Schriftliche Prüfung: Aufgaben des AVT-Teils. Jeder Punkt entspricht 1 Minute.

Simulationstechnik

Wintersemester 2017/18

1. Aufgabe: Fragen (18 Punkte)

1.1. Geben Sie die Definition von Simulation nach Shannon an. **(2 Punkte)**

1.2. Was kennzeichnet konzentrierte Systeme und durch welche Arten von Gleichungen werden sie beschrieben (im Gegensatz zu verteilten Systemen)? **(2 Punkte)**

1.3. Gegeben sei folgender Modelica-Code für den Konnektor `WelleNabeVerbindung`:

```
connector WelleNabeVerbindung
    import Modelica.SIunits.*;
    flow Power J_Wtech;
    AngularVelocity omega;
end WelleNabeVerbindung;
```

Welche Gleichungen werden implizit durch den Befehl `connect(WNV1,WNV2)` gesetzt, wenn `WNV1` und `WNV2` zwei Konnektoren von diesem Typ sind? **(2 Punkte)**

1.4.

a) Warum sollten differentiell-algebraische Systeme für die Simulation nicht auf Index 0 reduziert werden? **(1 Punkt)**

b) Durch Indexreduktion erhält man ein überbestimmtes System. Welche Gleichungen sollten daraus gemäß der Empfehlung der Vorlesung für die Simulation ausgewählt werden, um ein voll spezifiziertes Index-1 System zu erhalten? **(2 Punkte)**

c) Gegeben ist folgendes System, wobei $u(t)$ ein Eingang ist und p ein Parameter:

$$\dot{x}_1(t) = z_1(t) \cdot u(t) \tag{1}$$

$$\dot{x}_2(t) = 5 \cdot x_1(t) \tag{2}$$

$$0 = p \cdot x_1(t) - x_2(t)^2 \tag{3}$$

$$0 = z_2(t)^2 - x_1(t) \cdot x_2(t) \tag{4}$$

$$0 = z_3(t) + z_1(t) - u(t) \tag{5}$$

Prüfen Sie anhand der Inzidenzmatrix, ob es sich bei dem System (1)–(5) um ein Index-1 System handeln kann. Begründen Sie Ihre Antwort. Beschriften Sie die Zeilen und Spalten der Inzidenzmatrix eindeutig. **(2,5 Punkte)**

1.5.

a) Was versteht man unter einem chaotischen System? Wie sind Vorhersageergebnisse für solche Systeme zu beurteilen? **(2 Punkte)**

b) Was versteht man unter einer Bifurkation? **(1 Punkt)**

1.6.

a) Was kennzeichnet ein ereignisdiskretes System? **(2 Punkte)**

b) Gegeben ist das Petri-Netz in Abbildung 1. Geben Sie an, wie viele Token sich nach der Schaltfolge $t_1,\ t_2$ auf jeder Stelle befinden.

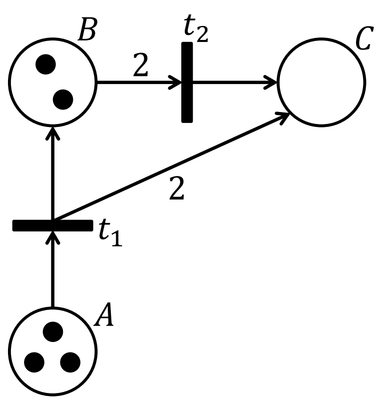


Abbildung 1: Petri-Netz

(1,5 Punkte)

2. Aufgabe: Systemtheorie (22 Punkte)

2.1. Geben Sie zunächst die allgemeine Formel der Taylorreihenentwicklung um einen allgemeinen Punkt $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ für ein autonomes nichtlineares Differentialgleichungssystem der Form $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ an. **(2 Punkte)**

2.2. Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) + \cos(x_1(t)) - 1. \end{aligned} \tag{DGL}$$

Berechnen sie alle Ruhelagen von (DGL) für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$.

Hinweis: Es kann eine oder mehrere Ruhelagen geben. Die Herleitung der Ruhelage(n) muss nachvollziehbar sein. **(2 Punkte)**

2.3. Führen Sie eine Linearisierung von (DGL) um einen **allgemeinen** Punkt $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^2$ durch und geben Sie die darin auftretenden Terme explizit an. **(3 Punkte)**

2.4. Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend mit $\mathbf{0} \in D$. Wann ist eine Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ positiv definit auf D? Wann ist sie negativ definit auf D? **(2 Punkte)**

2.5. Weisen Sie mit der direkten Methode von Ljapunow nach, dass die Ruhelage $\boldsymbol{x}^* = (0,0)^T$ von (DGL) lokal asymptotisch stabil ist. Verwenden Sie dazu die Ljapunow-Funktion $V(\boldsymbol{x}) = {x_1}^2 + {x_2}^2$. Sie dürfen die Ungleichung

$$2\,|\cos x_1 - 1| \leq {x_1}^2$$

oder alternativ die daraus folgende Ungleichung

$$2\,x_2\,(\cos x_1 - 1) \leq |x_2|\,{x_1}^2$$

ohne Beweis benutzen.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $V(\boldsymbol{x})$ positiv definit ist. **(8,5 Punkte)**

2.6. Gegeben sei ein lineares Differentialgleichungssystem mit zwei Variablen $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t), \qquad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ seien λ_1, λ_2, bzw. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$. Zeichnen und benennen Sie die Phasenporträts für

$$a)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 3,\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = 1 + 2\,i,\ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 1 - 2\,i,\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

(4,5 Punkte)

3. Aufgabe: Zustandsraumdarstellung (20 Punkte)

Die Verbreitung einer Krankheit innerhalb einer geschlossenen Population soll durch ein einfaches Modell beschrieben werden, um die Anzahl der überlebenden, immunisierten Individuen zu ermitteln. Dafür ist das differential-algebraische System (6)-(10) gegeben. $S(t)$ repräsentiert den Anteil der gesunden Individuen, $I(t)$ den Anteil der infizierten Individuen und $R(t)$ den Anteil der immunsierten Individuen, wobei zu dieser Gruppe die Genesenen (R_a) und die Verstorbenen (R_d) zählen. β beschreibt die Erkrankungsrate, γ die Immunisierungsrate und δ die Letalitätsrate (Sterberate).

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_t = -\beta \cdot S(t) \cdot I(t) \tag{6}$$

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_t = \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t) \tag{7}$$

$$1 = S(t) + I(t) + R(t) \tag{8}$$

$$R(t) = R_{\mathsf{a}}(t) + R_{\mathsf{d}}(t) \tag{9}$$

$$\frac{R_{\mathsf{d}}(t)}{I(t)} = \delta \tag{10}$$

3.1. Geben Sie die differentiellen Variablen, die algebraischen Variablen, die Eingänge und die Parameter des Systems an. Was ist die Ausgangsgröße des Systems? **(2,5 Punkte)**

3.2. Überführen Sie das System in die Zustandsraumdarstellung. **(2 Punkte)**

3.3.

a) Ist das System aus Aufgabe 3.2. zeitvariant oder zeitinvariant?

b) Ist das System aus Aufgabe 3.2. linear oder nichtlinear?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Hinweis: Begründen Sie Ihre Antwort bezüglich Linearität anhand der Eigenschaften Superposition oder Homogenität einer Funktion. Geben Sie für beide Eigenschaften jeweils die allgemeine Formel an. **(4,5 Punkte)**

3.4. Stellen Sie zunächst das allgemeine Parameterschätzproblem nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate für dynamische Systeme mit einem (skalaren) Ausgang y (mit den Messwerten $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_N$ an den Zeitpunkten $t_1, \ldots, t_N$) auf. Wofür stehen die einzelnen Symbole?
Stellen Sie das Parameterschätzproblem dann für das oben definierte System auf. Nehmen Sie an, dass für R_a Messwerte $\tilde{R}_{a,1}, \ldots \tilde{R}_{a,N}$ an den Zeitpunkten $t_1, \ldots, t_N$ vorhanden sind.

(4 Punkte)

3.5. Kann das aufgestellte Parameterschätzproblem für das in dieser Aufgabe definierte System mit der Normalengleichung gelöst werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

(2 Punkte)

3.6. Mit den geschätzten Parameterwerten wurde das folgende Diagramm erzeugt.

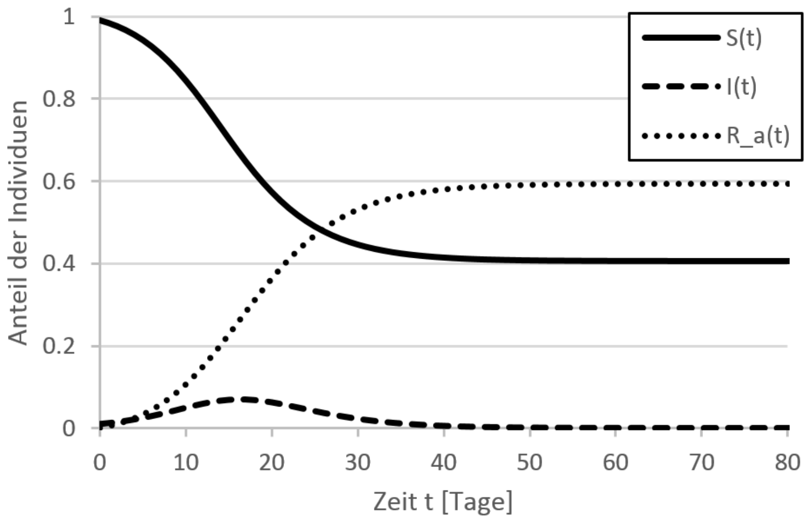


Abbildung 2: Simulationsergebnis

Zeichnen Sie mithilfe dieses Graphen die Trajektorien der differentiellen Variablen im Zustandsraum. Kennzeichnen Sie dabei eindeutig den Verlauf der Zeit. Machen Sie die Zeitpunkte (A) t=0, (B) t = 25 und (C) t=75 kenntlich. Zeichnen Sie außerdem die in Abbildung 2 zu sehende Ruhelage ein.

(5 Punkte)

4. Aufgabe: Hybride Systeme (20,5 Punkte)

Eine Kamera in der Frontscheibe eines Autos misst ihre Position x_A auf einer Straße der Breite w_S. Das Auto hat eine Breite von $2w_A$. Die Punkte $x_{A,L}$ und $x_{A,R}$ beschreiben die linke bzw. rechte Seite des Autos, siehe Abbildung 3. Das Auto fährt mit der gegebenen, im Betrag konstanten Geschwindigkeit v_A in die durch den Winkel φ_A beschriebene Richtung.

