

Schriftliche Prüfung: Aufgaben des AVT-Teils. Jeder Punkt entspricht 1 Minute.

Simulationstechnik

Wintersemester 2019/2020

1. Aufgabe: Fragen (20 Punkte)

1.1. Bringen Sie den in der Vorlesung kennengelernten Simulationsablauf in die richtige Reihenfolge:

Implementieren; Simulieren; Analysieren; Simulationsmodell ist bereit zur Simulation; Problem verstehen; Modellieren; Ergebnisse prüfen und interpretieren.

(3,5 Punkte)

1.2. Schreiben Sie die lineare zeitvariante Zustandsraumdarstellung auf und benennen Sie die beinhalteten Matrizen.

(3 Punkte)

1.3. Gegeben ist die Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1(t)e^{-12t}$$

$$y(t) = 3x_1(t) - 3t$$

- a) Kategorisieren Sie die gegebene Zustandsraumdarstellung nach linear/nichtlinear und nach zeitvariant/zeitinvariant.
- b) Überführen Sie die Zustandsraumdarstellung in eine nichtlineare zeitinvariante Darstellung. Anfangswerte müssen nicht angegeben werden.

(3 Punkte)

1.4. Eine Punktmasse fällt aus dem Stillstand aus einer Höhe von 100 m reibungsfrei zu Boden. Sie wird beschleunigt durch die konstante Erdbeschleunigung von $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Beim

Erreichen des Bodens stoppt die Masse schlagartig und bleibt liegen. Schreiben Sie ein Modell, sodass das System mit der Software Dymola simuliert werden könnte.

(8,5 Punkte)

1.5.

- Kann sich das in Abbildung 1 dargestellte Petri Netz verklemmen? Wenn ja, geben Sie eine mögliche Schaltfolge von Transitionen an, welche zur Verklemmung führt.
- Ist das in Abbildung 1 dargestellte Petri Netz beschränkt? Wenn ja, geben Sie die Stelle mit der höchsten Tokenzahl an und geben Sie die maximal erreichbare Tokenzahl an. Wenn nein, geben Sie eine Stelle, welche eine unbeschränkte Tokenzahl erreichen kann, an.

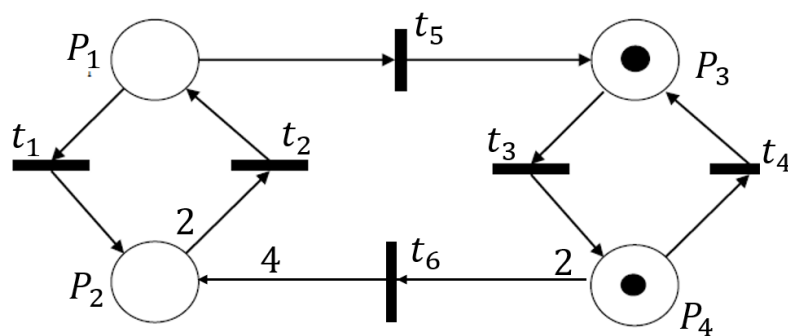


Abbildung 1: Petri Netz zu Aufgabe 1.5.

(2 Punkte)

2. Aufgabe: Systemtheorie (20 Punkte)

Sie betrachten die Stabilitätseigenschaften des inversen Pendels (Abbildung 2). $\varphi(t)$ bezeichnet den Auslenkungswinkel. Nehmen Sie an, dass sich das Pendel in der gesamten Darstellungsebene frei drehen kann, ohne irgendwo anzuschlagen, d.h. $-\infty < \varphi(t) < \infty$. Masse m , Länge l sowie Trägheitsmoment Θ des Pendels sind bekannt. Die Dicke des Pendels ist zu vernachlässigen. Es wirkt die Erdbeschleunigung g . Die Gewichtskraft greift im Schwerpunkt des Pendels auf halber Länge an. Der Bewegung des Pendels wirkt ein Reibmoment im Gelenk entgegen, welches proportional zur Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$ ist. Der Proportionalitätsfaktor $c > 0$ ist bekannt. Zusätzlich wirkt ein Stellmoment $M(t)$. Zu Beginn befindet sich das Pendel in Ruhe in aufrechter Position, d.h. $\varphi(t_0) = \dot{\varphi}(t_0) = 0$.

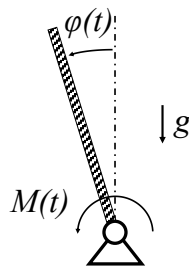


Abbildung 2: Inverses Pendel

2.1. In dieser Aufgabe sollen Sie ein geeignetes mathematisches Modell zur Beschreibung der zeitlichen Veränderung des Winkels $\varphi(t)$ erstellen.

a) Stellen Sie eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für den Winkel auf. Stellen Sie zunächst den Drallsatz um das Gelenk auf. Verwenden Sie ausschließlich Größen, die in der Skizze oder der Aufgabenstellung genannt sind.

b) Überführen Sie die Differentialgleichung in ein System expliziter gewöhnlicher Differentialgleichungen $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$. Verwenden Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ sowie Eingangsvektor $\mathbf{u}(t)$. Geben Sie die Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(t_0)$ an.

(4,5 Punkte)

2.2. Skizzieren Sie den Verlauf von $\varphi(t)$ bis Erreichen der Ruhelage für unten stehende Anfangsbedingungen für den Fall $M(t) = 0$. Geben Sie jeweils die erreichte Ruhelage an.

a) $\varphi(t_0) = 0$ und $\dot{\varphi}(t_0) = 0$

b) $\varphi(t_0) = \frac{\pi}{4}$ und $\dot{\varphi}(t_0) = 0$

(3 Punkte)

Im Folgenden sollen die Stabilitätseigenschaften des inversen Pendels in der Nähe der Ruhelage betrachtet werden.

2.3. Geben Sie die allgemeine Formel der Taylorreihenentwicklung um einen Punkt \mathbf{x}^* für ein autonomes nichtlineares Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ an.

(2 Punkte)

Das um die Ruhelage $\mathbf{x}_R = (0, 0)^T$ linearisierte inverse Pendel kann für gegebene Parameterwerte durch die Differentialgleichung (LS) beschrieben werden.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{LS})$$

2.4. Charakterisieren Sie das Systemverhalten des linearisierten Systems (LS). Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} .
- b) Klassifizieren Sie anhand der Eigenwerte das Systemverhalten des linearisierten Systems nach Stabilität und Schwingungsfähigkeit.
- c) Können Sie anhand des Verhaltens des linearisierten Systems auf das Verhalten des nichtlinearen Systems schließen? Begründen Sie ihre Aussage.

(3 Punkte)

2.5. Um das linearisierte inverse Pendel (LS) in aufrechter Position zu halten, werden die Eingänge gewählt zu $u(t) = -kx_1(t)$.

- a) Geben Sie die Systemmatrix \mathbf{A}_k des neuen linearen Systems $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_k\mathbf{x}(t)$ an.
- b) Bestimmen Sie den Bereich von k , für den das System stabil wird.
- c) Für eine gute Performance sollen die Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A}_k bei $-\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$ liegen. Geben Sie das gewünschte k an.
- d) Skizzieren Sie das Phasenportrait des neuen linearen Systems für k aus Aufgabenteil c). Wie lautet der korrekte Name des Phasenportraits?

(7,5 Punkte)

3. Aufgabe: Sensitivitätsanalyse (22,5 Punkte)

Die Wachstumsrate $\mu(t)$ einer Bakterienkultur kann mit dem DA-System (1) beschrieben werden. Hierbei wird die Anzahl der Bakterien mit $b(t)$, die Menge an Substrat mit $s(t)$, die Sterberate der Bakterien mit k_D und die maximale Wachstumsrate mit μ_{max} bezeichnet. Das System besitzt die differentiellen Variablen $\mathbf{x} = (b, s)^T$, den Ausgang $\mu(t)$ und die Parameter $\mathbf{p} = (k_D, \mu_{max})^T$. Das System besitzt keine Eingänge. Die Anfangswerte sind $b(t=0) = b_0$ und $s(t=0) = s_0$.

Hinweis: Im Folgenden wird auf Angabe der Einheiten verzichtet.

$$\begin{aligned}\dot{b}(t) &= \mu_{max} \cdot \frac{s(t)}{s(t) + 1} \cdot b(t) - k_D \cdot b(t) \\ \dot{s}(t) &= -\frac{1}{2} \cdot \mu_{max} \cdot \frac{s(t)}{s(t) + 1} \cdot b(t) \\ \mu(t) &= \mu_{max} \cdot \frac{s(t)}{1 + s(t)}\end{aligned}\tag{1}$$

3.1. Stellen Sie die Sensitivitätsgleichungen für das allgemeine System (2) auf.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}, \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}, \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0(\mathbf{p})\end{aligned}\tag{2}$$

(3,5 Punkte)

3.2. Stellen Sie nun die Sensitivitätsgleichungen für das DA-System (1) auf.

$$\text{Hinweis: } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\tag{8 Punkte}$$

Um den Einfluss der Parameter auf das System zu bestimmen, wurde mithilfe der Monte-Carlo-Methode ein Sampling des Parameterraums durchgeführt. Die Verteilung der Samples ist exemplarisch in Abbildung 3 dargestellt. Ein Auszug der Simulationsergebnisse zum Zeitpunkt $t = t_1$ ist in Tabelle 1 gegeben.

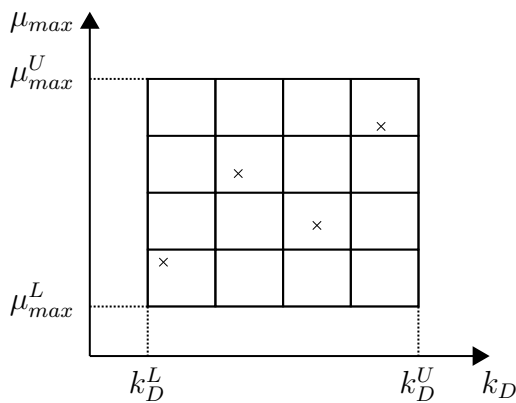


Abbildung 3: Exemplarische Verteilung der Samples im Parameterraum.

k_D	μ_{max}	$\mu(t = t_1)$
12	21	4
18	22	9
13	22	12
14	21	7
7	8	3
13	20	10
\vdots	\vdots	\vdots

Tabelle 1: Ergebnisse der Monte-Carlo Simulation.

