

Schriftliche Prüfung: Aufgaben des AVT-Teils. Jeder Punkt entspricht 1 Minute.

Simulationstechnik

Sommersemester 2024

1. Aufgabe: Fragen

(20 Punkte)

1.1. Abb. 1 zeigt das Verhalten des folgenden Systems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (1)$$

mit Ruhelage \mathbf{x}_R .

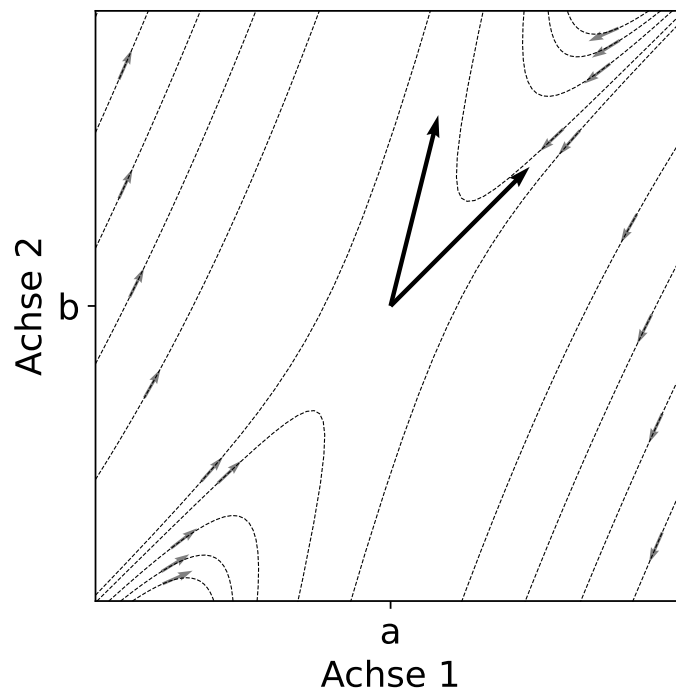


Abbildung 1: Verhalten des Systems 1

Benennen Sie:

- a) die Art der Abb. 1
- b) die dünnen, gestrichelten Linien
- c) die großen, fett gedruckten Pfeile
- d) den Punkt $[a, b]^T$
- e) die Achsen 1 & 2

*Hinweis: Schreiben Sie **nicht** auf die Aufgabenstellung.*

(2,5 Punkte)

1.2. Geben Sie die allgemeine Lösung des autonomen linearen Systems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

in Abhängigkeit des Anfangswerts $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ an.

(1,5 Punkte)

1.3. Für ein System wie in Teilaufgabe 1.2 gilt:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Was können Sie über die Stabilität des Systems aussagen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(2,5 Punkte)

1.4. Geben Sie die System- und Ausgangsgleichungen für ein lineares zeitinvariantes System in Zustandsraumdarstellung an.

(2 Punkte)

1.5. Gegeben ist das folgende, nichtlineare System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{f}_2(\mathbf{p})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}_1(\mathbf{x}(t))\mathbf{h}_2(\mathbf{p})$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$$

Geben Sie die Sensitivitätsgleichungen für das gegebene System an und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

Hinweis: Bei Verwendung von Differentials geben Sie die Abhängigkeit eines Differentials d von einer Größe g explizit mittels der Darstellung $d|_g$ an.

(4 Punkte)

1.6. Sie möchten die Parameter $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ eines nichtlinearen Systems anhand von Beobachtungen $\hat{\mathbf{y}}$ der Ausgänge \mathbf{y} schätzen. Was muss gelten, damit hierfür die Gütefunktion $J(\mathbf{p}) = \|\mathbf{M}\mathbf{p} - \hat{\mathbf{y}}\|^2$, mit einer geeigneten Matrix \mathbf{M} verwenden werden kann? Wie nennt man diesen Spezialfall der Parameterschätzung? (1,5 Punkte)

1.7. Definieren Sie den Begriff *konstitutive Gleichung*. (1 Punkt)

1.8. Zur numerischen Integration eines Systems ziehen Sie folgende Integrationsmethoden in Erwägung:

- Methode 1:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + (t_{n+1} - t_n) \mathbf{f}\left(t_n + \frac{t_{n+1} - t_n}{2}, \mathbf{x}_n + \frac{t_{n+1} - t_n}{2} \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n)\right)$$

- Methode 2:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + (t_{n+1} - t_n) \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n) \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \frac{t_{n+1} - t_n}{2} \left(\mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n) + \mathbf{f}(t_{n+1}, \tilde{\mathbf{x}}_{n+1}) \right)\end{aligned}$$

Handelt es sich hierbei jeweils um eine explizite oder eine implizite Methode? Begründen Sie Ihre Antwort kurz. (1,5 Punkte)

1.9. Benennen Sie jeweils die Datensätze die im Rahmen des maschinellen Lernens für die folgenden Teilaufgaben verwendet werden:

- a) Anpassung der Modellparameter
- b) Anpassung der Modellstruktur
- c) Beurteilung der Modellqualität

(1,5 Punkte)

1.10.

- a) Was versteht man unter Überanpassung (Overfitting), Erläutern Sie kurz.
- b) Nennen Sie eine Methode um Überanpassung vorzubeugen.

(2 Punkte)

2. Aufgabe: Systemtheorie (20 Punkte)

Gegeben sei das nichtlineare Differentialgleichungssystem in Zustandsraumdarstellung mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad \text{mit} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} -a x_1(t)^5 \\ 2 x_1(t)^3 - \frac{x_2(t)}{a} \end{pmatrix} \quad (2)$$

2.1. Wie ist eine Ruhelage im Allgemeinen mathematisch definiert?

Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}_R = (0, 0)^T$ die **einzige** Ruhelage des nichtlinearen Systems (2) ist.

(3 Punkte)

2.2. Geben Sie zunächst die allgemeine Formel der Taylorreihenentwicklung um einen allgemeinen Punkt \mathbf{x}^* für ein autonomes nichtlineares Differentialgleichungssystem an.

Linearisieren Sie anschließend das System (2) um diesen allgemeinen Punkt \mathbf{x}^* und geben Sie die darin auftretenden Terme explizit an.

(4 Punkte)

2.3. Führen Sie eine Stabilitätsanalyse mit Hilfe der indirekten Ljapunow-Methode durch. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Führen Sie die Linearisierung um die Ruhelage $\mathbf{x}_R = (0, 0)^T$ durch und bestimmen Sie die Eigenwerte der Systemmatrix in Abhängigkeit des Parameters a .
- Ist das linearisierte System instabil, grenzstabil oder asymptotisch stabil? Begründen Sie.
- Erläutern Sie anhand des Satzes von Hartman-Grobman, ob Sie eine Aussage über das nicht lineare System treffen können, und wenn ja welche.

(5 Punkte)

2.4. Weisen Sie nun mit der direkten Methode von Ljapunow nach, dass die Ruhelage des nichtlinearen Systems (2) für $a > 0$ global stabil ist. Verwenden Sie dazu die unbeschränkt positiv-definite Funktion $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$ als Ljapunow-Funktion.

(5 Punkte)

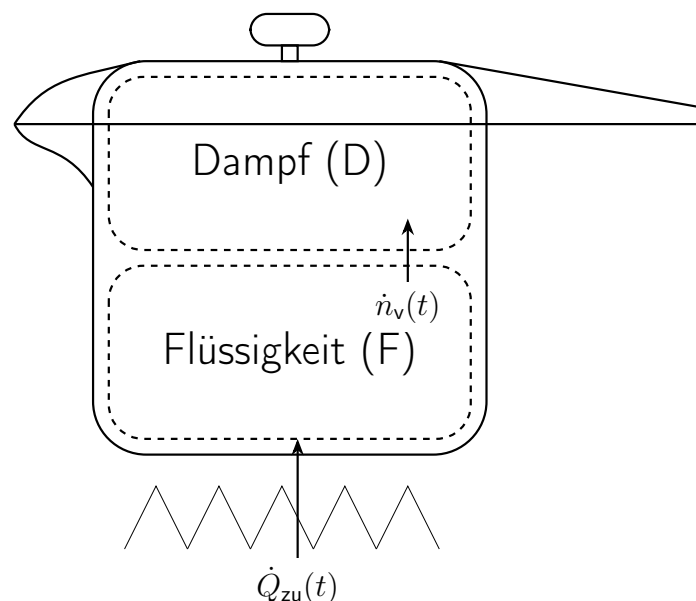
2.5. Weisen Sie mit Hilfe des Theorems von LaSalle nach, dass für $a > 0$ die Ruhelage $\mathbf{x}_R = (0, 0)^T$ global asymptotisch stabil ist.

(3 Punkte)

3. Aufgabe: DA-Systeme

(20 Punkte)

Seit der Erfindung 1679 durch Denis Papin erfreuen Schnellkochtöpfe/Dampfkochtöpfe die Menschheit. Das Wirkprinzip beruht darauf, dass der Siedepunkt von Wasser mit zunehmendem Druck steigt. Mit einer Wärmequelle, wie einem elektrischen Herd, wird das Wasser im Topf erhitzt. Es bildet sich Dampf und dieser erhöht den Druck im Inneren. Daniel Dampftrieb ist ein großer Enthusiast von Dampfkochtöpfen. Im Folgenden werden Sie ihm helfen den Dampfdrucktopf zu modellieren.



Hinweise:

- Der Dampfdrucktopf wird als geschlossenes System modelliert, das ausschließlich Wasserdampf und flüssiges Wasser beinhaltet.
- Es gibt eine Wärmequelle, die $\dot{Q}_{zu}(t)$ als Eingang bereitstellt.
- Wärmeverluste an die Umgebung sind zu vernachlässigen.
- Wasserdampf ist als ideales Gas anzunehmen.
- Der Topf ist starr. Das Volumen V_T des Topfs ist konstant.

3.1. Wir betrachten die Flüssigkeit und den Dampf als zwei getrennte Phasen. Flüssiges Wasser wird zu Dampf. Die Menge des pro Zeiteinheit verdampften Wassers wird mit $\dot{n}_v(t)$ bezeichnet.

