Schriftliche Prüfung: Aufgaben des AVT-Teils. Jeder Punkt entspricht 1 Minute.

Simulationstechnik

Sommersemester 2018

---

1. Aufgabe: Fragen (20 Punkte)

1.1. Geben Sie für ein nichtlineares, zeitvariantes System die allgemeine Form der Zustandsraumdarstellung an. *Hinweis: Hier brauchen Sie keine Anfangsbedingungen anzugeben.* **(1 Punkt)**

1.2. Stellen Sie die allgemeine Bilanzgleichung für thermodynamische Systeme auf und benennen Sie alle auftretenden Größen. **(3 Punkte)**

1.3. Nennen Sie eine Samplingmethode zur Auswahl von Parameterwerten im Rahmen einer Monte-Carlo Simulation. **(1 Punkt)**

1.4.

a) Was versteht man unter dem Begriff *signifikante Stellen*?

b) Das Ergebnis einer Parameterschätzung von p wird mit dem Wert $p = 1,01483750307534$ angegeben. Was ist bei der Angabe des Zahlenwertes möglicherweise als fragwürdig zu sehen? **(2 Punkte)**

1.5. Welche Aussage kann man über die Stabilität eines linearen System machen, wenn

a) die Realteile aller Eigenwerte λ_i negativ sind?

b) der Realteil von mindestens einem Eigenwert λ_i positiv ist? **(1 Punkt)**

1.6. Betrachten Sie das folgende gegebene Petri-Netz in Abb. 1:

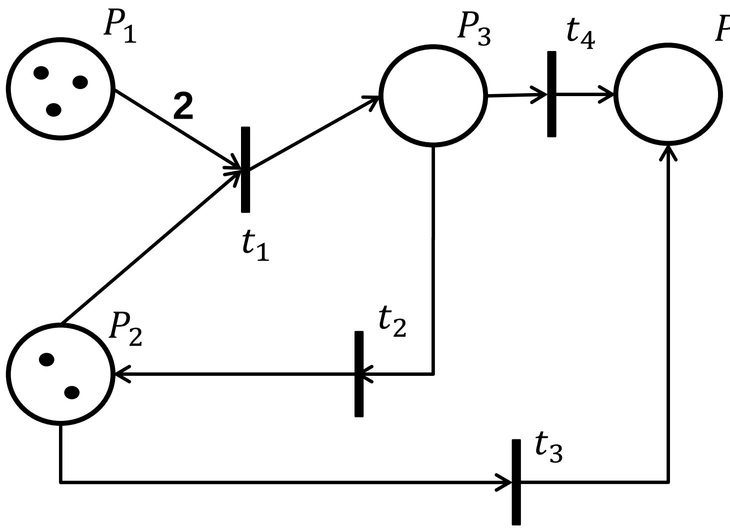


Abbildung 1: Petri-Netz

a) Sie schalten einmal Transition t_1. Geben Sie die Anzahl der Token auf den Stellen P_1, P_2 und P_3 an. Wie nennt man die Verteilung von Token in einem Petri-Netz? **(2 Punkte)**

b) Geben Sie die Definition eines sicheren Petri-Netzes an. Ist das gegebene Petri-Netz sicher? **(1,5 Punkte)**

c) Wird das gegebene Petri-Netz lebendig bleiben, nachdem Sie t_1 geschalten haben? Begründen Sie Ihre Antwort. **(1,5 Punkte)**

d) Was ist beim Verknüpfen zweier Stellen in einem Petri-Netz nicht erlaubt? **(1 Punkt)**

1.7. Der Temperaturverlauf eines Wasserglases mit einem Eiswürfel soll modelliert werden. Das folgende Prinzipbild zeigt ein Wasserglas mit einem Eiswürfel, wobei T die Temperatur des Wassers mit Wert T_0 zum Zeitpunkt $t = 0$, T_{Eis} und ρ_{Eis} die konstante Temperatur und die konstante Dichte des Eiswürfels und J_m den Schmelzwasserstrom bezeichnen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Masse des Eiswürfels $m_{\text{Eis},0}$ und die Masse des Wassers $m_{\text{H}_2\text{O},0}$.

a) Abstrahieren Sie das Beispiel in eine Skizze wie in Abb. 3 und zeichnen Sie die verschiedenen Größen ein. Geben Sie auch an, welche der Größen Schnittgrößen, Speichergrößen, Anfangswerte und Parameter sind.

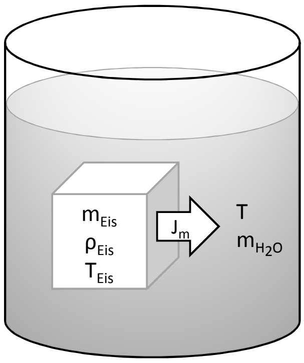


Abbildung 2: Prinzipbild des Wasserglases mit Eiswürfel

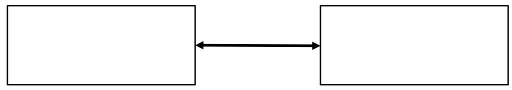


Abbildung 3: Abstraktionsbild des Systems

Hinweis: Nehmen Sie an, dass das Wasserglas-System von der Umgebung isoliert modelliert wird. Verwenden Sie nur die im Aufgabentext und in der Abb. 2 dargestellten Symbole und schreiben Sie ***nicht*** *auf das Aufgabenblatt.* **(4 Punkte)**

b) Das System aus Wasserglas mit Eiswürfel kann durch folgende Gleichungen beschrieben werden:

$$\dot{T}(t) = \frac{-\alpha \cdot A(t) \cdot (T(t) - T_{Eis})}{m_{H_2O}(t) \cdot c_{p,H_2O}} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}m_{H_2O}(t)}{\mathrm{d}t} = J_m m(t) \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}m_{Eis}(t)}{\mathrm{d}t} = -J_m(t) \tag{3}$$

$$A(t) = 6 \cdot \left(\frac{m_{Eis}(t)}{\rho_{Eis}}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{4}$$

$$J_m(t) = \frac{\alpha \cdot A(t) \cdot (T(t) - T_{Eis})}{h} \tag{5}$$

$$T(t=0) = T_0, \quad m_{H_2O}(t=0) = m_{H_2O,0}, \quad m_{Eis}(t=0) = m_{Eis,0} \tag{6}$$

wobei $A(t)$ die Oberfläche des Eiswürfels (welcher sich stets unterhalb der Wasseroberfläche befindet), α der konstante Wärmeübertragungskoeffizient, h die konstante spezifische Schmelzenthalpie und $c_{\mathrm{p,H_2O}}$ die konstante spezifische Wärmekapazität darstellen.

Ist das System in Gl. (1) bis (6) linear oder nichtlinear? Ist es zeitvariant oder zeitinvariant? **Begründen** Sie Ihre Antworten **kurz** anhand der Gl. (1) bis (6). **(2 Punkte)**

2. Aufgabe: Systemtheorie (20,5 Punkte)

2.1. Gegeben sei das nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -x_1^3 + x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}. \tag{NLS}$$

Berechnen Sie alle Ruhelagen von (NLS) . **(2 Punkte)**

2.2. Geben Sie zunächst die allgemeine Formel der Taylorreihenentwicklung um einen Punkt $\boldsymbol{x}^*$ für ein allgemeines System $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ an (*Hinweis: Terme ab der zweiten Ordnung können mit einem Ausdruck abgekürzt angegeben werden*). Führen Sie anschließend die Linearisierung für das oben genannte System (NLS) um einen Punkt $\boldsymbol{x}^* = (x_1, x_2)^T$ durch. Setzen Sie $\boldsymbol{x}^* = (0, 0)^T$ ein und geben Sie die Linearisierung an. **(5,5 Punkte)**

2.3. Geben Sie die Eigenwerte des linearisierten Systems aus Aufgabe 2.2 an. Ist das linearisierte System instabil, grenzstabil oder asymptotisch stabil? Ist es schwingungsfähig? Welche Aussagen können Sie mit dem Satz von Hartman-Grobman über das nichtlineare System treffen? *Hinweis: Wenn Sie Aufgabe 2.2 nicht lösen konnten, verwenden Sie bitte das alternative lineare System*

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t) \quad \textit{mit} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{ALS}$$

(4 Punkte)

2.4. Zeichnen Sie das Phasenportrait des linearisierten Systems. Wenn Sie Aufgabe 2.2 nicht lösen konnten, zeichnen Sie das Phasenporträt des alternativen linearen Systems (ALS) aus Aufgabe 2.3 . **(2 Punkte)**

2.5. Gegeben sei die Funktion $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T \mapsto V(\boldsymbol{x})$. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit V positiv semidefinit ist? **(1 Punkt)**

2.6. Berechnen Sie für $V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ und das nichtlineare System (NLS) die Funktion $\frac{dV}{dt}\big|_{\boldsymbol{x}(t)}$. Welche Definitheit weist $\frac{dV}{dt}$ auf? Welche Stabilitätseigenschaft kann daraus für das nichtlineare System (NLS) abgeleitet werden? *Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass V unbeschränkt positiv definit ist.* **(6 Punkte)**

3. Aufgabe: DA-Systeme (19,5 Punkte)

Gegeben ist das DA-System (7) - (13), welches den elektrischen Schaltkreis in Abb. 4 beschreibt. Die Spannung u_{ein} ist vorgegeben und zeitlich veränderlich. C_1, C_2 und C_3 sind gegebene konstante Kondensatorkapazitäten. R_1 ist ein gegebener konstanter Widerstand.

