

Schriftliche Prüfung: Aufgaben des AVT-Teils. Jeder Punkt entspricht 1 Minute.

Simulationstechnik

Sommersemester 2019

1. Aufgabe: Fragen (19 Punkte)

1.1. Nennen Sie die in der Vorlesung genannten Fachbegriffe für die beiden Vorgänge, bei dem a) das System in elementare Systeme zerlegt, bzw. b) es durch diese zusammengesetzt wird. (1 Punkt)

1.2. Geben Sie die allgemeine Form einer nichtlinearen zeitvarianten Zustandsraumdarstellung aus der Vorlesung an. (1,5 Punkte)

1.3. Formen Sie das zeitvariante System (1) in ein zeitinvariantes System um.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= t \sin(3x_2) \\ \dot{x}_2 &= 0,5 \exp(x_1 x_2) \\ y &= 0,5x_1 + x_1^2\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}x_1(t_0) &= x_{1,0} \\ x_2(t_0) &= x_{2,0}\end{aligned}$$

(2 Punkte)

1.4. Gegeben sei das konzentrierte System (2).

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot u(t) \\ \text{mit } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \alpha + 2 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ und } \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{2}$$

Schriftliche Prüfung Simulationstechnik (SS 2019)

- Was ist die allgemeine Bedingung für die Existenz einer eindeutigen Ruhelage von System (2) für den Fall, dass $u(t) = \text{const.}$ ist? Geben Sie für diesen Fall den Wertebereich von α an.
- Analysieren Sie nun in Abhängigkeit von $u(t)$ den Fall, dass keine eindeutige Ruhelage existiert.
- Für den Fall, dass genau eine Ruhelage existiert, geben Sie die Stabilitätseigenschaften in Abhängigkeit von α an.
- Ist das System schwingungsfähig? Begründen Sie.

(6 Punkte)

- 1.5.** Sind die beiden dargestellten Trajektorien in Abb. 1 für die zwei unterschiedlichen Anfangswerte x_a und x_b des gleichen zeitinvarianten Zustandsraummodells mit den Zuständen $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ mit jeweils gleichen Eingängen und Parametern möglich? Begründen Sie kurz.

(1 Punkt)

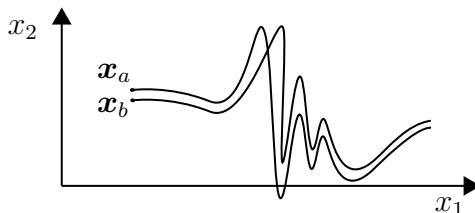


Abbildung 1: Trajektorien für unterschiedliche Anfangswerte.

- 1.6.** Gegeben sei die Modellgleichung (3) und die in Tabelle 1 angegeben Messwerte $\tilde{y}(t_k)$ eines dynamischen Systems.

$$y(t, \mathbf{p}) = p_1 t + \sin(p_2 t) \quad (3)$$

t_k	$\tilde{y}(t_k)$
0,5	0,50
1	0,98
2	1,84

Tabelle 1: Messwerte

Beweisen Sie, dass die Parameterwerte $p_1 = 2$ und $p_2 = 1$ keine optimale Lösungen des Parameterschätzproblems nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate sein kann. Stellen Sie dazu zunächst die Gütfunktion des Parameterschätzproblems auf. Verwenden Sie anschließend für den Beweis die notwendige Bedingung des Parameterschätzproblems.

Hinweis: Verwenden Sie für die Berechnung der trigonometrischen Funktionen das Bogenmaß (rad).

(7,5 Punkte)

2. Aufgabe: Systemtheorie (19,5 Punkte)

Gegeben sei das nichtlineare Differentialgleichungssystem (**NLS**):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t)(1 - x_1(t)^2 - x_2(t)^2) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t)(1 - x_1(t)^2 - x_2(t)^2) + x_1(t)\end{aligned}\quad (\text{NLS})$$

- 2.1.** Zeigen Sie, dass es sich bei $\mathbf{x}_R = (0 \ 0)^T$ um eine Ruhelage des Systems handelt.
(1 Punkt)

- 2.2.** Sie möchten mit Hilfe einer geeigneten Ljapunow-Funktion $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto V(\mathbf{x})$ die Stabilitätseigenschaften der Ruhelage $\mathbf{x}_R = (0 \ 0)^T$ untersuchen.

- a) Welche Eigenschaften müssen die Funktionen $V(\mathbf{x})$ und $\frac{dV}{dt}|_{\mathbf{x}(t)}$ mindestens aufweisen, damit globale Stabilität der Ruhelage gezeigt werden kann?
b) Wie prüfen Sie die Funktionen auf diese Eigenschaften? Geben Sie die Bedingungen an, welche erfüllt sein müssen.
(4 Punkte)

- 2.3.** Da es Ihnen nicht gelingt, eine geeignete Ljapunow-Funktion zu finden, versuchen Sie nun das Systemverhalten in der Nähe der Ruhelage $\mathbf{x}_R = (0 \ 0)^T$ durch Linearisierung zu klassifizieren.

- a) Geben Sie eine Linearisierung des oben genannten Systems um den allgemeinen Punkt $\mathbf{x}^* = (x_1^* \ x_2^*)^T$ an. Geben Sie die auftretenden Terme explizit an.
b) Wie lautet die Systemmatrix \mathbf{A} des um die Ruhelage $\mathbf{x}_R = (0 \ 0)^T$ linearisierten Systems?
c) Zeigen Sie mithilfe der Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} , dass die Ruhelage des linearisierten Systems instabil ist. Zeigen Sie ebenfalls, dass das System schwingungsfähig ist.
d) Begründen Sie, dass in diesem Fall eine Betrachtung der Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} ausreicht, um lokal die Dynamik des nichtlinearen Systems eindeutig abzubilden.
(8 Punkte)

- 2.4.** Für $t \rightarrow \infty$ strebt das nichtlineare System bei beliebigen Anfangswerten $\mathbf{x}(0)$ stets gegen eine periodischen Lösung. Der Zustand $\mathbf{x}(t)$ bewegt sich dabei auf einer Kreisbahn K mit Radius 1 um den Ursprung, d.h. $K = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1(t)^2 + x_2(t)^2 = 1\}$.

Schriftliche Prüfung Simulationstechnik (SS 2019)

(a) Zeigen Sie, dass Trajektorien $\mathbf{x}(t)$, die die Menge K erreichen, diese nicht mehr verlassen können. Zeigen Sie dazu, dass für Punkte auf dem Kreis gilt, dass $\mathbf{x}(t)$ und $\dot{\mathbf{x}}(t)$ senkrecht zueinander stehen.

(b) Geben Sie die Geschwindigkeit $\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|_2$ an, mit der sich $\mathbf{x}(t)$ auf K bewegt.

Hinweis 1: Zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ stehen senkrecht zueinander falls das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ ist.

Hinweis 2: Für die euklidische Norm des Vektors $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

(3,5 Punkte)

2.5. Skizzieren Sie basierend auf den Ergebnissen der vorherigen Aufgaben die Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ für $t \in [0; \infty)$ für die unten stehenden Anfangswerte $\mathbf{x}(0)$. Sie dürfen dabei von der Gültigkeit der in Aufgabenteil 2.3 und 2.4 zu zeigenden Aussagen ausgehen.

a) $\mathbf{x}(0) = (0, 25 \ 0, 25)^T$

b) $\mathbf{x}(0) = (1, 5 \ 1, 5)^T$ **(3 Punkte)**

3. Aufgabe: Strukturierte Systeme (21 Punkte)

3.1. Nennen Sie zwei Vorteile der Modellierung durch strukturierte Systeme. (1 Punkt)

3.2. Nennen Sie je eine mathematische Gleichung für die Verkopplung von

- a) zwei Flussvariablen FV_1 und FV_2 ,
- b) zwei Potentialvariablen PV_1 und PV_2 .
- c) Nennen Sie je ein Beispiel für Flussvariablen und Potentialvariablen in mechanischen Systemen.

(2 Punkte)

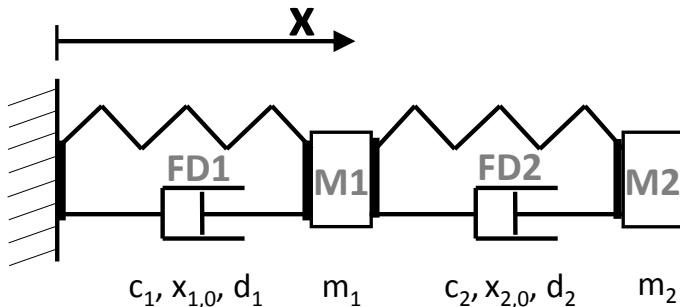


Abbildung 2: Federdämpfer-Masse-System.

Gegeben sei ein Federdämpfer-Masse-System, das in einer Wand verankert ist. Es besteht aus zwei Massepunkten, M_1 und M_2 , mit Massen m_1 und m_2 und zwei masselosen Federdämpfern, FD_1 und FD_2 , mit Federkonstanten c_1 und c_2 , Dämpfungskonstanten d_1 und d_2 und unausgelenkten Federlängen $x_{1,0}$ bzw. $x_{2,0}$ (s. Abb. 2). Nachfolgend wird nur die x -Koordinatenrichtung betrachtet. Der Koordinatenursprung liegt an der Wand (s. Abb. 2). Beachten Sie die Vorzeichenkonvention aus der Vorlesung.

3.3. a) Welche Teilsysteme sollten als Speichersysteme, welche als Verknüpfungssysteme modelliert werden? Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Zeichnen Sie das Federdämpfer-Masse-System aus Abb. 2 als Aggregation einzelner Teilsysteme. Machen Sie Schnittstellen und Verkopplungen zwischen Teilsystemen und zur Umgebung deutlich. (5 Punkte)

3.4. Schreiben Sie zunächst den Modelica-Code für den Konnektor Anschluss, welcher eine resultierende Kraft F , die Geschwindigkeit v sowie die Position x zwischen den Modellen Masse und Federdaempfer übergibt. (2,5 Punkte)

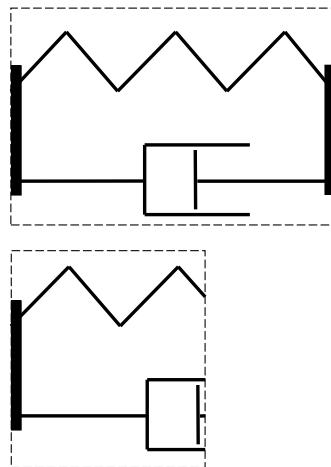


Abbildung 3: Ganzer (oben) und geschnittener (unten) Federdämpfer. Gestrichelte Linien zeigen die Systemgrenze.