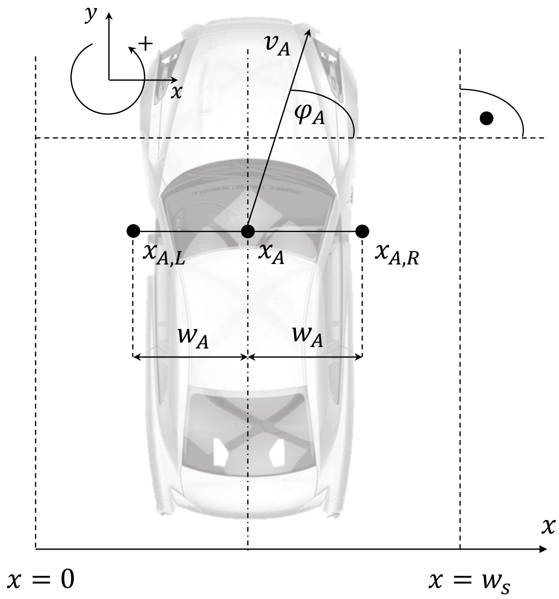


Abbildung 3: Skizze des Autos auf der Straße

In den Teilaufaben 4.1 bis 4.4 wird ein Modell zur Beschreibung der Position x_A auf der Straße entwickelt. Es muss nur die Position entlang der x-Achse modelliert werden. Bitte beachten Sie in allen Teilaufgaben das in Abbildung 3 spezifizierte Koordinatensystem. Nehmen Sie weiterhin an, dass die Front des Autos näherungsweise immer parallel zur x-Achse liegt.

4.1. Stellen Sie mit gegebener Fahrtrichtung $\varphi_A \in (0, \pi)$ ein differential-algebraisches Gleichungssystem (inkl. Anfangsbedingungen) auf, welches die Position der Kamera und der Seiten des Autos beschreibt. Zu Beginn befindet sich die Kamera in der Mitte der Straße. **(3 Punkte)**

4.2. Die zeitliche Änderung der Fahrtrichtung des Autos φ_A lässt sich als Summe der linearen Funktion des Lenkradwinkels φ_L mit Steigung $\Gamma_A \in \mathbb{R}_{>0}$ und des Eingangs ω_W beschreiben, welcher eine Störung durch Seitenwinde beschreibt. Ist der Lenkradwinkel in Ruheposition $\varphi_L = 0$ hat er keinen Einfluss auf die Fahrtrichtung. Stellen Sie eine differentielle Gleichung inklusive Anfangsbedingung für die Änderung der Fahrtrichtung φ_A auf. Zu Beginn fährt das Auto geradeaus. **(2 Punkte)**

Hinweis: Die Funktion $y = mx + n$ ist eine lineare Funktion mit Steigung m.

4.3. Die zweite Ableitung des Lenkradwinkels φ_L hängt linear mit Steigung $\Gamma_L \in \mathbb{R}_{>0}$ von der Summe der am Lenkrad angreifenden Drehmomente ab. Der Fahrer bringt ein Drehmoment M_F als Eingangsgröße ein und Reibung verursacht das dem Lenkradwinkel entgegenwirkende Drehmoment M_R. M_R hängt mit der Steigung $\Gamma_R \in \mathbb{R}_{>0}$ linear vom Lenkradwinkel φ_L ab. Stellen Sie ein differential-algebraisches Gleichungssystem (inkl. Anfangsbedingungen) auf, welches die Änderung des Lenkradwinkels beschreibt. Transformieren Sie evenutelle zweite Ableitungen zu einem System erster Ableitungen. Zu Beginn ist das Lenkrad in der Mittelposition ($\varphi_{L,0} = 0$) und nicht in Drehbewegung. **(3 Punkte)**

4.4. Ein Spurhalteassistent greift mit einem Drehmoment M_U als Systemeingang in die Lenkung ein, um ein drohendes Verlassen der Fahrspur zu verhindern. Fügen Sie das Drehmoment des Spurhalteassistenten den in Aufgabe 4.3 entwickelten differentiellen Gleichungen für den Lenkradwinkel hinzu. **(0,5 Punkte)**

4.5. Der Spurhalteassistent wird aktiv, wenn eine der Seiten des Autos die Fahrbahnkante erreicht. Er wird deaktiviert, wenn sich das Auto wieder auf der Fahrbahn befindet und der Abstand zwischen Fahrzeugseite und Fahrbahnkante größer als der Sicherheitsabstand w_U ist. Geben Sie an, welche Ungleichungen für das Ein- und Ausschalten des Spurhalteassistenten erfüllt sein müssen. **(4 Punkte)**

4.6. Um den Fahrer über sein Fehlverhalten zu alarmieren, bewegt der Spurhalteassistent bei dessen Aktivierung das Lenkrad sprunghaft um den Winkel α in Richtung der Straßenmitte. Stellen Sie das System als hybriden Automaten mit drei Moden dar. Es ist ausreichend, wenn Sie sinnvolle Abkürzungen (Nummerierung) für das Gleichungssystem nutzen. **(8 Punkte)**

Hinweis: Sollten Sie Teilaufgaben 4.1 bis 4.3 nicht gelöst haben, nutzen Sie die allgemeine Form der nichtlinearen zeitinvarianten Zustandsraumdarstellung als Gleichungssystem.

5. Aufgabe: Thermodynamische Systeme und numerische Integration (19,5 Punkte)

In dieser Aufgabe soll der Temperaturverlauf von Wasser, welches in einem geschlossenen Kochtopf auf einer Herdplatte erwärmt wird (Abbildung 4), simuliert werden. Im ersten Teil soll der Kochtopf als thermodynamisches System modelliert werden.

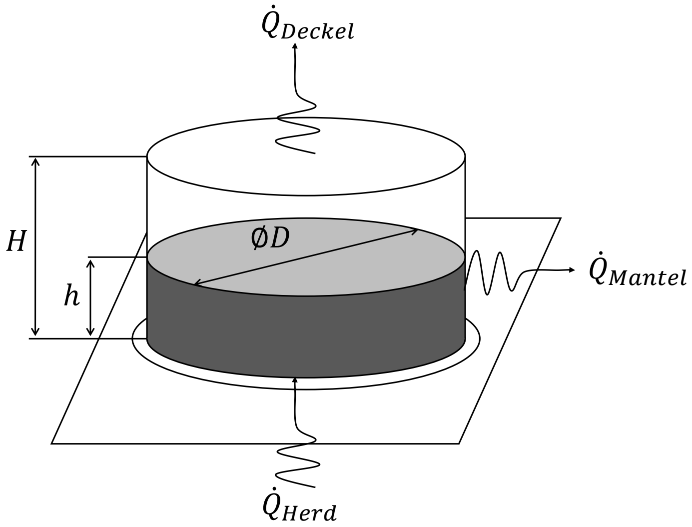


Abbildung 4: Schematische Darstellung des betrachteten Systems

5.1. Stellen Sie zunächst die allgemeine Bilanzgleichung für eine zu bilanzierende Größe Ψ auf. Erläutern Sie die Bedeutung der in der Gleichung auftretenden Terme.

(3 Punkte)

5.2. Leiten Sie ausgehend von der allgemeinen Energiebilanz um den Inhalt des Kochtopfes eine **explizite** Differentialgleichung für die Temperatur des Kochtopfinhaltes her. Beachten Sie die unten stehenden Annahmen. Verwenden Sie in der Differentialgleichung **ausschließlich** Größen, die in der Skizze oder den Annahmen genannt werden.

Annahmen:

- Der Topfinhalt kann als konzentriertes thermodynamisches System modelliert werden.
- Potentielle und kinetische Energieanteile sind vernachlässigbar.
- Masse und innere Energie der eingeschlossenen Luft sind zu vernachlässigen.

- Es treten **ausschließlich** die in der Skizze gezeichneten Ströme und Quellen auf.
- Es gilt die Vorzeichenkonvention aus der Vorlesung.
- Der Wärmeübergang zwischen Umgebung und Topfinhalt durch Konvektion und Strahlung über Mantelfläche und Deckel können jeweils mittels einer einzigen Gleichung für Mantel und Deckel beschrieben werden: $\dot{Q}_{Mantel} = k_{Topf} \cdot A_{Mantel} \cdot (T_U - T)$ bzw. $\dot{Q}_{Deckel} = k_{Topf} \cdot A_{Deckel} \cdot (T_U - T)$. Berechnen Sie hierbei die Flächen A_{Mantel} und A_{Deckel}, über die der Wärmeübergang erfolgt, aus den in der Skizze gegebenen geometrischen Angaben. T ist die Temperatur des Kochtopfinhaltes. Umgebungstemperatur T_U und Wärmeübergangskoeffizient k_{Topf} sind bekannt und konstant.
- Der Wärmestrom $\dot{Q}_{Herd}$, der vom Herd an den Topfinhalt abgegeben wird, ist bekannt.
- Dichte ρ und spezifische Wärmekapazität c_W von Wasser sind konstant und bekannt.
- Die spezifische innere Energie u (pro Masseneinheit) des Wasser berechnet sich aus: $u(T) = c_W \cdot (T - T_0) + u(T_0)$
- D ist der Durchmesser des Topfes, H die Höhe des Topfes und h der Füllstand des Wasser. Die Dicke des Topfes ist zu vernachlässigen.

(7 Punkte)

Im zweiten Teil der Aufgabe soll nun das System numerisch integriert werden.