3.3. Benennen Sie die in Abbildung 3 dargestellte Sampling Methode und nennen Sie eine in der Vorlesung genannte alternative Sampling Methode. **(1 Punkt)**

3.4. Bestimmen Sie die Sensitivität der Wachstumsrate μ zum Zeitpunkt t_1 für den Parametersatz $\mathbf{p} = (k_D, \mu_{max})^T = (13, 21)^T$. Führen Sie hierfür eine numerische Differentiation mit einem geeignetem Differenzenquotienten durch. Verwenden Sie die in Tabelle 1 gegebenen Werte. **(2 Punkte)**

3.5. Die Parameter des empirischen Modells (3) sollen für die in Tabelle 2 gegebenen Werte bestimmt werden.

$$\mu = p_1 \cdot b^2 + p_2 \cdot b \cdot s^{0,5} \quad (3)$$

$\tilde{\mu}$	\tilde{b}	\tilde{s}
8	2	3,6
28	4	2,5
112	8	1,6

Tabelle 2: Beobachtungswerte $\tilde{\mu}$, \tilde{b} und \tilde{s} .

Gehen Sie zur Bestimmung der Parameter $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$ wie folgt vor:

- Stellen Sie das Parameterschätzproblem nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate für das in den Parametern lineare Modell (3) in der Matrix-Vektor-Notation auf und geben Sie die Dimensionen aller vorkommenden Größen an.
- Geben Sie die notwendige Bedingung für die Lösung des Parameterschätzproblems an.
- Prüfen Sie nach, ob eindeutige Parameter für das vereinfachte Modell (3) bestimmt werden können.

Hinweis: Eine explizite Berechnung der optimalen Parameter ist nicht nötig. **(8 Punkte)**

4. Aufgabe: DA-Systeme (17,5 Punkte)

Gegeben sei das folgende DA-System

$$\dot{x}_1(t) + x_3(t) = u_1(t) \quad (4)$$

$$\dot{x}_2(t) + x_1(t) = u_2(t) \quad (5)$$

$$x_2(t) = u_3(t) \quad (6)$$

mit u_1, u_2, u_3 , zweimal stetig differenzierbaren zeitabhängigen Funktionen.

4.1. Formulieren Sie das gegebene System als ein semi-explizites DA-System.

(1,5 Punkte)

4.2. Ist das System linear oder nichtlinear? Ist das System zeitvariant oder zeitinvariant?

(1 Punkt)

4.3. Prüfen Sie anhand der Inzidenzmatrix des Systems (4)-(6), ob es sich um ein Index-1 System handeln könnte. Begründen Sie Ihre Antwort. Beschriften Sie die Spalten und Zeilen der Inzidenzmatrix.

(2 Punkte)

4.4. Bestimmen Sie den differentiellen Index des Systems (4)-(6). Geben Sie einzelne Zwischenschritte und Begründungen an.

(5 Punkte)

4.5.

a) Welche Gleichungen sollten zur numerischen Simulation eines DA-Systems herangezogen werden? Nennen Sie die allgemeine Empfehlung aus der Vorlesung und wenden Sie diese für das oben genannte Gleichungssystem an.

b) Geben Sie für das von Ihnen gewählte System aus Aufgabenteil a) an, welche Variablen algebraisch und welche differentiell und welche Gleichungen algebraisch und welche differentiell sind.

c) Im folgenden sei $u_1(t) = -12 + \sin(2t^2)$, $u_2(t) = -3t \sin(2t^2)$, $u_3(t) = \cos(2t^2) + 4t^2$. Geben Sie die exakte Lösung des von Ihnen gewählten Systems aus Aufgabenteil a) in Abhängigkeit von der Zeit an.

(8 Punkte)

5. Aufgabe: Numerische Integration (20 Punkte)

5.1. Geben Sie die allgemeinen Gleichungen des expliziten **und** des impliziten Euler-Verfahrens an. Nennen Sie einen Vorteil und einen Nachteil des expliziten Euler-Verfahrens gegenüber dem impliziten Euler-Verfahren. (5 Punkte)

5.2. Interpretieren Sie das **implizite** Euler-Verfahren graphisch. Zeichnen Sie hierzu in Abbildung 4 eine Skizze ein, in der Sie alle Terme der allgemeinen Gleichung aus Aufgabenteil 5.1 graphisch interpretieren.

Hinweis: Für diesen Aufgabenteil dürfen Sie auf das Klausurblatt zeichnen.

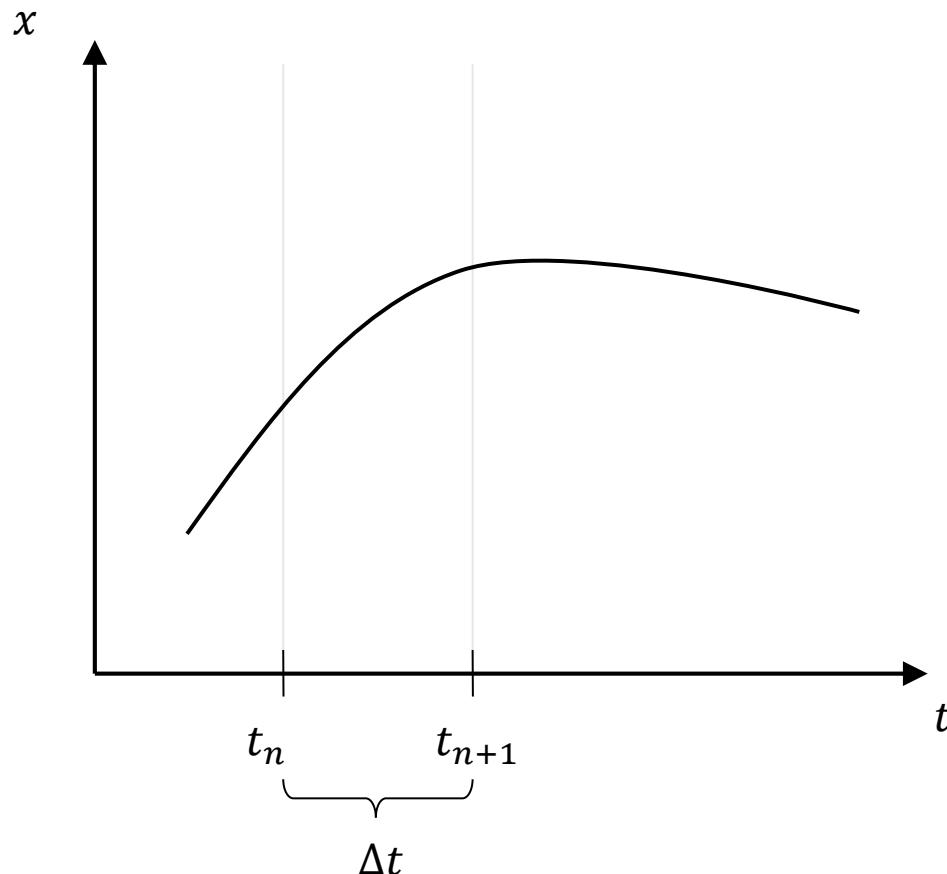


Abbildung 4: Skizze zum **impliziten** Euler-Verfahren

(3,5 Punkte)

Nachfolgend betrachten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\dot{y}(t) = -\lambda \cdot y(t)^2, \quad \lambda > 0 \quad (7)$$

5.3. Berechnen Sie durch Anwendung des **expliziten** Euler-Verfahrens $y(t = 2)$ (Gleichung (7)). Verwenden Sie dabei die Schrittweite $\Delta t = 1$ und nehmen Sie an, dass $y(t = 0) = 1$ und $\lambda = 1/10$ gilt. Zeichnen Sie die Ergebnisse Ihrer Approximation in Abbildung 5 ein.

(3 Punkte)

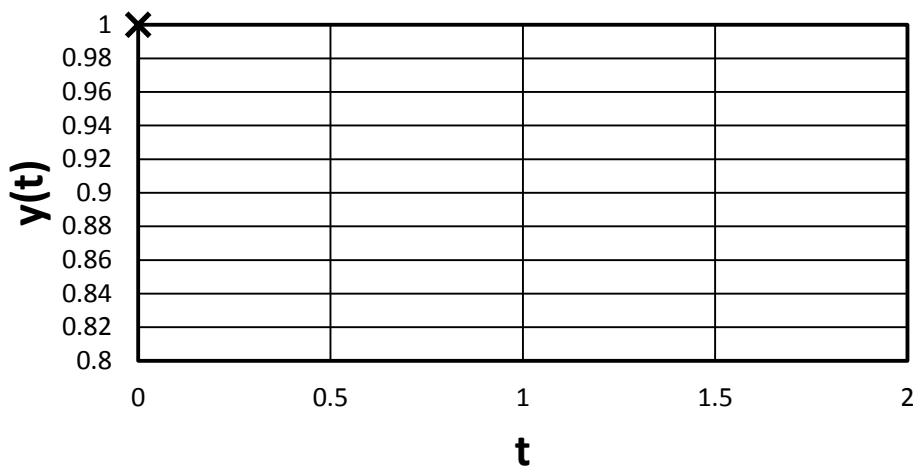


Abbildung 5: $y(t)$ in Abhängigkeit der Zeit t

5.4. Finden Sie analytisch die eindeutige Lösung von Gleichung (7) für $y(t)$ für die Anfangsbedingung $y(t = 0) = 1$. Berechnen Sie die analytische Lösungen $y(t = 1)$ und $y(t = 2)$ für $\lambda = 1/10$ und zeichnen Sie diese ebenfalls in Abbildung 5 ein. (4,5 Punkte)

5.5. Nennen Sie die Bedingung für ein A-stabiles Verfahren. Zeigen Sie anhand der Dahlquist'schen Testgleichung (8), dass das **explizite** Euler-Verfahren nicht A-stabil ist. Wie groß darf Δt für $a = -2$ gewählt werden, damit das Verfahren **stabil** ist? (4 Punkte)

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t), \quad \operatorname{Re}(a) < 0 \quad (8)$$

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik

Wintersemester 2019/2020

1. Aufgabe: Fragenteil (20 Punkte)

*** Lösung ***

1.1. Lösung: Der in der Vorlesung kennengelernte Simulationsablauf ist:

1. Problem verstehen
2. Modellieren
3. Analysieren (z.B. Systemklassifizierung, Ruhelage, Index, Stabilität)
4. Implementieren
5. Simulationsmodell ist bereit zur Simulation
6. Simulieren
7. Ergebnisse prüfen und interpretieren

Bewertung: 3,5 Pkt für vollständig korrekte Lösung. 2,5 Pkt für eine Vertauschung oder Verrückung nebeneinander liegender Elemente oder fehlendes Element. 1,5 Pkt für mindestens fünf Elemente in richtiger Reihung. **(3,5 Punkte)**

1.2. Lösung: Die lineare zeitvariante Zustandsraumdarstellung ist

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(t)x(t) + \mathbf{B}(t)u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}(t)x(t) + \mathbf{D}(t)u(t)$$

A ist die Systemmatrix (0,5 Pkt), B ist die Eingangsmatrix (0,5 Pkt), C ist die Ausgangsmatrix (0,5 Pkt), und D ist die Durchgangsmatrix (0,5 Pkt).

