

Schriftliche Prüfung: Aufgaben des AVT-Teils. Jeder Punkt entspricht 1 Minute.

Simulationstechnik

Wintersemester 2016/17

1. Aufgabe: Fragen (22,5 Punkte)

1.1. Dynamische Systeme können wie folgt klassifiziert werden:

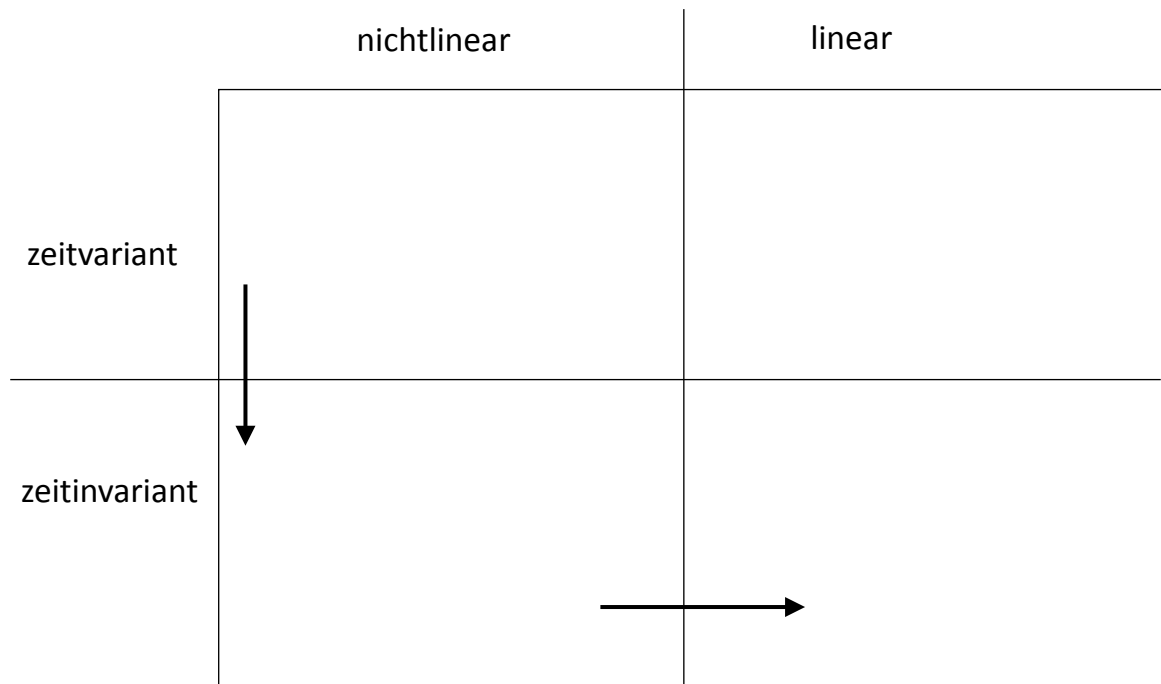


Abbildung 1: Klassifizierung dynamischer Systeme

Geben Sie für jede Art der Zustandsraumdarstellung die allgemeine Form an. Die Anfangswerte brauchen Sie nicht anzugeben. Schreiben Sie auf die entsprechenden Pfeile, durch welche Methode die Umformungen zwischen den Zustandsraumdarstellungen möglich sind.

Hinweis: Sie dürfen in dieser Aufgabe ausnahmsweise auf das Klausurblatt schreiben.

(5 Punkte)

1.2. Die Flüssigkeitshöhe einer Kaffeetasse soll modelliert werden. Das folgende Prinzipbild zeigt die Kaffeetasse, wobei $h(t)$ die Flüssigkeitshöhe mit Wert h_0 zum Zeitpunkt $t = 0$, r und h_T feste geometrische Größen des Behälters und $\dot{m}_d(t)$, $\dot{m}_z(t)$, $\dot{m}_{\ddot{u}}(t)$ jeweils den Dampfmassenstrom, Kaffeezulauf, und -überlauf bezeichnen.

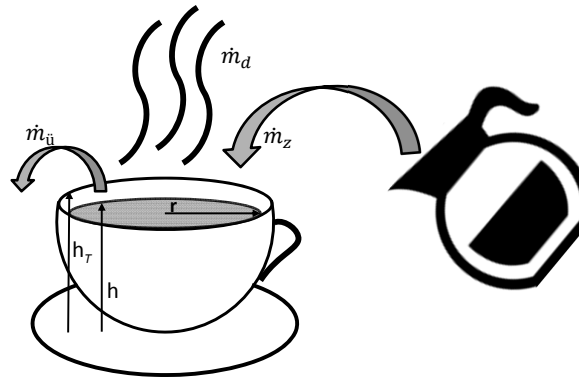


Abbildung 2: Prinzipbild einer Tasse

Abstrahieren Sie das Beispiel in eine Skizze wie in Abbildung 3 und zeichnen Sie die verschiedenen Größen ein. Geben Sie auch an, welche der Größen Schnittgrößen, Speichergrößen, Anfangswerte und Parameter sind.

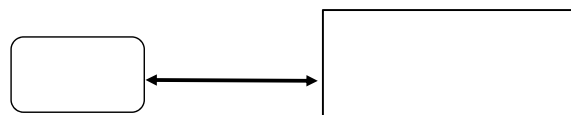


Abbildung 3: Abstraktionsbild des Systems

Hinweis: Vergessen Sie nicht, dass die Kaffeetasse mit der Umgebung interagiert.

(3 Punkte)

1.3. Was kennzeichnet ein autonomes System?

(1 Punkt)

1.4. Was ist ein ereignisdiskretes System?

(2 Punkte)

1.5. Wie bezeichnet man Systeme, deren Verhalten sehr stark von den Anfangswerten abhängt, so dass Vorhersagen über längere Zeit nicht möglich sind? (1 Punkt)

1.6. Nehmen Sie an, dass bei Änderung der Parameter $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$ in einem System $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p})$ eine Bifurkation auftritt. Nennen Sie zwei mögliche Änderungen des Systemverhaltens bei der Bifurkation. (2 Punkte)

1.7. Gegeben sei das nichtlineare, gewöhnliche Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t)^2 \cos^2(x_2(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t)x_2(t) + x_1(t)x_2(t) \sin^2(x_2(t)) - 3x_2(t).\end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der unbeschränkt positiv-definiten Funktion $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ und der direkten Methode nach Ljapunow, dass die Ruhelage bei $\mathbf{x}_R = (0, 0)^T$ global asymptotisch stabil ist.

Hinweis: Sie können annehmen, dass bereits gezeigt wurde, dass V unbeschränkt positiv-definit ist. (3,5 Punkte)

1.8. Gegeben sei folgende algebraische Gleichung für y :

$$y = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2x+x^2}{x^3+5} & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

Diese Gleichung soll in Modelica implementiert werden. Ergänzen Sie dazu folgenden Modelica Code:

```
model ModelicaCode
  Real y;
  Real x;
equation
  ...
  // fehlender Code
end ModelicaCode ;
```

(3 Punkte)

1.9. Ist die Schaltreihenfolge t_1, t_5, t_4 im Petri-Netz aus Abbildung 4 mit der dargestellten Anfangsmarkierung möglich? Begründen Sie Ihre Antwort indem Sie sagen in welchem Knoten sich jeder einzelne Token nach dem letztmöglichen Schaltvorgang befindet.

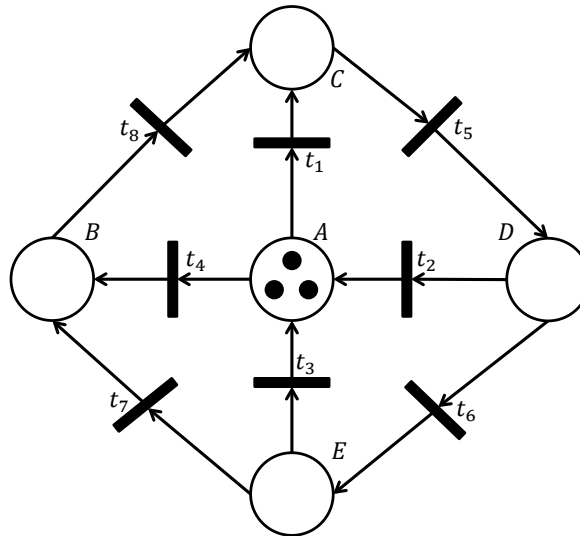


Abbildung 4: Petri-Netz

(2 Punkte)

2. Aufgabe: Systemtheorie (21,5 Punkte)

2.1. Gegeben sei die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung in der Variablen w

$$\ddot{w}(t) + \alpha \dot{w}(t) + w(t) = 0, \quad \text{mit dem Parameter } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Reformulieren Sie die Differentialgleichung als lineares Differentialgleichungssystem in den Variablen $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T = (w, \dot{w})^T$. Geben Sie die Systemmatrix \mathbf{A} an. (2 Punkte)

2.2. Gegeben sei ein lineares Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) \quad \text{mit der Systemmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Für welche Werte von α ist das System

- a) stabil? b) instabil? c) grenzstabil?

