RWTH Aachen · AVT **Systemverfahrenstechnik** · 52074 Aachen · **Prof. Alexander Mitsos, Ph.D.**

Schriftliche Prüfung: Aufgaben des AVT-Teils. Jeder Punkt entspricht 1 Minute.

Simulationstechnik

Wintersemester 2018/19

---

1. Aufgabe: Fragen (20 Punkte)

1.1. Dynamische Systeme können wie folgt klassifiziert werden:

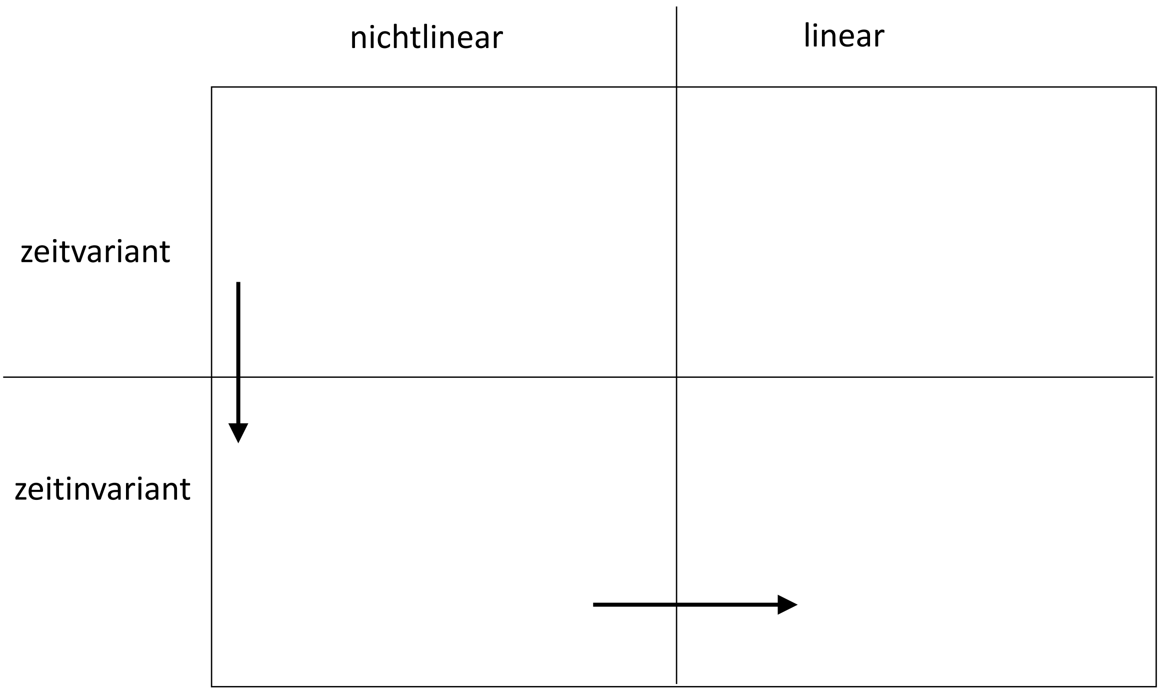


Abbildung 1: Klassifizierung dynamischer Systeme

Geben Sie für jede Art der Zustandsraumdarstellung die allgemeine Form an. Die Anfangswerte brauchen Sie nicht anzugeben. Schreiben Sie auf die entsprechenden Pfeile, durch welche Methode die Überführung zwischen den Zustandsraumdarstellungen möglich sind.

Hinweis: Sie dürfen in dieser Aufgabe ausnahmsweise auf das Klausurblatt schreiben.

(6 Punkte)

1.2. Durch welchen Typ von Diffentialgleichungen werden konzentrierte Systeme beschrieben und durch welchen Typ von Diffentialgleichungen werden verteilte Systeme beschrieben?

(1 Punkt)

1.3. Das gegebene Gleichungssystem beschreibt einen elektrischen Schaltkreis. Die Induktivität L_1 und der Widerstand R_1 sind gegeben. Die Eingangsspannung u_{ein} kann frei gewählt werden.

$$-u_{\mathrm{ein}}(t) + u_{\mathrm{L},1}(t) + u_{\mathrm{R},1}(t) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{di(t)}{dt} L_1 = u_{\mathrm{L},1}(t) \tag{2}$$

$$u_{\mathrm{R},1}(t) = R_1 i(t) \tag{3}$$

(a) Klassifizieren Sie alle Größen nach differentiellen Variablen, algebraischen Variablen, Eingängen und Parametern.

(b) Geben Sie den Index des Systems mit Begründung an.

(3 Punkte)

1.4. Geben Sie die allgemeinen Gleichungen für das explizite und implizite Euler-Verfahren für das allgemeine System $\dot{x}(t) = f(x(t))$ an. Wie unterscheiden sich das explizite und das implizite Euler-Verfahren im Hinblick auf Stabilität und Rechenzeit pro Schritt?

(4 Punkte)

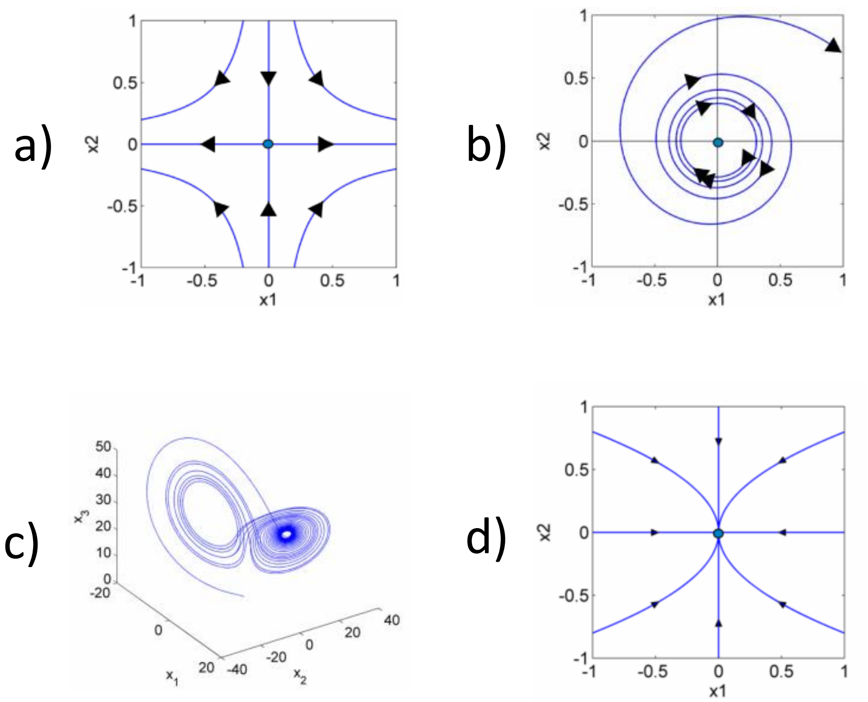
1.5. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\dot{x}_1(t) = 2x_2(t) + 3 \tag{4}$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 4 \tag{5}$$

mit den Anfangsbedinungen $x_1(t=0) = 0$ und $x_2(t=0) = 5$. Berechnen Sie die Werte von $x_1(t=0.1)$ und $x_2(t=0.1)$ mit dem expliziten Euler-Verfahren mit einer Schrittweite von $\Delta t = 0.1$. **(2 Punkte)**

1.6. Bennenen Sie die Phasenporträts in Abbildungen (a)-(d). **(4 Punkte)**



2. Aufgabe: Systemtheorie (20 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten Sie die Stabilität des aus der Vorlesung bekannten Van-der-Pol-Oszillators

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \epsilon \left(1 - x_1^2(t)\right) x_2(t) - x_1(t)$$

mit $\epsilon > 0$.