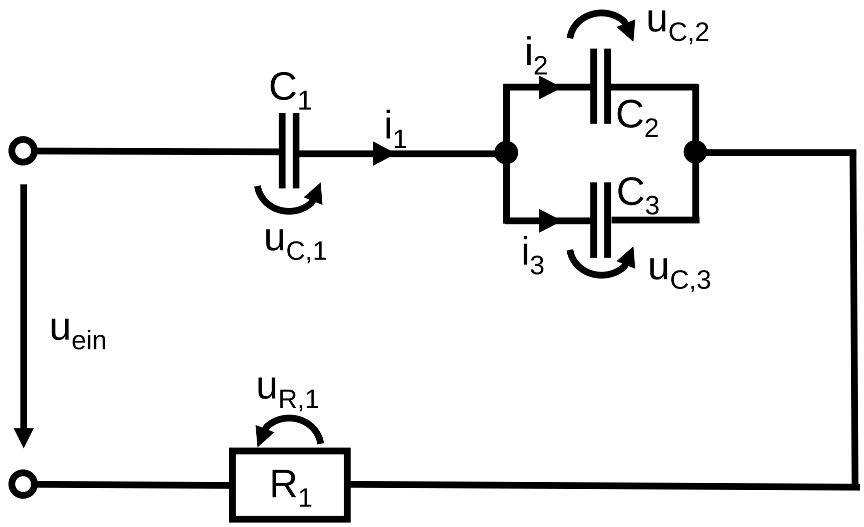


Abbildung 4: Elektrischer Schaltkreis

$$\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C},1}(t)}{\mathrm{d}t}C_1 = i_1(t) \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C},2}(t)}{\mathrm{d}t}C_2 = i_2(t) \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C},3}(t)}{\mathrm{d}t}C_3 = i_3(t) \tag{9}$$

$$u_{\mathrm{R},1}(t) = R_1 i_1(t) \tag{10}$$

$$0 = i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) \tag{11}$$

$$0 = u_{\mathrm{ein}}(t) - u_{\mathrm{C},1}(t) - u_{\mathrm{C},2}(t) - u_{\mathrm{R},1}(t) \tag{12}$$

$$0 = u_{\mathrm{C},2}(t) - u_{\mathrm{C},3}(t) \tag{13}$$

3.1. Geben Sie an welche Gleichungen differentiell und welche algebraisch sind. Geben Sie an welche Variablen differentielle Variablen, algebraische Variablen, Eingänge und Parameter sind. **(3 Punkte)**

3.2. Kann beim gegebenen System ein differentieller Index von 1 vorliegen? Überprüfen Sie mit Hilfe einer Inzidenzmatrix. **(2 Punkte)**

3.3. Bestimmen Sie den differentiellen Index des gegebenen Systemes. Geben Sie einzelne Zwischenschritte und Begründungen an. **(4 Punkte)**

3.4. Reduzieren Sie das gegebene System auf Index 1. Wählen Sie Gleichungen so, dass die Anfangswerte des reduzierten Systems frei wählbar sind. Geben Sie Ihre Auswahl an Gleichungen eindeutig an. Welche Variablen im Index 1 System sind differentiell und welche algebraisch? **(3 Punkte)**

3.5. Wie viele Anfangswerte können in Ihrem System frei gewählt werden? Begründen Sie und geben Sie die wählbaren Anfangswerte an. **(2 Punkte)**

3.6. Zur Vereinfachung sollen die Kondensatoren aus Abb. 4 zusammengefasst werden. Für N in Reihe geschaltete Kondensatoren gilt $C_{\mathrm{ges,N}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_{\mathrm{i}}}}$ und für M parallel geschaltete Kondensatoren gilt $C_{\mathrm{ges,M}} = \sum_{i=1}^{M} C_{\mathrm{i}}$.

Zeichnen Sie den vereinfachten Schaltkreis und beschriften Sie alle Spannungen, Ströme und Bauteilparameter. Geben Sie eine Gleichung zur Bestimmung der Gesamtkapazität des aggregierten Kondesators an. **(3 Punkte)**

3.7. Modellieren Sie den gezeichneten vereinfachten Schaltkreis als DA-System mit den notwendigen Bauteilgleichungen, Maschengleichungen und Knotengleichungen. Geben Sie an für welche Größen Anfangswerte benötigt werden. **(2,5 Punkte)**

4. Aufgabe: Strukturierte Systeme (20 Punkte)

Ein Industrieroboter mir vier Armgliedern und drei Motoren soll als strukturiertes System modelliert werden (s. Abb. 5). Armglieder und Motoren haben jeweils zwei Anschlüsse, über die die angrenzenden Armglieder, Motoren, der Boden oder ein Greifer angebunden sind. Das erste Armglied ist fest mit dem Boden verbunden, während am letzten ein Greifer befestigt ist. Es wird nur die Bewegung in der x-y-Ebene betrachtet.

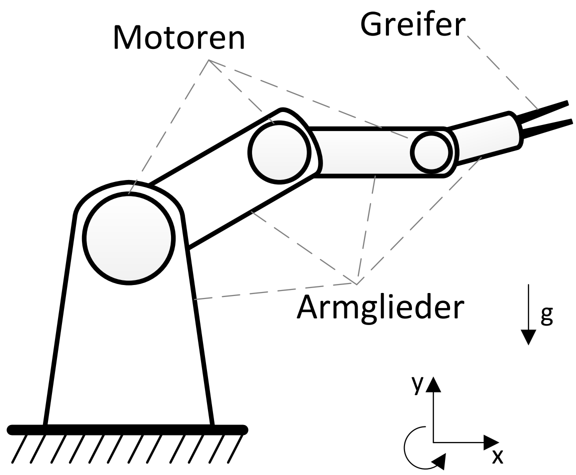


Abbildung 5: Industrieroboter.

Modellierung Armglied

Es soll ein allgemeines Modell eines Armglieds mit Masse m und Trägheitsmoment Θ bezüglich Rotation in der x-y-Ebene um den Massenschwerpunkt aufgestellt werden. Der Massenschwerpunkt liege mittig auf der Verbindungslinie zwischen den Anschlüssen, welche sich im Abstand L zueinander befinden (s. Abb. 6).

4.1.

a) Sollte das Armglied als Speichersystem oder Verknüpfungssystem modelliert werden? Begründen Sie Ihre Antwort. **(1 Punkt)**

b) Die Modellierung *mechanischer* Systeme führt oft zu differentiell-algebraischen Gleichungssystemen. Durch welche physikalischen Gesetze oder Beziehungen kommen dabei üblicherweise differentielle und durch welche algebraische Gleichungen zustande? **(2 Punkte)**

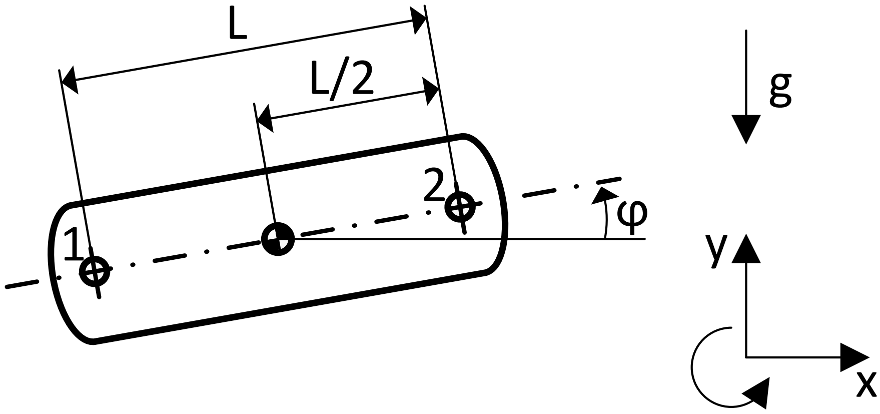


Abbildung 6: Freigeschnittenes Armglied mit Massenschwerpunkt und Anschlüssen (1 und 2). Die Erdbeschleunigung wirkt in negative y-Richtung.

4.2. Zeichnen Sie in das freigeschnittene Armglied in Abb. 6 alle angreifenden Kräfte und Momente ein. Beachten Sie dazu die Vorzeichenkonvention der Vorlesung.
Hinweis: Hier dürfen Sie in die Aufgabenstellung zeichnen! **(2,5 Punkte)**

4.3. Stellen Sie die Momentenbilanz um den Massenschwerpunkt sowie die Kräftebilanzen für das Armglied auf. **(4 Punkte)**

Implementierung

4.4. Schreiben Sie den Modelica-Code für den Konnektor `Anschluss`, welcher die notwendigen Schnittkräfte und -momente sowie die Position des Anschlusses und den Winkel φ zur x-Achse übergibt. **(3,5 Punkte)**

4.5. Gegeben ist das unvollständige Modelica-Modell `Armglied`. Implementieren Sie darin die Kräftebilanz in x-Richtung aus Aufgabe 4.3 mit allen dafür notwendigen Deklarationen (und ggf. weiteren dafür nötigen Gleichungen). Ergänzen Sie zudem zwei Konnektoren vom Typ `Anschluss` und stellen Sie sicher, dass alle Größen aus der Kräftebilanz an die Konnektoren weitergegeben werden.
Hinweis: Schreiben Sie **nicht** *in die Aufgabenstellung. Machen Sie kenntlich, welcher Code an welche Stelle gehören. Das Modell ist auch nach den Ergänzungen* **nicht** *vollständig!*
Hinweis: Falls Sie Aufgabe 4.3 nicht *lösen konnten, implementieren Sie statt der Kräftebilanz die Gleichung* $5\,\ddot{x} = k_1\,k_2$*, wobei* k_1 *und* k_2 *Schnittgrößen in den beiden Anschlüssen sind.* **(4,5 Punkte)**

```
model Armglied
import Modelica.SIunits.*;
parameter Mass m=42;
parameter MomentOfInertia Theta=42;
parameter Length L=1;
Angle phi;                 // Winkel Laengsachse/x-Achse
Position x;                // Position Massenschwerpunkt
Position y;                // Position Massenschwerpunkt
    // fehlender Code (1)
equation
    // fehlender Code (2)
end Armglied;
```

4.6. Aus den Teilmodellen soll ein Gesamtmodell erstellt werden (vgl. Abb. 5). Im folgenden brauchen Sie **kein** vollständiges Modell zu schreiben, sondern nur die geforderten Code-Zeilen!

a) Gegeben seien zwei Objekte vom Typ `Armglied` namens `G1` und `G2`, sowie ein Objekt vom Typ `Motor` namens `M1`. Das Motormodell verfüge ebenfalls über zwei Konnektoren vom Typ `Anschluss` namens `an1` und `an2`. Schreiben Sie den Modelica-Code, mit dem Sie die Armglieder mit dem Motor verknüpfen. **(1 Punkt)**

b) Schreiben Sie den Modelica-Code, mit dem Sie die Verankerung von `G1` im Boden modellieren. Das Armglied soll an der Position $(x, y)^T = (0, 0)^T$ und *senkrecht* zum Boden fixiert werden. **(1,5 Punkte)**

5. Aufgabe: Sensititvitätsgleichungen und numerische Integration (20 Punkte)

In einem Batch-Reaktor findet eine Gleichgewichtsreaktion statt.

$$A \rightleftharpoons 2B$$

Die Änderung der Konzentrationen der Stoffe ($c_A(t)$, $c_B(t)$) kann durch folgendes Zustandsraummodell beschrieben werden:

$$\dot{c}_A(t) = -k_1 e^{\frac{-\theta_1}{T(t)}} c_A(t) + k_2 e^{\frac{-\theta_2}{T(t)}} c_B^2(t) \tag{14}$$

$$\dot{c}_B(t) = 2k_1 e^{\frac{-\theta_1}{T(t)}} c_A(t) - 2k_2 e^{\frac{-\theta_2}{T(t)}} c_B^2(t) \tag{15}$$

$$\xi(t) = c_A(t) - c_{A,0} \tag{16}$$

$$c_A(t=0) = c_{A,0} \tag{17}$$

$$c_B(t=0) = c_{B,0} \tag{18}$$

Der Systemausgang $\xi(t)$ gibt den Reaktionsfortschritt an. k_1, k_2, θ_1, θ_2 sind reaktionsspezifische Parameter. Über die Temperatur $T(t)$ kann die Geschwindigkeit von Hin- und Rückreaktion eingestellt werden und damit auch das Reaktionsgleichgewicht.