Begründen Sie Ihre Antwort mit den Eigenwerten der Systemmatrix. (4,5 Punkte)

2.3. In der Van-der-Pol-Gleichung wird α in Gleichung (2.1) durch den nichtlinearen Term $(w(t)^2 - 1)$ ersetzt. Die Reformulierung als System erster Ordnung ergibt

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = (1 - x_1(t)^2) x_2(t) - x_1(t) \quad (2)$$

Geben Sie zunächst die allgemeine Formel der Taylorreihenentwicklung um einen allgemeinen Punkt $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ für ein autonomes nichtlineares Differentialgleichungssystem an. Führen Sie anschließend die Linearisierung des Van-der-Pol-Systems um diesen allgemeinen Punkt \mathbf{x}^* durch und geben Sie die darin auftretenden Terme explizit an. (5 Punkte)

2.4. Bestimmen Sie alle Ruhelagen der Van-der-Pol-Gleichung aus Aufgabe 2.3.

(3 Punkte)

2.5. Gegeben sei ein lineares Differentialgleichungssystem mit zwei Variablen $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Zeichnen und benennen Sie die Phasenporträts für

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, mit den Eigenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, mit den Eigenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, mit den Eigenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(7 Punkte)

3. Aufgabe: Strukturierte elektrische Systeme (20 Punkte)

3.1. Gegeben ist der Modelica-Code für den Konnektor `Pin`:

```
connector Pin
  import Modelica.SIunits.*;
  Voltage v;
  flow Current i;
end Pin;
```

- Wozu dienen Konnektoren in Modelica?
- Wie bezeichnet man Variablen in einem Konnektor, die durch das Schlüsselwort **flow** gekennzeichnet werden, und solche ohne dieses Schlüsselwort? Welche Gleichungen werden für diese beiden Variablentypen jeweils implizit durch Modelica gesetzt?
- Als Alternative zur strukturierten Modellierung haben Sie in der Vorlesung die Modellierung elektrischer Systeme mittels Knoten- und Maschengleichungen kennengelernt. Wie hängen diese Gleichungen mit denen zusammen, die für die Variablen im Konnektor implizit gesetzt werden?

(5 Punkte)

3.2. Aufbauend auf diesem Konnektor sollen Modelle für einen Widerstand und einen Kondensator implementiert werden. Es ist folgender unvollständiger Modelica-Code gegeben:

```
model MyResistor
  import Modelica.SIunits.*;
  Pin p,n;
  Voltage v;
  Current i;
  // fehlender Code (1)
equation
  // fehlender Code (2)
  v = p.v - n.v;
  0 = p.i + n.i;
  i = p.i;
end MyResistor;
```

```
model MyCapacitor
  import Modelica.SIunits.*;
  Pin p,n;
  Voltage v;
  Current i;
  // fehlender Code (3)
equation
  // fehlender Code (4)
  v = p.v - n.v;
  0 = p.i + n.i;
  i = p.i;
end MyCapacitor;
```

- a) Welche Größen werden durch $p.v$ bzw. $n.v$ beschrieben? Welche Funktion haben die drei gegebenen Gleichungen in den Modellen?
- b) Vervollständigen Sie den Modelica Quellcode durch die fehlenden Deklarationen und Gleichungen. Machen Sie kenntlich, welcher Code an welche Stelle gehört. Sie können den Datentyp `Real` verwenden. (5 Punkte)

3.3. Schreiben Sie den Modelica-Code für das Modell `MyLossResistor`, welches durch Vererbung vom Widerstand `MyResistor` aus Aufgabe 3.2 abgeleitet wird, und in dem zusätzlich die Verlustleistung p_L als Produkt aus Spannung und Stromstärke berechnet wird. (3 Punkte)

3.4. Nun soll der Schaltkreis in Abbildung 5 als strukturiertes System modelliert werden. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Quellcode und benutzen Sie das Kondensatormodell aus Aufgabe 3.2 sowie das erweiterte Widerstandsmodell aus Aufgabe 3.3. Geben Sie für die Spannung am Kondensator C_1 den Startwert 10 V vor und am Kondensator C_2 5 V.

```
model Gesamtsystem
  import Modelica.Electrical.Analog.*;
  Basic.Ground ground;
  Sources.SineVoltage source;
  // fehlender Code (a)
equation
  // fehlender Code (b)
end Gesamtsystem;
```

Hinweis: Das Modell `source` besitzt die Pins p und n , und das Modell `ground` besitzt den Pin p . (7 Punkte)

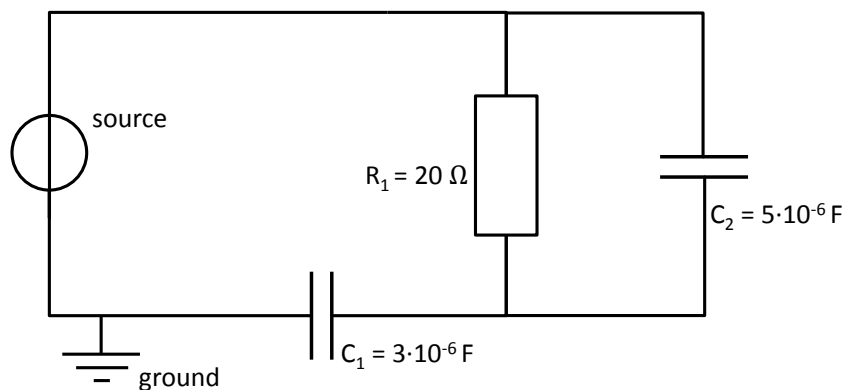


Abbildung 5: Schaltkreis

4. Aufgabe: Hybride mechanische Systeme (17 Punkte)

Eine Bowlingbahn soll als diskret-kontinuierliches System modelliert werden (vgl. Abbildung 6). Eine Bowlingkugel der Masse m wird zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle (x_0, y_0) mit der Geschwindigkeit v_0 im Winkel α zur Mittelachse der Bahn aufgesetzt. Da die Lauffläche der Bahn vollständig geölt ist, gleitet die Kugel über die Bahn ohne zu rollen oder rotieren. Sobald die Kugel einen Rand der Lauffläche in y -Richtung erreicht, landet sie in der Rinne. Wenn die Kugel sich in der Rinne befindet, bleibt sie in dieser und bewegt sich nur noch parallel zur x -Achse. Bleibt die Kugel hingegen auf der Lauffläche und berührt schließlich das dreieckige Pindeck, wird ein Stoßvorgang in Gang gesetzt.

Hinweis: Zu den obigen vereinfachenden Annahmen nehmen wir auch an, dass die Position der Kugel nur durch ihren Mittelpunkt gegeben ist.

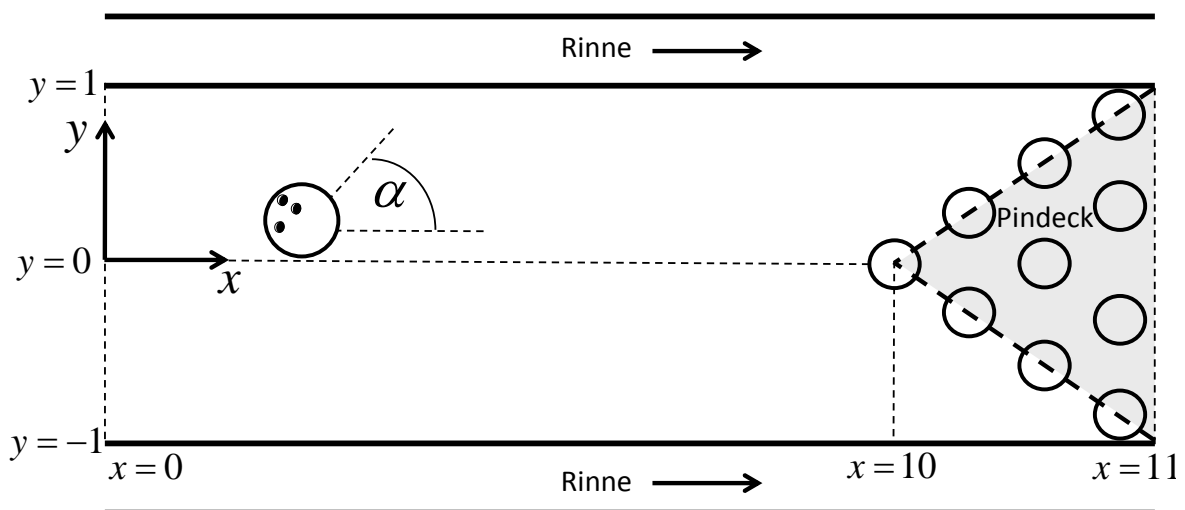


Abbildung 6: Schematische Darstellung der betrachteten Bowlingbahn

4.1. Zunächst soll das kontinuierliche Gleiten der Kugel auf der Lauffläche modelliert werden. Gehen Sie davon aus, dass auf die Kugel immer die Reibungskraft $\mathbf{F}_R(t) = -k \cdot \mathbf{v}(t)$ wirkt, wobei $\mathbf{v}(t)$ die Geschwindigkeit der Kugel und $k > 0$ ein bekannter Reibungskoeffizient ist. Stellen Sie ein System in Zustandsraumdarstellung (inklusive Anfangsbedingungen) auf, dessen Lösung die Position der Kugel über die Zeit ausgehend vom Moment des Aufsetzens ($t = 0$) beschreibt. Geben Sie die Systemmatrix \mathbf{A} , Eingangsmatrix \mathbf{B} , Ausgangsmatrix \mathbf{C} und Durchgangsmatrix \mathbf{D} explizit an.