- Stellen Sie je eine Stoffmengenbilanz für die Flüssigphase und die Dampfphase auf.
- Stellen Sie eine algebraische Gleichung für die konstante Gesamtstoffmenge n_{ges} auf.
- Stellen Sie eine algebraische Gleichung auf, die Stoffmenge und Volumen der Dampfphase in eine Beziehung bringt.
- Stellen Sie eine algebraische Gleichung auf, die Stoffmenge und Volumen der Flüssigphase in eine Beziehung bringt. Nehmen Sie an, dass das molare Volumen (m^3 pro mol) des flüssigen Wassers $V_{\text{m,F}}$ konstant und gegeben ist.
- Stellen Sie eine algebraische Gleichung auf für das konstante Gesamtvolumen V_T auf.

(6 Punkte)

3.2. In einer Formelsammlung finden Sie diese beiden Formen der allgemeinen Energiebilanz:

$$\left. \frac{dU(t)}{dt} \right|_t = \sum_{j \in \Lambda_H} J_j^H(t) + \sum_{k \in \Lambda_Q} J_k^Q(t) + \sum_{l \in \Lambda_{w_{tech}}} J_l^{w_{tech}}(t) - p(t) \left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_t$$

$$\left. \frac{dH(t)}{dt} \right|_t = \sum_{j \in \Lambda_H} J_j^H(t) + \sum_{k \in \Lambda_Q} J_k^Q(t) + \sum_{l \in \Lambda_{w_{tech}}} J_l^{w_{tech}}(t) + V(t) \left. \frac{dp(t)}{dt} \right|_t$$

Anstatt für Stoffdaten Tabellen zu konsultieren, nutzen Sie das ThermoKing3000-Modell. Dieses gibt Ihnen neuronale Netze mit denen Sie die spezifische innere Energie und Enthalpie der Dampfphase ($u_D(t)$) und der Flüssigphase ($u_F(t)$) als Funktionen der Temperatur $T(t)$ und des Druckes $p(t)$ berechnen können.

$$u_D(t) = f_1(T(t), p(t)) \quad (3.2.1)$$

$$h_D(t) = f_2(T(t), p(t)) \quad (3.2.2)$$

$$u_F(t) = f_3(T(t), p(t)) \quad (3.2.3)$$

$$h_F(t) = f_4(T(t), p(t)) \quad (3.2.4)$$

- Welche Form der allgemeinen Energiebilanz, basierend auf den Erkenntnissen der Vorlesung, nutzen Sie zum Modellieren des Schnellkochtopfs und warum.
- Benennen Sie die Terme auf der rechten Seite der in Teilaufgabe a) gewählten allgemeinen Energiebilanz.

- c) Stellen Sie nun die Energiebilanz für den gesamten Topfinhalt auf. Nutzen Sie die vier Terme auf der rechten Seite der Energiebilanz. Ordnen Sie jedem entweder, die in der Aufgabenstellung gegebenen Ströme und Leistungen zu, oder schreiben Sie explizit, dass Sie ihn vernachlässigen ($=0$). Schreiben Sie damit schlussendlich die Energiebilanz für den Topfinhalt auf.
- d) Stellen Sie eine algebraische Gleichung für die innere Gesamtenergie $U(t)$ oder Gesamtenthalpie $H(t)$ auf, je nachdem welche Form Sie in Teilaufgabe a) gewählt haben. Nutzen Sie hierfür die Stoffmengen und die spezifischen inneren Energien/ Enthalpien.

(6,5 Punkte)

3.3.

- a) Nennen Sie jeweils die algebraischen Variablen, die differentiellen Variablen, die Eingänge und die Parameter/Konstanten des Systems.
- b) Stellen Sie die Inzidenzmatrix des DA-Systems auf und prüfen Sie damit, ob es ein Index-1-System sein kann. Begründen Sie kurz.
Nutzen Sie hierfür die passenden Gleichungen des ThermoKing3000-Modells, sowie die von Ihnen aufgestellten Gleichungen.
Hinweis: Beschriften Sie die Zeilen und die Spalten der Inzidenzmatrix eindeutig.
Empfehlung: Sie können gerne die Aufgabennummerierung zur Benennung der Gleichungen nutzen, z.B. (3.2.1) oder (3.1.e).
- c) Dieses Modell benutzt sowohl physikalische/chemische Gesetze als auch datengetriebene Teilmodelle. Wie nennt man diese Art von Modellen?

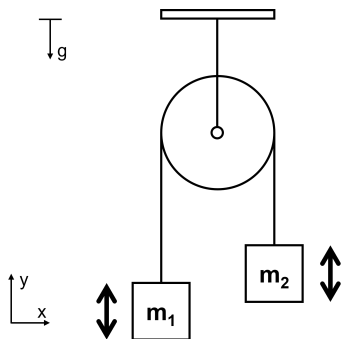
(7,5 Punkte)

4. Aufgabe: Strukturierte Systeme und Modelica (20 Punkte)

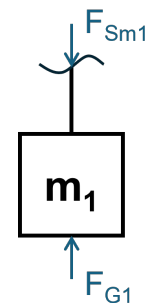
Abb. 2 zeigt die Skizze einer Atwood'schen Fallmaschine in der zwei Massen an einem Seil über eine Rolle verbunden sind. Mit diesem Experiment kann die gleichmäßige Fallbeschleunigung einer Masse untersucht werden. Zum Startzeitpunkt des Experiments befinden sich beide Massen in der Ruhe. Die Geschwindigkeiten der Massen betragen somit Null. Vor dem Start des Experiments werden beide Massen losgelassen und durch die Gewichtskraft beschleunigt. Da beide Massen über ein Seil und eine Rolle verbunden sind, ist das Verhalten abhängig von dem Verhältnis der Massen m_1 und m_2 .

In dieser Aufgabe werden die folgenden Annahmen getroffen:

- Das Seil und die Rolle sind masselos und reibungsfrei.
- Die Rolle nimmt keine Kraft auf.
- Das Seil dehnt sich nicht bei Belastung.
- Luftreibung kann vernachlässigt werden.



(a) Skizze einer Atwood'schen Fallmaschine mit zwei Massen m_1 und m_2 , die durch ein masseloses Seil über eine masselose Rolle reibungsfrei verbunden sind.



(b) Skizze der freigeschnittenen Masse m_1 im angegebenen Koordinatensystem mit Gewichtskraft F_G und an das Seil übertragene Kraft F_{Sm1} .

Abbildung 2: Skizze des untersuchten Systems und einer freigeschnittenen Masse.

Analyse des Systems

4.1. Geben Sie die Definitionen von Dekomposition und Aggregation in strukturierten Systemen an. (1 Punkt)

4.2. Zur Modellierung wollen Sie das in Abb. 2a gezeigte System in Verknüpfungssysteme und Speichersysteme unterteilen. Welche Teilsysteme werden als Speichersystem und welche als Verknüpfungssystem modelliert? Begründen Sie Ihre Antworten. (2 Punkte)

Modellierung des Systems

4.3. Sie wollen nun das in Abb. 2a gezeigte System modellieren.

- a) Schneiden Sie zunächst das Seil frei und zeichnen Sie auftretende Kräfte ein.
- b) Zeichnen Sie die resultierende Bewegungsrichtung der Massen für den Fall $m_1 > m_2$ mit einem Pfeil an den Schnittstellen des Seils ein.

(2 Punkte)

Implementierung des Systems

Im Folgenden soll das System aus Abb. 2a in Modelica implementiert werden. Dazu werden Modelle für die Systeme der Massen und des Seils sowie ein Konnektor zur Verknüpfung der Teilsysteme benötigt.

4.4. Schreiben Sie den Modelica-Code für den Konnektor `Anschluss`. Dieser Konnektor übergibt eine Kraft F und Beschleunigung a zwischen zwei Systemen. (2,5 Punkte)

4.5. Gegeben ist die unvollständige Implementierung des Modells `Masse_an_Seil` (siehe Modelica-Code Nr. 1). Vervollständigen Sie den Modelica-Code und implementieren Sie die Kräftebilanz um eine Masse. Orientieren Sie sich dabei an den eingezeichneten Kräften in Abb. 2b. Verwenden Sie für die Schnittstellen den Konnektor `Anschluss` aus Teilaufgabe 4.4.

*Hinweis: Schreiben Sie **nicht** in die Aufgabenstellung. Machen Sie kenntlich, welcher Code an welche Stelle gehört.*

(5,5 Punkte)

```
1 model Masse_an_Seil
2     import Modelica.Units.SI.*;
3     constant Acceleration g = 9.81;
4     Force F_Sm;
```

```
5      Acceleration a;  
6      // fehlender Code (1)  
7  
8  equation  
9      //fehlender Code (2)  
10  
11  
12 end Masse_an_Seil;
```

Modelica-Modell Nr. 1: Unvollständiger Code Modell Masse_an_Seil.

4.6. Abschließend sollen Sie die Modelle der Teilsysteme zu einem Modell aggregieren. Gehen Sie dazu davon aus, dass Sie alle Teilmodelle, d.h. den Konnektor Anschluss, das Teilsystem Seil, sowie das Teilsystem Masse_an_Seil korrekt implementiert haben und benutzen Sie diese. Ergänzen Sie den fehlenden Code im unten dargestellten Modell Atwood_Modell (siehe Modelica-Modell Nr. 2). Beachten Sie Folgendes:

- Implementieren Sie den Code für Massen von $m_1 = 2\text{ kg}$ und $m_2 = 1\text{ kg}$.
- Das Modell Seil hat zwei Konnektoren vom Typ Anschluss: An_S1 und An_S2.
- Das Modell Masse_an_Seil hat einen Konnektor vom Typ Anschluss: An_m
- Die resultierende Beschleunigung ist die Beschleunigung a_res der Masse m_1 .

(5 Punkte)

```
1 model Atwood_Modell  
2     import Modelica.Units.SI.*;  
3     Seil S;  
4     Acceleration a_res;  
5     // fehlender Code (1)  
6  
7  
8 equation  
9     a_res = m1.a;  
10    //fehlender Code (2)  
11  
12  
13 end Atwood_Modell;
```

Modelica-Modell Nr. 2: Unvollständiger Code Modell Atwood_Modell.

