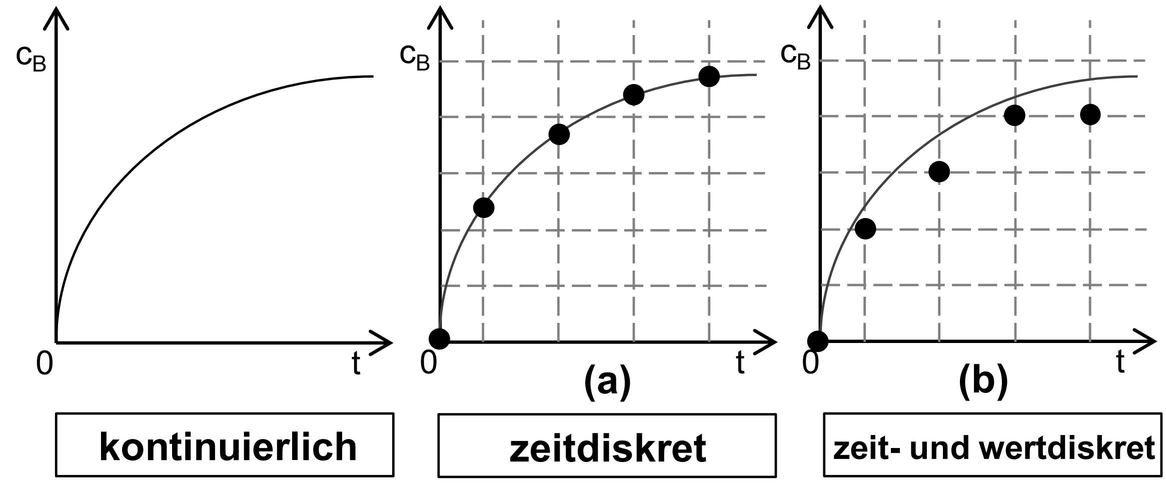
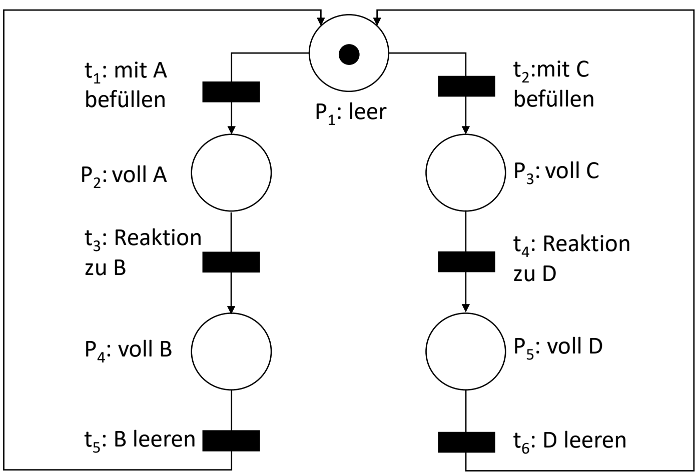


Abbildung 2: kontinuierlicher Konzentrationsverlauf von B und eingetragene Messverläufe

Bewertung: Jeweils 1 TP für die qualitativ richtige Zeichnung und jeweils 0,5 TP für die richtige Benennung der Systemklasse. **(3 Punkte)**

5.4.

a) Modellierung durch Petrinetz:



b) Das Petrinetz aus a) ist beschränkt (0,5 TP), da auf allen Stellen maximal $n = 1$ Token (0,5 TP) liegen können (es wäre zusätzlich also auch sicher).

c) An Stelle P_1 (0,5 TP). Dort steht nur ein Token (= ein Reaktor) zur Verfügung. Es können Transition 1 oder 2 geschaltet werden, allerdings ist durch das Schalten der einen Transition die andere (temporär) nicht mehr schaltbar, was charakteristisch für einen Konflikt ist (0,5 TP).

d) Die Anzahl der Token entspricht der Anzahl der Reaktoren. Man kann daher das Petrinetz um n weitere Reaktoren ergänzen, indem man die Anzahl der Token im Petrinetz von 1 auf n erhöht (1 TP). Die Kantengewichte bleiben dabei jedoch unverändert bei 1, da die Reaktoren unabhängig voneinander befüllt werden können.

e) Endliche Automaten (0,5 TP). Petrinetze eignen sich besser, um komplexe, parallele Dynamiken zu modellieren (0,5 TP).

Bewertung: a) 1TP, wenn alle Stellen vorhanden sind,
1 TP für die richtigen Verbindungen mit Kantengewicht 1,
1 TP für vollständig eingezeichnete Transitionen (dargestellt als Kästen)
1 TP für die richtige Anfangsmarkierung mit 1 Token auf P_1,
1 TP für eindeutige Beschriftung.
b) und c) siehe oben.
d) Bei Nennung der Tokenanzahl n wird der TP gegeben. Andere Modifizierungen, die nicht komplett falsch sind, aber am Sinn der Petrinetzmodellierung vorbeigehen, werden mit 0,5 TP bewertet.
e) Siehe oben. Für hybride Automaten gibt es keinen Punkt, da eindeutig nach ereignisdiskreter Modellierung gefragt ist, nicht nach diskret-kontinuierlicher.