2.1. Gegeben sei eine Funktion $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \mapsto V(\boldsymbol{x})$. Welche Eigenschaften muss V erfüllen, damit V unbeschränkt positiv definit ist? Zeigen Sie, dass diese Bedingungen für die Funktion $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T \mapsto \alpha x_1^2 + \beta x_2^2$ mit $\alpha, \beta > 0$ erfüllt sind.
(3 Punkte)

2.2. Sei nun $\alpha = \beta = 1$, d.h. sei $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T \mapsto x_1^2 + x_2^2$. Bestimmen Sie $\frac{dV}{dt}\big|_{\boldsymbol{x}(t)}$ für das oben gegebene Differentialgleichungssystem. Geben Sie an, welche Form der Definitheit auf $D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | -1 < x_1 < 1\}$ für $\frac{dV}{dt}\big|_{\boldsymbol{x}(t)}$ vorliegt. Welche Aussagen können Sie daraus über die Stabilität der Ruhelage $\boldsymbol{x}_R = (0,0)^T$ ableiten? Begründen Sie Ihre Antwort! Sie dürfen ohne zu zeigen davon ausgehen, dass V unbeschränkt positiv definit ist.
(4 Punkte)

2.3. Führen Sie nun eine Linearisierung des Van-der-Pol-Oszillators durch. Geben Sie dazu zunächst die allgemeine Formel der Taylorreihenentwicklung um einen allgemeinen Punkt $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ für ein autonomes nichtlineares Differentialgleichungssystem $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ an. Linearisieren Sie anschließend den Van-der-Pol-Oszillator um diesen allgemeinen Punkt $\boldsymbol{x}^*$. Geben Sie die auftretenden Terme explizit an.
(5 Punkte)

Der um die Ruhelage $\boldsymbol{x}_R = (0,0)^T$ linearisierte Van-der-Pol-Oszillator kann durch unten stehende Differentialgleichung beschrieben werden.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix}$$

2.4. Berechnen Sie die Eigenwerte der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ und charakterisieren Sie das Verhalten des linearisierten Systems in Abhängigkeit von ϵ.

(a) Für welches $\epsilon > 0$ ist das System instabil?

(b) Für welches $\epsilon > 0$ ist das System schwingfähig?

(2,5 Punkte)

2.5. Sei nun $\epsilon = 2,5$. Berechnen Sie die Eigenwerte und -vektoren der Systemmatrix. Skizzieren Sie anschließend das zugehörige Phasenportrait. Zeichnen Sie insbesondere auch die Eigenvektoren ein.

(5,5 Punkte)

3. Aufgabe: Parameterschätzung (20 Punkte)

Abbildung 2 zeigt ein elektrisches System. Es besteht aus einer Spule mit Induktivität L und Spannung $u_L(t)$, einem Kondensator mit Kapazität C und Spannung $u_C(t)$, einer Wechselspannungsquelle $u_0(t)$ sowie einem Verbraucher. Der Verbraucher hat eine Spannung $u_R(t)$ und besteht aus einem temperaturabhängigen Widerstand $R(t)$ mit $T(t=0) = T_0$.

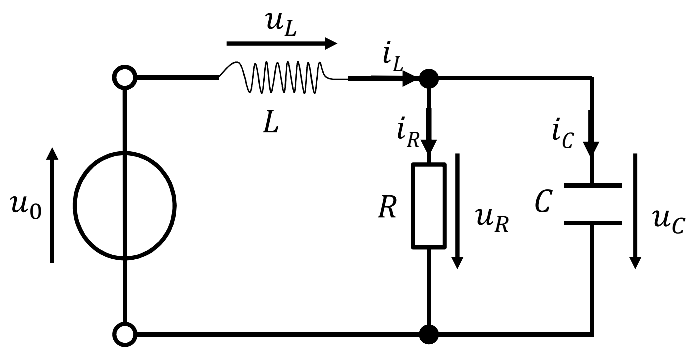


Abbildung 2: Elektrisches System

Das elektrische Netzwerk kann durch folgendes Gleichungssystem modelliert werden:

$$i_L(t) - i_R(t) - i_C(t) = 0 \tag{6}$$

$$u_0(t) - u_R(t) - u_L(t) = 0 \tag{7}$$

$$u_0(t) - u_C(t) - u_L(t) = 0 \tag{8}$$

$$C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = i_C(t) \tag{9}$$

$$L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = u_L(t) \tag{10}$$

$$u_0(t) = u_{0,max} \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{11}$$

$$u_R(t) = R(t) \cdot i_R(t) \tag{12}$$

$$R(t) = R_0 \cdot (1 + a \cdot (T(t) - T_0)) \tag{13}$$

$$c \cdot \frac{dT(t)}{dt} = u_R(t) \cdot i_R(t) - k \cdot A \cdot (T(t) - T_U) \tag{14}$$

3.1. Benennen Sie die differentiellen Variablen, die algebraischen Variablen, die Parameter und Eingänge des dargestellten Gleichungssystems. **(5 Punkte)**

3.2. Ist das Gleichungssystem von Gl. (6) bis (14) linear oder nichtlinear, ist es zeitvariant oder zeitinvariant? **Begründen** Sie Ihre Antwort **kurz** anhand der Gl. (6) bis (14) (ohne Rechnung). **(2 Punkte)**

3.3. Stellen Sie die Sensitivitätsgleichungen für das allgemeine System

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}) \tag{15}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}) \tag{16}$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{p}) \tag{17}$$

auf. **(3 Punkte)**

3.4. Sie haben die Auswirkungen der Änderung eines Parameters p_1 auf die Spannung u_R zum Zeitpunkt $t = 15s$ gemessen. Das Ergebnis der Messungen ist in dem Diagramm in Abbildung 3 dargestellt. Betrachten Sie für diesen Aufgabenteil die Spannung u_R als Ausgang des Systems.

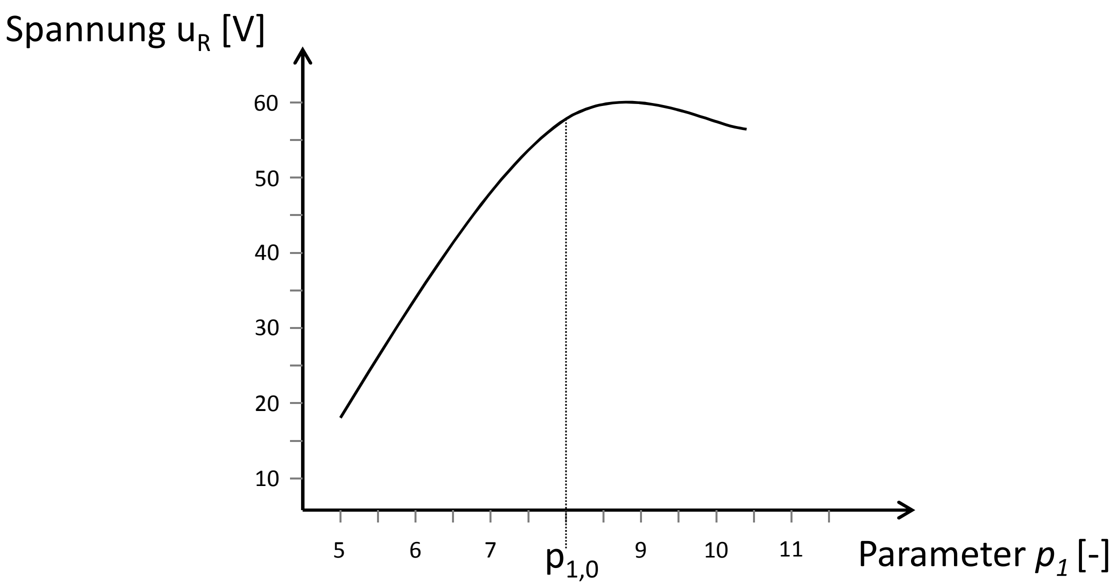


Abbildung 3: Diagramm: Spannungsmessungen

a) Approximieren Sie für $p_{1,0} = 8$ mittels der Methode der zentralen Differenz für $\Delta p = 1$ die (lokale) Sensitivität $S_{p_1}^{u_R}$ und zeichnen Sie diese Approximation in das Diagramm ein.
Hinweis: Für diesen Aufgabenteil dürfen Sie auf das Aufgabenblatt zeichnen. **(3 Punkte)**

b) Nennen Sie einen Nachteil der angewendeten Methode. **(1 Punkt)**

3.5. Welche qualitativen Aussagen kann man anhand der in Gleichung (18) dargestellten lokalen Sensitivitätsmatrix zum Zeitpunkt t_k bezüglich des Einfluss der Parameter p_2 und p_3 auf die Ausgänge $\boldsymbol{y}$ machen? **Begründen** Sie Ihre Antwort **kurz** (ohne Rechnung).