5.3. Geben Sie zunächst die allgemeine Gleichung für einen Zeitschritt der Länge Δt des **impliziten** Euler-Verfahrens an für die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$. Geben Sie außerdem die allgemeine Formel zur Abschätzung des lokalen Fehlers zweiter Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t_n^2)$ für das **implizite** Euler-Verfahren an. **(2,5 Punkte)**

Durch einfache Umformungen unter Einführung der Variable $\Theta(t) = T(t) - T_U$ sowie des Gesamtübertragungskoeffizienten k_{ges} und des Systemeingangs $u_\Theta(t)$ lässt sich die untenstehende Differentialgleichung für den Temperaturverlauf herleiten. Nutzen Sie diese in den folgenden Aufgaben.

$$\dot{\Theta}(t) = -k_{ges} \cdot \Theta(t) + u_\Theta(t) \tag{11}$$

5.4. Approximieren Sie durch Anwendung des **impliziten** Euler-Verfahrens die Temperaturdifferenz $\Theta(t) = T(t) - T_U$ für den Zeitpunkt $t = 3$h. Skizzieren Sie den Verlauf zwischen 0h und 3h in unten stehendem Diagramm (Abbildung 5). Verwenden Sie die Schrittweite $\Delta t = 1$h. Verwenden Sie darüber hinaus $k_{ges} = 0,00043\text{s}^{-1}$ und gehen Sie von einem konstanten Systemeingang $u_\Theta(t) = 0,03\frac{\text{K}}{\text{s}}$ aus. Zum Zeitpunkt $t = 0$h ist der Inhalt des Kochtopfes auf Umgebungstemperatur, d.h. $\Theta(t = 0\text{h}) = 0$K. **(4 Punkte)**

5.5. Ihr Kollege schlägt vor, zur Lösung des Problems das **explizite** Euler-Verfahren statt des impliziten zu verwenden. Welchen Vorteil kann das explizite Euler-Verfahren im Allgemeinen bieten? **(1 Punkt)**

5.6. Ihr Kollege führt nun das explizite Euler-Verfahren bei gleicher Schrittweite $\Delta t = 1$h durch. Seine Ergebnisse sind ebenfalls in Abbildung 5 eingezeichnet. Wie erklären Sie sich die (physikalisch nicht sinnvollen) Oszillationen in der Lösung? Nennen Sie eine Möglichkeit, das Auftreten ungewollter Oszillationen beim expliziten Euler-Verfahren zu verhindern. **(2 Punkte)**

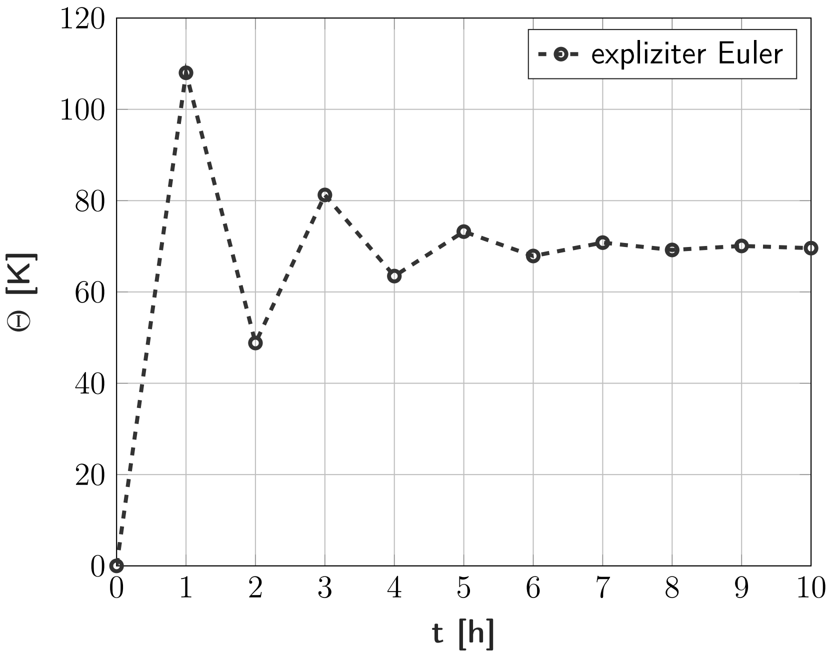


Abbildung 5: Verlauf der Temperaturdifferenz zwischen Kochtopfinhalt und Umgebung

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik

Wintersemester 2017/18

---

1. Aufgabe: Fragen (18 Punkte)

* Lösung *

1.1. Lösung: Nach Shannnon versteht man unter Simulation den Prozess, ein Modell eines realen Systems zu entwerfen (1 TP), und Experimente mit diesem Modell durchzuführen, um entweder das Systemverhalten und die zugrundeliegenden Ursachen zu verstehen, oder verschiedene Designs oder Betriebsstrategien eines künstlichen Systems zu bewerten (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. Es muss sowohl klar werden, dass mit einem Modell gearbeitet wird, als auch dass Simulations*experimente* zu einem bestimmten Zweck durchgeführt werden. **(2 Punkte)**

1.2. Lösung: Ein konzentriertes System ist ein System in dem die betrachteten Größen nicht ortsabhängig (1 TP) sind. Konzentrierte Systeme werden durch gewöhnliche Differentialgleichungen (oder gegebenenfalls Differentiell-Algebraische Gleichungssysteme) beschrieben (1 TP). (Im Gegensatz zu verteilten Systemen, welche durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

1.3. Lösung: Die Gleichungen, die durch `connect(WNV1,WNV2)` gesetzt werden, sind

```
WNV1.omega = WNV2.omega;               // 1 TP
WNV1.J_Wtech + WNV2.J_Wtech = 0;       // 1 TP
```

Bewertung: Siehe oben. Statt Modelica-Code zu schreiben, können die Gleichungen auch in mathematischer Notation angegeben oder in Worten beschrieben werden, solange diese Beschreibung (inklusive der Zugehörigkeit der Größen zu den beiden Konnektoren) eindeutig ist. **(2 Punkte)**

1.4. Lösung:

a) Die Lösung des Index-0 Systems erfüllt aufgrund numerischer Ungenauigkeiten bei der Integration in der Regel nicht die algebraischen Gleichungen des ursprünglichen Systems (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

b) Für die Simulation sollten alle algebraischen Gleichungen gewählt werden (also sowohl die ursprünglichen, als auch die versteckten, die während der Indexreduktion entdeckt wurden) (1 TP), sowie so viele differentielle Gleichungen, dass gleich viele Gleichungen wie Variablen vorhanden sind (0,5 TP). Damit tatsächlich ein Index-1 System vorliegt, muss bei der Auswahl darauf geachtet werden, dass die algebraischen Gleichungen nach allen neuen algebraischen Variablen des entstehenden Systems aufgelöst werden können (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

c) Wir betrachten die Inzidenzmatrix bestehend aus den algebraischen Gleichungen und algebraischen Variablen des Systems (1)–(5):

	z_1	z_2	z_3
(3)	0	0	0
(4)	0	$*$	0
(5)	$*$	0	$*$

Da Gleichung (3) keine der algebraischen Variablen enthält, hat die Inzidenzmatrix keinen vollen strukturellen Rang (0,5 TP). Es kann sich somit *nicht* um ein Index-1 System handeln (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. Für die korrekten Einträge gibt es insgesamt 1 TP. Falls keine Beschriftung der Zeilen und Spalten vorhanden ist bzw. die Lösung nicht nachvollziehbar ist, gibt es keine Punkte. **(2,5 Punkte)**

1.5. Lösung:

a) Ein chaotisches System ist dadurch gekennzeichnet, dass sein Verhalten sehr stark von den Anfangswerten abhängt (1 TP), so dass verlässliche Vorhersagen über längere Zeit nicht möglich sind (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

b) Man spricht von einer Bifurkation, wenn sich bei Änderung der Parameter eines Systems das Verhalten des Systems qualitativ ändert (1 TP) (z.B. Anzahl der Ruhelagen, Stabilität, ...).

Bewertung: Siehe oben. Es muss klar werden, dass die Änderung des Verhaltens qualitativer Art ist (bzw. entsprechende Beispiele genannt werden). **(1 Punkt)**

1.6. Lösung:

a) Ein ereignisdiskretes System ist ein System, dessen wertdiskrete Zustände (1 TP) sich *ausschließlich* aufgrund von externen oder internen Ereignissen ändert (1 TP). Dabei spielt die Zeit, die zwischen zwei Ereignnissen vergeht, keine Rolle, es wird nur die Tatsache und die Reihenfolge ihres Auftretens betrachtet.

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

b) Nach dem Schalten von t_1 und t_2 befinden sich auf Stelle A noch 2 Token (0,5 TP), auf Stelle B 1 Token (0,5 TP) und auf Stelle C 3 Token (0,5 TP). Durch das Schalten von t_1 wird ein Token von Stelle A entfernt. Stelle B wird dabei ein Token zugeführt, Stelle C werden aufgrund des Kantengewichts zwei Token zugeführt. Beim anschließenden Schalten von t_2 werden von Stelle B zwei Token entfernt, und Stelle C ein Token zugeführt.

Bewertung: Siehe oben. **(1,5 Punkte)**

2. Aufgabe: Systemtheorie (22 Punkte)
* Lösung *

2.1. Lösung: Die Taylorreihenentwicklung eines allgemeinen nichtlinearen autonomen Systems der Form $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ lautet

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \underbrace{f\left(\boldsymbol{x}^*\right)}_{\text{0,5 TP}} + \underbrace{\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}^*}}_{\text{0,5 TP}} \underbrace{(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*)}_{\text{0,5 TP}} + \underbrace{\overbrace{R_n(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}^*)}^{\text{vernachlässigt}}}_{\text{0,5 TP}}.$$

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

2.2. Lösung: Wir berechnen alle Ruhelagen. Für das Aufstellen der Gleichungen

$$0 = -x_1 \tag{A}$$

$$0 = x_1 - x_2 + \cos x_1 - 1 \tag{B}$$

gibt es einen Teilpunkt (1 TP). Aus Gleichung (A) erhalten wir $x_1 = 0$ und setzen den Wert direkt in Gleichung (B) ein:

$$0 = 0 - x_2 + \cos 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow -x_2 + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow -x_2 = 0.$$

Damit folgt $x_2 = 0$ (1TP). Die einzige Ruhelage ist also $(0, 0)^T$.

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

2.3. Lösung: Die Linearisierung des gegebenen Systems ist

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \approx \underbrace{\begin{bmatrix} -x_1^* \\ x_1^* - x_2^* + \cos x_1^* - 1 \end{bmatrix}}_{\text{1 TP}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 - \sin x_1^* & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) - x_1^* \\ x_2(t) - x_2^* \end{bmatrix}}_{\text{2 TP}}.$$

Bewertung: Siehe oben. **(3 Punkte)**

2.4. Lösung: Ein Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ ist positiv definit falls

1. $V(\mathbf{0}) = 0$ (0,5 TP).

2. $V(\boldsymbol{x}) > 0$ für alle $\boldsymbol{x} \in D \backslash \{0\}$ (0,5 TP).

Sie ist negative definit falls

1. $V(\mathbf{0}) = 0$ (0,5 TP).