3.5. Abb. 3 zeigt einen freigeschnittenen Federdämpfer im Ganzen (oben) und geschnitten (unten). Tragen Sie in beiden Zeichnungen (oben und unten) die wirkenden Schnittkräfte ein, die für die Modellierung in Modelica benötigt werden.

Hinweis: Sie dürfen hier ausnahmsweise in die Aufgabenstellung schreiben.

(2,5 Punkte)

3.6. Gegeben ist der folgende unvollständige Code für das Modell Federdaempfer. Implementieren Sie darin die Federkraft und die Dämpfungskraft mit allen dafür notwendigen Deklarationen und (Bilanz-)gleichungen. Ergänzen Sie zwei Konnektoren, an1 und an2, vom Typ Anschluss und stellen Sie sicher, dass alle notwendigen Größen an die Konnektoren übergeben werden.

Hinweis: Schreiben Sie nicht in die Aufgabenstellung. Ordnen Sie Ihren Code eindeutig den Stellen (1) und (2) zu. Falls Sie die Modelica-Einheitenbezeichnungen nicht kennen, benutzen Sie einen generischen Typ.

Hinweis: Die Dämpfungskraft eines Federdämpfers hängt proportional von seiner Geschwindigkeit ab, wobei der Proportionalitätsfaktor der Dämpfungskonstante d entspricht.

(7 Punkte)

```
1 | model Federdaempfer
2 | import Modelica.SIunits.*;
3 | parameter TranslationalSpringConstant c "Federkonstante";
4 | parameter TranslationalDampingConstant d
```

Schriftliche Prüfung Simulationstechnik (SS 2019)

```
    "Daempfungskonstante";  
5 parameter Length x_0 "unausgelenkte Federlaenge";  
6 //fehlender Code (1)  
7 equation  
8 //fehlender Code (2)  
9 end Federdaempfer;
```

3.7. Aus den Teilmodellen soll ein Gesamtmodell erstellt werden. Dazu wurden zwei Objekte vom Typ Federdaempfer namens FD1 und FD2, sowie ein Objekt vom Typ Masse namens M1 erstellt. Das Modell Masse verfügt ebenfalls über zwei Konnektoren vom Typ Anschluss namens A1 und A2. Schreiben Sie die Modelica-Befehle, mit denen Sie die Masse mit den Federdämpfern verknüpfen.

Hinweis: Schreiben Sie lediglich die geforderten Modelica-Befehle auf; der resultierende Code muss kein vollständiges Gesamtmodell ergeben. **(1 Punkt)**

4. Aufgabe: Diskrete Systeme (20,5 Punkte)

4.1. In Abb. 4 sollen qualitative Diskretisierungen von kontinuierlichen Systemen eingezeichnet werden. Der Verlauf mit kontinuierlicher Zeit und kontinuierlichen Werten ist in Abb. 4 (1) eingezeichnet. Das Gitter in (2)-(4) stellt die Diskretisierungen dar.

Zeichnen Sie den Verlauf aus (1):

- in (2) mit diskretisierter Zeit und kontinuierlichen Werten,
- in (3) mit kontinuierlicher Zeit und diskretisierten Werten und
- in (4) mit diskretisierter Zeit und diskretisierten Werten.

Hinweis: Nutzen Sie das vorgegebene Diskretisierungsgitter. Sie dürfen hier ausnahmsweise in die Aufgabenstellung schreiben.

(3 Punkte)

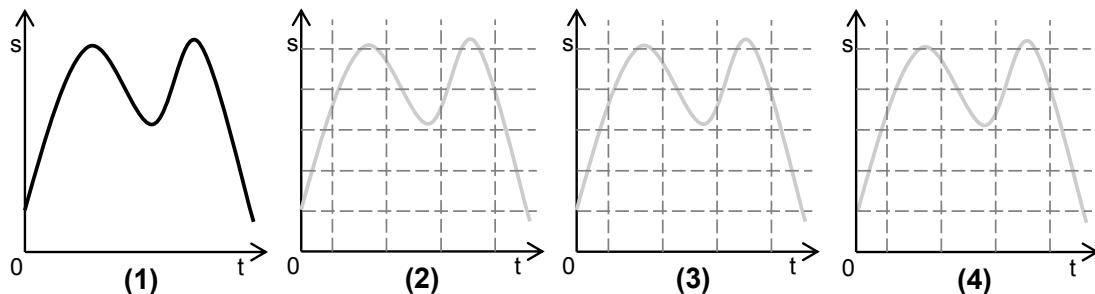


Abbildung 4: Qualitative Diskretisierungen

In Abb. 5 ist ein einfaches Petri-Netz gegeben, welches im Ausgangszustand einen Token auf P_1 und zwei Token auf P_5 aufweist.

4.2. Bestimmen Sie mit *kurzer* Begründung, ob das Petri-Netz in Abb. 5

- lebendig,
- beschränkt ist.

(2 Punkte)

4.3. Ist die Markierung $s = \{0, 1, 1, 1, 3\}$ in dem Petri-Netz in Abb. 5 erreichbar? Begründen Sie Ihre Antwort *kurz* (ohne Rechnung). (1 Punkt)

4.4. Es werden nacheinander die Transitionen t_1, t_2, t_1 und t_3 im Petri-Netz aus Abb. 5

Schriftliche Prüfung Simulationstechnik (SS 2019)

geschaltet. Geben Sie nach jedem Schaltvorgang an, wieviele Token auf den Knoten P_2 , P_3 und P_5 liegen. **(3 Punkte)**

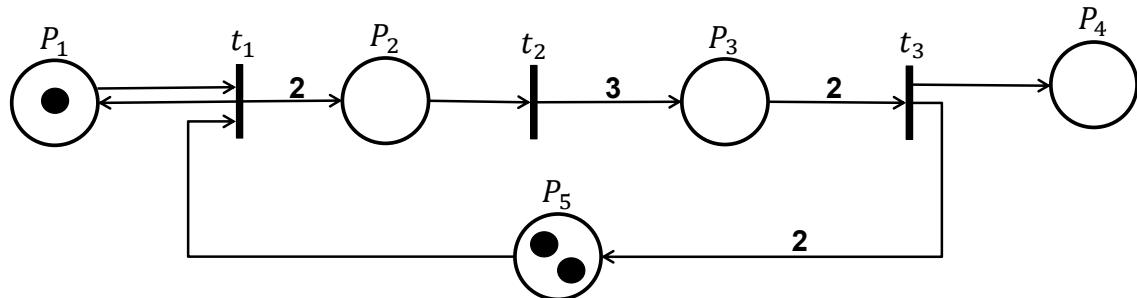


Abbildung 5: Einfaches Petri-Netz

In Abb. 6a ist ein Schaltkreis mit einer eingebauten idealen Diode und einem Widerstand gegeben. Abb. 6b zeigt die Diodenkennlinie. Für $u_D \geq u_S$ ist die Diode im Flussbetrieb, das bedeutet $i > 0$. Für $u_D < u_S$ ist die Diode im Sperrbetrieb, das bedeutet $i = 0$. Betrachten Sie u_0 der Spannungsquelle als variablen Eingang des Systems.

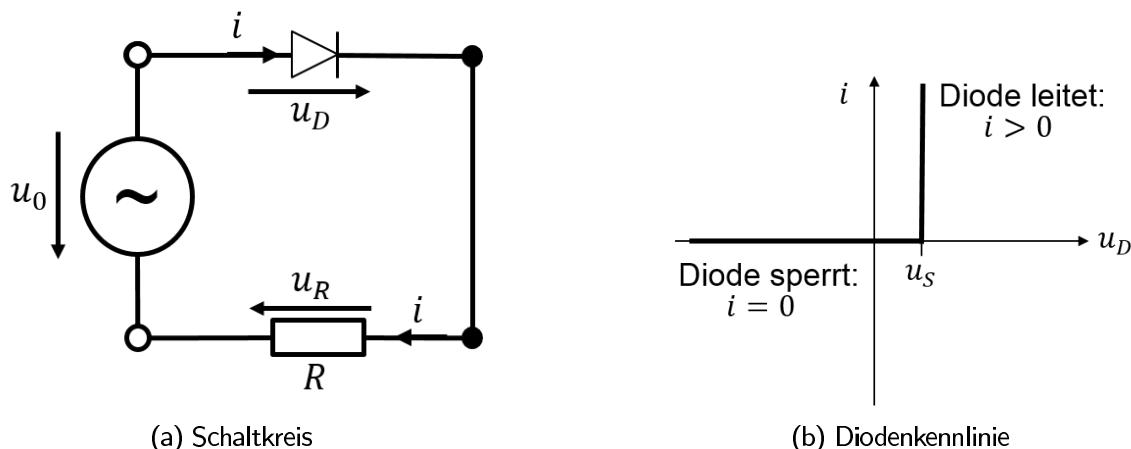


Abbildung 6: Schaltkreis und Diodenkennlinie

4.5. Modellieren Sie den in Abb. 6a dargestellten Schaltkreis als hybriden Automaten. Geben Sie die entsprechenden Transitions- und Sprungbedingungen aller Kanten an und benennen Sie die Moden und Kanten sinnvoll. *Hinweis: Verwenden Sie für das Modell die Modellgleichungen (4) bis (5).* **(5 Punkte)**

$$u_0 - u_D - u_R = 0 \quad (4)$$

$$u_R = R \cdot i \quad (5)$$

4.6. Der hybride Automat aus Aufgabenteil 4.5 soll nun in Modelica implementiert werden. Ergänzen Sie den unten gegebenen Code für $R = 12 \Omega$ und $u_S = 0,5 \text{ V}$.

```
1 model DiodenSchaltkreis
2   import Modelica.SIunits.*;
3   import Modelica.Math.*;
4   // fehlender Code (A) ...
5 equation
6   // fehlender Code (B) ...
7 end DiodenSchaltkreis;
```

Hinweis: Schreiben Sie nicht in die Aufgabenstellung. Ordnen Sie Ihren Code eindeutig den Stellen (A) und (B) zu. Falls Sie die Modelica-Einheitenbezeichungen nicht kennen, benutzen Sie einen generischen Typ. **(6,5 Punkte)**

5. Aufgabe: Numerische Integration (20 Punkte)

Sie haben bei Ihrer experimentellen Arbeit vergessen, das Ventil einer Gasflasche zu schließen und reiner Sauerstoff strömt aus der unter Druck stehenden Flasche in die Umgebung (Abb. 7). Sie kennen die (konstanten) Stoffdaten von Sauerstoff (spezifische Enthalpie h_{O_2} , spezifische Gaskonstante R_{O_2} , Dichte ρ_{O_2} und Temperatur T_{O_2}) sowie den Ventilströmungsquerschnitt A_V , den Umgebungsdruck p_U und das Flaschenvolumen V_F (Tabelle 2).

