Schriftliche Prüfung: Aufgaben des AVT-Teils. Jeder Punkt entspricht 1 Minute.

Simulationstechnik

Sommersemester 2023

---

1. Aufgabe: Fragen (20 Punkte)

1.1. In welche vier Klassen lassen sich Zustandsraumdarstellungen dynamischer Systeme gemäß Vorlesung unterteilen? **(2 Punkte)**

1.2. Was kennzeichnet ein autonomes System? **(0,5 Punkte)**

1.3. Nennen Sie zwei Kategorien zur Unterscheidung von Teilsystemen in der Modellierung strukturierter Systeme. **(1 Punkt)**

1.4. Was versteht man unter parametrischer Sensitivität in der Modellierung? Erläutern Sie kurz. **(1 Punkt)**

1.5. Beschreiben Sie den Unterschied zwischen den beiden Monte-Carlo Methoden Random Sampling (RS) und Latin Hypercube Sampling (LHS) in Bezug auf die Verteilung von Parameterwerten im gesamten Parameterraum. **(1,5 Punkte)**

1.6. Zum Trainieren eines künstlichen neuronalen Netzes (KNNs) teilen Sie die gesamte verfügbare Datenmenge (100 %) in Trainingsdaten (80 %), Validierungsdaten (10 %) und Testdaten (10 %) auf.

a) Ordnen Sie die drei Datenmengen jeweils einem der folgenden Zwecke zu: Anpassung der Modellkomplexität, Training, Finale Bewertung der Modellgüte.

b) Was versteht man unter Überanpassung (Overfitting) beim Trainieren von KNNs? Erläutern Sie kurz.

c) Nennen Sie eine Methode um Überanpassung vorzubeugen.

(3,5 Punkte)

1.7. Sie sollen die Temperatur einer chemischer Reaktion in einem Batch-Reaktor simulieren und bekommen dafür ein Modell zur Verfügung gestellt. Sie erhalten folgende Simulationsergebnisse für die Temperatur T an Zeitpunkt t:

t [min]	10	30	60
T [K]	308,4313319	353,2113819	357,3399028

Tabelle 1: Simulationsergebnisse für die Reaktortemperatur an verschiedenen Zeitpunkten.

a) Warum ist die Angabe einer solchen Genauigkeit meistens nicht sinnvoll? Begründen Sie kurz.

b) Geben Sie eine beliebige der drei Temperaturen aus Tabelle 1 mit einer sinnvollen Genauigkeit an.

(2 Punkte)

1.8. Sie werfen einen Ball so in die Luft, dass Sie diesen nach 4 Sekunden auf gleicher Höhe wieder auffangen. Unter Vernachlässigung der Luftreibung kann die Höhe h des Balls zur Zeit t über folgende Differentialgleichung beschrieben werden:

$$\dot{h}(t) = -10\,\mathrm{m/s^2} \cdot t + 20\,\mathrm{m/s} \tag{1}$$

Der Ursprung des Koordinatensystems liegt auf der Höhe, auf der Sie den Ball zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ abwerfen und zum Zeitpunkt $t_e = 4\,\mathrm{s}$ wieder auffangen, siehe auch Abb. 1.

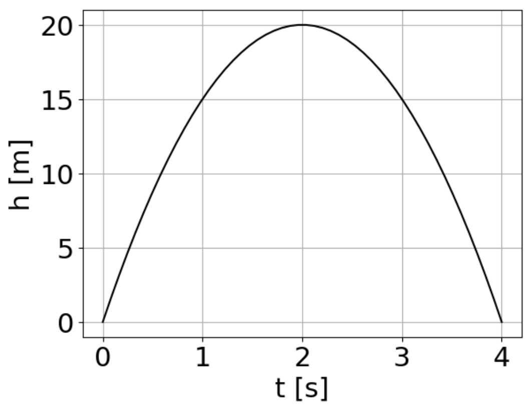


Abbildung 1: Die Höhe des Balls in Abhängigkeit der Zeit t.

a) Geben Sie jeweils eine allgemeine Berechnungsvorschrift für die Höhe des Balls in Abhängigkeit von h und t an, welche sich aus der numerischen Integration mit dem expliziten Euler- und dem impliziten Euler-Verfahren ergibt.

b) Berechnen Sie jeweils für das explizite und das implizite Euler-Verfahren die Höhe des Balls für $0 \leq t \leq 2$. Verwenden Sie die Zeitschrittweite $\Delta t = 1$.
Hinweis: Fertigen Sie eine Tabelle mit den Werten für $\dot{h}(t)$, $h_{\mathrm{exp}}(t)$, *und* $h_{\mathrm{imp}}(t)$ *an.*

Gehen Sie davon aus, dass beide Verfahren zum Zeitpunkt $t_e = 4\,\mathrm{s}$ eine von $0\,\mathrm{m}$ abweichende Höhe ergeben.

c) Welche Eigenschaft der Euler-Verfahren führt zu der Abweichung? Begründen Sie anhand der Taylorreihenentwicklung.

d) Nennen Sie **eine** Möglichkeit zur Reduktion der Abweichung, die für beide Methoden anwendbar ist.

(8,5 Punkte)

2. Aufgabe: Systemtheorie (20 Punkte)

Gegeben sei das System (2) mit der Ruhelage $\boldsymbol{x}_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) - x_1(t) + x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)^2 - x_2(t)^3 \end{aligned} \tag{2}$$

2.1. Im Folgenden soll das System (2) linearisiert werden.

a) Geben Sie die **Taylorentwicklung erster Ordnung** um den Punkt $\boldsymbol{x}_*$ für das allgemeine System $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ an.

b) Linearisieren Sie das System (2) um den allgemeinen Punkt $\boldsymbol{x}_*$ und geben Sie alle auftretenden Terme explizit an.

(4 Punkte)

2.2. Das um die Ruhelage $\boldsymbol{x}_\mathrm{R}$ linearisierte System lautet

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)\,, \qquad \text{mit } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ des Systems (3).

b) Was lässt sich anhand der Eigenwerte der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ bezüglich der Stabilität und Schwingungsfähigkeit des linearen Systems (3) um die Ruhelage $\boldsymbol{x}_\mathrm{R}$ aussagen? Begründen Sie kurz Ihre Aussagen.

c) Zeichnen Sie das Phasenportrait des linearisierten Systems (3).
Hinweis: Sollte das System schwingungsfähig sein, zeichnen Sie auch die Drehrichtung ein und zeigen Sie dann explizit durch eine Nebenrechnung, wie Sie die Drehrichtung bestimmt haben. Sollte das System nicht schwingungsfähig sein, berechnen Sie die Eigenvektoren und zeichnen Sie diese ein.

d) Können Sie Ihre Ergebnisse aus b) hinsichtlich der Stabilität des linearisierten Systems (3) auf das nichtlineare System (2) übertragen? Begründen Sie kurz.

(7,5 Punkte)

Im Folgenden soll das Systemverhalten des Systems (2) um die Ruhelage $\boldsymbol{x}_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ mittels der direkten Ljapunow-Methode überprüft werden.

2.3. Welche der folgenden Mengen erfüllt bzw. erfüllen die notwendigen Bedingungen für die direkte Methode nach Ljapunow? Falls eine Menge die notwendigen Bedingungen nicht erfüllt, nennen Sie **jeweils** eine nicht erfüllte Bedingung.

a) $\mathcal{D}_2 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1 - 1)^2 + x_2^2 < 3^2, \quad (x_1 - 1)^2 + x_2^2 > 0,5^2 \right\}$

b) $\mathcal{D}_3 = (-666, 666) \times (\pi, 345\pi)$

c) $\mathcal{D}_4 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1 - 1)^2 + x_2^2 < 3^2, \quad (x_1 - 1)^2 + x_2^2 > 0,5^2 \right\} \bigcup (50, 60) \times (50, 60)$

Hinweis: Die Funktion $(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = r^2$ beschreibt einen Kreis mit Radius r um den Punkt $(a, b)^T$. **(2,5 Punkte)**

Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben die Menge $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ und nehmen Sie an, dass $\mathcal{D}$ alle notwendigen Bedingungen für die direkte Ljapunow Methode erfüllt.

2.4. Sie suchen eine Ljapunow Funktion $V : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, um **lokale asymptotische** Stabilität nachzuweisen.

a) Welche **Eigenschaften** (UPDF, NDF, etc.) müssen V und $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{\boldsymbol{x}(t)}$ besitzen?

b) Geben Sie die kurz die mathematischen **Bedingungen** an, die Sie für V und $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{\boldsymbol{x}(t)}$ entsprechend prüfen müssen.

*Hinweis: Achten Sie darauf die **Mengen** anzugeben, auf der die jeweiligen Eigenschaften und mathematischen Bedingungen gelten müssen.* **(2,5 Punkte)**

2.5. Verwenden Sie für die Systemanalyse nach Ljapunow die Ljapunow-Funktion $V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$. Zeigen Sie mit Hilfe der direkten Ljapunow-Methode, dass das Systems (2) **lokal stabil** auf $\mathcal{D}$ um die Ruhelage $\boldsymbol{x}_\mathrm{R}$ ist.
Nehmen Sie an, dass die Menge $\mathcal{D}$ sowie die Ljapunow-Funktion V alle notwendigen Bedingungen erfüllt und V positiv definit auf $\mathcal{D}$ ist.
Hinweis: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $-a^4 - (a^2 + b^2) + 2ab \leq 0$ **(3,5 Punkte)**

3. Aufgabe: Thermodynamische Systeme (20 Punkte)

Die Simulationstechnik-Klausur benötigt Konzentration. Dafür verbrauchen die Prüflinge im Audimax Luftsauerstoff und Kohlenhydrate. Der in den Kohlenhydraten enthaltene Kohlenstoff wird mit dem Sauerstoff nach folgender Reaktion

$$\mathsf{C} + \mathsf{O_2} \longrightarrow \mathsf{CO_2} \tag{4}$$

in Kohlenstoffdioxid umgewandelt und in die Raumluft emittiert. Die Lüftung im Audimax ist kaputt, so dass das Gesamtsystem Audimax als geschlossenes System modelliert werden kann. Das Audimax kann aufgeteilt werden in die Teilsysteme Luft und Person, wobei das Gesamtsystem N_P Teilsysteme Person enthält. N_P ist die Anzahl an Personen im Audimax und beträgt 200. Das Audimax hat ein Luft-Volumen V_A von $21\,000\,\mathrm{m}^3$. Zu Beginn der Prüfung beträgt der Volumenanteil von CO_2 in der Luft $\varphi_{\mathsf{CO_2,L}} = 4 \cdot 10^{-4}$. Die Luft kann als ideales Gas modelliert werden. Die Temperatur T_A beträgt $298\,\mathrm{K}$, der Druck $1\,\mathrm{bar}$, beide bleiben die ganze Zeit konstant. Die universelle Gaskonstante R beträgt $8{,}314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$, die molare Masse von CO_2 beträgt $44\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$.

3.1. Berechnen Sie die Masse Kohlenstoffdioxid $m_{\mathsf{CO_2,A,0}}$, die sich zu Beginn in der Luft des Audimax befindet. Runden Sie auf drei signifikante Stellen. **(3 Punkte)**

In einer Person wird CO_2 mit einer Reaktionsgeschwindigkeit von $r = 2{,}67 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{s}}$ produziert. Eine Person atmet im Durchschnitt $\dot{V}_\mathsf{Luft} = 8\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}}$ ein und aus. Im Körper der Person wird kein CO_2 akkumuliert. Die Änderung der Lufttemperatur durch den Körper kann vernachlässigt werden, so dass die Temperatur der ausgeatmeten Luft als $T_\mathsf{A} = 298\,\mathrm{K}$ angenommen werden kann.