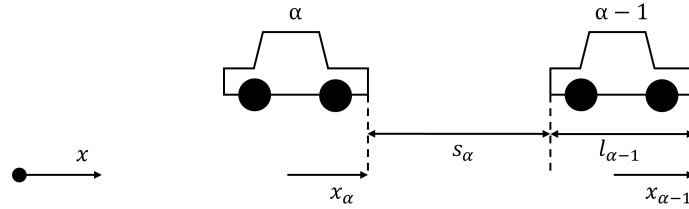
Bewertung und Interpretation der Ergebnisse

4.7. Abschließend analysieren Sie das Modell und die Ergebnisse.

- a) Welches reale Verhalten kann von dem erstellten Modell in dieser Form für den Fall $m_1 \neq m_2$ für größere Berechnungszeiten ($t \rightarrow \infty$) nicht erfasst werden? Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) Wäre die reale Beschleunigung bei der Berücksichtigung von nicht-idealem Verhalten wie Reibungsverlusten in der Rolle betragsmäßig größer oder kleiner als die berechnete Beschleunigung a_{res} ? Begründen Sie Ihre Antwort.

(2 Punkte)

5. Aufgabe: Diskret-kontinuierliche Systeme (20 Punkte)



Der Verkehrsfluss entlang einer Landstrasse kann mit dem Intelligent Driver Model diskret-kontinuierlich modelliert werden. Dabei wird für jedes Auto α die Position x_α und die Geschwindigkeit v_α mit einer differentiellen Gleichung beschrieben. Des Weiteren wird für jedes Auto der gewünschte Abstand s_α^* und der tatsächliche Abstand s_α zum vorherigen Auto $\alpha - 1$ in Abhängigkeit dessen Länge $l_{\alpha-1}$ berechnet.

$$s_\alpha(t) = x_{\alpha-1}(t) - l_{\alpha-1} - x_\alpha(t) \quad (3)$$

$$s_\alpha^*(t) = 2 \text{ m} + 1,6 \text{ s } v_\alpha(t) + 0,45 \frac{\text{s}^2}{\text{m}} v_\alpha(t)(v_\alpha(t) - v_{\alpha-1}(t)) \quad (4)$$

Befindet sich das Auto in freier Fahrt, beschreibt die folgende Gleichung die Geschwindigkeitsänderung mit Hilfe des Parameters v_{\max} (maximal erlaubte Geschwindigkeit):

$$\dot{v}_\alpha(t) = 0,73 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left(1 - \left(\frac{v_\alpha(t)}{v_{\max}} \right)^4 - \left(\frac{s_\alpha^*(t)}{s_\alpha(t)} \right)^2 \right) \quad (5)$$

5.1. Schreiben Sie die Differentialgleichung für die Position x_α auf. (1 Punkt)

5.2. Begründen Sie anhand der Gleichung (5), warum ein Auto nie dauerhaft die maximale Geschwindigkeit überschreitet. (2 Punkte)

5.3. Unterschreitet das Auto den kritischen Sicherheitsabstand s_{krit} , beschreiben Sie die folgende Gleichung die Geschwindigkeitsänderung:

$$\dot{v}_\alpha(t) = -1,67 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left(\frac{s_\alpha^*(t)}{s_\alpha(t)} \right)^2 \quad (6)$$

- a) Zeichnen Sie einen hybriden Automaten mit 2 Moden, der ein Auto beschreibt, dass hinter einem anderen Auto fährt. Gehen Sie davon aus, dass es keine Ampel oder weitere Hindernisse gibt. Benennen Sie die Moden sinnvoll. Zeichnen Sie alle Kanten, Guards und Jumps ein.

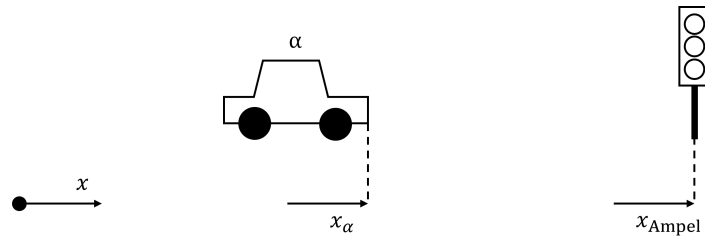
Hinweis: Die Gleichungen, die in jeder Mode gelten, müssen Sie nicht aufschreiben.

- b) Ergänzen Sie im folgenden Modelica Code die Gleichungen für $\text{der}(v_5)$ für das Auto $\alpha = 5$.

*Hinweis: Schreiben Sie **nicht** in die Aufgabenstellung. Machen Sie kenntlich, welcher Code an welche Stelle gehört.*

```
1 model Fahrzeug
2   parameter Real s_krit;
3   parameter Real v_max;
4   :
5   Real v_5;
6   Real x_5;
7   Real s_5;
8   Real s_5_star;
9   equation
10    :
11    der(x_5) = v_5;
12    der(v_5) = // Fehlenden Code ergaenzen
13    // Fehlenden Code ergaenzen
14    s_5 = x_4 - l_4 - x_5;
15    s_5_star = 2+1.6*v_5 + 0.45*v_5*(v_5-v_4);
16 end Fahrzeug;
```

(8 Punkte)



Im Folgenden wird eine Ampel mit der Position x_{Ampel} betrachtet. Die Schaltung der Ampel wird mit der Variable „TrafficLightGreen“ vom Typ Boolean modelliert. Wenn die Ampel auf Gelb und/oder Rot schaltet, nimmt die Variable den Wert `False` an. Wenn die Ampel auf Grün schaltet, nimmt sie den Wert `True` an. Ist der Abstand zwischen einem Auto und der Ampel größer als $s_{\text{Ampel,min}}$ und kleiner als $s_{\text{Ampel,max}}$, bremst das Auto folgendermaßen:

$$\dot{v}_\alpha(t) = -0,84 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} v_\alpha(t) \quad (7)$$

Hat das Fahrzeug wegen der roten Ampel abgebremst oder angehalten, beschleunigt es folgendermaßen, bis es die Maximalgeschwindigkeit v_{max} erreicht:

$$\dot{v}_\alpha(t) = 1,46 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (8)$$

5.4. Zeichnen Sie einen hybriden Automaten mit 3 Moden, der ein Auto beschreibt, dass auf eine Ampel trifft. Gehen Sie davon aus, dass sich keine weiteren Autos auf der Straße befinden, so dass der kritische Sicherheitsabstand zum vorherigen Auto nie unterschritten wird und Gleichung (6) im hybriden Automaten nicht relevant ist und nicht abgebildet wird. Benennen Sie die Moden sinnvoll. Der Vorgang des Bremsens und Stehens soll mit der gleichen Mode beschrieben werden, die reinitialisiert wird, wenn das Auto stehenbleibt. Zeichnen Sie alle Kanten, Guards und Jumps ein. **(9 Punkte)**

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik

Sommersemester 2024

1. Aufgabe: Fragen

(20 Punkte)

*** Lösung ***

1.1. Lösung:

- a) Art der Abbildung: Phasenporträt
- b) dünne, gestrichelte Linien: Trajektorien
- c) große, fett gedruckte Pfeile: Eigenvektoren
- d) $[a, b]^T = \mathbf{x}_R = [x_{R,1}, x_{R,2}]^T$
- e) Achse 1: $x_1(t)$, Achse 2: $x_2(t)$

Bewertung: Jede korrekte Antwort 0,5 TP. Wird in a) zusätzlich ein falscher Typ (alles außer "Sattel") genannt, wird kein Teilpunkt vergeben. **(2,5 Punkte)**

1.2. Lösung: $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0.$

Bewertung: 0,5 TP für eine der beiden Darstellungen (Exponentialform *oder* Taylorentwicklung), 0,5 TP für korrekte Zeitabhängigkeit ($t - t_0$ statt t), 0,5 TP für Position von \mathbf{x}_0 (rechts statt links). **(1,5 Punkte)**

1.3. Lösung: Die Eigenwerte $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1$ können direkt an der Diagonalen abgelesen werden (1,5 TP). Da alle λ_i reell sind und $\lambda_1, \lambda_3 < 0$ und $\lambda_2 = 0$ gilt ist das System grenzstabil (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. Antworten der Form $\lambda_i \leq 0 \forall i$, bzw. „Keiner der Eigenwerte ist positiv“ sind falsch, da sie den instabilen Fall, in dem mehr als ein Eigenwert 0 ist, beinhalten. (2,5 Punkte)

1.4. Lösung:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1 \text{ TP})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \quad (0,5 \text{ TP})$$

Bewertung: Siehe oben. Wird eine Zeitabhängigkeit in den Matrizen angegeben können maximal 1,5 TP erreicht werden. (2 Punkte)

1.5. Lösung:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}^{\mathbf{x}}(t) &= \overbrace{\frac{d\dot{\mathbf{x}}}{d\mathbf{p}} \Big|_t = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{x}(t),\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}(t),\mathbf{p}} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{p}} \Big|_t + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{x}(t),\mathbf{p}}}^{0,5 \text{ TP für eine dieser Gleichungen}} \\ &= \overbrace{\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}(t)} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{p}} \Big|_t}^{0,5 \text{ TP}} + \overbrace{\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}}}^{0,5 \text{ TP}} \\ \mathbf{S}^{\mathbf{y}}(t) &= \overbrace{\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{p}} \Big|_t = \frac{d\mathbf{h}}{d\mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{x}(t),\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}(t),\mathbf{p}} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{p}} \Big|_t + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{x}(t),\mathbf{p}}}^{0,5 \text{ TP für eine dieser Gleichungen}} \\ &= \overbrace{\mathbf{h}_1(\mathbf{x}(t)) \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}}}^{0,5 \text{ TP}} + \overbrace{\frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}(t)} \mathbf{h}_2(\mathbf{p}) \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{p}} \Big|_t}^{0,5 \text{ TP}} \\ \mathbf{S}^{\mathbf{x}}(t=t_0) &= \overbrace{\frac{d\mathbf{x}_0}{d\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{x}(t=t_0)}{d\mathbf{p}}}^{0,5 \text{ TP für eine dieser Gleichungen}} \underbrace{= 0}_{0,5 \text{ TP}} \end{aligned}$$

Bewertung: Werden $\dot{\mathbf{S}}^{\mathbf{x}}(t)$ und $\mathbf{S}^{\mathbf{y}}(t)$ direkt mit den korrekt vereinfachten Formen gleichgesetzt werden jeweils 1,5 TP vergeben, andernfalls erfolgt die Bewertung wie oben angegeben. Statt $\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{p}} \Big|_t$ kann auch $\mathbf{S}^{\mathbf{x}}$ verwendet werden, sofern es definiert wird. (4 Punkte)

1.6. Lösung: Die Ausgangsgrößen müssen linear von den Parametern abhängen, d.h. es muss gelten: $\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{p}$ (1 TP). Diese Methode wird als lineare Regression bezeichnet (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. Für den ersten TP reicht die Gleichung oder textuelle Beschreibung. Statt "linearer Regression" kann auch "Methode der kleinsten Fehlerquadrate" angegeben werden. (1,5 Punkte)

1.7. Lösung: Konstitutive Gleichungen beschreiben Zusammenhänge zwischen Systemvariablen in Form von Definitionen, Ratengleichungen und Zustandsgleichungen. Neben den Bilanzgleichungen bestimmen sie das Systemverhalten.