Bewertung: Siehe oben. 0,5 Pkt pro Gleichung. (3 Punkte)

1.3. Lösung:

- a) Das Gleichungssystem ist nichtlinear (0,5 TP) und zeitvariant (0,5 TP).
- b) Zur Überführung in die nichtlineare zeitinvariante Darstellung muss eine zusätzliche Variable eingeführt werden (0.5 TP).

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1(t)e^{-12x_2(t)} \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$\dot{x}_2(t) = 1 \quad (0.5 \text{ TP})$$

$$y(t) = 3x_1(t) - 3x_2(t) \quad (0.5 \text{ TP}).$$

Bewertung: Siehe oben. (3 Punkte)

1.4. Lösung: Der benötigte Code für die Simulation in Dymola ist:

```
model fallingObject

Real h( start = 100);
Real v( start = 0);

parameter Real g = 9.81;

equation

der(h) = v;

if h <= 0 then
der(v) = 0;
else
```

```
der(v) = -g;  
end if;  
  
when h <= 0 then  
  reinit(v,0);  
end when;  
  
end fallingObject;
```

Bewertung: 1 TP für die Modellumgebung, 0,5 TP für vollständige Definition der Variablen h, 0,5 TP für vollständige Definition der Variablen v, 0,5 TP für vollständige Definition des Parameters g, 1 TP für die Gleichung der Höhenänderung, 3 TP für die if-Bedingung (1 TP Syntax, 1 TP erste Bedingung und Gleichung, 1 TP zweite Bedingung + Gleichung), 2 TP für die when-Bedingung (1 TP Syntax, 1 TP Bedingung und Gleichung).
(8,5 Punkte)

Alternative Lösung:

```
model fallingObject  
  
Real h(start=100);  
Real v;  
  
parameter Real g = 9.81;  
  
equation  
  
der(h)=v;  
  
if h<=0 then  
  v=0;  
else  
  v=-g*time;  
end if;  
  
end fallingObject;
```

Bewertung: 1 TP für die Modellumgebung, 0,5 TP für vollständige Definition der Variablen h , 0,5 TP für vollständige Definition der Variablen v , 0,5 TP für vollständige Definition des Parameters g , 1 TP für die Gleichung der Höhenänderung, 5 TP für die if-Bedingung (1 TP Syntax, 1 TP erste Bedingung und Gleichung, 2 TP zweite Bedingung + Gleichung + 1TP richtige Verwendung time oder Definition Zeitvariable). **(8,5 Punkte)**

1.5. Lösung:

- a) Das System kann sich verklemmen. Zum Beispiel nach Schalten der Transitionen t_3 , t_6 , t_2 , t_2 , t_1 , t_1 , t_2 , t_1 kann keine Transition mehr geschaltet werden. (1 TP)
- b) Das System ist beschränkt. Die maximale Anzahl an Token beträgt 4 Token in Stelle P_2 . (1 TP)

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

2. Aufgabe: Systemtheorie (20 Punkte)

* Lösung *

2.1. Lösung:

a) Wir stellen den Drallsatz um das Gelenk des inversen Pendels auf: Die Gewichtskraft $F_G = mg$ erzeugt ein Drehmoment in positiver φ -Richtung mit Hebelarm $\frac{l}{2} \sin(\varphi(t))$. Das Reibmoment $M_R(t) = c\dot{\varphi}(t)$ wirkt in negativer φ -Richtung. Das Stellmoment $M(t)$ wirkt in positiver φ -Richtung.

$$\underbrace{\Theta \ddot{\varphi}(t)}_{0,5 \text{ TP}} = \underbrace{\frac{mgl}{2} \sin(\varphi(t))}_{0,5 \text{ TP}} - \underbrace{c\dot{\varphi}(t)}_{0,5 \text{ TP}} + \underbrace{M(t)}_{0,5 \text{ TP}}$$

b) Wir wählen den Zustandsvektor $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))^T = (\varphi(t), \dot{\varphi}(t))^T$ (0,5 TP) sowie den Eingang $u(t) = M(t)$ (0,5 TP), womit sich folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t))$ inkl. Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ergibt.

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{mgl}{2\Theta} \sin(x_1(t)) - \frac{c}{\Theta} x_2(t) + \frac{1}{\Theta} u(t) \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$\mathbf{x}(t_0) = (0, 0)^T \quad (0,5 \text{ TP})$$

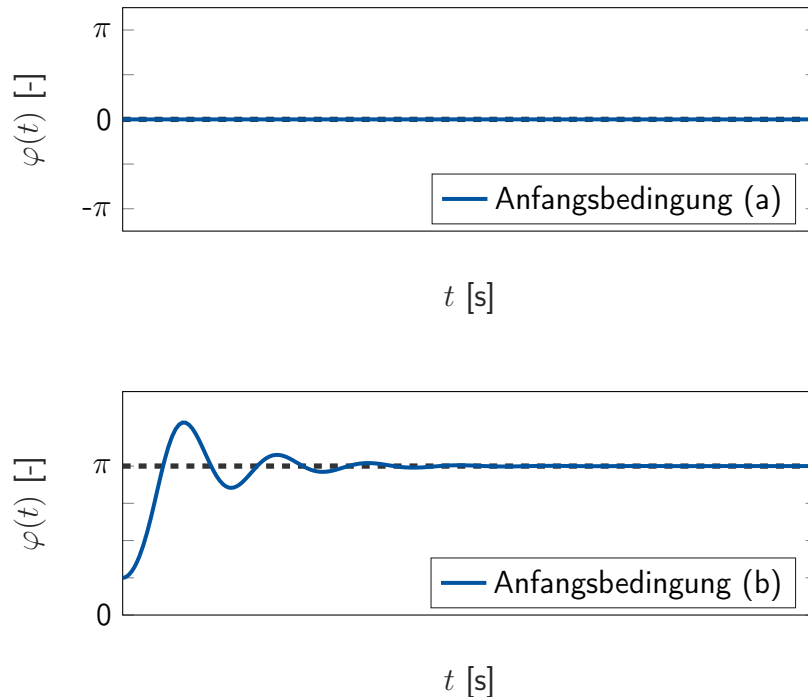
Bewertung: Siehe oben. Bei falscher Differentialgleichung in (a) werden in (b) Punkte für Folgefehler vergeben, insofern die Umformungen korrekt erfolgen. Bei nicht sinnvoller Wahl des Zustandsvektors können keine Punkte erreicht werden.

(4,5 Punkte)

2.2. Lösung:

a) Bei $(0, 0)^T$ handelt es sich um eine Ruhelage des autonomen Systems ($M(t) = 0$), da keine Drehmomente wirken. Startet das System in dieser Ruhelage, verharrt es dort.

b) Aufgrund der wirkenden Kräfte entfernt sich das System von der Ruhelage $(0, 0)^T$. Da dem System Energie in Form von Reibung entzogen wird, erreicht das System die Ruhelage $(\pi, 0)^T$. Je nach Stärke der Dämpfung kommt es zu einem abklingenden Überschwingen oder zu einem aperiodischen Übergang.



Bewertung: a) 0,5 TP für ein aussagekräftiges Diagramm (korrekte Achsen, etc.) sowie 0,5 TP, falls das System die Ruhelage nicht verlässt. b) 0,5 TP für ein aussagekräftiges Diagramm (korrekte Achsen, etc.); 0,5 TP, falls das System im korrekten Zustand startet; 0,5 TP, wenn die richtige Ruhelage erreicht wird sowie 0,5 TP für einen physikalisch sinnvollen Verlauf (siehe oben).

(3 Punkte)

2.3. Lösung: Die Taylorreihenentwicklung eines allgemeinen nichtlinearen autonomen Systems der Form $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ lautet

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)}_{0,5 \text{ TP}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}^*}}_{0,5 \text{ TP}} \underbrace{(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*)}_{0,5 \text{ TP}} + \underbrace{\overbrace{R_n(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}^*)}^{\text{vernachlässigt}}}_{0,5 \text{ TP}}.$$

Bewertung: Siehe oben.

(2 Punkte)

2.4. Lösung: a) Die Eigenwerte von \mathbf{A} lösen die charakteristische Gleichung

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -6 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Dies führt zu einer quadratischen Gleichung

$$\lambda(\lambda + 1) - 6 = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \quad (0,5 \text{ TP}),$$

welche die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = -3$$

hat.

b) Da mindestens ein Eigenwert einen Realteil > 0 hat, ist das linearisierte System instabil (0,5 TP). Es liegen keine komplex-konjugierten Eigenwerte vor, das linearisierte System ist daher nicht schwingungsfähig (0,5 TP). (Anmerkung: D.h. das System kann nicht um die Ruhelage $\mathbf{x}_R = (0, 0)^T$ schwingen, was auch physikalisch sinnvoll ist. Mögliche Schwingungen um eine weitere Ruhelage $\mathbf{x}_{R,2} = (\pi, 0)^T$ werden im linearisierten System nicht(!) betrachtet.)

c) Gemäß des Satzes von Hartmann-Grobmann kann man lokal die Dynamiken des linearisierten Systems auf die des nichtlinearen Systems abbilden, wenn \mathbf{A} keinen Eigenwert mit Realteil 0 hat (0,5 TP). Dies ist in diesem Fall erfüllt, sodass Aussagen über das Verhalten des nichtlinearen Systems möglich sind (0,5 TP). D.h. lokal um die Ruhelage $(0, 0)^T$ verhält sich das System wie ein Sattel.

Bewertung: Siehe oben.