3.2. Stellen Sie die allgemeine Massenbilanz für CO_2 in einer Person auf. Berücksichtigen Sie die CO_2-Massenströme beim Einatmen und beim Ausatmen sowie die Reaktion von Kohlenstoff zu CO_2. **(3 Punkte)**

3.3. Stellen Sie jeweils eine Formel für den CO_2-Massenstrom beim Einatmen und beim Ausatmen auf. Benutzen Sie die gegebenen Größen und geben Sie die Massenströme in Abhängigkeit des Volumenanteils von CO_2 in der ein- bzw. ausgeatmeten Luft an. **(2 Punkte)**

3.4. Berechnen Sie für $t = 0$ den Volumenanteil von CO_2 in der ausgeatmeten Luft $\varphi_{\mathsf{CO_2,aus}}$. Runden Sie auf eine signifikante Stelle. **(2 Punkte)**

3.5. Stellen Sie die Massenbilanz für CO_2 in der Luft des Audimax auf. Vergleichen Sie anschließend die beiden in der Bilanz auftretenden Massenströme am Anfangszeitpunkt. Vernachlässigen Sie einen Massenstrom in der von Ihnen aufgestellten Massenbilanz, wenn dieser betragsmäßig um mindestens zwei Größenordnungen kleiner als der andere ist.

(4 Punkte)

3.6. Integrieren Sie die (ggf. vereinfachte) Massenbilanz analytisch. Nehmen Sie dabei Volumenanteil von CO_2 in der ausgeatmeten Luft $\varphi_{\mathrm{CO_2,aus}}$ als konstant an. Die Anfangsbedingung sei $m_{\mathrm{CO_2,A}}\left(t = t_0\right) = m_{\mathrm{CO_2,A,0}}$. **(2 Punkte)**

3.7. Nach wie viel Stunden hat sich die Menge von CO_2 verdoppelt, so dass die Studierenden sich bei Prof. Mitsos wegen schlechter Luftqualität beschweren? Benutzen Sie die Werte $m_{\mathrm{CO_2,A,0}} = 15\,\mathrm{kg}$ und $\varphi_{\mathrm{CO_2,aus}} = 4$ vol-% und geben Sie das Ergebnis auf die Minute genau an. **(3 Punkte)**

3.8. Hat das Teilsystem Luft eine Ruhelage? Wie nennt man das Systemverhalten?
Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass die Studierenden nicht aufhören zu atmen.

(1 Punkt)

4. Aufgabe: DA-Systeme (20 Punkte)

Prof. Mitsos möchte zum Mars fliegen. Bevor er guten Gewissens in die Rakete steigen kann, möchte er diese zunächst einmal simuliert haben. Eine Rakete (vgl. Abb. 2) funktioniert auf der Grundlage des Rückstoßprinzips. Durch das Verbrennen von Treibstoff im Raketentriebwerk wird ein heißer Gasstrom erzeugt, welcher entgegen der Antriebsrichtung ausgestoßen wird und somit eine Schubkraft erzeugt. Die dabei ausgestoßene Masse wird auch als Stützmasse bezeichnet.

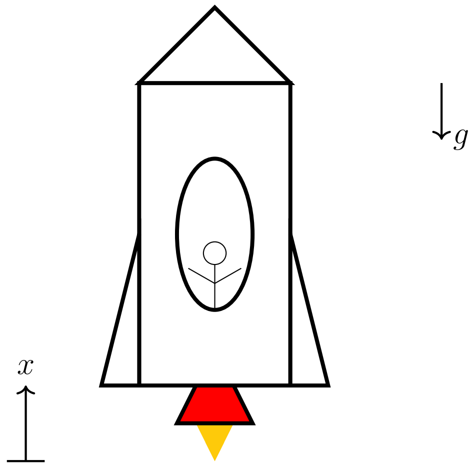


Abbildung 2: Schematische Darstellung der Rakete.

Nehmen Sie vereinfachend an, dass nach dem Start der Triebwerke lediglich die Schwerkraft $F_g(t)$, die Schubkraft $F_v(t)$ und die Reibungskraft der Atmosphäre $F_r(t)$ auf die Rakete wirken. Die Schubkraft und die Reibungskraft sind wie folgt gegeben:

$$F_v(t) = c \cdot \dot{m}(t) \tag{5}$$

$$F_r(t) = \frac{1}{2}\rho(t) \cdot C_d \cdot A \cdot v(t)^2 \tag{6}$$

Zusätzlich gilt:

- $x(t)$ und $v(t)$ beschreiben die Position und die Geschwindigkeit der Rakete
- $m(t)$ ist die zeitabhängige Gesamtmasse der Rakete
- $\dot{m}(t)$ beschreibt die Massenänderung der Rakete durch den Ausstoß der Stützmasse
- $m_{R,0}$ ist das Leergewicht der Rakete
- $m_{T,0}$ ist die Gesamtmasse des Treibstoffs vor dem Start der Triebwerke
- C_d ist der Strömungswiderstandskoeffizient

- $\rho(t)$ ist die Dichte der Luft
- ρ_n ist die Normaldichte der Luft
- H_n ist die Normalhöhe
- A ist die Querschnittsfläche der Rakete senkrecht zur Bewegungsrichtung
- c ist die Geschwindigkeit der ausgestoßenen Stützmasse
- Ω ist eine Konstante zur Beschreibung des Ausstoßes der Stützmasse
- g ist die Erdbeschleunigung
- Die Masse von Prof. Mitsos ist vernachlässigbar

4.1.

a) Skizzieren Sie die Rakete vereinfacht als idealisierten Massenpunkt und zeichnen Sie die wirkenden Kräfte ein.
Hinweis: Skizzen auf dem Aufgabenblatt werden ***nicht*** *bewertet.*

b) Stellen Sie das resultierende Kräftegleichgewicht zur Beschreibung der Raketenbeschleunigung auf und geben Sie alle Terme explizit an. Nutzen Sie die angegebene Notation der Variablen und Parameter und nehmen Sie die Massenänderung der Rakete $\dot{m}(t)$ sowie die Dichte der Luft $\rho(t)$ als gegeben an.

c) Die Triebwerke der Rakete starten zum Zeitpunkt $t = 0$. Stellen Sie die verbleibende differentielle Gleichung auf, welche notwendig ist um das System hinsichtlich Position und Geschwindigkeit der Rakete für $t > 0$ vollständig zu beschreiben.

d) Prof. Mitsos möchte während seines Fluges gerne den Füllstand des Treibstofftanks im Auge behalten. Leider ist der Füllstandsensor kaputt. Stellen Sie eine weitere algebraische Gleichung auf, welche den Füllstand des Treibstofftanks im Bezug auf den Anfangsfüllstand $h(t)/h_0$ in Abhängigkeit der Masse der Rakete $m(t)$ beschreibt. Nehmen Sie die Dichte des Treibstoffs als konstant an.

(5 Punkte)

4.2. Nach dem Start der Triebwerke ($t > 0$) wird die Massenänderung der Rakete durch den Ausstoß der Stützmasse $\dot{m}(t)$ durch den folgenden Zusammenhang ausgedrückt.

$$\dot{m}(t) = \frac{\Omega \cdot t}{1 + t} \tag{7}$$

Des Weiteren ist die Dichte der Luft in Abhängigkeit der Position der Rakete gegeben.

$$\rho(t) = \rho_n \cdot \exp\left(\frac{-x(t)}{H_n}\right) \tag{8}$$

a) Geben Sie das gesamte System in Form eines semi-expliziten DA-Systems an. Berücksichtigen Sie dabei alle in Aufgabe 4.1 aufgestellten Gleichungen sowie die in der Aufgabenstellung gegebenen Zusammenhänge.

b) Geben Sie an, welche im DA-System auftretenden Größen differentielle Variablen, algebraische Variablen, Ausgänge und Eingänge sind.

(7 Punkte)

4.3.

a) Gibt es ein Limit für die Gültigkeit dieses Models? Begründen Sie kurz.
Hinweis: Die Zeit vor dem Start ($t \leq 0$) ist nicht gemeint.

b) Beim Modellieren wurde die Auftriebskraft im Medium Luft vernachläßigt. Begründen Sie warum das getan wurde.

(2 Punkte)

4.4. Im Folgenden gehen Sie bitte von dem unteren System aus.

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - 4x_2(t) + x_3(t) \tag{9}$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t) - x_1(t) \tag{10}$$

$$0 = x_3(t) - p_1 + x_1(t) \tag{11}$$

$$0 = x_1(t) + p_2 + 4x_4(t) \tag{12}$$

$$0 = x_2(t) + 5x_5(t) - 0,5x_4(t) + p_3 \tag{13}$$

$$0 = 8x_6(t) - x_2(t) + 2x_3(t)/p_4 \tag{14}$$

a) Geben Sie die aus der Vorlesung bekannte Definition des differentiellen Index an.

b) Stellen Sie die Inzidenzmatrix des DA-Systems auf und prüfen Sie damit, ob es ein Index 1 System sein kann. Begründen Sie kurz.
Hinweis: Beschriften Sie die Zeilen und die Spalten der Inzidenzmatrix eindeutig.

c) Dürfen Sie die Anfangsbedingungen für $x_1(t)$ und $x_2(t)$ frei wählen? Begründen Sie kurz.

(6 Punkte)

5. Aufgabe: Hybride Automaten (20 Punkte)

Die Flexibilisierung des Energiemarkts hat zur Folge, dass Produktionsprozesse in Abhängigkeit der aktuellen Energiebereitstellung betrieben werden. Steht viel Energie zur Verfügung sind die Energiekosten niedrig und die Produktionsprozesse werden hochgefahren und umgekehrt bei geringer Energieverfügbarkeit werden die Prozesse runtergefahren. Zur Flexibilisierung der Produktion wird einem Prozess ein Pufferspeicher mit einem Splitter und einem Mischer nachgeschaltet, wie in Abb. 3 dargestellt. Der Prozess produziert einen variablen Produktmassestrom $P(t)$, der jedoch nicht Null sein darf ($P(t) > 0$). Der Splitter teilt P in die Ströme $F_1(t)$ und $F_2(t)$ auf. Der Nachfrage-Massestrom (N) muss der konstanten Nachfrage jederzeit entsprechen, daher ist er nicht zeitabhängig und es gilt $N > 0$. Wenn die Energiepreise hoch sind, wird der Prozess runtergefahren und somit $P(t)$ reduziert, während N durch die (zusätzliche) Nutzung des Speicher-Massestroms ($F_3(t)$) bedient wird. Im Gegensatz dazu wird $P(t)$ bei niedrigen Energiepreisen erhöht, um N zu decken und den Speicher möglichst weit zu füllen.

Als Produktionsleitung sind Sie für den technischen Aspekt der Flexibilisierung zuständig. Das bedeutet, Sie bekommen vom betriebswirtschaftlichen Management den aktuellen Wert für $P(t)$ mitgeteilt und müssen den Betrieb des Pufferspeicher-Systems beaufsichtigen. Sie können den Spaltanteil ($x_1 = \frac{F_1(t)}{P(t)}$) im Splitter und $F_3(t)$ in Abhängigkeit des Verhältnises von $P(t)$ und N verändern. Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass der Pufferspeicher sehr groß ist und somit die maximale Kapazität niemals erreicht wird. Außerdem gilt, dass die gespeicherte Menge im Pufferspeicher (Notfallreserve) immer größer als Null ist ($M(t) > 0$).