Hinweis: Nutzen Sie für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen das Koordinatensystem

aus Abbildung 6. Beachten Sie, dass \mathbf{F}_R und \mathbf{v} Vektoren sind.

(5 Punkte)

4.2. Kann das System aus Aufgabe 4.1 eine eindeutige Ruhelage haben? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der Systemmatrix. Was wäre die physikalische Erwartung hinsichtlich der Existenz einer eindeutigen Ruhelage? Falls Sie Aufgabe 4.1 nicht lösen konnten, verwenden Sie stattdessen das System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}(t)$$

(3 Punkte)

4.3. Welche Ungleichungen müssen die momentanen (x,y)-Koordinaten der Kugel erfüllen, damit diese das dreieckige Pindeck berührt? Der Durchmesser der Kugel sowie der Pins kann dabei vernachlässigt werden.

Hinweis: Die Bahn endet bei $x = 11$.

(2 Punkte)

4.4. Nun soll das System als hybrider Automat modelliert werden. Die Kugel gleitet bis ein Ereignis vorkommt. Die Kugel kann *in die Rinne rutschen* und verliert dabei die y Komponente ihrer Geschwindigkeit oder die Kugel erreicht das dreieckige Pindeck und erzielt einen *Stoß*. Dabei ändern sich die Geschwindigkeiten v_x und v_y **schlagartig** proportional um die Faktoren S_x bzw. S_y . Modellieren Sie das System als hybriden Automaten mit 3 Moden.

Hinweis: Nutzen Sie die von Ihnen erstellte Lösungen aus den Aufgaben 4.1 und 4.3 so weit wie möglich in Ihrem hybriden Automaten. Falls Sie Aufgabe 4.1 oder 4.3 nicht lösen konnten, nutzen Sie die allgemeine lineare zeitinvariante Zustandsraumdarstellung für die Modelle bzw. die allgemeine Form des Guards für die Kanten. Der Reibungskoeffizient k gilt auch für die Rinne.

(7 Punkte)

5. Aufgabe: DAE-Systeme und numerische Integration (19 Punkte)

Die Populationen A und S zweier konkurrierender Spezies können durch das angepasste Wettbewerbsmodell beschrieben werden:

$$\frac{dA(t)}{dt} = r_A A(t) \frac{K_A(t) - A(t) - \alpha S(t)}{K_A(t)} \quad (3)$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = r_S S(t) \frac{K_S(t) - S(t) - \beta A(t)}{K_S(t)} \quad (4)$$

$$\frac{dK_A(t)}{dt} = p_A K_S^{-1}(t) \quad (5)$$

$$0 = p_S K_A^2(t) - p_A(1a + t) \quad (6)$$

Die Kapazität des Ökosystems für die jeweiligen Spezies werden durch die Variablen $K_A(t)$ bzw. $K_S(t)$ gegeben, wobei die zugehörigen Parameter bekannt sind ($p_A = 0,75 \frac{1}{a}$; $p_S = 0,23$). Ferner sind die jährlichen Geburtenraten ($r_A = 0,064 \frac{1}{a}$; $r_S = 0,134 \frac{1}{a}$) sowie die Wettbewerbsparameter ($\alpha = 0,23$; $\beta = 0,74$) gegeben. Für den Zeitpunkt $t = 0a$ gelten die Anfangsbedingungen $A(t = 0a) = 53$, $S(t = 0a) = 82$ sowie $K_A(t = 0a) = 100$. *Hinweis: a steht für die Einheit Jahr.*

5.1. Zeigen Sie anhand der Inzidenzmatrix, dass es sich *nicht* um ein Index-1 System handelt. Beschriften Sie die Zeilen und Spalten der Inzidenzmatrix! (1,5 Punkte)

5.2. Überführen Sie das Modell in ein Index-1 System. Machen Sie versteckte algebraische Gleichungen als diese kenntlich. Geben Sie alle Gleichungen des neuen Index-1 Systems an sowie die Anzahl der frei wählbaren Anfangsbedingungen, die benötigt werden, um ein vollständig spezifiziertes Modell zu erhalten. Wie hoch ist der differentielle Index des ursprünglichen Systems (3)-(6)? (6 Punkte)

Im Folgenden sollen die spezifischen Kapazitäten des Ökosystems durch **konstante Parameter** $K_A = 100$ und $K_S = 150$ gegeben sein. Die **Gleichungen (3) und (4)** sollen durch numerische Integration gelöst werden.

5.3. Geben Sie die allgemeine Gleichung des expliziten Euler-Verfahrens an. Geben Sie außerdem die allgemeine Formel zur Abschätzung des lokalen Fehlers zweiter Ordnung $\Theta(\Delta t_n^2)$ für das explizite Euler-Verfahren an. (2,5 Punkte)

5.4. Approximieren Sie durch Anwendung des expliziten Euler-Verfahrens die Populationsgrößen $A(t)$ und $S(t)$ für den Zeitpunkt $t = 24a$. Verwenden Sie hierzu die Schrittweite $\Delta t = 12a$. **(6 Punkte)**

5.5. Wählt man die Schrittweite $\Delta t = 24a$, erhält man die Approximation der Populationen entsprechend Abbildung 7. Wie erklären Sie das Verhalten der Approximation mit fortschreitender Zeit im Vergleich zur analytischen Lösung? Nennen Sie zwei Maßnahmen, wodurch dieses Verhalten vermieden werden kann. **(3 Punkte)**

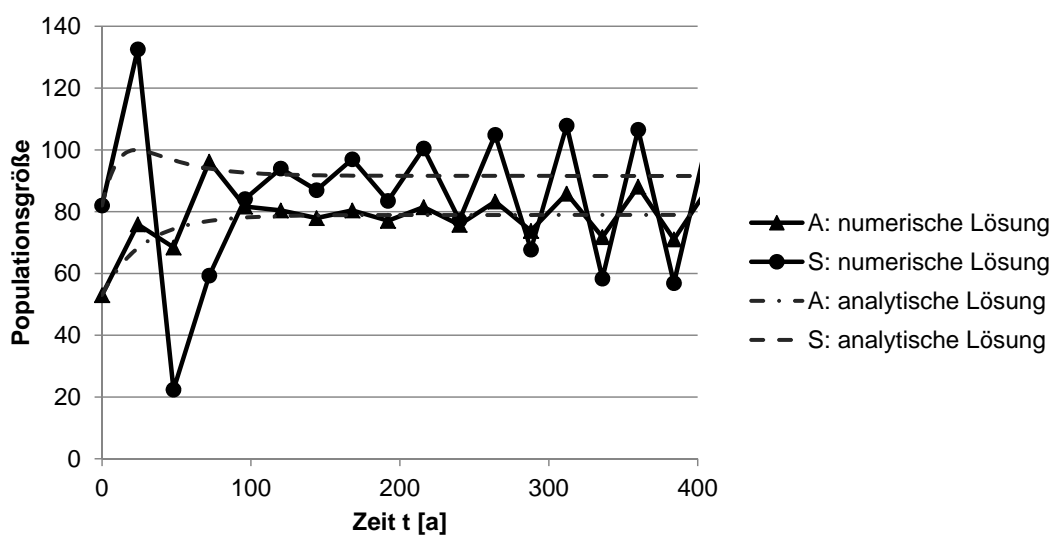


Abbildung 7: Vergleich von analytischer und numerischer ($\Delta t = 24a$) Lösung

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik

Wintersemester 2016/17

1. Aufgabe: Fragen (22,5 Punkte)

* Lösung *

1.1. Lösung:

	nichtlinear	linear
zeitvariant	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, t)$ (0,5 TP) $\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, t)$ (0,5 TP)	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$ (0,5 TP) $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$ (0,5 TP)
	Reformulierung mit Hilfe einer Zusatzvariable (0,5 TP)	
zeitinvariant	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p})$ (0,5 TP) $\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p})$ (0,5 TP)	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ (0,5 TP) $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$ (0,5 TP)
		Taylorreihenentwicklung (0,5 TP)

Abbildung 1: Klassifizierung dynamischer Systeme

Bewertung: Linearisierung statt Taylorreihenentwicklung gilt auch. (5 Punkte)

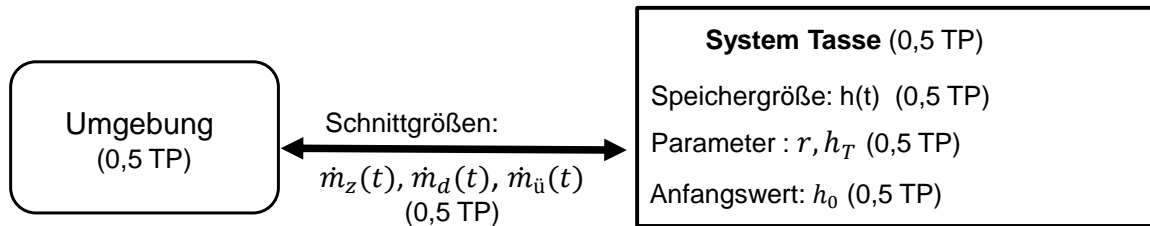
1.2. Lösung:

Abbildung 2: Abstraktionsbild des Systems Kaffeetasse

Bewertung: Siehe oben. (3 Punkte)

1.3. Lösung: Bei einem autonomen System gibt es keine Eingänge (1 TP).

Bewertung: Mögliche Antworten: Bei einem autonomen System sind alle Eingänge gleich null oder $u = 0$. (1 Punkt)

1.4. Lösung: In einem ereignisdiskreten System sind die Werte der Zustände diskret (1 TP) und diese ändern sich ausschließlich als Folge von externen oder internen Ereignissen (1 TP), d.h. die Zeitabhängigkeit fällt weg.