Bewertung: Alternative Definitionen sind möglich *sofern die Abgrenzung von den Bilanzgleichungen verdeutlicht wird.* (1 Punkt)

1.8. Lösung: Beide Methoden sind explizit (1 TP), da Zustände zum Zeitpunkt t_{n+1} nur von Zuständen zum Zeitpunkt t_n abhängen (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. Begründungen die sich nur auf die Zeitpunkte statt auf die Zustände beziehen sind falsch. (1,5 Punkte)

1.9. Lösung:

- a) Trainingsdaten (0,5 TP)
- b) Validierungsdaten (0,5 TP)
- c) Testdaten (0,5 TP)

Bewertung: Siehe oben. (1,5 Punkte)

1.10. Lösung:

- a) Überanpassung beschreibt das Phänomen, dass der Vorhersagefehler für die Validierungsdaten steigt, obwohl der Vorhersagefehler für die Trainingsdaten sinkt. (1 TP)
- b) Dropout / weight decay / Regularisierung. (1 TP)

Bewertung: Siehe oben. Für b) reicht die Nennung einer Alternative. (2 Punkte)

2. Aufgabe: Systemtheorie

(20 Punkte)

* Lösung *

2.1. Lösung: Mathematisch ist die Ruhelage definiert wie folgt: $\dot{\mathbf{x}}(t)|_{\mathbf{x}_R} = \mathbf{0}$ (1 TP).

$\mathbf{x}_R = (0, 0)^R$ ist die einzige Ruhelage. Denn aus $0 = \dot{x}_1 = -ax_1^5$ folgt, dass $x_1 = 0$ gelten muss (1 TP). Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt $0 = \dot{x}_2 = 0 - \frac{x_2}{a}$. Mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und somit $a \neq 0$ folgt also $x_2 = 0$ (1 TP).

Bewertung: Siehe oben.

(3 Punkte)

2.2. Lösung: Die Taylorreihenentwicklung eines allgemeinen nichtlinearen autonomen Systems der Form $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ lautet

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \underbrace{f(\mathbf{x}^*)}_{0,5 \text{ TP}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}^*}}_{0,5 \text{ TP}} \underbrace{(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*)}_{0,5 \text{ TP}} + \underbrace{\overbrace{R_n(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}^*)}^{\text{vernachlässigt}}}_{0,5 \text{ TP}}.$$

Die Linearisierung des gegebenen Systems lautet

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \underbrace{\begin{bmatrix} -a \cdot x_1^{*5} \\ 2x_1^{*2} - \frac{x_2^*}{a} \end{bmatrix}}_{1 \text{ TP}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -5a \cdot x_1^{*4} & 0 \\ 6x_1^{*2} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}}_{1 \text{ TP}} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*)$$

Bewertung: Siehe oben.

(4 Punkte)

2.3. Lösung: Für die Ruhelage $\mathbf{x}_R = (0, 0)^T$ lautet die Linearisierung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (1 \text{ TP})$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \quad (0,5 \text{ TP}) \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{a} \quad (0,5 \text{ TP}) \end{aligned}$$

Für $a > 0$ ist das linearisierte System grenzstabil, da die Realteile der Eigenwerte $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0 \forall i$ sind (1 TP). Für $a < 0$ ist das linearisierte System instabil, da der Realteil des zweiten Eigenwerts $\operatorname{Re}(\lambda_2) > 0$ ist (1 TP).

Da der Eigenwert λ_1 den Realteil $\operatorname{Re}(\lambda_1) = 0$ hat, kann man nach dem Satz von Hartman-Grobman keine Aussagen über das nichtlineare System treffen (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. Bei ausbleibender Fallunterscheidung für den Parameter a kann es keine Punkte für die Stabilitätsaussagen geben. **(5 Punkte)**

2.4. Lösung: Um die globale Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_R = (0, 0)^T$ zu beweisen, müssen wir folgendes zeigen:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{\mathbf{x}(t)} \leq 0, \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (1 \text{ TP}).$$

Es gilt

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{\mathbf{x}(t)} = \frac{dV}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (1 \text{ TP})$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \cdot x_1^5 \\ 2x_1^3 - \frac{x_2}{a} \end{pmatrix} \quad (1 \text{ TP})$$

$$= - \left(a \cdot x_1^6 - 2x_1^3 x_2 + \frac{x_2^2}{a} \right) \quad (1 \text{ TP})$$

$$= - \underbrace{\left(\sqrt{a} \cdot x_1^3 - \frac{x_2}{\sqrt{a}} \right)^2}_{\geq 0} \leq 0 \quad (1 \text{ TP})$$

Bewertung: Siehe oben.

(5 Punkte)

2.5. Lösung:

Zur Anwendung des Theorems von LaSalle muss als erstes die Menge

$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2 \mid \left. \frac{dV}{dt} \right|_{\mathbf{x}(t)} = 0 \right\}$ aufgestellt werden. Hier gilt:

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^3(t) = \frac{x_2}{a} \right\}. \quad (1 \text{ TP})$$

Die Ableitung $\dot{\mathbf{x}}(t)$ für einen beliebigen Punkt $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$ lautet:

$$\dot{\mathbf{x}}|_{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} -a \cdot x_1^5 \\ x_1^3 \end{pmatrix}. \quad (1 \text{ TP})$$

Somit zeigt für jeden Punkt $\mathbf{s} \in \mathcal{S} \setminus \mathbf{0}$ (wir schließen $\mathbf{0}$ aus, da dies hier die Ruhelage ist) die Ableitung $\dot{\mathbf{x}}|_{\mathbf{s}}$ aus der Menge \mathcal{S} hinaus. Wir müssen also die Menge \mathcal{S} verlassen. Gemäß dem Theorem von LaSalle ist die Ruhelage daher global asymptotisch stabil (1 TP).

Bewertung: Siehe oben.

(3 Punkte)

3. Aufgabe: DA System

(20 Punkte)

* Lösung *

3.1. Lösung:

a)

$$\frac{dn_D(t)}{dt} = \dot{n}_V(t) \quad (1 \text{ TP})$$
$$\frac{dn_F(t)}{dt} = -\dot{n}_V(t) \quad (1 \text{ TP})$$

b)

$$n_L(t) + n_D(t) = n_{\text{ges}} \quad (1 \text{ TP}) \quad (3.1.b))$$

c)

$$p(t) \cdot V_D(t) = n_D(t) \cdot R \cdot T(t) \quad (1 \text{ TP}) \quad (3.1.c))$$

d)

$$V_{m,F} = V_F(t)/n_F(t) \quad (1 \text{ TP}) \quad (3.1.d))$$

e)

$$V_F(t) + V_D(t) = V_T \quad (1 \text{ TP}) \quad (3.1.e))$$

Bewertung: Siehe oben.

(6 Punkte)

3.2. Lösung:

a) Die erste Form der Energiebilanz, mit der inneren Energie als expliziten Größe, ist zu wählen, weil das System ein geschlossenes System ist. (1 TP)

b) J_j^H : An **Masse** gebundener Energietransport (0,5 TP)

J_k^Q : Energietransport durch **Wärmeübertragung** (0,5 TP)

$J_l^{W_{tech}}$: Energietransport in Form von **Arbeit** (0,5 TP)

$p \frac{dV}{dt} |_t$ Volumenarbeit (0,5 TP)

c)

$$\sum_{j \in \Lambda_H} J_j^H(t) = 0 \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$\sum_{k \in \Lambda_Q} J_k^Q(t) = \dot{Q}_{zu}(t) \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$\sum_{l \in \Lambda_{w_{tech}}} J_l^{w_{tech}}(t) = 0 \quad (0,5 \text{ TP})$$

$$\frac{dV}{dt} \Big|_t = 0 \quad (0,5 \text{ TP})$$

Die resultierende Energiebilanz ergibt sich zu

$$\frac{dU(t)}{dt} = \dot{Q}_{zu}(t) \quad (0,5 \text{ TP})$$

d)

$$U(t) = n_D(t) \cdot u_D(t) + n_L(t) \cdot u_L(t) \quad (1 \text{ TP}) \quad (3.2.d))$$

Bewertung: Siehe oben.

(6,5 Punkte)

3.3. Lösung:

a) algebraische Variablen: $p, T, u_D, u_F, \dot{n}_V, V_D, V_F$ (0,5 TP)

differentielle Variablen: U, n_D, n_F (0,5 TP)

Eingänge: \dot{Q}_{zu} (0,5 TP)

Parameter/Konstanten: $V_{m,F}, V_T, n_{ges}, R$ (0,5 TP)

	3.2.1	3.2.3	3.1.b)	3.1.c)	3.1.d)	3.1.e)	3.2.d)
p	x	x		x			
T	x	x		x			
u_D	x						x
u_F		x					x
\dot{n}_V							
V_D				x		x	
V_F					x	x	

b) Da die Matrix nicht vollen Zeilenrang hat, kann dies kein Index-1-System sein. (1 TP)

c) Ein hybrides Modell (1 TP).

