RWTH Aachen · AVT **Systemverfahrenstechnik** · 52074 Aachen · **Prof. Alexander Mitsos, Ph.D.**

Schriftliche Prüfung: Aufgaben des AVT-Teils. Jeder Punkt entspricht 1 Minute.

Simulationstechnik

Sommersemester 2017

---

1. Aufgabe: Fragen (20 Punkte)

1.1. Nennen Sie zwei der drei Einsatzmöglichkeiten von Simulation nach der Definition von Shannon. **(2 Punkte)**

Das aus der Vorlesung bekannte Hasen-Luchse-Modell soll um die begrenzte Verfügbarkeit von Graspflanzen als Hasenfutter erweitert werden.
Dafür ist das Gleichungssystem (1)–(3) gegeben. $H(t)$ beschreibt die Anzahl an Hasen, $L(t)$ die Anzahl der Luchse und $G(t)$ die Anzahl an Graspflanzen. Die Koeffizienten b_1, b_2, b_3, b_G^*, h, r und c sind konstant und bekannt. Die Umgebungstemperatur $T_\mathsf{U}(t)$ wird mithilfe eines anderen Modells berechnet und ist bekannt.

$$\dot{H}(t) = \left(b_1\left(1 - \frac{H(t)}{G(t)}\right) - b_2 - hL(t)\right)H(t), \tag{1}$$

$$\dot{L}(t) = \Big(rH(t) - c\Big)L(t), \tag{2}$$

$$\dot{G}(t) = \Big(b_\mathsf{G}^* T_\mathsf{U}(t) - b_3 H(t)\Big)G(t). \tag{3}$$

Hinweis: Die folgenden Unteraufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

1.2. Geben Sie an, was die differentiellen Variablen $\mathbf{x}(t)$, die Eingangsgrößen $\mathbf{u}(t)$ und die Parameter $\mathbf{p}$ des Systems sind. **(1,5 Punkte)**

1.3. Das Modell entspricht der nichtlinearen Zustandsraumdarstellung. Ist diese zeitinvariant oder zeitvariant? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie außerdem die allgemeine Form für diese Zustandsraumdarstellung an. **(2,5 Punkte)**

1.4. Handelt es sich dabei um ein autonomes System? Begründen Sie Ihre Antwort. **(1 Punkt)**

1.5. Das Modell soll nun mit dem impliziten Euler-Verfahren gelöst werden. Schreiben Sie einen Schritt des impliziten Euler-Verfahrens für Glg. (3) zur Berechnung der Graspflanzenanzahl $G(t_1)$ zum Zeitpunkt t_1 auf. Zum Zeitpunkt t_0 gilt $G(t_0) = G_0$.
Hinweis: Verwenden Sie nur gegebene Größen. **(2,5 Punkte)**

1.6. Nun soll die saisonale Verfügbarkeit des Grases modelliert werden. Stellen Sie dazu einen hybriden Automaten auf. Das Wachstum des Grases wird durch den Wachstumskoeffizient b^*_G beschrieben, welcher von der gegebenen Umgebungstemperatur $T_\mathsf{U}(t)$ abhängig ist. Fällt die Umgebungstemperatur im Winter unter die Frosttemperatur T_F und der Boden friert, wächst das Gras langsamer ($b^*_\mathsf{G} = b_{\mathsf{G,W}}$). Steigt die Umgebungstemperatur im Frühjahr wieder über die Frosttemperatur und der Boden erwärmt sich, wächst das Gras wieder schneller ($b^*_\mathsf{G} = b_{\mathsf{G,S}}$). Sobald die Umgebungstemperatur im Frühling die Keimtemperatur T_K erreicht hat, beginnt der Sommer und die Anzahl des Grases verdoppelt sich. Stellen Sie nun einen hybriden Automaten zur Modellierung des Graswachstums auf.
Hinweis: Modellieren Sie den hybriden Automaten mit 3 Moden. Geben Sie den Moden und Kanten sinnvolle Namen. Verwenden Sie für das dynamische Modell die entsprechende Form von Glg. (3), Glg. (1)–(2) können Sie abkürzen. Gehen Sie davon aus, dass die Temperatur von Winter bis Sommer monoton wächst und von Sommer bis Winter monoton fällt.
(7,5 Punkte)

1.7. Nennen Sie ein Hilfskonstrukte zur Beschreibung von Schaltfunktionen in Modelica. Schreiben Sie alle dazugehörigen Schlüsselworte dazu, welche für einen kompilierbaren Code notwendig sind. **(3 Punkte)**

2. Aufgabe: Systemtheorie (21,5 Punkte)

2.1. Geben Sie zunächst die allgemeine Formel der Taylorreihenentwicklung um einen allgemeinen Punkt $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ für ein autonomes nichtlineares Differentialgleichungssystem der Form $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ an. **(2 Punkte)**

2.2. Gegeben seien nun die Gleichungen eines gedämpften Pendels

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{4a}$$

$$\dot{x}_2(t) = -g\,\sin x_1(t) - k\,x_2(t), \tag{4b}$$

mit den Parametern g (Erdbeschleunigung) und $k > 0$ (Dämpfungskonstante).

Führen Sie eine Linearisierung des gedämpften Pendels um einen allgemeinen Punkt $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^2$ durch und geben Sie die darin auftretenden Terme explizit an. **(3 Punkte)**

2.3. Berechnen sie alle Ruhelagen des gedämpften Pendels für $\boldsymbol{x} \in [-\pi, \pi]^2$.

(2 Punkte)

2.4. Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend mit $\mathbf{0} \in D$. Wann ist eine Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ positiv definit? **(1 Punkt)**

2.5. Sei $D = (-\pi, \pi)^2$. Zeigen Sie, dass die Funktion $V_\alpha : D \to \mathbb{R}$ mit

$$V_\alpha(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} x_2^2 + g\,(1 - \cos x_1) + \alpha\, x_2\, \sin x_1 \tag{5}$$

für hinreichend kleines $\alpha > 0$ positiv definit ist. Sie dürfen **ohne Beweis** benutzen, dass für $x_1 \in (-\pi, \pi)$ die Ungleichungen

$$1 - \cos x_1 \geq \frac{2\, x_1^2}{\pi^2} \qquad \text{und} \qquad x_2 \sin x_1 \geq -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$

gelten. **(5 Punkte)**

2.6. Zeigen Sie mit Hilfe der Funktion V_α aus Gleichung (5), dass die Ruhelage $\boldsymbol{x}_R = (0, 0)^T$ für das gedämpfte Pendel aus Gleichung (4) lokal asymptotisch stabil ist. Formulieren Sie, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, und weisen Sie diese nach. **An einer Stelle sollen Sie dazu zeigen, dass gilt:**

$$\left.\frac{dV_\alpha}{dt}\right|_{\boldsymbol{x}(t)} = -k\, x_2^2 + \alpha\, x_2^2\, \cos x_1 - \alpha\, g\, \sin^2 x_1 - \alpha\, k\, x_2\, \sin x_1. \tag{6}$$

Danach dürfen Sie **ohne Beweis** benutzen, dass die rechte Seite von (6) für $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ und für hinreichend kleines $\alpha > 0$ kleiner null ist.

Hinweis: In dieser Teilaufgabe dürfen Sie annehmen, dass V_α positiv definit ist.

(4 Punkte)

2.7. Gegeben sei ein lineares Differentialgleichungssystem mit zwei Variablen $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}(t), \qquad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ seien λ_1, λ_2, bzw. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$. Zeichnen und benennen Sie die Phasenporträts für

$$a)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = 2,\ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1,\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = -1 + i,\ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1 - i,\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

(4,5 Punkte)

3. Aufgabe: Parameterschätzung (22,5 Punkte)

In einem geschlossenen, gekühlten und gut durchmischten Reaktor finden zwei chemische Reaktionen statt: $A \xrightarrow{R_1} B \overset{R_2}{\rightleftharpoons} C$
Die Änderung aller Stoffmengen (n_A, n_B, n_C) im Reaktor kann durch das folgende DA-System modelliert werden:

$$\dot{n}_A(t) = -R_1(t) \tag{7}$$

$$\dot{n}_B(t) = R_1(t) - R_2(t) \tag{8}$$

$$0 = R_1(t) - k_1 \cdot n_A^2(t) \tag{9}$$

$$0 = k_2 \cdot n_B(t) - n_C(t) \tag{10}$$

$$0 = k_2 \cdot (R_1(t) - R_2(t)) - R_2(t) \tag{11}$$

wobei R_1, R_2 die normalisierten Reaktionsraten sind und $k_1, k_2 \geq 0$ die Reaktionskonstanten. Ferner gilt $n_A, n_B, n_C \geq 0$. n_C ist der einzige Ausgang des Systems. Die Anfangswerte der Stoffmengen sind $n_A(t=0) = 2$mol, $n_B(t=0) = 0$mol.

Um den Einfluss der Parameter k_1, k_2 auf das System zu bestimmen, soll eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt werden.