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{y}}(t_k) = \frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -200 & 0.01 & 0.3 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 170 & 0 & 0 & 0.33 & 0 \\ 0.2 & 0 & 223 & -0.2 & 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

(2 Punkte)

3.6. Nun sollen die Parameter des Modells bestimmt werden. Geben Sie zunächst das allgemeine Parameterschätzproblem nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate für dynamische Systeme mit einem Ausgang an. Wofür stehen die einzelnen Symbole?
Stellen Sie dann das Parameterschätzproblem für die unbekannten Parameter C und L auf. Betrachten Sie dabei die Spannung u_R als Ausgang des Systems und gehen Sie davon aus, dass Sie Messwerte an den Zeitpunkten $t_1, ..., t_{14}$ zur Verfügung haben. **(4 Punkte)**

4. Aufgabe: Strukturierte Systeme (21 Punkte)

Sie wollen sich Kartoffeln in einem Dampfgartopf zubereiten. Dazu wollen Sie das System *Dampfgartopf* analysieren, in Modelica implementieren und im Anschluss simulieren können.

Zu Beginn müssen Sie das Wasser im Topf auf Siedetemperatur erwärmen. Dafür betrachten Sie zunächst nur eine flüssige Phase, gemäß Abb. 4. Über den Herd führen Sie einen Wärmestrom von $\dot{Q}_{Herd} = 1500$ W zu. Es treten konstante Verlustwärmeströme an die Umgebung über die Topfwand und Flüssigkeitsoberfläche auf, für die Sie die flächenspezifischen Werte kennen ($\dot{q}_{Wand} = -1250$ W/m^2, $\dot{q}_{Luft} = -750$ W/m^2). In den zylinderförmigen Topf mit einem Durchmesser von $d = 0,2$ m haben Sie $V_{fl} = 4$ l Wasser mit einer konstanten Dichte $\rho = 1000$ kg/m^3 eingefüllt.

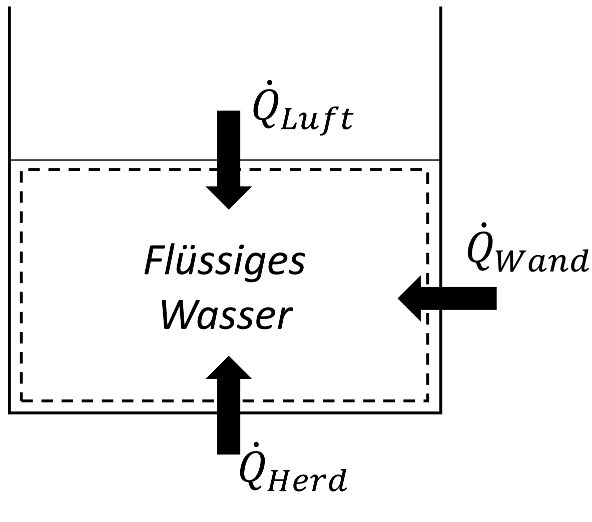


Abbildung 4: Wasser erhitzen

4.1. Berechnen Sie zunächst die auftretenden Verlustwärmeströme an Topfwand $\dot{Q}_{Wand}$ und Flüssigkeitsoberfläche $\dot{Q}_{Luft}$. **(4 Punkte)**

4.2. Wie lautet die allgemeine thermodynamische Bilanzgleichung? Definieren Sie alle Variablen. **(3 Punkte)**

4.3. Sie benutzen zunächst keinen Deckel und können im Folgenden die Volumenänderungsarbeit vernachlässigen. Des Weiteren wird angenommen, dass noch kein Wasser verdampft. Stellen Sie die Energiebilanz für das flüssige Wasser auf. Wie lange dauert es, bis Sie Ihr Wasser von $T_0 = 20$ °C auf 100 °C erwärmt haben? Rechnen Sie dabei mit einer konstanten spezifischen Wärmekapazität von $c = 4190$ J/(kg K). **(5 Punkte)**

Ihr Wasser kocht nun, Sie haben die Kartoffeln im Topf platziert und einen Deckel darauf gesetzt, aus dem Wasserdampf zum Teil entweichen kann (siehe Abb. 5). Allmählich wird durch die Wärmezufuhr das flüssige Wasser verdampft und geht in das Teilsystem *Dampf* über. Mit Ihrem Modell wollen Sie vorhersagen, wie lange es dauert, bis alles Wasser verdampft ist, welcher Druck sich im Topf aufbaut etc.

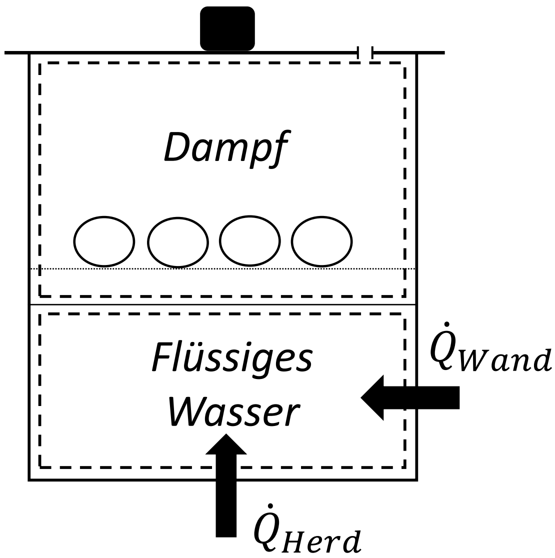


Abbildung 5: Wasser verdampfen

4.4. Würden Sie die Grenzfläche zwischen Flüssig- und Dampfphase als Speicher- oder Verknüpfungssystem modellieren? Warum? **(1 Punkt)**

4.5. Stellen Sie die Gesamtmassenbilanz der Flüssigphase auf. **(1 Punkt)**

4.6. Leiten Sie anhand einer Energiebilanz in der Flüssigphase her, wie groß der verdampfende Wasserstrom $\dot{m}_{H_2O}$ für eine konstante spezifische Verdampfungsenthalpie $\Delta h_{verdampf}$ = 2.26 MJ/kg ist. Nehmen Sie dafür an, dass sich die Temperatur der Flüssigphase nicht mehr ändert und kein Wärmeaustausch mit der Dampfphase stattfindet. **(3 Punkte)**

4.7. Durch den steigenden Druck im Topf ändern sich die Stoffeigenschaften des flüssigen Wassers. Erstellen Sie einen Konnektor `connector_fluessig` in Modelica-Code, der benötigte Größen übergeben kann und sicherstellt, dass der Druck in beiden Systemen gleich ist. **(2 Punkte)**

4.8. Sie wollen das Gesamtsystem `gesamtTopf` in Modelica implementieren. Ergänzen Sie dazu folgenden Code, um die Teilsysteme unter Verwendung der unten genannten Konnektoren zu verknüpfen. *//KW1* und *//KL1* sind dabei Namen für Wasser- bzw. Luftkonnektoren, die in den Modellen `dampf`, `fluessig` und `fluessig_dampf` enthalten sind.

```
model gesamtTopf
dampf Dampf1; //Konnektorname: KL1
fluessig Fluessig1; //Konnektorname: KW1
fluessig_dampf Fluessig_Dampf1; //Konnektornamen: KW1, KL1
equation
.
.
end gesamtTopf;
```

(2 Punkte)

5. Aufgabe: Ereignisdiskrete und Hybride Systeme (19 Punkte)

5.1. Welche zwei aus der Vorlesung bekannten Methoden können für die Modellierung ereignisdiskreter Systeme benutzt werden? Mit welcher der beiden lassen sich komplexe, parallele Dynamiken einfacher darstellen? **(1,5 Punkte)**

Gegeben sei das folgende Petrinetz mit den eingezeichneten Knoten, Transitionen und Kantengewichten:

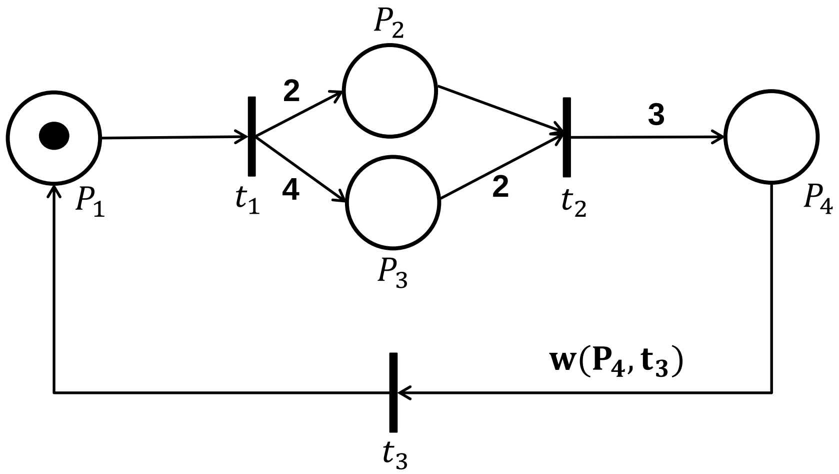


Abbildung 6: Skizze des Petrinetzes

5.2. Geben Sie an, wieviele Token auf den jeweiligen Knoten P_1 bis P_4 liegen, nachdem Transition t_1 einmal geschaltet wurde? **(2 Punkte)**

5.3. Gibt es Kantengewichte $w(P_4, t_3) \in \mathbb{N}$, für die das Netz in Abb. 6

a) beschränkt ist?

b) sicher ist?

c) lebendig ist?

d) Verklemmungen aufweisen kann?