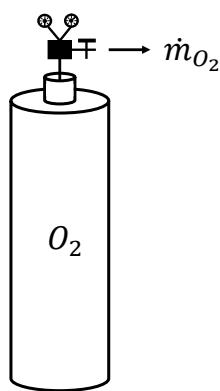


Abbildung 7: Schematische Darstellung der Gasflasche

Parameter	Wert	Einheit
h_{O_2}	100	J/(kg)
R_{O_2}	260	J/(kg K)
ρ_{O_2}	1	kg/m ³
T_{O_2}	300	K
A_V	10^{-5}	m ²
p_U	10^5	Pa
V_F	10	l

Tabelle 2: Systemparameter

5.1.

- a) Wie lautet die allgemeine thermodynamische Bilanzgleichung? Definieren Sie alle auftretenden Variablen.
b) Stellen Sie eine Energiebilanz um das System Gasflasche auf. (4 Punkte)

- 5.2. Berechnen Sie mit Hilfe des idealen Gasgesetzes die Sauerstoffmasse m_{O_2} zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, bei dem in der Flasche ein Druck von $p_{O_2}|_{t_0} = 2 \cdot 10^7$ Pa herrscht. (2 Punkte)

Mit Hilfe von Gleichung 6 können Sie die zeitliche Änderung von m_{O_2} in der Flasche berechnen.

$$\frac{dm_{O_2}(t)}{dt} = -A_V \cdot \sqrt{2\rho_{O_2} \cdot \left(\frac{m_{O_2}(t) \cdot T_{O_2} \cdot R_{O_2}}{V_F} - p_U \right)} \quad (6)$$

- 5.3. Berechnen Sie unter Anwendung des expliziten Euler-Verfahrens die Masse m_{O_2} zum Zeitpunkt $t = 10$ s

Schriftliche Prüfung Simulationstechnik (SS 2019)

- a) für die Schrittweite $\Delta t_a = 10$ s und
- b) für die Schrittweite $\Delta t_b = 5$ s.

Hinweis: Falls Sie Teilaufgabe 5.2 nicht lösen konnten, gehen Sie von $m_{O_2}|_{t_0} = 2$ kg aus.
(3 Punkte)

5.4. Illustrieren Sie das explizite Euler-Verfahren graphisch anhand eines Euler-Schrittes.
Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung Ihrer Zeichnung. **(3,5 Punkte)**

5.5. Sie simulieren ihr System mit dem expliziten Euler-Verfahren mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t_c = 20$ s, erhalten so jedoch einen großen Fehler. Geben Sie die Formel an, mit der Sie allgemein den lokalen Fehler zweiter Ordnung abschätzen können. Wie groß müssen Sie die Zeitschrittweite wählen, um den lokalen Fehler im ersten Euler-Schritt um den Faktor 100 zu reduzieren?

(3,5 Punkte)

5.6. Geben Sie die allgemeine Berechnungsvorschrift für das implizite Euler-Verfahren an.
Nennen Sie jeweils einen Vorteil und einen Nachteil des impliziten Euler-Verfahrens.

(2,5 Punkte)

5.7. Wodurch sind steife Differentialgleichungssysteme charakterisiert? Nennen Sie ein in der Vorlesung vorgestelltes Beispiel für ein steifes Differentialgleichungssystem.

(1,5 Punkte)

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik

Sommersemester 2019

1. Aufgabe: Fragen (19 Punkte)

* Lösung *

1.1. Lösung:

- a) Dekomposition (0,5 TP)
- b) Aggregation (0,5 TP)

Bewertung: Siehe oben. (1 Punkt)

1.2. Lösung:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, t) \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, t) \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (2)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (3)$$

Bewertung: Siehe oben. Die Zeitabhängigkeit von \mathbf{x} und \mathbf{u} muss nicht explizit angegeben werden. (1,5 Punkte)

1.3. Lösung: Durch Einführen der Zusatzvariable $\dot{x}_3 = \frac{dx_3}{dt} \Big|_t = 1$ kann das zeitvariante System in ein zeitinvariantes System umgewandelt werden:

$$\dot{x}_1 = x_3 \sin(3x_2) \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (4)$$

$$\dot{x}_3 = 1 \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (5)$$

Musterlösung Simulationstechnik (SS 2019)

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_2 = 0,5 \exp(x_1 x_2) \\ y = 0,5 x_1 + x_1^2 \\ x_{1,0} = \bar{x}_{1,0} \\ x_{2,0} = \bar{x}_{2,0} \\ x_{3,0} = t_0 \end{array} \right\} \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (6)$$

$$x_{3,0} = t_0 \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (7)$$

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

1.4. Lösung:

- a) Eine eindeutige Ruhelage existiert dann und nur dann, wenn A vollen Rang hat (alternativ: $\det(A) \neq 0$ oder A muss invertierbar sein) (0,5 TP). A hat vollen Rang, wenn $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$ (0,5 TP) ist.
- b) Wir betrachten nun den Fall, dass A keinen vollen Rang hat d.h. $\det(A) = 0 \Rightarrow \alpha \in \{-2, 0\}$. Um zu ermitteln, ob es in diesem Fall keine oder mehrere stationäre Lösungen gibt, muss eine weitere Fallunterscheidung vorgenommen werden:

Fall 1: $u(t) = u_R = 0 \Rightarrow$ Es existieren unendlich viele stationäre Lösungen. (0,5 TP)

Fall 2: $u(t) = u_R \neq 0 \Rightarrow$ Es existiert keine stationäre Lösung. (0,5 TP)

- c) Es wird nun die Stabilität der eindeutigen Ruhelage ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$) mithilfe des Eigenwertproblems untersucht:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (1 \text{ TP}) \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 2 - \lambda)(\alpha - \lambda) = 0 \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \alpha + 2 \vee \lambda_2 = \alpha \quad (1 \text{ TP}) \quad (10)$$

Damit folgt:

Fall 1.1 $\alpha < -2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \leq 0 \Rightarrow$ Die Ruhelage ist stabil (0,5 TP).

Fall 1.2 $\alpha > -2 \Rightarrow \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ Die Ruhelage ist instabil (0,5 TP).

- d) Nein (0,5 TP), da die Eigenwerte reell sind (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(6 Punkte)**

1.5. Lösung: Nein (0,5 TP), da Trajektorien sich für verschiedene Anfangswerte nicht schneiden (0,5 TP) dürfen.

Bewertung: Siehe oben. (1 Punkt)

1.6. Lösung: Die Gütfunktion des Parameterschätzproblems nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate lautet für die angegebene Modellgleichung:

$$J(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^n (\mathbf{y}(\mathbf{p}, t, \tilde{u}_k) - \tilde{\mathbf{y}}_k)^2 \quad (0,5 \text{ TP}) \quad (11)$$

$$= \sum_{k=1}^3 [p_1 t_k + \sin(p_2 t_k) - \tilde{y}(t_k)]^2 \quad (1 \text{ TP}) \quad (12)$$

Die notwendige Bedingung für ein Minimum der Gütfunktion ist das die Ableitung nach den Parameter \mathbf{p} null ist. Die notwendige Bedingung lautet also:

$$\frac{dJ}{d\mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (1 \text{ TP}) \quad (13)$$

Es folgt:

$$\frac{dJ}{d\mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial p_1} \\ \frac{\partial J}{\partial p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^3 2t_k [p_1 t_k + \sin(p_2 t_k) - \tilde{y}_k] \\ \sum_{k=1}^3 2t_k \cos(p_2 t_k) [p_1 t_k + \sin(p_2 t_k) - \tilde{y}_k] \end{bmatrix} \quad (2 \text{ TP}) \quad (14)$$

Einsetzen der Messwerte und der gegebenen Parameter liefert:

$$\frac{dJ}{d\mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0,98 + 3,72 + 12,28 \\ 0,86 + 2,01 - 5,11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,98 \\ -2,24 \end{bmatrix} \quad (2 \text{ TP}) \quad (15)$$

Da $\frac{dJ}{d\mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$ (0,5 TP), können die gegebenen Parameter nicht die Lösung des Parameterschätzproblems sein (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. Zum Erreichen der vollen Punktzahl genügt auch der Nachweis, dass $\frac{\partial J}{\partial p_1} \neq 0$ oder $\frac{\partial J}{\partial p_2} \neq 0$ ist. (7,5 Punkte)

2. Aufgabe: Systemtheorie (19,5 Punkte)

* Lösung *

2.1. Lösung: Für die Ruhelage \mathbf{x}_R muss gelten, dass $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Dies lässt sich durch Einsetzen des Punktes $(0 \ 0)^T$ in das Differentialgleichungssystem nachweisen.

$$x_{R,1}(1 - x_{R,1}^2 - x_{R,2}^2) - x_{R,2} = 0 \cdot (1 - 0^2 - 0^2) - 0 = 0 \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$x_{R,2}(1 - x_{R,1}^2 - x_{R,2}^2) + x_{R,1} = 0 \cdot (1 - 0^2 - 0^2) - 0 = 0 \quad (0,5 \text{ TP})$$

Bewertung: Siehe oben.