(9 Punkte)

Schriftliche Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Sommersemester 2020

1. Aufgabe: Finite Differenzen (14.5 Punkte)

Die folgende Gleichung beschreibt die Temperaturverteilung in einem Stab $T(x,t)$ als Funktion der Position x und Zeit t mit Wärmeleitungskoeffizient $\lambda > 0$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in [x_1, x_4]\,,\ t \in [0, t_{\text{final}}]\,. \tag{1}$$

Diese Gleichung soll mit einem Finite-Differenzen-Verfahren auf einem äquidistanten Gitter mit vier Knoten, Gitterschrittweite Δx und konstanter Zeitschrittweite Δt gelöst werden:

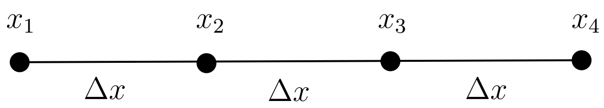


Abbildung 1: Gitter FD

1.1. Gegeben sei die Taylorreihe in der Zeit für die Temperatur $T(x,t)$ entwickelt um t_{n+1}, ausgewertet an t_n:

$$T^n \approx T^{n+1} - \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|^{t=t_{n+1}} \Delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right|^{t=t_{n+1}} \Delta t^2 - \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}\right|^{t=t_{n+1}} \Delta t^3 + \ldots\,. \tag{2}$$

Stellen Sie eine Taylorreihe für $T(x,t)$ an einem zweiten Auswertungspunkt in der Zeit auf, welche Ihnen die Herleitung eines zeitlichen Rückwärts-Differenzenausdrucks mit

3 Stützstellen für $\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|^{t=t_{n+1}}$ erlaubt. Berücksichtigen Sie die ersten 4 Glieder.

(2 Punkte)

1.2. Leiten Sie nun den zeitlichen Rückwärts-Differenzenausdruck mit optimaler Ordnung für $\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|^{t=t_{n+1}}$ her. Bestimmen Sie den Abbruchfehler und die Genauigkeitsordnung.

(4 Punkte)

1.3. Zeichnen Sie den qualitativen Verlauf des in Aufgabe 1.2 bestimmten Abbruchfehlers ein. Diese Aufgabe kann auf dem Aufgabenblatt (Abbildung 5) bearbeitet werden.

(1 Punkt)

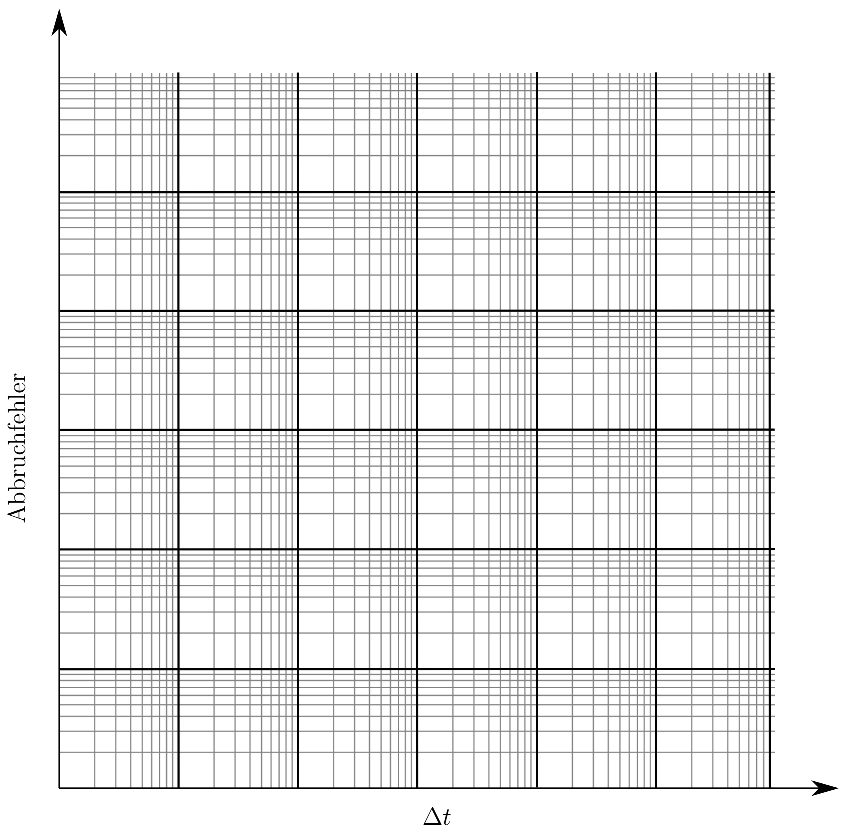


Abbildung 2: Qualitativer Verlauf des zeitlichen Abbruchfehlers.

1.4. Die Gleichung (1) soll nun mit einem Finite-Differenzen-Verfahren auf dem in Abbildung 1 gegebenen Gitter mit zentralen Differenzen im Raum und dem Differenzenstern aus Aufgabe 1.2 in der Zeit diskretisiert werden. Falls Sie Aufgabe 1.2 nicht gelöst haben, verwenden Sie das Euler-Rückwärtsverfahren. Bei x_1 soll eine Temperatur von $T(x_1, t) = 10$ und bei x_4 ein Wärmefluss von $\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=x_4} = 10$ gelten. Der Wärmefluss soll auch mit einer zentralen Differenz diskretisiert werden.

Hinweis:

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=x_i} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x} \tag{4}$$

Stellen Sie die sich ergebenden Gleichungen für alle Knoten auf, sodass Sie die Lösung für T^{n+1} berechnen können. Begründen Sie, falls keine Gleichung für einen Knoten aufgestellt werden muss. Verwenden Sie auch die gegebenen Temperaturwerte und Wärmeflüsse. Es ist nicht nötig die Gleichungen ineinander einzusetzen.