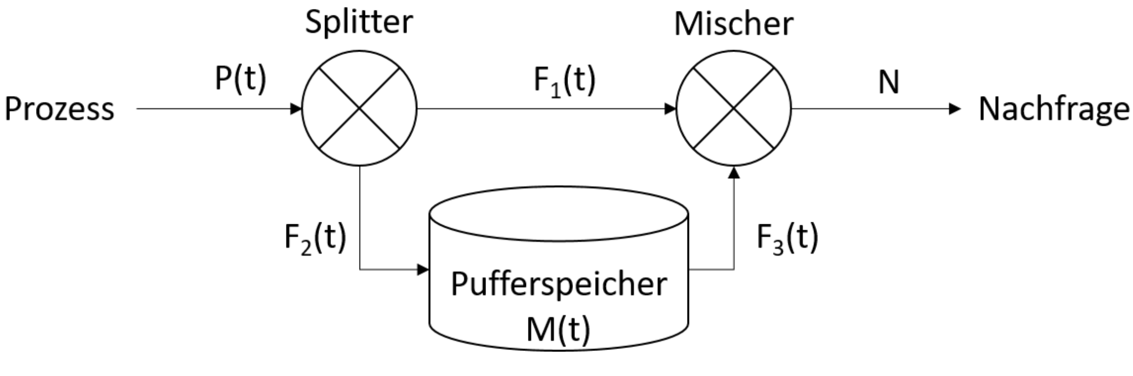


Abbildung 3: Prozess mit nachgeschaltetem Pufferspeicher mit Splitter und Mischer.

5.1. Stellen Sie jeweils die Massenbilanzen für den Pufferspeicher, Splitter und Mischer auf.

(3 Punkte)

5.2. Es gibt fünf mögliche Betriebsarten des Pufferspeicher-Systems.

a) Die beiden Betriebsarten i) $x_1 = 0, F_3(t) \neq 0$ und ii) $0 < x_i < 1, F_3(t) \neq 0$ werden als nicht relevant eingeschätzt. Erklären Sie kurz warum.

b) Geben Sie alle weiteren Betriebsarten an und beschreiben Sie jeweils kurz das Verhältnis zwischen N und $P(t)$.

(4 Punkte)

5.3. Stellen Sie die **drei relevanten** Betriebsarten aus Aufgabenteil 5.2b) im hybriden Automaten dar. Benennen Sie dabei die Moden eindeutig und geben Sie die Guards an. Verwenden Sie die Vorgaben aus dem vorhergegangenen Text.
*Hinweis: Die Jumps müssen Sie **nicht** angeben.* **(4 Punkte)**

5.4. Der hybride Automat aus 5.3 soll nun in Modelica als Teilmodell `Pufferspeicher` implementiert werden. Ergänzen Sie den unten gegebenen Code für einen konstanten Nachfrage-Massestrom von $100\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$. Modellieren Sie in Ihrem Code die Masse im Pufferspeicher $M(t)$ als differentielle Variable mit dem Anfangswert $200\,\mathrm{kg}$.
*Hinweis: Notieren Sie den fehlenden Code **nicht** auf dem Aufgabenblatt. Benutzen Sie die folgenden ausgedachten (unphysikalischen) Systemgleichungen:*

$$P(t) = 0.5 \cdot F_1(t) + 2 \cdot F_2(t) \tag{15}$$

$$N = 2 \cdot F_1(t) - F_3(t) \tag{16}$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = F_2(t) + F_3(t) \tag{17}$$

```
model Pufferspeicher
  import Modelica.Units.SI.*;
  import Modelica.Math.*;
  MassFlowRate F_1;
  MassFlowRate F_2;
  MassFlowRate F_3;
  MassFlowRate P;
  MassFraction x_1;
  // Teil 1: Fehlenden Code ergaenzen ...
equation
  // Teil 2: Fehlenden Code ergaenzen ...
end Pufferspeicher;
```

(9 Punkte)

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik

Sommersemester 2023

1. Aufgabe: Fragen (20 Punkte)

* Lösung *

1.1. Lösung: Nichtlinear zeitvariant (0,5 TP), linear zeitvariant (0,5 TP), nichtlinear zeitinvariant (0,5 TP), linear zeitinvariant (0,5 TP)

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

1.2. Lösung: Autonome System sind durch die Abwesenheit der Eingangsgröße gekennzeichnet. (0,5 TP)

Bewertung: Siehe oben. **(0,5 Punkte)**

1.3. Lösung: Speichersysteme (0,5 TP) und Verknüpfungssysteme (0,5 TP)

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

1.4. Lösung: Parametrische Sensitivität beschreibt die Empfindlichkeit eines Modellausgangs (0,5 TP) bezüglich Änderungen eines Parameterwertes (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

1.5. Lösung: Während beim Random Sampling (RS) die Parameterwerte zufällig im gesamten (beschränkten) Parameterraum verteilt sind (0,5 TP), ist beim Latin Hypercube Sampling (LHS) der (beschränkte) Parameterraum mit einem Gitter (Hypercubes) aufgeteilt (0,5 TP) und die zufällige Verteilung der Parameterwerte darauf beschränkt, dass jede

Gitterzelle eine gleiche Anzahl (oder: einen) an Parameterwerten pro Zeile und Spalte beinhaltet (alternativ: das Gitter eine gleiche Anzahl an Parameterwerten pro Zeile und Spalte beinhaltet) (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(1,5 Punkte)**

1.6. Lösung:

a) Trainingsdaten: Training (0,5 TP), Validierungsdaten: Anpassung der Modellkomplexität (0,5 TP), Testdaten: Finale Bewertung der Modellgüte (0,5 TP)

b) Überanpassung beschreibt das Phänomen, dass der Vorhersagefehler für die Validierungsdaten steigt, obwohl der Vorhersagefehler für die Trainingsdaten sinkt. (1 TP)

c) Dropout (1 TP), alternativ: weight decay, Regularisierung

Bewertung: Siehe oben. **(3,5 Punkte)**

1.7. Lösung:

a) Die Angabe derartig vieler Nachkommastellen impliziert eine Modellgenauigkeit in der gleichen Größenordnung (0,5 TP) und vernachlässigt potentielle Modellfehler (0,5 TP) sowie numerische Fehler (0,5 TP).

b) 308 / 353 / 357 (0,5 TP), alternativ: 308,4 / 353,2 / 357,3

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

1.8. Lösung:

a) $h_{\text{exp}}(t + \Delta t) = h_{\text{exp}}(t) + \dot{h}(t)\Delta t$ (1 TP) (exp)

$h_{\text{imp}}(t + \Delta t) = h_{\text{imp}}(t) + \dot{h}(t + \Delta t)\Delta t$ (1 TP) (imp)

b) Mit

$$\dot{h}(t) = -10\,\mathrm{m/s^2} \cdot t + 20\,\mathrm{m/s}$$

und Gleichungen (exp) sowie (imp) ergibt sich die Wertetabelle (je richtigem Wert 0,5 TP):

t	0	1	2
$\dot{h}(t)$ [m/s]	20	10	0
$h_{\mathrm{exp}}(t)$ [m]	0	20	30
$h_{\mathrm{imp}}(t)$ [m]	0	10	10

Tabelle 2: Resultierende Ballhöhen für die beiden Integrationsverfahren

c) Euler-Verfahren beruhen auf der Taylorreihenentwicklung mit Abbruch nach dem linearen Glied, d.h. alle Terme mit Ordnung größer als zwei werden vernachlässigt. (1 TP)

d) Kleinere Schrittweite (1 TP)

Bewertung: Siehe oben. Bei Aufgabenteil a) muss explizit die Höhe h verwendet werden. Die allgemeinen Formen für das impl. und expl. Euler-Verfahren geben jeweils 0,5 TP. Bei Aufgabenteil b) ist die Angabe von Einheiten nicht notwendig. **(8,5 Punkte)**

2. Aufgabe: Systemtheorie (20 Punkte)

* Lösung *

2.1. Lösung:

a) Die allgemeine Taylorentwicklung **erster Ordnung** lautet

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \underbrace{\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_*\right)}_{\text{(0,5 TP)}} + \underbrace{\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}_*}}_{\text{(0,5 TP)}} \underbrace{\left(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_*\right)}_{\text{(0,5 TP)}} \tag{18}$$

b) Die Linearisierung des Systems (2) um den allgemeinen Punkt $\boldsymbol{x}_*$ berechnet sich zu

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \approx \underbrace{\begin{bmatrix} -1 + x_{2,*} & 1 + x_{1,*} \\ 1 - 2x_{1,*} & -1 - 3x_{2,*}^2 \end{bmatrix}}_{\text{(2 TP)}} \underbrace{\cdot \begin{bmatrix} x_1(t) - x_{1,*} \\ x_2(t) - x_{2,*} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{2,*} - x_{1,*} + x_{1,*}x_{2,*} \\ x_{1,*} - x_{2,*} - x_{1,*}^2 - x_{2,*}^3 \end{bmatrix}}_{\text{(0,5 TP)}} \tag{19}$$

Bewertung: Falls T.h.O. in Gleichung (18) angegeben werden, kann maximal 1 TP in Gleichung (18) erreicht werden. **(4 Punkte)**

2.2. Lösung:

a) Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ lösen das charakteristische Polynom

$$\det\left(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}\right) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Dies führt zu dem quadratischen Polynom

$$(-1-\lambda)^2 - 1 = 0 \quad \text{(0,5 TP)}, \tag{20}$$

welche die Lösungen

$$\lambda_1 = 0 \qquad \text{(0,5 TP)} \tag{21}$$

$$\lambda_2 = -2 \qquad \text{(0,5 TP)} \tag{22}$$

hat.

b) Der Eigenwert λ_1 ist $= 0$ und der zweite Eigenwert λ_1 hat einen Realteil < 0, womit das linearisierte System grenzstabil (0,5 TP) ist. Es liegen keine komplex-konjugierten Eigenwerte vor. Das linearisierte System ist daher nicht schwingungsfähig (0,5 TP).

c) Die Eigenvektoren berechnen sich zu

$$v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(1 TP)} \qquad (23)$$

$$v_2 = \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(1 TP)} \qquad (24)$$

mit $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

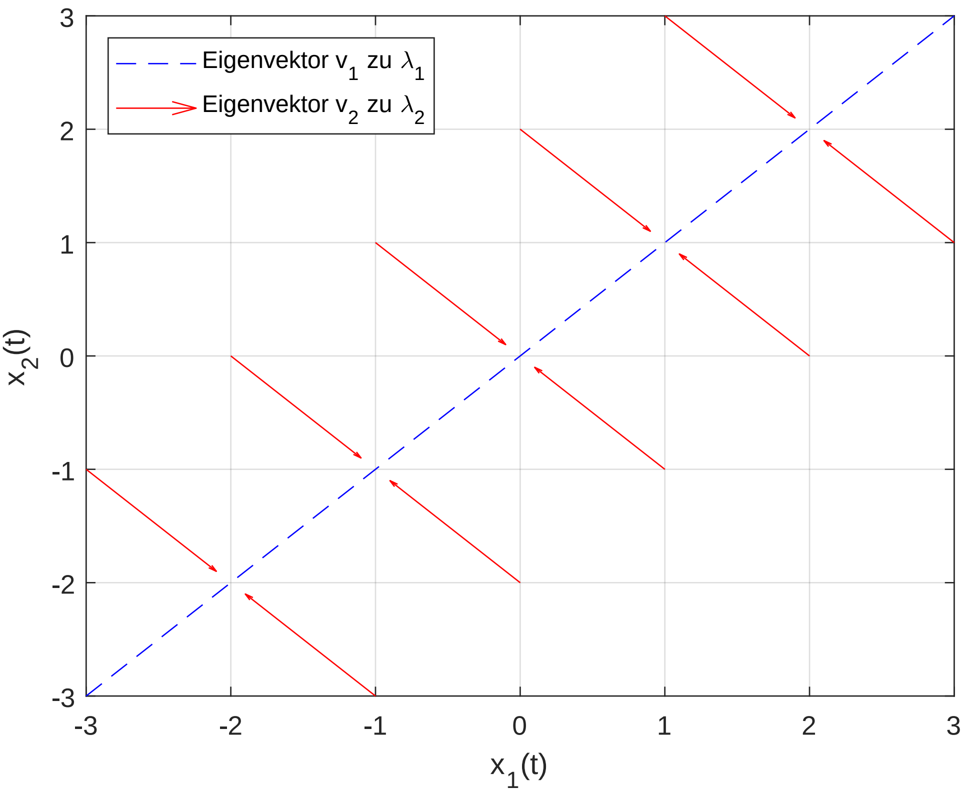


Abbildung 4: Phasenportrait (2 TP).