Falls nein, begründen Sie Ihre Antwort. Falls ja, geben Sie den entsprechenden Wertebereich von $w(P_4, t_3)$ an. **(4 Punkte)**

5.4. Ein kontinuierlicher Signalverlauf eines periodischen Systems hat eine konstante Periodendauer $T_{signal} = 2$ s. Ist ein Abtastintervall von $T_s = 3$ s ausreichend, um den Signalverlauf zu rekonstruieren?
Nennen Sie die allgemeine Bedingung, die dafür laut Shannon Theorem erfüllt sein muss. Prüfen Sie diese anschließend anhand einer kurzen Rechnung. **(2,5 Punkte)**

5.5. Ein Jalousiesystem für Fenster (s. Abb. 7) ist durch eine Sonnenautomatik gesteuert. Ist die Jalousie in der *oberen Stellung* $x = x_{oben}$ und herrscht draußen eine Beleuchtungsstärke von $E_v \geq 50.000$ lux, wird die Jalousie *heruntergefahren*. Die Jalousie kommt erst in der *unteren Position* zum Stehen ($x = x_{unten}$). Die Jalousie *fährt hoch*, wenn die Beleuchtungsstärke einen Wert von $E_v \leq 30.000$ lux erreicht. Sie hält erst an, wenn sie die Höhe $x = x_{oben}$ erreicht hat. Ein Stehenbleiben auf halber Strecke ist weder beim Herunterfahren noch beim Hochfahren vorgesehen. Hindernisse, Störungen, Luftreibung o.ä. können vernachlässigt werden. Es ist nicht möglich, dass die Jalousie auf halber Strecke wendet.

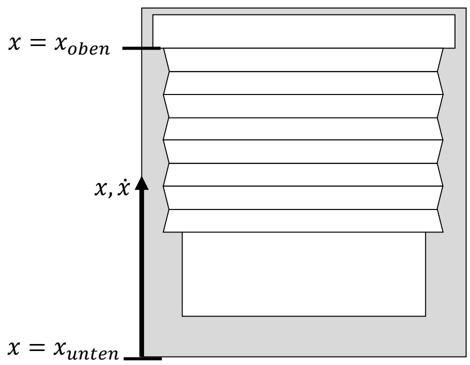


Abbildung 7: Skizze des Jalousiesystems

a) Modellieren Sie den Vorgang als hybriden Automaten mit 4 Moden. Geben sie die entsprechenden Transitions- und Sprungbedingungen aller Kanten an und benennen Sie die Moden sinnvoll. Verwenden Sie die lineare, zeitinvariante Zustandsraumdarstellung in der allgemeinen Form.

b) Welche der Transitionsbedingungen sind explizit und welche implizit? **(9 Punkte)**

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik

Wintersemester 2018/19

1. Aufgabe: Fragen (20 Punkte)

* Lösung *

1.1. Lösung:

	nichtlinear	linear
zeitvariant	$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{p}, t)$ (0,5 TP) $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{p}, t)$ (0,5 TP) ↓ Reformulierung mit Hilfe einer Zusatzvariable (1 TP)	$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$ (0,5 TP) $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t)$ (0,5 TP)
zeitinvariant	$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{p})$ (0,5 TP) $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{p})$ (0,5 TP)	$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\,(t)$ (0,5 TP) $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$ (0,5 TP)

→ Taylorreihenentwicklung (1 TP)

Abbildung 1: Klassifizierung dynamischer Systeme

Bewertung: Linearisierung statt Taylorreihenentwicklung gilt auch. **(6 Punkte)**

1.2. Lösung:

Konzentrierte Systeme werden durch gewöhnliche Diffentialgleichungen beschrieben (0,5TP). Verteilte Systeme werden durch partielle Diffentialgleichungen beschrieben (0,5TP).

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

1.3. Lösung:

Die differentiellen Größen sind $\boldsymbol{x}(t) = [i]$ (0,5TP).
Die algebraischen Größen sind $\boldsymbol{z}(t) = [u_{\mathrm{L},1}, u_{\mathrm{R},1}]$ (0,5TP).
Die Eingangsgrößen sind $\boldsymbol{u}(t) = [u_{\mathrm{ein}}]$ (0,5TP).
Die Parameter sind $\boldsymbol{p} = [L_1, R_1]$ (0,5TP).

Das System hat einen Index von 1, da für alle algebraischen Größen explizite algebraische Gleichungen zur Verfügung stehen (1TP).

Bewertung: Siehe oben. **(3 Punkte)**

1.4. Lösung:

Die Formel für einene expliziten Euler-Schritt ist

$$x_{\mathrm{k}+1} = x_{\mathrm{k}} + f(x_{\mathrm{k}})\,\Delta t. \quad \text{(1TP)}$$

Die Formel für einene impliziten Euler-Schritt ist

$$x_{\mathrm{k}+1} = x_{\mathrm{k}} + f(x_{\mathrm{k}+1})\,\Delta t. \quad \text{(1TP)}$$

Das explizite Euler-Verfahren wird für große Schrittweiten instabil, während das implizite Euler-Verfahren immer stabil ist (1TP).

Der Rechenaufwand für einen Schritt des expliziten Euler-Verfahrens ist geringer, da kein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden muss (1TP).

Bewertung: Siehe oben. **(4 Punkte)**

1.5. Lösung:

Für die Berechnung für die Formel für das explizite Euler-Verfahren genutzt. Es muss ein Schritt ausgeführt werden:

$$x_1(t = 0.1) = 0 + (2 \cdot 5 + 3) \cdot 0.1 = 1.3 \quad \text{(1TP)}$$
$$x_2(t = 0.1) = 5 + (-0 + 4) \cdot 0.1 = 5.4 \quad \text{(1TP)}$$

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

1.6. Lösung:

Die Abbildungen zeigen:

(a) Sattel (1TP)

(b) Instabiler Fokus (1TP)

(c) Seltsamer Attraktor (1TP)

(d) Stabiler Knoten (1TP)

Bewertung: Siehe oben. **(4 Punkte)**

2. Aufgabe: Systemtheorie (20 Punkte)
* Lösung *

2.1. Lösung: Für eine Funktion $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \mapsto V(\boldsymbol{x})$ muss gelten

(a) $V(\mathbf{0}) = 0$ (0,5TP)

(b) $V(\boldsymbol{x}) > 0$ für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ (0,5TP)

(c) $V(\boldsymbol{x}) \to \infty$, für $\|x\| \to \infty$ (0,5TP)

Für $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T \mapsto \alpha x_1^2 + \beta x_2^2$ gilt:

(a) $V(\mathbf{0}) = \alpha 0^2 + \beta 0^2 = 0$ (0,5TP)

(b) $V(\boldsymbol{x}) = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 > 0$ für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$
da für $\alpha, \beta > 0$, $\alpha x_1^2 > 0$ für $x_1 \neq 0$ und $\beta x_2^2 > 0$ für $x_2 \neq 0$ (0,5TP)

(c) $V(\boldsymbol{x}) \to \infty$, für $\|x\| \to \infty$
da für $\alpha, \beta > 0$, $\alpha x_1^2 \to \infty$ für $|x_1| \to \infty$ und $\beta x_2^2 \to \infty$ für $|x_2| \to \infty$ (0,5TP)

Bewertung: Siehe oben.