(1 Punkt)

2.2. Lösung:

a) Um gemäß dem Theorem nach Ljapunow globale Stabilität zu zeigen, muss $V(\mathbf{x})$ eine unbeschränkte, positiv definite Funktion (0,5 TP) und $\frac{dV}{dt}|_{\mathbf{x}(t)}$ eine negativ semi-definite Funktion (0,5 TP) auf \mathbb{R}^2 (0,5 TP) sein.

b) Für $V(\mathbf{x}(t))$ ist zu zeigen, dass gilt:

(i) $V(\mathbf{0}) = 0$ (0,5 TP)

(ii) $V(\mathbf{x}) > 0$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ (0,5 TP)

(iii) $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, für $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ (0,5 TP)

Für $\frac{dV}{dt}|_{\mathbf{x}(t)}$ ist zu zeigen, dass gilt:

(i) $\frac{dV}{dt}|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{0}} = 0$ (0,5 TP)

(ii) $\frac{dV}{dt}|_{\mathbf{x}(t)} \leq 0$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ (0,5 TP)

Bewertung: Siehe oben.

(4 Punkte)

2.3. Lösung:

Musterlösung Simulationstechnik (SS 2019)

a) Die Linearisierung um den Punkt $\mathbf{x}^* = (x_1^* \ x_2^*)^T$ ist die Taylorentwicklung bei Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung und lautet daher:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^*(1 - x_1^{*2} - x_2^{*2}) - x_2^* \\ x_2^*(1 - x_1^{*2} - x_2^{*2}) + x_1^* \end{pmatrix}}_{1 \text{ TP}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -3x_1^{*2} - x_2^{*2} + 1 & -2x_1^*x_2^* - 1 \\ -2x_1^*x_2^* + 1 & -x_1^{*2} - 3x_2^{*2} + 1 \end{pmatrix}}_{2 \text{ TP}} \begin{pmatrix} x_1(t) - x_1^* \\ x_2(t) - x_2^* \end{pmatrix}.$$

b) Die Systemmatrix ergibt sich durch Einsetzen von $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_R = (0 \ 0)^T$ in die soeben aufgestellte Jacobi-Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 0^2 - 0^2 + 1 & -2 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \\ -2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 & -0^2 - 3 \cdot 0^2 + 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{2 \text{ TP}}.$$

c) Die Eigenwerte von \mathbf{A} lösen die charakteristische Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Dies führt zu der quadratischen Gleichung

$$(1 - \lambda)^2 + 1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad (1 - \lambda)^2 = -1 \quad (0,5 \text{ TP}).$$

Die Eigenwerte lauten daher

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i \quad (0,5 \text{ TP}).$$

Da $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$, ist das um die Ruhelage linearisierte System instabil (0,5 TP). Da die Eigenwerte komplex-konjugiert sind, ist das System darüber hinaus schwingungsfähig (0,5 TP).

Musterlösung Simulationstechnik (SS 2019)

d) Gemäß des Satzes von Hartmann-Grobmann können die Dynamiken des linearisierten Systems lokal auf die des nichtlinearen Systems abgebildet werden, wenn A keinen Eigenwert mit Realteil 0 hat (0,5 TP). Dies ist hier erfüllt, daher reicht die Betrachtung des linearisierten Systems aus (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben.

(8 Punkte)

2.4. Lösung:

(a) Wir berechnen die Ableitung $\dot{x}_K(t)$ eines beliebigen Punktes $x_K(t)$ auf der Kreisbahn K , d.h. mit $x_K(t) \in K = \{x(t) \in \mathbb{R}^2 | x_1(t)^2 + x_2(t)^2 = 1\}$. Dabei nutzen wir die aus der Definition der Menge K folgende Gleichung: $1 - x_{K,1}(t)^2 - x_{K,2}(t)^2 = 0$.

$$\dot{x}_K(t) = \begin{pmatrix} x_{K,1}(t) \cdot 0 - x_{K,2}(t) \\ x_{K,2}(t) \cdot 0 + x_{K,1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{K,2}(t) \\ x_{K,1}(t) \end{pmatrix} \quad (1,5 \text{ TP})$$

Dieser „Richtungs“-Vektor $\dot{x}_K(t)$ steht senkrecht auf dem „Orts“-Vektor x_K . Gezeigt werden kann das durch das Skalarprodukt.

$$\begin{pmatrix} -x_{K,2}(t) \\ x_{K,1}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{K,1}(t) \\ x_{K,2}(t) \end{pmatrix} = -x_{K,2}(t)x_{K,1}(t) + x_{K,1}(t)x_{K,2}(t) = 0 \quad (1 \text{ TP})$$

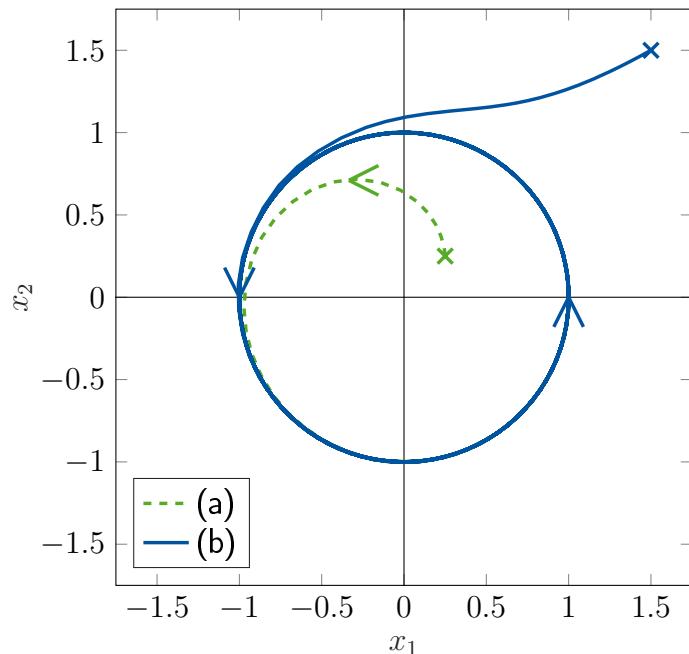
Dies entspricht genau der Definition einer Kreisbewegung.

(b) Zur Berechnung von $\|\dot{x}_K(t)\|_2$ wird erneut die Beziehung $x_{K,1}(t)^2 + x_{K,2}(t)^2 = 1$ aus der Definition von K verwendet.

$$\|\dot{x}_K(t)\|_2 = \left| \sqrt{(-x_{K,2}(t))^2 + x_{K,1}(t)^2} \right| = \left| \sqrt{1} \right| = 1 \quad (1 \text{ TP})$$

Bewertung: Siehe oben.

(3,5 Punkte)



2.5. Lösung: Beim Skizzieren des Phasenporträts machen wir uns die zuvor gezeigten Aussagen zunutze. Insbesondere verwenden wir die Tatsachen, dass ...

- (i) ... sich die Ruhelage lokal wie ein instabiler Fokus verhält.
- (ii) ... für große t stets die Kreisbahn K als periodische Lösung angestrebt wird.

Durch Einsetzen eines Punktes auf der Kreisbahn kann die Drehrichtung bestimmt werden, z.B. zeigt der „Richtungs“-Vektor an der Stelle $(1 \ 0)^T$ nach $(0 \ 1)^T$. Die Kreisbahn wird also gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen.

Bewertung: 0,5 TP für das korrekte Einzeichnen der periodischen Lösung für große t ; 0,5 TP für die Drehrichtung sowie jeweils 1 TP für qualitatives Einzeichnen der beiden Trajektorien (Startpunkte, Richtung, Annäherung an die Kreisbahn, etc.).

(3 Punkte)

3. Aufgabe: Strukturierte Systeme (21 Punkte)

* Lösung *

3.1. Lösung: Nennung von zwei der im Folgenden genannten Vorteile:

- Einfache Aggregation von Teilsystemen
- Gesamtsystem kann vom Computer aus Modellen der Teilsysteme erzeugt werden
- Klare Schnittstellen-Definition
- Leichte Austauschbarkeit
- Leichte Wiederverwendbarkeit z.B. durch Aufbau von Bibliotheken

Bewertung: 0,5 TP für jeden richtigen Vorteil. (1 Punkt)

3.2. Lösung:

- a) Flussvariable: $FV_1 + FV_2 = 0$ 0,5 TP
b) Potentialvariable: $PV_1 = PV_2$ 0,5 TP
c) Beispiel Flussvariable: Kräfte, Momente 0,5 TP

Beispiel Potentialvariable: Position, Auslenkung bei starren Verbindungen 0,5 TP

Bewertung: Siehe oben. Es reicht Nennung eines Beispiels in c). (2 Punkte)

3.3. Lösung:

a) Das Teilsystem *Masse* wird als Speichersystem (0,5 TP) modelliert, da es

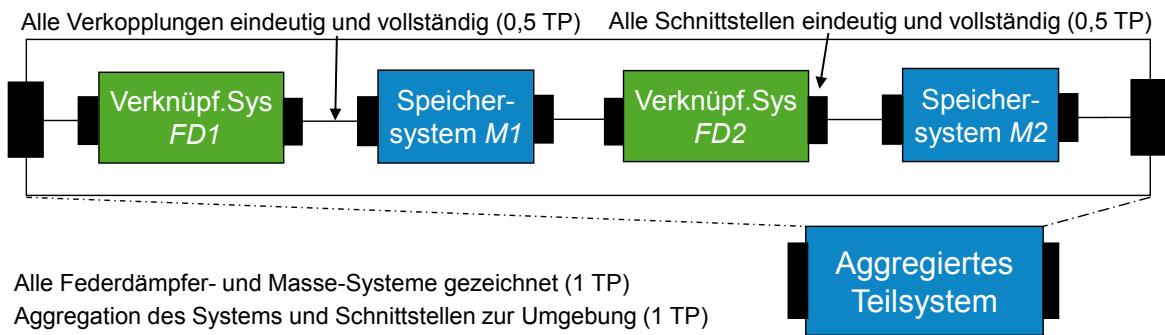
- extensiven Größen speichert, z.B. Masse
- durch Bilanzgleichungen beschrieben werden kann
- eigene Zustände besitzt (0,5 TP)

Das Teilsystem *Federdämpfer* wird als Verknüpfungssystem (0,5 TP) modelliert, da es

- keine extensiven Größen speichert, z.B. masselos ist
- keine eigenen Zustände besitzt (0,5 TP)

b)

Musterlösung Simulationstechnik (SS 2019)



Bewertung: Siehe oben. In Aufgabenteil a) reicht die Nennung von einem Grund aus.