5.1. Geben Sie die Sensitivitätsgleichungen für das allgemeine System

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}(t))$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}(t))$$
$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{p})$$

an. **(3 Punkte)**

5.2. Stellen Sie die Sensitivitätsgleichungen der Konzentrationen bezüglich der Größen $\boldsymbol{p} = (k_1, \theta_1)^T$ für das Zustandsraummodell in Gl. (14)-(18) auf. **(6,5 Punkte)**

Analog kann (für gegebene Werte von k_1, k_2, θ_1, θ_2) ein Differentialgleichungssystem für die Sensititvität $\boldsymbol{S}_{T^*}^c = \left(\frac{dc_A}{dT^*}, \frac{dc_B}{dT^*}\right)$ der Konzentrationen bezüglich einer konstanten Reaktionstemperatur $T(t) = T^*$ hergeleitet werden.

$$\dot{\boldsymbol{S}}_{T^*}^c = \begin{pmatrix} -e^{\frac{-300}{T^*}} & 4c_B e^{\frac{-450}{T^*}} \\ 2e^{\frac{-300}{T^*}} & -8c_B e^{\frac{-450}{T^*}} \end{pmatrix} \boldsymbol{S}_{T^*}^c + \begin{pmatrix} -300c_A \frac{e^{\frac{-300}{T^*}}}{T^{*2}} + 900c_B^2 \frac{e^{\frac{-450}{T^*}}}{T^{*2}} \\ 600c_A \frac{e^{\frac{-300}{T^*}}}{T^{*2}} - 1800c_B^2 \frac{e^{\frac{-450}{T^*}}}{T^{*2}} \end{pmatrix} \tag{19}$$

5.3. Geben Sie für die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ die allgemeine Rechenvorschrift für einen Zeitschritt der Länge Δt des **expliziten** Euler-Verfahrens an.

(1,5 Punkte)

5.4. Approximieren Sie durch Anwendung des **expliziten** Euler-Verfahrens die Sensitivität der Konzentrationen bezüglich einer konstanten Reaktionstemperatur $T^* = 300$K (Gl. (19)) für den Zeitpunkt $t = 1$s. Verwenden Sie die Schrittweite $\Delta t = 0,5$s. Verwenden Sie darüber hinaus Tabelle 1. **(7 Punkte)**

Hinweis: Die oben genannte Differentialgleichung geht von folgenden Einheiten aus: [s] für die Zeit, [mol/l] für Konzentrationen und [K] für die Temperatur!

Tabelle 1: Konzentrationen der Stoffe zu gegebenen Zeitpunkten

t [s]	$c_A(t)$ [mol/l]	$c_B(t)$ [mol/l]
0	1	0
0,5	0,81606	0,36788
1	0,69615	0,60770

5.5. Für einen gegebenen Endzeitpunkt $t = t_f$ soll die Konzentration c_B durch die Wahl einer geeigneten Temperatur maximiert werden. Beschreiben Sie, wie Sie mit Hilfe der Sensitivitätsgleichungen entscheiden, ob die Temperatur $T^* = 300$K erhöht oder erniedrigt werden muss. Geben Sie an, welche Bedingung am Optimum (maximale Konzentration an B) erfüllt ist. **(2 Punkte)**

RWTH Aachen · AVT **Systemverfahrenstechnik** · 52074 Aachen · **Prof. Alexander Mitsos, Ph.D.**

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik

Sommersemester 2018

---

1. Aufgabe: Fragen (20 Punkte)

* Lösung *

1.1. Lösung: Die allgemeine Form der Zustandsraumdarstellung für nichtlineare, zeitvariante Systeme lautet:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), p, t) (0.5 \text{ TP}) \tag{1}$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), p, t) (0.5 \text{ TP}) \tag{2}$$

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

1.2. Lösung: Die allgemeine Bilanzgleichung für eine zu bilanzierende Größe Ψ lautet:

$$\underbrace{\frac{d\Psi}{dt}}_{(0{,}5\,TP)} = \underbrace{\sum_{j \in \Lambda_J}^{n_s} J_j^{\Psi}}_{(0{,}5\,TP)} + \underbrace{\sum_{k \in \Lambda_\Gamma}^{n_q} \Gamma_k^{\Psi}}_{(0{,}5\,TP)} \tag{3}$$

Für die Anwendung sind die

- zu bilanzierenden Größe Ψ (0,5 TP)
- Flüsse J^{Ψ} und (0,5 TP)
- Quellen/Senken Γ^{Ψ} (0,5 TP)

festzulegen.

Bewertung: siehe oben. **(3 Punkte)**

1.3. Lösung:

- Random Sampling
- Latin Hypercube Sampling.

Bewertung: Die Nennung von einer der beiden Methoden reicht aus.

(1 Punkt)

1.4. Lösung:

a) Signifikante Stellen einer Zahl sind Ziffern, die einen Beitrag zur Bedeutung von der Zahl-(Mess)genauigkeit haben. Alternativ: Signifikante Stellen sind die Ziffern einer Zahl ab der ersten Ziffer, die ungleich Null ist. (1 TP)

b) Das Ergebnis enthält möglicherweise **zu viele Stellen** (0,5TP). Man sollte auf **mögliche Ungenauigkeiten (durch Messfehler etc.)** achten und nur so viele Ziffern/Stellen angeben, wie sie noch einen Beitrag zur richtigen Beschreibung des Ergebnisses haben. (0,5 TP)

Bewertung: s.o. **(2 Punkte)**

1.5. Lösung:

a) das System ist stabil. (0,5 TP),
b) das System ist instabil (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

1.6. Lösung:

a) P_1: 1 Token, P_2: 1 Token, P_3: 1 Token. Eine bestimmte Verteilung von Token nennt man Markierung.

Bewertung: 0,5 TP für richtige Anzahl auf jeweiliger Stelle. 0,5 TP für Stichwort Markierung. **(2 Punkte)**

b) Ein Petri-Netz ist sicher, wenn in keiner einzigen Stelle P jemals mehr als ein maximale Anzahl von Token $n = 1$ ist. Das Petri-Netz ist also nicht sicher.

Bewertung: 0,5 TP für richtige Antwort zu Sicherheit. 1 TP für korrekte Definition. **(1,5 Punkte)**

c) Das Petri-Netz wird nicht lebendig bleiben. Bereits nach einem einmaligen Schalten von Transition t_1 kann diese nicht mehr geschalten werden, da auf P_1 nicht mehr die benötigte Anzahl von Token sind.

Bewertung: 0,5 TP für richtige Antwort zu Lebendigkeit. 0,5 TP für korrekte Begründung (mind. eine Transition ist nicht mehr schaltbar), 0,5 TP für ein konkretes Beispiel einer nicht mehr schaltbaren Transition. **(1,5 Punkte)**

d) Es ist nicht erlaubt, zwei Stellen ohne eine Transition miteinander zu verknüpfen.

Bewertung: 1 TP bei Nennung der richtigen Regel. **(1 Punkt)**

1.7. Lösung: a)

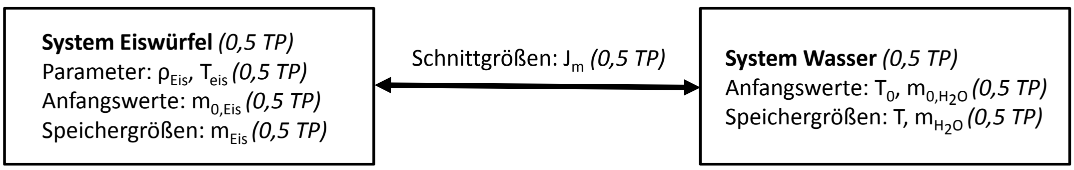


Abbildung 1: Abstraktionsbild des Systems

Bewertung: Wenn zusätzlich zu den Symbolen aus der Aufgabenstellung Parameter aus Aufgabenteil b) verwendet werden, wird für die Kategorie kein Teilpunkt vergeben. **(4 Punkte)**

b) Das dargestellte System ist nichtlinear (0,5 TP), da in Gleichung (4) die Variable m_{Eis} zur $2/3$-Potenz auftaucht (0,5 TP). Das System ist zeitinvariant (0,5 TP), da die Zeit t nicht explizit in einer der Gleichungen auftaucht (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

2. Aufgabe: Systemtheorie (20,5 Punkte)
* Lösung *

2.1. Lösung: Wir zeigen, dass $\boldsymbol{x}_R = (0,0)^T$ die einzige Ruhelage ist. Für das Aufstellen der Gleichungen

$$0 = -x_1^3 + x_2 \tag{A}$$
$$0 = -x_1 \tag{B}$$

gibt es einen Teilpunkt (1 TP). Aus Gleichung (B) folgt $x_1 = 0$ (0,5 TP). Wir setzen $x_1 = 0$ in Gleichung (A) ein und erhalten

$$0 = 0^3 + x_2 = x_2.$$

Dafür gibt es ebenfalls einen halben Teilpunkt (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