(3 Punkte)

2.2. Lösung: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\boldsymbol{x}(t)} &= \left.\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|_t \quad \text{(0,5TP)} \\
&= \begin{pmatrix} 2x_1(t) & 2x_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \epsilon\,(1 - x_1^2(t))\, x_2(t) - x_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{(1TP)} \\
&= 2x_1(t)x_2(t) + 2\epsilon x_2^2(t)\left(1 - x_1^2(t)\right) - 2x_1(t)x_2(t) \\
&= 2\epsilon x_2^2(t)\left(1 - x_1^2(t)\right) \quad \text{(1TP)}
\end{aligned}$$

Die Funktion $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\boldsymbol{x}(t)}$ ist auf dem in der Aufgabenstellung gegebenen Bereich D für $\epsilon > 0$ positiv semidefinit (1TP). Gemäß dem Theorem von Lyapunov ist daraus keine Aussage über Stabilität ableitbar (0,5TP). Insbesondere ist dies kein Beweis der Instabilität!

Bewertung: Siehe oben.

(4 Punkte)

2.3. Lösung: Die Taylorreihenentwicklung eines allgemeinen nichtlinearen autonomen Systems der Form $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ lautet

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \underbrace{f\left(\boldsymbol{x}^*\right)}_{\text{0,5 TP}} + \underbrace{\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}^*}}_{\text{0,5 TP}} \underbrace{\left(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*\right)}_{\text{0,5 TP}} + \underbrace{\overbrace{R_n(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}^*)}^{\text{vernachlässigt}}}_{\text{0,5 TP}}.$$

Die Linearisierung des Van-der-Pol-Oszillators ist

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \approx \underbrace{\begin{bmatrix} x_2^* \\ \epsilon\left(1 - x_1^{*2}\right) x_2^* - x_1^* \end{bmatrix}}_{\text{1 TP}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\epsilon x_1^* x_2^* - 1 & \epsilon\left(1 - x_1^{*2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) - x_1^* \\ x_2(t) - x_2^* \end{bmatrix}}_{\text{2 TP}}.$$

Bewertung: Siehe oben. **(5 Punkte)**

2.4. Lösung: Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ lösen die charakteristische Gleichung.

$$\det\left(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}\right) = 0$$

Dies führt zu einer quadratischen Gleichung

$$-\lambda(\epsilon - \lambda) + 1 = \lambda^2 - \epsilon\lambda + 1 = 0 \quad \text{(0,5TP)}$$

welche die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{\epsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} - 1} \quad \text{(0,5TP)}$$

hat.

(a) Das System ist instabil, falls der Realteil eines Eigenwertes > 0. Dies gilt offensichtlich für alle $\epsilon > 0$ (0,5TP).

(b) Für schwingfähiges Systemverhalten werden komplex-konjugierte Eigenwerte benötigt, in diesem Fall muss also der Ausdruck unter der Wurzel < 0 sein. Dies ist unter der Einschränkung $\epsilon > 0$ erfüllt für $0 < \epsilon < 2$ (1TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2,5 Punkte)**

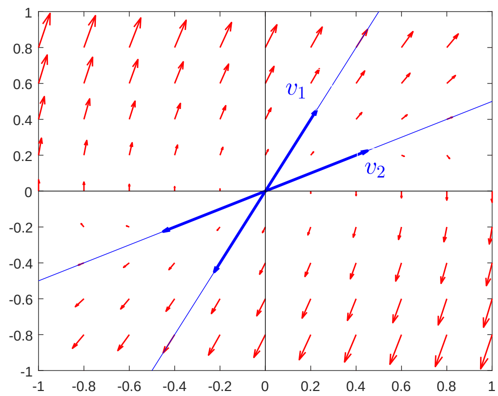
2.5. Lösung: Die Eigenwerte λ_i ergeben sich zu:

- $\lambda_1 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2 > 0$, (0,5TP)
- $\lambda_2 = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} > 0$ (0,5TP)

(*Es handelt sich also um ausschließlich positive reelle Eigenwerte.*)

Die dazugehörigen Eigenwerte $\boldsymbol{v_i}$ lösen die Gleichung: $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0}$. Folglich ergibt sich:

- Für $\lambda_1 = 2$:
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{v_1} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{(1TP)}$$
- Für $\lambda_2 = \frac{1}{2}$:
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{v_2} = \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{(1TP)}$$



Bewertung: Für das richtige Phasenporträt 2,5TP (davon je 0,5 für das korrekte Einzeichnen der Eigenvektoren). **(5,5 Punkte)**

3. Aufgabe: Parameterschätzung (20 Punkte)
* Lösung *

3.1. Lösung:
Parameter: $u_{0,max}$, ω, C, L, R_0, a, T_0, T_U, k, A und c
Eingänge: keine
Differentielle Variablen: u_C, i_L und T
Algebraische Variablen: i_R, i_C, u_R, u_L, R und u_0

Bewertung: Für jede Kategorie gibt es 1TP, für die Kategorie Parameter gibt es 2TP. In der Kategorie Parameter wird 1TP vergeben, wenn mind. 6 richtige Parameter angegeben werden. Sollten T_U, ω oder $u_{0,max}$ als Eingang verstanden werden, wird in diesem Fall der zweite TP nur dann vergeben, wenn die Kategorien Eingänge und Parameter beide richtig sind. Sollte t als diff. Variable genannt werden, wird kein Punkt abgezogen.
(5 Punkte)

3.2. Lösung: Das System ist nichtlinear (0,5 TP), da in der Gleichung für die Spannungsquelle eine Sinus-Funktion auftritt (0,5 TP), und zeitvariant (0,5 TP), da t explizit in der Gleichung für die Spannungsquelle vorkommt (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2 Punkte)**

3.3. Lösung: Wir definieren $\boldsymbol{S}^x = d\boldsymbol{x}/d\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{S}^y = d\boldsymbol{y}/d\boldsymbol{p}$ (0,5TP). Dann sind die Sensitivitätsgleichungen gegeben durch

$$\dot{\boldsymbol{S}}^x = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{S}^x + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{p}} \quad \text{(1TP)} \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{S}^y = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{S}^x + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{p}} \quad \text{(1TP)} \tag{1b}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\boldsymbol{S}^x(t=0) = \frac{d\boldsymbol{x}_0}{d\boldsymbol{p}} \quad \text{(0,5TP).} \tag{1c}$$

Bewertung: Siehe oben.
Falls ein zusätzlicher Term $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{d\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{p}}$ angegeben wurde ist das auch richtig. Hier fehlen sie, da in der Vorlesung grundsätzlich $\boldsymbol{u}$ unabhängig von $\boldsymbol{p}$ ist, also $\frac{d\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{p}} = 0$. **(3 Punkte)**

3.4. Lösung:

a)

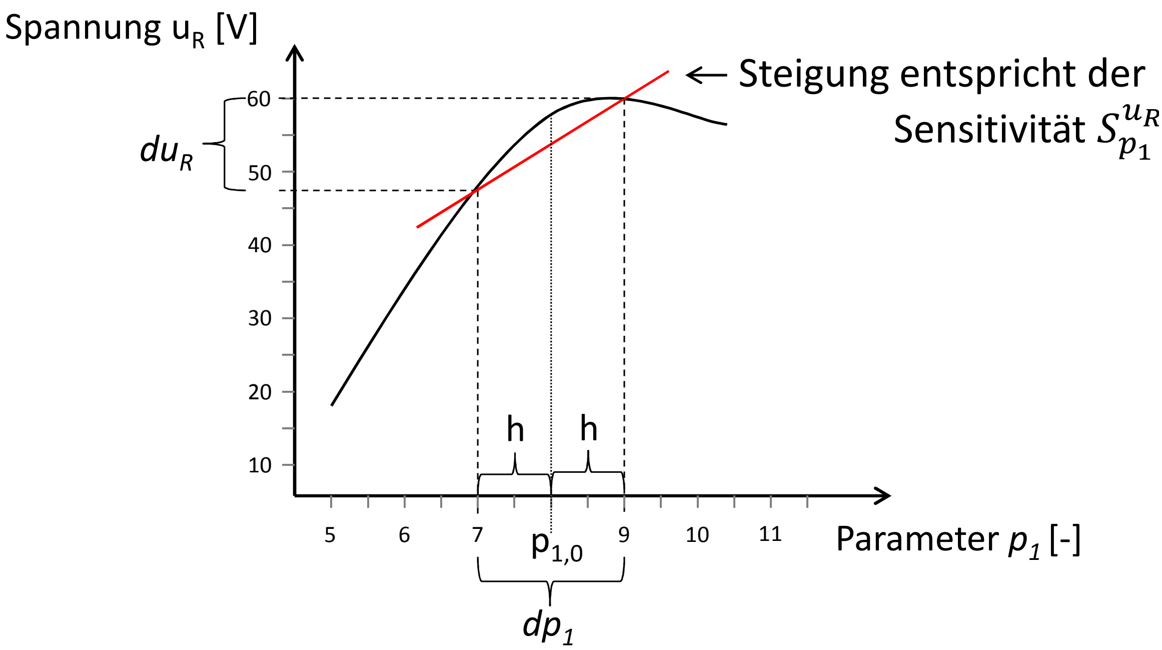


Abbildung 2: Diagramm

$$S_{p_1}^{u_R} = \left.\frac{du_R}{dp_1}\right|_{t=15, p_{1,0}=8} \tag{2}$$

$$\approx \frac{u_R(p_{1,0}+\Delta p, t=15) - u_R(p_{1,0}-\Delta p, t=15)}{2 \cdot \Delta p} \tag{3}$$