(3 Punkte)

2.5. Lösung:

a) Wir setzen $u(t) = -kx_1(t)$ in die Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$ ein:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -kx_1(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6-k & -1 \end{pmatrix}}_{(2 \text{ TP})} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}(t)$$

b) Die Eigenwerte von \mathbf{A}_k lösen analog zur vorigen Aufgabe die quadratische Gleichung

$$\lambda(\lambda + 1) + k - 6 = \lambda^2 + \lambda + k - 6 = 0 \quad (0,5 \text{ TP}).$$

Somit gilt für die Eigenwerte:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6 - k} \quad (0,5 \text{ TP})$$

Gilt $k < 6$, so ist $\sqrt{\frac{1}{4} + 6 - k} > \frac{1}{2}$ und einer der Eigenwerte hat einen positiven Realteil. Folglich wäre das System weiterhin instabil. Der stabilisierende Effekt tritt demnach erst für $k > 6$ ein (0,5 TP).

c) Wir verwenden die berechneten Eigenwerte aus Aufgabenteil (b) und fordern $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$ (0,5TP). Dazu muss gelten:

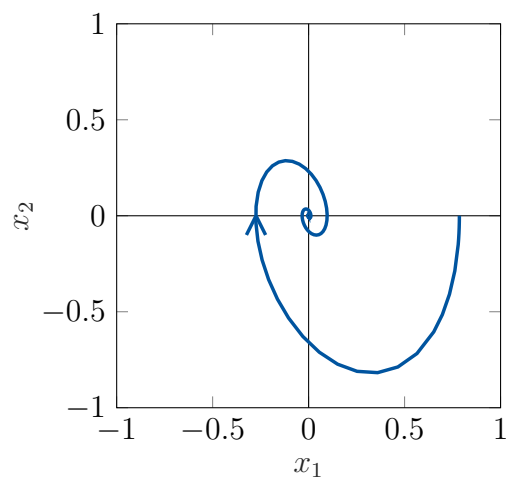
$$\frac{1}{4} + 6 - k = -\frac{9}{4} \quad \text{bzw.} \quad k = 8,5 \quad (0,5 \text{ TP}).$$

d) Für $k = 8,5$ gilt laut Aufgabenstellung $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$. Demnach handelt es sich bei dem Phasenportrait um einen stabilen Fokus (1 TP) (komplex-konjugierte Eigenwerte mit negativem Realteil).

Nebenrechnung für die Drehrichtung: Wir bestimmen \mathbf{A}_k für $k = 8,5$. Damit berechnen wir die Tangente am Punkt $(1,0)^T$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2,5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2,5 \end{pmatrix}$$

Die Tangente zeigt in negative x_2 -Richtung. Die Drehrichtung ist folglich im Uhrzeigersinn.



Bewertung: Siehe oben. Beim Skizzieren des Phasenpotraits werden 1,5 TP vergeben für das qualitativ richtige Verhalten (d.h. Skizze eines stabilen Fokus), sowie 0,5 TP für die korrekte Drehrichtung.

(7,5 Punkte)

3. Aufgabe: Sensitivitätsanalyse (22,5 Punkte)

* Lösung *

3.1. Lösung: Die Sensitivitätsgleichungen für ein allgemeines System sind gegeben durch

$$\mathbf{S}^x = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{p}} \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (1a)$$

$$\mathbf{S}^y = \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{p}} \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (1b)$$

$$\dot{\mathbf{S}}^x = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{S}^x + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \quad (1 \text{ TP}) \quad (1c)$$

$$\mathbf{S}^y = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{S}^x + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \quad (1 \text{ TP}) \quad (1d)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\mathbf{S}^x(t=0) = \frac{d\mathbf{x}_0}{d\mathbf{p}} \quad (0,5 \text{ TP}). \quad (1e)$$

Bewertung: Siehe oben.

Falls ein totales Differential für \mathbf{g} und \mathbf{f} in 1c und 1d verwendet wurde, kann jeweils nur max. die Hälfte der Teilpunkte in 1c und 1d erreicht werden. Es gilt: $\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}}$ und $\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{p}}$. Falls ein zusätzlicher Term $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{p}}$ angegeben wurde ist das auch richtig. Hier fehlt der Term, da in der Vorlesung grundsätzlich \mathbf{u} unabhängig von \mathbf{p} ist, also $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{p}} = 0$. **(3,5 Punkte)**

3.2. Lösung: Mit den Definitionen aus 3.1 folgt:

$$\mathbf{S}^x = \begin{bmatrix} \frac{\partial b}{\partial k_D} & \frac{\partial b}{\partial \mu_{max}} \\ \frac{\partial s}{\partial k_D} & \frac{\partial s}{\partial \mu_{max}} \end{bmatrix} \quad (1 \text{ TP}) \quad (2a)$$

$$\mathbf{S}^y = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial k_D} & \frac{\partial \mu}{\partial \mu_{max}} \end{bmatrix} \quad (1 \text{ TP}) \quad (2b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial b} & \frac{\partial f_1}{\partial s} \\ \frac{\partial f_2}{\partial b} & \frac{\partial f_2}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{max} \cdot \frac{s}{1+s} - k_D & \mu_{max} \cdot \frac{1}{(1+s)^2} \cdot b \\ -\frac{1}{2} \mu_{max} \cdot \frac{s}{1+s} & -\frac{1}{2} \mu_{max} \cdot \frac{1}{(1+s)^2} \cdot b \end{bmatrix} \quad (2 \text{ TP}) \quad (2c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial k_D} & \frac{\partial f_1}{\partial \mu_{max}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial k_D} & \frac{\partial f_2}{\partial \mu_{max}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & \frac{s}{1+s} \cdot b \\ 0 & -\frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \cdot b \end{bmatrix} \quad (2 \text{ TP}) \quad (2d)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial b} & \frac{\partial g}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mu_{max} \cdot \frac{1}{(1+s)^2} \end{bmatrix} \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (2e)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial k_D} & \frac{\partial g}{\partial \mu_{max}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{s}{1+s} \end{bmatrix} \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (2f)$$

Mit den Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{S}^x(t=0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial b_0}{\partial k_D} & \frac{\partial b_0}{\partial \mu_{max}} \\ \frac{\partial s_0}{\partial k_D} & \frac{\partial s_0}{\partial \mu_{max}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1 \text{ TP}) \quad (2g)$$

Bewertung: Siehe oben. Für Gleichung (2g) genügt zum Erreichen der vollen Punktzahl die Angabe des Zwischenschritts. **(8 Punkte)**

3.3. Lösung:

Verwendete Sampling Methode: Latin Hypercube Sampling (0,5 TP)

Weitere Sampling Methode: Random Sampling (0,5 TP)

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

3.4. Lösung: Die Sensitivität $s_{i,j}^y$ eines Ausgangs y_i bezüglich eines Parameters p_j ist definiert als:

$$s_{i,j}^y(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \left. \frac{\partial y_i(\mathbf{p}, \mathbf{u})}{\partial p_j} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0} \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (3a)$$

Ansatz der finite Differenzen liefert:

$$\left. \frac{\partial y_i(\mathbf{p}, \mathbf{u})}{\partial p_j} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^{lit}} \approx \frac{y(\mathbf{p}^{lit} + \Delta \mathbf{p}_j^{lit}, \mathbf{u}) - y(\mathbf{p}^{lit} - \Delta \mathbf{p}_j^{lit}, \mathbf{u})}{2\Delta \mathbf{p}_j^{lit}} \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (3b)$$

Einsetzen der Werte aus Tab. 1 liefert zum Zeitpunkt $t = t_1$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mu(\mathbf{p}, \mathbf{u})}{\partial k_D} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^{lit}} &\approx \frac{\mu(k_D = 14, \mu_{max} = 21) - \mu(k_D = 12, \mu_{max} = 21)}{2\Delta k_D} \\ &= \frac{7 - 4}{2} = 1,5 \end{aligned} \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (3c)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mu(\mathbf{p}, \mathbf{u})}{\partial \mu_{max}} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^{lit}} &\approx \frac{\mu(k_D = 13, \mu_{max} = 22) - \mu(k_D = 13, \mu_{max} = 20)}{2\Delta \mu_{max}} \\ &= \frac{12 - 10}{2} = 1 \end{aligned} \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (3d)$$

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

3.5. Lösung:

- a) Das Parameterschätzproblem in Matrix-Vektor-Notation lautet:

$$\underbrace{\min_p}_{\substack{0,5 \text{ TP für } \min \\ 0,5 \text{ TP für } p}} \underbrace{(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\mathbf{p})^T (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\mathbf{p})}_{\substack{=J(\mathbf{p}) \text{ (Zusatz)} \\ (0,5 \text{ TP})}} \quad (4)$$

mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times 2}$ (0,5 TP), $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ (0,5 TP) und $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ (0,5 TP). Mit $m = 3$ (Anzahl der Messpunkte).

- b) Die notwendige Bedingung für ein Minimum der Gütefunktion ist, dass die Ableitung nach dem Parameter \mathbf{p} Null ist. Die Bedingung lautet also:

$$\left. \frac{dJ}{d\mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (1 \text{ TP}) \quad (5)$$

- c) Die Normalengleichung $\mathbf{p} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{y}}$ liefert eine eindeutige Lösung für lineare Ausgleichsprobleme, wenn die Matrix $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ regulär ist.

Daher muss hier zunächst die Matrix \mathbf{A} aufgestellt werden:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3,79 \\ 16 & 6,32 \\ 64 & 10,12 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} t=0 \\ t=2 \\ t=4 \end{matrix} \quad (b^2) \quad (bs^{0,5}) \quad (1,5 \text{ TP}) \quad (6)$$

Alternative 1: Bestimmung der Determinante von $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 64 \\ 3,79 & 6,32 & 10,12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3,79 \\ 16 & 6,32 \\ 64 & 10,12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4368 & 763,96 \\ 763,96 & 156,72 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ TP}) \quad (7)$$

$$\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 100918 \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (8)$$

Alternative 2: Bestimmung des Spaltenrangs von \mathbf{A} .

$$\begin{pmatrix} 4 & 3,79 \\ 16 & 6,32 \\ 64 & 10,12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -8,84 \\ 16 & -50,52 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ TP}) \quad (9)$$

Da \mathbf{A} vollen Spaltenrang hat, ist $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ regulär (0,5 TP).

Da $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ regulär ist können eindeutige Parameterwerte für das linearisierte System und den gegebenen Messwerten mit Hilfe der Normalengleichung bestimmt werden (1 TP).

Bewertung: Siehe oben.

(8 Punkte)

4. Aufgabe: DA-Systeme (17,5 Punkte)

* Lösung *

4.1. Lösung:

$$\dot{x}_1(t) = -x_3(t) + u_1(t) \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (10)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u_2(t) \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (11)$$

$$0 = -x_2(t) + u_3(t) \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (12)$$

Bewertung: Siehe oben. (1,5 Punkte)

4.2. Lösung:

Es handelt sich um ein lineares (0,5 TP) zeitinvariantes (0,5 TP) System.