2.2. Lösung: Die Taylorreihenentwicklung eines allgemeinen nichtlinearen autonomen Systems der Form $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ lautet

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \underbrace{f(\boldsymbol{x}^*)}_{\text{0,5 TP}} + \underbrace{\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}^*}}_{\text{0,5 TP}} \underbrace{(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*)}_{\text{0,5 TP}} + \underbrace{\overbrace{R_n(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}^*)}^{\text{vernachlässigt}}}_{\text{0,5 TP}}.$$

Die Linearisierung des gegebenen Systems ist

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \approx \underbrace{\begin{bmatrix} -x_1^{*3} + x_2^* \\ -x_1^* \end{bmatrix}}_{\text{1 TP}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -3x_1^{*2} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{1 TP}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) - x_1^* \\ x_2(t) - x_2^* \end{bmatrix}}_{\text{0,5 TP}}$$

Für die Ruhelage $\boldsymbol{x}_R = (0,0)^T$ lautet die Linearisierung

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \approx \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{0,5 TP}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{\text{0,5 TP}}.$$

Bewertung: Siehe oben. **(5,5 Punkte)**

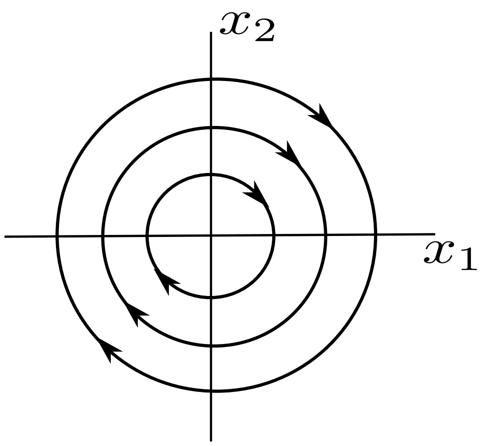
2.3. Lösung:

Das linearisierte System hat die Eigenwerte $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$ (2 TP). Da der Realteil des komplex konjugierten Eigenwertpaares gleich 0 ist, ist das linearisierte System grenzstabil (0,5 TP). Da es sich um ein komplex konjugiertes Eigenwertpaar mit nicht verschwindendem Imaginärteil handelt, ist das linearisierte System schwingungsfähig (0,5 TP). Da der Realteil des komplex konjugierten Eigenwertpaares gleich Null ist, kann man nach dem Satz von Hartman-Grobman die Dynamik des linearisierten Systems **nicht** auf das nichtlineare System übertragen (1 TP).

Das alternative lineare System hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 3\,i$ und $\lambda_2 = -3\,i$, so dass die strukturellen Aussagen unverändert bleiben.

Bewertung: Siehe oben. **(4 Punkte)**

2.4. Lösung: Qualitativ. Diese Lösung ist gültig sowohl für das linearisierte System aus Aufgabe 2.2, als auch für das alternative lineare System aus Aufgabe 2.3.



Bewertung: 1 Punkt für die Kreisform. 0,5 Punkte für die richtige Position und Koordinatenachsen. 0,5 Punkte für die richtige Drehrichtung. **(2 Punkte)**

2.5. Lösung: Damit V positiv semidefinit ist, muss gelten

1. $V(\mathbf{0}) = 0$, (0,5 TP)
2. $V(\boldsymbol{x}) \geq 0$ für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$. (0,5 TP)

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

2.6. Lösung: Wir berechnen zunächst dV/dt:

$$\frac{dV(\boldsymbol{x}(t))}{dt} = \frac{dV}{d\boldsymbol{x}}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{dV}{d\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ beliebig. Mit

$$\frac{dV}{d\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -x_1^3 + x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

gilt (aus Übersichtsgründen lassen wir das Argument „(t)“ bei „$x_1(t)$“ und „$x_2(t)$“ weg)

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\boldsymbol{x}(t)} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1^3 + x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \qquad (1\text{ TP})$$

$$= -{x_1}^4 + x_1\,x_2 - x_2\,x_1 \qquad (1\text{ TP})$$

$$= -{x_1}^4 \leq 0. \qquad (1\text{ TP})$$

Ausserdem gilt

$$\frac{dV}{dt}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -0^2 = 0. \qquad (1\text{ TP})$$

Damit ist hier dV/dt negativ semidefinit (1 TP). Daraus kann gefolgert werden, dass die Ruhelage global stabil ist (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(6 Punkte)**

3. Aufgabe: DA-Systeme (19,5 Punkte)
* Lösung *

3.1. Lösung: Die differentiellen Gleichungen sind Gl. (7), (8) und (9) (0,5TP), da zeitliche Ableitungen der Variablen in den Gleichungen vorkommen. Die algebraischen Gleichungen sind Gl. (10), (11), (12) und (13) (0,5TP).

Die differentiellen Variablen sind $\boldsymbol{x}(t) : (u_{\mathrm{C},1}(t)\,; u_{\mathrm{C},2}(t)\,; u_{\mathrm{C},3}(t))^T$. (0,5TP)
Die algebraischen Variablen sind $\boldsymbol{z}(t) : (i_1(t)\,; i_2(t)\,; i_3(t)\,; u_{\mathrm{R},1}(t))^T$. (0,5TP)
Die Eingänge sind $\boldsymbol{u}(t) : (u_{\mathrm{ein}}(t))^T$. (0,5TP)
Die Parameter sind $\boldsymbol{p} : (C_1; C_2; C_3; R_1)^T$. (0,5TP)

Bewertung: Siehe oben. **(3 Punkte)**

3.2. Lösung: Das System hat einen Index von 1, wenn alle algebraischen Variablen als explizite Funktionen der Zustände, Eingänge und Parameter beschrieben werden können. Hierfür ist es notwendig, dass die Inzidenzmatrix vollen Rang hat.

	$i_1(t)$	$i_2(t)$	$i_3(t)$	$u_{\mathrm{R},1}(t)$
$u_{\mathrm{R},1}(t) = R_1 i_1(t)$	x			x
$0 = i_1(t) - i_2(t) - i_3(t)$	x	x	x	
$0 = u_{\mathrm{ein}}(t) - u_{\mathrm{C},1}(t) - u_{\mathrm{C},2}(t) - u_{\mathrm{R},1}(t)$				x
$0 = u_{\mathrm{C},2}(t) - u_{\mathrm{C},3}(t)$				

Tabelle 1: Inzidenzmatrix für das gegebene System. (1TP)

Die Inzidenzmatrix hat eine 0-Zeile und somit keinen vollen Rang. Das DA-System hat also einen Index größer als 1 (1TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

3.3. Lösung: Die Inzidenzmatrix hat gezeigt, dass Gl. (13) keine algebraischen Variablen beinhaltet. Wir beginnen hier mit der Indexreduktion und leiten ein erstes Mal ab und setzen ein.

$$0 = \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C},2}(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C},3}(t)}{\mathrm{d}t} \quad \text{(1TP)}$$

$$0 = \frac{i_2(t)}{C_2} - \frac{i_3(t)}{C_3} \quad \text{(A)} \quad \text{(1TP)}$$

Nach einmaligen Ableiten finden wir eine neue algebraische Gl. (A). Nun existiert eine explizite algebraische Gleichung für alle algebraischen Variablen und es handelt sich somit um ein Index-1 System (1TP). Der ursprüngliche Index des Systems war also Index 2 (1TP).

Bewertung: Siehe oben. **(4 Punkte)**

3.4. Lösung: Um eine freie Wahl der Anfangswerte zu ermöglichen, müssen alle algebraischen Gleichungen und so viele differentielle Gleichungen wir nötig gewählt werden. Also wählen wir algebraische Gl. (10), (11), (12), (13) und (A) (1TP). Zusätzlich wählen wir noch die differentielle Gl. (7) und eine der Gl. (8) oder (9) (1TP), damit die Inzidenzmatrix vollen strukturellen Rang hat und das Gleichungssystem voll bestimmt ist.

Für die Wahl von Gl. (8) als zweite differentielle Gleichung gilt:
Die differentiellen Variablen sind $\boldsymbol{x}(t) : (u_{\mathrm{C},1}(t)\,; u_{\mathrm{C},2}(t))^T$.
Die algebraischen Variablen sind $\boldsymbol{z}(t) : (i_1(t)\,; i_2(t)\,; i_3(t)\,; u_{\mathrm{R},1}(t)\,; u_{\mathrm{C},3}(t))^T$.

Für die Wahl von Gl. (9) als zweite differentielle Gleichung gilt:
Die differentiellen Variablen sind $\boldsymbol{x}(t) : (u_{\mathrm{C},1}(t)\,; u_{\mathrm{C},3}(t))^T$.
Die algebraischen Variablen sind $\boldsymbol{z}(t) : (i_1(t)\,; i_2(t)\,; i_3(t)\,; u_{\mathrm{R},1}(t)\,; u_{\mathrm{C},2}(t))^T$.

Für die richtige Angabe der differentiellen Größen werden (0,5TP) vergeben. Für die richtige Angabe der algebraischen Größen werden (0,5TP) vergeben.

Bewertung: Siehe oben. **(3 Punkte)**

3.5. Lösung: Das System hat noch zwei differentielle Variablen und es wurden alle algebraischen Gleichungen bei der Indexreduktion gewählt. Somit können zwei unabhängige Anfangsbedingungen gewählt werden (1TP).

Für die Wahl von Gl. (8) als zweite differentielle Gleichung gilt: $u_{\mathrm{C},1}(t=0)$ und $u_{\mathrm{C},2}(t=0)$ sind wählbar.
Für die Wahl von Gl. (9) als zweite differentielle Gleichung gilt: $u_{\mathrm{C},1}(t=0)$ und $u_{\mathrm{C},3}(t=0)$ sind wählbar.

Für eine der obigen Antworten gibt es (1TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

3.6. Lösung: Abb. 2 zeigt eine Skizze des vereinfachten Schaltkreises. 1TP wird für die richtige Darstellung vergeben. 1TP wird für die korrekte Beschriftung vergeben. Die Gleichung zu Berechnung der Gesamtkapazität ist $C_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2+C_3}}$ (1TP).