$$\approx \frac{60\text{V} - 47{,}5\text{V}}{2} = \frac{12{,}5\text{V}}{2} = 6{,}25\text{V} \tag{4}$$

Bewertung: 0,5TP für beide richtig markierte Punkte im Diagramm und 0,5TP für richtig eingezeichnete Approximation des Gradienten. Ablesetoleranz aus dem Diagramm: (45-50) und (55-60). 1TP für richtige Gleichung für die lokale Sensitivität. Wenn t vergessen wurde, gibt es keine Abzüge. Mindestens eine der Gleichungen (2) oder (3) müssen aufgeführt werden. 1TP für das richtige Ergebnis. Bei falschem Zahlenwert des Ergebnises trotz richtigem Einsetzen der Werte, gibt es 0,5TP. **(3 Punkte)**

b) Nachteile der Methode: Die Methode ist inexakt, weil Δp nicht gegen Null gehen kann aus numerischen Problemen.

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

3.5. Lösung:

Der Parameter p_3 weist die betragsmäßig größten Sensitivitäten bezüglich aller Ausgänge $\boldsymbol{y}$ des Systems auf. Der Parameter p_2 hat keinen Einfluss auf die Ausgänge $\boldsymbol{y}$ des Systems.

Bewertung: Beide Aspekte (betragsmäßig größte Sensitivität von Parameter p_3 und Unabhängigkeit der Ausgänge von Parameter p_2) sollten genannt werden. **(2 Punkte)**

3.6. Lösung: Die Gütefunktion für das allgemeine Parameterschätzproblem für einen skalaren Ausgang lautet

$$J(\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{N} (y(t_i, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}) - \tilde{y}_i)^2 \quad \text{(1TP)}$$

mit Ausgängen $\boldsymbol{y}$, Eingängen $\boldsymbol{u}$, Messzeiten t_i, Parametern $\boldsymbol{p}$, Anzahl Messungen N und Messwerten $\tilde{\boldsymbol{y}}_i$ (1TP).

Das Parameterschätzproblem lautet dann

$$\min_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p}) \quad \text{(1TP).}$$

Im vorliegenden Fall haben wir einen Ausgang $y = u_R$ und zwei Parameter C und L. Damit lautet das Parameterschätzproblem

$$\min_{C,L} \sum_{i=1}^{14} (u_R(t_i, C, L) - \tilde{u}_{R,i})^2 \quad \text{(1TP).}$$

Bewertung: Wenn Gütefunktion und Parameterschätzproblem in einer Gleichung zusammengefasst werden, werden alle TPs vergeben. Bei der Benennung mind. 3 richtiger Symbole werden (0,5 TP) vergeben. Für die Aufstellung des spezifischen Parameterschätzproblems wird 1TP gegeben. **(4 Punkte)**

4. Aufgabe: Strukturierte Systeme (21 Punkte)
* Lösung *

4.1. Lösung:

$$A_{Topf} = d_{Topf}^2/4 \cdot \pi \left(= \ 0,0314 \text{ m}^2\right)$$
$$\dot{Q}_{Luft} = \dot{q}_{Luft} \cdot A_{Topf} = \dot{q}_{Luft} \cdot d_{Topf}^2/4 \cdot \pi = -23,6 \text{ W } (2\ TP)$$
$$A_{Wand} = d_{Topf} \cdot \pi \cdot V_{fl}/A_{Topf} \left(= \ 0,08 \text{ m}^2\right)$$
$$\dot{Q}_{Wand} = \dot{q}_{Wand} \cdot A_{Wand} = \dot{q}_{Wand} \cdot 4 \cdot V_{fl}/d_{Topf} = -100 \text{ W } (2\ TP)$$

Bewertung: Siehe oben. Bei richtig berechneten Wandflächen gibt es jeweils 1 TP. Wenn nur Endergebnisse angegeben werden, dann gibt es trotzdem volle Punktzahl **(4 Punkte)**

4.2. Lösung: Die allgemeine Bilanzgleichung für eine zu bilanzierende Größe Ψ lautet:

$$\underbrace{\frac{d\Psi}{dt}}_{(0{,}5\,TP)} = \underbrace{\sum_{j \in \Lambda_J}^{n_s} J_j^{\Psi}}_{(0{,}5\,TP)} + \underbrace{\sum_{k \in \Lambda_\Gamma}^{n_q} \Gamma_k^{\Psi}}_{(0{,}5\,TP)}$$

Für die Anwendung sind die

- zu bilanzierenden Größe Ψ (0,5 TP)
- Flüsse J^{Ψ} und (0,5 TP)
- Quellen/Senken Γ^{Ψ} (0,5 TP)

festzulegen.

Bewertung: Siehe oben. **(3 Punkte)**

4.3. Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \dot{Q}_{Herd} + \dot{Q}_{Wand} + \dot{Q}_{Luft} \quad (2 \text{ TP})$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = V_{fl} \cdot \rho \cdot c \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \quad (1\text{ TP})$$

$$\text{Integration von } t_0 \text{ bis } t: \Delta H = V_{fl} \cdot \rho \cdot c \cdot (T - T_0) \quad (1\text{ TP})$$

$$\Delta t = \frac{\Delta H}{\dot{Q}_{Herd} + \dot{Q}_{Wand} + \dot{Q}_{Luft}} = 974,14\text{ s} = 16,24\text{ min} \quad (1\text{ TP})$$

Bewertung: Es reicht für volle Punktzahl, wenn die Studierenden direkt mit der Enthalpiebilanz (statt $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$) starten. **(5 Punkte)**

4.4. Lösung: Die Grenzfläche würde man mit einem Verknüpfungssystem darstellen (z.B. FlDampfVS). Hier können keine extensiven Größen gespeichert werden.

Bewertung: 0,5 TP für Stichwort Verknüpfungssystem, 0,5 TP für Begründung **(1 Punkt)**

4.5. Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}m_{gesamt,fl}}{\mathrm{d}t} = J^{m_{H_2O}}_{FlDampfVS \rightarrow fl}$$

Bewertung: 0,5 TP für jeweils linke und rechte Seite der Gleichung. Falls kein Verknüpfungssystem angenommen wurde: Folgefehler, wenn $J^{m_{H_2O}}_{dampf \rightarrow fl}$. Bei negativem Vorzeichen: nur 0,5 TP, da wir gemäß Konvention Ströme immer als positiv annehmen. **(1 Punkt)**

4.6. Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}U_{fl}}{\mathrm{d}t} = \dot{Q}_{verdampf} + \dot{Q}_{Herd} + \dot{Q}_{Wand} = 0 \quad (1\text{ TP})$$

$$\dot{Q}_{verdampf} = -\Delta h_{verdampf} \cdot \dot{m}_{H_2O} \quad (1\text{ TP})$$

$$\dot{m}_{H_2O} = \frac{\dot{Q}_{Herd} + \dot{Q}_{Wand}}{\Delta h_{verdampf}} = 0,62\text{ g/s} \quad (1\text{ TP})$$