3.1. Bringen Sie dafür zunächst das oben gegebene DA-System (7)–(11) in eindeutig lösbare Zustandsraumdarstellung. **(4 Punkte)**

3.2. Geben Sie nun die Sensitivitätsgleichungen für das allgemeine System

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}(t))$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}(t))$$
$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{p})$$

an. **(3 Punkte)**

3.3. Stellen Sie die Sensitivitätsgleichungen bezüglich der Parameter $\boldsymbol{p} = (k_1, k_2)^T$ für das in Aufgabe 3.1. hergeleitete Modell in Zustandsraumdarstellung auf.
Hinweis:

$$\frac{\partial(\frac{z}{z+1})}{\partial z} = \frac{1}{(1+z)^2}$$

Hinweis: Falls Sie Aufgabe 3.1. nicht lösen konnten, verwenden Sie hier folgendes <u>*Ersatzsystem*</u>

mit dem Ausgang y, den Parametern p_1, p_2 und den Zuständen x_1, x_2:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -p_1 \cdot x_1^2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= p_1 \cdot x_1^2(t) \cdot (1 - \frac{p_2}{1+p_2}) \\
y(t) &= p_2 \cdot x_2(t)
\end{aligned}$$

(5,5 Punkte)

3.4. Nun sollen die Parameter des Modells bestimmt werden. Geben Sie zunächst das allgemeine Parameterschätzproblem nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate für dynamische Systeme mit einem (skalaren) Ausgang an. Wofür stehen die einzelnen Symbole? Stellen Sie dann das Parameterschätzproblem für die Parameter k_1 und k_2 im oben definierten System (oder p_1 und p_2 für das Ersatzsystem) auf. **(4 Punkte)**

3.5. Welche notwendige Bedingung muss erfüllt sein, damit ein gegebener Parameterwert $\boldsymbol{p}$ eine Lösung des Parameterschätzproblems sein kann?
Hinweis: Geben Sie eine mathematische Formel an. **(1 Punkt)**

3.6. Statt über das oben gegebene DA-System kann die Änderung der Stoffmenge n_C auch durch folgende, empirisch ermittelte Gleichung bestimmt werden:

$$n_C = k_2 \cdot n_B \cdot n_A^2 + k_1 \cdot n_A.$$

Um die Reaktionskonstanten k_1 und k_2 zu bestimmen, wurden Experimente durchgeführt und in nachfolgender Tabelle die gemessenen Stoffmengen $\tilde{n}_A, \tilde{n}_B, \tilde{n}_C$ notiert.

t[min]	$\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{A}}$	$\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{B}}$	$\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{C}}$
0	2	0	0
2	1,4	0,05	0,5
4	1,1	0,08	0,8

Können eindeutige Werte für k_1 und k_2 unter Verwendung der Normalengleichung für dieses linearisierte System bestimmt werden?
Hinweis: Hier soll nur die Lösbarkeit der Normalengleichung geprüft werden. Die Parameter müssen nicht berechnet werden. **(5 Punkte)**

4. Aufgabe: Strukturierte Systeme und thermodynamische Systeme (20 Punkte)

4.1.

a) Schreiben Sie die in der Vorlesung eingeführte allgemeine Bilanzgleichung auf und erläutern Sie die Bedeutung der einzelnen Terme. **(3 Punkte)**

b) Aus der allgemeinen Bilanzgleichung soll nun die Stoffmassenbilanz einer Komponente i für offene Systeme hergeleitet werden. Geben Sie für jeden Term der allgemeinen Bilanzgleichung an, was in diesem Fall durch diesen physikalisch erfasst wird. **(1,5 Punkte)**

In den folgenden Teilaufgaben soll eine Gasturbine als strukturiertes System modelliert werden (siehe Abb. 1). Die Gase werden zwischen Verdichter, Brennkammer und Turbine über Rohrleitungen ausgetauscht. Verdichter, Turbine und Generator sind jeweils über eine Welle verbunden.

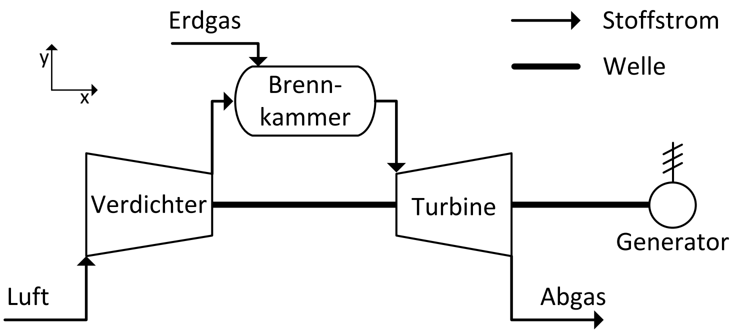


Abbildung 1: Schaltschema einer Gasturbine

4.2. Was ist der Unterschied zwischen Speicher- und Verknüpfungssystemen? Nennen Sie zudem jeweils ein mögliches Beispiel aus dem betrachteten System und begründen Sie Ihre Auswahl. **(3 Punkte)**

4.3. Schreiben Sie den Modelica-Code für den Konnektor `Welle`, der die Winkelgeschwindigkeit ω sowie die Leistung $J^{\mathrm{W,tech}}$ übergibt. Dabei soll für die Winkelgeschwindigkeit die Konvention für mechanische Systeme verwendet werden, dass Schnittgrößen in positiver Koordinatenrichtung angenommen werden, während für die Leistung die Konvention für thermodynamische Systeme gelten soll, dass alle Größen als in das System eintretend angenommen werden. **(1,5 Punkte)**

4.4. Es soll nun ein Modell für den Verdichter implementiert werden. Ergänzen Sie den unten gegebenen unvollständigen Modelica-Code für das Modell `Verdichter` um die Energiebilanz

$$\frac{dE}{dt} = J^{\mathsf{h}}_{\mathsf{ein}} + J^{\mathsf{h}}_{\mathsf{aus}} + J^{\mathsf{W,tech}},$$

sowie die Definition der Gesamtenergie E, die sich als Summe aus der inneren Energie U sowie der kinetischen Energie K des Rotors ergibt. Letztere wird wiederum aus dem Trägheitsmoment Θ und der Winkelgeschwindigkeit ω der Welle berechnet: $K = \frac{1}{2}\Theta \cdot \omega^2$. Das Verdichtermodell soll zudem den in der vorigen Aufgabe entwickelten Konnektor `Welle` verwenden, sowie Konnektoren vom Typ `GasAnschluss`, der ebenfalls zur Verfügung steht, und der den Enthalpiestrom J^{h} (mit dem Variablennamen `J_h`) übergibt. Stellen Sie sicher, dass alle Größen aus den Konnektoren in Ihren Modellgleichungen verwendet werden.

Hinweis: Machen Sie kenntlich, welcher Code an welche Stelle gehört. Auch nach den geforderten Ergänzungen ist das Modell nicht vollständig. **(5,5 Punkte)**

```
model Verdichter
  import Modelica.SIunits.*;
  parameter MomentOfInertia Theta=4.2e5;
  AngularVelocity omega;
  Energy K;
    // fehlender Code (1)
equation
  K = 1/2 * Theta * omega^2;
    // fehlender Code (2)
end Verdichter;
```

4.5.

a) Schreiben Sie den Modelica-Quellcode für das Gesamtmodell des Gasturbinenprozesses. Dieses soll das Verdichtermodell aus der vorigen Aufgabe verwenden, sowie analoge, zur Verfügung stehende Modelle `Brennkammer`, `Turbine` und `Generator`. Diese Teilsysteme sollen entsprechend Abb. 1 verkoppelt werden. Die Modelle `Brennkammer` und `Turbine` verfügen jeweils über `GasAnschluss`-Konnektoren mit Namen `Ein` und `Aus`. Die Turbine besitze zudem `Welle`-Konnektoren namens `W_V` und `W_G`, und der Generator einen `Welle`-Konnektor namens `W`. **(4,5 Punkte)**

b) Welche Funktion haben die Konnektoren, die gemäß Abb. 1 nicht mit anderen verknüpft werden, für das Gesamtsystem? **(1 Punkt)**

5. Aufgabe: DA-Systeme (16 Punkte)

Die Gondel eines Fahrgeschäftes auf dem Öcher Bend mit gegebener Masse m ist an einem starren Schwungarm mit Länge R befestigt. Die Gondel kann als punktförmige Masse modelliert werden. Die Position der Gondel wird durch die Koordinaten x und y in einem rechtshändigen kartesischen Koordinatensystem beschrieben. Der Winkel ϕ beschreibt den Winkel zwischen dem Positionsvektor der Gondel und dem Einheitsvektor e_1. Die Geschwindigkeit der Gondel in Richtung des Einheitsvektors e_1 bzw. e_2 wird durch die Variablen v_x und v_y beschrieben. Die Kraft F_A beschreibt die Kraft des Schwungarmes auf die Gondel. Die Gewichtskraft g wirkt in negativer Richtung zum Einheitsvektor e_2. Abbildung 2 stellt links die Laufbahn der Gondel und rechts die auf die Gondel wirkenden Kräfte und die Einheitsvektoren e_1 und e_2 dar.