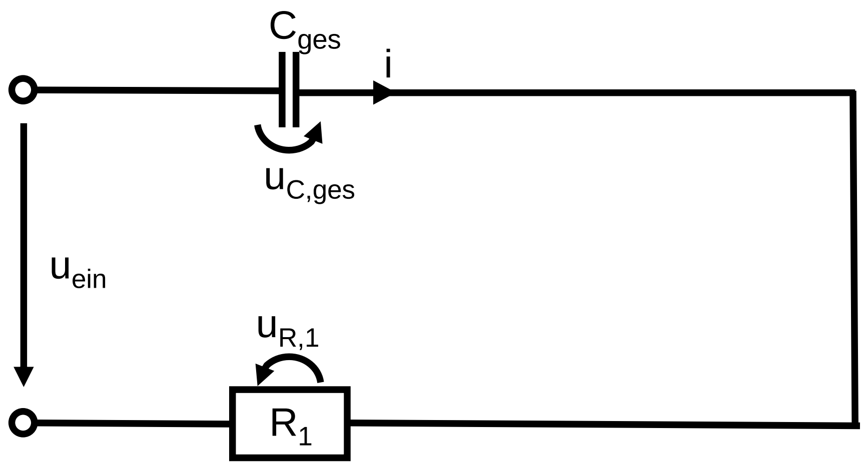


Abbildung 2: Vereinfachter elektrischer Schaltkreis.

Bewertung: Siehe oben. **(3 Punkte)**

3.7. Lösung: Der vereinfachte Schaltkreis hat eine Masche, zwei Bauteile und keinen Knoten. Es werden also noch eine Maschengleichung und zwei Bauteilgleichungen benötigt.

$$-u_{\text{ein}}(t) + u_{\text{C,ges}}(t) + u_{\text{R,1}}(t) = 0 \quad \text{(0,5TP)}$$
$$\frac{\mathrm{d}u_{\text{C,ges}}(t)}{\mathrm{d}t} C_{\text{ges}} = i(t) \quad \text{(0,5TP)}$$
$$u_{\text{R,1}}(t) = R_1 i(t) \quad \text{(0,5TP)}$$

Es wird ein Anfangswert für $u_{\text{C,ges}}$ benötigt. (1TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2,5 Punkte)**

4. Aufgabe: Strukturierte Systeme (20 Punkte)
* Lösung *

4.1. Lösung:

a) Das Armglied sollte als Speichersystem modelliert werden, da es laut Aufgabenstellung eine (nicht vernachlässigbare) Masse sowie ein ein Trägheitsmoment aufweist. Es kann somit kinetische Energie speichern, und das Modell wird Differentialgleichungen enthalten.

Bewertung: Der Punkt wird nur bei nachvollziehbarer Begründung vergeben.

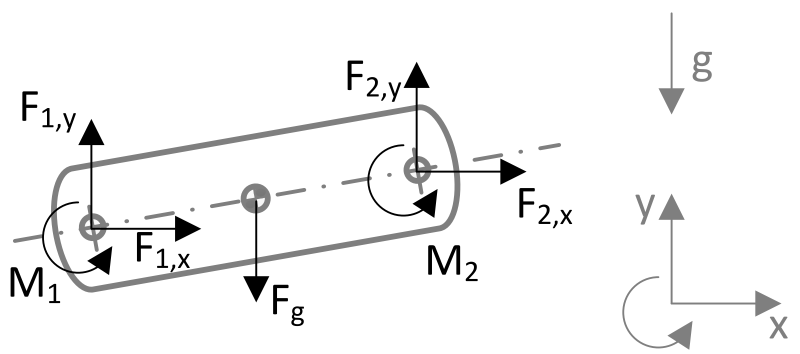
(1 Punkt)

b) Die Newton'schen Gesetze für Translation und Rotation (Kräfte- und Momtentenbilanzen) führen zu Differentialgleichungen (1 TP). Algebraische Gleichungen entstehen beispielsweise oft durch geometrische Beziehungen (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. Andere sinnvolle Beispiele werden ebenfalls akzeptiert, wobei maximal je ein Punkt für die differentiellen und algebraischen Gleichungen vergeben wird.

(2 Punkte)

4.2. Lösung:



Bewertung: Für die Schnittkräfte und -momente gibt es je maximal 1 TP, sowie 0,5 TP für die Gewichtskraft. Gemäß der Vorzeichenkonvention der Vorlesung werden Schnittkräfte und -momente in positiver Koordinatenrichtung angenommen. **(2,5 Punkte)**

4.3. Lösung:

Kräftebilanz in x-Richtung (1 TP):

$$F_{1,x} + F_{2,x} = m \cdot \ddot{x}$$

Kräftebilanz in y-Richtung (1 TP):

$$F_{1,y} + F_{2,y} - m \cdot g = m \cdot \ddot{y}$$

Momentenbilanz in der x-y-Ebene um den Massenschwerpunkt (2 TP):

$$M_1 + M_2 + (F_{1,x} - F_{2,x}) \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin\varphi + (F_{2,y} - F_{1,y}) \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos\varphi = \Theta \cdot \ddot{\varphi}$$

Bewertung: Siehe oben. **(4 Punkte)**

4.4. Lösung:

```
connector Anschluss
import Modelica.SIunits.*;
flow Force F_x,F_y;
flow Torque M;
Position x,y;
Angle phi;
end Anschluss;
```

Bewertung: Die richtige Struktur (inkl. alle Variablen vorhanden) gibt 1,5 TP. Jede richtige Entscheidung für bzw. gegen **flow** gibt 0,5 TP, wobei die Kräfte und Positionen in x- und y-Richtung nicht separat gewertet werden (also maximal 2 TP). **(3,5 Punkte)**

4.5. Lösung:

```
model Armglied
import Modelica.SIunits.*;
parameter Mass m=42;
```

```
parameter MomentOfInertia Theta=42;
parameter Length L=1;
Angle phi;
Position x;
Position y;

    // ergaenzter Code (1):
Velocity v_x;                       // 0,5 TP
Anschluss A1;                       // 0,5 TP
Anschluss A2;                       // 0,5 TP

equation

    // ergaenzter Code (2):
A1.F_x + A2.F_x = m*der(v_x);   // 0,5 TP
v_x = der(x);                       // 0,5 TP
(A1.x + A2.x)/2 = x;                // 0,5 TP

end Armglied;
```

Lösung mit alternativem Zwischenergebnis:

```
model Armglied
import Modelica.SIunits.*;
parameter Mass m=42;
parameter MomentOfInertia Theta=42;
parameter Length L=1;
Angle phi;
Position x;
Position y;

// ergaenzter Code (1):
Real y;                         // 0,5 TP
Anschluss A1;                   // 0,5 TP
Anschluss A2;                   // 0,5 TP
```

```
equation

// ergaenzter Code (2):
A1.k + A2.k = 5*der(y);      // 0,5 TP
y = der(x);                  // 0,5 TP
(A1.x + A2.x)/2 = x;         // 0,5 TP

end Armglied;
```

Bewertung: Siehe oben. Zusätzlich gibt es 1,5 TP für die Anbindung an die Konnektoren (d.h. korrekte Verwendung der Größen in den Konnektoren). **(4,5 Punkte)**

4.6. Lösung:

a)

```
connect(G1.A2,M1.an1);     // 0,5 TP
connect(M1.an2,G2.A1);     // 0,5 TP
```

Bewertung: Siehe oben. Die Benennung der Konnektoren in `G1` und `G2` muss konsistent zur Lösung von Aufgabe 4.5 sein. Die Reihenfolge der Konnektoren kann anders gewählt werden, solange dieselbe Konnektivität beschrieben wird (Armglieder und Motoren sind nach Beschreibung symmetrisch bezüglich Vertauschung der beiden Konnektoren). **(1 Punkt)**

b)

```
G1.A1.x = 0;             // 0,5 TP
G1.A1.y = 0;             // 0,5 TP
G1.A1.phi = 90;          // 0,5 TP
```

Bewertung: Siehe oben. **(1,5 Punkte)**

5. Aufgabe: Sensititvitätsgleichungen und numerische Integration (20 Punkte)

* Lösung *

5.1. Lösung: Die Sensitivitätsgleichungen für ein allgemeines System sind gegeben durch

$$\frac{d\dot{\boldsymbol{x}}}{d\boldsymbol{p}} = \dot{\boldsymbol{S}}^x = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{S}^x + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{p}} \quad \text{(1TP)} \tag{4a}$$

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{S}^y = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{S}^x + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{p}} \quad \text{(1TP)} \tag{4b}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\boldsymbol{S}^x(t=0) = \frac{d\boldsymbol{x}_0}{d\boldsymbol{p}} \quad \text{(1TP).} \tag{4c}$$

Bewertung: Siehe oben.
Falls ein zusätzlicher Term $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{d\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{p}}$ angegeben wurde ist das auch richtig. Hier fehlt der Term, da in der Vorlesung grundsätzlich $\boldsymbol{u}$ unabhängig von $\boldsymbol{p}$ ist, also $\frac{d\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{p}} = 0$. **(3 Punkte)**

5.2. Lösung:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial c_A} & \frac{\partial f_1}{\partial c_B} \\ \frac{\partial f_2}{\partial c_A} & \frac{\partial f_2}{\partial c_B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 e^{\frac{-\theta_1}{T}} & 2k_2 c_B e^{\frac{-\theta_2}{T}} \\ 2k_1 e^{\frac{-\theta_1}{T}} & -4k_2 c_B e^{\frac{-\theta_2}{T}} \end{pmatrix} \quad \text{(2TP)} \tag{5a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial k_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial k_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_A e^{\frac{-\theta_1}{T}} & k_1 c_A \frac{e^{\frac{-\theta_1}{T}}}{T} \\ 2c_A e^{\frac{-\theta_1}{T}} & -2k_1 c_A \frac{e^{\frac{-\theta_1}{T}}}{T} \end{pmatrix} \quad \text{(2TP)} \tag{5b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial c_A} & \frac{\partial g}{\partial c_B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(0,5TP)} \tag{5c}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial k_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(0,5TP)} \tag{5d}$$

$$\dot{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{p}} \quad \text{(0,5TP)} \tag{5e}$$

$$\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{y}} = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{p}} \quad \text{(0,5TP)} \tag{5f}$$

$$\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(0,5TP)} \tag{5g}$$

mit den Zustandssensitivitäten $\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{dc_A}{dk_1} & \frac{dc_A}{d\theta_1} \\ \frac{dc_B}{dk_1} & \frac{dc_B}{d\theta_1} \end{pmatrix}$
und den Ausgangssensitivitäten $\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \frac{d\xi}{dk_1} & \frac{d\xi}{d\theta_1} \end{pmatrix}$.