Bewertung: Jeweils 1 TP für jeweils richtige Gleichung **(3 Punkte)**

4.7. Lösung:

```
connector connector_fluessig
flow MassFlow m_H2O;
Pressure p;
end connector_fluessig;
```

Bewertung: 1 TP für korrekte Konnektordeklaration (connector, end), jeweils 0,5 TP für zu übergebende Variablen. Wenn mehr sinnvolle Variablen übergeben werden, dann ist es auch richtig, solange der Massenstrom und Druck dabei sind. Bei Vergessen von Semikoli: 0,5 TP weniger. `Real` ist auch korrekt, aber **`flow`** muss verwendet werden. **(2 Punkte)**

4.8. Lösung:

```
model gesamtTopf
dampf Dampf1; //Konnektorname: KL1
fluessig Fluessig1; //Konnektorname: KW1
fluessig_dampf Fluessig_Dampf1; //Konnektornamen: KW1, KL1

equation

connect(Dampf1.KL1,Fluessig_Dampf1.KL1); (1 TP)
connect(Fluessig1.KW1,Fluessig_Dampf1.KW1); (1 TP)

end gesamtTopf;
```

Bewertung: Jeweils 1 TP für die vollständig richtige Codezeile. Wenn Speichersysteme direkt mit dem richtigen Befehl verbunden werden, dann 1 von 2 TP. **(2 Punkte)**

5. Aufgabe: Ereignisdiskrete und Hybride Systeme (19 Punkte) * Lösung *

5.1. Lösung:

Petrinetze (0,5 TP) und endliche Automaten (0,5 TP) sind für die Modellierung ereignisdiskreter Systeme geeignet. Mit Petrinetzen lassen sich komplexe, parallele Dynamiken einfacher darstellen (0,5 TP).

Bewertung: s.o.

(1,5 Punkte)

5.2. Lösung:

Die Anzahl der Token auf den Knoten lautet wie folgt: P_1: 0, P_2: 2, P_3:4, P_4:0

Bewertung: 0,5 TP pro richtigem Knoten.

(2 Punkte)

5.3. Lösung:

a) Ja. Für $w(P_4, t_3) \geq 6$ ist das Netz beschränkt.
b) Nein. Ein Petrinetz ist nur dann sicher, wenn es nicht möglich ist, dass sich mehr als ein Token auf einem Knoten befindet. Hier ist das nicht der Fall, da z.B. bei Schaltung von t_1 mehrere Token auf P_2 und P_3 liegen - unabhängig von $w(P_4, t_3)$.
c) Ja. Das Netzwerk ist für $w(P_4, t_3) \leq 6$ lebendig.
d) Ja. eine Verklemmung ist bei $w(P_4, t_3) > 6$ bzw. $w(P_4, t_3) \geq 7$ möglich.

Bewertung: Der Punkt wird gegeben, wenn die Begründung verständlich bzw. der Wertebereich korrekt ist.

(4 Punkte)

5.4. Lösung: Das Shannon-Theorem besagt, dass ein zeitkontinuierliches Signal mit einer Maximal-Frequenz f_{max} mit einer Frequenz $f_s > 2 \cdot f_{max}$ abgetastet werden muss, um eine näherungsweise Rekonstrukton zu ermöglichen (1 TP). Es gilt:

Signalfrequenz:
$f_{signal} = f_{max} = \frac{1}{T_{signal}} = \frac{1}{2s}$.

Abtastfrequenz:
$f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{3s}$.

Das Theorem ist in diesem Fall nicht erfüllt, denn
$f_s = \frac{1}{3s} < 2 \cdot \frac{1}{2s}$ (1 TP)

Ein Abtastintervall von 3 Sekunden reicht also nicht aus. (0,5 TP)

Bewertung: Falls das Shannon Theorem falsch benannt wurde, dann aber richtig weitergerechnet wurde, werden Folgefehler vergeben.

(2,5 Punkte)

5.5. Lösung:

a)

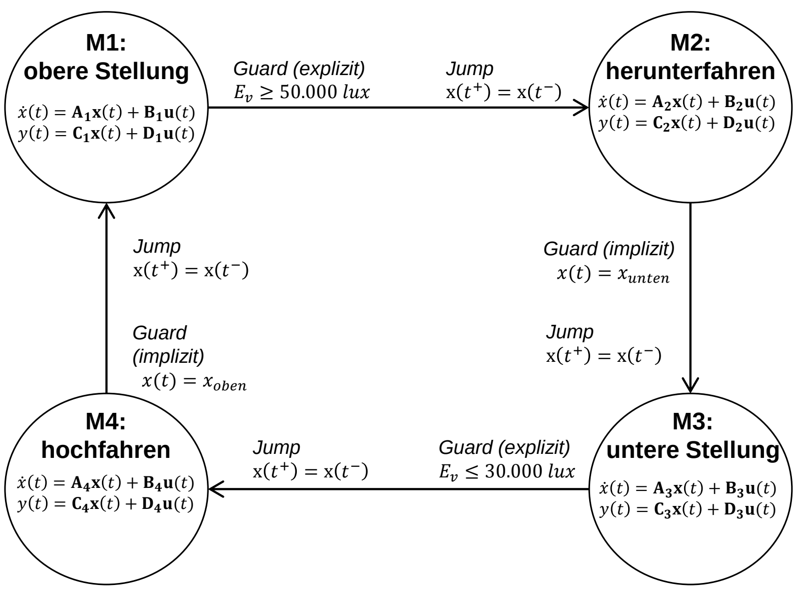


Abbildung 3: Modellierung des Jalousiesystems als hybrider Automat

Bewertung: Jeder korrekte Guard gibt 1 TP (insgesamt 4 TP). Wenn alle Jumps korrekt sind, gibt es 1 TP. Wenn alle Kanten korrekt eingezeichnet sind, gibt es 1 TP. Wenn alle Modellgleichungen korrekt sind, gibt es 1 TP. Wenn alle Moden korrekt mit sinnvollen Namen eingezeichnet sind, gibt es 1 TP.

(8 Punkte)

b) siehe Zeichnung

Bewertung: 0,5 TP für richtige Kennzeichnung der beiden expliziten Transitionsbedingungen. 0,5 TP für richtige Kennzeichnung der beiden impliziten Transitionsbedingungen

(1 Punkt)

Schriftliche Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Wintersemester 2018/19

---

1. Aufgabe: Finite Differenzen (13 Punkte)

Die folgende Differentialgleichung beschreibt die Temperaturverteilung in einem Stab abhängig von Position x und Zeit t:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Diese Gleichung soll mit einem Finite-Differenzen-Verfahren mit konstantem Zeitschritt Δt auf einem strukturierten, äquidistanten Gitter mit Gitterschrittweite Δx gelöst werden.

1.1. Gegeben sei die Taylorreihe von $T(x)$ entwickelt um x_i, ausgewertet an x_{i-1}:

$$T_{i-1} \approx T_i - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=x_i} \Delta x + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \left.\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right|_{x=x_i} \Delta x^3 + \ldots. \tag{2}$$

Stellen Sie eine Taylorreihe für $T(x)$ an einem zweiten Auswertepunkt auf, welche Ihnen die Herleitung eines rückwärts Differenzenausdrucks für $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ mit drei Stützstellen ermöglicht. Berücksichtigen Sie die ersten 4 Glieder.

(2.5 Punkte)

1.2. Leiten Sie nun den rückwärts Differenzenausdruck für $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ her. Bestimmen Sie den Abbruchfehler und die Genauigkeitsordnung. **(4 Punkte)**

1.3. Die Gleichung (1) soll mit einem Finite-Differenzen-Verfahren diskretisiert werden. Dazu wird das Rechengebiet durch ein äquidistantes Gitter mit 4 Knoten und Gitterschrittweite Δx approximiert. Die Nummerierung der Knoten ist aufsteigend $1-4$. Für Knoten 1 und 4 werden Dirichletrandbedingungen angenommen. $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ wird nun mittels eines zentralen Differenzenausdrucks diskretisiert:

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}. \tag{3}$$

Zur Zeitdiskretisierung soll ein implizites Rückwärts-Differenzen Verfahren mit 3 Stützstellen, das BDF2 Verfahren, verwendent werden. Die Zeitableitung für t_{n+1} wird beschrieben durch:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=t_{n+1}} = \frac{3T^{n+1} - 4T^n + T^{n-1}}{2\Delta t}. \tag{4}$$

Stellen Sie die sich ergebenden Gleichungen für alle unbekannten Gitterpunkte zur Berechnung der Temperatur am Zeitpunkt t_{n+1} auf.