Bewertung: Für die korrekte Inzidenzmatrix gibt es 3,5 TP. Bei falscher Matrix werden proportional TP vergeben. Die Nennung des hybriden Automaten in Aufgabenteil c) wird mit 0 TP bewertet. **(7,5 Punkte)**

4. Aufgabe: Strukturierte Systeme und Modelica (20 Punkte)

* Lösung *

4.1. Lösung: Dekomposition beschreibt die Zerlegung eines Systems in seine Teilsysteme (0,5 TP). Aggregation beschreibt die Zusammenfassung von Teilsystemen zu größeren Systemen (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. (1 Punkt)

4.2. Lösung: Die Teilsysteme der Massen werden als Speichersysteme modelliert da sie extensive Größen speichern, durch Bilanzgleichungen beschrieben werden können und eigene Zustände besitzen. (1 TP) Das Teilsystem Seil wird als Verknüpfungssystem modelliert da es keine extensiven Größen speichert und keine eigenen Zustände besitzt. (1 TP)

Bewertung: Siehe oben. Es werden nur bei korrekter Begründung Punkte vergeben. (2 Punkte)

4.3. Lösung:

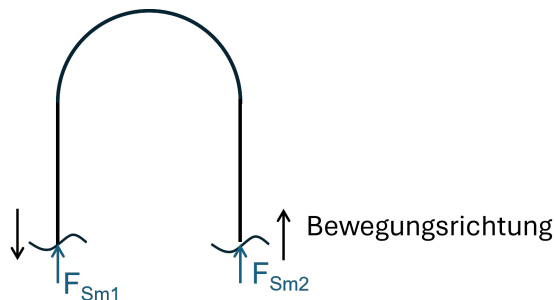


Abbildung 3: Freischneidung des Teilsystems Seil mit den wirkenden Kräften und der Bewegungsrichtungen für den Fall $m_1 > m_2$.

Bewertung: Siehe oben. Für jede richtig eingetragene Kraft werden bei korrekt eingezeichneter Richtung 0,5 TP vergeben. (2 Punkte)

4.4. Lösung:


```
1 connector Anschluss
2     import Modelica.SIunits.*;
3     flow Force F;
4     Acceleration a;
5 end Anschluss;
```

Modelica-Modell Nr. 3: Lösung Konnektor Anschluss.

Bewertung: Für die richtige Implementierung der Modellumgebung wird ein 1 TP vergeben. Für das Implementieren der richtigen Variablen wird 0,5 TP vergeben. Für das richtige Zuweisen von Flow- und Potentialvariablen wird 1 TP vergeben. (2,5 Punkte)

4.5. Lösung: Die Kräftebilanz einer Masse m ergibt sich zu:

$$F_G + F_{S,m} = m \cdot a \quad (0,5 \text{ TP}). \quad (9)$$

Damit ergibt sich der Code zu:

```
1 model Masse_an_Seil
2     import Modelica.Units.SI.*;
3     parameter Acceleration g = 9.81;
4     Force F_Sm;
5     Acceleration a;
6     //fehlender Code (1)
7     parameter Mass m;           // 1 TP
8     Anschluss An_m;           // 1 TP
9
10 equation
11     //fehlender Code (2)
12     m*a = -m*g + F_Sm;         // 1 TP
13     An_m.F = F_Sm;             // 1 TP
14     An_m.a = a;                // 1 TP
15
16 end Masse_an_Seil;
```

Modelica-Modell Nr. 4: Lösung Code Modell Masse_an_Seil.

Bewertung: Siehe oben. Deklaration alternativ über Real. Pro Fehler im Syntax oder Gleichungen wird 0,5 TP für die Zeile weniger vergeben. Gleichung (9) muss nicht explizit angegeben werden. (5,5 Punkte)

4.6. Lösung:

```
1 model Atwood_Modell
2   import Modelica.Units.SI.*;
3   Seil S;
4   Acceleration a_res;
5   // fehlender Code (1)
6   Masse_an_Seil m1(m=2);           // 0,5 TP Deklaration ,
        0,5 TP Wert
7   Masse_an_Seil m2(m=1);           // 0,5 TP Deklaration ,
        0,5 TP Wert
8
9 equation
10   a_res = m1.a;
11   //fehlender Code (2)
12   connect(m1.An_m, S.An_S1);       // 0,5 TP "connect", 0,5
        TP "m1.An_m", 0,5 TP "S.An_S1"
13   connect(m2.An_m, S.An_S2);       // 0,5 TP "connect", 0,5
        TP "m2.An_m", 0,5 TP "S.An_S2"
14
15 end Atwood_Modell;
```

Modelica-Modell Nr. 5: Lösung Code Modell Atwood_Modell.

Bewertung: Siehe oben. Deklaration alternativ über Real. Pro Fehler im Syntax oder Gleichungen wird 0,5 TP für die Zeile weniger vergeben. (5 Punkte)

4.7. Lösung:

- a) In dem Fall $m_1 \neq m_2$ wird eine Masse in positiver und eine Masse in negativer y-Richtung Beschleunigt. Für größere Berechnungszeiten würde die in negativer y-Richtung beschleunigte Masse zu einem gewissen Zeitpunkt ans untere Ende der Rolle kommen und dort verklemmen oder auf der anderen Seite herunter fallen. Da

Boden und Rolle nicht modelliert werden, kann dieses Verhalten vom Modell nicht dargestellt werden. (1 TP)

- b) Reibungsverluste in der Rolle würden der resultierenden Kraft entgegenwirken und somit die resultierende Geschwindigkeit a_{res} betragsmäßig reduzieren. (1 TP)

Bewertung: Siehe oben. Punkte werden nur bei korrekter Begründung vergeben. Andere, korrekte Begründungen werden ebenfalls akzeptiert. **(2 Punkte)**

5. Aufgabe: Diskret-kontinuierliche Systeme (20 Punkte)

* Lösung *

5.1. Lösung:

$$\dot{x}_\alpha(t) = v_\alpha(t) \quad 1 \text{ TP} \quad (10)$$

Bewertung: Siehe oben.

(1 Punkt)

5.2. Lösung:

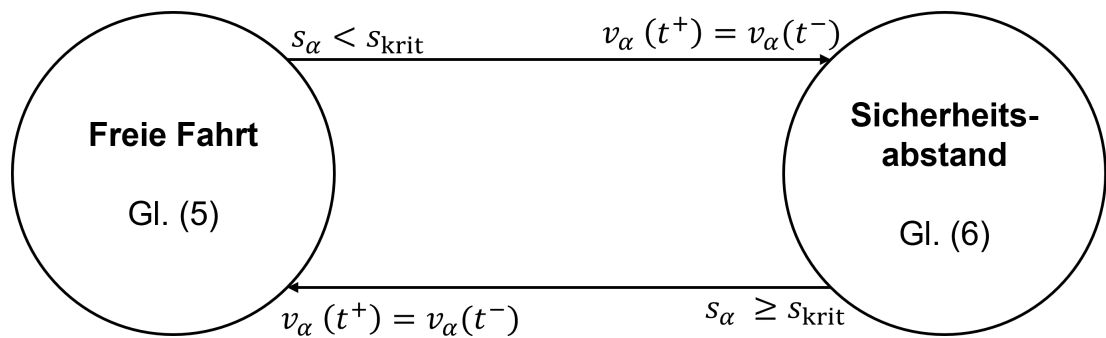
$$\dot{v}_\alpha(t) = 0,73 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \underbrace{\left(1 - \underbrace{\left(\frac{v_\alpha(t)}{v_{\max}} \right)^4}_{>1 \text{ für } v_\alpha > v_{\max} \text{ 0,5 TP}} - \underbrace{\left(\frac{s_\alpha^*(t)}{s_\alpha(t)} \right)^2}_{\geq 0 \text{ 0,5 TP}} \right)}_{\text{immer } < 0 \text{ für } v_\alpha > v_{\max} \text{ 1 TP}} \quad (11)$$

Bewertung: Siehe oben.

(2 Punkte)

5.3. Lösung:

a)



b)

```

1 | model Fahrzeug
2 |   parameter Real s_krit;
3 |   parameter Real v_max;
4 |   :
5 |   Real v_5;
```

```

6   Real x_5;
7   Real s_5;
8   Real s_5_star;
9   equation
10      :
11   der(x_5) = v_5;
12   der(v_5) = if (s_a >= s_krit) then 0.73 *
              (1-(v_5/v_max)^4 - (s_5_star/s_5)^2) else -1.67 *
              (s_5_star/s_5)^2;
13   s_5 = x_4 - l_4 - x_5;
14   s_5_star = 2+1.6*v_5 + 0.45*v_5*(v_5-v_4);
15 end Fahrzeug;

```

Alternative Lösung:

```

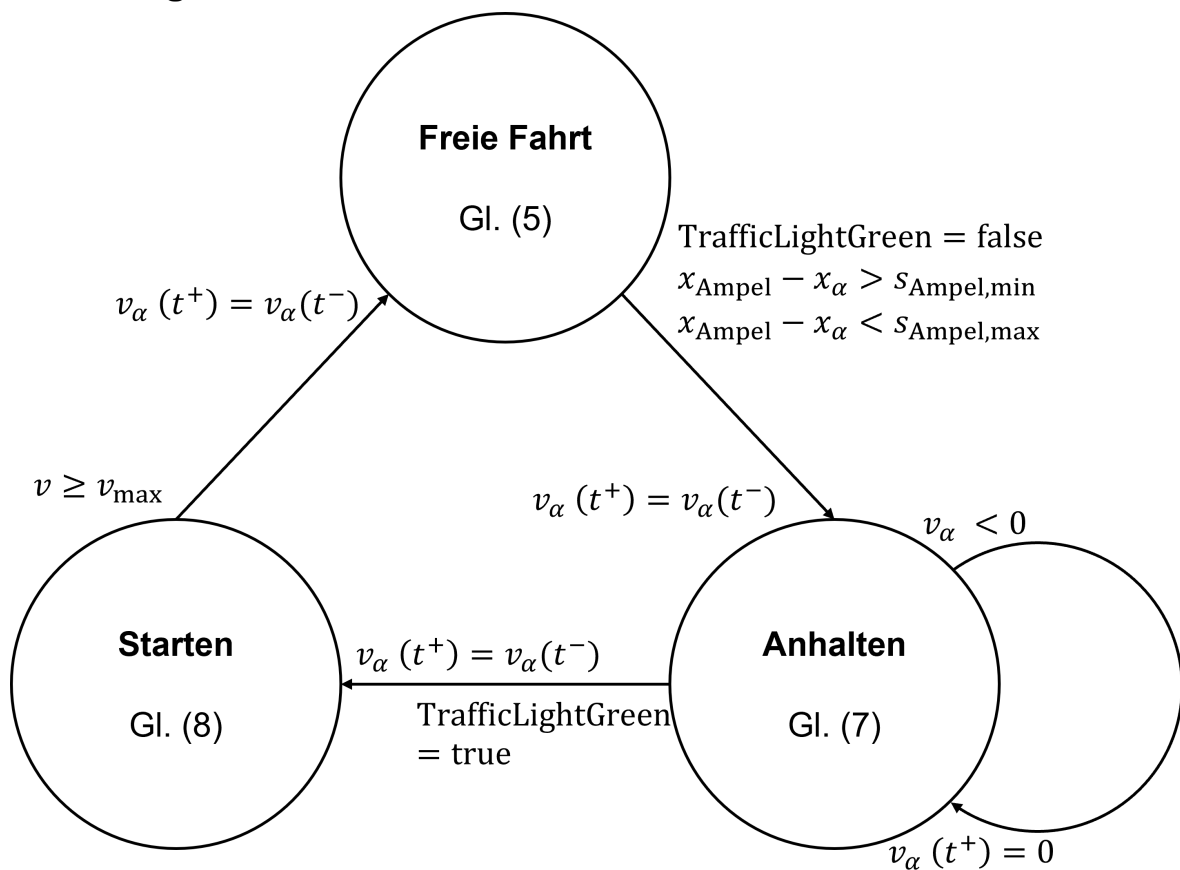
1 model Fahrzeug
2   parameter Real s_krit;
3   parameter Real v_max;
4       :
5   Real v_5;
6   Real x_5;
7   Real s_5;
8   Real s_5_star;
9   equation
10      :
11   der(x_5) = v_5;
12   if (s_a >= s_krit) //1 TP
13       then der(v_5) = 0.73 * (1-(v_5/v_max)^4 -
                             (s_5_star/s_5)^2); // 0,5 TP
14   else // 0,5 TP
15       der(v_5) = -1.67 * (s_5_star/s_5)^2 ; // 0,5 TP
16   end if; // 0,5 TP
17   s_5 = x_4 - l_4 - x_5;
18   s_5_star = 2+1.6*v_5 + 0.45*v_5*(v_5-v_4);
19 end Fahrzeug;