Bewertung: Siehe oben. (1 Punkt)

4.3. Lösung:

$$\begin{array}{c|c} & x_3 \\ \hline (12) & 0 \end{array} \quad (1 \text{ TP})$$

Die Inzidenzmatrix hat keinen vollen strukturellen Rang (0,5 TP), es kann somit kein Index-1 System vorliegen (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. Für die korrekte Spalten und Zeilen Beschriftung der Inzidenzmatrix werden 0,5 TP und für den korrekten Matrixeintrag 0,5 TP vergeben. (2 Punkte)

4.4. Lösung:

Ableitung von Gl. (12) $\dot{x}_2(t) = \dot{u}_3(t)$ (1 TP)

Gl. (11) einsetzen: $\dot{u}_3(t) + x_1(t) = u_2(t)$ oder äquivalent $x_1(t) = u_2(t) - \dot{u}_3(t)$ (13) (1 TP)

Nach einmaligen Ableiten liegt immer noch keine explizite algebraische Gleichung für x_3 vor. Deswegen erfolgt eine zweite zeitliche Ableitung.

Ableitung von Gl. (13) $\dot{x}_1(t) = \dot{u}_2(t) - \ddot{u}_3(t)$ (1 TP)

Gl. (10) einsetzen: $\dot{u}_2(t) - \ddot{u}_3(t) + x_3(t) = u_1(t)$ oder äquivalent $x_3(t) = u_1(t) - \dot{u}_2(t) + \ddot{u}_3(t)$ (14) (1 TP)

Da zweimal nach der Zeit differenziert wurde um eine algebraische Gleichung für x_3 zu erhalten, ist der differentielle Index des ursprünglichen Systems 3. (1 TP)

Bewertung: Siehe oben. (5 Punkte)

4.5. Lösung:

- a) Für eine numerische Lösung des Systems wählt man alle algebraische Gleichungen aus, dazu eine Untermenge der differentiellen Gleichungen um die selbe Anzahl an Gleichungen und Variablen zu erhalten. (1 TP)

In unserem System dies sind Gleichungen (12)-(14):

$$(12): \quad x_2(t) = u_3(t)$$

$$(13): \quad x_1(t) = u_2(t) - \dot{u}_3(t)$$

$$(14): \quad x_3(t) = u_1(t) - \dot{u}_2(t) + \ddot{u}_3(t)$$

(1,5 TP)

- b) x_1, x_2 und x_3 sind algebraische Variablen (0,5 TP). Das sich neu ergebene System setzt sich komplett aus algebraische Gleichungen zusammen. (0,5 TP)

c)

$$\dot{u}_2(t) = -3 \sin(2t^2) - 12t^2 \cos(2t^2) \quad (1 \text{ TP})$$

$$\dot{u}_3(t) = -4t \sin(2t^2) + 8t \quad (1 \text{ TP})$$

$$\ddot{u}_3(t) = -4 \sin(2t^2) - 16t^2 \cos(2t^2) + 8 \quad (1 \text{ TP})$$

Es folgt nach Einsetzen:

$$x_1(t) = t \sin(2t^2) - 8t \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$x_2(t) = \cos(2t^2) + 4t^2 \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$x_3(t) = -4 - 4t^2 \cos(2t^2) \quad (0,5 \text{ TP})$$

Bewertung: Siehe oben. (8 Punkte)

5. Aufgabe: Numerische Integration (20 Punkte)

* Lösung *

5.1. Lösung: Die allgemeine Gleichung für das explizite Euler-Verfahren lautet:

$$\underbrace{x_{n+1} = x_n}_{0,5 \text{ TP}} + \underbrace{\Delta t f(x_n, t_n)}_{1 \text{ TP}}$$

Die allgemeine Gleichung für das implizite Euler-Verfahren lautet:

$$\underbrace{x_{n+1} = x_n}_{0,5 \text{ TP}} + \underbrace{\Delta t f(x_{n+1}, t_n + \Delta t_n)}_{1 \text{ TP}}$$

Ein Vorteil des expliziten Euler-Verfahrens ist der geringere Rechenaufwand (1 TP).

Ein Nachteil des expliziten Euler-Verfahrens ist, dass es für steife Systeme nicht geeignet ist (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. Alternative Vor- und Nachteile des expliziten Euler-Verfahrens sind möglich und werden, sofern richtig, mit 1 TP bewertet. (5 Punkte)

5.2. Lösung: Graphische Interpretation: Siehe Abb. 1.

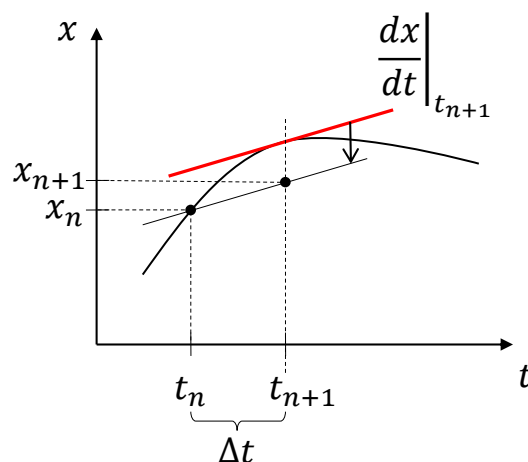


Abbildung 1: Skizze zum impliziten Euler-Verfahren

Bewertung: Für die korrekt eingezeichnete Steigung im Punkt (t_{n+1}, x_{n+1}) gibt es 1 TP. Für die korrekt eingetragenen Größen $(x_n, x_{n+1}$ und $\frac{dx}{dt}|_{t_{n+1}}$) gibt es jeweils 0,5 TP. Für den korrekt eingezeichneten Punkt (t_{n+1}, x_{n+1}) gibt es 1 TP. (3,5 Punkte)

5.3. Lösung:

Allgemeine Gleichung für die Approximation von $y(t)$ mittels explizitem Euler:

$$y_{n+1} = y(t_n + \Delta t_n) = y(t_n) + \Delta t_n \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_n}$$

Approximation von y_1 für $n = 0$:

$$y_1 = y_0 + \Delta t \cdot (-\lambda \cdot y_0^2) \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$y_1 = 1 + 1 \cdot (-0,1 \cdot 1^2) = 0,9 \quad (0,5 \text{ TP})$$

Approximation von y_2 für $n = 1$:

$$y_2 = y_1 + \Delta t \cdot (-\lambda \cdot y_1^2) \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$y_2 = y(2) = 0,9 + 1 \cdot (-0,1 \cdot 0,9^2) = 0,819 \quad (0,5 \text{ TP})$$

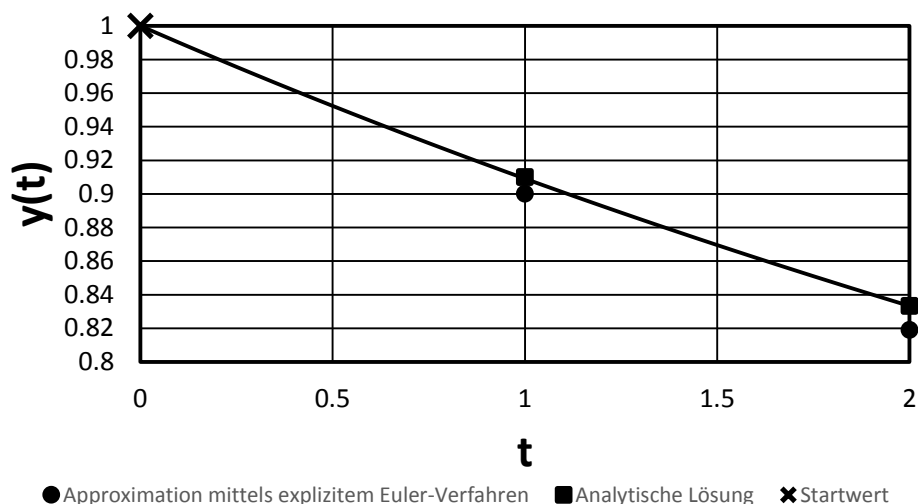


Abbildung 2: Eingezeichnete Lösungen

Bewertung: Siehe oben. Jeder korrekt eingezeichnete berechnete Punkt gibt 0,5 TP. (3 Punkte)

5.4. Lösung: Zunächst wird die Funktion integriert, wobei die Anfangsbedingungen als untere Grenzen eingesetzt werden:

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda \cdot y^2$$

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}^2} = \int_{t_0}^t -\lambda d\tilde{t} \quad (1 \text{ TP})$$

$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y_0} = -\lambda \cdot t + \lambda \cdot t_0 \quad (1 \text{ TP})$$

Durch Einsetzen und Umformen erhält man die Gleichung für $y(t)$:

$$y = \frac{1}{1 + \lambda \cdot t} \quad (0,5 \text{ TP}).$$

t	y	
0	1	
1	0,91	(0,5 TP)
2	0,83	(0,5 TP)

Bewertung: Siehe oben. Der korrekt eingezeichnete Verlauf der analytischen Lösung gibt 1 TP. **(4,5 Punkte)**

5.5. Lösung: Wenn bei Anwendung eines Verfahrens auf die (Dahlquist'sche) Testgleichung für alle Schrittweiten gilt (0,5 TP): $|x_{n+1}| < |x_n|$ dann ist das Verfahren **A-stabil** (0,5 TP).

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \cdot a \cdot x_n \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$x_{n+1} = x_n \cdot (1 + \Delta t \cdot a) \quad (0,5 \text{ TP})$$

Nur bei einer Schrittweite, die

$$|1 + \Delta t \cdot a| < 1 \quad (0,5 \text{ TP})$$

erfüllt, ist das Verfahren stabil. Somit ist das explizite Euler-Verfahren nicht A-stabil (0,5 TP).