Bewertung: Siehe oben. (2 Punkte)

1.5. Lösung: Chaotisches Systeme (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. (1 Punkt)

1.6. Lösung: Bei der Bifurkation ändert sich das qualitative Verhalten des Systems durch die Änderung der Parameter $p \in R^{n_p}$ eines Systems $\dot{x}(t) = f(x, p)$. So ändert sich zum Beispiel: die Anzahl an Ruhelagen (1 TP) oder die Stabilität einer oder mehrerer Ruhelagen (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. (2 Punkte)

1.7. Lösung: Die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist global asymptotisch stabil, wenn eine UPDF V existiert, so dass $\frac{dV}{dt}(\mathbf{x}(t))$ eine NDF auf \mathbb{R}^n auf jeder Trajektorie von $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$. Anzugeben sind:

- Zeitableitung:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dV}{dt} \right|_{\mathbf{x}(t)} &= \left. \frac{dV}{dx} \right|_{\mathbf{x}(t)} \left. \frac{dx}{dt} \right|_t \\
 &= \underbrace{x_1(t)}_{dV/dx_1} \underbrace{(-x_1(t) + x_2(t)^2 \cos^2(x_2(t)))}_{\dot{x}_1(t)} + \\
 &\quad \underbrace{x_2(t)}_{dV/dx_2} \cdot \underbrace{(-x_1(t)x_2(t) + x_1(t)x_2(t) \sin^2(x_2(t)) - 3x_2(t))}_{\dot{x}_2(t)} \quad (1 \text{ TP}) \\
 &= -x_1(t)^2 + x_1(t)x_2(t)^2 (\cos^2(x_2(t)) + \sin^2(x_2(t))) - x_2(t)^2 x_1(t) - 3x_2(t)^2 \quad (0,5 \text{ TP}) \\
 &= -x_1(t)^2 - 3x_2(t)^2 \quad (0,5 \text{ TP})
 \end{aligned}$$

- $\frac{dV}{dt}(\mathbf{0}) = 0$ (0,5 TP)
- $\frac{dV}{dt}(\mathbf{x}(t)) = -\underbrace{x_1(t)^2}_{\geq 0} - \underbrace{3x_2(t)^2}_{\geq 0} < 0$ für $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ (1 TP)

Bewertung: Siehe oben.

(3,5 Punkte)

1.8. Lösung:

```

model ModelicaCode
Real y;
Real x;
equation
...
y = if x < 0 then (2*x+x^2) / (x^3+5)      // 1 TP
elseif 1 < x then x^2                      // 1 TP
else sqrt(x);                             // 1 TP
end ModelicaCode ;

```

Bewertung: Siehe oben.

(3 Punkte)

1.9. Lösung: Ja, die Schaltreihenfolge t_1, t_5, t_4 im Petri-Netz aus Abb. 4 ist mit der dargestellten Anfangsmarkierung möglich. Nach dem letzten Schalten von t_4 befindet sich ein Token im Knoten A , einer im Knoten B und der dritte Token befindet sich im Knoten D .

Bewertung: Nur wenn die Lösung vollständig richtig ist gibt es volle Punktzahl.

(2 Punkte)

2. Aufgabe: Systemtheorie (21,5 Punkte)

* Lösung *

2.1. Lösung: Die Reformulierung mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T = (w, \dot{w})^T$ ist

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - \alpha x_2(t). \quad (0,5 \text{ TP})$$

Die zugehörige Systemmatrix ist $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}$ (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. (2 Punkte)

2.2. Lösung: Das zugehörige charakteristische Polynom der Systemmatrix \mathbf{A} ist

$$\chi_{\mathbf{A}}(X) = \det \begin{pmatrix} X & -1 \\ 1 & X + \alpha \end{pmatrix} = X(X + \alpha) + 1 = X^2 + \alpha X + 1 \quad (1 \text{ TP}).$$

Es hat die Nullstellen $\lambda_{1/2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1}$ (1 TP). Damit ist das System

- a) stabil für $\alpha > 0$, da dann der Realteil beider Eigenwerte negativ ist (1 TP),
- b) instabil für $\alpha < 0$, da dann der Realteil beider Eigenwerte positiv ist (1 TP),
- c) grenzstabil für $\alpha = 0$, da dann der Realteil beider Eigenwerte gleich Null ist (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. (4,5 Punkte)

2.3. Lösung: Die Taylorreihenentwicklung eines allgemeinen nichtlinearen autonomen Systems der Form $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ lautet

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)}_{0,5 \text{ TP}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}^*}}_{0,5 \text{ TP}} \underbrace{(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*)}_{0,5 \text{ TP}} + \underbrace{\overbrace{R_n(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}^*)}^{\text{vernachlässigt}}}_{0,5 \text{ TP}}.$$

Die Linearisierung des gegebenen Systems ist

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \underbrace{\begin{bmatrix} x_2^* \\ (1 - x_1^{*2})x_2^* - x_1^* \end{bmatrix}}_{1 \text{ TP}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2x_1^*x_2^* - 1 & 1 - x_1^{*2} \end{bmatrix}}_{2 \text{ TP}} \begin{bmatrix} x_1(t) - x_1^* \\ x_2(t) - x_2^* \end{bmatrix}.$$

Bewertung: Siehe oben. (5 Punkte)

2.4. Lösung: Wir zeigen, dass $\mathbf{x}_R = (0,0)^R$ die einzige Ruhelage ist (1 TP). Für das Aufstellen der Gleichungen

$$0 = x_2 \quad (\text{A})$$

$$0 = (1 - x_1^2) x_2 - x_1 \quad (\text{B})$$

gibt es einen Teilpunkt (1 TP). Setzen wir $x_2 = 0$ aus Gleichung (A) in Gleichung (B) ein, so erhalten wir

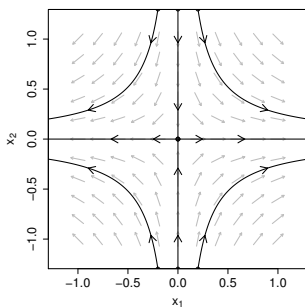
$$0 = (1 - x_1^2) \cdot 0 - x_1 = -x_1 \quad (1)$$

also $x_1 = 0$ (1 TP).

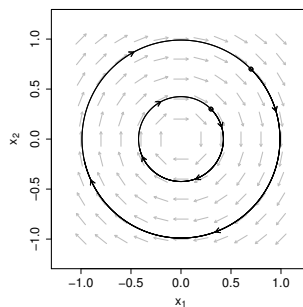
Bewertung: Siehe oben.

(3 Punkte)

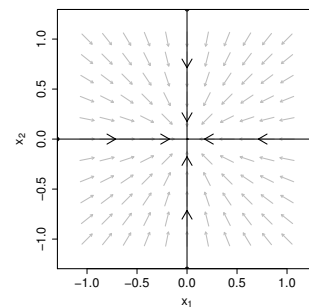
2.5. Lösung:



a) Sattelpunkt



b) Zentrum



c) stabiler Knoten

Die Eigenwerte λ_1, λ_2 sind gegeben durch

a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1,$

b) $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i,$

c) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -2.$

Bewertung: Für jedes richtige Phasenporträt in den Teilaufgaben a) und c) 1,5 TP, für b) 2,5 TP. Falls in b) das Phasenporträt falsch gezeichnet wurde, kann man für die richtige Eigenwertberechnung noch 1 TP erhalten. Für jede richtige Charakterisierung 0,5 TP.