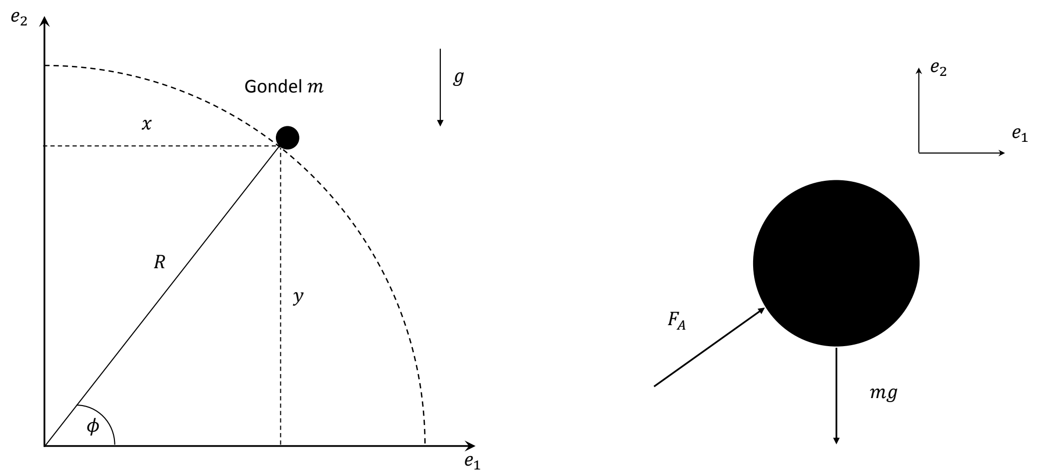


Abbildung 2: Prinzipskizze der Gondel am Schwungarm

5.1. Die Bewegung der Gondel für $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ kann auf verschiedene Weisen modelliert werden. Eine Möglichkeit ist das Gleichungssystem (12)–(15).

$$m \cdot \ddot{x}(t) = F_A(t) \cdot \cos(\phi(t)) \tag{12}$$

$$m \cdot \ddot{y}(t) = -m \cdot g + F_A(t) \cdot \sin(\phi(t)) \tag{13}$$

$$\frac{x(t)}{R} = \cos(\phi(t)) \tag{14}$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = R^2 \tag{15}$$

Eine weitere Möglichkeit ist das Gleichungssystem (16)–(21).

$$\dot{x}(t) = v_x(t) \tag{16}$$
$$\dot{y}(t) = v_y(t) \tag{17}$$
$$m \cdot \dot{v}_x(t) = F_A(t) \cdot \cos(\phi(t)) \tag{18}$$
$$m \cdot \dot{v}_y(t) = -m \cdot g + F_A(t) \cdot \sin(\phi(t)) \tag{19}$$
$$\frac{x(t)}{R} = \cos(\phi(t)) \tag{20}$$
$$x(t)^2 + y(t)^2 = R^2 \tag{21}$$

Beschreiben Sie kurz, wie das erste Gleichungssystem in das zweite Gleichungssystem transformiert werden kann. Geben Sie mit Begründung an, welches der Gleichungssysteme Sie für eine geplante Modellierung der Gondelbewegung in Dymola verwenden müssen.
(2 Punkte)

Nutzen Sie für die Teilaufgaben 5.2 und 5.4 das Gleichungssystem (16)–(21).

5.2. Listen Sie die differentiellen Variablen, algebraischen Variablen und die Parameter im Gleichungssystem (16)–(21) separat auf. **(3 Punkte)**

5.3. Wie ist der differentielle Index eines DA-Systems definiert? **(1 Punkt)**

5.4. Bestimmen Sie den differentiellen Index des Systems. Schreiben Sie abschließend die Gleichungen Ihres Index-1 Systemes auf und markieren Sie diese deutlich. Listen Sie die differentiellen Größen in Ihrem Index-1 System auf. **(8 Punkte)**

5.5. Nachdem Sie das Modell höheren Indexes auf Index-1 reduziert haben, soll das Modell jetzt simuliert werden. Für die Simulation werden Initialwerte benötigt um das Anfangswertproblem eindeutig lösen zu können. Wie viele unabhängige Anfangswerte können gewählt werden? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik

Sommersemester 2017

1. Aufgabe: Fragen (20 Punkte)

* Lösung *

1.1. Lösung: In der Definition nach Shannon werden drei Einsatzmöglichkeiten von Simulation gegeben:

1. Verständnis des Verhaltens eines Systems und dessen Gründen,
2. Bewertung verschiedener Designs/Auslegungen für ein künstliches System, und
3. Entwicklung von Strategien zum Betrieb eines Systems.

Bewertung: Es werden nur zwei Antwortmöglichkeiten gewertet mit insgesamt maximal 2 TP. **(2 Punkte)**

1.2. Lösung: Differentielle Variable $\mathbf{x}(t) = [H(t)\, L(t)\, G(t)]^{\mathsf{T}}$
Parameter $\mathbf{p} = [b_1\, b_2\, b_3\;\, h\, r\, c\, b_{\mathsf{G}}^*]^{\mathsf{T}}$
Eingangsgröße $\mathbf{u}(t) = [T_{\mathsf{U}}(t)]^{\mathsf{T}}$

Bewertung: Jeweils 0,5 TP. Für b_{G}^* kann alternativ auch $b_{\mathsf{G,W}}^*$ und $b_{\mathsf{G,S}}$ gegeben werden. **(1,5 Punkte)**

1.3. Lösung: Es handelt sich um eine zeitinvariante Zustandsraumdarstellung (0,5 TP), da es keine explizite Abhängigkeit von der Zeit gibt (0,5 TP). Die allgemeine Formel lautet

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p})$$

$$\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p})$$
$$\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$$

Bewertung: Für die Gleichungen und die Anfangsbedingung gibt es jeweils 0,5 TP.

(2,5 Punkte)

1.4. Lösung: Nein (0,5 TP), da es einen Eingang $u(t) = T_{\mathrm{U}}(t)$ in das System gibt (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

1.5. Lösung:

$$\underbrace{G(t_1)}_{0{,}5\text{TP}} = \underbrace{G_0}_{0{,}5\text{TP}} + \underbrace{(t_1 - t_0)}_{0{,}5\text{TP}} \underbrace{\left(b^*_{\mathrm{G}} T_{\mathrm{U}}(t_1) - b_3 H(t_1)\right) G(t_1)}_{1\text{TP}} \tag{1}$$

Bewertung: Der Zeitpunkt der Variablen (t_0, t_1) muss eindeutig kenntlich gemacht werden.

(2,5 Punkte)

1.6. Lösung:

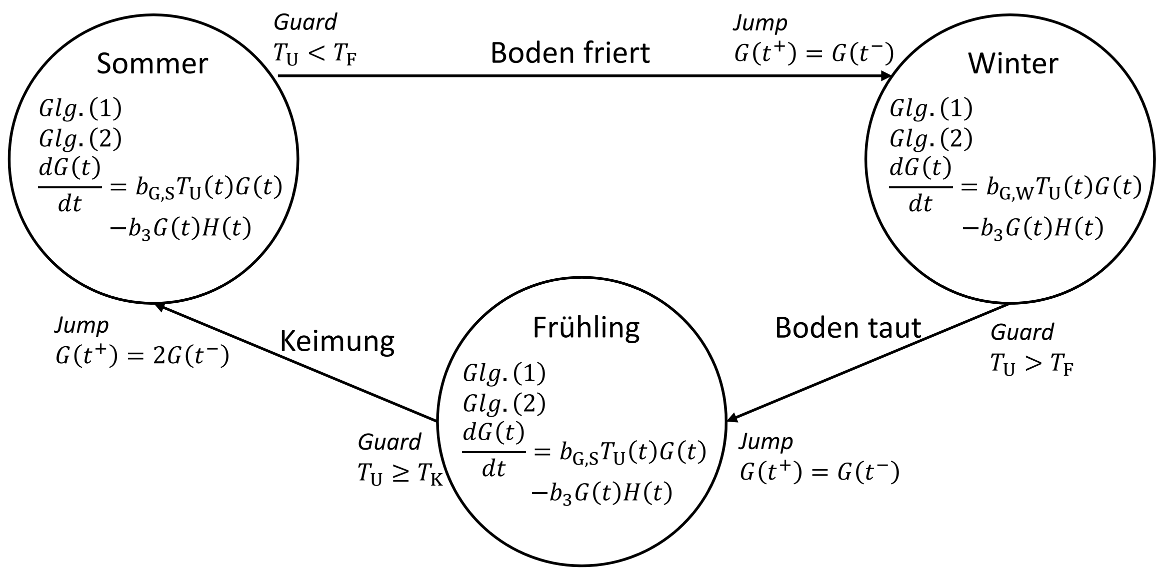


Abbildung 1: Graswachstum als hybrider Automat

Bewertung: Für die Moden mit sinnvollem Namen gibt es 0,5 TP. Für das korrekte Modell in der Mode gibt es 0,5 TP. Für jede korrekte Kante mit sinnvollem Namen gibt es 0,5 TP. Jeder Guard gibt 0,5 TP. Jeder Jump gibt insgesamt 0,5 TP. Für abweichende und korrekte Lösungen wird die Bewertung entsprechend angepasst. **(7,5 Punkte)**

1.7. Lösung: Die Implementierung der Schaltfunktion eines hybriden Automaten ist möglich durch die if-Bedingung oder die when-Bedingung.

```
if ... then ...;
else ...;
end if;
```

und

```
when ...
then ...;
end when;
```

Bewertung: Beide Konstrukte sind möglich. Für jedes Konstrukt mit allen dazugehörigen Schlüsselwörtern gibt es 3 TP. Die Lösung ist nur vollständig mit *then, end when / end if.* **(3 Punkte)**