(5 Punkte)

3.4. Lösung:

```
connector Anschluss
import Modelica.SIunits.*;
flow Force F;
Velocity v;
Position x;
end Anschluss;
```

Bewertung: Die richtige Struktur (inkl. aller Variablen vorhanden) gibt 1 TP. Jede richtigen Entscheidung für bzw. gegen flow gibt 0,5 TP. **(2,5 Punkte)**

3.5. Lösung:

Bewertung: 0,5 TP für jede richtig eingetragene Kraft. Alle Kräfte müssen in positive Koordinatenrichtung eingetragen werden (s. Aufgabenstellung). **(2,5 Punkte)**

3.6. Lösung:

fehlender Code (1)

```
| Anschluss an1; //0,5 TP
```

Musterlösung Simulationstechnik (SS 2019)

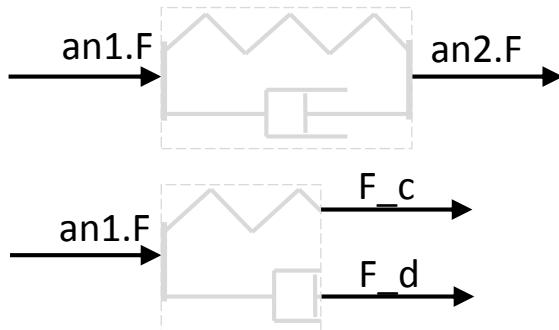


Abbildung 1: Ganzer (oben) und geschnittener (unten) Federdämpfer. Gestrichelte Linien zeigen die Systemgrenze.

```

Anschluss an2; //0,5 TP
Force F_c "Federkraft"; //0,5 TP
Force F_d "Daempfungskraft"; //0,5 TP

```

fehlender Code (2)

```

F_C = c*(an2.x-an1.x-x_0); // 1 TP
F_d = d*(an2.v-an1.v); // 1 TP
an1.F + F_c + F_d = 0; // Bilanz geschnittener
  Federdaempfer //1 TP
an1.F + an2.F = 0; // Gesamtbilanz
  Federdaempfer //1 TP

```

Bewertung: Siehe oben. Zusätzlich gibt es 1 Punkt für die Anbindung an die Konnektoren, d.h. korrekte Anwendung der Größen in den Konnektoren. Der Zusammenhang $v = \dot{x}$ wurde hier bewusst nicht implementiert, da es sich um ein Verknüpfungssystem handelt, das keine Zustände haben sollte. **(7 Punkte)**

3.7. Lösung:

```

connect (FD1.an2, M1.A1); // 0,5 TP
connect (FD2.an1, M1.A2); // 0,5 TP

```

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

4. Aufgabe: Diskrete Systeme (20,5 Punkte)

* Lösung *

4.1. Lösung:

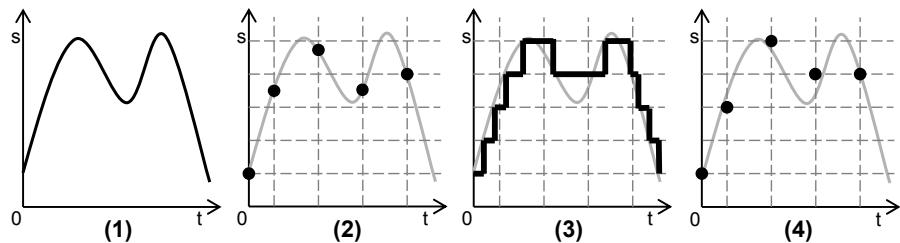


Abbildung 2: Qualitative Diskretisierungen

Bewertung: Jede korrekte Darstellung gibt 1 TP. In (2) und (4) dürfen die Punkte nicht verbunden werden, da die Zeit diskret ist, d.h. es sind nur Werte an diesen Zeitpunkten bekannt. In (3) ist es in Ordnung die vertikalen Linien auszulassen, sie sind hier eingezeichnet um die Sprünge in den diskreten Werten besser darzustellen. (3 Punkte)

4.2. Lösung:

- Ja, das Petrie Netz ist lebendig, da zu jeder Zeit ein Zustand erreicht werden kann in dem eine jede Transition geschaltet werden kann (1 TP).
- Nein. Ein Petri-Netz wird als beschränkt bezeichnet, wenn in keiner einzigen Stelle jemals mehr als eine bestimmte maximale Anzahl an Token auftritt (1 TP). An der Stellen P_4 "sammeln" sich die Token im System.

Bewertung: Punkte werden nur mit Begründung vergeben. (2 Punkte)

4.3. Lösung: Nein, da beim Schalten von t_1 immer ein Token auf P_1 zurückkommt, kann P_1 nie 0 Token haben (1 TP).

Bewertung: Punkte werden nur mit Begründung vergeben. (1 Punkt)

4.4. Lösung:

	t_1	t_2	t_1	t_3
P_2	2	1	3	3
P_3	0	3	3	1
P_5	1	1	0	2

Bewertung: Für jeden richtige Zeile gibt es 1 TP.

(3 Punkte)

4.5. Lösung:

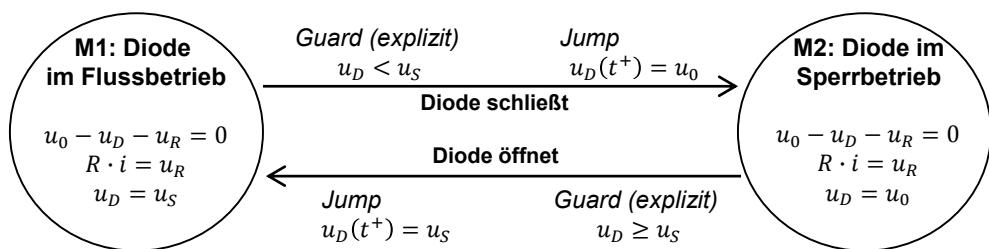


Abbildung 3: Hybrider Automat zur Lösung der Aufgabe 4.5.

Bewertung: Für jede Mode mit sinnvollem Namen gibt es 0,5 TP. Für das korrekte Modell in der Mode gibt es jeweils 1 TP. Für jede korrekte Kante mit sinnvollem Namen gibt es 0,5 TP. Jeder Guard gibt 0,5 TP. Jumps können geschrieben werden. Anstatt $u_D = u_0$ kann auch $i = 0$ geschrieben werden. **(5 Punkte)**

4.6. Lösung:

```

1 model DiodenSchaltkreis
2   import Modelica.SIunits.*;
3   import Modelica.Math.*;
4   parameter Resistance R=12;           //0,5 TP
5   parameter Voltage u_S=0.5;          //0,5 TP
6   ElectricCurrent i;                  //0,5 TP
7   Voltage u_R;                      //0,5 TP
8   Voltage u_D;                      //0,5 TP
9   input Voltage u_0;                //0,5 TP

```

Musterlösung Simulationstechnik (SS 2019)

```
10 equation
11   u_0 - u_D - u_R = 0;           //0,5 TP
12   u_R = R * i;                 //0,5 TP
13
14   if u_D>= u_S then          //0,5 TP
15     u_D = u_S;                  //0,5 TP
16   else                         //0,5 TP
17     u_D = u_0;                  //0,5 TP
18   end if;                   //0,5 TP
19 end DiodenSchaltkreis;
```

Bewertung: In Zeile 17 kann alternativ $i = 0$ geschrieben werden. **(6,5 Punkte)**

5. Aufgabe: Numerische Integration (20 Punkte)

* Lösung *

5.1. Lösung: a) Die allgemeine Bilanzgleichung für eine zu bilanzierende Größe Ψ lautet:

$$\underbrace{\frac{d\Psi}{dt}}_{(0,5 \text{ TP})} = \underbrace{\sum_{j \in \Lambda_J}^{n_s} J_j^\Psi}_{(0,5 \text{ TP})} + \underbrace{\sum_{k \in \Lambda_\Gamma}^{n_q} \Gamma_k^\Psi}_{(0,5 \text{ TP})}$$

Für die Anwendung sind die

- zu bilanzierenden Größe Ψ (0,5 TP)
- Flüsse J^Ψ und (0,5 TP)
- Quellen/Senken Γ^Ψ (0,5 TP)

festzulegen.

Bewertung: Siehe oben.

b)

$$\underbrace{\frac{dU}{dt}}_{(0,5 \text{ TP})} = \underbrace{-\dot{m}_{O_2} \cdot h_{O_2}}_{(0,5 \text{ TP})}$$

Bewertung: Siehe oben. Wenn vor \dot{m}_{O_2} kein Minus gesetzt wird, gibt es auch den TP. Wenn die Studierenden $\frac{dE}{dt}$ (statt $\frac{dU}{dt}$) schreiben, ist das ebenfalls richtig. (4 Punkte)

5.2. Lösung:

$$p_{O_2}|_{t=0} \cdot V_F = m_{O_2}|_{t=0} \cdot R_{O_2} \cdot T_{O_2} \quad (1 \text{ TP})$$

$$m_{O_2}|_{t=0} = \frac{p_{O_2}|_{t=0} \cdot V_F}{R_{O_2} \cdot T_{O_2}} = 2,56 \text{ kg} \quad (1 \text{ TP})$$

Bewertung: Siehe oben. (2 Punkte)

5.3. Lösung:

a) $m_{O_2}|_{t=10 \text{ s}} = m_{O_2}|_{t=0} - A_V \cdot \sqrt{2\rho_{O_2} \cdot \left(\frac{m_{O_2}|_{t=0} \cdot T_{O_2} \cdot R_{O_2}}{V_F} - p_U \right)} \cdot \Delta t_a = 1,93 \text{ kg}$ (1 TP)