(7 Punkte)

3. Aufgabe: Strukturierte elektrische Systeme (20 Punkte)

* Lösung *

3.1. Lösung:

- a) Konnektoren sind Standardschnittstellen, die zur Verkopplung von (Teil-)Modellen zu einem Gesamtmodell dienen (1 TP).
- b) Variablen, die mit dem Schlüsselwort **flow** gekennzeichnet sind, bezeichnet man als *Flussvariablen* (0,5 TP), und solche ohne das Schlüsselwort als *Potentialvariablen* (0,5 TP). Beim Verknüpfen werden die Flussvariablen in den beteiligten Konnektoren zu null addiert (0,5 TP), während die Potentialvariablen gleichgesetzt werden (0,5 TP).
- c) Der Strom wird als Flussvariable modelliert, und die Addition dieser Flussvariablen zu null in einem Knoten (also bei der Verkopplung mehrerer Teilmodelle) entspricht der Knotengleichung (1 TP). Das elektrische Potential wird als Potentialvariable modelliert und somit beim Verbinden der Bauteile gleichgesetzt. Dadurch ist die Summe der Potentialdifferenzen über die einzelnen Bauteile in einer Masche gleich null, was der Maschengleichung entspricht (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. Bei a) muss klar werden, dass einzelne Modelle verknüpft werden (sonst max. 0,5 TP). **(5 Punkte)**

3.2. Lösung:

- a) $p.v$ bezeichnet das elektrische Potential am Pin p , und $n.v$ das elektrische Potential am Pin n (1 TP). Die drei gegebenen Gleichungen verknüpfen die Größen in den Konnektoren mit denen, die in der Bauteilgleichung verwendet werden (1 TP).
- b) (1) **parameter** Resistance R ; (0,5 TP)
 (2) $v = R * i$; (1 TP)
 (3) **parameter** Capacitance C ; (0,5 TP)
 (4) $C * \text{der}(v) = i$; (1 TP)

Bewertung: Siehe oben. Statt Resistance und Capacitance kann auch jeweils Real verwendet werden. **(5 Punkte)**

3.3. Lösung:

```

model MyLossResistor;
    extends MyResistor;           // 1 TP
    Modelica.SIunits.Power pL;    // 0,5 TP
equation
    pL = v * i;                   // 1 TP
end MyLossResistor;

```

Bewertung: Siehe oben, plus 0,5 TP für die richtige Struktur. Für die Verlustleistung kann auch der Datentyp Real verwendet werden. **(3 Punkte)**

3.4. Lösung:

```
model Gesamtsystem
  import Modelica.Electrical.Analog.*;
  Basic.Ground ground;
  Sources.SineVoltage source;
  MyLossResistor R1 (R=20);           // 1 TP
  MyCapacitor C1 (C=3e-6, v(start=10)); // 1,5 TP
  MyCapacitor C2 (C=5e-6, v(start=5)); // 1,5 TP
equation
  connect (source.p, R1.p);           // 0,5 TP
  connect (R1.p, C2.p);               // 0,5 TP
  connect (C2.n, C1.n);               // 0,5 TP
  connect (R1.n, C1.n);               // 0,5 TP
  connect (C1.p, ground.p);           // 0,5 TP
  connect (ground.p, source.n);       // 0,5 TP
end Gesamtsystem;
```

Bewertung: Siehe oben.**(7 Punkte)**

4. Aufgabe: Hybride mechanische Systeme (17 Punkte)

* Lösung *

4.1. Lösung: Zunächst wird die bekannte Bewegungsgleichung $\sum_i \mathbf{F}_i(t) = m \cdot \dot{\mathbf{v}}(t)$ sowie der Zusammenhang zwischen Position und Geschwindigkeit aufgestellt:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v_x(t) \\ \dot{y}(t) &= v_y(t) \\ m \cdot \dot{v}_x(t) &= F_{R,x}(t) \\ m \cdot \dot{v}_y(t) &= F_{R,y}(t) \\ F_{R,x}(t) &= -k \cdot v_x(t) \\ F_{R,y}(t) &= -k \cdot v_y(t)\end{aligned}$$

Für die Zustandsraumdarstellung müssen die algebraischen Variablen $F_{R,x}(t)$ und $F_{R,y}(t)$ eliminiert werden. Hierdurch ergibt sich das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}}_{=A \text{ (0,5 TP)}} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} \quad (2 \text{ TP})$$

Zusätzlich werden Anfangsbedingungen für $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$ benötigt (da es sich um ein Index-1 System handelt können alle vier frei vorgegeben werden):

$$\begin{aligned}x(t=0) &= x_0 & (0,5 \text{ TP}) \\ y(t=0) &= y_0 & (0,5 \text{ TP}) \\ v_x(t=0) &= v_0 \cdot \cos(\alpha) & (0,5 \text{ TP}) \\ v_y(t=0) &= v_0 \cdot \sin(\alpha) & (0,5 \text{ TP})\end{aligned}$$

Da das System weder Eingänge noch Ausgänge hat, gilt $B = C = D = 0$ (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben.

(5 Punkte)

4.2. Lösung: Die Systemmatrix \mathbf{A} hat keinen vollen Rang (für die Systemmatrix aus Aufgabe 4.1 ist der Rang $2 < 4$ und für das Ersatzsystem $2 < 3$) (1 TP) und ist somit nicht invertierbar. Daher hat die Gleichung $\mathbf{0} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$ (bzw. für das Ersatzsystem $\mathbf{0} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$) keine eindeutige Lösung und das System hat somit keine eindeutige Ruhelage (1 TP). Eine Ruhelage des Systems bedeutet physikalisch dass die Kugel auf der Bahn liegen bleibt ($\dot{x} = 0, \dot{v} = 0$). Dies kann bei geeigneten Anfangsbedingungen unter den angegebenen Annahmen an einem beliebigen Ort auf der Bahn passieren, sodass wir auch physikalisch keine eindeutige Ruhelage erwarten (1 TP). **(3 Punkte)**

4.3. Lösung: Die Kugel berührt das Pindeck, wenn ihre Koordinaten den linken Rand der Pindecks übereinstimmen. Dieser wird beschrieben durch die Gleichungen

$$y = \pm(x - 10), \quad x \geq 10.$$

Damit ein Stoß stattfindet muss also gelten

$$x \geq 10 \quad (1 \text{ TP})$$

$$\wedge |y| \leq x - 10 \quad (1 \text{ TP})$$

Bewertung: Siehe oben.

(2 Punkte)

4.4. Lösung:

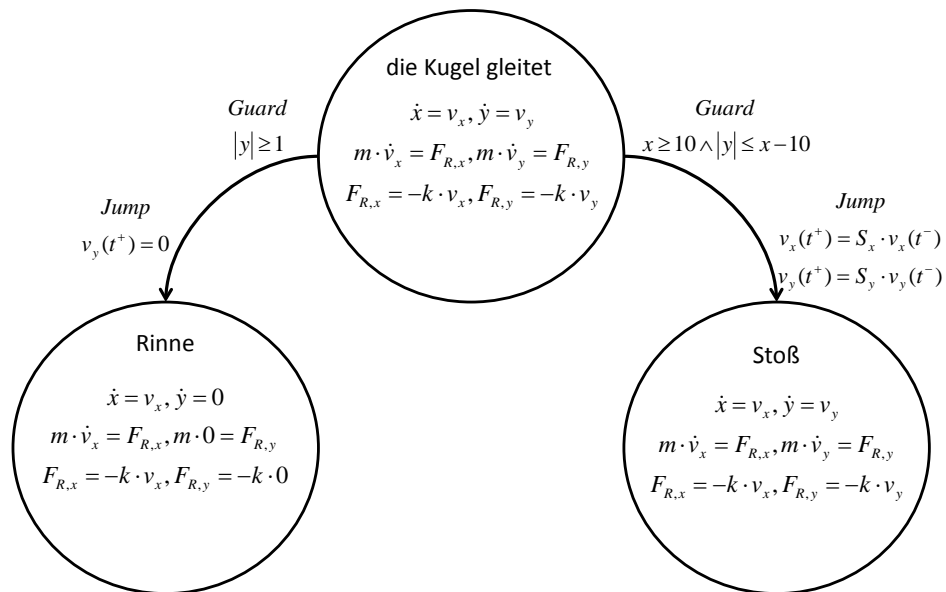


Abbildung 3: Lösung zu Aufgabe 4.4 mit Hilfe von Aufgabe 4.1 und 4.3

Bewertung: Der Guard $|y| \geq 1$ gibt 1 TP ($y \geq 1 \wedge y \leq -1$) ist auch richtig. Der Guard aus Aufgabe 4.3 gibt 0,5 TP. Der Jump $v_y(t^+) = 0$ gibt 0,5 TP. Der andere Jump gibt 0,5 TP pro richtige Gleichung. Jede korrekte Kante gibt 0,5 TP. Jede korrekte Mode mit sinnvollen Namen gibt 0,5 TP. Jedes korrekte Modell in jeder Mode gibt 0,5 TP. Die Gleichungen mit der 0 in der Mode *Rinne* können weggelassen werden.

(7 Punkte)

5. Aufgabe: DAE-Systeme und numerische Integration (19 Punkte)

* Lösung *

5.1. Lösung: Die Inzidenzmatrix ergibt sich zu:

$$\begin{array}{c|c} & K_S(t) \\ \hline 4 & 0 \end{array}$$
 Die Inzidenzmatrix hat keinen vollen strukturellen Rang, es liegt somit kein Index-1 System vor. Da das Teilsystem singulär ist, ist somit auch das System singulär und das System hat einen höheren Index als 1.

Bewertung: 0,5 TP für die korrekte Beschriftung der Spalten und Reihen gibt es nur bei Auswahl der richtigen Gleichung und Variable. Für den korrekten Matrixeintrag gibt es 0,5 TP. Für die korrekte Aussage über den strukturellen Rang gibt es 0,5 TP. **(1,5 Punkte)**

5.2. Ableiten der algebraischen Glg. 4:

$$0 = \underbrace{2\dot{K}_A(t)K_A(t)p_S}_{(1 \text{ TP})} \underbrace{- p_A}_{(1 \text{ TP})}$$

und einsetzen von Glg. 3:

$$0 = 2 \frac{p_A}{K_S(t)} K_A(t) p_S - p_A \quad (\text{a})(0,5 \text{ TP})$$

ergibt die versteckte algebraische Gleichung (a) und explizite Gleichung für $K_S(t) = 2p_S K_A(t)$ (0,5 TP).