```

Bewertung: 5 Punkte für a). Für die korrekte Zeichnung eines hybriden Automaten mit zwei Moden und zwei Kanten (mit richtigen Pfeilrichtungen) gibt es 1 TP. Für jede eindeutige Modenbezeichnung gibt es 0,5 TP (insgesamt 1 TP). Für jede richtige Gleichung gibt es 0,5 TP (insgesamt 1 TP). Für jeden richtigen Guard (Wert und Position) gibt es 0,5 TP (insgesamt 1 TP). Für jeden richtigen Jump (Wert und Position) gibt es 0,5 TP (insgesamt 1 TP).

3 Punkte für b). (1,5 TP Syntax, 1 TP erste Bedingung und Gleichung, 0,5 TP zweite Gleichung) **(8 Punkte)**

5.4. Lösung:



Bewertung: Für die korrekte Zeichnung eines hybriden Automaten mit drei Moden und vier Kanten (mit richtigen Pfeilrichtungen) gibt es 1 TP. Für jede eindeutige Modenbezeichnung gibt es 0,5 TP (insgesamt 1,5 TP). Für jede richtige Gleichung gibt es 0,5 TP (insgesamt 1,5 TP). Für jeden richtigen Guard (Wert und Position) gibt es 0,5 TP (insgesamt 3 TP). Für jeden richtigen Jump (Wert und Position) gibt es 0,5 TP (insgesamt 2 TP). **(9 Punkte)**

Schriftliche Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Sommersemester 2024

6. Aufgabe: Finite Differenzen (12.5 Punkte)

Die folgende Differentialgleichung beschreibt die Temperaturverteilung in einer Rohrwand abhängig von der radialen Koordinate R und der Zeit t :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} \right) \quad \lambda > 0, \quad R \in [R_{innen}, R_{aussen}], \quad t \in [0, t_{end}]. \quad (1)$$

Diese Gleichung soll mit einem Finite-Differenzen-Verfahren auf einem äquidistanten Gitter mit Gitterschrittweite ΔR gelöst werden.

Gegeben sei außerdem folgende Taylorreihe von $T(R)$, entwickelt um R_i und ausgewertet bei R_{i+1} . Es wird die aus der Vorlesung bekannte Notation $T_i = T(R_i)$ verwendet.

$$T_{i+1} = T_i + \left. \frac{\partial T}{\partial R} \right|_{R=R_i} \Delta R + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} \right|_{R=R_i} \Delta R^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 T}{\partial R^3} \right|_{R=R_i} \Delta R^3 + \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^4 T}{\partial R^4} \right|_{R=R_i} \Delta R^4 + \dots \quad (2)$$

6.1. Bestimmen Sie eine weitere Taylorreihe von T , welche Ihnen die Herleitung eines zentralen Differenzenausdrucks für $\frac{\partial^2 T}{\partial R^2}$ ermöglicht. Berücksichtigen Sie die Terme bis einschließlich der vierten Ableitung. **(3 Punkte)**

6.2. Leiten Sie nun den zentralen Differenzenausdruck für $\frac{\partial^2 T}{\partial R^2}$ her. Bestimmen Sie den Abbruchfehler und die Genauigkeitsordnung. **(4 Punkte)**

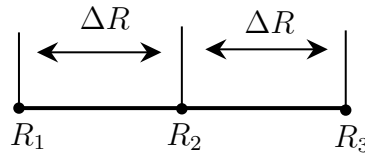
6.3. Diskretisieren Sie Gleichung (1) mit dem Euler-rückwärts Verfahren in der Zeit. Verwenden Sie folgende räumliche Differenzenausdrücke unabhängig von Ihrem Ergebnis in Aufgabe 6.2:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} \right|_{R=R_i} \approx \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta R^2} \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial R} \right|_{R=R_i} \approx \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta R}. \quad (4)$$

(2 Punkte)

6.4. Die diskrete Gleichung aus Aufgabenteil 6.3 soll auf dem untenstehenden eindimensionalen Gitter gelöst werden:



Verwenden Sie folgende Annahmen:

$$\Delta t = 0,01 \text{ s}; R_1 = 0,2 \text{ m}; R_2 = 0,4 \text{ m}; R_3 = 0,6 \text{ m}; \lambda = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}. \quad (5)$$

An den Gebietsrändern gilt $T_1 = 400 \text{ K}$ und $T_3 = 200 \text{ K}$ für alle Zeitschritte. Die Anfangsbedingung am Knoten 2 ist $T_2^0 = 350 \text{ K}$. Wie lautet die Temperatur am Knoten 2 nach einem Zeitschritt? Machen Sie deutlich, wie die Gleichung aussieht, die Sie lösen.

(3.5 Punkte)

7. Aufgabe: Finite Elemente (13 Punkte)

Bei kleinen Verformungen und linear elastischem Materialverhalten lautet die Bewegungsgleichung für einen Stab in differentieller Form:

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \rho f \quad x \in [0, L]; \quad t \in [0, t_{end}]. \quad (6)$$

Die gesuchte Funktion ist die Verschiebung $u(x, t)$. Die Dichte ρ und die Volumenkraft f werden als konstant angesehen.

7.1. Bilden Sie die schwache Form der Gleichung (6). Wenden Sie partielle Integration an und nehmen Sie an, dass alle entstehenden Randterme gleich 0 sind. **(3 Punkte)**

7.2. Nennen Sie Randbedingungen, die das Wegfallen der Randterme aus der vorigen Aufgabe erklären. Wie könnten diese physikalisch interpretiert werden? **(2 Punkte)**

7.3. Die Finite-Elemente-Diskretisierung im Raum für ein Gitter mit N Knoten auf dem Gebiet lautet:

$$\sum_{k=1}^N \left(\rho \frac{\partial^2 u_k(t)}{\partial t^2} \int_0^L \phi_i \phi_k dx + E u_k(t) \int_0^L \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} dx \right) = \rho f \int_0^L \phi_i dx, \quad i \in [2, N-1] \quad (7)$$

Nennen Sie alle Schritte, welche nötig sind, um die kontinuierliche schwache Form der Gleichung (6) in die diskrete schwache Form (Gleichung (7)) zu überführen.

Hinweis: Die notwendigen Umformungen müssen nicht durchgeführt werden.

(2 Punkte)

7.4. Diskretisieren Sie Gleichung (7) nun zusätzlich in der Zeit. Verwenden Sie zur Diskretisierung der Zeitableitung folgenden Finite-Differenzen-Ausdruck:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{t=t^n} = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (8)$$

Bringen Sie alle bekannten Funktionswerte auf die rechte Seite der Gleichung, belassen Sie alle Unbekannten auf der linken Seite. Nehmen Sie für diese Aufgabe folgende konstante Randwerte an: $u(x=0) = u_L$, $u(x=L) = u_R$. **(3 Punkte)**

7.5. Die Interpolationsfunktionen auf dem Referenzelement für ein anderes Finite Elemente Problem im zweidimensionalen Raum sind gegeben als:

$$\phi_1^e(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (9)$$

$$\phi_2^e(\xi, \eta) = \xi \quad (10)$$

$$\phi_3^e(\xi, \eta) = \eta \quad (11)$$

Berechnen Sie die Jacobi Matrix für allgemeine Koordinaten $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^2$ für $k \in [1, 3]$.