Für $a = -2$ ergibt sich:

$$|1 - \Delta t \cdot 2| < 1 \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$0 < \Delta t < 1 \quad (0,5 \text{ TP})$$

Bewertung: Siehe oben. **(4 Punkte)**

Schriftliche Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Wintersemester 2019/20

1. Aufgabe: Finite Differenzen (14 Punkte)

Die folgende Differentialgleichung beschreibt die Advektions-Diffusions-Gleichung für die Konzentration $c(x)$ als Funktion der Position x mit Advektionsgeschwindigkeit $a > 0$, Diffusionskoeffizient $\lambda > 0$:

$$a \frac{\partial c}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0 \quad \forall x \in [x_1, x_5]. \quad (1)$$

Weiterhin gilt $a \gg \lambda$. Diese Gleichung soll mit einem Finite-Differenzen-Verfahren auf folgendem Gitter gelöst werden:

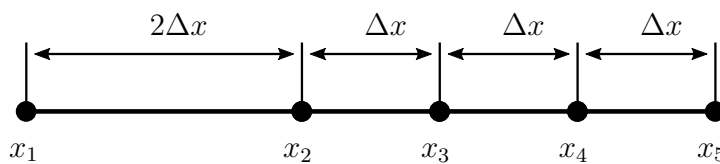


Abbildung 1: Gitter FD

1.1. Gegeben sei die Taylorreihe der Konzentration $c(x)$ entwickelt um x_2 , ausgewertet an x_3 :

$$c_3 \approx c_2 + \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=x_2} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \Big|_{x=x_2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 c}{\partial x^3} \Big|_{x=x_2} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 c}{\partial x^4} \Big|_{x=x_2} \Delta x^4 + \dots \quad (2)$$

Stellen Sie eine Taylorreihe für $c(x)$ an einem zweiten Auswertepunkt auf, welche Ihnen die Herleitung eines zentralen Differenzenausdrucks für $\left. \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right|_{x=x_2}$ erlaubt. Berücksichtigen Sie die ersten 5 Glieder. **(3 Punkte)**

1.2. Leiten Sie nun den zentralen Differenzenausdruck für $\left. \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right|_{x=x_2}$ her. Bestimmen Sie den Abbruchfehler und die Genauigkeitsordnung. **(4 Punkte)**

1.3. Die Gleichung (1) soll nun mit einem Finite-Differenzen-Verfahren auf dem in Abbildung 1 gegebenen Gitter diskretisiert werden. Bei x_1 soll eine Konzentration von 4 und bei x_5 eine Konzentration von 0 als Randbedingung gelten.

$\left. \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right|_{x=x_i}$ wird für alle Knoten mittels eines zentralen Differenzenausdrucks diskretisiert. Sollten Sie Aufgabe 1.2 nicht gelöst haben, dürfen Sie auch Gleichung (3) für x_2 nutzen.

$$\left. \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} = \frac{c_{i+1} - 2c_i + c_{i-1}}{\Delta x^2} \quad \text{für } i = 1, 3, 4, 5. \quad (3)$$

Für $\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=x_i}$ werden ebenfalls zentrale Differenzen verwendet:

$$\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{2\Delta x} \quad \text{für } i = 1, 3, 4, 5, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=x_2} = \frac{4c_3 - 3c_2 - c_1}{6\Delta x}. \quad (5)$$

Stellen Sie die sich ergebenden Gleichungen für alle Knoten auf, sodass Sie in Summe genug Gleichungen für alle Unbekannten erhalten. Begründen Sie, falls keine Gleichung für einen Knoten aufgestellt werden muss. Verwenden Sie auch die gegebenen Konzentrationswerte.

Hinweis: Es ist nicht nötig die Gleichungen in Matrixform zu schreiben. **(5 Punkte)**

1.4. Können Probleme in der Lösung für Gleichung (1) ($a \gg \lambda$) mit den in Aufgabe 1.3 verwendeten Finiten-Differenzen entstehen? Wenn ja, wie können sie behoben werden? Begründen Sie ihre Antwort! **(2 Punkte)**

2. Aufgabe: Finite Elemente (14.5 Punkte)

Die Temperaturverteilung $T(x, t)$ auf dem Gebiet $x \in [0, 6]$ wird durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \forall (x, t) \in [0, 6] \times [0, T], \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 4, \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=6} = 2. \quad (8)$$

Die Temperaturleitfähigkeit ist dabei durch $\lambda > 0$ gegeben. Die Gleichungen (7) und (8) beschreiben dabei Neumann Randbedingungen.

2.1. Bestimmen Sie zunächst die schwache Formulierung und reduzieren Sie die maximale Ordnung der auftretenden Ableitungen mittels partieller Integration. Vereinfachen Sie die Gleichung soweit wie möglich. (4.5 Punkte)

Im weiteren Verlauf der Aufgabe soll die Gleichung (6) für das in Abbildung 2 gezeigte Gitter diskretisiert werden.

2.2. Zeichnen Sie dazu in einem ersten Schritt die zum Knoten x_2 gehörige lineare Interpolationsfunktion direkt in die Abbildung 2 in **Ihrer Aufgabenstellung**. (1.5 Punkte)

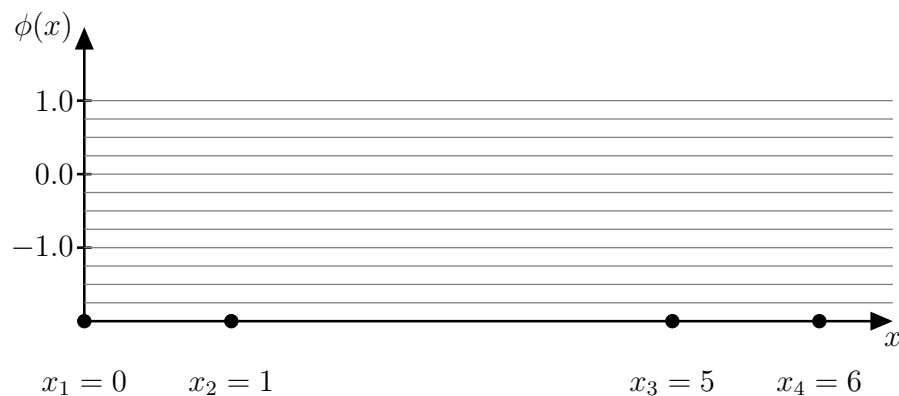


Abbildung 2: Interpolationsfunktionen des 1-D Finite-Elemente-Gitters.

2.3. Zeichnen Sie jetzt den Verlauf der Ableitung der Interpolationsfunktion $\frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x}$ ebenfalls in Ihre Aufgabenstellung in die Abbildung 3. **(1.5 Punkte)**

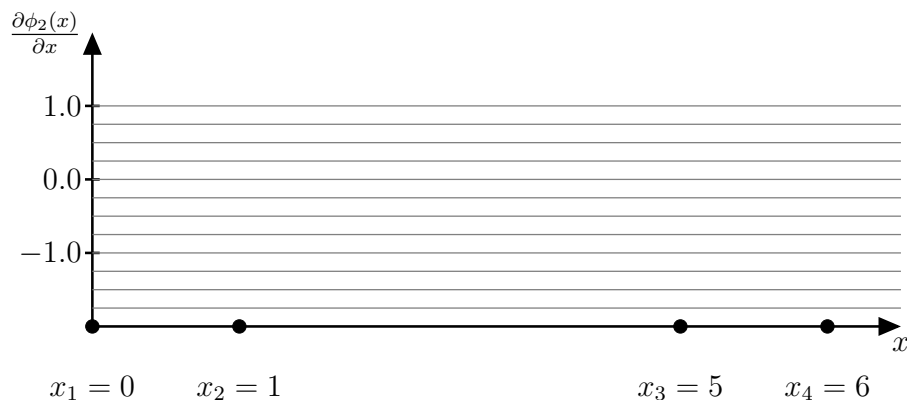


Abbildung 3: Ableitung der Interpolationsfunktionen des 1-D Finite-Elemente-Gitters.

2.4. Transformieren Sie das in Gleichung (9) gegebene Integral auf das Referenzelement und überführen Sie dabei die Interpolationsfunktionen in die Interpolationsfunktionen des Referenzelements. Vereinfachen Sie dabei soweit wie möglich.

$$\int_0^6 \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x} dx. \quad (9)$$

(4 Punkte)

2.5. Berechnen Sie jetzt das Integral aus Gleichung (9). Verwenden Sie dazu den passenden Eintrag aus der in Gleichung (10) gegebenen Elementmatrix des Referenzelements:

$$A^e = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|^{-1}. \quad (10)$$

Hinweis:

1. Der Zusammenhang der Referenzkoordinate und der globalen Koordinate lautet:

$$x(\xi) = x_k + \frac{x_{k+1} - x_k}{2}(\xi + 1),$$

2. Der Matrixeintrag $A_{i,j}^e$ setzt sich wie folgt zusammen: $A_{i,j}^e = \int_{-1}^1 \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| d\xi$

(3 Punkte)

3. Aufgabe: Finite Volumen (12 Punkte)

Gegeben sei folgender innerer Ausschnitt eines zweidimensionalen Gitters:

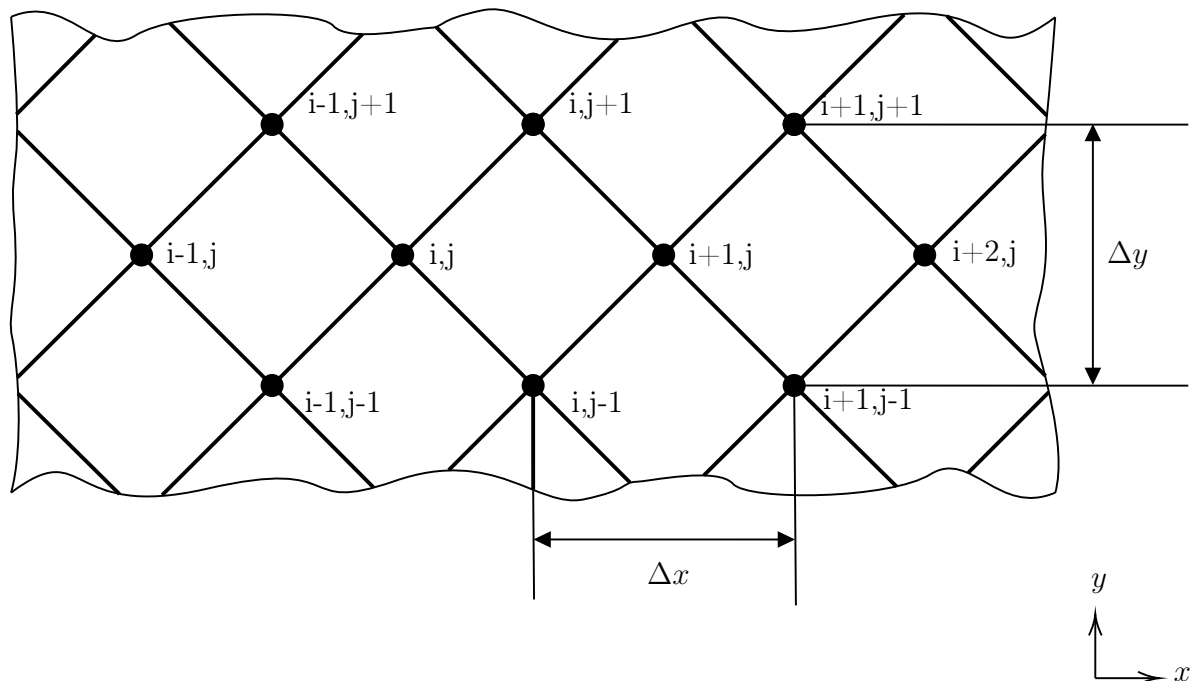


Abbildung 4: Gitter. $\Delta x = \Delta y = 1$

3.1. Zeichnen Sie das duale Gitter ein. Markieren Sie deutlich das Kontrollvolumen um den Knoten (i,j) . Diese Aufgabe kann auf dem Aufgabenblatt bearbeitet werden.