Musterlösung Simulationstechnik (SS 2019)

$$\text{b) } m_{O_2}|_{t=5 \text{ s}} = m_{O_2}|_{t=0} - A_V \cdot \sqrt{2\rho_{O_2} \cdot \left(\frac{m_{O_2}|_{t=0} \cdot T_{O_2} \cdot R_{O_2}}{V_F} - p_U \right)} \cdot \Delta t_b = 2,24 \text{ kg} \quad (1 \text{ TP})$$

$$m_{O_2}|_{t=10 \text{ s}} = m_{O_2}|_{t=5 \text{ s}} - A_V \cdot \sqrt{2\rho_{O_2} \cdot \left(\frac{m_{O_2}|_{t=5 \text{ s}} \cdot T_{O_2} \cdot R_{O_2}}{V_F} - p_U \right)} \cdot \Delta t_b = 1,95 \text{ kg} \quad (1 \text{ TP})$$

Bewertung: Siehe oben. Falls Ersatzergebnis von 2,0 kg verwendet wurde:
 a) 1,44 kg,
 b) 1,72 kg und 1,46 kg. **(3 Punkte)**

5.4. Lösung: Siehe Abb. 4.

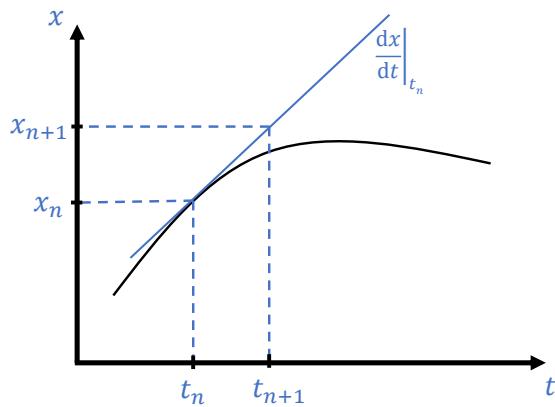


Abbildung 4: Skizze zum expliziten Euler-Verfahren

Bewertung: Für jede korrekt eingetragene Größe (x, t, t_n, t_{n+1} (oder stattdessen Δt), x_n, x_{n+1} sowie $\frac{dx}{dt}|_{t_n}$) gibt es jeweils 0,5 TP. Falls die Steigung korrekt eingezeichnet wurde, gibt es 0,5 TP (auch ohne $\frac{dx}{dt}|_{t_n}$).

Wenn die Studierenden nicht x , sondern eine andere Variable eintragen, dann gegebenenfalls auch richtig (z.B. wenn \dot{m}_{O_2} verwendet wird). **(3,5 Punkte)**

5.5. Lösung: Der Fehler der Approximation wird durch den quadratischen Term der Taylorreihenentwicklung dominiert, der zur Abschätzung verwendet wird:

$$\Theta(\Delta t_n^2) = \underbrace{\frac{\Delta t^2}{2}}_{0,5 \text{ TP}} \underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=t_n}}_{1 \text{ TP}}$$

Musterlösung Simulationstechnik (SS 2019)

Im ersten Euler-Schritt ist $\frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0}$ für alle Schrittweiten gleich groß:

$$\frac{\Theta(\Delta t_c^2)}{\Theta(\Delta t_d^2)} = \frac{\frac{\Delta t_c^2}{2}}{\frac{\Delta t_d^2}{2}} \cdot \frac{\frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0}}{\frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0}} = 100 \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$\frac{\Delta t_d^2}{2} = \frac{1}{100} \frac{\Delta t_c^2}{2} \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$\Delta t_d = \frac{1}{10} \Delta t_c = 2 \text{ s} \quad (1 \text{ TP})$$

Bewertung: Siehe oben. (3,5 Punkte)

5.6. Lösung: Die allgemeine Gleichung für das implizite Euler-Verfahren lautet:

$$\underbrace{x_{n+1}}_{0,5 \text{ TP}} = \underbrace{x_n}_{0,5 \text{ TP}} + \underbrace{\Delta t_n \cdot f(x_{n+1}, t_n + \Delta t_n)}_{0,5 \text{ TP}}$$

Mögliche Antworten zu Vorteil: Vermeidung von Oszillationen/stabil für alle Δt /steife Probleme können gelöst werden (0,5 TP)

Mögliche Antworten zu Nachteil: mehr Rechenzeit pro Schritt/implizite Gleichungen müssen gelöst werden (0,5 TP)

Bewertung: Siehe oben. (2,5 Punkte)

5.7. Lösung: Ein DGL-System wird als steif bezeichnet, wenn stark unterschiedliche Zeitkonstanten auftreten/mehrdimensionale Lösungen sich unterschiedlich schnell in verschiedene Richtungen entwickeln (1 TP). Ein typisches steifes System sind Reaktionssysteme sowie DA-Systeme (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. (1,5 Punkte)

Schriftliche Prüfung

Simulationstechnik: KlausurSommersemester 2019

1. Aufgabe: Finite Differenzen (13 Punkte)

Die folgende Differentialgleichung beschreibt die Advektions-Diffusions-Gleichung für die Konzentration ϕ als Funktion der Position x mit Advektionsgeschwindigkeit a und Diffusionskoeffizient $\lambda > 0$:

$$a \frac{\partial \phi}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Diese Gleichung soll mit einem Finite-Differenzen-Verfahren auf einem strukturierten, äquidistanten Gitter mit Gitterschrittweite Δx gelöst werden.

1.1. Gegeben sei die Taylorreihe von $\phi(x)$ entwickelt um x_i , ausgewertet an x_{i+1} :

$$\phi_{i+1} \approx \phi_i + \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=x_i} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right|_{x=x_i} (\Delta x)^3 + \dots \quad (2)$$

Stellen Sie eine Taylorreihe für $\phi(x)$ an einem zweiten Auswertepunkt auf, welche Ihnen die Herleitung eines zentralen Differenzenausdrucks für $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ mit 2 Stützstellen und möglichst hoher Genauigkeitsordnung ermöglicht. Berücksichtigen Sie die ersten 4 Glieder.

1.2. Leiten Sie nun den zentralen Differenzenausdruck für $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ her. Bestimmen Sie den Abbruchfehler und die Genauigkeitsordnung.

1.3. Die Gleichung (1) soll mit einem Finite-Differenzen-Verfahren auf dem Gebiet $x \in [0, L]$ diskretisiert werden. Dazu wird das Rechengebiet durch ein äquidistantes Gitter mit 4 Knoten und Gitterschrittweite Δx approximiert. Die Nummerierung der Knoten ist aufsteigend 1 – 4.

$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ wird nun mittels eines zentralen Differenzenausdrucks diskretisiert:

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2}. \quad (3)$$

Für $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ soll der hergeleitete Differenzenausdruck aus Aufgabe 1.2 benutzt werden. Sollten Sie diese nicht gelöst haben, können Sie folgenden Ausdruck benutzen:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \frac{2\phi_{i+1} - 4\phi_i + 2\phi_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (4)$$

Für Knoten 4 wird eine Dirichletrandbedingung angenommen. An Knoten 1 wird eine Neumannrandbedingung mit

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = 5 \quad (5)$$

angenommen. Diese soll mittels eines rückwärts Differenzenausdruck mit 2 Stützstellen diskretisiert werden:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x}. \quad (6)$$

Stellen Sie die sich ergebenden Gleichungen für alle Unbekannten auf, sodass Sie in Summe genug Gleichungen für alle Unbekannten erhalten. Begründen Sie, falls keine Gleichung für einen Knoten aufgestellt werden muss.

Hinweis: Es ist nicht nötig nach den Unbekannten aufzulösen.

1.4. Was ist die Genauigkeitsordnung des gesamten hergeleiteten Verfahrens. Begründen Sie ihre Antwort.

2. Aufgabe: Finite Elemente (14 Punkte)

2.1. Im Folgenden ist das stationäre Advektions-Diffusions-Problem für die Funktion $u(x)$ gegeben:

$$a \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \forall x \in [-L, 0], \quad (7)$$

$$u(-L) = 2, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (9)$$

Der Diffusionskoeffizient ist durch $\lambda > 0$ gegeben und a beschreibt die konstante Advektionsgeschwindigkeit. Bestimmen Sie zunächst die schwache Formulierung und reduzieren Sie die maximale Ordnung der auftretenden Ableitungen mittels partieller Integration. Vereinfachen Sie die Gleichung soweit wie möglich.

2.2. Ordnen Sie die Begriffe Dirichlet-Randbedingung und Neumann-Randbedingung den entsprechenden Gleichungen aus (7) - (9) zu.

2.3. Für den restlichen Verlauf der Aufgabe betrachten wir das Finite-Elemente-Gitter aus Abbildung 1. Geben Sie für das gegebene Gitter eine Funktion für die Unbekannte $u(x)$ an. Nutzen Sie dazu die diskreten Werte u_k an den Finite-Elemente-Knoten und die in Gleichung (10) gegebenen Interpolationsfunktionen. Geben Sie in einem zweiten Schritt die daraus folgende, explizite Gleichung für $u(x)$ innerhalb des Elements III an.

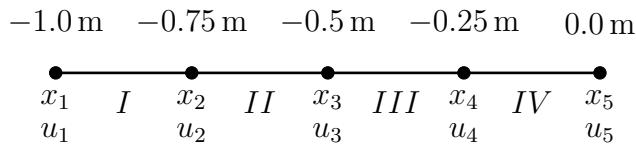


Abbildung 1: FE-Gitter

$$\phi_k(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}, & x_{k-1} \leq x \leq x_k \\ \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}, & x_k \leq x \leq x_{k+1} \\ 0, & sonst. \end{cases} \quad (10)$$

2.4. Für lineare finite Elemente kann die Transformation von einem Referenzelement



Abbildung 2: 1D-Referenzelement

auf die Elemente des Finite-Elemente-Gitters aus Aufgabe 2.3 als

$$x(\xi) = x_k + \frac{x_{k+1} - x_k}{2}(\xi + 1) \quad (11)$$

angegeben werden. Leiten Sie diesen Zusammenhang mit Hilfe der Darstellung der x-Koordinate durch Interpolationsfunktionen her und begründen Sie Ihren Rechenweg.

2.5. Bestimmen Sie aus dem allgemeinen Ausdruck der Ortskoordinate $x(\xi)$, die Jacobi-Matrix für die Elemente des in Aufgabe 2.3 gegebenen Finite-Elemente-Gitters.