2. $V(\boldsymbol{x}) < 0$ für alle $\boldsymbol{x} \in D \backslash \{0\}$ (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

2.5. Lösung: Die Ljapunow-Funktion

$$V(\boldsymbol{x}) = {x_1}^2 + {x_2}^2.$$

ist positiv definit, denn

1. $V(\mathbf{0}) = 0^2 + 0^2 = 0$, (0,5 TP)

2. $V(\boldsymbol{x}) = \underbrace{\|\boldsymbol{x}\|_2^2}_{>0 \text{ für } \boldsymbol{x} \neq 0} > 0$ für $\boldsymbol{x} \neq 0$. (0,5 TP)

Wir müssen noch nachweisen das $\frac{dV}{dt}(\boldsymbol{x})$ in einer Umgebung von $\mathbf{0}$ negativ definit ist (1 TP). Es gilt

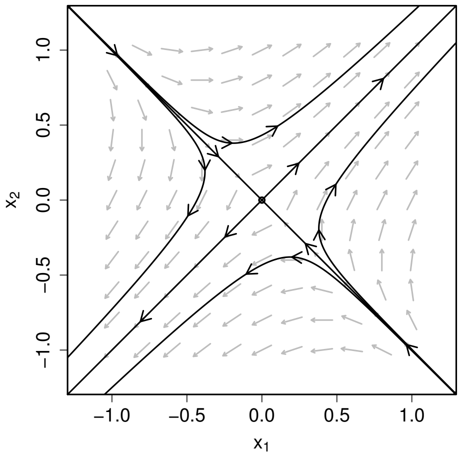
$$\frac{dV}{dt}(\mathbf{0}) = \left.\frac{dV}{d\boldsymbol{x}}\right|_{\mathbf{0}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}|_{\mathbf{0}} = \left.\frac{dV}{d\boldsymbol{x}}\right|_{\mathbf{0}} \cdot \mathbf{0} = 0 \qquad \text{(1 TP)}.$$

Sei nun $\boldsymbol{x} \neq 0$, Dann gilt

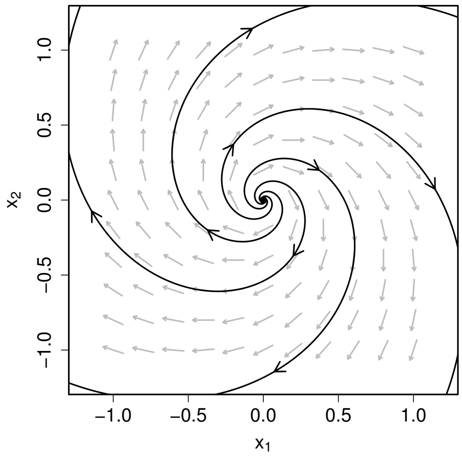
$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}(\boldsymbol{x}) &= \frac{dV}{d\boldsymbol{x}} \dot{\boldsymbol{x}} \\
&= (2\,x_1, 2\,x_2) \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 - x_2 + \cos x_1 - 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 TP)} \\
&= -2\,{x_1}^2 - 2\,{x_2}^2 + 2\,x_2\,x_1 + 2\,x_2\,(\cos x_1 - 1) \qquad \text{(1 TP)} \\
&= -(x_1 - x_2)^2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 + 2\,x_2\,(\cos x_1 - 1) \qquad \text{(1 TP)} \\
&\leq -(x_1 - x_2)^2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 + |x_2|\,{x_1}^2 \qquad \text{(1 TP)} \\
&= -\left(\underbrace{(x_1 - x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(1 - |x_2|){x_1}^2 + {x_2}^2}_{\geq (1-|x_2|)\|\boldsymbol{x}\|_2^2 > 0 \text{ für } |x_2|<1} \right) < 0 \text{ für } |x_2| < 1 \qquad \text{(1,5 TP)}
\end{aligned}$$

Bewertung: Siehe oben. **(8,5 Punkte)**

2.6. Lösung:



a) Sattelpunkt



b) instabiler Fokus

Bewertung: Für das richtige Phasenporträt in a) 1,5 TP, in b) 2 TP (davon 0,5 für die richtige Drehrichtung). Für jede richtige Charakterisierung 0,5 TP. **(4,5 Punkte)**

3. Aufgabe: Zustandsraumdarstellung (20 Punkte) * Lösung *

3.1. Lösung: Die differentiellen Variablen des Systems sind $x(t) = (I(t)S(t))^{\mathsf{T}}$, die algebraischen Variablen $z(t) = (R, R_{\mathsf{d}})^{\mathsf{T}}$, die Parameter $p = (\beta, \gamma, \delta)^{\mathsf{T}}$. Es gibt keine Eingänge $u(t)$. Die Ausgangsgröße des Systems ist die Anzahl der überlebenden, immunisierten Mitarbeiter $y(t) = R_{\mathsf{a}}$.

Bewertung: Pro richtigem Vektor gibt es 0,5 TP.
Falls R_a sowohl als Ausgang als auch als algebraische Variable aufgezählt wurde, ist dies ebenfalls richtig. **(2,5 Punkte)**

3.2. Lösung: Um das System in Zustandsraumdarstellung zu überführen, müssen die algebraischen Variablen eliminiert werden. Die Differentialgleichungen bleiben dadurch unverändert. Auflösen nach den algebraischen Variablen und einsetzen führt zu der Zustandsraumdarstellung für die Ausgangsvariable.

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_t = -\beta S(t)I(t) \quad \text{(0,5 TP)} \tag{1}$$

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_t = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad \text{(0,5 TP)} \tag{2}$$

$$R_{\mathsf{a}} = 1 - (S(t) + I(t)) - \delta I(t) \quad \text{(1 TP)} \tag{3}$$

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

3.3. Lösung: a) Es handelt sich um eine zeitinvariante Zustandsraumdarstellung (0,5 TP), da es keine explizite Abhängigkeit von der Zeit gibt (0,5 TP).
b) Die Bedingung für Homogenität ist $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. (1 TP)
Die Bedingung für Superposition ist $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (1 TP).
Die Zustandsraumdarstellung ist nichtlinear (0,5 TP), da z.B. die Eigenschaft Homogenität für Gleichung (1) mit $f(\boldsymbol{x}) = -\beta S(t)I(t)$ nicht erfüllt ist:

$$f(\alpha \boldsymbol{x}) = -\beta\alpha S(t)\alpha I(t) \tag{4}$$

$$\neq \alpha f(x(t)) = -\alpha\beta S(t)I(t) \tag{5}$$

Alternativ kann Superposition geprüft werden:

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = -\beta(S_1(t) + S_2(t))(I_1(t) + I_2(t)) \tag{6}$$

$$\neq f(x(t)) + f(y(t)) = (-\beta(S_1(t)I_1(t))) + (-\beta(S_2(t)I_2(t))) \tag{7}$$

Bewertung: 1 TP wird gegeben, wenn anhand von Homogenität **oder** Superposition die Nichtlinearität des Systems gezeigt wird. **(4,5 Punkte)**

3.4. Lösung: Die Gütefunktion für das allgemeine Parameterschätzproblem für einen skalaren Ausgang lautet

$$J(\boldsymbol{p}) = \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{y}(t_k, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}) - \tilde{\boldsymbol{y}}_k)^2 \quad \text{(1TP)} \tag{8}$$

mit Ausgängen $\boldsymbol{y}$, Eingängen $\boldsymbol{u}$, Messzeiten t_k, Anzahl Messungen N, Parametern $\boldsymbol{p}$ und Messwerten $\tilde{\boldsymbol{y}}_k$ (1TP).

Das Parameterschätzproblem lautet dann

$$\min_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p}) \quad \text{(1TP)}. \tag{9}$$

Im vorliegenden Fall haben wir einen Ausgang $y = R_a$ und drei Parameter β, γ und δ. Damit lautet das Parameterschätzproblem

$$\min_{\beta,\gamma,\delta} \sum_{k=0}^{N} \left(R_a(t_k, [\beta, \gamma, \delta]) - \tilde{R}_{a,k} \right)^2 \quad \text{(1TP)}. \tag{10}$$

Bewertung: Siehe oben. **(4 Punkte)**

3.5. Lösung: Nein (1TP), die Normalengleichung ist nur zur Lösung von Parameterschätzproblemen von linearen, algebraischen Modellen geeignet (1TP). **(2 Punkte)**

3.6. Lösung:

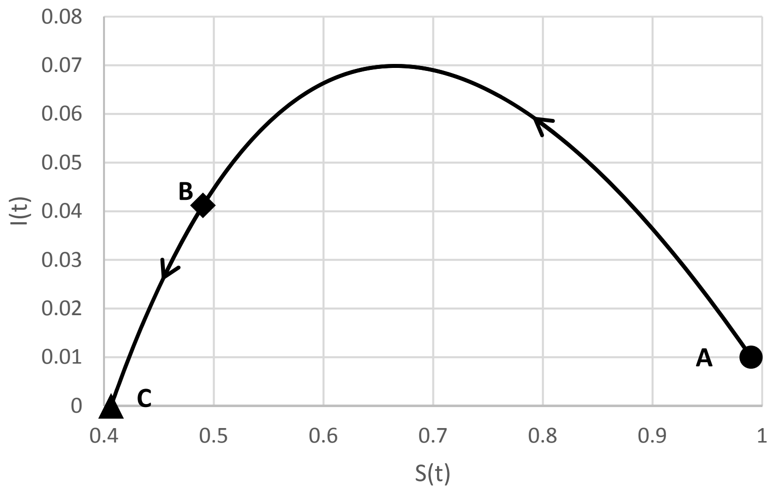


Abbildung 1: Zustandsraumdarstellung

Die Ruhelage befindet sich in Punkt C. (0,5TP).