2. Aufgabe: Systemtheorie (21,5 Punkte)

* Lösung *

2.1. Lösung: Die Taylorreihenentwicklung eines allgemeinen nichtlinearen autonomen Systems der Form $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ lautet

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \underbrace{f\left(\boldsymbol{x}^*\right)}_{\text{0,5 TP}} + \underbrace{\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}^*}}_{\text{0,5 TP}} \underbrace{\left(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*\right)}_{\text{0,5 TP}} + \underbrace{\overbrace{R_n(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}^*)}^{\text{vernachlässigt}}}_{\text{0,5 TP}}.$$

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

2.2. Lösung: Die Linearisierung des gegebenen Systems ist

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \approx \underbrace{\begin{bmatrix} x_2^* \\ -g\,\sin x_1^* - k\,x_2^* \end{bmatrix}}_{\text{1 TP}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g\,\cos x_1^* & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) - x_1^* \\ x_2(t) - x_2^* \end{bmatrix}}_{\text{2 TP}}.$$

Bewertung: Siehe oben. **(3 Punkte)**

2.3. Lösung: Wir berechnen alle Ruhelagen. Für das Aufstellen der Gleichungen

$$0 = -x_2 \tag{A}$$

$$0 = -g\,\sin x_1 - k\,x_2 \tag{B}$$

gibt es einen Teilpunkt (1 TP). Aus Gleichung (A) erhalten wir $x_2 = 0$ und setzen den Wert direkt in Gleichung (B) ein:

$$0 = -g\,\sin x_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin x_1 = 0.$$

Damit folgt wegen der Bedingung $x_1 \in [-\pi, \pi]$, dass $x_1 = \pi$, $x_1 = 0$ oder $x_1 = \pi$ (1TP). Die Ruhelagen sind also $(-\pi, 0), (0, 0)$ und $(\pi, 0)$.

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

2.4. Lösung: Ein Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ ist positiv definit falls

1. $V(\mathbf{0}) = 0$ (0,5 TP).
2. $V(\boldsymbol{x}) > 0$ für alle $\boldsymbol{x} \in D \backslash \{0\}$ (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

2.5. Lösung: Es gilt

$$
\begin{aligned}
V_\alpha(\mathbf{0}) &= \frac{1}{2}0^2 + g\cdot(1-\cos 0) + \alpha\cdot 0\cdot\sin 0 \\
&= 0 + g\cdot(1-1) + \alpha\cdot 0\cdot 0 \\
&= 0+0+0 = 0 \qquad \text{(1 TP)}.
\end{aligned}
$$

Sein nun $\boldsymbol{x} \in D\backslash\{\mathbf{0}\}$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
V_\alpha(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}x_2^2 + g\,(1-\cos x_1) + \alpha\,x_2\,\sin x_1 \\
&\geq \frac{1}{2}x_2^2 + g\,\frac{2\,x_1^2}{\pi^2} - \alpha\,\frac{x_1^2+x_2^2}{2} \qquad \text{(1 TP)} \\
&= \underbrace{\frac{1-\alpha}{2}}_{>0 \text{ für } \alpha<1}\,x_2^2 + \underbrace{\frac{4\,g-\alpha\,\pi^2}{2\,\pi^2}}_{>0 \text{ für } \alpha<4g/\pi^2}\,x_1^2 \qquad \text{(2 TP)} \\
&> 0 \text{ für } \alpha < \min(1, 4g/\pi^2) \qquad \text{(1 TP)}.
\end{aligned}
$$

Bewertung: Siehe oben. **(5 Punkte)**

2.6. Lösung: Es ist zu zeigen, dass $\frac{dV_\alpha}{dt}$ negativ definit ist, d.h.

$$
\frac{dV_\alpha}{dt}(\mathbf{0}) = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{dV_\alpha}{dt}(\boldsymbol{x}) < 0 \text{ für alle } \boldsymbol{x} \in D\backslash\{\mathbf{0}\} \qquad \text{(1 TP)}.
$$

Es gilt

$$
\frac{dV_\alpha}{dt}(\mathbf{0}) = \left.\frac{dV_\alpha}{d\boldsymbol{x}}\right|_{\mathbf{0}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}|_{\mathbf{0}} = \left.\frac{dV_\alpha}{d\boldsymbol{x}}\right|_{\mathbf{0}} \cdot \mathbf{0} = 0 \qquad \text{(1 TP)}.
$$

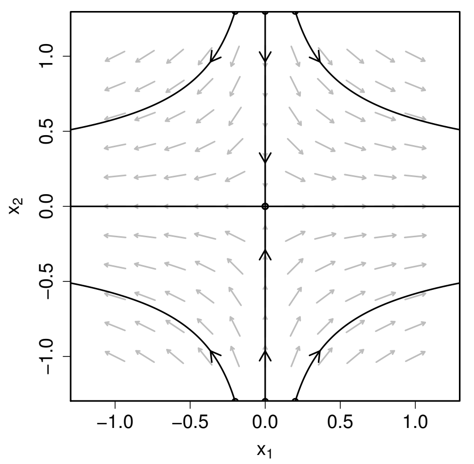
Weiterhin gilt für $\boldsymbol{x} \in D\backslash\{\mathbf{0}\}$

$$
\begin{aligned}
\frac{dV_\alpha}{dt}(\boldsymbol{x}) &= \frac{dV_\alpha}{d\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}} \\
&= (g\,\sin x_1 + \alpha x_2\cos x_1, x_2 + \alpha\sin x_1)\begin{pmatrix} x_2 \\ -g\,\sin x_1 - k\,x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 TP)} \\
&= -k\,x_2^2 + \alpha\,x_2^2\,\cos x_1 - \alpha\,g\,\sin^2 x_1 - \alpha\,k\,x_2\,\sin x_1 \qquad \text{(1 TP)} \\
&= -\begin{pmatrix} \sin x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha\,g & \frac{1}{2}\alpha\,k \\ \frac{1}{2}\alpha\,k & k-\alpha\,\cos x_1 \end{pmatrix}}_{:=\boldsymbol{B}} \begin{pmatrix} \sin x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&< \underbrace{0 \text{ für } \boldsymbol{x} \in D\backslash\{\mathbf{0}\}}_{\text{siehe Bemerkung}}
\end{aligned}
$$

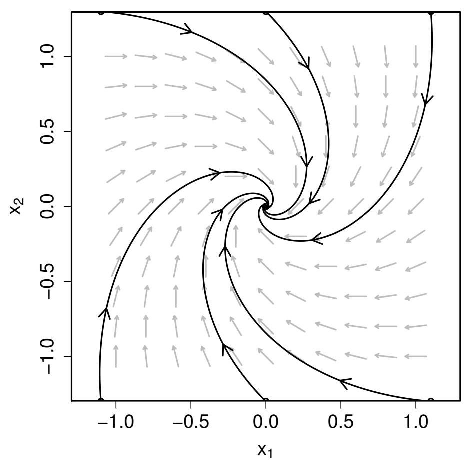
Bemerkung: Aus dem Hurwitz-Kriterium folgt, dass die Matrix $\boldsymbol{B}$ positiv definit ist, d.h., $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{w} > 0$ für alle $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$. Und für $\boldsymbol{x} \in D\backslash\{\boldsymbol{0}\}$ ist $\boldsymbol{w} = (\sin x_1, x_2)^T \neq \boldsymbol{0}$.

Bewertung: Siehe oben. **(4 Punkte)**

2.7. Lösung:



a) Sattelpunkt



b) stabiler Fokus

Bewertung: Für das richtige Phasenporträt in a) 1,5 TP, in b) 2 TP (davon 0,5 für die richtige Drehrichtung). Für jede richtige Charakterisierung 0,5 TP. **(4,5 Punkte)**

3. Aufgabe: Parameterschätzung (22,5 Punkte) * Lösung *

Hinweis: Für die Lösung des Ersatzsystems ersetzen Sie in den nachfolgenden Unteraufgaben n_A durch x_1, n_B durch x_2, n_C durch y, k_1 durch p_1,k_2 durch p_2.