Hinweis: Es ist nicht nötig die Gleichungen in Matrixform zu schreiben. **(5 Punkte)**

1.5. Im Folgenden sind zwei lineare Gleichungssysteme in Matrixform gegeben, die auf verschiedenen Diskretisierungen von Gleichung (1) für das in Abbildung 1 gegebene Gitter basieren. Die Punkte zeigen die nicht-null Einträge an. Begründen Sie jeweils, ob es sich um ein implizites oder explizites Verfahren handelt. Für ein implizites Verfahren begründen Sie bitte auch, welche Randbedingung an Knoten 1 benutzt wird und ob eine Vorwärts-, Rückwärts- oder zentrale Differenz im Raum verwendet wird.

$$(a): \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & & \\ & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet \\ & & & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} \qquad (b): \begin{pmatrix} \bullet & & & \\ & \bullet & & \\ & & \bullet & \\ & & & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix}$$

(2.5 Punkte)

2. Aufgabe: Finite Elemente (13.5 Punkte)

Es ist der in der Abbildung 3 gezeigte Balken gegeben. Das linke Ende des Balkens ist fest eingespannt und am freien Ende des Balkens wirkt eine konstante Kraft F_4. Der Balken kann als eindimensionales Finite-Elemente-Problem modelliert werden.

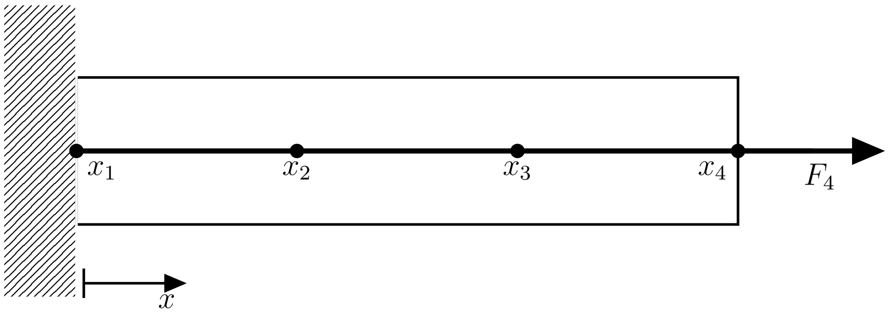


Abbildung 3: Eingespannter Balken.

	x_1	x_2	x_3	x_4
x [m]	0.0	2.0	4.0	6.0

Tabelle 1: Informationen zu Knoten x_1-x_4

Bei konstantem Elastizitätsmodul E und konstantem Balkenquerschnitt A, wird die axiale Verschiebung u des Balkens durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$EA\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = 0, \qquad x \in [x_1, x_4]. \tag{5}$$

2.1. Bilden Sie die schwache Form der Gleichung (5) und reduzieren Sie den maximalen Grad der auftretenden Ableitung mittels partieller Integration, falls möglich. Identifizieren Sie im Weiteren alle gegebenen Randbedingungen und ordnen Sie diese den Ihnen aus der Vorlesung bekannten Kategorien für Randbedingungen zu. Nutzen Sie die Randbedingungen, um die schwache Form weiter zu vereinfachen. Begründen Sie alle Rechenschritte ausreichend.

Hinweis: Der Zusammenhang zwischen Kraft und Verschiebung ist wie folgt gegeben:

$$F(x) = EA\frac{\partial u(x)}{\partial x}.$$

(5.5 Punkte)

2.2. Diskretisieren Sie jetzt die Verschiebung $u(x)$ mit Hilfe der linearen Interpolationsfunktionen $\phi_k(x)$ und den Einträgen des Lösungsvektors $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$. Setzen Sie das Ergebnis in die schwache Form aus Aufgabe 2.1 ein.
Bemerkung: *Für $\phi_k(x)$ muss keine Funktion aufgestellt werden.* **(3 Punkte)**

Die schwache Form soll jetzt in die Matrixschreibweise der folgenden Form überführt werden:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

2.3. Vervollständingen Sie zunächst die Diskretisierung der schwachen Form indem Sie die Galerkin-Methode verwenden. Für den Fall, dass Sie die vorige Aufgabe nicht lösen konnten, verwenden Sie die folgende diskretisierte schwache Form zur Aufstellung des Gleichungssystems:

$$\sum_{k=1}^{4} E\,A \int_0^6 \frac{\partial w(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x} u_k \mathrm{d}x + 4\,w(6)\,F_4 = 0. \tag{6}$$

(1 Punkt)

2.4. Geben Sie jetzt die vollständig diskretisierte Gleichung in Matrixform an. Für die Matrix $\mathbf{K}$ ist es ausreichend, wenn Sie den Matrixeintrag K_{12} angeben und alle weiteren nicht-null Einträge durch einen schwarzen Punkt $\bullet$ darstellen, vgl. A1.5.
Bemerkung 1: Vereinfachen Sie alle anzugebenen Einträge.
Bemerkung 2: Für den Vektor $\mathbf{f}$ müssen **alle** nicht-null Einträge angegeben werden.
Hinweis 1: Der Vektor $\mathbf{u}$ *enthält nur die unbekannten Verschiebungen.*
Hinweis 2: Zur Diskretisierung der schwachen Form wurden lineare Interpolationsfunktionen verwendet. **(4 Punkte)**

3. Aufgabe: Finite Volumen (11 Punkte)

Gegeben sei das folgende zweidimensionale Gitter. Exemplarisch sind zusätzlich einige Kontrollvolumen in rot gezeigt:

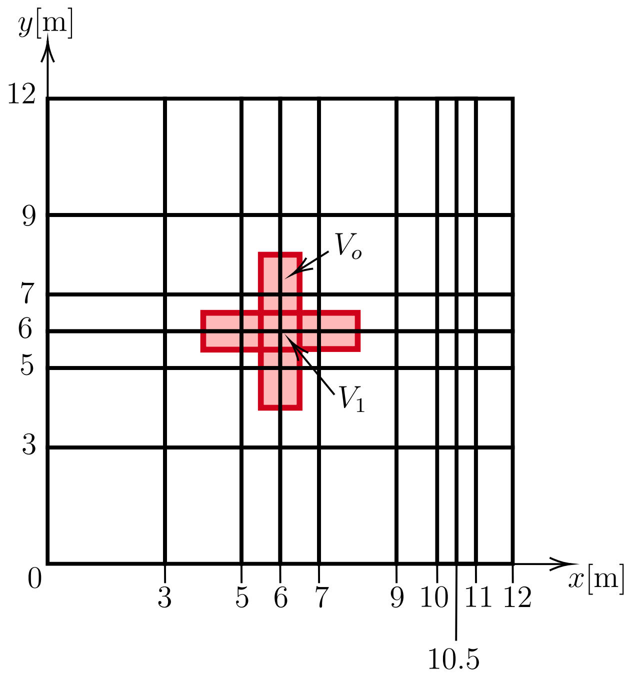


Abbildung 4: Gitter FV.