Hinweis: Die Einträge dieser Vektoren können wie folgt dargestellt werden: $\vec{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2})^T$

(3 Punkte)

8. Aufgabe: Finite Volumen (12 Punkte)

Gegeben sei folgender Ausschnitt eines eindimensionalen Gitters:

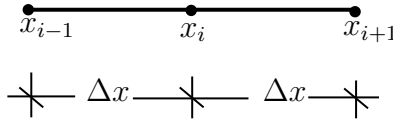


Abbildung 5: 1D Gitter

8.1. Übertragen Sie das gegebene eindimensionale Gitter in den Lösungsbogen und zeichnen Sie das knotenzentrierte Kontrollvolumen V_i um x_i ein. Benennen Sie auch die Position der Ränder des Kontrollvolumens. (2 Punkte)

Betrachten Sie im Folgenden eine allgemeine Advektionsgleichung in 1D ($a = \text{const}$):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + a \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0. \quad (12)$$

8.2. Nennen Sie alle weiteren Informationen, die zur vollständigen Definition eines eindimensionalen Advektions-Problems benötigt werden. (2.5 Punkte)

8.3. Bestimmen Sie die integrale Form für das Kontrollvolumen V_i und vereinfachen Sie analytisch so weit wie möglich. (1.5 Punkte)

8.4. Führen Sie zunächst die Volumenmittelung des zeitlichen Terms durch. (1 Punkt)

8.5. Diskretisieren Sie nun die Flussterme.

Hinweis: Beachten Sie, an welchen Positionen die aus $a \frac{\partial \theta}{\partial x}$ umgeformten Flussterme benötigt werden und an welchen Positionen die Unbekannten definiert sind. Schlagen Sie ggf. einen Weg vor, um Informationen an den in der Diskretisierung nicht berücksichtigten Positionen zu bestimmen. (2 Punkte)

8.6. Diskretisieren Sie nun zeitlich mittels des expliziten Euler Verfahrens und markieren Sie alle gesuchten Größen. (1.5 Punkte)

8.7. Welche Art von Randbedingungen können bei der verwendeten Anordnung der Kontrollvolumina einfacher verwendet werden. Begründen Sie Ihre Antwort. **(1 Punkt)**

8.8. Nennen Sie eine alternative Form der Anordnung der Kontrollvolumina neben der in Aufgabe 8.1 genannten. **(0.5 Punkte)**

9. Aufgabe: Fehler (12.5 Punkte)

Der Transport eines Medikaments ϕ in der Blutströmung durch eine Aterie kann mit Hilfe der folgenden stationären eindimensionalen partiellen Differentialgleichung auf dem Gebiet $x \in [0, L]$ vereinfacht modelliert werden.

$$a \frac{\partial \phi}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad (13)$$

9.1. Wie heisst diese Art von partieller Differentialgleichung im physikalischen Sinne? Benennen Sie die Koeffizienten a und ν . (2 Punkte)

9.2. Die Abbildung 6 zeigt die Lösung der Gleichung (13) bei gegebenen Randbedin-

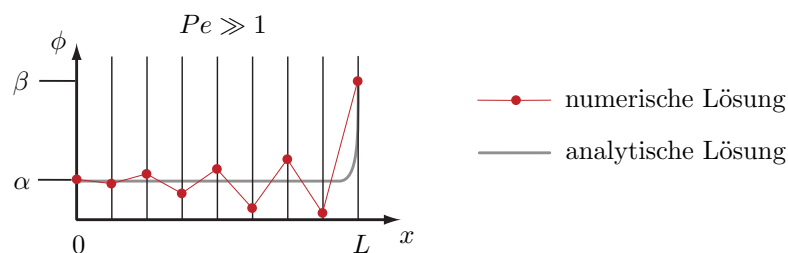


Abbildung 6: Analytische und numerische Lösung der Gleichung (13).

gungen $\phi(0) = \alpha$ und $\phi(L) = \beta$ mit einem konsistenten Finite-Differenzen-Verfahren für $Pe_{\Delta} = \frac{a\Delta x}{2\nu} \gg 1$.

Beantworten Sie folgende Fragen:

1. Welche Finite-Differenzen-Diskretisierungen zeigen typischerweise dieses Verhalten?
2. Wie können die numerischen Oszillationen für diese Diskretisierung dennoch unterbunden werden? Begründen Sie diese Antwort.

(3 Punkte)

9.3. Die Gleichung (13) soll mit folgendem Differenzenverfahren diskretisiert werden:

$$\left(\frac{a}{2\Delta x} + \frac{\nu}{\Delta x^2}\right) \phi_{i+1} - \left(\frac{a}{2\Delta x} - \frac{\nu}{\Delta x^2}\right) \phi_{i-1} = 0 \quad (14)$$

Gegeben sind die Taylorreihenentwicklungen von ϕ um den Punkt x_i :

$$\phi_{i\pm 1} = \phi_i \pm \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} \pm \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \frac{\Delta x^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (15)$$

Ist das Verfahren konsistent?

(5 Punkte)

9.4. Der Abbruchfehler eines weiteren Verfahrens zur Diskretisierung von Gleichung (13) lautet:

$$L - L_\Delta = \mathcal{O}(\Delta x^2) - a \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (16)$$

Offensichtlich ist dieses Verfahren bezüglich Gleichung (13) nicht konsistent. Für welche Differentialgleichung wäre das Verfahren stattdessen konsistent? Begründen Sie ihre Antwort.

(2.5 Punkte)

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Sommersemester 2024

6. Aufgabe: Finite Differenzen (12.5 Punkte)

*** Lösung ***

6.1. Lösung:

$$T_{i+1} \approx T_i - \frac{\partial T}{\partial R} \bigg|_{R=R_i} \Delta R + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} \bigg|_{R=R_i} \Delta R^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 T}{\partial R^3} \bigg|_{R=R_i} \Delta R^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 T}{\partial R^4} \bigg|_{R=R_i} \Delta R^4 + \dots \quad (1)$$

(0.5) Für richtige Auswerte- und Entwicklungsstelle

(0.5) Für ungefähr Zeichen oder + ...

4 mal (0.5) für jede der vier Stützstellen

3
3
3

6.2. Lösung:

Ansatz: $T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}$ (1)

Halber Punkt Abzug wenn ungefähr Zeichen oder + ... fehlt

$$T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} \approx \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} \bigg|_{R=R_i} \Delta R^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 T}{\partial R^4} \bigg|_{R=R_i} \Delta R^4 + \dots \quad (2)$$

Umformen nach der gesuchten Ableitung:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} \right|_{R=R_i} \approx \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta R^2} \quad (0.5) - \underbrace{\frac{1}{12} \left. \frac{\partial^4 T}{\partial R^4} \right|_{R=R_i} \Delta R^2}_{\text{Abbruchfehler}} \quad (0.5) \quad (3)$$

Der Ausdruck ist 2. Ordnung genau.

(0.5)

 $\frac{4}{4}$

6.3. Lösung:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \lambda \left(\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta R^2} + \frac{1}{R_i} \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2\Delta R} \right) \quad (4)$$

(0.5) Für richtige Zeitableitung (0.5) Für richtiger Index bei R_i (0.5) Für richtige Zeitschritte (0.5) Für richtig eingesetzte Differenzenausdrücke

 $\frac{2}{2}$

6.4. Lösung:

$$\frac{T_2^1 - T_2^0}{\Delta t} = \lambda \left(\frac{T_1^1 - 2T_2^1 + T_3^1}{\Delta R^2} + \frac{1}{R_2} \frac{T_3^1 - T_1^1}{2\Delta R} \right) \quad (1) \quad (5)$$

$$\frac{T_2^1 - 350 \text{ K}}{0,01 \text{ s}} = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \left(\frac{400 \text{ K} - 2T_2^1 + 200 \text{ K}}{0,04 \text{ m}^2} + \frac{1}{0,4 \text{ m}} \frac{200 \text{ K} - 400 \text{ K}}{0,4 \text{ m}} \right) \quad (1) \quad (6)$$

$$T_2^1 = \frac{\left(\frac{400+200}{0.04} + \frac{200-400}{0.16} + \frac{350}{0.01} \right)}{\frac{1}{0.01} + \frac{2}{0.04}} \text{ K} \quad (1) \quad (7)$$

$$T_2^1 = 325 \text{ K} \quad (0.5) \quad (8)$$

 $\frac{3.5}{3.5}$

$$\sum_{A6} = \frac{12.5}{12.5}$$

7. Aufgabe: Finite Elemente

(13 Punkte)

* Lösung *

7.1. Lösung:

$$\underbrace{\int_0^L}_{\text{Randwerte}} \underbrace{w(x)}_{\text{Testfunktion}} \left(\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \rho f \right) dx = 0 \quad \forall w(x)$$

(0.5) (0.5) (0.5)

(9)

$$\int_0^L w(x) \left(\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \rho f \right) + \underbrace{E \frac{\partial w(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}_{(0.5)} dx - \underbrace{\left[E w(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]_0^L}_{=0, \text{ aus Aufgabenstellung, } (0.5)} = 0 \quad \forall w(x)$$

(10)

$$\int_0^L w(x) \left(\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \rho f \right) + E \frac{\partial w(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx = 0 \quad \forall w(x)$$

(11)

Endergebnis korrekt (0.5)

 $\frac{3}{3}$

7.2. Lösung:

An jedem Rand muss eine der folgenden Randbedingungen anliegen damit die Randterme entfallen:

- Dirichlet Randbedingung: Verschiebungswert gegeben
- **homogene** Neumann Randbedingung: $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$

Dirichlet Randbedingungen können als einspannung oder eine aufgeprägte Verschiebung interpretiert werden. Eine homogene Neumann Randbedingung kann als freies Ende des Stabs erklärt werden.

① für korrekte Randbedingungen, ① für korrekte Erklärung.

 $\frac{2}{2}$

7.3. Lösung:

Punkte werden für Nennen der Schritte vergeben. Gleichungen sind nur für die Vollständigkeit in der Lösung gegeben.

1. $u(x, t)$ mit Interpolationsfunktionen ϕ_k diskretisieren 1 :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^N u_k(t) \phi_k(x) \quad (12)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \sum_{k=1}^N u_k(t) \frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^N \phi_k(x) \frac{\partial^2 u_k(t)}{\partial t^2} \quad (14)$$

Daraus ergibt sich nach einsetzen:

$$\sum_{k=1}^N \left(\rho \frac{\partial^2 u_k(t)}{\partial t^2} \int_0^L w(x) \phi_k dx + E u_k(t) \int_0^L \frac{\partial w(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} dx \right) = \rho f \int_0^L w(x) dx \quad (15)$$

2. Galerkin-Methode - Benutzen der gleichen Interpolationsfunktionen ϕ_i für Testfunktion 1 (*Für volle Punktzahl ist es wichtig das deutlich wird dass die gleichen Interpolationsfunktionen verwendet werden.*):

$$w(x) = \sum_{i=2}^{N-1} w_i \phi_i(x) \quad (16)$$

$$\frac{\partial w(x)}{\partial x} = \sum_{i=2}^{N-1} w_i \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \quad (17)$$

Einsetzen in Gleichung (15):

$$\sum_{i=2}^{N-1} \sum_{k=1}^N w_i \left(\rho \frac{\partial^2 u_k(t)}{\partial t^2} \int_0^L \phi_i \phi_k dx + E u_k(t) \int_0^L \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} dx \right) = \rho f \sum_{i=2}^{N-1} w_i \int_0^L \phi_i dx \quad (18)$$

Für jedes w_i ergibt sich eine Gleichung:

$$\sum_{k=1}^N \left(\rho \frac{\partial^2 u_k(t)}{\partial t^2} \int_0^L \phi_i \phi_k dx + E u_k(t) \int_0^L \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} dx \right) = \rho f \int_0^L \phi_i dx \quad i \in [2, N-1] \quad (19)$$