2.6. Es ist das folgende Integral über das Gebiet $x \in [-1, 0]$ gegeben:

$$\int_{-1}^0 \phi_2(x) \phi_3(x) dx. \quad (12)$$

Des Weiteren ist für Element II das folgende Produkt der Interpolationsfunktionen auf dem Referenzelement gegeben:

$$\int_{-1}^1 \phi_1^e(\xi) \phi_2^e(\xi) d\xi = \frac{1}{3}. \quad (13)$$

Berechnen Sie mit Hilfe von Gleichung (13) und der Transformationsformel das Ergebnis zu Gleichung (12). Verwenden Sie für alle gitterabhängigen Größen die Abmessungen des Finite-Elemente-Gitter aus Aufgabe 2.3.

3. Aufgabe: Finite Volumen (12 Punkte)

Gegeben sei folgender Ausschnitt eines zweidimensionalen Gitters:

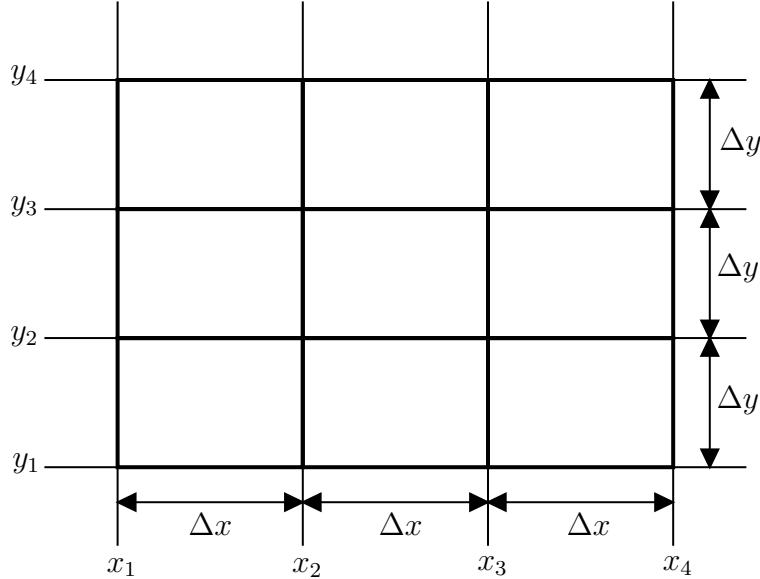


Abbildung 3: Kartesisches Gitter.

- 3.1.** Zeichnen Sie ein knotenzentriertes Kontrollvolumen sodass Sie ein inneres Kontrollvolumen erhalten und markieren Sie die Lage der Unbekannten im gewählten und den benachbarten Kontrollvolumina. Diese Aufgabe soll auf dem Aufgabenblatt bearbeitet werden.

Betrachten sie nun die stationäre inkompressible Kontinuitätsgleichung ($\rho = \text{const}$):

$$\rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (14)$$

mit $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

3.2. Diskretisieren Sie die gegebene Gleichung (14) mittels der Finite-Volumen-Methode für Ihr gewähltes Kontrollvolumen. Nutzen Sie dabei den Satz von Gauss, sowie einfache Approximationen unbekannter Größen. Beginnen Sie mit der integralen Form. Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

Hinweis: Satz von Gauss:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{g} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (15)$$

Gegeben sei nun folgendes zellzentriertes Netz. Betrachten Sie die Kontrollvolumina V_1 und V_2 .

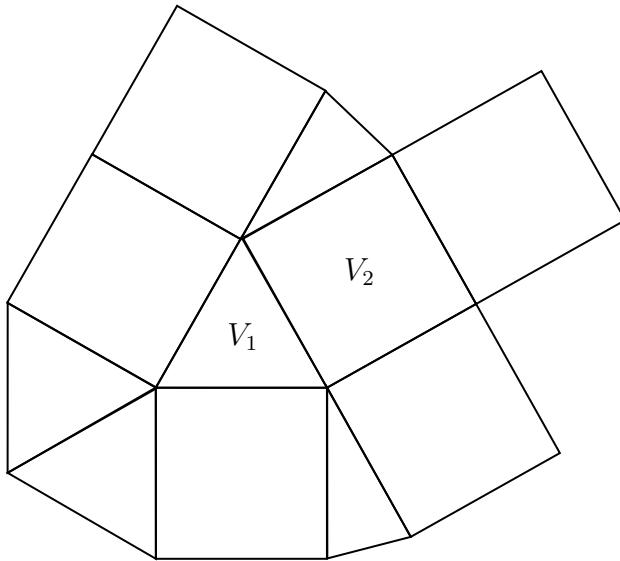


Abbildung 4: Gitter mit Dreiecken und Vierecken (hybrides Gitter). V_1 , sowie alle recht-eckigen Gitterzellen seien gleichseitig bzw. quadratisch.

3.3. Nennen Sie die Anzahl an Summanden, die bei der analytischen Vereinfachung des Flussterms von Gleichung (14) auftreten würden, jeweils für V_1 und V_2 . Geben Sie eine Begründung an.

3.4. Welches aus der Vorlesung bekannte Problem sehen Sie bei V_2 , wenn die folgende Gleichung diskretisiert werden soll:

$$\nabla \cdot \nabla T = 0 \quad (16)$$

Hinweis: Bedenken Sie die Approximation der Gradienten.

4. Aufgabe: Fehler (11 Punkte)

Die Ausbreitung einer eindimensionalen Welle $u(t, x)$ kann mit Hilfe der Wellengleichung in Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit c beschrieben werden:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \Omega, c \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

4.1. Folgende Finite-Differenzen-Verfahren werden vorgeschlagen:

$$a) \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - c^2 \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0, \quad (18)$$

$$b) \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0, \quad (19)$$

$$c) \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (20)$$

Warum sind diese Diskretisierungen nicht zur Lösung der Wellengleichung (17) geeignet? Begründen sie jeweils Ihre Antwort. (*Die Durchführung eines Konsistenznachweises ist in dieser Teilaufgabe nicht notwendig!*)

4.2. In allen folgenden Teilaufgaben sei zur Lösung der Wellengleichung (17) folgendes Diskretisierungsverfahren gegeben:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0. \quad (21)$$

Nach Einsetzen der Taylorreihenentwicklungen für $u_i^{n+1}, u_i^{n-1}, u_{i+1}^n$ und u_{i-1}^n um den Entwicklungspunkt u_i^n in Gleichung (21) erhält man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) = 0. \quad (22)$$

Zeigen oder widerlegen Sie die Konsistenz des Verfahrens in Gleichung (21) in Bezug auf die Wellengleichung (17).

Welche Genauigkeitsordnung hat das Lösungsverfahren?

4.3. Die Stabilitätsanalyse mit Hilfe des von Neumann Verfahrens ergibt in Abhängigkeit der Wellenzahl $k \in \mathbb{R}$ folgende Stabilitätsbedingung

$$-1 \leq 1 - 2 \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right) \sin^2 \left(\frac{k\Delta x}{2} \right) \leq 1. \quad (23)$$

Gegeben sei die Wellengeschwindigkeit $c = 10 \text{ m s}^{-1}$ und eine äquidistante räumliche Diskretisierung mit $\Delta x = 0.1 \text{ m}$. Welche Bedingungen muss Δt erfüllen damit das Verfahren stabil ist?

4.4. Ist das Verfahren bei Erfüllung der Stabilitätsbedingung auch konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Wenn sie Teilaufgabe 4.2 nicht gelöst haben, gehen Sie von einem konsistenten Verfahren aus.

4.5. Wie kann das Verfahren (21) modifiziert werden, damit es unbedingt stabil ist. Geben Sie die resultierende Diskretisierung an.

5. Aufgabe: Finite Differenzen (13 Punkte)*** Lösung *****5.1. Lösung:**

$$\phi_{i-1} \approx \phi_i - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=x_i} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Big|_{x=x_i} \Delta x^3 + \dots \quad (24)$$

5.2. Lösung: Gegebene Taylorreihe - Taylorreihe aus 1.1:

$$\phi_{i+1} - \phi_{i-1} = 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=x_i} \Delta x + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \Big|_{x=x_i} \Delta x^3 \quad (25)$$

Umformen nach der gesuchten Ableitung:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2 \Delta x} - \underbrace{\frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Big|_{x=x_i} \Delta x^2}_{\text{Abbruchfehler}} \quad (26)$$

Der Ausdruck ist 2. Ordnung genau.

5.3. Lösung:

Gleichung für Knoten 1:

$$a \frac{\phi_2 - \phi_0}{2 \Delta x} - \lambda \frac{\phi_2 - 2\phi_1 + \phi_0}{\Delta x^2} = 0 \quad (27)$$

Gleichung für Knoten 2:

$$a \frac{\phi_3 - \phi_1}{2 \Delta x} - \lambda \frac{\phi_3 - 2\phi_2 + \phi_1}{\Delta x^2} = 0 \quad (28)$$

Gleichung für Knoten 3:

$$a \frac{\phi_4 - \phi_2}{2\Delta x} - \lambda \frac{\phi_4 - 2\phi_3 + \phi_2}{\Delta x^2} = 0 \quad (29)$$

Gleichung für Knoten 4:

Dirichlet Knoten, daher ist ϕ_4 bekannt.

Neumann Randbedingung an Knoten 1 als Gleichung für ϕ_0 :

$$\frac{\phi_1 - \phi_0}{\Delta x} = 5 \implies \phi_0 = \phi_1 - 5\Delta x \quad (30)$$

5.4. Lösung:

Das gesamte Verfahren ist 1. Ordnung genau. Die zentralen Differenzenausdrücke sind zwar 2. Ordnung genau allerdings wird die Neumann RB mit einem rückwärts Differenzenstern diskretisiert der nur 1. Ordnung genau ist.

6. Aufgabe: Finite Elemente (14 Punkte)*** Lösung *****6.1. Lösung:**

$$\int_{-L}^0 \left(a \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) w dx = 0 \quad \forall w. \quad (31)$$

Anwenden der partiellen Integration auf $\int_{-L}^0 \left(-\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) w dx$.

$$\int_{-L}^0 a \frac{\partial u}{\partial x} w dx + \int_{-L}^0 \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx - \lambda \left[\frac{\partial u}{\partial x} w \right]_{-L}^0 = 0 \quad \forall w. \quad (32)$$

Einsetzen der Randbedingungen in $-\lambda \left[\frac{\partial u}{\partial x} w \right]_{-L}^0$:

$$\frac{\partial u(0)}{\partial x} = 0, \quad (33)$$

$$w(x = -L) = 0, \quad (34)$$

$$\int_{-L}^0 a \frac{\partial u}{\partial x} w dx + \int_{-L}^0 \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx = 0 \quad \forall w. \quad (35)$$

6.2. Lösung: Neumann Randbedingung Gleichung (9): $\frac{\partial u(0)}{\partial x} = 0$, Dirichlet Randbedingung gleichung (8): $u(-L) = 0$.