3.1. Markieren Sie die Lage der Unbekannten für V_1 und V_o. Diese Aufgabe kann auf dem Aufgabenblatt (Abbildung 6) bearbeitet werden.
Benennen Sie die gezeigte Art der Anordnung der Kontrollvolumen. **(2 Punkte)**

Betrachten sie nun die instationäre Wärmeleitungsgleichung für die Temperatur $T(x, y, t)$ mit $\lambda = 0.7\text{m}^2\,\text{s}^{-1}$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \nabla \cdot \nabla T = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega, t \in [0, t_{\text{final}}]. \tag{7}$$

3.2. Stellen Sie für Gleichung (7) die integrale Form für das Kontrollvolumen V_1 auf. Verwenden Sie dazu den Satz von Gauß.

Hinweis: Satz von Gauß

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{g} \, \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s. \tag{8}$$

(1.5 Punkte)

3.3. Vereinfachen Sie den zeitlichen Term durch Volumenmittelung. **(1 Punkt)**

3.4. Diskretisieren Sie den Flussterm und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

(3 Punkte)

3.5. Diskretisieren Sie nun Ihre vereinfachte und örtlich diskretisierte Gleichung zeitlich unter Verwendung des expliziten Eulerverfahrens. Markieren Sie alle unbekannten Größen. **(1.5 Punkte)**

3.6. Im Folgenden sei die Lösung bei $t = 2\,\mathrm{s}$ gesucht. Wie viele Zeitschritte benötigen Sie minimal, um die gesuchte Lösung zu berechnen?

Hinweis:

Für jede Zelle muss gelten:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2\lambda} \frac{1}{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}. \tag{9}$$

(2 Punkte)

4. Aufgabe: Fehler (11 Punkte)

Ein Simulationsprogramm stellt zur Lösung eines eindimensionalen Diffusion-Problems drei verschiedene Finite-Differenzen-Verfahren L_Δ zur Verfügung. Diese sind im Detail nicht näher beschrieben, allerdings sind in Bezug auf die von Ihnen zu lösende partielle Differentialgleichung L der Abbruchfehler $||L - L_\Delta||$ und das Amplitudenverhältnis $\left|\left|\frac{V^{n+1}}{V^n}\right|\right|$ angegeben:

Verfahren	$\|\|L - L_\Delta\|\|$	$\left\|\left\|\frac{V^{n+1}}{V^n}\right\|\right\|$
I	$\|\|\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2)\|\|$	$\left\|\left\|1 + \frac{2\lambda\Delta t}{\Delta x^2}(\cos(k\Delta x) - 1)\right\|\right\|$
II	$\left\|\left\|\mathcal{O}(\frac{1}{\Delta t}) + \mathcal{O}(\Delta x^2)\right\|\right\|$	$\left\|\left\|\frac{1}{1-\frac{2\lambda\Delta t^2}{\Delta x^2}(\cos(k\Delta x)-1)}\right\|\right\|$
III	$\|\|\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2)\|\|$	$\left\|\left\|\frac{1}{1-\frac{2\lambda\Delta t}{\Delta x^2}(\cos(k\Delta x)-1)}\right\|\right\|$

Es soll ein Verfahren ausgewählt werden, mit dem zwei Simulationen mit den Zeitschrittweiten Δt, Gitterschrittweiten Δx und Diffusionskoeffizienten λ lösbar sind:

- Problem 1: $\Delta t = 0.01\text{s}$, $\Delta x = 0.1\text{m}$, $\lambda = 0.4\ \text{m}^2\,\text{s}^{-1}$
- Problem 2: $\Delta t = 0.01\text{s}$, $\Delta x = 0.1\text{m}$, $\lambda = 0.6\ \text{m}^2\,\text{s}^{-1}$

4.1. Prüfen Sie, welches der drei Verfahren nach dem Satz von Lax uneingeschränkt für **beide** Probleme 1 und 2 konvergiert. Begründen Sie, wenn ein Verfahren **nicht** uneingeschränkt konvergent ist. **(9 Punkte)**