3.1. Lösung: Einsetzen von Gleichung (9) in Gleichung (7), (8) und (11), sowie dann Einsetzen von Gleichung (11) in Gleichung (8) und Umformen von Gleichung (10) nach n_C ergibt das System in Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{n}_A = -k_1 \cdot n_A^2 \quad \text{(1TP)} \tag{f1}$$

$$\dot{n}_B = k_1 \cdot n_A^2 \cdot (1 - \frac{k_2}{1+k_2}) \quad \text{(1TP)} \tag{f2}$$

$$n_C = k_2 \cdot n_B \quad \text{(1TP)} \tag{g1}$$

$$n_A(t=0) = 2 \quad \text{(0,5TP)}$$

$$n_B(t=0) = 0 \quad \text{(0,5TP)}$$

Bewertung: Siehe oben. **(4 Punkte)**

3.2. Lösung: Die Sensitivitätsgleichungen für ein allgemeines System sind gegeben durch

$$\frac{d\dot{\boldsymbol{x}}}{d\boldsymbol{p}} = \dot{\boldsymbol{S}}^x = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{S}^x + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{p}} \quad \text{(1TP)} \tag{2a}$$

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{S}^y = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{S}^x + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{p}} \quad \text{(1TP)} \tag{2b}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\boldsymbol{S}^x(t=0) = \frac{d\boldsymbol{x}_0}{d\boldsymbol{p}} \quad \text{(1TP).} \tag{2c}$$

Bewertung: Siehe oben.
Falls ein zusätzlicher Term $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{d\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{p}}$ angegeben wurde ist das auch richtig. Hier fehlt der Term, da in der Vorlesung grundsätzlich $\boldsymbol{u}$ unabhängig von $\boldsymbol{p}$ ist, also $\frac{d\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{p}} = 0$. **(3 Punkte)**

3.3. Lösung: Mit den differentiellen Gleichungen (f1, f2), der algebraischen Gleichung (g1), den Zuständen ($x_1 = n_A$, $x_2 = n_B$) und dem Ausgang ($y = n_C$) folgt:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial n_A} & \frac{\partial f_1}{\partial n_B} \\ \frac{\partial f_2}{\partial n_A} & \frac{\partial f_2}{\partial n_B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k_1 \cdot n_A & 0 \\ 2k_1 \cdot (1 - \frac{k_2}{1+k_2}) \cdot n_A & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(1TP)} \tag{3a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{f_1}}{\partial \boldsymbol{k_1}} & \frac{\partial \boldsymbol{f_1}}{\partial \boldsymbol{k_2}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{f_2}}{\partial \boldsymbol{k_1}} & \frac{\partial \boldsymbol{f_2}}{\partial \boldsymbol{k_2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_A^2 & 0 \\ n_A^2 \cdot (1 - \frac{k_2}{1+k_2}) & -k_1 \cdot n_A^2 \cdot \frac{1}{(1+k_2)^2} \end{pmatrix} \quad \text{(2TP)} \tag{3b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{g_1}}{\partial \boldsymbol{n}_A} & \frac{\partial \boldsymbol{g_1}}{\partial \boldsymbol{n}_B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_2 \end{pmatrix} \quad \text{(0,5TP)} \tag{3c}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{g_1}}{\partial \boldsymbol{k_1}} & \frac{\partial \boldsymbol{g_1}}{\partial \boldsymbol{k_2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n_B \end{pmatrix} \quad \text{(0,5TP)} \tag{3d}$$

$$\dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -k_1 \cdot n_A & 0 \\ k_1 \cdot (1 - \frac{k_2}{1+k_2}) \cdot n_A & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{x}} + \begin{pmatrix} -n_A^2 & 0 \\ n_A^2 \cdot (1 - \frac{k_2}{1+k_2}) & -k_1 \cdot n_A^2 \cdot \frac{1}{(1+k_2)^2} \end{pmatrix} \quad \text{(0,5TP)} \tag{3e}$$

$$\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} 0 & k_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{x}} + \begin{pmatrix} 0 & n_B \end{pmatrix} \quad \text{(0,5TP)} \tag{3f}$$

$$\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(0,5TP)} \tag{3g}$$

mit den Zustandssensitivitäten $\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{dn_A}{dk_1} & \frac{dn_A}{dk_2} \\ \frac{dn_B}{dk_1} & \frac{dn_B}{dk_2} \end{pmatrix}$
und den Ausgangssensitivitäten $\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \frac{dn_C}{dk_1} & \frac{dn_C}{dk_2} \end{pmatrix}$.

<u>**Zusatz:**</u> (zum Erreichen der vollen Punktzahl nicht erforderlich)
Aus 3e und 3f folgen:

$$\dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{n_A}} \\ \dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{n_B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\dot{n}_A}{dk_1} & \frac{d\dot{n}_A}{dk_2} \\ \frac{d\dot{n}_B}{dk_1} & \frac{d\dot{n}_B}{dk_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k_1 \cdot n_A \cdot \frac{dn_A}{dk_1} & -k_1 \cdot n_A \cdot \frac{dn_A}{dk_2} \\ k_1 \cdot (1 - \frac{k_2}{1+k_2}) \cdot n_A \cdot \frac{dn_A}{dk_1} & k_1 \cdot (1 - \frac{k_2}{1+k_2}) \cdot n_A \cdot \frac{dn_A}{dk_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -n_A^2 & 0 \\ n_A^2 \cdot (1 - \frac{k_2}{1+k_2}) & -k_1 \cdot n_A^2 \cdot \frac{1}{(1+k_2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \frac{dn_C}{dk_1} & \frac{dn_C}{dk_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 \frac{dn_B}{dk_1} & k_2 \frac{dn_B}{dk_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n_B \end{pmatrix}$$

Bewertung: Siehe oben. **(5,5 Punkte)**

3.4. Lösung: Die Gütefunktion für das allgemeine Parameterschätzproblem für einen skalaren Ausgang lautet

$$J(\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\boldsymbol{y}(t_i, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}) - \tilde{\boldsymbol{y}}_i\right)^2 \quad \text{(1TP)}$$

mit Ausgängen $\boldsymbol{y}$, Eingängen $\boldsymbol{u}$, Messzeiten t_i, Parametern $\boldsymbol{p}$ und Messwerten $\tilde{\boldsymbol{y}}_i$ (1TP).

Das Parameterschätzproblem lautet dann

$$\min_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p}) \quad \text{(1TP).}$$

Im vorliegenden Fall haben wir einen Ausgang $y = n_C$ und zwei Parameter k_1 und k_2. Damit lautet das Parameterschätzproblem

$$\min_{k_1,k_2} \sum_{i=1}^{N} \left(n_C(t_i,[k_1,k_2]) - \tilde{n}_{C,i}\right)^2 \quad \text{(1TP)}.$$

Bewertung: Siehe oben. **(4 Punkte)**

3.5. Lösung: Eine notwendige Bedingung für die Optimalität ist, dass die Ableitung der Gütefunktion nach dem Parameter $\boldsymbol{p}$ verschwindet. Die mathematische Formel, nach der gefragt ist, ist also

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{p}} = \mathbf{0} \quad \text{(1TP)}.$$

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

3.6. Lösung: Die Normalengleichung liefert eine eindeutige Lösung für die Parameter linearer, algebraischer Systeme wenn die Matrix $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$ regulär ist.
Daher muss hier zunächst die Matrix $\boldsymbol{A}$ aufgestellt werden:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{cc} (n_A) & (n_A^2 n_B) \\ \end{array}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1,4 & 0,098 \\ 1,1 & 0,096 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} t=0 \\ t=2 \\ t=4 \end{array} \qquad \text{(1,5TP)}$$

Daraus ergibt sich

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1,4 & 1,1 \\ 0 & 0,098 & 0,096 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1,4 & 0,098 \\ 1,1 & 0,096 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,17 & 0,2428 \\ 0,2428 & 0,0188 \end{pmatrix} \quad \text{(1TP)}$$

$$\det(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = 0,076 \quad \text{(1TP)}$$

Wegen $\det(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) \neq 0$ (1TP) können eindeutige Parameterwerte für das linearisierte System und den gegebenen Messwerten mit Hilfe der Normalengleichung bestimmt werden (0,5TP).

Bewertung: Siehe oben. **(5 Punkte)**

4. Aufgabe: Strukturierte und thermodynamische Systeme (20 Punkte)

* Lösung *

4.1. Lösung:

a) Die in der Vorlesung eingeführte allgemeine Bilanzgleichung lautet:

$$\underbrace{\left.\frac{d\Psi}{dt}\right|_t}_{\text{I}} = \underbrace{\sum_{j\in\Lambda_J} J_j^\Psi(t)}_{\text{II}} + \underbrace{\sum_{k\in\Lambda_\Gamma} \Gamma_k^\Psi(t)}_{\text{III}} \qquad (1,5 \text{ TP})$$

Term I beschreibt dabei Änderung der Menge der zu bilanzierenden Größe Ψ im Bilanzraum mit der Zeit (0,5 TP), Term II die über die Grenzen des Bilanzraum tretenden Flüsse von Ψ (0,5 TP), und Term III Quellen und Senken von Ψ innerhalb des Bilanzraums (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(3 Punkte)**

b) Im Falle der Stoffmassenbilanz für Komponente i werden folgende Effekte durch die Terme der Bilanzgleichung beschrieben:

I: Zeitliche Änderung der Masse von Stoff i im Bilanzraum (0,5 TP)

II: Transport von Stoff i (d.h. Massenströme der Komponente i) über die Grenzen des Bilanzraums (0,5 TP), zum Beispiel durch Konvektion oder Diffusion

III: Erzeugung bzw. Vernichtung von i im Bilanzraum durch chemische Reaktion (0,5 TP)

Bewertung: Siehe oben. **(1,5 Punkte)**

4.2. Lösung: Speichersysteme können extensive Größen wie Materie, Energie o.ä. speichern und werden durch Bilanzgleichungen beschrieben (0,5 TP). Ein Beispiel wäre der Verdichter (0,5 TP), da dieser Energie speichert (in Form von innerer Energie des enthaltenen Gases und kinetischer Energie des Rotors), und u.a. durch eine Energiebilanz beschrieben wird (0,5 TP).