Mit der expliziten Gleichung für $K_S(t)$ erhalten wir ein Index-1 System bestehend aus den Gleichungen 1, 2, 4 und (a) (1 TP).

Für das neue Index-1 System werden zwei unabhängige Anfangsbedingungen ($A(t=0a) = 53$; $S(t=0a) = 82$) benötigt (1 TP). Der differentielle Index des ursprünglichen Systems ist 2 (1 TP), da man eine algebraische Gleichung einmal nach der Zeit ableiten musste, um ein Index-1 System zu erhalten.

Bewertung: Siehe oben. Für das Kennzeichnen der versteckten algebraischen Gleichung gibt es 0,5 TP. **(6 Punkte)**

5.3. Die allgemeine Gleichung für das explizite Euler-Verfahren lautet:

$$\underbrace{x_{n+1}}_{0,5 \text{ TP}} = \underbrace{x_n}_{0,5 \text{ TP}} + \underbrace{\Delta t f(x_n, t_n)}_{0,5 \text{ TP}}$$

Der quadratische Term für die Fehlerabschätzung lautet:

$$\Theta(\Delta t_n^2) = \underbrace{\frac{\Delta t^2}{2}}_{0,5 \text{ TP}} \underbrace{\frac{d^2 x}{dt^2} \Big|_{t=t_n}}_{0,5 \text{ TP}}$$

Bewertung: Siehe oben.

(2,5 Punkte)

5.4.

$$\begin{aligned} A(t = 12a) &= 53 + 12a \left(0,064 \frac{1}{a} \cdot 53 \cdot \frac{100 - 53 - 0,23 \cdot 82}{100} \right) \\ &= 64,45 \end{aligned} \quad (1,5 \text{ TP})$$

$$\begin{aligned} S(t = 12a) &= 82 + 12a \left(0,134 \frac{1}{a} \cdot 82 \cdot \frac{150 - 82 - 0,74 \cdot 53}{150} \right) \\ &= 107,3 \end{aligned} \quad (1,5 \text{ TP})$$

$$\begin{aligned} A(t = 24a) &= 64,45 + 12a \left(0,064 \frac{1}{a} \cdot 64,45 \cdot \frac{100 - 64,45 - 0,23 \cdot 107,3}{100} \right) \\ &= 69,83 \end{aligned} \quad (1,5 \text{ TP})$$

$$\begin{aligned} S(t = 24a) &= 107,3 + 12a \left(0,134 \frac{1}{a} \cdot 107,3 \cdot \frac{150 - 107,3 - 0,74 \cdot 64,45}{150} \right) \\ &= 101,56 \end{aligned} \quad (1,5 \text{ TP})$$

Bewertung: Siehe oben.

(6 Punkte)

5.5. Das explizite Euler-Verfahren ist nicht A-stabil. (1 TP). Daher kann es bei der Approximation mit großen Zeitschritten zu numerischen Instabilitäten kommen. Um das zu vermeiden, können kleinere Rechenschritte verwendet werden (1 TP) oder ein anderes numerisches Lösungsverfahren (z.B. implizites Euler-Verfahren) angewendet werden (1 TP).

Bewertung: Siehe oben.

(3 Punkte)

Schriftliche Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Wintersemester 2016/17

1. Aufgabe: Finite Differenzen (12 Punkte)

Ein Rohr wird von einem heißen Luftstrom durchströmt. Die Temperatur an jeder Stelle des Rohrs kann über eine Advektions-Diffusions-Gleichung beschrieben werden:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad a \geq 0, \lambda \geq 0. \quad (1)$$

Gesucht wird die Temperatur $T(x, t)$. Gegeben sind die Advektionsgeschwindigkeit a der Luftströmung sowie die Diffusionskonstante λ . Gleichung (1) soll mit einem Finite-Differenzen-Verfahren auf einem äquidistanten Gitter mit Gitterschrittweite Δx diskretisiert werden.

Gegeben sei außerdem folgende Taylorreihe von $T(x)$, entwickelt um x_i und ausgewertet bei x_{i+1} :

$$T_{i+1} \approx T_i + \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_i} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \Big|_{x=x_i} \Delta x^3 + \dots \quad (2)$$

1.1. Bestimmen Sie eine weitere Taylorreihe von T , welche Ihnen die Herleitung eines **zentralen** Differenzenausdrucks für $\frac{\partial T}{\partial x}$ ermöglicht. (2 Punkte)

1.2. Leiten Sie nun den zentralen Differenzenausdruck für $\frac{\partial T}{\partial x}$ her. Bestimmen Sie den Abbruchfehler und die Genauigkeitsordnung. (4 Punkte)

1.3. Diskretisieren Sie Gleichung (1) mit dem Euler-rückwärts Verfahren in der Zeit. Verwenden Sie folgende räumliche Differenzenausdrücke:

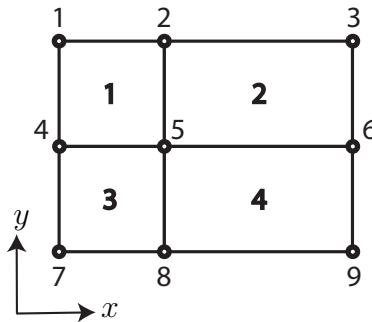
$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (4)$$

(3 Punkte)

1.4. Beschreiben Sie ein weiteres System, welches sich, genau wie das Rohr in dieser Aufgabe, durch eine Advektions-Diffusions-Gleichung beschreiben lässt. Sie können ein beliebiges Beispiel wählen. Geben Sie jedoch genau an, welches die Unbekannte ist und was genau durch den Advektionsterm und den Diffusionsterm beschrieben wird.

(3 Punkte)

2. Aufgabe: Finite Elemente**(9 Punkte)****2.1.** Betrachten Sie das folgende Rechengitter:

Die Koordinaten der Knoten sind wie folgt gegeben:

$$\mathbf{x}_1 = (0; 2), \mathbf{x}_2 = (1; 2), \mathbf{x}_3 = (3; 2)$$

$$\mathbf{x}_4 = (0; 1), \mathbf{x}_5 = (1; 1), \mathbf{x}_6 = (3; 1)$$

$$\mathbf{x}_7 = (0; 0), \mathbf{x}_8 = (1; 0), \mathbf{x}_9 = (3; 0)$$

Bestimmen Sie für alle Elemente den Wert der Determinante $|\det J|$ der Jacobi-Matrix der Transformation von Referenz- in globale Koordinaten. Verwenden Sie hierfür die folgende Interpolation:

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x_{u_{li}} + \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2}\xi \\ y_{u_{li}} + \frac{\Delta y}{2} + \frac{\Delta y}{2}\eta \end{pmatrix}. \quad (5)$$

In der Interpolation bezeichnen $x_{u_{li}}$ und $y_{u_{li}}$ die Koordinaten des unteren linken Knotens eines Elements und Δx und Δy die Ausdehnung des Elements in x - und y -Richtung. Ihr Rechenweg muss ersichtlich sein. **(3 Punkte)**

2.2. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Fläche eines Elements und der in Aufgabe 2.1 berechneten Determinante der Jacobi-Matrix der Transformation? Warum besteht dieser Zusammenhang? (*Hinweis: Die Transformation aus Aufgabe 2.1 verwendet ein Quadrat mit Eckkoordinaten $(-1, -1)$ und $(1, 1)$ als Referenzelement.*)

(3 Punkte)

2.3. Bezogen auf das Gitter aus Aufgabe 2.1 soll nun die Systemmatrix für den folgenden Term aufgestellt werden: $\int_{\Omega} \phi_i(x, y) \phi_k(x, y) d\Omega$. Die dazugehörige Elementmatrix ist wie folgt gegeben:

$$\mathbf{A}^e = \begin{pmatrix} 4/9 & 2/9 & 1/9 & 2/9 \\ 2/9 & 4/9 & 2/9 & 1/9 \\ 1/9 & 2/9 & 4/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/9 & 2/9 & 4/9 \end{pmatrix} |\det J|$$

Bestimmen Sie nun den Eintrag A_{71} der globalen Systemmatrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & A_{18} & A_{19} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} & A_{28} & A_{29} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} & A_{38} & A_{39} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} & A_{48} & A_{49} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} & A_{58} & A_{59} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} & A_{68} & A_{69} \\ A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & A_{75} & A_{76} & A_{77} & A_{78} & A_{79} \\ A_{81} & A_{82} & A_{83} & A_{84} & A_{85} & A_{86} & A_{87} & A_{88} & A_{89} \\ A_{91} & A_{92} & A_{93} & A_{94} & A_{95} & A_{96} & A_{97} & A_{98} & A_{99} \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie dazu auch ihr Ergebnis aus Aufgabe 2.1. Ihr Rechenweg muss ersichtlich sein. (*Hinweis 1: Sollten Sie Aufgabe 2.1 nicht gelöst haben, verwenden Sie $|\det J| = 2$ für alle Elemente. Hinweis 2: Die Knotennummerierung des Referenzelements beginnt unten links und verläuft dann gegen den Uhrzeigersinn.*) **(3 Punkte)**

3. Aufgabe: Finite Volumen (10 Punkte)

Sie wollen die zeitabhängige Temperaturverteilung $T(x, t)$ in einem Stab, der am linken Ende erhitzt wird, bestimmen. Am rechten Ende ist der Stab an einer Wand mit konstanter Temperatur T_W eingespannt. Gehen Sie davon aus, dass die Wärmeleitfähigkeit λ im Stab konstant ist und das Erhitzen durch einen konstanten Wärmefluss q modelliert werden kann.