Bewertung: Siehe oben. **(6,5 Punkte)**

5.3. Lösung: Die allgemeine Gleichung für das explizite Euler-Verfahren lautet:

$$\underbrace{x_{n+1}}_{0{,}5\,\text{TP}} = \underbrace{x_n}_{0{,}5\,\text{TP}} + \underbrace{\Delta t f(x_n, t_n)}_{0{,}5\,\text{TP}}$$

(1,5 Punkte)

5.4. Lösung:

1. Schritt: Auswertung Differentialgleichung aus der Aufgabenstellung zum Zeitpunkt $t =$ 0s ($n = 0$) durch Einsetzen von T^* sowie $c_A(t = 0)$ & $c_B(t = 0)$ (aus Tabelle). Der Anfangswert der Differentialgleichung lautet $\boldsymbol{S}^c_{T^*,n=0} = (0,0)^T$ (keine Abhängigkeit der Initialwerte von T^*!).

$$\dot{\boldsymbol{S}}^c_{T^*,n=0} = (\dots)\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{0{,}5\,\text{TP}} + \underbrace{\begin{pmatrix}-0.00123\\0.00245\end{pmatrix}}_{1\,\text{TP}}$$

2. Schritt: Expliziter Euler zur Approximation der Sensititvität zum Zeitpunkt $t = 0,5$s ($n = 1$).

$$\boldsymbol{S}^c_{T^*,n=1} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 0,5\begin{pmatrix}-0,00123\\0,00245\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0,00061\\0,00123\end{pmatrix} \quad \text{(0,5 TP)}$$

3. Schritt: Auswertung Differentialgleichung zum Zeitpunkt $t = 0,5$s ($n = 1$) durch Einsetzen von T^* sowie $c_A(t = 0,5\text{s})$ & $c_B(t = 0,5\text{s})$ (aus Tabelle).

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{S}}^c_{T^*,n=1} &= \underbrace{\begin{pmatrix}-0,36788 & 0,32834\\0,73576 & -0,65668\end{pmatrix}}_{2\,\text{TP}}\begin{pmatrix}-0,00061\\0,00123\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}-0,00070\\0,00140\end{pmatrix}}_{1\,\text{TP}}\\ &= \underbrace{\begin{pmatrix}0,00063\\-0,00126\end{pmatrix}}_{1\,\text{TP}} + \begin{pmatrix}-0,00070\\0,00140\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-0,00007\\0,00014\end{pmatrix}}_{0{,}5\,\text{TP}}\end{aligned}$$

4. Schritt: Expliziter Euler zur Approximation der Sensititvität zum Zeitpunkt $t = 1$s ($n = 2$).

$$\boldsymbol{S}^c_{T^*,n=2} = \begin{pmatrix} -0,00061 \\ 0,00123 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} -0,00007 \\ 0,00014 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,00065 \\ 0,00130 \end{pmatrix} \quad \text{(0,5 TP)}$$

Bewertung: Siehe oben. **(7 Punkte)**

5.5. Lösung:

Die Sensitivität $\frac{dc_B}{dT^*}$ zum Zeitpunkt $t = t_f$ gibt an, wie sich der Zustand c_B an diesem Zeitpunkt mit der Temperatur T^* ändert. D.h., ist $\frac{dc_B}{dT^*} > 0$ zum Zeitpunkt $t = t_f$, muss T^* erhöht werden, um die Produktion von B zu erhöhen, analog muss T^* gesenkt werden, falls $\frac{dc_B}{dT^*} < 0$ zum Zeitpunkt $t = t_f$ (1TP). Entsprechend gilt für eine optimale Temperatur $\frac{dc_B}{dT^*} = 0$ zum Zeitpunkt $t = t_f$ (1TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

Schriftliche Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Sommersemester 2018

1. Aufgabe: Finite Differenzen (10 Punkte)

Die folgende Differentialgleichung beschreibt die Temperaturverteilung in einem Rohr abhängig von Radius r und Zeit t:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) . \tag{1}$$

Diese Gleichung soll mit einem Finite-Differenzen-Verfahren auf einem strukturierten, äquidistanten Gitter mit Gitterschrittweite Δr gelöst werden.

Gegeben sei außerdem folgende Taylorreihe von $T(r)$, entwickelt um r_i und ausgewertet an der Stelle r_{i+1}:

$$T_{i+1} \approx T_i + \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_i} \Delta r + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right|_{r=r_i} \Delta r^2 + \frac{1}{6} \left.\frac{\partial^3 T}{\partial r^3}\right|_{r=r_i} \Delta r^3 + \dots . \tag{2}$$

1.1. Stellen Sie eine Taylorreihe für $T(r)$ an einem zweiten Auswertepunkt auf, welche Ihnen die Herleitung eines **zentralen** Differenzenausdrucks für $\frac{\partial T}{\partial r}$ mit zwei Stützstellen ermöglicht. Entwickeln Sie um r_i und berücksichtigen Sie die ersten 4 Glieder.

1.2. Leiten Sie nun den zentralen Differenzenausdruck für $\frac{\partial T}{\partial r}$ her. Bestimmen Sie den Abbruchfehler und die Genauigkeitsordnung.

Die Gleichung (1) ist mit einem Finite-Differenzen-Verfahren diskretisiert worden. Dazu wurde das Rechengebiet durch ein äquidistantes Gitter mit 4 Knoten und Gitterschrittweite Δr approximiert. Die Nummerierung der Knoten ist aufsteigend $1-4$. Es hat sich daraus folgendes Gleichungssystem in Matrixform ergeben:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\lambda}{\Delta r^2} & -\frac{\lambda}{\Delta r^2} - \frac{\lambda}{2r_2\Delta r} \\ -\frac{\lambda}{\Delta r^2} + \frac{\lambda}{2r_3\Delta r} & \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\lambda}{\Delta r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{\Delta r^2} - \frac{\lambda}{2r_2\Delta r}\right) T_1^{n+1} + \frac{1}{\Delta t} T_2^n \\ \left(\frac{\lambda}{\Delta r^2} + \frac{\lambda}{2r_3\Delta r}\right) T_4^{n+1} + \frac{1}{\Delta t} T_3^n \end{pmatrix} \tag{3}$$

1.3. Welche Art der Zeitdiskretisierung wurde verwendet? Begründen Sie Ihre Antwort.

1.4. Nennen Sie einen Vorteil und einen Nachteil der verwendeten Zeitdiskretisierung.

1.5. Welcher Typ Randbedingung wurde für die räumlichen Ränder verwendet? Begründen Sie Ihre Antwort.

1.6. Wie viele Unbekannten hat das Gleichungssystem? Benennen Sie diese.

2. Aufgabe: Finite Elemente (10 Punkte)

2.1. Gegeben sei die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung, mit der gesuchten Funktion $T(x,t)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad x \in [-3, 5]\,. \tag{4}$$

λ ist konstant. Bestimmen Sie die schwache Form dieser Gleichung. Berücksichtigen Sie wenn nötig partielle Integration. Gehen Sie an beiden Rändern von einer homogenen Neumannrandbedingung aus.

2.2. Für lineare Finite Elemente kann die Transformation von einem Referenzelement

auf ein gegebenes globales Element

als

$$x(\xi) = x_k + \frac{x_{k+1} - x_k}{2}(\xi + 1) \tag{5}$$

angegeben werden. Leiten Sie diesen Zusammenhang mittels des isoparametrischen Prinzips her. (*Hinweis:* $\phi_1^e(\xi) = (1-\xi)/2$; $\phi_2^e(\xi) = (1+\xi)/2$.)

2.3. Berechnen Sie nun, in Abhängigkeit von x_{k+1} und x_k, den Eintrag A_{11}^e oben links in der Elementmatrix, welche zur Massenmatrix aus Aufgabe 2.1 gehört. Die Einträge der globalen Massenmatrix folgen dem Schema $\int_\Omega \phi_i(x)\, \phi_k(x)\, dx$. Gehen Sie weiterhin von linearen Finiten Elementen aus. Verwenden Sie die Transformation aus Aufgabe 2.2.

3. Aufgabe: Finite Volumen (10 Punkte)

Betrachten Sie im Folgenden die zweidimensionale instationäre Wärmeleitungsgleichung ($\lambda = const$):

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \nabla \cdot (\nabla T) = 0 \tag{6}$$

3.1. Bestimmen Sie die integrale Form der Gleichung im allgemeinen Gebiet Ω und vereinfachen Sie analytisch so weit wie möglich. Nutzen Sie den Satz von Gauss:

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} \, \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s \tag{7}$$

Gegeben sei nun folgender Ausschnitt eines zweidimensionalen Gitters aus gleichseitigen Dreiecken.

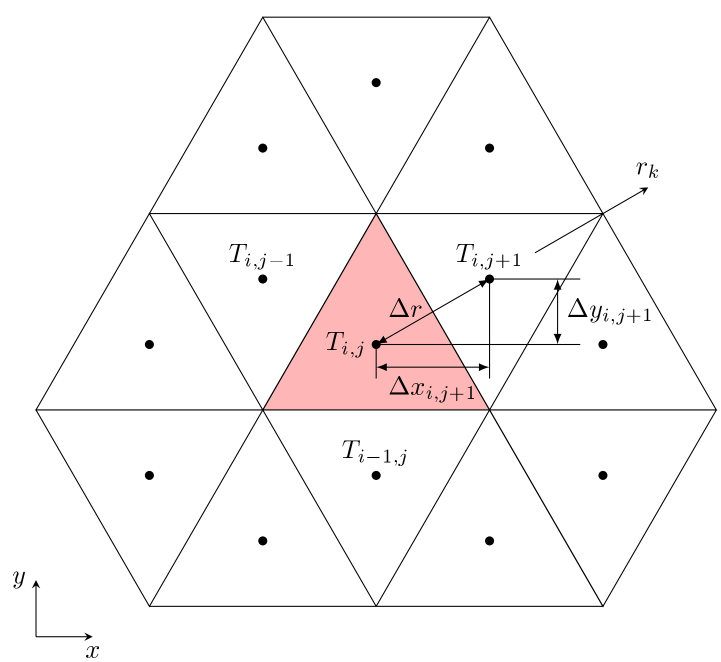


Abbildung 1: 2D Gitter

In den folgenden Aufgabenteilen soll die Gleichung nun vollständig für ein internes Volumen $V_{i,j}$ diskretisiert werden.