d) Gemäß des Satzes von Hartmann-Grobmann kann man lokal die Dynamiken des linearisierten Systems auf die des nichtlinearen Systems abbilden, wenn $\boldsymbol{A}$ keinen Eigenwert mit Realteil 0 hat. Dies ist in diesem Fall nicht erfüllt, sodass keine Aussagen über das Verhalten des nichtlinearen Systems möglich sind. (1 TP)

Bewertung: Siehe oben. In Abb. 4 werden 0,5 TP für ein aussagekräftiges Diagramm, 0,5 TP für das richtige Phasenportrait mit Pfeilspitzen und jeweils 0,5 TP für die richtig eingezeichneten Eigenvektoren vergeben. **(7,5 Punkte)**

2.3. Lösung: Für die direkte Methode nach Ljapunow muss die Menge $\mathcal{D}_i$ offen und zusammenhängend sein. Außerdem muss $\boldsymbol{x}_\mathrm{R} \in \mathcal{D}_i$ sein. *(Zusatz)*

a) Die Menge $\mathcal{D}_2$ erfüllt die Bedingungen (0,5 TP).

b) Die Menge $\mathcal{D}_3$ erfüllt die Bedingungen nicht, da die Menge nicht die Ruhelage enthält (1 TP).

c) Die Menge $\mathcal{D}_4$ erfüllt die Bedingungen nicht, da die Menge nicht zusammenhängend ist (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2,5 Punkte)**

2.4. Lösung:

a) Um gemäß dem Theorem nach Ljapunow lokale asymptotische Stabilität für $\boldsymbol{x}_\mathrm{R}$ zu zeigen, müssen die folgenden Eigenschaften gegeben sein

- V ist eine positiv definite Funktion (PDF) auf $\mathcal{D}$ (0,5 TP)
- $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{\boldsymbol{x}(t)}$ ist eine negativ definite Funktion (NDF) auf $\mathcal{D}$ (0,5 TP)

b) Somit müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein

- $V(\mathbf{0}) = 0$ (0,5 TP) womit direkt folgt $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{\mathbf{0}} = 0$
- $V(\boldsymbol{x}) > 0$ für $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{0}\}$ (0,5 TP)
- $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{\boldsymbol{x}(t)} < 0$ für $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{0}\}$ (0,5 TP)

Bewertung: Siehe oben. **(2,5 Punkte)**

2.5. Da V laut Aufgabenstellung eine positiv definite Funktion auf $\mathcal{D}$ ist und $\mathcal{D}$ die notwendigen Bedingungen erfüllt, muss nur noch gezeigt werden, dass $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{\boldsymbol{x}(t)}$ eine negativ semi-definite Funktion auf $\mathcal{D}$ ist. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{\boldsymbol{x}(t)}$ berechnet sich wie folgt:

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{\boldsymbol{x}(t)} = \left.\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}(t)} \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right|_{t} \quad \text{(0,5 TP)}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2(t) - x_1(t) + x_1(t)x_2(t) \\ x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)^2 - x_2(t)^3 \end{pmatrix} \quad \text{(1,5 TP)}$$
$$= -x_2(t)^4 - x_1(t)^2 - x_2(t)^2 + 2x_1(t)x_2(t) \quad \text{(1 TP)}$$

Mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung, ist $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{\boldsymbol{x}(t)} \leq 0$, d.h. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{\boldsymbol{x}(t)}$ ist eine negativ semi-definite Funktion auf $\mathcal{D}$ und die Ruhelage gemäß dem Ljapunow-Theorem lokal stabil (0,5 TP).
Hinweis: Die Ruhelage ist sogar global asymptotisch stabil, da V UPDF und $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{\boldsymbol{x}(t)}$ NDF auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Bewertung: Siehe oben.
Werden stärkere Stabilitätsbedingungen nachgewiesen als in der Aufgabenstellung gefordert, kann ebenfalls die volle Punktzahl erreicht werden. **(3,5 Punkte)**

3. Aufgabe: Thermodynamische Systeme (20 Punkte) * Lösung *

3.1. Lösung: Die Masse kann mit dem idealen Gasgesetz berechnet werden.

$$\begin{aligned}
m_{\mathsf{CO_2,A,0}} &= M_{\mathsf{CO_2}} n_{\mathsf{CO_2,A}} && (0,5\ \mathsf{TP})\\
n_{\mathsf{CO_2,A}} &= \frac{p\varphi_{\mathsf{CO_2}} V_{\mathsf{A}}}{RT_{\mathsf{A}}} && (0,5\ \mathsf{TP})\\
m_{\mathsf{CO_2,A}} &= \frac{p\varphi_{\mathsf{CO_2}} V_{\mathsf{A}} M_{\mathsf{CO_2}}}{RT_{\mathsf{A}}} && (0,5\ \mathsf{TP})\\
&= \frac{1\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\cdot 0{,}0004\cdot 21\,000\,\mathrm{m}^3\cdot 44\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}}{8{,}314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}\cdot 298\,\mathrm{K}} && (0,5\ \mathsf{TP})\\
&\approx 14\,900\,\mathrm{g} && (1\ \mathsf{TP})
\end{aligned}$$

Bewertung: Siehe oben. Der letzte Teilpunkt wird nur bei richtiger Einheit (g oder kg) und richtiger Anzahl signifikanter Stellen gegeben. **(3 Punkte)**

3.2. Lösung:

$$\dot{m}_{\mathsf{CO_2,P}}(t) = \underbrace{J^m_{\mathsf{CO_2,P,ein}}}_{(0{,}5\ \mathsf{TP})} - \underbrace{J^m_{\mathsf{CO_2,P,aus}}}_{(0{,}5\ \mathsf{TP})} + \underbrace{M_{\mathsf{CO_2}}}_{(0{,}5\ \mathsf{TP})}\ \underbrace{\nu_{\mathsf{CO_2}} r}_{(0{,}5\ \mathsf{TP})} = \underbrace{0}_{(1\ \mathsf{TP})} \tag{25}$$

Bewertung: Siehe oben. Alternative Schreibweisen für $J^m_{\mathsf{CO_2,P}}$ sind zulässig. Der stöchiometrische Koeffizient ν muss nicht geschrieben werden. **(3 Punkte)**

3.3. Lösung: Der Zusammenhang zwischen CO_2-Massenstrom und Luftvolumenstrom lautet:

$$\begin{aligned}
J^m_{\mathsf{CO_2}} &= M_{\mathsf{CO_2}} J^n_{\mathsf{CO_2}}\\
&= \frac{M_{\mathsf{CO_2}} p \dot{V}_{\mathsf{CO_2}}}{RT_{\mathsf{A}}}\\
&= \frac{M_{\mathsf{CO_2}} p \varphi_{\mathsf{CO_2}} \dot{V}_{\mathsf{Luft}}}{RT_{\mathsf{A}}} \quad (1\ \mathsf{TP})
\end{aligned}$$

Damit lauten die eingehenden und ausgehenden CO_2-Massenströme:

$$\begin{aligned}
J^m_{\mathsf{CO_2,P,ein}} &= \frac{M_{\mathsf{CO_2}} p \varphi_{\mathsf{CO_2,ein}} \dot{V}_{\mathsf{Luft}}}{RT_{\mathsf{A}}} \quad (0,5\ \mathsf{TP})\\
J^m_{\mathsf{CO_2,P,aus}} &= \frac{M_{\mathsf{CO_2}} p \varphi_{\mathsf{CO_2,aus}} \dot{V}_{\mathsf{Luft}}}{RT_{\mathsf{A}}} \quad (0,5\ \mathsf{TP})
\end{aligned} \tag{26}$$

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

3.4. Lösung: Die CO_2-Massenströme (26) können in Gl. (25) eingesetzt werden:

$$0 = \frac{M_{\mathsf{CO_2}} p \varphi_{\mathsf{CO_2,ein}} \dot{V}_{\mathsf{Luft}}}{RT_{\mathsf{A}}} - \frac{M_{\mathsf{CO_2}} p \varphi_{\mathsf{CO_2,aus}} \dot{V}_{\mathsf{Luft}}}{RT_{\mathsf{A}}} + M_{\mathsf{CO_2}} \nu_{\mathsf{CO_2}} r$$

Nun kann nach $\varphi_{\mathsf{CO_2,aus}}$ umgeformt werden:

$$\varphi_{\mathsf{CO_2,aus}} = \varphi_{\mathsf{CO_2,ein}} + \frac{RT_{\mathsf{A}} \nu_{\mathsf{CO_2}} r}{p \dot{V}_{\mathsf{Luft}}} \qquad (1\ \mathsf{TP})$$

Einsetzen und ausrechnen ergibt:

$$\varphi_{\mathsf{CO_2,aus}} = 0{,}0004 + \frac{8{,}314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}} \cdot 298\,\mathrm{K} \cdot 1 \cdot 2{,}67 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{s}}}{1 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 8\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}} \cdot \frac{0{,}001\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{L}}}{60\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}}}} = 0,05001 \approx 0,05\ (1\ \mathsf{TP})$$

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

3.5. Lösung:

$$\underbrace{\dot{m}_{\mathsf{CO_2,A}}(t)}_{(0{,}5\ \mathsf{TP})} = \underbrace{N_{\mathsf{P}}}_{(0{,}5\ \mathsf{TP})} \left(- \underbrace{J^m_{\mathsf{CO_2,P,ein}}}_{(0{,}5\ \mathsf{TP})} + \underbrace{J^m_{\mathsf{CO_2,P,aus}}}_{(0{,}5\ \mathsf{TP})} \right) \qquad (27)$$

Die CO_2-Massenströme sind proprotional zu den CO_2-Anteilen (0,5 TP). Ein Vergleich dieser ergibt:

$$\varphi_{\mathsf{CO_2,aus}} = 0{,}05 > 100 \cdot \varphi_{\mathsf{CO_2,ein}} = 100 \cdot 0{,}0004 = 0{,}04 \qquad (0,5\ \mathsf{TP})$$
$$\Rightarrow J^m_{\mathsf{CO_2,P,ein}} \approx 0 \qquad (1\ \mathsf{TP})$$

Bewertung: Siehe oben. **(4 Punkte)**

3.6. Lösung: Einsetzten von (26) in (27) und vernachlässigung des eingeatmeten Luftmassenstroms ergibt:

$$\dot{m}_{\mathsf{CO_2,A}}(t) = N_{\mathsf{P}} \frac{M_{\mathsf{CO_2}} p \varphi_{\mathsf{CO_2,aus}} \dot{V}_{\mathsf{Luft}}}{RT_{\mathsf{A}}}$$