6.3. Lösung:

$$u(x) \approx \sum_{k=1}^5 u_k \phi_k(x). \quad (36)$$

Element III liegt zwischen den beiden Knoten bei x_3 und x_4 , d.h. nur $\phi_3(x)$ und $\phi_4(x)$ sind ungleich 0.

$$u(x) \approx \sum_{k=3}^4 u_k \phi_k(x), \quad (37)$$

$$= u_3 \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3} + u_4 \frac{x - x_3}{x_4 - x_3}. \quad (38)$$

6.4. Lösung: Die Darstellung der Ortskoordinate mittels der Interpolationsfunktionen des Referenzelements:

$$x(\xi) \approx \sum_{i=1}^2 x_k^e \phi_k^e(\xi). \quad (39)$$

Die $\phi_k^e(\xi)$ sind dabei die Interpolationsfunktionen des Referenzelements:

$$\phi_1^e = \frac{1 - \xi}{2}, \quad \phi_2^e = \frac{1 + \xi}{2}. \quad (40)$$

Eingesetzt ergibt dies:

$$x(\xi) = x_k \frac{1 - \xi}{2} + x_{k+1} \frac{1 + \xi}{2}, \quad (41)$$

$$= x_{k+1} \frac{(\xi + 1)}{2} + \frac{x_k}{2} - \frac{\xi x_k}{2}, \quad (42)$$

$$= x_{k+1} \frac{(\xi + 1)}{2} + \frac{x_k}{2} - \frac{\xi x_k}{2} + \left[\frac{x_k}{2} - \frac{x_k}{2} \right], \quad (43)$$

$$= x_k + \frac{x_{k+1} - x_k}{2} (\xi + 1). \quad (44)$$

6.5. Lösung:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial x(\xi)}{\partial \xi}, \quad (45)$$

$$= \frac{\partial (x_k + \frac{x_{k+1}-x_k}{2}(\xi + 1))}{\partial \xi}, \quad (46)$$

$$= \frac{x_{k+1} - x_k}{2}, \quad (47)$$

$$= \frac{\Delta x}{2}. \quad (48)$$

6.6. Lösung: Anwenden der Transformationsformel:

$$\int_{-1}^0 \phi_2(x) \phi_3(x) dx = \int_{-1.0}^{-0.75} \phi_2(x) \phi_3(x) dx + \int_{-0.75}^{-0.5} \phi_2(x) \phi_3(x) dx \quad (49)$$

$$+ \int_{-0.5}^{-0.25} \phi_2(x) \phi_3(x) dx + \int_{-0.25}^{0.0} \phi_2(x) \phi_3(x) dx \quad (50)$$

$$= \int_{-0.75}^{-0.5} \phi_2(x) \phi_3(x) dx \quad (51)$$

$$= \int_{-1}^1 \phi_1^e(\xi) \phi_2^e(\xi) |det \mathbf{J}| d\xi. \quad (52)$$

Da $|det \mathbf{J}|$ konstant ist gilt:

$$\int_{-0.75}^{-0.5} \phi_2(x) \phi_3(x) dx = |det \mathbf{J}| \int_{-1}^1 \phi_1^e(\xi) \phi_2^e(\xi) d\xi. \quad (53)$$

Mit

$$|det \mathbf{J}| = \frac{\Delta x}{2} = \frac{0.25 \text{ m}}{2}, \quad (54)$$

folgt dann:

$$\int_{-0.75}^{-0.5} \phi_2(x) \phi_3(x) dx = 0.125 \text{ m} \int_{-1}^1 \phi_1^e(\xi) \phi_2^e(\xi) d\xi \quad (55)$$

$$= 0.125 \text{ m} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24} \text{ m}. \quad (56)$$

$$(57)$$

7. Aufgabe: Finite Volumen (12 Punkte)

* Lösung *

7.1. Lösung:

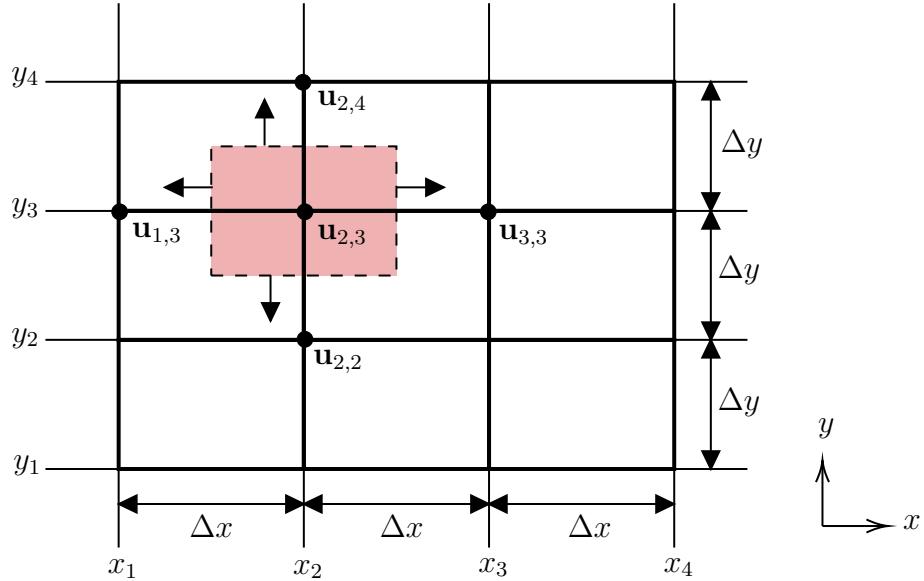


Abbildung 5: Exemplarisches, internes Kontrollvolumen mit benachbarten Zellzentren.

7.2. Lösung:

Integrale Form:

$$\int_{V_i} \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV = 0 \quad (58)$$

Division durch ρ und Satz von Gauss:

$$\int_{V_i} (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV_i \approx \sum_{j=1}^4 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_j \Delta s_{i,j} \quad (59)$$

Auswertung von $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ und Mittelung auf dem Rand mit nach außen gerichteten Normalen:

$$\int_{V_i} (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV_i \approx \left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{s_1} \Delta y + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{s_2} \Delta x + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{s_3} \Delta y + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{s_4} \Delta x \right) \quad (60)$$

$$\approx \left(\Delta y \frac{1}{2} (u_{3,3} + u_{2,3} - (u_{2,3} + u_{1,3})) \right) \quad (61)$$

$$+ \Delta x \frac{1}{2} (v_{2,4} + v_{2,3} - (v_{2,3} + v_{2,2})) \right) \quad (62)$$

$$= \frac{1}{2} (\Delta y (u_{3,3} - u_{1,3}) + \Delta x (v_{2,4} - v_{2,2})) \quad (63)$$

$$(64)$$

7.3. Lösung:

Entsprechend der Anzahl linearer Ränder gibt es für V_1 drei und für V_2 vier Summanden.

7.4. Lösung:

Ist die Verbindungsgeraden der Zellzentren nicht parallel zur Randnormalen kann die Richtungsableitung auf dem Rand nicht direkt als zentrale Differenz approximiert werden. Sei $\Delta r_{i,j}$ der Abstand zweier benachbarter Zellzentren gilt also nicht ohne weiteres:

$$\nabla T \cdot \mathbf{n} \approx \frac{T_j - T_i}{\Delta r_{i,j}}. \quad (65)$$

Entsprechend der Vorlesung ist in diesem Fall zunächst zu wählen ob der Nenner über den Zellzentrenabstand in Normalenrichtung, den direkten Abstand oder anders definiert wird. Dies ist bei dem gegebenen Gitter für die Kante von V_2 ein Problem, die an das nicht gleichseitige Dreieck angrenzt.

8. Aufgabe: Fehler (11 Punkte)*** Lösung ***

8.1. Lösung: Zur Diskretisierung einer Ableitung zweiter Ordnung sind mindestens drei Stützstellen erforderlich. Deshalb können die Diskretisierung a) (Zeitdiskretisierung) und c) (räumliche Diskretisierung) nicht konsistent sein. Bei der Diskretisierung aus b) ist das Quadrat der Wellengeschwindigkeit c^2 nicht berücksichtigt.

8.2. Lösung: Damit das gegebene Verfahren die partielle Differentialgleichung (17) konsistent diskretisiert, muss die folgende Bedingung für den Abbruchfehler erfüllt sein:

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \|L - L_\Delta\| = 0. \quad (66)$$

Daraus ergibt sich:

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \|L - L_\Delta\| = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \right) \right\| \quad (67)$$

$$= \|\mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2)\| = 0. \quad (68)$$

Daraus folgt, dass das Verfahren konsistent ist. Aus (68) folgt dann unmittelbar die Genauigkeitsordnung. Das Verfahren ist 2. Ordnung in Raum und Zeit.

8.3. Lösung:

$$-1 \leq 1 - 2 \underbrace{\left(\frac{c \Delta t}{\Delta x} \right) \sin^2 \left(\frac{k \Delta x}{2} \right)}_{\leq 2} \leq 1 \quad (69)$$

Daraus folgt

$$c \Delta t \leq 0.1. \quad (70)$$

Mit $c = 10 \text{ m s}^{-1}$ ergibt sich ein maximaler Zeitschritt von 0.01 s.

8.4. Lösung: Nach dem Satz von Lax sind Stabilität und Konsistenz notwendige und hinreichende Bedingung für ein konvergentes Finite-Differenzen Verfahren. Die Konsistenz wurde in Aufgabe 4.2 nachgewiesen, d.h. das Verfahren ist unter Einhaltung der Stabilitätsbedingung aus Aufgabe 4.3 konvergent.

8.5. Lösung: Das Verfahren kann in ein implizites Verfahren umgewandelt werden:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad (71)$$