(2 Punkte)

Betrachten sie nun die instationäre Advektionsgleichung für die Konzentration $c(x, t)$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla c = 0 \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (11)$$

mit $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

3.2. Stellen Sie für Gleichung (11) die integrale Form zunächst allgemein und dann für das Kontrollvolumen $V_{i,j}$ auf.

(2 Punkte)

3.3. Vereinfachen Sie die Gleichung soweit wie möglich mithilfe gegebener Größen. Nutzen Sie Volumenmittelung, sowie die folgenden Hinweise:

- *Hinweis:*

$$\int_V \mathbf{a} \cdot \nabla c \, dV = \oint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} c \, ds. \quad (12)$$

- *Hinweis:*

$$|\mathbf{n}| = 1 \quad (13)$$

(6 Punkte)

3.4. Anstelle des von Ihnen hergeleiteten Ausdrucks für den Flussterm sei dieser gerundet wie folgt diskretisiert:

$$\int_V \mathbf{a} \cdot \nabla c \, dV \approx 2.82843 (c_{i,j} - c_{i-1,j-1}) \quad (14)$$

Erklären Sie warum dies eine sinnvolle Wahl für das gegebene Problem darstellt.

(2 Punkte)

4. Aufgabe: Fehler (9.5 Punkte)

Die Diffusion einer Stoffgröße $\phi(x, t)$ kann mit Hilfe der folgenden partiellen Differentialgleichung in Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten λ beschrieben werden:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T], \lambda > 0. \quad (15)$$

4.1. Folgende Finite-Differenzen-Verfahren werden vorgeschlagen:

$$a) \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + \lambda \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0, \quad (16)$$

$$b) \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} - \lambda \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0, \quad (17)$$

$$c) \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t^2} - \lambda \frac{\phi_{i+1}^n + \phi_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0. \quad (18)$$

Warum sind diese Diskretisierungen nicht zur Lösung der Diffusionsgleichung (15) geeignet? Begründen sie jeweils Ihre Antwort. (*Die Durchführung eines Konsistenznachweises ist in dieser Teilaufgabe nicht notwendig!*) (1.5 Punkte)

4.2. In der folgenden Teilaufgabe sei zur Lösung der Diffusionsgleichung (15) folgendes Diskretisierungsverfahren gegeben:

$$\frac{\phi_i^{n+1} + \phi_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \lambda \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0. \quad (19)$$

Nach Einsetzen der Taylorreihenentwicklungen für $\phi_i^{n+1}, \phi_i^{n-1}, \phi_{i+1}^n$ und ϕ_{i-1}^n um den Entwicklungspunkt ϕ_i^n in Gleichung (19) erhält man

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) - \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) = 0. \quad (20)$$

Zeigen oder widerlegen Sie die Konsistenz des Verfahrens in Gleichung (19) in Bezug auf die Diffusionsgleichung (15).

(3 Punkte)

4.3. Die Stabilitätsanalyse mit Hilfe des von Neumann-Verfahrens ergibt für ein unbekanntes Verfahren mit Euler-Zeitdiskretisierung folgende Stabilitätsbedingung

$$\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (21)$$

Wurde hier eine explizite oder implizite Euler-Zeitdiskretisierung verwendet? Begründen Sie Ihre Antwort.

Gegeben sei der Diffusionskoeffizient $\lambda = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ und eine äquidistante räumliche Diskretisierung mit $\Delta x = 0.1 \text{ m}$. Welche Bedingung muss Δt erfüllen damit das Verfahren stabil ist?

Unter welcher Bedingung ist das Verfahren bei Erfüllung der Stabilitätsbedingung auch konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort.

(5 Punkte)

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Wintersemester 2019/20

1. Aufgabe: Finite Differenzen (14 Punkte)

*** Lösung ***

1.1. Lösung:

$$c_1 \approx c_2 - 2 \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=x_2} \Delta x + 2 \left. \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right|_{x=x_2} \Delta x^2 - \frac{8}{6} \left. \frac{\partial^3 c}{\partial x^3} \right|_{x=x_2} \Delta x^3 + \frac{16}{24} \left. \frac{\partial^4 c}{\partial x^4} \right|_{x=x_2} \Delta x^4 + \dots \quad (3) \quad (1)$$

$\frac{3}{3}$

1.2. Lösung: 2 * Gegebene Taylorreihe + Taylorreihe aus 1.1:

$$2c_3 + c_1 = 3c_2 + 3 \left. \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right|_{x=x_2} \Delta x^2 - \left. \frac{\partial^3 c}{\partial x^3} \right|_{x=x_2} \Delta x^3 + \frac{3}{4} \left. \frac{\partial^4 c}{\partial x^4} \right|_{x=x_2} \Delta x^4 \quad (1.5) \quad (2)$$

Umformen nach der gesuchten Ableitung:

$$\left. \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right|_{x=x_2} = \frac{2c_3 - 3c_2 + c_1}{3\Delta x^2} + \underbrace{\left. \frac{\partial^3 c}{\partial x^3} \right|_{x=x_2} \Delta x - \frac{1}{4} \left. \frac{\partial^4 c}{\partial x^4} \right|_{x=x_2} \Delta x^2}_{\text{Abbruchfehler}} \quad (1) \quad (3)$$

Abbruchfehler (0.5)

Der Ausdruck ist 1. Ordnung genau. (1)

$\frac{4}{4}$

1.3. Lösung:

Gleichung für Knoten 1: Dirichlet Knoten, daher ist $c_1 = 4$ bekannt. (1)

Gleichung für Knoten 2:

$$a \frac{4c_3 - 3c_2 - 4}{6\Delta x} - \lambda \frac{2c_3 - 3c_2 + 4}{3\Delta x^2} = 0 \quad (1) \quad (4)$$

Gleichung für Knoten 3:

$$a \frac{c_4 - c_2}{2\Delta x} - \lambda \frac{c_4 - 2c_3 + c_2}{\Delta x^2} = 0 \quad (1) \quad (5)$$

Gleichung für Knoten 4:

$$a \frac{0 - c_3}{2\Delta x} - \lambda \frac{0 - 2c_4 + c_3}{\Delta x^2} = 0 \quad (1) \quad (6)$$

Gleichung für Knoten 5: Dirichlet Knoten, daher ist $c_5 = 0$ bekannt. (1)

$\frac{5}{5}$

1.4. Lösung: Zentrale Differenzen für den Advektionsterm führen bei hohen Peclet Zahlen $a \gg \lambda$ zu Oszillationen in der Lösung. Da $a > 0$, sollte eine Kombination aus zentralen Differenzen und Rückwärts-Differenzen verwendet werden, was einem optimalen Upwinding entspricht.

$\frac{2}{2}$

$$\sum_{A1} = \frac{14}{14}$$

2. Aufgabe: Finite Elemente (14.5 Punkte)*** Lösung *****2.1. Lösung:**

$$\overbrace{\int_0^6 \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)}^{(0.5)} \underbrace{w}_{(0.5)} dx = 0 \quad \underbrace{\forall w}_{(0.5)}. \quad (7)$$

Anwenden der partiellen Integration auf $\int_0^6 \left(-\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) w dx$.

$$\int_0^6 \frac{\partial T}{\partial t} w dx + \underbrace{\int_0^6 \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx}_{(0.5)} - \underbrace{\lambda \left[\frac{\partial T}{\partial x} w \right]_0^6}_{(0.5)} = 0 \quad \forall w. \quad (8)$$

Einsetzen der Randbedingungen in $-\lambda \left[\frac{\partial T}{\partial x} w \right]_0^6$:

$$\frac{\partial T(0)}{\partial x} w(0) = 4 w(0), \quad (0.5) \quad (9)$$

$$\frac{\partial T(6)}{\partial x} w(6) = 2 w(6), \quad (0.5) \quad (10)$$

$$\int_0^6 \frac{\partial T}{\partial t} w dx + \int_0^6 \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx - 2\lambda w(6) + 4\lambda w(0) = 0 \quad \forall w. \quad \textcircled{1} \quad (11)$$

$\frac{4.5}{4.5}$

2.2. Lösung:

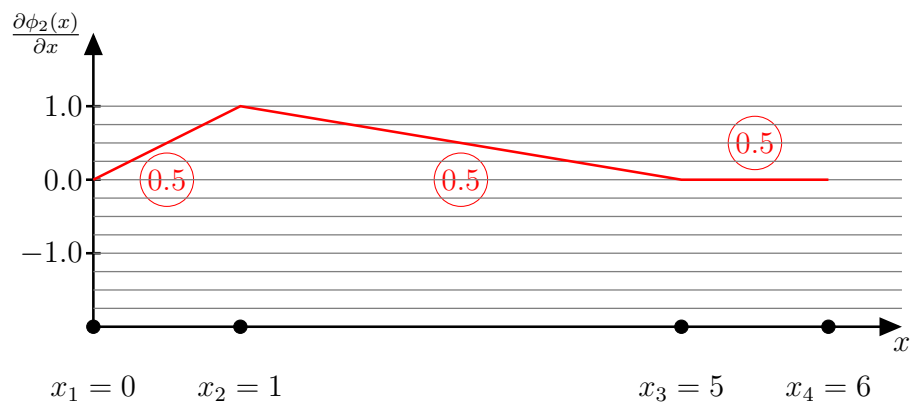


Abbildung 1: Interpolationsfunktionen des 1-D Finite-Elemente-Gitters.