4.2. Welche Bedingungen muss ein Anfangswertproblem erfüllen, damit es korrekt gestellt ist? **(2 Punkte)**

5. Aufgabe: Finite Differenzen - Korrekturen

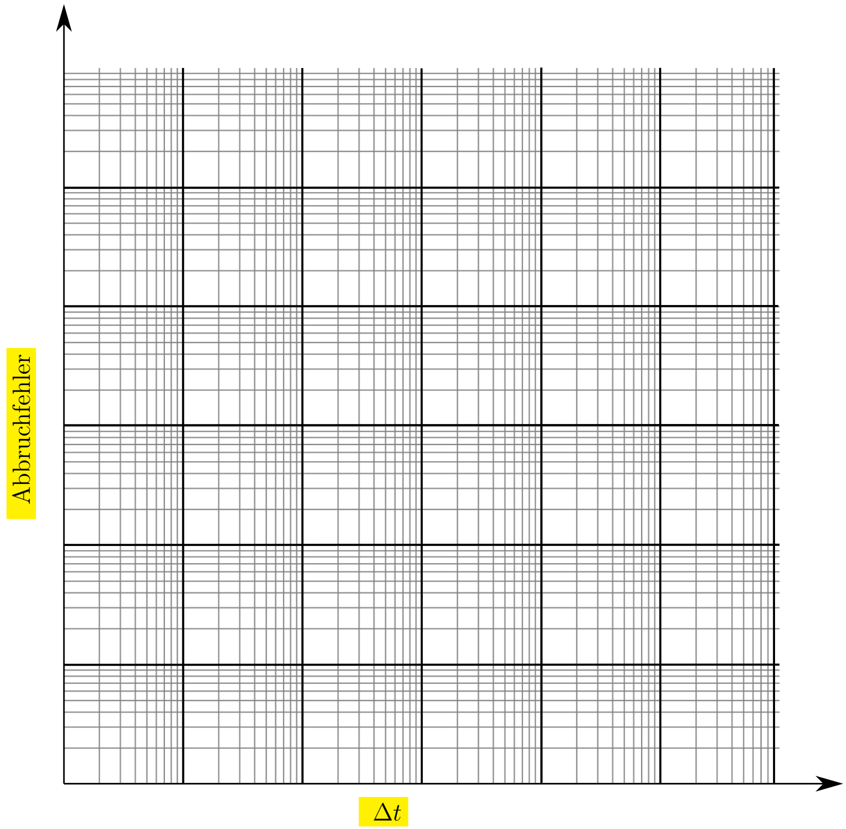


Abbildung 5: Qualitativer Verlauf des zeitlichen Abbruchfehlers.

7. Aufgabe: Finite Volumen - Korrekturen

Gegeben sei das folgende zweidimensionale Gitter. Exemplarisch sind zusätzlich einige Kontrollvolumen in rot gezeigt:

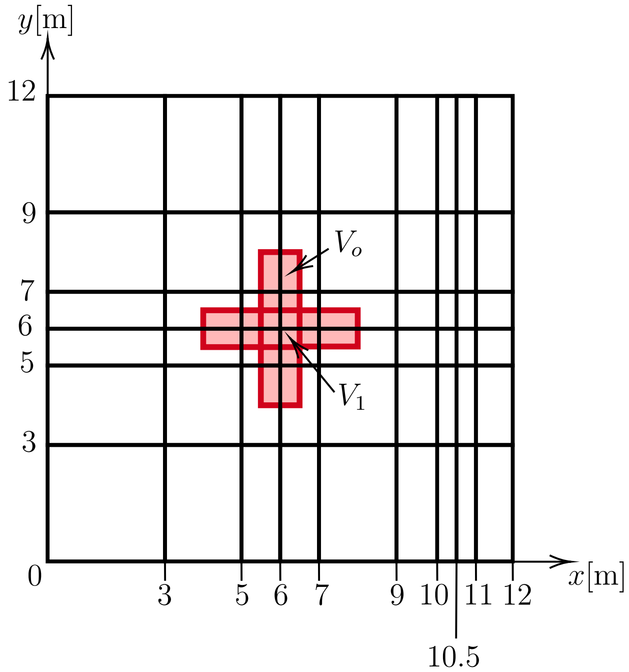


Abbildung 6: Gitter FV.

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Sommersemester 2020

1. Aufgabe: Finite Differenzen (14.5 Punkte)
* Lösung *

1.1. Lösung:

$$T^{n-1} \approx T^{n+1} - 2\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|^{t=t_{n+1}} \Delta t + 2\left.\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right|^{t=t_{n+1}} \Delta t^2 - \frac{8}{6}\left.\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}\right|^{t=t_{n+1}} \Delta t^3 + ... \quad 2 \tag{1}$$

$\frac{2}{2}$

1.2. Lösung: 4 * Gegebene Taylorreihe - Taylorreihe aus 1.1: 1.0

$$4T^n - T^{n-1} = 3T^{n+1} - 2\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|^{t=t_{n+1}} \Delta t + \frac{4}{6}\left.\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}\right|^{t=t_{n+1}} \Delta t^3 \quad 0.5 \tag{2}$$

Umformen nach der gesuchten Ableitung:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|^{t=t_{n+1}} = \frac{3T^{n+1} - 4T^n + T^{n-1}}{2\Delta t} + \underbrace{\frac{1}{3}\left.\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}\right|^{t=t_{n+1}} \Delta t^2}_{Abbruchfehler \quad 0.5} \quad 1 \tag{3}$$