3.2. Überführen Sie nun das Randintegral für das Element $V_{i,j}$ nach der Ihnen bekannten Vorgehensweise in Summenform und vereinfachen Sie so weit wie möglich. Beachten Sie dazu, dass die Flüsse entlang jeder einzelnen Randlinie konstant sind. Nehmen Sie zur Vereinfachung die Randnormalen $\mathbf{n}_k$ als gegeben an.
Hinweise:

- Hier ist noch keine Approximation der Flussterme gefordert.
- Die Kantenlänge der gleichseitigen Dreiecke sei Δs.

3.3. Vereinfachen Sie zunächst den zeitlichen Term unter Berücksichtigung der Volumenmittelung.
Diskretisieren Sie anschließend die Flussterme. Bestimmen Sie dazu zunächst die Abstände benachbarter Zellzentren. Nutzen Sie zentrale Differenzen zur Diskretisierung von Gradienten. Nutzen Sie die explizite Euler-Diskretisierung in der Zeit.
Hinweise:

- $\Delta y_{i,j+1} = \frac{\sqrt{3}}{6}\Delta s$
- $\nabla T \cdot \mathbf{n}_k = \frac{\partial T}{\partial r_k}$

3.4. In der Vorlesung wurden zwei Arten von Finite-Volumen-Diskretisierung vorgestellt. Benennen Sie die in Abbildung 1 verwendete Art. Wie viele Summanden würden bei Verwendung der alternativen Volumenanordnung bei der Auflösung des Randintegrals auftreten?

4. Aufgabe: Fehler (12 Punkte)

Gegeben sei das Finite-Differenzen-Verfahren

$$\phi_i^{n+1} - (1 + \frac{\Delta t}{\Delta x})\phi_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}\phi_{i+1}^n = 0 \qquad \Delta t > 0, \Delta x > 0. \tag{8}$$

und die Taylorreihen

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \frac{\partial \phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\frac{\Delta x^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta x^4), \tag{9}$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{\partial \phi}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3}\frac{\Delta t^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \tag{10}$$

4.1. Handelt es sich um ein explizites oder implizites Verfahren? Begründen Sie Ihre Antwort.

4.2.

Zeigen Sie, für welche partielle Differentialgleichung das Verfahren in Gleichung (8) konsistent ist.
Welche Genauigkeitsordnung hat das Verfahren in Raum und Zeit?

4.3. Die von-Neumann Stabilitätsanalyse ergibt für das Verfahren in Gleichung (8) das Amplitudenverhältnis ($k : Wellenzahl$):

$$\left|\left|\frac{V^{n+1}}{V^n}\right|\right| = \left|\left|1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}(cos(k\Delta x) + Isin(k\Delta x) - 1)\right|\right|, \qquad I = \sqrt{-1}. \tag{11}$$

Ist das Verfahren stabil?

Hinweis: $||a \pm Ib|| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

4.4.

Ist das Verfahren konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort.

5. Aufgabe: Grundlagen (8 Punkte)

5.1. Geben Sie an, in welcher der Abbildungen 2 (a)–(d) die Interpolationsfunktion ϕ_4 dargestellt wird.

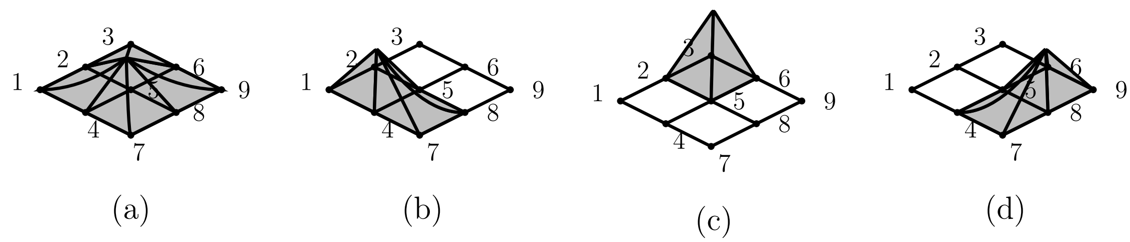


Abbildung 2: Darstellung der Interpolationsfunktionen auf dem Finite-Elemente-Gitter.

5.2. Welche Elemente des in Abbildung 3 gezeigten Gitters tragen durch nicht-Nulleinträge in ihren Elementmatrizen zu den folgenden Einträgen der globalen Massenmatrix bei:
(a) $A_{45} = \int_\Omega \phi_4 \phi_5 \, \mathrm{d}\Omega$, (b) $A_{55} = \int_\Omega \phi_5 \phi_5 \, \mathrm{d}\Omega$ und (c) $A_{49} = \int_\Omega \phi_4 \phi_9 \, \mathrm{d}\Omega$.
Die Interpolationsfunktionen ϕ_i sollen dabei als linear angenommen werden.

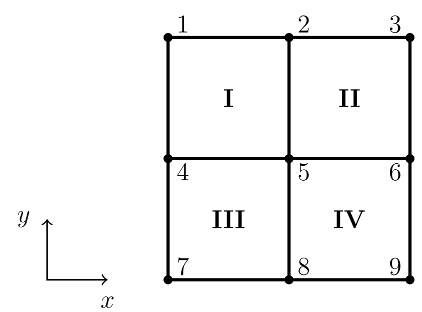


Abbildung 3: Finite-Elemente-Gitter

5.3. In der Finite-Volumen-Methode muss bei der Berücksichtigung von Randbedingungen zwischen der knotenzentrierten und der zellzentrierten Diskretisierung unterschieden werden. Nennen Sie für ein knotenzentriertes Schema: (a) die Position an der Dirichlet Randbedingungen vorgegeben werden und (b) zwei mögliche Verfahren mit denen Neumann Bedingungen berücksichtigt werden können.

5.4. Gegeben sei der in Abbildung 4 skizzierte eindimensionale Stab, mit konstanten Wärmeströmen Q_{in} und Q_{out} über beide Ränder. Die Temperaturänderung in einem Teilvolumen V_i kann mittels der Finiten-Volumen-Methode in einem zellzentrierten Schema wie folgt beschrieben werden:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = Q_{left} - Q_{right}, \tag{12}$$

wobei Q_{left} und Q_{right} wie folgt definiert sind:

$$Q_{left} = -\lambda \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x}, \qquad Q_{right}, = -\lambda \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x} \ .$$

Geben Sie die Temperatur T_1^{n+1} in Teilvolumen V_1 in Abhängigkeit von den Temperaturen in den benachbarten Zellen und der Randbedingungen an.

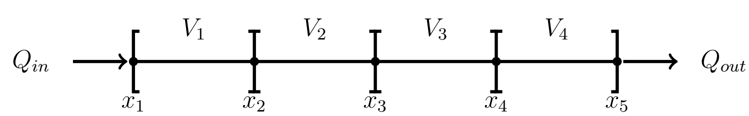


Abbildung 4: 1D Stab mit Finite-Volumen Zellen.

5.5. Ein Verfahren zur Stabilisierung der Advektionsgleichung ist das Upwind-Verfahren. Muss zu seiner Anwendung im Rahmen der Finite-Differenzen-Methode ein Vorwärts- oder ein Rückwärtsdifferenzenausdruck verwendet werden?

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Sommersemester 2018

1. Aufgabe: Finite Differenzen (10 Punkte)

* Lösung *

1.1. Lösung:

$$T_{i-1} \approx T_i - \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=r_i} \Delta r + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\bigg|_{r=r_i} \Delta r^2 - \frac{1}{6}\,\frac{\partial^3 T}{\partial r^3}\bigg|_{r=r_i} \Delta r^3 + \ldots \qquad (1)$$

1.2. Lösung:

Gegebene Taylorreihe minus Taylorreihe aus 1.1:

$$T_{i+1} - T_{i-1} \approx 2\,\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=r_i} \Delta r + \frac{1}{3}\,\frac{\partial^3 T}{\partial r^3}\bigg|_{r=r_i} \Delta r^3 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=r_i} \approx \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta r} - \underbrace{\frac{1}{6}\,\frac{\partial^3 T}{\partial r^3}\bigg|_{r=r_i} \Delta r^2}_{Abbruchfehler} \qquad (3)$$

Der Ausdruck ist 2. Ordnung genau.

1.3. Lösung:

Es wurde das implizite Eulerverfahren (Euler-rückwärts) verwendet. Das erkennt man daran, dass zur Bestimmung der Funktionswerte im Zeitschritt $n+1$ ein Gleichungssystem gelöst werden muss.

1.4. Lösung:

Das implizite Eulerverfahren hat den Vorteil, dass es immer stabil ist. Der Nachteil ist, dass ein Gleichungssystem gelöst werden muss, was zu einem erhöhten Rechenaufwand führt.

1.5. Lösung:

Dirichlet Randbedingungen. Die Funktionswerte der Ränder wurden als bekannte Größen auf die rechte Seite sortiert.

1.6. Lösung:

2 pro Zeitschritt. T_2^{n+1}, T_3^{n+1}.