Bewertung: 1 TP für die richtige Achsenbeschriftung. 1 TP für die Kurve und jeweils 0,5 TP für die eingezeichneten Punkte, die Ruhelage und die richtige Pfeilrichtung. **(5 Punkte)**

4. Aufgabe: Hybride Systeme (20.5 Punkte) * Lösung *

4.1. Lösung: Mit gegebener Fahrtrichtung φ_A ergibt sich die Änderung der Position der Kamera mit Startwert zu:

$$\dot{x}_A = v_A \cos(\varphi_A) \quad \text{1 TP} \tag{11}$$

$$x_A(t=0) = \frac{w_S}{2} \quad \text{1 TP} \tag{12}$$

Mit der Annahme, dass die Front des Autos immer näherungsweise parallel zur x-Achse liegt, können wir die Koordinaten der Seiten berechnen.

$$x_{A,L} = x_A - w_A \quad \text{0.5 TP} \tag{13}$$

$$x_{A,R} = x_A + w_A \quad \text{0.5 TP} \tag{14}$$

Bewertung: Siehe oben. **(3 Punkte)**

4.2. Lösung:

In der Aufgabenstellung ist gegeben, dass sich die Fahrtrichtung linear mit dem Lenkradwinkel ändert.

$$\dot{\varphi}_A = \Gamma_A \varphi_L + \omega_W \quad \text{1 TP} \tag{15}$$

Zu Beginn fährt das Auto gradeaus. Die entsprechende Anfangsbedingung ist also:

$$\varphi_A(t=0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{1 TP} \tag{16}$$

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

4.3. Lösung:

In der Aufgabenstellung ist gegeben, dass die zweite Ableitung des Lenkradwinkels φ_L linear von den angreifenden Drehmomenten abhängt.

$$\ddot{\varphi}_L = \Gamma_L \left(M_F + M_R \right) \quad \text{0.5 TP} \tag{17}$$

Die Ableitung zweiter Ordnung kann in ein System von Ableitungen erster Ordnung umgewandelt werden.

$$\dot{\Psi}_L = \Phi_L \quad \text{0.5 TP} \tag{18}$$

$$\dot{\Phi}_L = \Gamma_L \left(M_F + M_R \right) \quad \text{0.5 TP} \tag{19}$$

Die benötigten Anfangswerte für das System müssen noch angegeben werden.

$$\Phi_L(t = 0) = 0 \quad \text{0.5 TP} \tag{20}$$

$$\Psi_L(t = 0) = 0 \quad \text{0.5 TP} \tag{21}$$

Das angreifende Drehmoment M_R hängt wiederum linear von dem aktuellen Winkel des Lenkrades ab.

$$M_R = -\Gamma_R \varphi_L \quad \text{0.5 TP} \tag{22}$$

Bewertung: Siehe oben. **(3 Punkte)**

4.4. Lösung:

Das Drehmoment des Spurhalteassistenten muss in die in Aufgabe 4.3 entwickelte Gleichung eingefügt werden.

$$\dot{\Phi}_L = \Gamma_L \left(M_F + M_R + M_U \right) \quad \text{0.5 TP} \tag{23}$$

Bewertung: Siehe oben. **(0.5 Punkte)**

4.5. Lösung:

Der Spurhalteassistent aktiviert sich, wenn das Auto von der Fahrbahn abkommt.

$$x_{A,L} \leq 0 \quad \text{1 TP} \tag{24}$$

$$x_{A,R} \geq w_S \quad \text{1 TP} \tag{25}$$

Der Spurhalteassistent deaktiviert sich wieder, wenn das Auto zurück in der Fahrbahn ist und den geforderten Sicherheitsabstand zur Fahrbahnkante einhält.

$$x_{A,L} > w_U \quad \text{1 TP} \tag{26}$$

$$x_{A,R} < w_S - w_U \quad \text{1 TP} \tag{27}$$

Bewertung: Siehe oben. Sollten $\leq$ und $<$ (bzw. $\geq$ und $>$) Zeichen verwechselt werden, gibt es keinen Punktabzug. **(4 Punkte)**

4.6. Lösung:

Jede Mode mit sinnvoller Überschrift gibt 0.5 TP. Jedes richtige Gleichungssystem in einer Mode gibt 0.5 TP. Es wird akzeptiert, wenn das Drehmoment M_U in der inaktiven Mode nicht auftaucht. Jede richtige Kante gibt 0.5 TP. Jeder Jump Bedingung und jede Guard Bedingung geben 0.5 TP.

Bewertung: Siehe oben. **(8 Punkte)**

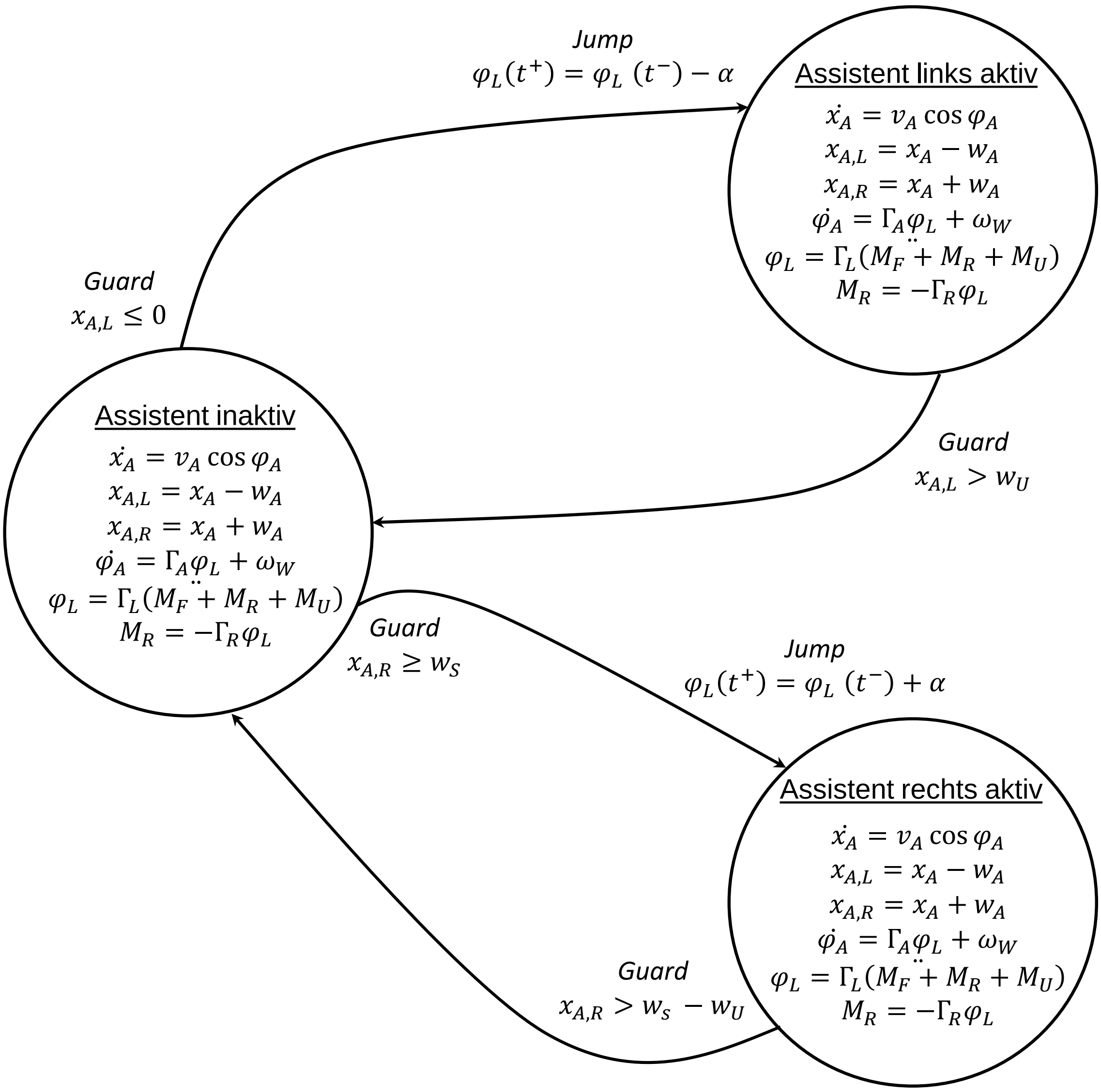


Abbildung 2: Hybrider Automat zur Beschreibung des Systems.

5. Aufgabe: Thermodynamische Systeme und numerische Integration (19,5 Punkte) * Lösung *

5.1. Lösung: Die allgemeine Bilanz für Ψ lautet:

$$\left.\frac{d\Psi}{dt}\right|_t = \sum_{j\epsilon\Lambda_J} J_j^\Psi(t) + \sum_{k\epsilon\Lambda_\Gamma} \Gamma_k^\Psi(t)$$

- $\left.\frac{d\Psi}{dt}\right|_t$: Zeitliche Ableitung der Bilanzgröße (1TP)
- $\sum_{j\epsilon\Lambda_J} J_j^\Psi(t)$: Summe über alle ein- und austretenden Ströme (1TP)
- $\sum_{k\epsilon\Lambda_\Gamma} \Gamma_k^\Psi(t)$: Summe über alle Senken und Quellen (1TP)

Bewertung: Den Teilpunkt gibt es nur bei richtiger Bezeichnung der Terme. **(3 Punkte)**

5.2. Lösung: Die allgemeine Form der Energiebilanz lautet bei Vernachlässigung äußerer Energieformen:

$$\left.\frac{dU}{dt}\right|_t = \sum_{j\epsilon\Lambda_H} J_j^H(t) + \sum_{k\epsilon\Lambda_Q} J_k^Q(t) + \sum_{l\epsilon\Lambda_W} J_l^W(t) - p\left.\frac{dV}{dt}\right|_t$$

Diese lässt sich unter den gegebenen Annahmen vereinfachen, wobei laut Konvention aus der Vorlesung alle Ströme als eintretend angenommen werden:

$$\underbrace{\left.\frac{dU}{dt}\right|_t}_{0{,}5\,\text{TP}} = \underbrace{\dot{Q}_{Herd}(t)}_{0{,}5\,\text{TP}} + \underbrace{\dot{Q}_{Mantel}(t)}_{0{,}5\,\text{TP}} + \underbrace{\dot{Q}_{Deckel}(t)}_{0{,}5\,\text{TP}}$$

Setz man nun die Gleichungen für die einzelnen Terme ein, erhält man:

$$\underbrace{mc_W \left.\frac{dT}{dt}\right|_t}_{0{,}5\,\text{TP}} = \underbrace{\dot{Q}_{Herd}(t)}_{0{,}5\,\text{TP}} + \underbrace{k_{Topf}A_{Mantel}(T_U - T(t))}_{0{,}5\,\text{TP}} + \underbrace{k_{Topf}A_{Deckel}(T_U - T(t))}_{0{,}5\,\text{TP}}$$

Durch Einsetzen der geometrischen Beziehungen und anschließendes Auflösen der Gleichung erhält man schließlich die gewünschte Form.

$$\underbrace{\rho\frac{D^2\pi h}{4}c_W \left.\frac{dT}{dt}\right|_t}_{0{,}5\,\text{TP}} = \underbrace{\dot{Q}_{Herd}(t)}_{0{,}5\,\text{TP}} + \underbrace{k_{Topf}\pi DH(T_U - T(t))}_{0{,}5\,\text{TP}} + \underbrace{k_{Topf}\frac{D^2\pi}{4}(T_U - T(t))}_{0{,}5\,\text{TP}}$$

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_t = \frac{4\dot{Q}_{Herd}(t)}{\rho D^2\pi hc_W} + k_{Topf}(\frac{4H}{\rho Dhc_W} + \frac{1}{\rho hc_W})(T_U - T(t))\ (1\text{TP})$$