Der Ausdruck ist 2. Ordnung genau. 1

$\frac{4}{4}$

1.3. Lösung:

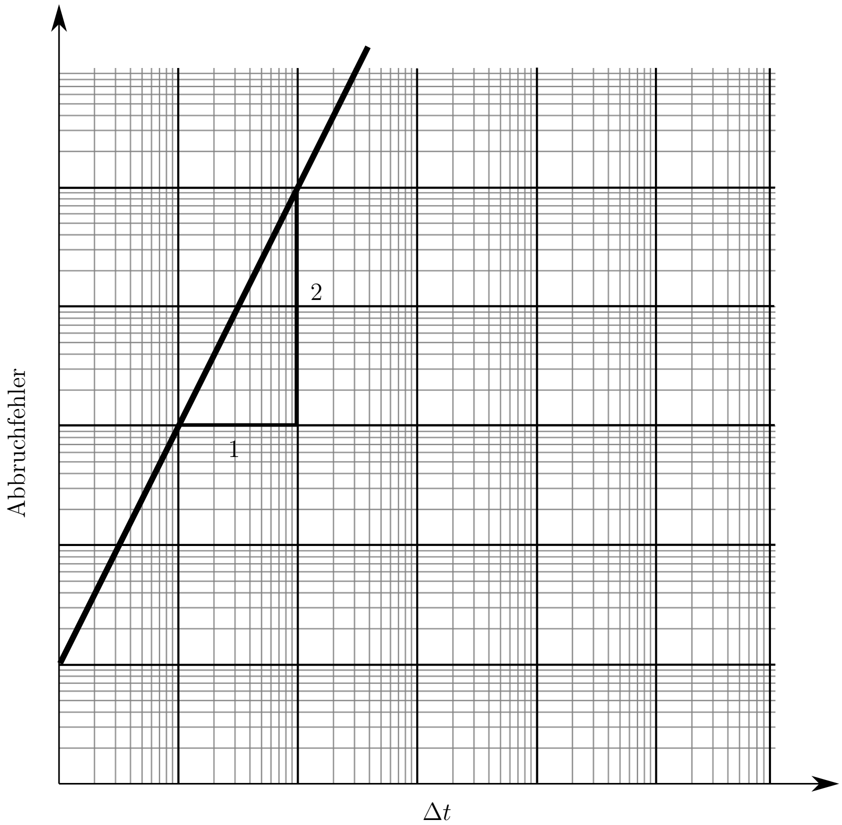


Abbildung 1: Qualitativer Verlauf des zeitlichen Abbruchfehlers.

1

$\frac{1}{1}$

1.4. Lösung:

Gleichung für Knoten 1: Dirichlet Knoten, daher ist $T_1 = 10$ bekannt. 1

Gleichung für Knoten 2:

$$\frac{T_2^{n+1} - T_2^n}{\Delta t} - \lambda \frac{T_3^{n+1} - 2T_2^{n+1} + T_1^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad 1 \tag{4}$$

Gleichung für Knoten 3:

$$\frac{T_3^{n+1} - T_3^n}{\Delta t} - \lambda \frac{T_4^{n+1} - 2T_3^{n+1} + T_2^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad 1 \tag{5}$$

Gleichung für Knoten 4:

$$\frac{T_4^{n+1} - T_4^n}{\Delta t} - \lambda \frac{T_5^{n+1} - 2T_4^{n+1} + T_3^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad 1 \tag{6}$$

Gleichung für die Neumann Randbedingung an Knoten 4:

$$\frac{T_5^{n+1} - T_3^{n+1}}{2\Delta x} = 10 \Longrightarrow T_5^{n+1} = 20\Delta x + T_3^{n+1} \quad 1 \tag{7}$$

$\frac{5}{5}$

1.5. Lösung:

a)

-Implizites Verfahren: 0.5 Lösen eines linearen Gleichungssystems nötig. 0.5

-Neumann Randbedinung an Knoten 1: Gleichung für Knoten 1 ist abhängig von T_1 und T_2 $\rightarrow$ Darstellung einer Ableitung. 0.5

-Vorwärtsdifferenz: Es gibt keine Einträge links der Diagonalen, d.h. Einträge hängen nur von Knoten rechts (vorwärts) ab. 0.5

b)

-Explizites Verfahren, da es ausschließlich Diagonaleinträge gibt und deswegen kein lineares Gleichungssystem lösen muss. 0.5

$\frac{2.5}{2.5}$

$$\overline{\sum_{A1} = \frac{14.5}{14.5}}$$

2. Aufgabe: Finite Elemente (13.5 Punkte)

* Lösung *

2.1. Lösung: Aus der starken Form können wir durch Integration über das Rechengebiet und Multiplikation mit der Testfunktion $w(x)$ die schwache Form der Gleichung herleiten.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \qquad x \in [p_1, p_6] \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{9}$$

$$\Rightarrow \int_0^6 w(x)\left(EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall w(x). \tag{10}$$

+ Multiplikation mit Testfunktion $w(x)$. 0.5

+ $\forall w(x)$ 0.5 .

+ Integrale Form mit richtigen Grenzen, dx und vollständige Gleichung vorhanden. 0.5

Anwendung der partiellen Integration zur Reduzierung des Grad der Ableitung:

$$\int_0^6 w(x)\left(EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall w(x), \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow -E\,A \int_0^6 \frac{\partial w(x)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \left[w(x)\,E\,A\,\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^6 = 0. \tag{12}$$

+ Korrekter integraler Ausdruck (inkl Vorzeichen) 0.5 ,

+ korrekter Ausdruck für Randterme (inkl Vorzeichen+Grenzen) 0.5 .

Identifizieren von Randbedingungen + Begründung:

Linker Rand:

+ Dirichlet RB bei x_1, d.h. $u(x_1) = 0$ 0.5

+ Testfunktion ist bei Dirichlet-RB null, d.h. $w(x_1) = 0$ 0.5

Rechter Rand:

+ Neumann-Randbedingung bei x_4 0.5 , da Kraft F_4 am rechten Rand gegeben

$$E\,A\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x_4} = F_4. \; 0.5 \tag{13}$$

Setzen wir beide Randbedingungen in die schwache Form ein:

$$-E\,A\int_0^6 \frac{\partial w(x)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + w(6)\,E\,A\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{p4} - w(0)\,E\,A\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{p1} = 0 \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow -E\,A\int_0^6 \frac{\partial w(x)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + w(6)\,F_4 = 0. \; 1 \tag{15}$$

Den letzten Punkt erhält man nur, bei korrekt ausgewerteter Testfunktion $w(6)$. $\frac{5.5}{5.5}$

2.2. Lösung: Die gesuchte Funktion $u(x)$ kann mittels der Interpolationsfunktionen und den bekannten Werten an den Knotenpunkte wie folgt geschrieben werden:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{4} \phi_k(x)\,u_k. \; 1 \tag{16}$$

Damit ergibt sich die Ableitung zu:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} u_k. \; 1 \tag{17}$$

Einsetzen in die schwache Form ergibt:

$$\sum_{k=1}^{4} -E\,A\int_0^6 \frac{\partial w(x)}{\partial x}\frac{\partial \phi_k}{\partial x} u_k \mathrm{d}x + w(6)\,F_4 = 0. \; 1 \tag{18}$$

$\frac{3}{3}$

2.3. Lösung: Galerkin Ansatz: Die Testfunktionen $w(x)$ werden gleich der Interpolationsfunktionen $\phi_i(x)$ gewählt 0.5 .