Verknüpfungssysteme können selbst keine extensiven Größen speichern, sondern beschreiben die Übertragung von Flussgrößen zwischen Speichersystemen (0,5 TP). Ein Beispiel wären das Verbindungsrohr zwischen Verdichter und Brennkammer (0,5 TP), wenn für dieses angenommen wird, dass die Speicherung von Masse und Energie vernachlässigbar ist (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. Andere Beispiele sind möglich, solange die Begründung plausibel ist. **(3 Punkte)**

4.3. Lösung:

```
connector Welle
  import Modelica.SIunits.*;
  flow Power J_Wtech;
  AngularVelocity omega;
end Welle;
```

Bei der Leistung handelt es sich um eine Flussvariable, da diese bei der Verknüpfung aufgrund von Energieerhaltung und der Konvention, alle Größen als eintretend anzunehmen, das Vorzeichen wechselt (d.h. zu Null addiert wird). Die Winkelgeschwindigkeit dagegen ist eine Potentialvariable, da diese per Konvention immer in positiver Koordinatenrichtung angenommen wird, und daher in den zu vernküpfenden Systemen dasselbe Vorzeichen hat (d.h. beim Veknüpfen gleichgesetzt wird).

Bewertung: Für die richtige Struktur (inkl. beide Variablen vorhanden und korrekt deklariert) gibt es 0,5 TP, pro richtiger Entscheidung für oder gegen `flow` je 0,5 TP. Es kann für alle Variablen auch `Real` benutzt werden. **(1,5 Punkte)**

4.4. Lösung:

```
model Verdichter
  import Modelica.SIunits.*;
  parameter MomentOfInertia Theta=4.2e5;
  AngularVelocity omega;
```

```
  Energy K;

    // ergaenzter Code (1):
  Energy E;               // 0,5 TP
  Energy U;               // 0,5 TP
  GasAnschluss Ein;       // 0,5 TP
  GasAnschluss Aus;       // 0,5 TP
  Welle W;                // 0,5 TP

equation
  K = 1/2 * Theta * omega^2;

    // ergaenzter Code (2):
  der(E) = Ein.J_h + Aus.J_h + W.J_Wtech;       // 2 TP
  E = U + K;                                     // 0,5 TP
  W.omega = omega;                               // 0,5 TP

end Verdichter;
```

Bewertung: Siehe oben. In der Energiebilanz gibt es 0,5 TP für die richtige Gleichung, sowie jeweils 0,5 TP für die richtige Anbindung an die Konnektoren. **(5,5 Punkte)**

4.5. Lösung:
a)

```
model Gasturbine

  Verdichter Verd;                     // 0,5 TP
  Turbine Turb;                        // 0,5 TP
  Brennkammer Brenn;                   // 0,5 TP
  Generator Gen;                       // 0,5 TP

equation

  connect(Verd.Aus,Brenn.Ein);         // 0,5 TP
```

```
  connect(Brenn.Aus,Turb.Ein);          // 0,5 TP
  connect(Verd.W,Turb.W_V);             // 0,5 TP
  connect(Turb.W_G,Gen.W);              // 0,5 TP

end Gasturbine;
```

Bewertung: Siehe oben, plus 0,5 TP für die richtige Struktur. **(4,5 Punkte)**

b) Die nicht verwendeten Konnektoren bilden Schnittstellen zur Umgebung, und dienen somit als Ein- bzw. Ausgänge des Systems (1 TP). Im betrachteten System sind dies der eintretende Luftstrom, der eintretende Erdgasstrom, sowie der austretende Abgasstrom.

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

5. Aufgabe: DA-Systeme (16 Punkte)
* Lösung *

Das ist der Aufgabe genutzte Gleichungssystem ist:

$$\dot{x}(t) = v_x(t) \tag{4}$$

$$\dot{y}(t) = v_y(t) \tag{5}$$

$$m\dot{v}_x(t) = F_A(t)\cos(\phi(t)) \tag{6}$$

$$m\dot{v}_y(t) = -mg + F_A(t)\sin(\phi(t)) \tag{7}$$

$$\frac{x(t)}{R} = \cos(\phi(t)) \tag{8}$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = R^2 \tag{9}$$

5.1. Lösung: Das erste Gleichungssystem kann in das zweite Gleichungssystem transformiert werden, indem die Ableitungen zweiter Ordnung durch ein System von Ableitungen erster Ordnung ersetzt werden. (1 TP). Es sollte das zweite Gleichungssystem gewählt werden, da in Dymola nur Ableitungen erster Ordnung implementiert werden können. (1 TP)

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

5.2. Lösung:

Differentielle Variablen $\boldsymbol{x(t)} = [x(t), y(t), v_x(t), v_y(t)]^T$ (1 TP)

Algebraische Variablen $\boldsymbol{z(t)} = [\phi(t), F_A(t)]^T$ (1 TP)

Parameter $\boldsymbol{p} = [m, g, R]^T$ (1 TP)

Bewertung: Siehe oben. Punkte nur für vollständig richtige Antworten. **(3 Punkte)**

5.3. Lösung: Die Zahl der zeitlichen Ableitungen des algebraischen Gleichungen (alle oder nur Teil), die für die Herleitung von expliziten Dgln. mit kontinuierlicher Funktion in der rechten Seite für alle algebraische Größen eines DA-Systems erforderlich ist, wird differentieller Index des DA-System genannt. (1 TP)

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

5.4. Lösung: Zur Bestimmung des Index des Gleichungssystemes müssen die algebraischen Gleichungen nach der Zeit differenziert werden bis das Gleichungssystem nur noch aus differenziellen Gleichungen besteht. Nach der ersten Ableitung der algebraischen Gleichungen erhält man:

$$
\begin{aligned}
0 &= 2x(t)\dot{x}(t) + 2y(t)\dot{y}(t) \quad \text{(1 TP)} \\
0 &= x(t)v_x(t) + y(t)v_y(t) \quad \text{(1 TP)}
\end{aligned} \tag{10}
$$

Nach der ersten Differenzierung finden wir eine neue algebraische Gleichung (10). Diese muss ein zweites Mal differenziert werden

$$
\begin{aligned}
0 &= \dot{x}(t)v_x(t) + x(t)\dot{v_x}(t) + y(t)\dot{v_y}(t) + \dot{y}(t)v_y(t) \quad \text{(1 TP)} \\
0 &= v_x(t)^2 + x(t)\frac{F_A(t)}{m}\cos\left(\phi(t)\right) + y(t)\left(-g + \frac{F_A(t)}{m}sin(\phi(t))\right) + v_y(t)^2 \quad \text{(1 TP)} \\
0 &= v_x(t)^2 + v_y(t)^2 - y(t)g + \frac{F_A(t)}{m}\left[x(t)\cos(\phi(t)) + y(t)\sin(\phi(t))\right] \\
0 &= v_x(t)^2 + v_y(t)^2 - y(t)g + \frac{F_A(t)}{m}\left[x(t)\frac{x(t)}{R} + y(t)\frac{y(t)}{R}\right] \\
0 &= v_x(t)^2 + v_y(t)^2 - y(t)g + \frac{F_A(t)}{m}R \\
F_A &= \left[y(t)g - v_x(t)^2 - v_y(t)^2\right]\frac{m}{R}
\end{aligned} \tag{11}
$$

Auch nach der zweiten Ableitung finden wir eine neue algebraische Gleichung (11). Durch eine weitere Ableitung entsteht ein System gewöhnlicher differentieller Gleichungen, ein Index-0 System (1 TP). Für den Erhalt des Punktes ist es nicht notwendig nach F_A umzustellen und eine weitere Ableitung zum Index-0 System durchzuführen. Es muss lediglich erkennbar sein, dass es sich um ein Index-1 System handelt und dies kommentiert werden.

$$
\begin{aligned}
\dot{F_A}(t) &= \frac{m}{R}\left[g\dot{y}(t) - 2v_x(t)\dot{v_x}(t) - 2v_y(t)\dot{v_y}(t)\right] \\
\dot{F_A}(t) &= \frac{m}{R}\left[-gv_y(t) - 2\frac{F_A(t)}{mR}\left(v_x(t)x(t) + v_y(t)y(t)\right)\right] \\
\dot{F_A}(t) &= -\frac{m}{R}gv_y(t)
\end{aligned}
$$

Es handelt sich also um ein System mit Index 3. (1 TP)

Es gibt verschiedene richtige Lösungen für das finale Index-1 System. Es muss Gleichung (6) oder (7) gewählt werden. Außerdem müssen Gleichungen (8) und (11) gewählt werden. Zusätzlich müssen noch drei weitere Gleichungen aus dem Satz (4), (5), (6), (7), (9) und (10) gewählt werden.

Eine mögliche Lösung für das Index-1 System ist: (4), (7), (8), (9), (10) und (11). (1 TP)

Die differentiellen Größen in diesem System sind $x(t)$ und $v_y(t)$ (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(8 Punkte)**

5.5. Lösung: Unter Berücksichtigung aller algebraischen Gleichungen hat das Index-1 System zwei differentielle Größen. (1 TP). Aus diesem Grund hat das System zwei unabhängige Anfangsbedingungen (1 TP).