 $\frac{2}{2}$

7.4. Lösung:

Einsetzen des Finite-Differenzen Ausdrucks: Für $i \in [2, N-1]$ ergibt sich:

$$\sum_{k=1}^N \left(\rho \frac{u_k^{n+1} - 2u_k^n + u_k^{n-1}}{\Delta t^2} \int_0^L \phi_i \phi_k dx + E u_k^n \int_0^L \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} dx \right) = \rho f \int_0^L \phi_i dx \quad (20)$$

- Korrektes Einsetzen des Finite Differenzen Ausdrucks: 0.5 (*Index k der diskretisierung von u muss stimmen.*)
- Zeitindex von u_k korrekt: 0.5

Sortieren der Terme nach bekannt und unbekannt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{N-1} \rho \frac{u_k^{n+1}}{\Delta t^2} \int_0^L \phi_i \phi_k dx &= - \sum_{k=2}^{N-1} \int_0^L \left(\rho \frac{-2u_k^n + u_k^{n-1}}{\Delta t^2} \phi_i \phi_k + E u_k^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right) dx \\ &\quad + \rho f \int_0^L \phi_i dx \\ &\quad - \int_0^L \left(\underbrace{\rho \frac{u_L^{n+1} - 2u_L^n + u_L^{n-1}}{\Delta t^2} \phi_i \phi_1}_{=0, \text{ da } u_L \text{ konstant}} + E u_L^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) dx \\ &\quad - \int_0^L \left(\underbrace{\rho \frac{u_R^{n+1} - 2u_R^n + u_R^{n-1}}{\Delta t^2} \phi_i \phi_N}_{=0, \text{ da } u_R \text{ konstant}} + E u_R^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_N}{\partial x} \right) dx \end{aligned} \quad (21)$$

Vereinfacht ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N-1} \rho \frac{u_k^{n+1}}{\Delta t^2} \int_0^L \phi_i \phi_k dx &= - \sum_{k=2}^{N-1} \int_0^L \left(\rho \frac{-2u_k^n + u_k^{n-1}}{\Delta t^2} \phi_i \phi_k + E u_k^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right) dx \\
&+ \rho f \int_0^L \phi_i dx \\
&- E \int_0^L u_L^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + u_R^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_N}{\partial x} dx
\end{aligned} \tag{22}$$

- Zeitableitungsterms korrekt und richtig aufgeteilt (0.5)
- Steifigkeitsterm korrekt und auf rechter Seite (0.5)
- Dirichlet Terme korrekt aus Summe ausgeklammert und auf rechte Seite gebracht (1.0). Teilpunkte möglich wenn Randterme betrachtet aber falsch.

Vereinfacht ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N-1} \rho \frac{u_k^{n+1}}{\Delta t^2} \int_0^L \phi_i \phi_k dx &= - \int_0^L \sum_{k=2}^{N-1} \left(\rho \frac{-2u_k^n + u_k^{n-1}}{\Delta t^2} \phi_i \phi_k + E u_k^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right) dx \\
&+ \rho f \int_0^L \phi_i dx \\
&- E \int_0^L u_L^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + u_R^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_N}{\partial x} dx
\end{aligned} \tag{23}$$

$\frac{3}{3}$

7.5. Lösung:

Formel für $\vec{x}(\xi, \eta)$:

$$\vec{x}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^3 \phi_k^e(\xi, \eta) \vec{x}_k \tag{24}$$

Einsetzen der Interpolationsfunktionen in Gleichung (24) und vereinfachen.

$$\vec{x}(\xi, \eta) = \phi_1^e \vec{x}_1 + \phi_2^e \vec{x}_2 + \phi_3^e \vec{x}_3 \tag{25}$$

$$=(1-\xi-\eta)\vec{x}_1+\xi\vec{x}_2+\eta\vec{x}_3 \quad (0.5) \quad (26)$$

$$=\vec{x}_1+\xi(\vec{x}_2-\vec{x}_1)+\eta(\vec{x}_3-\vec{x}_1) \quad (27)$$

Mit den Ableitungen von $\vec{x}(\xi, \eta)$:

$$\frac{\partial \vec{x}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \quad (0.5) \quad (28)$$

$$\frac{\partial \vec{x}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \vec{x}_3 - \vec{x}_1 \quad (0.5) \quad (29)$$

Daraus ergibt sich die Jacobimatrix:

$$J(\vec{x}(\xi, \eta)) = \underbrace{\frac{\partial \vec{x}(\xi, \eta)}{\partial (\xi, \eta)}}_{(0.5)} = \begin{pmatrix} x_{2,1} - x_{1,1} & x_{3,1} - x_{1,1} \\ x_{2,2} - x_{1,2} & x_{3,2} - x_{1,2} \end{pmatrix} \quad (0.5) \quad (30)$$

Jakobimatrix von $\vec{\phi}^e = (\phi_1^e, \phi_2^e, \phi_3^e)^T$ gibt 0.5 Punkte.

$\frac{3}{3}$

$$\sum_{A7} = \frac{12}{12}$$

8. Aufgabe: Finite Volumen

(12 Punkte)

* Lösung *

8.1. Lösung:

Kontrollvolumen:

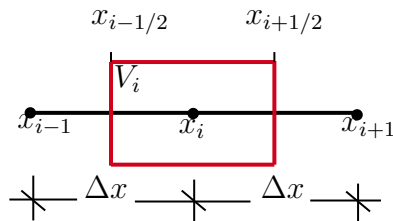


Abbildung 1: 1D Gitter

Kontrollvolumen (V_i und x_i muss markiert sein): ①

Grenzen: je ①

 $\frac{2}{2}$

8.2. Lösung:

Zur vollständigen Definition des Problems werden benötigt:

eine Randbedingung (0.5 Punkte Abzug bei Plural) ①

eine Anfangsbedingung ①

Definition des Rechengebiets ①

 $\frac{2.5}{2.5}$

8.3. Lösung:

Integrale Form:

$$\int_{V_i} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx + \int_{V_i} a \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = 0 \quad \text{①} \quad (31)$$

Analytische Vereinfachung:

$$\int_{V_i} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx + a \phi \Big|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} = 0 \quad \text{①} \quad (32)$$

 $\frac{1.5}{1.5}$

8.4. Lösung:

Volumenmittelung:

$$\int_{V_i} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_i} \phi dx \approx \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \int_{V_i} dx = \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \Delta x \quad (1) \quad (33)$$

 $\frac{1}{1}$ **8.5. Lösung:**

Flussdiskretisierung: Ansatz: Mittelung (1)

$$\begin{aligned} a \phi \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} &\approx a \left(\frac{\phi_{i+1} + \phi_i}{2} - \frac{\phi_i + \phi_{i-1}}{2} \right) (0.5) \\ &= a \left(\frac{1}{2} (\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) \right) (0.5) \end{aligned} \quad (34)$$

 $\frac{2}{2}$ **8.6. Lösung:**

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} \Delta x + \frac{a}{2} (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) = 0 \quad (1) \quad (35)$$

Unbekannt sind alle Größen auf dem Zeitlevel t^{n+1} .

(0.5)

 $\frac{1.5}{1.5}$ **8.7. Lösung:**

Bei der knotenzentrierten Anordnung können Dirichlet Randbedingungen einfacher verwendet werden. (0.5) Dies liegt daran, dass am Rand Knoten sind, an denen

die Werte direkt gesetzt werden können.

(0.5)

 $\frac{1}{1}$ **8.8. Lösung:**

Eine weitere Form der Volumenordnung ist zellzentriert.

(0.5)

 $\frac{0.5}{0.5}$

$$\sum_{A8} = \frac{12}{12}$$

9. Aufgabe: Fehler (12.5 Punkte)

* Lösung *

9.1. Lösung:

Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine Advektions-Diffusionsgleichung. a ist der Konvektionskoeffizient, ν der Diffusionskoeffizient.

Anmerkung: Transportgleichung ist nicht ausreichend.

9.2. Lösung:

1. Zentrale Differenzenverfahren. ①
2. Die Knotenoszillationen sind abhängig von der diskreten Pecletzahl ① und können durch ausreichend feine Diskretisierungen eliminiert werden. ①

Anmerkung: Ein Bezug auf zeitliche Disretisierungsverfahren wie das explizite Euler-Verfahren ist hier nicht gültig, da die Gleichung (13) nicht zeitabhängig ist.

3
3
3

9.3. Lösung:

Durch Einsetzen der Taylorreihen erhält man den folgenden Abbruchfehler:

$$L - L_{\Delta} = -\frac{2\nu}{\Delta x^2} \phi_i - 2\nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad \textcircled{2} \quad (36)$$

Mit Hilfe einer Grenzwertuntersuchung erhält man:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \|L_{\Delta} - L\| = \left\| \underbrace{\underbrace{\mathcal{O}(\Delta x^2)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{2\nu}{\Delta x^2} \phi_i}_{\infty} - \underbrace{2\nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2}}_{\text{konstant}}}_{\textcircled{1}} \right\| = \infty \quad \textcircled{1} \quad (37)$$

d.h. das Verfahren ist nicht konsistent. ①

$\frac{5}{5}$

9.4. Lösung: Der Abbruchfehler bezüglich der gegebenen Gleichung lautet:

$$L - L_{\Delta} = \mathcal{O}(\Delta x^2) - a \frac{\partial \phi}{\Delta x}. \quad (38)$$

Daraus folgt:

$$\underbrace{L + a \frac{\partial \phi}{\Delta x}}_{\hat{L}} - L_{\Delta} = \mathcal{O}(\Delta x^2). \textcircled{1} \quad (39)$$

und damit

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\| \hat{L} - L_{\Delta} \right\| = 0. \textcircled{0.5} \quad (40)$$

Die resultierende Differentialgleichung lautet

$$\hat{L} = L + a \frac{\partial \phi}{\Delta x} = 2a \frac{\partial \phi}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0. \textcircled{1} \quad (41)$$

Anmerkung: Eine Eliminierung des Advektionsterms z.B. durch die Wahl von $a = 0$ ist nicht gültig, da damit ein Modellierungsfehler eingeführt würde.

$\frac{2.5}{2.5}$

$$\sum_{A9} = \frac{12.5}{12.5}$$