Nach Trennen der Variablen

$$\mathrm{d}m_{\mathsf{CO_2,A}} = N_{\mathsf{P}} \frac{M_{\mathsf{CO_2}} p \varphi_{\mathsf{CO_2,aus}} \dot{V}_{\mathsf{Luft}}}{RT_{\mathsf{A}}} \mathrm{d}t \qquad (0{,}5\ \mathsf{TP})$$

und Einsetzen der Randbedingungen

$$\int_{m_{\mathsf{CO_2,A,0}}}^{m_{\mathsf{CO_2,A}}} \mathrm{d}\tilde{m}_{\mathsf{CO_2,L}} = N_{\mathsf{P}} \frac{M_{\mathsf{CO_2}} p \varphi_{\mathsf{CO_2,aus}} \dot{V}_{\mathsf{Luft}}}{R T_{\mathsf{A}}} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tilde{t} \qquad \text{(0,5 TP)}$$

erhält man

$$m_{\mathsf{CO_2,A}} - m_{\mathsf{CO_2,A,0}} = N_{\mathsf{P}} \frac{M_{\mathsf{CO_2}} p \varphi_{\mathsf{CO_2,aus}} \dot{V}_{\mathsf{Luft}}}{R T_{\mathsf{A}}} (t - t_0) \qquad \text{(0,5 TP)}$$

$$m_{\mathsf{CO_2,A}} = m_{\mathsf{CO_2,A,0}} + N_{\mathsf{P}} \frac{M_{\mathsf{CO_2}} p \varphi_{\mathsf{CO_2,aus}} \dot{V}_{\mathsf{Luft}}}{R T_{\mathsf{A}}} (t - t_0) \qquad \text{(0,5 TP)} \qquad (28)$$

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

3.7. Lösung: Gesucht: t für $m_{\mathsf{CO_2,A}} = 2m_{\mathsf{CO_2,A,0}}$. (1 TP)
Einsetzen in (28) und Umformen ergibt

$$2m_{\mathsf{CO_2,A,0}} - m_{\mathsf{CO_2,A,0}} = N_{\mathsf{P}} \frac{M_{\mathsf{CO_2}} p \varphi_{\mathsf{CO_2,aus}} \dot{V}_{\mathsf{Luft}}}{R T_{\mathsf{A}}} (t - t_0) \qquad \text{(0,5 TP)}$$

$$\equiv t - t_0 = \frac{R T_{\mathsf{A}} m_{\mathsf{CO_2,A,0}}}{N_{\mathsf{P}} M_{\mathsf{CO_2}} p \varphi_{\mathsf{CO_2,aus}} \dot{V}_{\mathsf{Luft}}} \qquad \text{(0,5 TP)}$$

$$= \frac{8{,}314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}} \cdot 298\,\mathrm{K} \cdot 1 \cdot 15\,000\,\mathrm{g}}{200 \cdot 44\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} 1 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 0{,}04 \cdot 8\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}} \cdot \frac{0{,}001\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{L}}}{60\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}}}} = 2\,\mathrm{h}\,12\,\mathrm{min} \qquad \text{(1 TP)}$$

Bewertung: Siehe oben. **(3 Punkte)**

3.8. Nein. (0,5 TP)
Integratorverhalten (0,5 TP).

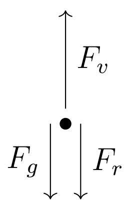
Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

4. Aufgabe: DA-Systeme (20 Punkte)

* Lösung *

4.1. Lösung:

a) kurze Skizze:



(1 TP)

b)

$$\dot{v}(t) \cdot m(t) = F_v(t) - F_r(t) - F_g(t) \qquad (1,0 \text{ TP})$$

$$F_v(t) = c \cdot \dot{m}(t) \qquad (0,5 \text{ TP})$$

$$F_r(t) = \frac{1}{2}\rho(t) \cdot C_d \cdot A \cdot v(t)^2 \qquad (0,5 \text{ TP})$$

$$F_g(t) = m(t) \cdot g \qquad (0,5 \text{ TP})$$

c)

$$\dot{x}(t) = v(t) \qquad (1,0 \text{ TP})$$

d)

$$\frac{h(t)}{h_0} = \frac{m(t) - m_{R,0}}{m_{T,0}} \qquad (0,5 \text{ TP})$$

Bewertung: Siehe oben. **(5 Punkte)**

4.2. Lösung:

a)

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{m(t)} \cdot [F_v(t) - F_r(t) - F_g(t)] \qquad (0,5 \text{ TP}) \qquad (29)$$

$$\dot{x}(t) = v(t) \qquad (0,5 \text{ TP}) \tag{30}$$

$$\dot{m}(t) = \frac{\Omega \cdot t}{1+t} \qquad (0,5 \text{ TP}) \tag{31}$$

$$0 = c \cdot \frac{\Omega \cdot t}{1+t} - F_v(t) \qquad (0,5 \text{ TP}) \tag{32}$$

$$0 = \frac{1}{2}\rho(t) \cdot C_d \cdot A \cdot v(t)^2 - F_r(t) \qquad (0,5 \text{ TP}) \tag{33}$$

$$0 = m(t) \cdot g - F_g(t) \qquad (0,5 \text{ TP}) \tag{34}$$

$$0 = \rho_n \cdot \exp\left(\frac{-x(t)}{H_n}\right) - \rho(t) \qquad (0,5 \text{ TP}) \tag{35}$$

$$h(t) = h_0 \cdot \frac{m(t) - m_{R,0}}{m_{T,0}} \qquad (0,5 \text{ TP}) \tag{36}$$

b) Differentielle Variablen: $x(t)$, $v(t)$, $m(t)$ $(1,0$ TP$)$
Algebraische Variablen: $F_v(t)$, $F_r(t)$, $F_g(t)$, $\rho(t)$ $(1,0$ TP$)$
Ausgänge: $h(t)$ $(0,5$ TP$)$
Eingänge: $-$ $(0,5$ TP$)$

Bewertung: In b), wenn nur 2 der differentielle Variablen, oder nur 3 der 4 algebraische Variablen genannt werden, werden 0,5 TP vergeben. Zudem ist zu beachten, dass die algebraischen Variablen teilweise im vorherigen Aufgabenteil durch Einsetzen eliminiert werden können.

(7 Punkte)

4.3. Lösung:

a) Ja, es gibt ein physikalisches Limit für die Gültigkeit dieses Models, wenn der Tank leer ist, bzw. der Füllstand 0 wird (1 TP). Ohne Treibstoff gibt es keinen Schub. An diesem Punkt verliert das Modell seine Gültigkeit.

b)

$$F_{auftrieb}(t) << F_v(t), F_r(t), F_g(t) \qquad (1 \text{ TP}) \tag{37}$$

Bewertung: Nur sinnvoll begründete Lösungen werden bepunktet. Bei a) werden auch alternative Lösungen akzeptiert, sofern sie relevant und richtig sind (z.B. g nicht konstant, relativ. Effekte). Der graduelle Übergang der Atmosphäre ins Vakuum und die damit zusammenhängende Änderung des Luftwiderstandes wird jedoch vom Model schon berücksichtigt und wird folglich mit 0 TP bepunktet. **(2 Punkte)**

4.4. Lösung:

a) Die *Zahl der zeitlichen Ableitungen der algebraischen Gleichungen* (0,5 TP)(alle oder nur Teil), die für die *Herleitung von expliziten Dgln.* (0,5 TP) mit kontinuierlicher Funktion in der rechten Seite für alle algebraische Variablen eines DA-Systems erforderlich ist , wird differentieller Index des DA-Systems genannt (die Ausgänge betrachtet man nicht).

b) Inzidenzmatrix für das gegebene DA-System:

	$x_3(t)$	$x_4(t)$	$x_5(t)$	$x_6(t)$
(11)	$\times$			
(12)		$\times$		
(13)		$\times$	$\times$	
(14)	$\times$			$\times$

Tabelle 3: Inzidenzmatrix für das gegebene DA-System (9)-(14) (3 TP).

Die quadratische Inzidenzmatrix hat keinen strukturellen Rangdefekt (0,5 TP).
Folglich kann es ein Index-1-System sein (0,5 TP).

c) Ja, das können Sie, das System hat keinen *Index größer als 1* (0,5 TP). Daher unterliegen die Anfangswerte der differentiellen Variablen keinen *Beschränkungen*, die in den Modellgleichungen *nicht explizit angegeben sind* (0,5 TP).

Bewertung:

Bei der Matrix werden 0,5 TP für die richtige Benennung der Zeilen, 0,5 TP für die richtige Benennung der Spalten und pro richtiger Zeile 0,5 TP gegeben. **(6 Punkte)**

5. Aufgabe: Hybride Automaten (20 Punkte)
* Lösung *

5.1. Lösung:

$$
\begin{aligned}
P(t) &= F_1(t) + F_2(t) \quad (1\,\text{TP}) \\
N &= F_1(t) + F_3(t) \quad (1\,\text{TP}) \\
\frac{dM(t)}{dt} &= F_2(t) - F_3(t) \quad (1\,\text{TP})
\end{aligned}
$$

Bewertung: Da in dieser Aufgabe nicht nach einer allgemeinen Bilanz gefragt war, sollten die Massenströme mit korrektem Vorzeichen eingesetzt werden. Gleichungen mit falschem Vorzeichen geben keine Punkte. Für die Interpretation des Mischers und Splitters als Speichersystem (mit differentieller Variable) gibt es die volle Punktzahl in Gleichungen 1 und 2. In der dritten Gleichung gibt es für den Term auf der linken Seite 0,5 TP und 0,5 TP für die Terme auf der rechten Seite. **(3 Punkte)**

5.2. Lösung:

a) Für $x_1 = 0, F_3(t) \neq 0$ und $0 < x_1 < 1, F_3(t) \neq 0$ gibt es einen unnötigen Umweg über den Pufferspeicher. (1 TP)
b) Betriebsart A: $x_1 = 1, F_3(t) \neq 0$: tritt auf, wenn die Produktion nicht ausreicht, um die Last zu tragen ($P(t) < N$). (1 TP)
Betriebsart B: $x_1 = 1, F_3(t) = 0$: tritt auf wenn die Produktion genau so hoch ist wie die Last ($P(t) = N$). (1 TP)
Betriebsart C: $0 < x_1 < 1, F_3(t) = 0$: tritt auf, wenn die Produktion vom Prozess ausreichend ist, um die Last zu tragen und den Pufferspeicher zu füllen ($P(t) > N$). (1 TP)

Bewertung: s.o. Für Teil b) werden 0,5 TP für den richtigen Variablenbereich und 0,5 TP für das passende Verhältnis von $P(t)$ und N. **(4 Punkte)**

5.3. Lösung:

Bewertung: Für die korrekte Zeichnung eines hybriden Automaten mit drei Moden und sechs Kanten (mit richtigen Pfeilrichtungen) gibt es 1 TP. Für jeden richtigen Guard (Wert und Position) gibt es 0,5 TP (insgesamt 3 TP). Die Moden müssen eindeutlich gekenntzeichnet sein. **(4 Punkte)**