2. Aufgabe: Finite Elemente (10 Punkte)

* Lösung *

2.1. Lösung:

$$\int_{-3}^{5} w \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) dx = 0 \quad \forall w \tag{4}$$

Partielle Integration des Terms mit der räumlichen Ableitung sowie Einsetzten der Randbedingungen:

$$\lambda \int_{-3}^{5} w \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\, dx = -\lambda \int_{-3}^{5} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x}\, dx \quad + \quad \underbrace{\left[w \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{-3}^{5}}_{=0 \text{ da } \frac{\partial T}{\partial x}=0 \text{ am Rand}} \tag{5}$$

Insgesamt:

$$\int_{-3}^{5} w \frac{\partial T}{\partial t}\, dx + \lambda \int_{-3}^{5} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x}\, dx = 0 \quad \forall w \tag{6}$$

2.2. Lösung: Isoparametrische Darstellung:

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^{2} \phi_i^e(\xi) x_i \tag{7}$$

Für das gegebene globale Element gilt $x_1 = x_k$ und $x_2 = x_{k+1}$.

$$x(\xi) = \frac{1-\xi}{2} x_k + \frac{1+\xi}{2} x_{k+1} \tag{8}$$

$$= \frac{1}{2} x_k - \frac{\xi}{2} x_k + \frac{1}{2} x_{k+1} + \frac{\xi}{2} x_{k+1} \tag{9}$$

$$= \frac{\xi}{2}(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2}(x_{k+1} + x_k) + \left[\frac{1}{2} x_k - \frac{1}{2} x_k \right] \tag{10}$$

$$= x_k + \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2}(1 + \xi) \tag{11}$$

2.3. Lösung:

$$A_{11}^e = \int_{-1}^{1} \phi_1^e(\xi) \phi_1^e(\xi)\, d\xi \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| \tag{12}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{(1-\xi)^2}{4}\, d\xi \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| \tag{13}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1 - 2\xi - \xi^2}{4} \, d\xi \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| \tag{14}$$

$$= \left[\frac{1}{4} \left(\xi - \xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3 \right) \right]_{-1}^{1} \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| \tag{15}$$

$$= \left[\frac{1}{12} + \frac{7}{12} \right] \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| \tag{16}$$

$$= \frac{2}{3} \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| \tag{17}$$

Berechnung der Ableitung der Transformation:

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| = \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \tag{18}$$

Insgesamt:

$$A_{11}^e = \frac{x_{k+1} - x_k}{3} \tag{19}$$

3. Aufgabe: Finite Volumen (10 Punkte)

* Lösung *

3.1. Lösung:

Integrale Form und Umformen mit Satz von Gauss:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega - \lambda \int_\Omega \nabla \cdot (\nabla T)\,\mathrm{d}\Omega = 0 \\ \iff \quad &\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega T\,\mathrm{d}\Omega - \lambda \oint_{\partial\Omega} \nabla T \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

3.2. Lösung:

Vereinfachung des Randintegrals durch Summation über stückweise lineare Kanten (∂V):

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V_{i,j}} \nabla T \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s &= \int_{(\partial V_{i,j})_1} \nabla T \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s_1 + \int_{(\partial V_{i,j})_2} \nabla T \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s_2 + \int_{(\partial V_{i,j})_3} \nabla T \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s_3 \\ &= (\nabla T \cdot \mathbf{n})\Big|_1 \Delta s + (\nabla T \cdot \mathbf{n})\Big|_2 \Delta s + (\nabla T \cdot \mathbf{n})\Big|_3 \Delta s \\ &= \Delta s\left[(\nabla T \cdot \mathbf{n})\Big|_1 + (\nabla T \cdot \mathbf{n})\Big|_2 + (\nabla T \cdot \mathbf{n})\Big|_3\right] \end{aligned} \tag{21}$$

3.3. Lösung: Vereinfachung des zeitlichen Terms:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_{i,j}} T(x,y,t)\,\mathrm{d}V \approx \frac{\partial}{\partial t} T_{i,j}(t) \int_{V_{i,j}} \mathrm{d}V = \frac{\partial}{\partial t} T_{i,j}(t)\,\frac{\Delta s^2 \sqrt{3}}{4} \tag{22}$$

Flussterme:

Mit dem gegeben Hinweis zu gleichseitigen Dreiecken folgt:

$$\Delta r = \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\Delta s\right)^2} = \Delta s\sqrt{\frac{4}{12}} = \frac{\Delta s}{\sqrt{3}} \tag{23}$$

$$\oint_{\partial V_{i,j}} \nabla T \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \Delta s\left[\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta r} + \frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\Delta r} + \frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\Delta r}\right] \tag{24}$$

Einsetzen und zeitlich diskretisieren mit Euler vorwärts liefert:

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} \frac{\Delta s^2}{4} = \left(T_{i,j+1}^{n} + T_{i,j-1}^{n} + T_{i-1,j}^{n} - 3T_{i,j}^{n}\right) \tag{25}$$

3.4. Lösung: In der Vorlesung wurde die zellzentrierte und knotenzentrierte FV-Methode erläutert. Die in Abbildung 1 gezeigte Art ist zellzentriert.
Bei Verwendung eines knotenzentrierten Ansatz wären beim gegebenen Gitter sechs Summanden aufgetreten.

4. Aufgabe: Fehler (12 Punkte)

* Lösung *

4.1. Lösung: Es handelt sich um ein explizites Verfahren. Die einzige Unbekannte ϕ_i^{n+1} kann direkt aus den bekannten Lösungen des vorherigen Zeitschrittes ϕ_i^n, ϕ_{i+1}^n und ϕ_i^n berechnet werden. Die Lösung eines Gleichungssystems ist nicht notwendig.

4.2. Lösung: Damit das gegebene Verfahren die <u>unbekannte</u> partielle Differentialgleichung konsistent diskretisiert, muss die folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} ||L - L_\Delta|| = 0. \tag{26}$$

Das Einsetzen der Taylorreihen in (8) ergibt:

$$\begin{aligned} \phi_i^n + \frac{\partial \phi}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3}\frac{\Delta t^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \\ -(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x})\phi_i^n \\ +\frac{\Delta t}{\Delta x}(\phi_i^n + \frac{\partial \phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\frac{\Delta x^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta x^4)) = 0\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Eine Vereinfachung der Terme ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3}\frac{\Delta t^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \\ +\frac{\Delta t}{\Delta x}(\frac{\partial \phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\frac{\Delta x^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta x^4)) = 0\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Die Elimination von Δx, die Division mit Δt und die Zusammenfassung der Ordnungsterme ergeben:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t) + \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathcal{O}(\Delta x) = 0\,. \tag{29}$$

Diese Lösung kann für die Konvergenzabschätzung verwendet werden.

Das Einsetzen von (29) als L_Δ in Gleichung (26) ergibt

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} ||L - L_\Delta|| = \left|\left| L - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \underbrace{\mathcal{O}(\Delta t)}_{\to 0} + \frac{\partial \phi}{\partial x} + \underbrace{\mathcal{O}(\Delta x)}_{0}\right) \right|\right| \stackrel{!}{=} 0, \quad (30)$$

und damit:

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} ||L - L_\Delta|| = \left|\left| L - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \right|\right| \stackrel{!}{=} 0. \quad (31)$$

Daraus folgt, dass das Verfahren nur für die partielle Differentialgleichung

$$L = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (32)$$

konsistent ist. Aus (30) folgen dann unmittelbar die Genauigkeitsordnungen. Das Verfahren ist 1. Ordnung in der Zeit und im Raum.

4.3. Lösung:

$$\left|\left| \frac{V^{n+1}}{V^n} \right|\right| = \left|\left| 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\cos(k\Delta x) + I \sin(k\Delta x) - 1) \right|\right|, \qquad I = \sqrt{-1}. \quad (33)$$

Die Identifikation der Real- und Imaginärteile ergibt

$$\left|\left| \frac{V^{n+1}}{V^n} \right|\right| = \left|\left| \underbrace{\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\cos(k\Delta x) - 1)\right)}_{Realteil} + \underbrace{\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} I \sin(k\Delta x)\right)}_{Imaginrteil} \right|\right|, \qquad i = \sqrt{-1}. \quad (34)$$

Die Verwendung des Hinweises ergibt dann:

$$\left|\left| \frac{V^{n+1}}{V^n} \right|\right| = \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\cos(k\Delta x) - 1)\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)\right)^2}. \quad (35)$$

Ausmultiplizieren ergibt :

$$\left\|\frac{V^{n+1}}{V^n}\right\| = \sqrt{1 + \underbrace{\underbrace{\underbrace{2\frac{\Delta t}{\Delta x}}_{>0}\underbrace{(1 - cos(k\Delta x)}_{[0,2]}}_{>0} + \underbrace{\underbrace{2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}}_{>0}\underbrace{(1 - \cos(k\Delta x))}_{[0,2]}}_{>0}}_{>0}} > 1. \qquad (36)$$

Das Verfahren ist instabil.

4.4. Lösung:

Nach dem Satz von Lax sind Stabilität und Konsistenz notwendige und hinreichende Bedingung für ein konvergentes Finite-Differenzen Verfahren. Die Stabilität wurde widerlegt, d.h. das Verfahren ist nicht konvergent.

5. Aufgabe: Grundlagen (8 Punkte)

* Lösung *

5.1. Lösung: Abbildung 2 (b) zeigt die Interpolationsfunktion ϕ_4.

5.2. Lösung:

(a) Elemente **I, III**.

(b) Elemente **I, II, III, IV**.

(c) Kein Element trägt zum globalen Massenmatrixeintrag A_{49} bei.

5.3. Lösung:

(a) Für ein knotenkonzentriertes Schema werden die Dirichlet Randbedingungen an den auf dem Rand befindlichen Knoten vorgegeben.

(b) Die Neumann Bedingung kann durch Extrapolation oder einseitige Differenzen berücksichtigt werden.

5.4. Lösung:

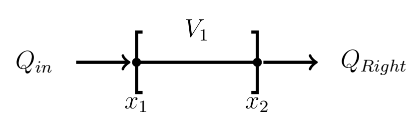


Abbildung 1: 1D Finite-Volumen

Berechnung der Flüsse über die Zellgrenzen von V_1:

$$Q_{left} = Q_{in},$$
$$Q_{right} = -\lambda \frac{T_2^n - T_1^n}{\Delta x}.$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\Delta t} = Q_{in} + \lambda \frac{T_2^n - T_1^n}{\Delta x},$$
$$T_1^{n+1} = \Delta t \left(Q_{in} + \lambda \frac{T_2^n - T_1^n}{\Delta x} \right) + T_1^n.$$

5.5. Lösung: Ob ein Vorwärts oder ein Rückwärtsdifferenzenstern verwendet werden muss hängt von der Advektionsrichtung ab.