Bewertung: Siehe TP an den Gleichungen. **(7 Punkte)**

5.3. Lösung: Die allgemeine Gleichung für das implizite Euler-Verfahren lautet:

$$\underbrace{x_{n+1}}_{0{,}5\,\text{TP}} = \underbrace{x_n}_{0{,}5\,\text{TP}} + \underbrace{\Delta tf(x_{n+1}, t_n + \Delta t_n)}_{0{,}5\,\text{TP}}$$

Der Fehler entspricht den durch das implizite Euler-Verfahren vernachlässigten Elementen höherer Ordnung. Der quadratische Term für die Fehlerabschätzung lautet demnach:

$$\mathcal{O}(\Delta t_n^2) = \underbrace{\frac{\Delta t_n^2}{2}}_{0{,}5\,\text{TP}} \underbrace{\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=t_n+\Delta t_n}}_{0{,}5\,\text{TP}}$$

Bewertung: Siehe TP an den Gleichungen. **(2,5 Punkte)**

5.4. Lösung: Es ergibt sich folgende Gleichung für Θ_{n+1}:

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + \Delta t(-k_{ges}\Theta_{n+1} + u_\Theta)$$

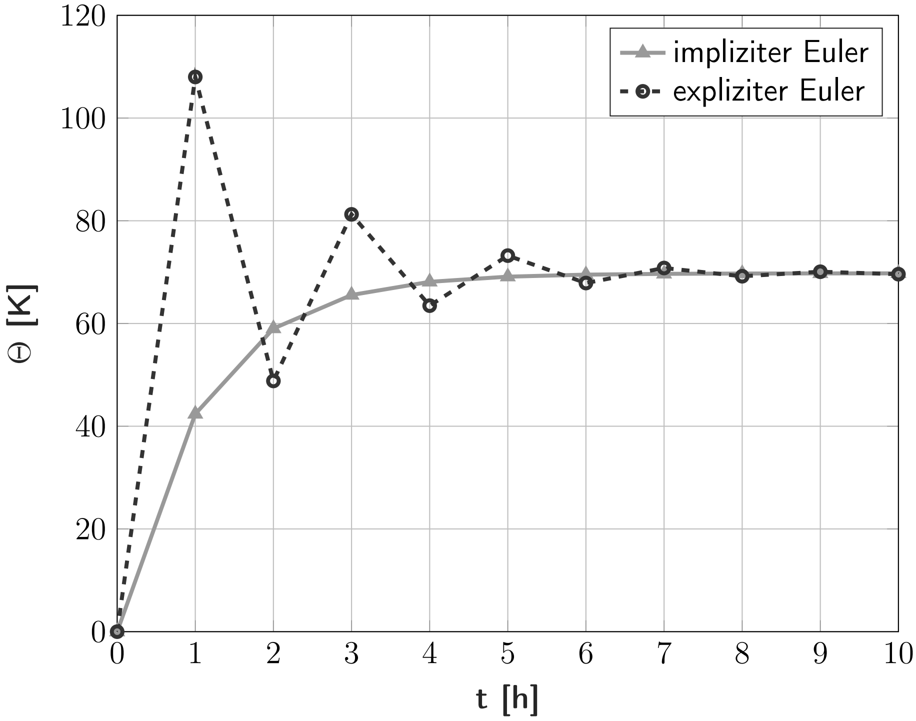
$$\Leftrightarrow \Theta_{n+1} = \frac{\Theta_n + \Delta tu_\Theta}{1 + \Delta tk_{ges}}\ (1\text{TP})$$

Somit kann Θ zu den gewünschten Zeitpunkten berechnet werden.

$$\Theta(t = 1\text{h}) = \Theta_1 = \frac{0 + 3600\text{s} \cdot 0,03\frac{\text{K}}{\text{s}}}{1 + 3600\text{s} \cdot 4,3 \cdot 10^{-4}\text{s}^{-1}} = 42,4\text{K}\ (1\text{TP})$$

$$\Theta(t = 2\text{h}) = \Theta_2 = \frac{42,4 + 3600\text{s} \cdot 0,03\frac{\text{K}}{\text{s}}}{1 + 3600\text{s} \cdot 4,3 \cdot 10^{-4}\text{s}^{-1}} = 59,0\text{K (1TP)}$$

$$\Theta(t = 3\text{h}) = \Theta_3 = \frac{59,0 + 3600\text{s} \cdot 0,03\frac{\text{K}}{\text{s}}}{1 + 3600\text{s} \cdot 4,3 \cdot 10^{-4}\text{s}^{-1}} = 65,5\text{K (1TP)}$$



Bewertung: Siehe TP an den Gleichungen. Bei der Berechnung der Zeitschritte gibt es jeweils 0,5TP für die Rechnung und 0,5TP für qualitativ richtiges Einzeichnen des Punktes. Ein einfaches Skizzieren ohne vorherige Berechnung wird nicht bepunktet! **(4 Punkte)**

5.5. Lösung: Die einzelnen Zeitschritte im expliziten Euler-Verfahren sind im Allgemeinen weniger rechenaufwendig, da eine explizite Funktion für x_{n+1} existiert. Beim impliziten Verfahren muss hingegen eine implizite Funktion nach x_{n+1} aufgelöst werden (1TP).

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

5.6. Das explizite Euler-Verfahren ist nicht A-stabil. (1TP). Daher kann es bei der Approximation mit großen Zeitschritten zu numerischen Instabilitäten kommen. Um dies zu vermeiden, sollten kleinere Rechenschritte verwendet werden (1TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

Schriftliche Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Wintersemester 2017/18

1. Aufgabe: Finite Differenzen (12 Punkte)

Gegeben sei folgende Finite-Differenzen-Diskretisierung der eindimensionalen Advektionsgleichung für die Funktion $u(x,t)$:

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + a\frac{u_k^{n+1} - u_{k-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0\,. \tag{1}$$

Ferner sind alle für den Rest der Aufgabe benötigten Zahlenwerte in der folgenden Tabelle gegeben:

Advektionsgeschwindigkeit	$a = 1\,cm/s$
Zeitschrittweite	$\Delta t = 0.1\,s$
Gitterschrittweite	$\Delta x = 0.5\,cm$
Rechengebiet (räumlich)	$x \in [0\,cm; 1\,cm]$
Rechengebiet (zeitlich)	$t \in [0\,s; 10\,s]$
Anfangsbedingung	$u(x,0) = (1\,K/cm^2) \cdot x^2$
Randbedingung	$u(0,t) = 0\,K$

Tabelle 1: Zahlenwerte

1.1. Gleichung (1) soll nun, entsprechend den Angaben in Tabelle 1, auf einem Gitter mit drei äquidistant verteilten Knoten gelöst werden. Stellen Sie das dazugehörige Gleichungssystem auf. Sortieren Sie dabei bekannte Funktionswerte auf die rechte Seite. Setzen Sie die Werte für a, Δt, Δx sowie $u(x,0)$ und $u(0,t)$ noch nicht ein. **(5 Punkte)**

1.2. Überführen Sie das Gleichungssystem aus Aufgabe 1.1 in Matrixform.

(3 Punkte)

1.3. Durch Lösen des Gleichungssystems aus Aufgaben 1.2 erhält man $u_1^1 = 0\,K$, $u_2^1 = 5/24\,K$, sowie $u_3^1 = 125/144\,K$. Nennen Sie, basierend auf Ihrem physikalischen Wissen über die Advektionsgleichung, die zu erwartende analytische Lösung. Vergleichen Sie die diskreten Werte mit den zu erwartenden analytischen Werten. Wie erklären Sie den Unterschied zwischen den Werten? **(4 Punkte)**

2. Aufgabe: Finite Elemente (10 Punkte)

Wir betrachten folgendes 1D-Element, welches wir mit linearen Interpolationsfunktionen versehen:

Abbildung 1: globales Element

2.1. Zeichnen und beschriften Sie in Abbildung 2 die linearen Interpolationsfunktionen $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$ sowie deren erste Ableitung nach x. **(2 Punkte)**

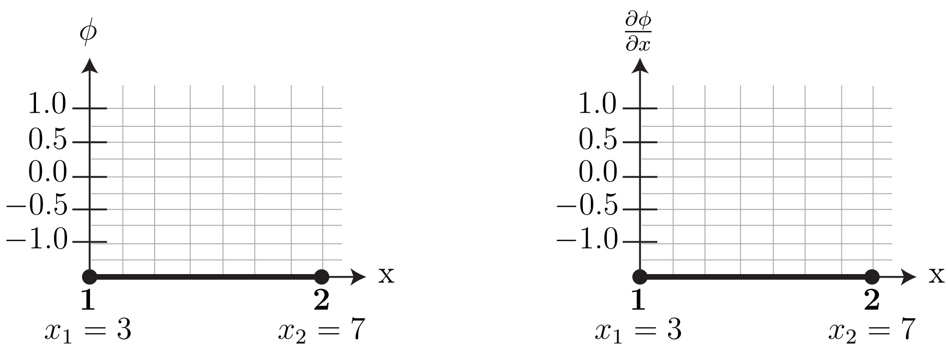
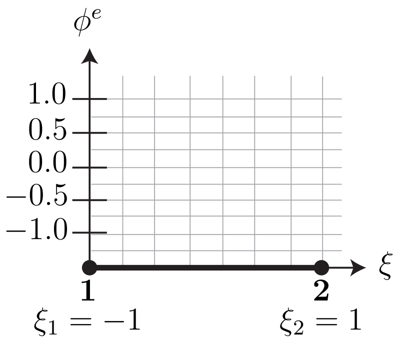


Abbildung 2: Koordinatensystem zum Einzeichnen der globalen Interpolationsfunktionen *(Antwort bitte direkt hier einzeichnen.)*

2.2. Abbildung 3 stellt das zugehörige Referenzelement dar. Zeichen und beschriften Sie auch hier in der Abbildung die linearen Interpolationsfunktionen $\phi_1^e(\xi)$ und $\phi_2^e(\xi)$ sowie deren erste Ableitung nach ξ. **(2 Punkte)**



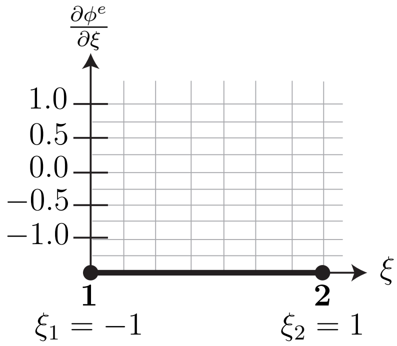


Abbildung 3: Koordinatensystem zum Einzeichnen der Interpolationsfunktionen auf dem Referenzelement *(Antwort bitte direkt hier einzeichnen.)*