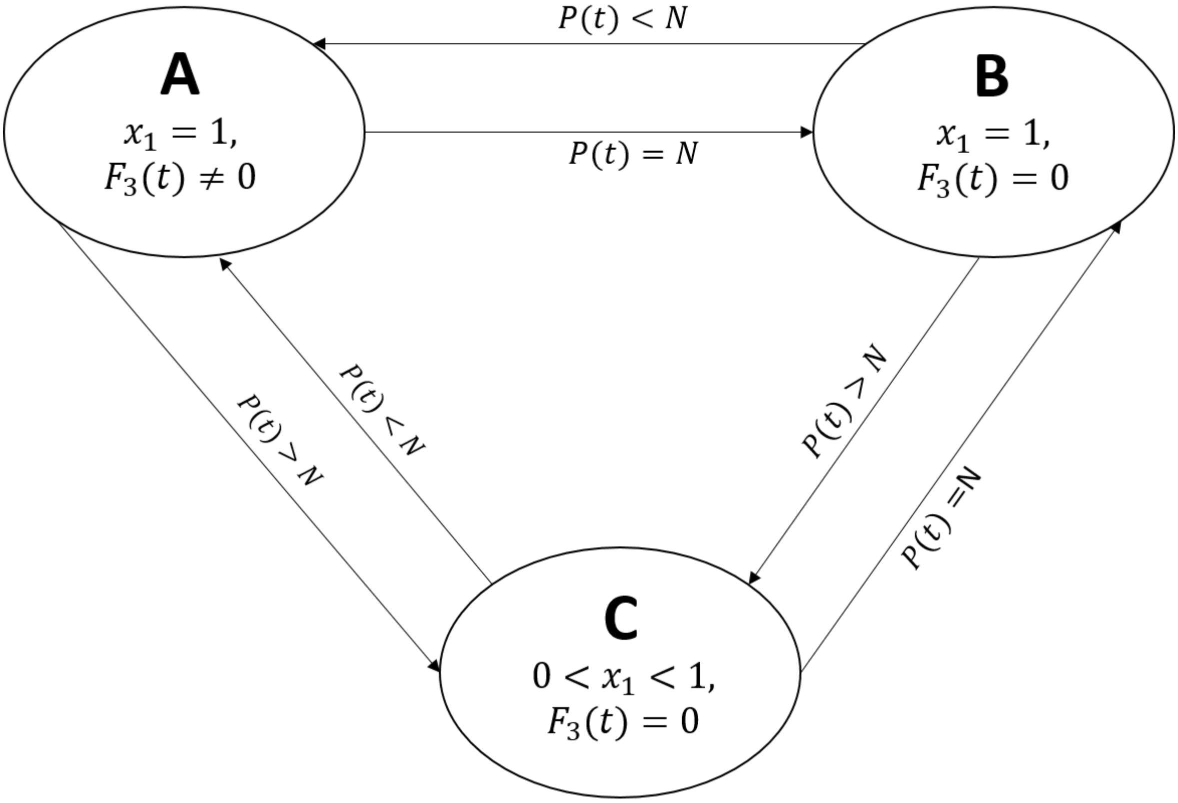


Abbildung 5: Hybrider Automat für einen Prozess mit Pufferspeicher.

5.4. Lösung:

```
model Pufferspeicher
 import Modelica.Units.SI.*;
 import Modelica.Math.*;
 MassFlowRate F_1;
 MassFlowRate F_2;
 MassFlowRate F_3;
 MassFlowRate P;
 MassFraction x_1;
 parameter MassFlowRate N = 100; // 1 TP
 Mass M(start=200);  // 1 TP
equation
  x_1 = F_1 / P; // 0,5 TP
  P = 0.5*F_1 + 2*F_2; // 0,5 TP
  N = 2*F_1 - F_3; // 0,5 TP
  der(M) = F_2 + F_3; // 0,5 TP
```

```

  if P == N then  // 1 TP
    x_1 = 1;  // 0,5 TP
    (F_3 = 0;  // 0,5 TP)
  elseif P < N then // 1 TP
    x_1 = 1;  // 0,5 TP
  elseif P > N then // 1 TP
    F_3 = 0; // 0,5 TP
    (x_1 = 0.5; // 0,5 TP)
  end if;  // 0,5 TP
end Pufferspeicher;
```

Bewertung: s.o. Bei der Angabe von N und $M(t)$ wird jeweils 0,5 TP für die Deklaration und 0,5 TP für die syntaktisch korrekte Zuordnung des Zahlenwertes gegeben. Für den Fall, dass die Start-Masse in "initial equation" definiert wird, gibt es ebenfalls 0,5 TP. Für die "if - elseif - end if" Struktur wird für jeden Term 0,5 TP gegeben und jeweils 0,5 TP für die passende Bedingung bezüglich $P(t)$ und N. Für die letzte "elseif" Bedingung kann auch "else" geschrieben werden. Die Formulierung reinit ist hier falsch, da es sich um algebraische Variablen handelt. Für $P(t) = N$ und $P(t) > N$ gibt es jeweils zwei Möglichkeiten x_1 bzw. $F_3(t)$ zu zuweisen. **(9 Punkte)**

Schriftliche Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Sommersemester 2023

6. Aufgabe: Finite Differenzen (10 Punkte)

Die folgende Differentialgleichung beschreibt die Advektions-Diffusions-Gleichung für die Konzentration $\rho(x)$ als Funktion der Position x mit Advektionsgeschwindigkeit $a > 0$ und Diffusionskoeffizient $\lambda > 0$:

$$a\frac{\partial \rho}{\partial x} - \lambda\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in [x_1, x_5]\,. \tag{18}$$

Weiterhin gilt $a \gg \lambda$. Diese Gleichung soll mit einem Finite-Differenzen-Verfahren auf folgendem Gitter gelöst werden:

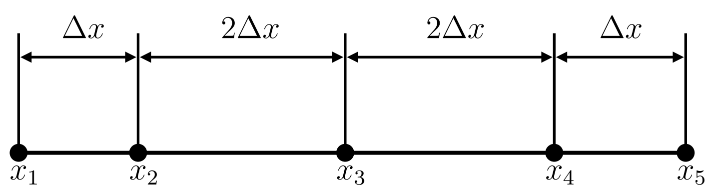


Abbildung 4: Gitter FD

An der Stelle x_1 soll eine Konzentration von $\rho_1 = 0$ und bei x_5 eine Konzentration von $\rho_5 = 3$ als Randbedingung gelten.

Es soll ein zentraler Differenzenausdruck für $\left.\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right|_{x=x_4}$ an der Stelle x_4 in dem in Abbildung 4 gegebenen Gitter hergeleitet werden.

6.1. Stellen Sie dazu zunächst die beiden erforderlichen Taylorreihen um den Entwicklungspunkt x_4 auf. Berücksichtigen Sie die ersten 4 Glieder. **(4 Punkte)**

6.2. Leiten Sie nun den zentralen Differenzenausdruck für $\left.\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\right|_{x=x_4}$ her. Bestimmen und kennzeichnen Sie den Abbruchfehler und die Genauigkeitsordnung. **(3.5 Punkte)**

6.3. Diskretisieren Sie nun die Gleichung (18) mit einem Finite-Differenzen-Verfahren an der Stelle x_4 auf dem in Abbildung 4 gegebenen Gitter.
Für $\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$ soll die Gleichung aus Aufgabe 6.2 benutzt werden. Sollten Sie Aufgabe 6.2 nicht gelöst haben, dürfen Sie auch die Gleichung (19) für $\left.\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\right|_{x=x_4}$ nutzen.

$$\left.\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} = \frac{\rho_{i+1} - 2\rho_i + \rho_{i-1}}{\Delta x^2}. \tag{19}$$

Für $\frac{\partial\rho}{\partial x}$ soll ein Upwind Verfahren benutzt werden.
Stellen Sie nun die sich ergebenden Gleichung für den Knoten x_4 auf, setzen Sie alle bekannten Werte aus der Aufgabenstellung ein und vereinfachen Sie gegebenenfalls.

Hinweis: Eine Herleitung des Upwind Verfahrens mit Taylor-Reihen ist nicht notwendig. **(2.5 Punkte)**

7. Aufgabe: Finite Elemente (15 Punkte)

Es ist der in Abbildung 5 gezeigte Stab gegeben. Am rechten Ende des Stabes entspricht die Stabtemperatur der Wandtemperatur T_W. Über das linke Ende des Stabes wird der konstante Wärmestrom $\dot{q}_S$ abgeführt. Zu Beginn der Betrachtung ($t = 0$) hat der Stab überall die Temperatur T_W.

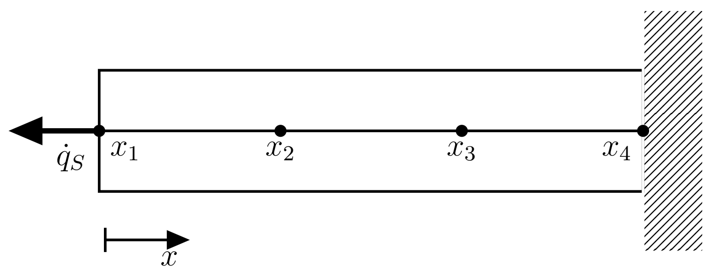


Abbildung 5: Stab

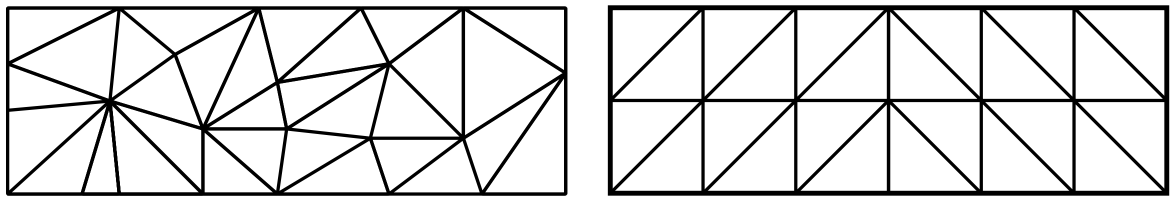
Die zeitliche Änderung der Temperatur $T(t, x)$ im Stab wird durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$\rho c_p \frac{\partial T(t,x)}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2} = 0, \tag{20}$$

wobei ρ der Dichte des Stabs entspricht, c_p seiner sepzifischen Wärmekapazität und λ dem Wärmeleitkoeffizient. Die Größen $\rho,\ c_p,$ und λ sind ortsunabhängig und zeitlich konstant.

7.1. Geben Sie die in der Problemstellung beschriebenden Bedingungen als Gleichungen an und ordnen Sie diese den aus der Vorlesung bekannten Kategorien zu. **(3 Punkte)**

7.2. Bilden Sie die schwache Form zur Gleichung (20). Formen Sie diese so um, sodass sie mit linearen finiten Elementen diskretisierbar ist. Vereinfachen Sie dabei soweit wie möglich und setzen Sie alle beschriebenen Randwerte ein. **(4 Punkte)**



(a) (b)

Abbildung 6: Unterschiedliche Rechengitter für 2D-Stabdiskretisierung.

7.3. In Abbildungen 6(a) und 6(b) sind zwei mögliche Diskretisierungen eines zweidimensionalen Rechengebietes gegeben. Benennen Sie jeweils den gezeigten Gittertyp und Begründen Sie Ihre Antwort.

Anmerkung: Sie erhalten die Punkte nur in Verbindung mit einer korrekten Begründung. **(2 Punkte)**

7.4. In Abbildung 7 ist ein 2D finites Element gezeigt. An den Punkten $p1 - p4$ sind die x-y Koordinaten der Elementknoten angegeben. Zeichnen Sie zunächst das zugehörige, Ihnen aus der Vorlesung bekannte, Referenzelement. Stellen Sie anschließend die Jacobimatrix J zwischen den beiden Elementen auf und berechnen Sie alle Diagonaleinträge.