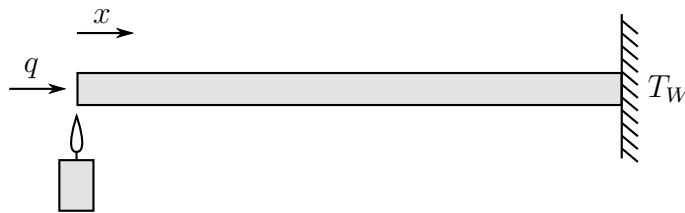


Abbildung 1: 1D Gitter

3.1. Nennen Sie die Differentialgleichung, die dieses Problem beschreibt, und bestimmen Sie die integrale Form. Vereinfachen Sie diese analytisch so weit wie möglich.

(2.5 Punkte)

3.2. Nennen Sie die Art von Randbedingung am linken und rechten Rand. (1 Punkt)

3.3. Welche weitere Information wird zur vollständigen Beschreibung des Problems benötigt? (1 Punkt)

In den folgenden Aufgabenteilen sollen Sie nun die Differentialgleichung diskretisieren. Verwenden Sie dazu das äquidistante Gitter aus Abbildung 2.

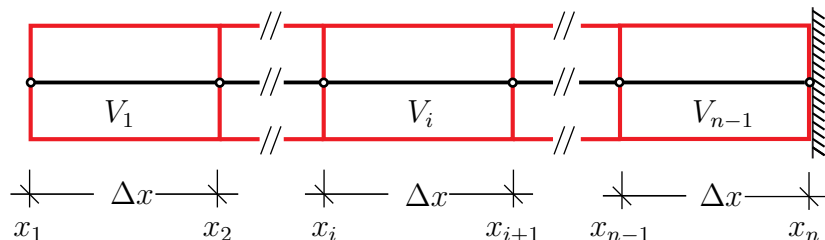


Abbildung 2: 1D Gitter

3.4. Um welche Art von Finite-Volumen-Diskretisierung handelt es sich in Abbildung 2?

(1 Punkt)

3.5. Führen Sie nun die Volumenmittelung für den zeitabhängigen Term durch.

(1 Punkt)

3.6. Diskretisieren Sie nun die Flüsse:

1. für ein allgemeines Volumen V_i
2. für das Randvolumen V_1 unter Berücksichtigung der gegebenen Randbedingung.

(3 Punkte)

3.7. Welcher weitere Schritt ist notwendig um ein vollständig diskretisiertes Problem zu erhalten?

(0.5 Punkte)

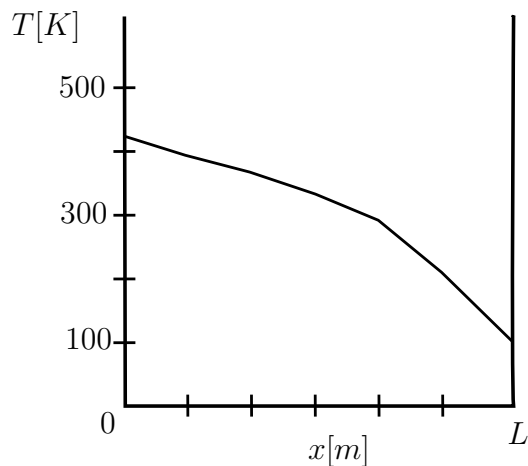
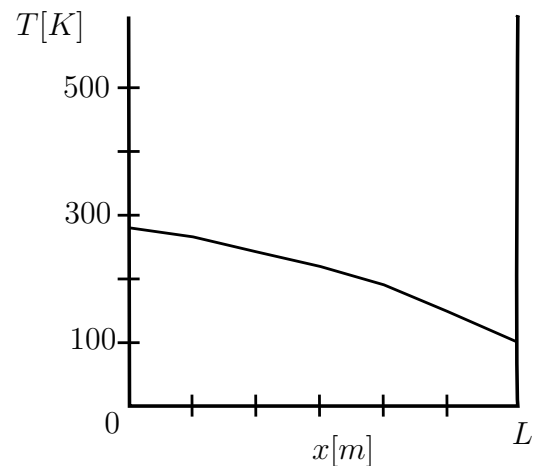
4. Aufgabe: Fehler**(11 Punkte)**

Der Abkühlvorgang eines schlanken Stabes kann durch die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad (6)$$

beschrieben werden. (T : Temperatur, λ : Temperaturleitkoeffizient)

In einem Stab liegt eine Anfangstemperatur $T(x, t = 0) = 500 \text{ K}$ vor. Auf der linken Seite ist der Stab isoliert ($\frac{\partial T}{\partial x}(x = 0, t) = 0 \frac{\text{K}}{\text{m}}$) und auf der rechten Seite wird mit konstanter Temperatur gekühlt ($T(x = L, t) = 300 \text{ K}$).

4.1.Abbildung 3: $t = t_1$ Abbildung 4: $t = t_2$

In den Abbildungen 3 und 4 sind numerische Lösungen der Differentialgleichung (6) für zwei Zeitschritte angegeben. Welche Fehler liegen am linken und rechten Rand vor? In welche Fehlerart lassen sich diese Fehler einordnen?

(3 Punkte)

4.2. Die Wärmeleitungsgleichung (6) kann mit dem verallgemeinerten Crank-Nicolson-Schema in der Zeit und zentralen Differenzen im Raum folgendermaßen diskretisiert werden:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - \frac{\lambda}{\Delta x^2} \left((1 - \phi) (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) + \phi (T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}) \right) = 0. \quad (7)$$

Mit Hilfe der v. Neumann-Stabilitätsanalyse soll die Stabilität des Verfahrens für $\Delta t > 0$, $\Delta x > 0$ und $\lambda > 0$ auf einem äquidistanten Gitter ($x_i = i \cdot \Delta x$) überprüft werden. Durch Einsetzen des Ansatzes

$$T(x, t) = V(t)e^{I(k \cdot x)} \quad (8)$$

erhalten wir das Amplitudenverhältnis:

$$\left| \frac{V^{n+1}}{V^n} \right| = \left| \frac{1 + (1 - \phi) \cdot r \cdot (e^{Ik\Delta x} - 2 + e^{-Ik\Delta x})}{1 - \phi \cdot r \cdot (e^{Ik\Delta x} - 2 + e^{-Ik\Delta x})} \right| \quad (9)$$

mit

$$r = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \quad \text{und} \quad I = \sqrt{-1}. \quad (10)$$

Ist das Verfahren jeweils für $\phi = 0$ und $\phi = 1$ stabil? **(5 Punkte)**

4.3.

Durch Einsetzen der Taylorreihenentwicklung von T um den Punkt x_i^n in Gleichung (7) erhält man für $\phi = 0.5$:

$$L_\Delta = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (11)$$

Bestimmen Sie den Abbruchfehler. Welche Ordnung hat das Verfahren bezüglich der zeitlichen und räumlichen Diskretisierung? Ist das Verfahren konsistent? Begründen Sie Ihre Antwort. **(3 Punkte)**

5. Aufgabe: Grundlagen (8 Punkte)

5.1. Eine partielle Differentialgleichung soll mittels der Finite-Volumen-Methode gelöst werden. Für die Gebietsränder sind Dirichlet-Randbedingungen gegeben. Zur Vernetzung des Rechengebiets gibt es bei der Finite-Volumen-Methode zwei verschiedene Schemata. Wie heißen diese? Welches Schema würden Sie unter den gegebenen Umständen bevorzugen? Begründen Sie Ihre Wahl. (2 Punkte)

5.2. Für die Lösung einer instationären partiellen Differentialgleichung wurde ein unbekanntes Verfahren zur Zeitdiskretisierung verwendet. Im Rahmen einer Verfeinerungsstudie wurde der Zeitschritt sukzessive verkleinert. Der daraus resultierende Verlauf des Fehlers ist in Tabelle 1 gegeben. Welche Genauigkeitsordnung hat das verwendete Verfahren? Könnte es sich bei dem Verfahren um das implizite Euler-Verfahren handeln? Begründen Sie Ihre Antwort.

Tabelle 1: Fehlerverlauf in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite.