Daraus ergibt sich für die schwache Form:

$$\sum_{k=1}^{4} -E\,A\int_0^6 \frac{\partial \phi_(x)}{\partial x}\frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x} u_k \mathrm{d}x + \phi_i(x=6)\,F_4 = 0. \; 0.5 \tag{19}$$

$\frac{1}{1}$

2.4. Lösung: Da bei x_1 eine Dirichlet Randbedingung vorliegt haben wir nur drei unbekannte: $u_2,\ u_3$ und u_4. Damit haben wir auch nur drei Testfunktionen $\phi_i(x)$, $i \in 2, 3, 4$ und die Matrix $\mathbf{K}$ hat die Dimensionen 3x3.

$$\mathbf{K} = -E\,A \begin{pmatrix} \int_0^6 \frac{\partial\phi_2(x)}{\partial x}\frac{\partial\phi_2(x)}{\partial x}\mathrm{d}x & \int_0^6 \frac{\partial\phi_2(x)}{\partial x}\frac{\partial\phi_3(x)}{\partial x}\mathrm{d}x & 0 \\ \int_0^6 \frac{\partial\phi_3(x)}{\partial x}\frac{\partial\phi_2(x)}{\partial x}\mathrm{d}x & \int_0^6 \frac{\partial\phi_3(x)}{\partial x}\frac{\partial\phi_3(x)}{\partial x}\mathrm{d}x & \int_0^6 \frac{\partial\phi_3(x)}{\partial x}\frac{\partial\phi_4(x)}{\partial x}\mathrm{d}x \\ 0 & \int_0^6 \frac{\partial\phi_4(x)}{\partial x}\frac{\partial\phi_3(x)}{\partial x}\mathrm{d}x & \int_0^6 \frac{\partial\phi_4(x)}{\partial x}\frac{\partial\phi_4(x)}{\partial x}\mathrm{d}x \end{pmatrix} \text{ bzw.} \tag{20}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \text{ 1 und } \int_0^6 \frac{\partial\phi_2(x)}{\partial x}\frac{\partial\phi_3(x)}{\partial x}\mathrm{d}x \text{ 1} \tag{21}$$

Der Lösungsvektor lautet: $\mathbf{u} = (u_2, u_3, u_4)^T$. Die rechte Seite ergibt sich zu:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} E\,A \int_0^6 \frac{\partial\phi_2(x)}{\partial x}\frac{\partial\phi_1(x)}{\partial x} u_1 \mathrm{d}x \\ 0 \\ -F_4 \end{pmatrix} \text{ 2} \tag{22}$$

$\frac{4}{4}$

$\sum_{A2} = \frac{13.5}{13.5}$

3. Aufgabe: Finite Volumen (11 Punkte)
* Lösung *

3.1. Lösung:

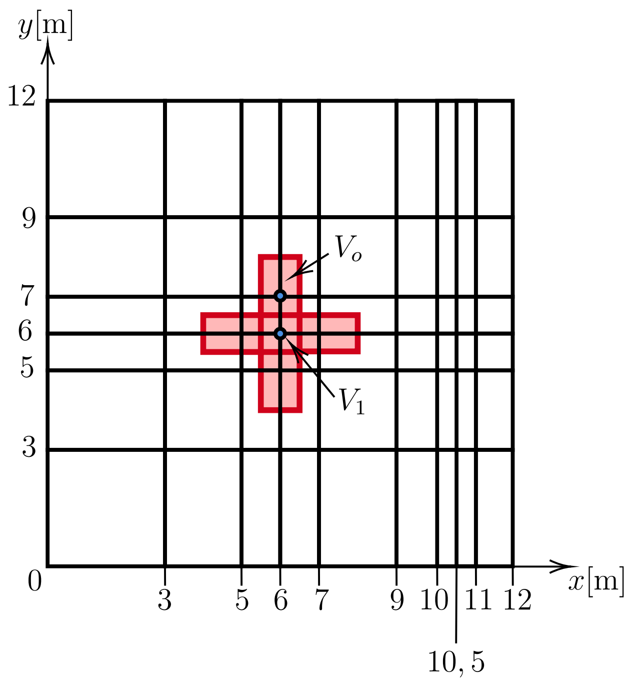


Abbildung 2: Lage der Unbekannten in der Mitte der gezeigten Kontrollvolumen.