Hinweis: Nutzen Sie die Interpolationsfunktionen des Referenzelements, Gl. (21)-(24), *zur Aufstellung der Funktionen der $x-$ und $y-$ Koordinate des in Abb. 7 gezeigten finiten Elements.*

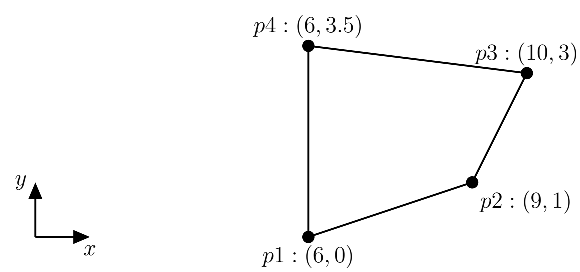


Abbildung 7: 2D-Element

$$\phi_1^{ref}(\xi,\eta) = 0.25\,(1-\xi)(1-\eta) \tag{21}$$

$$\phi_2^{ref}(\xi,\eta) = 0.25\,(1+\xi)(1-\eta) \tag{22}$$

$$\phi_3^{ref}(\xi,\eta) = 0.25\,(1+\xi)(1+\eta) \tag{23}$$

$$\phi_4^{ref}(\xi,\eta) = 0.25\,(1-\xi)(1+\eta) \tag{24}$$

(6 Punkte)

8. Aufgabe: Finite Volumen (12 Punkte)

Bei kleinen Verformungen lautet die Bewegungsgleichung für einen Stab in differentieller Form:

$$\frac{\partial^2 (\rho u)}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho f. \tag{25}$$

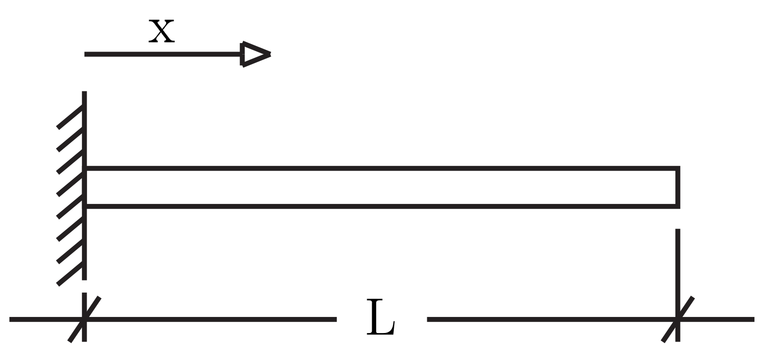


Abbildung 8: Stab

Die gesuchte Funktion ist die Verschiebung $u(x,t)$. Die Dichte ρ und die Volumenkraft f können als konstant angesehen werden. Gehen Sie von linear elastischem Materialverhalten aus ($\sigma = E\varepsilon$ ist die Spannung, $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ die Dehnung und $E = const.$ der Elastizitätsmodul).

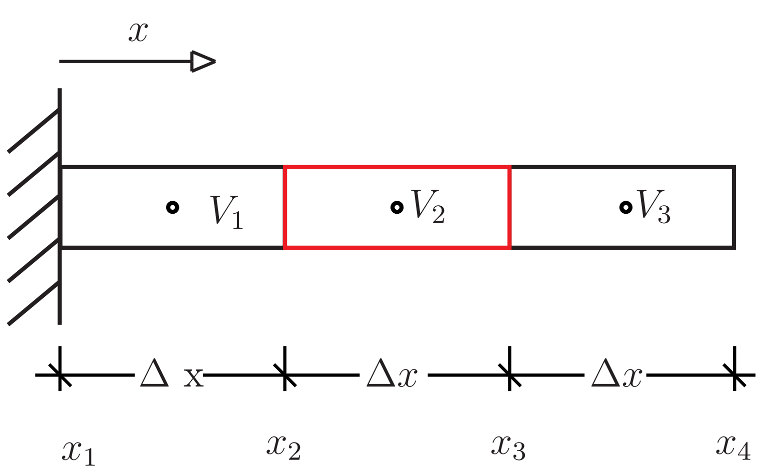


Abbildung 9: 1D Gitter

8.1. Überführen Sie Gleichung (25) in die integrale Form über ein allgemeines Volumen V und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich. Erläutern Sie hierbei Ihre Schritte. **(4 Punkte)**

8.2. Nennen Sie die beiden Randbedingungen für den Stab, welche sich aus Abbildung 8 ergeben. **(1 Punkt)**

In den folgenden Aufgabenteilen soll die integrale Formulierung für das mittlere Kontrollvolumen des Stabs V_2 (siehe Abbildung 9), in die diskrete Form überführt werden.

8.3. Vereinfachen Sie zuerst den zeitabhängigen Term und nennen Sie explizit die Annahmen, die Sie hierbei treffen. **(2 Punkte)**

8.4. Diskretisieren Sie nun die Flüsse mit Hilfe von zentralen finiten Differenzen. **(2,5 Punkte)**

8.5. Stellen Sie die gesamte diskrete Gleichung für V_2 auf. Verwenden Sie zur Diskretisierung der Zeitableitung folgenden Finite-Differenzen-Ausdruck:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}\Big|_{t=t^n} = \frac{a^{n+1} - 2a^n + a^{n-1}}{\Delta t^2} \tag{26}$$

(2,5 Punkte)

9. Aufgabe: Fehler (13 Punkte)

Gegeben sei die stationäre eindimensionale Advektions-Diffusionsgleichung für den Wärmetransport:

$$a\frac{\partial T}{\partial x} - \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, x \in [0, L], \tag{27}$$

wobei a hier die Transportgeschwindigkeit darstellt, λ den Diffusionskoeffizienten.

Eine für dieses Problem relevante Kennzahl stellt die „Péclet-Zahl“ dar, welche wie folgt definiert ist :

$$Pe = \frac{aL}{\lambda} \tag{28}$$

Bezogen auf eine diskrete Zelle wird diese zu $Pe_{\Delta_x} = \frac{a\Delta x}{2\lambda}$.

Gleichung (27) kann mit folgendem Diskretisierungsschema gelöst werden:

$$(Pe_{\Delta_x} - 1)T_{k+1} + 2T_k - (Pe_{\Delta_x} + 1)T_{k-1} = 0, \qquad k = 2, \ldots, nn - 1. \tag{29}$$

Unter Verwendung dieses Diskretisierungsschemas wird für die Randbedingungen $T_{links} = 50K$ und $T_{rechts} = 100K$ auf einem Gitter mit 100 Elementen, einer Temperaturleitfähigkeit $\lambda = 0.0001\frac{m^2}{s}$ und einer Geschwindigkeit $a = 2\frac{m}{s}$ folgendes Ergebnis berechnet:

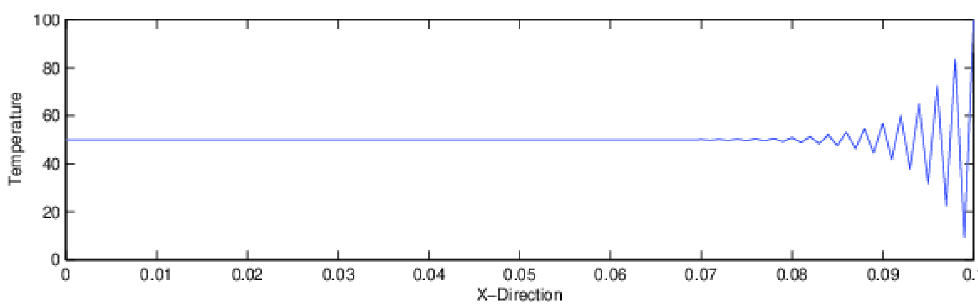


Abbildung 10: Lösung

9.1. Durch Einsetzen der Taylorreihen-Entwicklungen für T_{k+1} und T_{k-1} um den Entwicklungspunkt T_k in Gleichung (29) erhält man folgende Gleichung:

$$L_\Delta(T) = \frac{\lambda}{\Delta x^2}\left[Pe_{\Delta x}\left(2\frac{\partial T}{\partial x}\Delta x + O(\Delta x^3)\right) - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Delta x^2 + O(\Delta x^4)\right] = 0 \tag{30}$$

Bestimmen Sie den Abbruchfehler des Verfahren. Welche Ordnung hat der Abbruchfehler? Zeigen oder widerlegen Sie die Konsistenz des Verfahrens. **(5 Punkte)**

9.2. Warum treten bei der Verwendung des Diskretisierungsschemas in Gleichung (29) für $a \gg \lambda$ Oszillationen in der Lösung auf, vgl. Abb. 10? Begründen sie Ihre Antwort anhand der Gleichung (29). **(2 Punkte)**

9.3. Mit welchen zwei Möglichkeiten können die Oszillationen unterbunden werden, ohne die physikalischen Parameter zu verändern? Welchen Nachteil hat jeweils die entsprechende Modifikation? **(4 Punkte)**

9.4. Welcher Fehlertyp tritt auf, wenn die physikalischen Parameter des Problems geändert werden, um das Verfahren zu stabilisieren? **(1 Punkt)**

9.5. Kann Gleichung (27) knotenweise exakt gelöst werden? Wenn ja, wie heisst dieses Verfahren? **(1 Punkt)**

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Sommersemester 2023

---

6. Aufgabe: Finite Differenzen (10 Punkte)

* Lösung *

6.1. Lösung:

$$\rho_3 \approx \rho_4 - 2\,\frac{\partial \rho}{\partial x}\bigg|_{x=x_4} \Delta x + 2\,\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_4} \Delta x^2 - \frac{8}{6}\,\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_4} \Delta x^3 + \dots \tag{1}$$

Ungefähr Gleichzeichen und/oder + ... 0.5

Richtiger Entwicklungs und Auswertepunkt 0.5 ; Term mit 1. Ableitung korrekt 0.5 ; Term mit 2. Ableitung korrekt 0.5 ; Term mit 3. Ableitung korrekt 0.5

$$\rho_5 \approx \rho_4 + \frac{\partial \rho}{\partial x}\bigg|_{x=x_4} \Delta x + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_4} \Delta x^2 + \frac{1}{6}\,\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_4} \Delta x^3 + \dots \tag{2}$$

Richtiger Entwicklungs und Auswertepunkt 0.5

Term mit 1. Ableitung korrekt 0.5 ; Term mit 2. und 3. Ableitung korrekt 0.5

$\frac{4}{4}$

6.2. Lösung: 2 * Gegebene Taylorreihe + Taylorreihe aus 1.1: 1

$$2\rho_5 + \rho_3 \approx 3\rho_4 + 3\left.\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\right|_{x=x_4}\Delta x^2 - \left.\frac{\partial^3\rho}{\partial x^3}\right|_{x=x_4}\Delta x^3 + \frac{3}{4}\left.\frac{\partial^4\rho}{\partial x^4}\right|_{x=x_4}\Delta x^4 \quad 0.5 \tag{3}$$

Umformen nach der gesuchten Ableitung:

$$\left.\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\right|_{x=x_4} \approx \frac{2\rho_5 - 3\rho_4 + \rho_3}{3\Delta x^2} \; 0.5 + \underbrace{\frac{1}{3}\left.\frac{\partial^3\rho}{\partial x^3}\right|_{x=x_4}\Delta x}_{Abbruchfehler \; 0.5} \quad 0.5 \tag{4}$$

Der Ausdruck ist 1. Ordnung genau. 0.5

$\frac{3.5}{3.5}$

6.3. Lösung:

Upwind Diskretisierung für Knoten 4:

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x=x_4} \approx \frac{\rho_4 - \rho_3}{2\Delta x} \quad 1 \tag{5}$$

Gleichung für Knoten 4:

$$a\frac{\rho_4 - \rho_3}{2\Delta x} - \lambda\frac{6 - 3\rho_4 + \rho_3}{3\Delta x^2} = 0 \tag{6}$$

1. Term korrekt 0.5 ; 2. Term korrekt 0.5 ; Randwerte eingesetzt 0.5

Wenn Gleichung (2) benutzt wurde:

$$a\frac{\rho_4 - \rho_3}{2\Delta x} - \lambda\frac{3 - 2\rho_4 + \rho_3}{\Delta x^2} = 0 \tag{7}$$

$\frac{2.5}{2.5}$

$\sum_{A1} = \frac{10}{10}$

7. Aufgabe: Finite Elemente (15 Punkte)

* Lösung *

7.1. Lösung: Aus der Problembeschreibung lassen sich zwei Randbedingungen und eine Anfangsbedingung ableiten:

1. Dirichlet Randbedingung am rechten Rand bei x_4: $T(x_4, t) = T_W$. 1
2. Neumann Randbedingung am linken Rand bei x_1: $\left.\frac{\partial T(t)}{\partial x}\right|_{x_1} = \frac{\dot{q}_S}{\lambda}$. 1
3. Anfangsbedingung im gesamten Stab: $T(x, t = 0) = T_W$. 1

Die Punkte erhalten Sie nur, wenn der jeweils richtige Bedingungstyp identifiziert wird und die Randbedingung vollständig in Bezug auf Orts und Zeit angabe ist. bei vergessen/miteinbeziehen des λ in das $\dot{q}$ gibt es hier und in der nächsten Teilaufgabe trotzdem volle Punkte! $\frac{3.0}{3.0}$

7.2. Lösung: Aus der starken Form können wir durch Integration über das Rechengebiet und Multiplikation mit der Testfunktion $w(x)$ die schwache Form der Gleichung herleiten.

$$\int_{x_1}^{x_4} w(x) \left(\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall w(x). \tag{8}$$

- Multiplikation mit Testfunktion $w(x)$ und Ausdruck der Äquivalenz durch $\forall w(x)$ 0.5 .
- Integrale Form mit richtigen Grenzen, dx und vollständige Gleichung vorhanden. 0.5

Anwendung der partiellen Integration zur Reduzierung des Grad der Ableitung:

$$\int_{x_1}^{x_4} w(x) \left(\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \mathrm{d}x = 0 \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \rho c_p \int_{x_1}^{x_4} w(x) \frac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}x + \lambda \int_{x_1}^{x_4} \frac{\partial w(x)}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \mathrm{d}x - \lambda \left[w(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x_1}^{x_4} = 0 \quad 1.0 \tag{10}$$

Am rechten Rand liegt eine Dirichlet-RB vor, daher ist die Testfunktion $w(x_4) = 0$. 0.5 . Zusammen mit der Neumann RB am linken Rand folgt dann insgesamt:

$$\rho c_p \int_{x_1}^{x_4} w(x) \frac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}x + \lambda \int_{x_1}^{x_4} \frac{\partial w(x)}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \mathrm{d}x + w(x_1) \dot{q}_S = 0 \quad 0.5 \tag{11}$$

- Erwähnung, dass Testfunktion $w(x)$ bei Dirichlet RB null ist und damit korrekt weggelassenem Term für rechten Rand 0,5 .
- Korrekte finale Gleichung mit eingesetzter Neumann RB 0,5 .

$\frac{4.0}{4.0}$

7.3. Lösung:

Gitter 1: Es handelt sich um ein unstrukturiertes Gitter, da man keine geschlossene Formeln zur Zuordnung der Knoten zu den jeweiligen Elementen aufstellen kann 1.0 .

Gitter 2: Es handelt sich um ein unstrukturiertes Gitter, da man keine geschlossene Formeln zur Zuordnung der Knoten zu den jeweiligen Elementen aufstellen kann 1.0 .

$\frac{2.0}{2.0}$

7.4. Lösung:

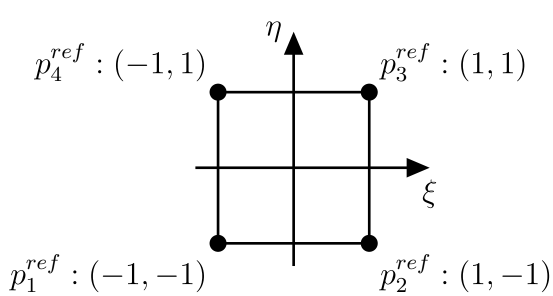


Abbildung 1: Zeichnung 2D Referenzelement mit 4 Knoten aus Vorlesung.

Bepunktung der Zeichnung:

- Korrektes Element aus Vorlesung mit Knoten, inkl. Beschriftung von Achsen mit ξ, η 0,5 .
- Vollstandigkeit der Zeichnung, d.h. vorhandene Markierung der Koordinaten [-1,1] in ξ, η 0,5 .

Aufstellung der Gleichungen für x und y Koordinate des gezeigten Elements, auch implizit oder als Summe in Ordnung:

$$x(\xi,\eta) = x_1\phi_1^{ref} + x_2\phi_2^{ref} + x_3\phi_3^{ref} + x_4\phi_4^{ref} \quad 1 \tag{12}$$

$$y(\xi,\eta) = y_1\phi_1^{ref} + y_2\phi_2^{ref} + y_3\phi_3^{ref} + y_4\phi_4^{ref} \quad 1 \tag{13}$$

Aufstellen Formel für Jacobi Matrix 1 :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{14}$$

Aufstellen der Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{x_1}{4}(\eta - 1) + \frac{x_2}{4}(1-\eta) + \frac{x_3}{4}(1+\eta) + \frac{x_4}{4}(-\eta - 1) \\ &= \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\eta \qquad 1 && (15) \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= 0 + \frac{y_2}{4}(-1-\xi) + \frac{y_3}{4}(1+\xi) + \frac{y_4}{4}(1-\xi) \\ &= \frac{11}{8} - \frac{3}{8}\xi \quad 1 && (16) \\ & && (17) \end{aligned}$$

Anmerkung: Für die Einträge der Jacobi-Matrix gibt es nur volle Punktzahl für die korrekt aufgestellte Formel in Verbindung mit den korrekt berechneten numerischen Werten. $\frac{6.0}{6.0}$

$$\sum_{A2} = \frac{15.0}{15.0}$$

8. Aufgabe: Finite Volumen (13 Punkte)

* Lösung *

8.1. Lösung:

1. Integration über das Gebiet V:

$$\int_V \frac{\partial^2 (\rho u)}{\partial t^2} dV - \int_V \frac{\partial \sigma}{\partial x} dV = \int_V \rho f dV \qquad 1 \tag{18}$$

2. Unabhängigkeit von $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ von V erlaubt: (Falls dieser Schritt erst bei Aufgabe 8.3 gemacht wurde gibt es hier den Punkt implizit!)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V (\rho u) \, dV - \int_V \frac{\partial \sigma}{\partial x} dV = \int_V \rho f dV \qquad 1 \tag{19}$$

3. Auswerten des räumlichen Integrals: (Falls dieser Schritt erst bei Aufgabe 8.4 gemacht wurde gibt es hier den Punkt implizit!)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V (\rho u) \, dV - [\sigma]_{links}^{rechts} = \int_V \rho f dV \qquad 1 \tag{20}$$

4. Auswerten des Quellterms und Vereinfachen.

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V u dV - \left[E \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{links}^{rechts} = \rho f V \qquad 1 \tag{21}$$

$\frac{4}{4}$

8.2. Lösung:

Je Randbedingung 0.5

$$u \Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \tag{22}$$

$\frac{1}{1}$

8.3. Lösung:

Es wird eine Volumenmittelung der Unbekannten vorgenommen:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_2} u dV = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \int_{V_2} dV = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \Delta x \tag{23}$$

1 für die Bennenung, 0.5 für die Anwendung und 0.5 für die Auswertung. $\frac{2}{2}$

8.4. Lösung:

$$\left[E\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{links}^{rechts} = E\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_3} - E\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_2} = E\frac{u_3 - u_2}{\Delta x} - E\frac{u_2 - u_1}{\Delta x} = E\frac{u_3 - 2u_2 + u_1}{\Delta x} \tag{24}$$

jeweils 1 pro seite und 0.5 fuers vereinfachen $\frac{2.5}{2.5}$

8.5. Lösung:

$$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\Delta x - E\frac{u_3 - 2u_2 + u_1}{\Delta x} = \rho f \Delta x \tag{25}$$

$$\rho\frac{u_2^{n+1} - 2u_2^n + u_2^{n-1}}{\Delta t^2}\Delta x - E\frac{u_3^n - 2u_2^n + u_1^n}{\Delta x} = \rho f \Delta x \tag{26}$$

1 für die zeitliche Diskretisierung 1 für das richtige zeitlevel, 0.5 fuer die gesamte gleichung. $\frac{2.5}{2.5}$

$$\sum_{A3} = \frac{12}{12}$$

9. Aufgabe: Fehler (13 Punkte)

* Lösung *

9.1. Lösung:

$$\lim_{\Delta x \to 0} ||L(T) - L_\Delta(T)|| = \left|\left| a\frac{\partial T}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{\Delta x^2}\left[Pe_{\Delta x}\left(2\frac{\partial T}{\partial x}\Delta x + O(\Delta x^3)\right) - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Delta x^2 + O(\Delta x^4)\right]\right|\right| = \tag{27}$$

1

Durch Einsetzen von $Pe_{\Delta_x} = \frac{a\Delta x}{2\lambda}$ und beachtung der Vorfaktoren erhält man:

$$\lim_{\Delta x \to 0} ||L(T) - L_\Delta(T)|| = \left|\left| a\frac{\partial T}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \left[\left(a\frac{\partial T}{\partial x} + O(\Delta x^2)\right) - \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + O(\Delta x^2)\right]\right|\right| = 0 \; 1 \tag{28}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} ||L(T) - L_\Delta(T)|| = \left|\left| \underbrace{O(\Delta x^2)}_{\to 0} \right|\right| = 0 \; 1 \tag{29}$$

Das Verfahren ist konsistent. 1 Der Abbruchfehler ist 2. Ordnung. 1 $\frac{5}{5}$

9.2. Lösung:

Aus $a \gg \lambda$ folgt $Pe_{\Delta_x} \gg 0$. Damit gilt:

$$\lim_{Pe_{\Delta_x} \to \infty} \underbrace{(Pe_{\Delta_x} - 1)}_{\to\infty} T_{k+1} + 2T_k - \underbrace{(Pe_{\Delta_x} + 1)}_{\to\infty} T_{k-1} = 0. \tag{30}$$

1

Für hohe Pecletzahlen entkoppelt der mittlere Knoten von seinen Nachbarknoten. 1
$\frac{2}{2}$

9.3. Lösung: 1. Feinere Diskretisierung, 1 höherer Aufwand. 1
2. Upwinding 1 , numerische Diffusion verfälscht das Ergebnis 1 . $\frac{4}{4}$

9.4. Lösung: Änderungen an physikalischen Parametern führen zu einem Modellierungsfehler. $\frac{1}{1}$

9.5. Lösung: Die Verwendung des Superhero-Stencils(Optimales Upwinding) ermöglicht eine exakte Löesung an den Knoten. $\frac{1}{1}$

$$\sum_{A4} = \frac{13}{13}$$