2.3. Berechnen Sie nun das Integral $\int_3^7 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial x}\, dx$. Führen Sie die Rechnung komplett in globalen Koordinaten x durch. **(2 Punkte)**

2.4. Berechnen Sie nun dasselbe Integral $\int_3^7 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial x}\, dx$ mit Hilfe des Referenzelements. Es gilt $\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\Delta x}{\Delta \xi}$. *(Hinweis: Denken Sie daran, die Transformationsformel und die Kettenregel zu verwenden.)* **(4 Punkte)**

3. Aufgabe: Finite Volumen (9 Punkte)

Betrachten Sie im Folgenden die eindimensionale Diffusionsgleichung ($\lambda = const$):

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0 \tag{2}$$

3.1. Bestimmen Sie die integrale Form der Gleichung im allgemeinen Gebiet Ω und vereinfachen Sie analytisch so weit wie möglich. **(2 Punkte)**

3.2. Diskretisieren Sie die Gleichung nun vollständig für ein internes Kontrollvolumen V_i einer knotenzentrierten Darstellung. Führen Sie dazu eine Volumenmittelung durch, benutzen Sie die explizite Eulermethode zur Zeitdiskretisierung und führen Sie einfache Approximationen gesuchter Terme ein. Lösen Sie anschließend nach der gesuchten Größe auf. Nehmen Sie hierfür zudem ein äquidistantes Gitter an. **(3,5 Punkte)**

Gegeben sei nun folgende Diskretisierung des Rechengebiets:

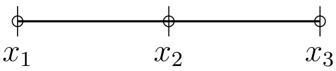


Abbildung 4: 1D Gitter

3.3. Übertragen Sie das gezeigte Gitter auf Ihren Lösungsbogen und zeichnen sie knotenzentrierte Kontrollvolumen ein. Markieren Sie zusätzlich die Lage der Unbekannten. Nehmen Sie dazu an, dass am linken Rand eine Neumann und am rechten Rand eine Dirichlet Randbedingung aufgebracht werden. Verwenden Sie hierfür die folgende Notation.

1. Gitterknoten: $\circ$
2. Lage der Unbekannten: $\times$
3. Grenzen der Kontrollvolumen $\Big[\ \Big]$:

(1 Punkt)

3.4. Am linken Rand ($x = x_1$) soll eine Neumann Randbedingung aufgeprägt werden. Nennen Sie für den knotenzentrierten Fall beide aus der Vorlesung hierfür bekannten Ansätze. **(2 Punkte)**

3.5. Beschreiben Sie in einem Satz, wie Neumann Randbedingungen im Falle der zellzentrierten Finite-Volumen Diskretisierung berücksichtigt werden. **(0,5 Punkte)**

4. Aufgabe: Fehler (10 Punkte)

Gegeben sei die instationäre eindimensionale Diffusionsgleichung zur Modellierung des Transports einer chemischen Spezies ϕ auf dem Gebiet $x \in [0m, 2m]$ im Zeitraum $t \in [0s, 5s]$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0\,, \tag{3}$$

mit dem Diffusionskoeffizienten $\lambda = 1.6\frac{m^2}{s}$. Die Gleichung kann mit dem folgenden expliziten Differenzenschema diskretisiert werden.

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} - \lambda \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0\,. \tag{4}$$

Gehen Sie dabei von einem äquidistanten Gitter aus

$$x_i = i \cdot \Delta x. \tag{5}$$

4.1. Bestimmen sie mit Hilfe der v. Neumann-Stabilitätsanalyse die Stabilitätsgrenze

des Verfahrens. Verwenden sie als Ansatz

$$\phi(x,t) = V(t)e^{I(k\cdot x)}, \qquad I = \sqrt{-1}, \qquad k \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

(4 Punkte)

4.2. Das Diskretisierungsverfahren (4) soll auf einem Gitter mit 5 Elementen und mit einer Zeitschrittweite $\Delta t = 0.1s$ durchgeführt werden.

Sollten sie Aufgabe nicht gelöst haben, verwenden sie die Stabilitätsgrenze $r = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$.

a) Warum ist die angegebene Diskretisierung nicht sinnvoll? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Wie müsste sinnvollerweise die Diskretisierung jeweils angepasst werden. Geben Sie je ein Beispiel für eine korrekte Wahl der Diskretisierung in Raum und Zeit an, halten Sie dabei alle weiteren Größen jeweils konstant. Beachten Sie die äquidistante Gitterschrittweite.

c) Welche Größe darf nicht verändert werden? Welche Fehlerart würde aus der Änderung dieser Größe resultieren.

(4 Punkte)

4.3. Wie kann das Diskretisierungsschema (4) modifiziert werden, dass ein bedingungslos stabiles Verfahren entsteht? Geben Sie das Diskretisierungsschema an und begründen Sie ihre Antwort. **(2 Punkte)**

5. Aufgabe: Grundlagen (9 Punkte)

Gegeben sei die Laplace-Gleichung in 1D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Die Diskretisierung im Raum mittels eines zentralen Differenzensterns führt auf die folgende Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}. \tag{8}$$

Im Folgenden soll diese Gleichung auch in der Zeit diskretisiert werden.

Neben den Euler-Verfahren gibt es weitere Verfahren zur Zeitdiskretisierung. Eine Klasse von Verfahren sind die sogenannten BDF(k)-Verfahren (*Backward Differentiation Formulas*). Die Diskretisierung der Gleichung (7) in der Zeit mit einem allgemeinen BDF(k)-Verfahren lautet:

$$\frac{\sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_i^{n+1-j}}{\beta_k \Delta t} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}. \tag{9}$$

Dabei hat das Verfahren BDF(k) die Konvergenzordnung k. Die Parameter α_j und β_k müssen für jedes k bestimmt werden.

Bei den BDF(k)-Verfahren handelt es sich um sogenannte Mehrschrittverfahren. D.h., dass nicht nur der letzte Zeitschritt, sondern k letzte Zeitschritte benötigt werden.

5.1. Handelt es sich bei den BDF(k)-Verfahren um explizite oder implizite Verfahren? Begründen Sie Ihre Antwort!

(1.5 Punkte)

5.2. Für ein bestimmtes k ist das entsprechende BDF(k)-Verfahren gleich dem Euler-Rückwärts Verfahren. Für welches k gilt dies? Sie können davon ausgehen, dass die Werte α_j und β_k alle ungleich null sind.

Bestimmen Sie die Werte von α_j und β_k für das entsprechende Verfahren. **(3 Punkte)**

5.3. Ein häufig genutztes Verfahren ist das BDF(2)-Verfahren. Für dieses Verfahren gelten die folgenden Konstanten: $\alpha_0 = 3$, $\alpha_1 = -4$, $\alpha_2 = 1$ und $\beta_2 = 2$. Formulieren Sie für diesen Fall die diskrete Form von Gleichung (9). **(1.5 Punkte)**

5.4. Welcher Hauptnachteil ergibt sich aus dem BDF(2)-Verfahren in Bezug auf die Ressourcennutzung im Vergleich zu dem BDF(1)-Verfahren? **(2 Punkte)**

5.5. Aus welchem Grund kann es unter Umständen trotz der Nachteile sinnvoll sein das BDF(2)-Verfahren anstatt dem BDF(1)-Verfahren zu verwenden? **(1 Punkt)**

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Wintersemester 2017/18

1. Aufgabe: Finite Differenzen (12 Punkte)

* Lösung *

1.1. Lösung: Unbekannte Knoten $k = 2$ und $k = 3$ 1

$k = 2$:

$$\frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{\Delta t} + a\frac{u_2^{n+1} - u_1^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad 1 \tag{1}$$

$k = 3$:

$$\frac{u_3^{n+1} - u_3^n}{\Delta t} + a\frac{u_3^{n+1} - u_2^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad 1 \tag{2}$$

Bekannte Größen auf die rechte Seite:

$k = 2$:

$$\frac{1}{\Delta t}u_2^{n+1} + \frac{a}{\Delta x}u_2^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}u_2^n + \frac{a}{\Delta x}u_1^{n+1}. \quad 1 \tag{3}$$

$k = 3$:

$$\frac{1}{\Delta t}u_3^{n+1} + \frac{a}{\Delta x}u_3^{n+1} - \frac{a}{\Delta x}u_2^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}u_3^n \quad 1 \tag{4}$$

$\frac{5}{5}$

1.2. Lösung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t}+\frac{a}{\Delta x} & 0 \\ -\frac{a}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta t}+\frac{a}{\Delta x}\end{pmatrix}}_{1} \underbrace{\begin{pmatrix} u_2^{n+1}\\ u_3^{n+1}\end{pmatrix}}_{1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t}u_2^n + \frac{a}{\Delta x}u_1^{n+1} \\ \frac{1}{\Delta t}u_3^n \end{pmatrix}}_{1} \tag{5}$$

$\frac{3}{3}$

1.3. Lösung: Die Advektion bewirkt, dass die Anfangslösung mit $a = 1cm/s$ nach rechts bewegt wird. Nach einem Zeitschritt lautet die analytische Lösung

$$u(x,0.1) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 0.1 \\ (x-0.1)^2 & 0.1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad 1{,}5 \tag{6}$$

Fehler zwischen analytischer und diskreter Lösung pro Knoten:
Knoten 1: $u - \tilde{u} = 0 - 0 = 0$ 0,5