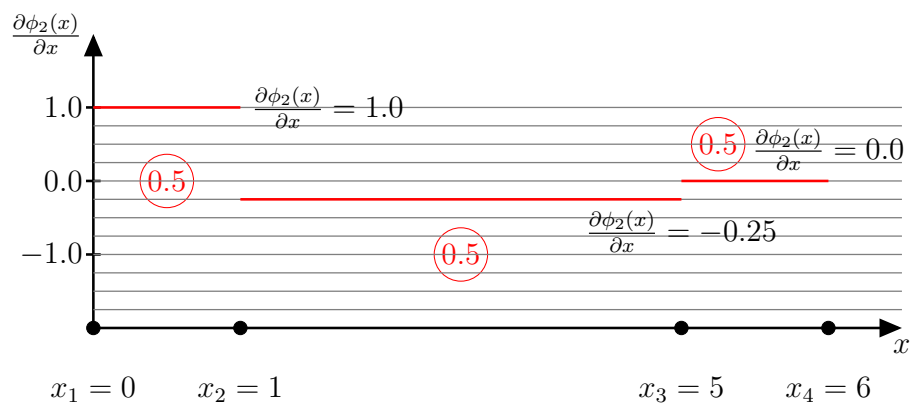
$$\frac{1.5}{1.5}$$
2.3. Lösung:

Abbildung 2: Ableitung der Interpolationsfunktionen des 1-D Finite-Elemente-Gitters.

$$\frac{1.5}{1.5}$$

2.4. Lösung: Anwenden der Transformationsformel:

$$\int_0^6 \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x} dx}_{=0 \text{ (0.5)}} + \int_1^5 \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x} dx \quad (12) \quad (1)$$

$$+ \underbrace{\int_5^6 \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x} dx}_{=0 \text{ (0.5)}} \quad (13)$$

$$(14)$$

Hier ist es essentiell, dass im Lösungsweg keine Gleichheit zwischen dem Integral über dem Gesamtgebiet $x \in [0, 6]$ und dem Referenzgebiet $\xi \in [-1, 1]$ ausgedrückt wird. Nur wenn die Elementweise Transformation kenntlich gemacht wurde, können die 1.5 Punkte für die nächste Zeile gegeben werden.

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{\partial \phi_1^e}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \phi_2^e}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| d\xi \quad (1.5) = \int_{-1}^1 \frac{\partial \phi_1^e}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_2^e}{\partial \xi} \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|^{-1} d\xi \cdot \quad (0.5) \quad (15)$$

$\frac{4}{4}$

2.5. Lösung: Da $\left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|$ konstant ist (0.5), aber auf jedem Element unterschiedlich ist, gilt:

$$\int_1^5 \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x} dx = \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_{x \in [1,5]}^{-1} \int_{-1}^1 \frac{\partial \phi_1^e}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_2^e}{\partial \xi} d\xi = \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_{x \in [1,5]}^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \quad (1) \quad (16)$$

Mit

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_{[1,5]} = \frac{\Delta x}{2} \Big|_{[1,5]} = \frac{4}{2} = 2, \quad (1) \quad (17)$$

folgt dann:

$$\int_0^6 \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x} dx = 0 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \phi_1^e}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_2^e}{\partial \xi} d\xi + 0 = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \quad (0.5) \quad (18)$$

$\frac{3}{3}$

$$\sum A_2 = \frac{14.5}{14.5}$$

3. Aufgabe: Finite Volumen (12 Punkte)

* Lösung *

3.1. Lösung:

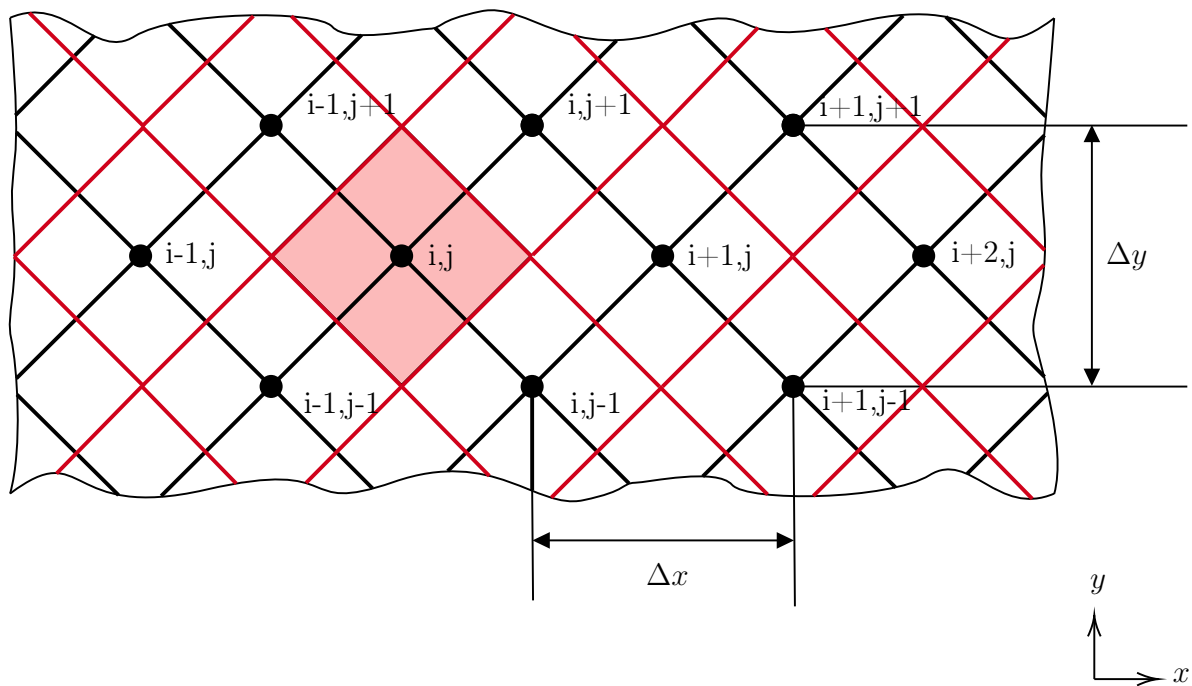


Abbildung 3: Exemplarisches, internes Kontrollvolumen mit benachbarten Zellzentren.

Richtiges Zeichnes des dualen Gitters mit senkrechten Kanten und äquidistanten Zellen

①

Richtige Wahl des korrekten inneren Kontrollvolumens: ①

$\frac{2}{2}$

3.2. Lösung:

Integrale Form:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \nabla c d\Omega = 0 \quad \text{①} \quad (19)$$

$$\int_{V_{i,j}} \frac{\partial c}{\partial t} dV + \int_{V_{i,j}} \mathbf{a} \cdot \nabla c dV = 0 \quad \text{①} \quad (20)$$

(21)

 $\frac{2}{2}$ **3.3. Lösung:**

Mit dem Hinweis folgt:

$$\int_{V_{i,j}} \frac{\partial c}{\partial t} dV + \int_{V_{i,j}} \mathbf{a} \cdot \nabla c dV = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} c_{i,j} \int_{V_{i,j}} dV + \oint_{\partial V_{i,j}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} c ds = 0 \quad (1) \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} c_{i,j} \frac{1}{2} + \oint_{\partial V_{i,j}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} c ds = 0 \quad (1) \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} c_{i,j} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^4 \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_k c_k \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad (1) \quad (25)$$

Die Kantenummerierung sei im Folgenden: NE=1, SW=2, SW=3, SE=4.

Da \mathbf{a} parallel zu zwei Rändern ist, fallen zwei Summanden des Summenterms weg:

$$\frac{\partial}{\partial t} c_{i,j} \frac{1}{2} + 4c_1 \frac{1}{\sqrt{2}} - 4c_3 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad (2) \quad (26)$$

Durch Mittelung auf dem Rand wird die finale Diskretisierung des Randterms erhalten zu:

$$\frac{\partial}{\partial t} c_{i,j} \frac{1}{2} + 2\sqrt{2} \left(\frac{c_{i,j} + c_{i,j+1}}{2} - \frac{c_{i,j} + c_{i-1,j-1}}{2} \right) = 0 \quad (1) \quad (27)$$

 $\frac{6}{6}$ **3.4. Lösung:**

Der gegebene Term wird erhalten wenn in Gleichung (26) anstatt zu Mitteln der in Strömungsrichtung stromaufwärts liegende Wert jeweils eingesetzt wird. Die gegebene Diskretisierung ist sinnvoll, da es sich um eine Upwinddiskretisierung in einem advektionsdominierten Problem handelt, da in Gleichung (11) kein Diffusionsterm auftritt. $\frac{2}{2}$

$$\sum_{A3} = \frac{12}{12}$$

4. Aufgabe: Fehler (9.5 Punkte)

* Lösung *

4.1. Lösung: In Diskretisierung a) hat der Diffusionskoeffizient λ das falsche Vorzeichen. (0.5) In der Diskretisierung b) liegen die Stützstellen der räumliche Diskretisierung nicht im gleichen Zeitpunkt n bzw. $n + 1$. (0.5) Für die Diskretisierung einer Ableitung zweiter Ordnung sind mindestens drei Stützstellen erforderlich. Deshalb kann die räumliche Diskretisierung in c) nicht konsistent sein. Zusätzlich ist die Zeitdiskretisierung in c) nicht konsistent. (0.5)

$\frac{1.5}{1.5}$

4.2. Lösung: Damit das gegebene Verfahren die partielle Differentialgleichung (15) konsistent diskretisiert, muss die folgende Bedingung für den Abbruchfehler erfüllt sein:

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \|L - L_{\Delta}\| \stackrel{!}{=} 0. \quad (0.5) \quad (28)$$

Daraus ergibt sich:

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \|L - L_{\Delta}\| = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) - \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \right) \right\| \quad (29)$$

$$= \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \underbrace{\mathcal{O}(\Delta t^2)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\mathcal{O}(\Delta x^2)}_{\rightarrow 0} \right\| \quad (30)$$

$$= \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right\| \neq 0. \quad (2) \quad (31)$$

Daraus folgt, dass das Verfahren nicht konsistent ist. (0.5)

$\frac{3}{3}$

4.3. Lösung:

Die implizite Euler-Zeitdiskretisierung ist unbedingt stabil (0.5), deshalb handelt es sich hier um ein explizites Verfahren. (0.5)

$$\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{10 \Delta t}{\Delta 0.1^2} \leq \frac{1}{2} \cdot (1) \quad (32)$$

Daraus folgt

$$\Delta t \leq \frac{1}{2000} \cdot (0.5) \quad (33)$$

Damit ergibt sich ein maximaler Zeitschritt (0.5) von 0.0005 s.

Nach dem Satz von Lax sind Stabilität und Konsistenz notwendige und hinreichende Bedingung für ein konvergentes Finite-Differenzen Verfahren. (1) Deshalb muss das in dieser Teilaufgabe unbekannte Verfahren auch konsistent sein, damit es unter Einhaltung der Stabilitätsbedingung auch konvergent ist. (1)

$\frac{5}{5}$

$$\sum_{A4} = \frac{9.5}{9.5}$$