Richtige Lage der Unbekannten in V_1 und V_o jeweils 0,5

Art der Kontrollvolumenanordnung: Knotenzentriert. 1

$\frac{2}{2}$

3.2. Lösung:

Integrale Form:

$$\int_{V_1} \frac{\partial T}{\partial t} \,\mathrm{d}V - \int_{V_1} \lambda \nabla \cdot \nabla T \,\mathrm{d}V = 0 \tag{23}$$

Richtige Wahl des Integrationsgebiets: 0,5

Richtige integrale Form: 0,5

Durch Einsetzen des Satz von Gauss folgt

$$\int_{V_1} \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}V - \lambda \oint_{\partial V_1} \nabla T \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = 0 \qquad 0{,}5 \tag{24}$$

$\frac{1{,}5}{1{,}5}$

3.3. Lösung:

Mit Volumenmittelung vereinfacht sich der zeitliche Term zu:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_1} T\,\mathrm{d}V \approx \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}T_1 \int_{V_1}\mathrm{d}V}_{0{,}5} = \frac{\partial}{\partial t}T_1 \qquad 0{,}5 \tag{25}$$

$\frac{1}{1}$

3.4. Lösung:

Durch Summation über lineare Ränder lässt sich der Flussterm vereinfachen zu:

$$\lambda \oint_{\partial V_1} \nabla T \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s \approx \overbrace{\sum_{i=1}^{4}}^{0{,}5} (\nabla T \cdot \mathbf{n})_i \underbrace{1}_{|\mathrm{d}s|} \quad 0{,}5 \tag{26}$$

$$= \underbrace{\frac{T_r - T_1}{1,0}}+\frac{T_o - T_1}{1,0}+\frac{T_l - T_1}{1,0}+\frac{T_u - T_1}{1,0} \qquad 0{,}5 \tag{27}$$

FD-Approximation für Gradient: 1

$$= T_r + T_o + T_l + T_u - 4T_1 \qquad 0{,}5 \tag{28}$$

$\frac{3}{3}$

3.5. Lösung:

Mit dem expliziten Eulerverfahren ergbit sich:

$$0 = \underbrace{\frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\Delta t}}_{0{,}5} - \lambda\,(T_r^n + T_o^n + T_l^n + T_u^n - 4T_1^n) \tag{29}$$

$$\iff T_1^{n+1} = T_1^n - \frac{\lambda \Delta t}{1,0}\left(T_r^n + T_o^n + T_l^n + T_u^n - 4T_1^n\right) \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

0,5 für das Markieren von T_1^{n+1} als unbekannte Größe.

Richtige Wahl des Zeitlevels: 0,5 $\frac{1,5}{1,5}$

3.6. Lösung:

Um den maximalen Zeitschritt zu berechnen, muss das kleinste Kontrollvolumen bestimmt werden. Dieses liegt um den Punkt (10.5, 6). Durch Umformen ergibt sich mit der kleinsten Zelle mit $\Delta y = 1\text{m}$ und $\Delta x = 0,5\text{m}$ der maximale Zeitschritt zu

$$\Delta t_{max} = \frac{1}{7}\text{s} \qquad 0,5 \tag{32}$$

Daraus folgt, dass mindestens 14 Zeitschritte gerechnet werden müssen. 0,5

Richtige Wahl der limitierenden Zellen und korrekte Defintion von Δy und Δx: 1

$\frac{2}{2}$

$$\sum\nolimits_{A3} = \frac{11}{11}$$

4. Aufgabe: Fehler (11 Punkte)

* Lösung *

4.1. Lösung:

Nach dem Satz von Lax muss ein Verfahren konsitent und stabil sein, damit es konvergiert. 1

Beide Eigenschaften müssen für die drei Verfahren nachgewiesen werden:

Stabilität: $\left|\left|\frac{V^{n+1}}{V^n}\right|\right| \leq 1$

Konsistenz: $\lim\limits_{\Delta x, \Delta t \to 0} ||L - L_\Delta|| = 0$

Verfahren eins

$$Konsistenz: \lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} ||L - L_\Delta|| = \lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} = \left|\left|\underbrace{\mathcal{O}(\Delta t)}_{0} + \underbrace{\mathcal{O}(\Delta x^2)}_{0}\right|\right| = 0 \quad 1$$

Das Verfahren ist konsistent. 0.5

Stabilität:

$$\left|\left|\frac{V^{n+1}}{V^n}\right|\right| = \left|\left|1 + \underbrace{\frac{2\lambda \Delta t}{\Delta x^2}}_{<1} \underbrace{(\cos(k\Delta x) - 1)}_{[-2,0]}\right|\right| \quad 1$$

Das Verfahren ist nur unter Einhaltung der von-Neumann Zahl $\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$ stabil.

Problem 1: $\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} = 0.4 < \frac{1}{2}$ 0.5

Problem 2: $\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} = 0.6 \not< \frac{1}{2}$ 0.5

Damit ist das Verfahren für beide Probleme nicht uneingeschränkt verwendetbar. 1

Verfahren zwei

$$Konsistenz: \lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} ||L - L_\Delta|| = \lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} = \left|\left|\underbrace{\mathcal{O}(\frac{1}{\Delta t})}_{\infty} + \underbrace{\mathcal{O}(\Delta x^2)}_{0}\right|\right| = \infty$$

Das Verfahren ist nicht konsistent und damit für beide Probleme nicht verwendbar (Ein zusätzlicher Stabilitätsnachweis nicht nicht notwendig) 1.5

Verfahren drei

Konsistenz:

Das Verfahren ist konsistent, s. Konsistenzbeweis für Verfahren 1.

Stabilität:

$$\left\| \frac{V^{n+1}}{V^n} \right\| = \left\| \underbrace{\underbrace{\frac{1}{1 - \underbrace{\frac{2\lambda\Delta t}{\Delta x^2}}_{>0} \underbrace{(\cos(k\Delta x) - 1)}_{[-2,0]}}}_{>0}}_{<1} \right\| \quad 1$$

Das Verfahren ist uneingeschränkt stabil. Damit sind die notwendigen Bedingungen des Satzes von Lax erfüllt. Das Verfahren kann für beide Probleme verwendet werden. 1

$\frac{9}{9}$

4.2. Lösung:

Nach Hadamard ist ein Anfangswertproblem korrekt gestellt, wenn für das Problem eine Lösung existiert, diese eindeutig ist und stetig von den Daten abhängt.

$\frac{2}{2}$

$$\sum_{A4} = \frac{11}{11}$$