Knoten 2: $u - \tilde{u} = 0.16 - 0.2083 = -0.0483$ 0,5

Knoten 3: $u - \tilde{u} = 0.81 - 0.8680 = -0.0580$ 0,5

Die Abweichungen sind auf den Diskretisierungsfehler zurückzuführen, welcher bei der sehr kleinen Anzahl von nur 3 Knoten besonders ins Gewicht fällt. 1 $\frac{4}{4}$

$$\sum_{A1} = \frac{12}{12}$$

2. Aufgabe: Finite Elemente (10 Punkte)

* Lösung *

2.1. Lösung:

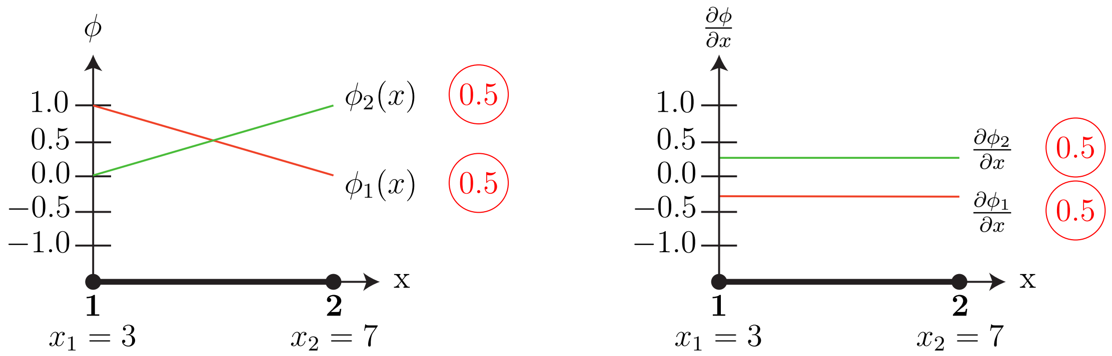


Abbildung 1: Globales Element

$\frac{2}{2}$

2.2. Lösung:

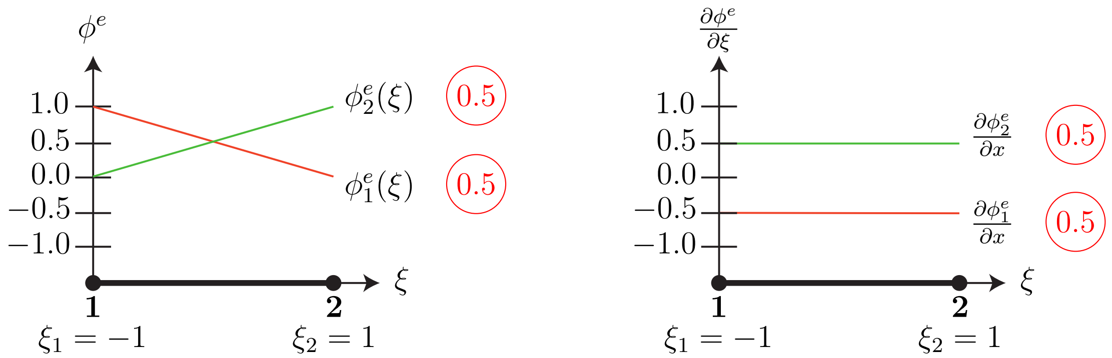


Abbildung 2: Referenzelement

$\frac{2}{2}$

2.3. Lösung:

$$\int_3^7 \frac{\partial\phi_1}{\partial x}\,\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\,dx = \int_3^7 \underbrace{-\frac{1}{4}}_{0.5} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{0.5}\,dx = \underbrace{\left[-\frac{1}{16}x\right]_3^7}_{0.5} = -\frac{1}{4} \quad 0.5 \tag{7}$$

$\frac{2}{2}$

2.4. Lösung:

$$\int_3^7 \frac{\partial\phi_1}{\partial x}\,\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\,dx = \underbrace{\int_{-1}^1}_{0.5} \frac{\partial\phi_1^e}{\partial\xi} \overbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^{-1}}^{0.5} \underbrace{\frac{\partial\phi_2^e}{\partial\xi}}_{0.5} \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^{-1} \overbrace{\left|\frac{\partial x}{\partial\xi}\right|}^{0.5} d\xi \tag{8}$$

$$= \int_{-1}^1 \overbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}^{0.5} (2)^{-1} \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}^{0.5} \underbrace{(2)^{-1}}_{0.5} |2|\,d\xi = \int_{-1}^1 -\frac{1}{8}\,d\xi = \left[-\frac{1}{8}\xi\right]_{-1}^1 = -\frac{1}{4} \quad 0.5 \tag{9}$$

$\frac{4}{4}$

$$\sum\nolimits_{A2} = \frac{10}{10}$$

3. Aufgabe: Finite Volumen (9 Punkte)

* Lösung *

3.1. Lösung:

Integrale Form:

$$\int_\Omega \frac{\partial c}{\partial t}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \lambda \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x = 0 \qquad 1 \tag{10}$$

Analytische Vereinfachung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega c\,\mathrm{d}x - \lambda \frac{\partial c}{\partial x}\bigg|_L^R = 0 \qquad 1 \tag{11}$$

$\frac{2}{2}$

3.2. Lösung:

Volumenmittelung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_i} c\,\mathrm{d}x \approx \frac{\partial c_i}{\partial t}\int_{V_i}\mathrm{d}x = \frac{\partial c_i}{\partial t}\Delta x \qquad 1 \tag{12}$$

Flussdiskretisierung:

Ansatz: Zentrale Differenzen

$$\lambda \frac{\partial c}{\partial x}\bigg|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \approx \; = \lambda\left(\frac{c_{i+1}-c_i}{\Delta x} - \frac{c_i - c_{i-1}}{\Delta x}\right) = \lambda \frac{c_{i+1} - 2c_i + c_{i-1}}{\Delta x} \qquad 1 \tag{13}$$

Mit explizitem Euler folgt:

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t}\Delta x - \lambda \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \qquad 1 \tag{14}$$

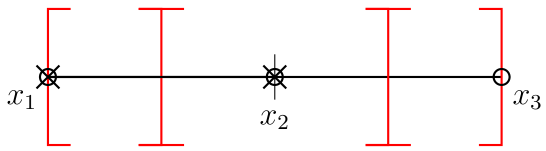
Umstellen nach c_i^{n+1} liefert schließlich:

$$c_i^{n+1} = c_i^n + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2}\left(c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n\right) \qquad 0{,}5 \tag{15}$$

$\frac{3{,}5}{3{,}5}$

3.3. Lösung:

Kontrollvolumina:



Kontrollvolumina und Lage der Unbekannten: 1 $\frac{1}{1}$

3.4. Lösung:

Zur Vorgabe eines Fluss am Rand können entweder einseitige Differenzen oder Extrapolation eines künstlichen Wertes c_0 links von x_1 verwendet werden. 2 $\frac{2}{2}$

3.5. Lösung:

Beim zellzentrierten Ansatz geht der Flussterm direkt in die Summe über die Ränder ein und bedarf keiner speziellen Behandlung. 0,5 $\frac{0{,}5}{0{,}5}$

$$\sum_{A3} = \frac{9}{9}$$

4. Aufgabe: Fehler (10 Punkte)

* Lösung *

4.1. Lösung: Das Einsetzen des Ansatzes an den Stützstellen, z.B.

$$\phi_i^n = \phi(x_i, t^n) = V(t^n)e^{I(k\cdot x_i)} = V^n e^{I(k\cdot i\cdot\Delta x)}, \tag{16}$$

ergibt

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} e^{I(k\cdot i\cdot\Delta x)} - \frac{\lambda V^n}{\Delta x^2}(e^{I(k\cdot(i+1)\cdot\Delta x)} - 2e^{I(k\cdot i\cdot\Delta x)} + e^{I(k\cdot(i-1)\cdot\Delta x)}) = 0\,.\,1 \tag{17}$$

Durch Auflösen nach $\frac{V^{n+1}}{V^n}$ folgt

$$\frac{V^{n+1}}{V^n} = 1 + \frac{\Delta t\lambda}{\Delta x^2}\left(e^{Ik\Delta x} - 2 + e^{-Ik\Delta x}\right).\,1 \tag{18}$$

Unter Verwendung der Euler'schen Formel $e^{\pm I\Phi} = cos(\Phi) \pm I sin(\Phi)$ und der Stabilitätsbedingung $\left|\frac{V^{n+1}}{V^n}\right| \leq 1$ erhält man

$$\left|\frac{V^{n+1}}{V^n}\right| = \left|1 + \underbrace{\frac{\Delta t\lambda}{\Delta x^2}\cdot 2\cdot \underbrace{\left(\underbrace{cos(k\Delta x)}_{[-1,1]} - 1\right)}_{[-2,0]}}_{[-4,0]}\right| \leq 1 \qquad 1 \tag{19}$$

und daraus

$$r = \frac{\lambda\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}.\,1 \tag{20}$$

$\frac{4}{4}$

4.2. Lösung:

a) Mit der von Neumann-Zahl $r = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$ erhält man für die angegebene Disretisierung und den vorgebenen Diffusionskoeffizienten:

$$r = \frac{1.6 \cdot 0.1}{(0.4)^2} = 1 > \frac{1}{2}, \tag{21}$$

d.h. die Stabilitätsgrenze wird nicht eingehalten. 1

b) Die für eine stabile Lösung maximale Zeitschrittweite kann wie folgt berechnet werden:

$$\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t_{stabil} \leq \frac{\Delta x^2}{2\lambda} = \frac{(0.4)^2}{2\lambda} = 0.05s \quad 1. \tag{22}$$

Analog ergibt sich für die räumliche Diskretisierung:

$$\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta x_{stabil} \geq \sqrt{2\lambda \Delta t} \approx 0.5657m. \tag{23}$$

Da eine äquidistante Diskretisierung gefordert ist, darf das Gebiet ($L = 2m$) mit maximal 3 Elementen diskretisiert werden. 1

c) Der Diffusionskoeffizient λ darf nicht angepasst werden. Dies würde zu einem Modellierungsfehler führen. 1

$\frac{4}{4}$

4.3. Lösung: Das Verfahren könnte zu einem impliziten Verfahren (Euler-Rückwärts Verfahren) verändert werden:

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} - \lambda \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \, . \, 1 \tag{24}$$

Implizite Verfahren sind unbedingt stabil. 1

$\frac{2}{2}$

$\sum_{A4} = \frac{10}{10}$

5. Aufgabe: Grundlagen (9 Punkte)

* Lösung *

5.1. Lösung: Es handelt sich um implizite Verfahren, da auf der rechten Seite die Terme zum neuen Zeitpunkt stehen. 1,5

$\frac{1,5}{1,5}$

5.2. Lösung: Für $k = 1$ 0,5 , da für diesen Fall gilt:

$$\frac{\alpha_0 u_i^{n+1} + \alpha_1 u_i^n}{\beta_1 \Delta t} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}. \quad 1 \tag{25}$$

In diesem Fall gilt $\alpha_0 = 1$ 0,5 , $\alpha_1 = -1$ 0,5 und $\beta_1 = 1$ 0,5 .

$\frac{3}{3}$

5.3. Lösung:

$$\frac{3u_i^{n+1} - 4u_i^n + u_i^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}. \quad 1,5 \tag{26}$$

$\frac{1,5}{1,5}$

5.4. Lösung:

- Es müssen mehr Zeitschritte aufaddiert werden. Das führt zu mehr Rechenoperationen 0,5
- Es müssen mehr alte Zeitschritte behalten werden. Das führt zu höherem Speicherbedarf 1,5

$\frac{2}{2}$

5.5. Lösung: Der höhere Aufwand kann durch die höhere Konvergenzordnung gerechtfertigt werden 1

$$\sum_{A5} = \frac{9}{9}$$