Δt	Fehler
0,5	$2,2e - 5$
0,25	$5,5e - 6$
0,05	$2,2e - 7$

(2 Punkte)

5.3. Auf dem Gitter in Abbildung 5 soll die stationäre Wärmeleitungsgleichung gelöst werden. Als Verfahren wird die Finite-Elemente-Methode gewählt. Nach der Assemblierung ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Welcher Randbedingungstyp wurde für Knoten 1 und welcher für Knoten 4 gewählt? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

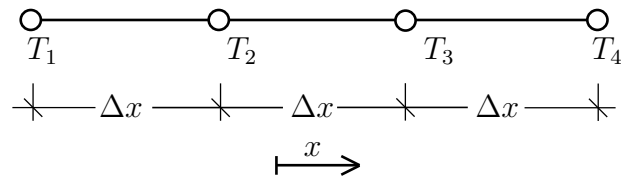


Abbildung 5: 1D Gitter

5.4. Die Advektionsgleichung soll auf einem äquidistanten Gitter mit $\Delta x = 0,5 \text{ m}$ und $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ gelöst werden. Die Advektionsgeschwindigkeit ist $a = 6,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Würden Sie zur Zeitdiskretisierung das Euler-vorwärts-Verfahren oder das Euler-rückwärts-Verfahren wählen? Begründen Sie Ihre Antwort. (*Hinweis: Die CFL-Zahl lautet $C = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$*)

(2 Punkte)

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Wintersemester 2016/17

1. Aufgabe: Finite Differenzen (12 Punkte)

*** Lösung ***

1.1. Lösung:

$$T_{i-1} \approx T_i - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_i} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right|_{x=x_i} \Delta x^3 + \dots \quad (1)$$

1.2. Lösung:

Gegebene Taylorreihe minus Taylorreihe aus 1.1:

$$T_{i+1} - T_{i-1} = 2 \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_i} \Delta x + \frac{1}{3} \left. \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right|_{x=x_i} \Delta x^3 \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right|_{x=x_i} \Delta x^2 \quad (3)$$

Der Ausdruck ist 2. Ordnung genau.

1.3. Lösung:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \lambda \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (4)$$

1.4. Lösung:

Ein weiteres Beispiel wäre die Alkoholkonzentration im Blutkreislauf. Die Unbekannte ist die Konzentration. Sie ist von der Zeit und vom Raum abhängig. Die Blutströmung sorgt für Advektion. Zusätzlich verteilen sich die Alkoholmoleküle möglichst gleichmäßig über Diffusionseffekte.

2. Aufgabe: Finite Elemente**(9 Punkte)***** Lösung *****2.1. Lösung:**

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta y}{2} \end{pmatrix}$$

$$|\det J| = \frac{\Delta x \Delta y}{4}$$

$$|\det J_1| = \frac{1 \cdot 1}{4} = 0,25$$

$$|\det J_2| = \frac{2 \cdot 1}{4} = 0,5$$

$$|\det J_3| = \frac{1 \cdot 1}{4} = 0,25$$

$$|\det J_4| = \frac{2 \cdot 1}{4} = 0,5$$

2.2. Lösung:

Es gilt für die Flächen:

$$\Omega_{global} = \int_{\Omega_{global}} 1 \, dx \, dy, \quad \Omega_{referenz} = \int_{\Omega_{referenz}} 1 \, d\xi \, d\eta,$$

und für den Zusammenhang der Integrale mittels der Koordinatentransformation:

$$\int_{\Omega_{global}} 1 \, dx \, dy = \int_{\Omega_{referenz}} 1 \, d\xi \, d\eta |\det J_{global}|.$$

Daraus ergibt sich:

$$\Rightarrow |\det J_{global}| = \frac{\Omega_{global}}{\Omega_{referenz}}$$

Für das Gitter in Aufgabe 2.1 gilt:

$$\Omega_{global} = \Delta x \Delta y, \quad \Omega_{referenz} = 4.$$

2.3. Lösung:

$$\begin{aligned} A_{71} = \int_{\Omega} \phi_7(x, y) \phi_1(x, y) \, dx \, dy &= \int_{\Omega_1} \phi_7(x, y) \phi_1(x, y) \, dx \, dy + \int_{\Omega_2} \phi_7(x, y) \phi_1(x, y) \, dx \, dy \\ &+ \int_{\Omega_3} \phi_7(x, y) \phi_1(x, y) \, dx \, dy + \int_{\Omega_4} \phi_7(x, y) \phi_1(x, y) \, dx \, dy = 0 \end{aligned}$$

In keinem der 4 Elemente sind ϕ_7 und ϕ_1 gleichzeitig ungleich 0.

Aus diesem Grund sind alle vier Integrale gleich 0.

3. Aufgabe: Finite Volumen (10 Punkte)

* Lösung *

3.1. Lösung:

Wärmeleitungsgleichung::

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5)$$

Integrale Form:

$$\int_V \frac{\partial T}{\partial t} dx = \int_V \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \quad (6)$$

Analytische Vereinfachung:

$$\int_V \frac{\partial T}{\partial t} dx = \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_L^R \quad (7)$$

3.2. Lösung:

linke Randbedingung: Neumann Randbedingung

rechte Randbedingung: Dirichlet Randbedingung

3.3. Lösung: Es fehlt noch eine Anfangsbedingung.

3.4. Lösung: Es handelt sich um eine zellzentrierte FV-Diskretisierung.

3.5. Lösung:

$$\int_{V_i} \frac{\partial T}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_i} T dx \approx \frac{\partial T_i}{\partial t} \int_{V_i} dx = \frac{\partial T_i}{\partial t} \Delta x \quad (8)$$

3.6. Lösung: Finite Differenzen Approximation der Flüsse:

Allgemeiner Fall für V_i :

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_L^R = \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_{i+1}} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_i} = \lambda \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} - \lambda \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} = \lambda \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x} \quad (9)$$

Für das Randvolumen V_1 gilt aufgrund der Randbedingung:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_L^R = \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_2} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_1} = \lambda \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} - q \quad (10)$$

3.7. Lösung: Es ist noch eine zeitliche Diskretisierung notwendig.

4. Aufgabe: Fehler (11 Punkte)

* Lösung *

4.1. Lösung:

Rechter Rand: Modellierungsfehler, Dirichletrandbedingung $T(x=L,t)=300K$ ist nicht erfüllt

Linker Rand: Interpolationsfehler: Neumannrandbedingung $\frac{\partial T}{\partial x}(x=0,)$ kann durch lineare Interpolation nicht exakt erfüllt werden.

4.2. Lösung:

Durch Einsetzen der Eulerschen Formel $e^{\pm Ix} = \cos(x) \pm I \sin(x)$:

$$\left| \frac{V^{n+1}}{V^n} \right| = \left| \frac{1 + (1 - \phi) * 2 * r(\cos(k\Delta x) - 1)}{1 - \phi * 2 * r(\cos(k\Delta x) - 1)} \right|. \quad (11)$$

Für $\phi = 0$ erhält man:

$$\left| \frac{V^{n+1}}{V^n} \right| = |1 + 2 * r(\cos(k\Delta x) - 1)|. \quad (12)$$

Die Untersuchung des Ausdruckes im Betrag ergibt mit $r > 0$:

$$\left| \frac{V^{n+1}}{V^n} \right| = \left| 1 + 2 \cdot r \underbrace{(\cos(k\Delta x) - 1)}_{\substack{[-1,1] \\ [-2,0] \\ [-4 \cdot r, 0]}} \right|. \quad (13)$$

Daraus folgt:

$$\left| \frac{V^{n+1}}{V^n} \right| \leq 1 \text{ für } 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \quad (14)$$

Das Verfahren ist für $\phi = 0$ bedingt stabil!

Für $\phi = 1$ erhält man:

$$\left| \frac{V^{n+1}}{V^n} \right| = \left| \frac{1}{1 - 2 * r (\cos(k\Delta x) - 1)} \right|. \quad (15)$$

Die Untersuchung des Nenners ergibt mit $r > 0$:

$$\left| \underbrace{1 - 2 * r \underbrace{(\cos(k\Delta x) - 1)}_{[-2,0]}}_{\geq 0} \right|, \quad (16)$$

Daraus folgt:

$$\left| \frac{V^{n+1}}{V^n} \right| \leq 1 \text{ ist immer erfüllt.} \quad (17)$$

Das Verfahren ist für $\phi = 1$ stabil!

4.3. Lösung:

Der Abbruchfehler berechnet sich wie folgt

$$L_\Delta - L = \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) = \mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2) \quad (18)$$

Aus dem Abbruchfehler ergibt sich ein Verfahren 2. Ordnung in Raum und Zeit.

Mit Hilfe einer Grenzwertuntersuchung erhält man:

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} ||L_\Delta - L|| = 0, \quad (19)$$

d.h. das Verfahren ist konsistent.

5. Aufgabe: Grundlagen (8 Punkte)

* Lösung *

5.1. Lösung: Es gibt das zellzentrierte und das knotenzentrierte Schema. Für die gegebene Problemstellung bietet sich das knotenzentrierte Schema an, da dabei der Randwert direkt auf dem Randknoten vorgeschrieben werden kann.

5.2. Lösung: Es handelt sich um ein Verfahren 2. Ordnung, da der Fehler sich quadratisch proportional zum Zeitschritt verhält. Das implizite Euler-Verfahren hat Genauigkeitsordnung 1. Es kann deshalb nicht verwendet worden sein.

5.3. Lösung: Für Knoten 1 wurde eine Dirichlet-Randbedingung gewählt, da der Knoten nicht mehr im Gleichungssystem auftaucht. Es existiert also ein bekannter Wert für diesen Knoten, der in die rechte Seite eingeht. Für Knoten 4 muss noch ein Wert berechnet werden. Es handelt sich deshalb um eine Neumann-Randbedingung

5.4. Lösung: Die CFL-Zahl ergibt sich zu

$$C = \frac{a\Delta t}{\Delta x} = 1,26 \geq 1. \quad (20)$$

Dadurch ist nur ein implizites Verfahren stabil. Es muss also das Euler-rückwärts-Verfahren verwendet werden.