Bewertung: Siehe oben **(2 Punkte)**

Schriftliche Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Sommersemester 2017

1. Aufgabe: Finite Differenzen (12.5 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Taylorreihen einer unbekannten Funktion $T(x)$ mit Entwicklungspunkt x_i und Auswertepunkten x_{i+2}, x_{i+1} und x_{i-1}:

$$T_{i+2} \approx T_i + 2\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=x_i}\Delta x + 2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^2 + \frac{4}{3}\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^3 + \frac{2}{3}\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^4 + \frac{4}{15}\frac{\partial^5 T}{\partial x^5}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^5 + \frac{4}{45}\frac{\partial^6 T}{\partial x^6}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^6 + \dots \quad (1)$$

$$T_{i+1} \approx T_i + \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=x_i}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^4 + \frac{1}{120}\frac{\partial^5 T}{\partial x^5}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^5 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 T}{\partial x^6}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^6 + \dots \quad (2)$$

$$T_{i-1} \approx T_i - \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=x_i}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^4 - \frac{1}{120}\frac{\partial^5 T}{\partial x^5}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^5 + \frac{1}{720}\frac{\partial^6 T}{\partial x^6}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^6 + \dots \quad (3)$$

1.1. Bestimmen Sie die Taylorreihe von T entwickelt um x_i und ausgewertet bei x_{i-2}. Berücksichtigen Sie die ersten sieben Glieder. **(3.5 Punkte)**

1.2. Leiten Sie nun den zentralen Differenzenausdruck mit fünf Stützstellen für $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ her. Bestimmen Sie den Abbruchfehler und die Genauigkeitsordnung. Nutzen Sie dafür auch folgenden Zusammenhang: Gleichung (2) plus Gleichung (3) ergibt

$$T_{i+1} + T_{i-1} \approx 2T_i + \left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} \Delta x^2 + \frac{1}{12} \left.\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right|_{x=x_i} \Delta x^4 + \frac{1}{360} \left.\frac{\partial^6 T}{\partial x^6}\right|_{x=x_i} \Delta x^6 + \ldots . \tag{4}$$

(7 Punkte)

1.3. Geben Sie die Bedeutung des Begriffs *Genauigkeitsordnung* in Ihren eigenen Worten wieder. **(2 Punkte)**

2. Aufgabe: Finite Elemente (11 Punkte)

Gegeben sei folgendes FE-Gitter:

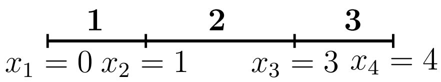


Abbildung 1: FE-Gitter in 1D

2.1. Skizzieren Sie das zum gegebenen Gitter passende Referenzelement mit Referenzkoordinate $\xi = [-1, 1]$ und die dazugehörigen linearen Interpolationsfunktionen $\phi_1^e(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$ sowie $\phi_2^e(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$.

(1 Punkt)

2.2. Bestimmen Sie einen Ausdruck für $x(\xi)$, die Transformation von Referenzkoordinaten ξ zum globalen **Element 2**. Verwenden Sie das isoparametrische Prinzip. Bestimmen Sie $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ für dieses Element. **(3 Punkte)**

2.3. Basierend auf den Aufgaben 2.1 und 2.2, bestimmen Sie $\phi_2(x)$ und $\phi_3(x)$ jeweils **nur in Element 2**. **(3 Punkte)**

2.4. Bestimmen Sie den Ausdruck $\int_0^4 \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x} dx$. Verwenden Sie dabei die zu $\int_\Omega \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x} dx$ gehörende Elementmatrix, welche wie folgt gegeben ist:

$$\mathbf{A}^e = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|^{-1}. \tag{5}$$

(4 Punkte)

3. Aufgabe: Finite Volumen (10 Punkte)

Gegeben sei folgender Ausschnitt eines 1D Gitters:

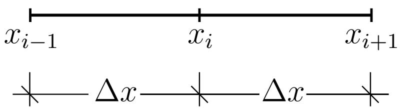


Abbildung 2: 1D Gitter

3.1. Übertragen Sie das gegebene 1D Gitter in den Lösungsbogen und zeichnen Sie das knotenzentrierte Kontrollvolumen V_i um x_i ein. Benennen Sie auch die Position der Ränder des Kontrollvolumens. **(2 Punkte)**

Betrachten Sie im Folgenden eine allgemeine Advektionsgleichung in 1D ($a = const$):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + a\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0\,. \tag{6}$$

3.2. Nennen Sie alle weiteren Informationen, die Sie zur Lösung des Problems benötigen. **(2 Punkte)**

3.3. Bestimmen Sie die integrale Form für das Kontrollvolumen V_i und vereinfachen Sie analytisch so weit wie möglich. **(1.5 Punkte)**

3.4. Führen Sie zunächst die Volumenmittelung des zeitlichen Terms durch. **(0.5 Punkte)**

3.5. Diskretisieren Sie nun die Flussterme. Wählen und benennen Sie hierzu einen einfachen Ansatz. **(2 Punkte)**

3.6. Diskretisieren Sie nun zeitlich mittels des impliziten Euler Verfahrens und markieren Sie alle gesuchten Größen. **(1 Punkt)**

3.7. Nennen Sie einen Vorteil der genannten Zeitdiskretisierung gegenüber expliziten Verfahren. **(0.5 Punkte)**

3.8. Nennen Sie eine alternative Form der Anordnung der Kontrollvolumina neben der in Aufgabe 3.1 genannten. **(0.5 Punkte)**

4. Aufgabe: Fehler (9.5 Punkte)

Gegeben sei die stationäre eindimensionale Advektions-Diffusionsgleichung zur Modellierung des Transports einer chemischen Spezies ϕ auf dem Gebiet $x \in [0, L]$

$$a\frac{\partial \phi}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0\,, \tag{7}$$

(a: Advektionsgeschwindigkeit, ν: Diffusionskoeffizient) .

4.1.

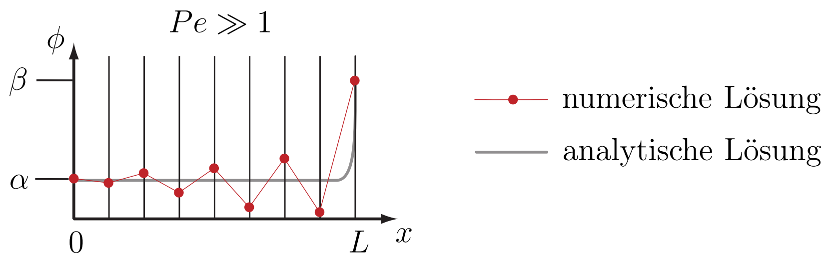


Abbildung 3: Analytische und numerische Lösung der Gleichung (7).

Die Abbildung 3 zeigt die Lösung der Gleichung (7) bei gegebenen Randbedingungen $\phi(0) = \alpha$ und $\phi(L) = \beta$ mit einem konsistenten Finite-Differenzen-Verfahren für $Pe_\Delta = \frac{a\Delta x}{2\nu} \gg 1$.

Beantworten Sie folgende Fragen:

1. Welche Finite-Differenzen-Diskretisierungen zeigen typischerweise dieses Verhalten?
2. Wie können die numerischen Oszillationen bei diesen Diskretisierungen unterbunden werden? Begründen Sie diese Antwort.

(3 Punkte)

4.2. Die Advektions-Diffusionsgleichung (7) soll mit folgendem Differenzenverfahren diskretisiert werden:

$$\left(\frac{a}{2\Delta x} + \frac{\nu}{\Delta x^2}\right)\phi_{i+1} - \left(\frac{a}{2\Delta x} - \frac{\nu}{\Delta x^2}\right)\phi_{i-1} = 0 \tag{8}$$

Gegeben sind die Taylorreihenentwicklungen von ϕ um den Punkt x_i:

$$\phi_{i\pm 1} = \phi_i \pm \frac{\partial \phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2} \pm \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\frac{\Delta x^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta x^4). \tag{9}$$

Ist das Verfahren konsistent? **(4 Punkte)**

4.3. Der Abbruchfehler eines weiteren Verfahrens zur Diskretisierung von Gleichung (7) lautet:

$$L - L_\Delta = \mathcal{O}(\Delta x^2) - a\frac{\partial \phi}{\partial x}. \tag{10}$$

Offensichtlich ist dieses Verfahren bezüglich Gleichung (7) nicht konsistent. Für welche Differentialgleichung wäre das Verfahren stattdessen konsistent? Begründen Sie ihre Antwort. **(2.5 Punkte)**

5. Aufgabe: Grundlagen (7 Punkte)

5.1. In der Finite-Volumen-Methode wird folgende Vereinfachung verwendet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_k} T\left(x,y,t\right)dV \approx \frac{\partial T_k\left(t\right)}{\partial t}\left|V_k\right|. \tag{11}$$

Für welche Funktionen $T\left(x,y,t\right)$ ist diese Approximation exakt. Gehen Sie dabei von einem knotenzentrierten strukturierten Gitter aus. Begründen Sie Ihre Antwort.

(2 Punkte)

5.2. Gegeben sei die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{12}$$

Kann diese Gleichung in der Zeit mit dem Euler-rückwärts-Verfahren gelöst werden? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

5.3. Bei der Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit gegebenen Randbedingungen ist es häufig schwierig eine analytische Lösung zu finden. Daher wird die Gleichung diskretisiert und in ein lineares Gleichungssystem überführt. Die Lösung dieses Gleichungssystems führt auf eine Approximation der gesuchten Funktion. Dadurch erhält man eine approximierte Lösung. Was ist die Voraussetzung, dass diese Approximation gegen die analytische Lösung konvergiert? Welcher mathematische Satz garantiert dies? *(Hinweis: Bringen Sie zur Lösung die Begriffe Konsistenz und Stabilität in einen korrekten Zusammenhang.)* **(3 Punkte)**

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Sommersemester 2017

---

1. Aufgabe: Finite Differenzen (12,5 Punkte)

* Lösung *

1.1. Lösung:

$$T_{i-2} \approx T_i - 2\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=x_i} \Delta x + 2\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i} \Delta x^2 - \frac{4}{3}\,\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_i} \Delta x^3 + \frac{2}{3}\,\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\bigg|_{x=x_i} \Delta x^4 - \frac{4}{15}\,\frac{\partial^5 T}{\partial x^5}\bigg|_{x=x_i} \Delta x^5 + \frac{4}{45}\,\frac{\partial^6 T}{\partial x^6}\bigg|_{x=x_i} \Delta x^6 + \dots .$$

1.2. Lösung:

Taylorreihe (1) plus Taylorreihe1.1:

$$T_{i+2} + T_{i-2} \approx 2T_i + 4\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i} \Delta x^2 + \frac{4}{3}\,\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\bigg|_{x=x_i} \Delta x^4 + \frac{8}{45}\,\frac{\partial^6 T}{\partial x^6}\bigg|_{x=x_i} \Delta x^6 + \dots . \tag{1}$$

Gegebene Addition:

$$T_{i+1} + T_{i-1} \approx 2T_i + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i} \Delta x^2 + \frac{1}{12}\,\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\bigg|_{x=x_i} \Delta x^4 + \frac{1}{360}\,\frac{\partial^6 T}{\partial x^6}\bigg|_{x=x_i} \Delta x^6 + \dots . \tag{2}$$

Gleichung (1) - 16 x Gleichung (2):

$$T_{i+2} - 16T_{i+1} - 16T_{i-1} + T_{i-2} \approx -30T_i - 12\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i} \Delta x^2 + \frac{2}{15}\,\frac{\partial^6 T}{\partial x^6}\bigg|_{x=x_i} \Delta x^6 + \dots . \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} \approx \frac{-T_{i+2} + 16T_{i+1} - 30T_i + 16T_{i-1} - T_{i-2}}{12\Delta x^2} + \underbrace{\frac{1}{90}\left.\frac{\partial^6 T}{\partial x^6}\right|_{x=x_i} \Delta x^4}_{Abbruchfehler}. \tag{4}$$

(5)

Der Ausdruck ist 4. Ordnung genau.

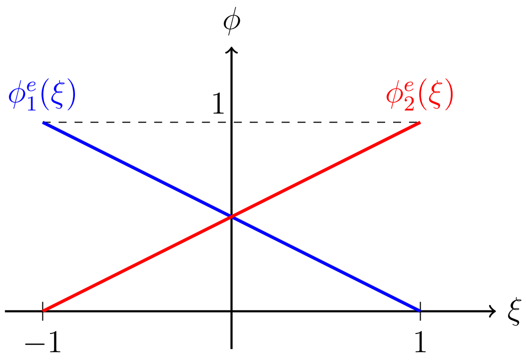
1.3. Lösung:

Jeder Differenzenausdruck ist nur eine Approximation der analytischen Ableitung an einer Stelle x_k. Es ergibt sich immer ein Fehler im Vergleich zum analytischen Wert. Die Genauigkeitsordnung gibt an, wie schnell dieser Fehler zu null geht, wenn man die Schrittweite Δx reduziert. Es gilt: $e \sim \Delta x^p$, wobei e der Fehler ist und p die Genauigkeitsordnung.

2. Aufgabe: Finite Elemente (11 Punkte)

* Lösung *

2.1. Lösung:



2.2. Lösung:

$$x(\xi) = \sum_{k=1}^{2} \phi_k^e(\xi) x_k \tag{6}$$

$$x(\xi) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi\right) \cdot 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi\right) \cdot 3 = 2 + \xi \tag{7}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 \tag{8}$$

2.3. Lösung:

$$\xi(x) = x - 2 \tag{9}$$

$$\phi_2(x) = \phi_1^e(\xi(x)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-2) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \tag{10}$$

$$\phi_3(x) = \phi_2^e(\xi(x)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-2) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \tag{11}$$

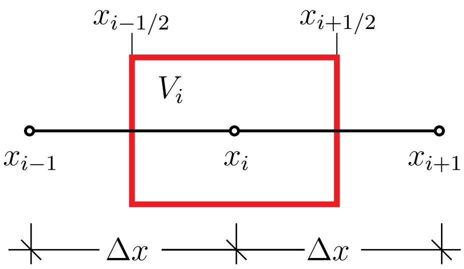
2.4. Lösung:

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{\partial\phi_2(x)}{\partial x}\frac{\partial\phi_3(x)}{\partial x}dx &= \int_1^3 \frac{\partial\phi_2(x)}{\partial x}\frac{\partial\phi_3(x)}{\partial x}dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\partial\phi_1^e(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\phi_2^e(\xi)}{\partial\xi}d\xi \left|\frac{\partial x}{\partial\xi}\right|_{El.2}^{-1} \\ &= -\frac{1}{2}(1)^{-1} = -0{,}5\end{aligned} \tag{12}$$

3. Aufgabe: Finite Volumen (10 Punkte)
* Lösung *

3.1. Lösung:

Kontrollvolumen:



3.2. Lösung:

Zur vollständigen Definition des Problems werden benötigt:

- Randbedingungen
- Anfangsbedingungen
- Definition des Rechengebiets

3.3. Lösung:

Integrale Form:

$$\int_{V_i} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx + \int_{V_i} a \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = 0 \tag{13}$$

Analytische Vereinfachung:

$$\int_{V_i} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx + a\phi \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} = 0 \tag{14}$$

3.4. Lösung:

Volumenmittelung:

$$\int_{V_i} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_i} \phi dx \approx \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \int_{V_i} dx = \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \Delta x \tag{15}$$

3.5. Lösung:

Flussdiskretisierung:

Ansatz: Mittelung

$$\begin{aligned} a\phi \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} &\approx a\left(\frac{\phi_{i+1}+\phi_i}{2} - \frac{\phi_i + \phi_{i-1}}{2}\right) \\ &= a\left(\frac{1}{2}\left(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}\right)\right) \end{aligned} \tag{16}$$

3.6. Lösung:

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} \Delta x + \frac{a}{2}\left(\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}\right) = 0 \tag{17}$$

Unbekannt sind alle Größen auf dem Zeitlevel t^{n+1}.

3.7. Lösung:

Im Gegensatz zu expliziten Verfahren ist das implizite Euler-Verfahren immer stabil.

3.8. Lösung:

Eine weitere Form der Volumenanordnung ist zellzentriert.

4. Aufgabe: Fehler (9.5 Punkte)

* Lösung *

4.1. Lösung:

1. Zentrale Differenzenverfahren.

2. Die Knotenoszillationen sind abhängig von der diskreten Pecletzahl und können durch ausreichend feine Diskretisierungen eliminiert werden.

Anmerkung: Ein Bezug auf zeitliche Disretisierungsverfahren wie das explizite Euler-Verfahren ist hier nicht gültig, da die Gleichung (7) *nicht zeitabängig ist!*

4.2. Lösung:

Durch Einsetzen der Taylorreihen erhält man den folgenden Abbruchfehler:

$$L - L_\Delta = -\frac{2\nu}{\Delta x^2}\phi_i - 2\nu\frac{\partial^2\phi}{\partial\phi^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \tag{18}$$

Mit Hilfe einer Grenzwertuntersuchung erhält man:

$$\lim_{\Delta x\to 0} ||L_\Delta - L|| = \left|\left|\underbrace{\mathcal{O}(\Delta x^2)}_{\to 0} - \underbrace{\frac{2\nu}{\Delta x^2}\phi_i}_{\infty} - \underbrace{2\nu\frac{\partial^2\phi}{\partial\phi^2}}_{konstant}\right|\right| = \infty \tag{19}$$

d.h. das Verfahren ist nicht konsistent.

4.3. Lösung: Der Abbruchfehler bezüglich der gegebenen Gleichung lautet:

$$L - L_\Delta = \mathcal{O}(\Delta x^2) - a\frac{\partial\phi}{\Delta x}. \tag{20}$$

Daraus folgt:

$$\underbrace{L + a\frac{\partial\phi}{\Delta x}}_{\hat{L}} - L_\Delta = \mathcal{O}(\Delta x^2). \tag{21}$$

und damit

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left|\left| \hat{L} - L_\Delta \right|\right| = 0. \tag{22}$$

Die resultierende Differentialgleichung lautet

$$\hat{L} = L + a\frac{\partial \phi}{\Delta x} = 2a\frac{\partial \phi}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0. \tag{23}$$

5. Aufgabe: Grundlagen (7 Punkte)

* Lösung *

5.1. Lösung: Die gegebene Approximation ist für konstante Funktionen in x, y und t und lineare Funktionen in x und y exakt.

5.2. Lösung: Da es sich um eine zweite Ableitung in der Zeit handelt, kann das Euler-rückwärts-Verfahren nicht verwendet werden. Es approximiert nur die erste Ableitung. *Ebenfalls richtig wäre die Aussage, dass die Gleichung zunächst in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung überführt werden muss.*

5.3. Lösung: Der Satz von Lax besagt, dass aus Konsistenz und Stabilität Konvergenz folgt .