Hinweis: Es ist nicht nötig nach den Unbekannten aufzulösen.

(4 Punkte)

1.4. Überführen Sie die Gleichungen in Matrixform. **(2.5 Punkte)**

2. Aufgabe: Finite Elemente (13 Punkte)

2.1. Gegeben ist die eindimensionale Diffusionsgleichung mit der Unbekannten $\Theta(x,t)$:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0, \quad \forall\, x \in [0,L]\ \forall t \in [0,t_{end}], \tag{5}$$

mit vorgegebenen Dirichlet Randbedingungen auf dem gesamten Rand,

$$\Theta(0,t) = \Theta_D, \qquad \Theta(L,t) = \Theta_D. \tag{6}$$

Der Diffusionskoeffizient κ ist dabei konstant. Bestimmen Sie die schwache Form der Gleichung (5). Reduzieren Sie den maximalen Grad der Ableitung mittels partieller Integration. **(3 Punkte)**

2.2. Im Weiteren soll das Referenzelement aus Abbildung 1 betrachtet werden. Definieren Sie zunächt die linearen Interpolationsfunktionen ϕ_1^e und ϕ_2^e auf dem Gebiet des Referenzelements. Die Funktionen ϕ^e sind dabei Funktionen der Refrenzkoordinate ξ. **(2 Punkte)**

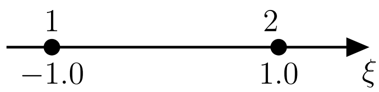


Abbildung 1: 1D Referenzelement.

2.3. Im Folgenden ist das in Abbildung 2 gezeigte globale Element gegeben. Stellen Sie für dieses Element einen Zusammenhang zwischen der globalen Koordinate x und der Referenzkoordinate ξ auf, sodass Sie einen Ausdruck $x(\xi)$ erhalten. Nutzen Sie dazu die in Aufgabe 2.2 definierten Interpolationsfunktionen. **(2 Punkte)**

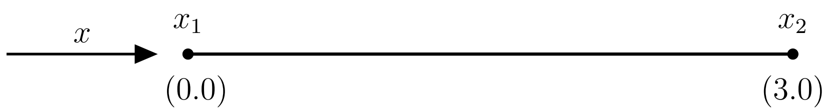


Abbildung 2: Element im globalen Raum.

2.4. An den Elementknoten des in Abbildung 2 gezeigten Elementes sind die Werte $\Theta_1 = 40$ und $\Theta_2 = 80$ gegeben. Interpolieren Sie aus diesen Werten $\Theta(x)$ an der Stelle $x = 2.25$. Nutzen Sie dazu die von Ihnen in Aufgabe 2.2 definierten Interpolationsfunktionen. **(3 Punkte)**

Hinweis: Der Zusammenhang zwischen der Koordinaten des Referenzelements und der des in Abbildung 2 gezeigten Elements des globalen Raums wird durch die folgenden Beziehungen beschrieben:

$$\xi = \frac{2x}{3} - 1\,.$$

2.5. Stellen Sie im Folgenden die Ableitung $\frac{\partial \Theta}{\partial x}$ auf. Verwenden Sie dazu die Approximation von Θ mittels der Interpolationsfunktionen. Bei Bildung der Ableitung kann $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ als bekannt angenommen werden. Es ist nicht erforderlich, dass Sie die einzelnen ϕ_i aus Aufgabe 2.2 einsetzen. **(3 Punkte)**

3. Aufgabe: Finite Volumen (12 Punkte)

Betrachten Sie im Folgenden die gegebene zweidimensionale partielle Differentialgleichung für $\phi(x, y)$ ($\lambda = const$, $\mathbf{a} = const$):

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi - \lambda \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi = 0 \qquad \forall(x, y) \in \Omega. \tag{7}$$

3.1. Bestimmen Sie die integrale Form der Gleichung im allgemeinen Gebiet Ω und vereinfachen Sie analytisch so weit wie möglich. Nutzen Sie den Satz von Gauss:

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{g} \, \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s. \tag{8}$$

Beachten Sie, dass für eine skalarwertige Funktion f und einen konstanten Vektor $\mathbf{g}$ ebenfalls gilt:

$$\int_V \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\nabla} f \, \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \mathbf{g} \cdot f\mathbf{n} \, \mathrm{d}s. \tag{9}$$

(2 Punkte)

Gegeben sei nun folgender Ausschnitt eines zweidimensionalen Gitters aus gleichseitigen Sechsecken.

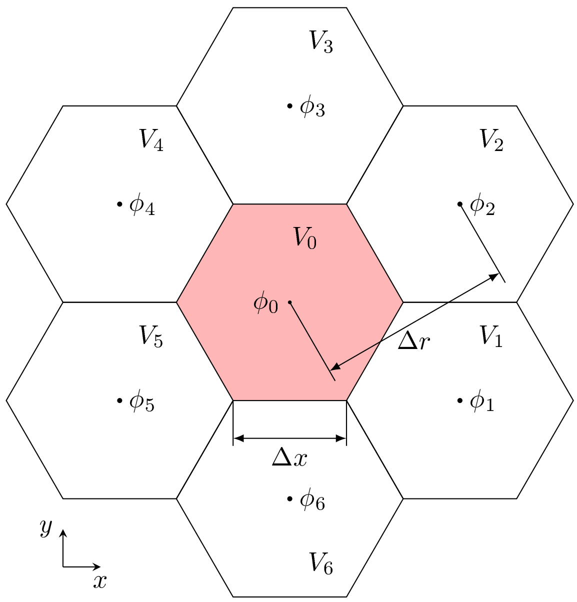


Abbildung 3: 2D Gitter.

In den folgenden Aufgabenteilen soll die Gleichung nun vollständig für das interne Volumen V_0 diskretisiert werden.

3.2. Bestimmen Sie dazu zunächst die Abstände benachbarter Zellzentren Δr als Funktion von Δx.

Überführen Sie nun alle Randterme für das Element V_0 nach der Ihnen bekannten Vorgehensweise in Summenform und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

Beachten Sie dazu, dass die Flüsse entlang jeder einzelnen Randlinie konstant sind. Nehmen Sie zur Vereinfachung die Randnormalen $\mathbf{n}_k$ als gegeben an.

Diskretisieren Sie anschließend die Flussterme unter Verwendung möglichst einfacher, zentraler Approximationen.

Hinweis: Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit Kantenlänge a beträgt $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

(8 Punkte)

3.3. Benennen Sie die Art der Finite-Volumen-Diskretisierung, bei der die Gitterzellen auf den Volumenrändern liegen. Benennen Sie die Ihnen bekannte Art von Randbedingung, die bei diesem Gittertyp direkt vorgegeben werden kann und begründen Sie weshalb. **(2 Punkte)**

4. Aufgabe: Fehler (12 Punkte)

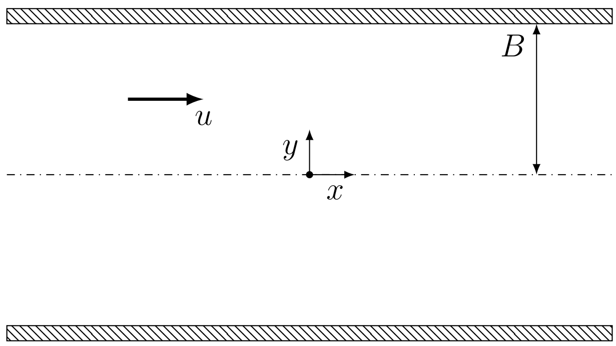


Abbildung 4: Kanalströmung.

Die Bewegungsgleichung eines newtonschen Fluides für die Geschwindigkeit $u(y)$ und Druck $p(x)$ in einer ausgebildeten Kanalströmung ist gegeben durch:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega. \tag{10}$$

Die Bewegungsgleichung enthält die dynamische Viskosität η, die Koordinate des Kanals in Breitenrichtung y und die Koordinate in Längenrichtung x.

Gegeben sei außerdem das Finite-Differenzen-Verfahren:

$$\frac{1}{\Delta y^2}u_{i+1,j} - \frac{2}{\Delta y^2}u_{i,j} + \frac{1}{\Delta y^2}u_{i-1,j} - \frac{1}{\eta \Delta x}(p_{i,j+1} - p_{i,j}) = 0, \tag{11}$$

und die Taylorreihen

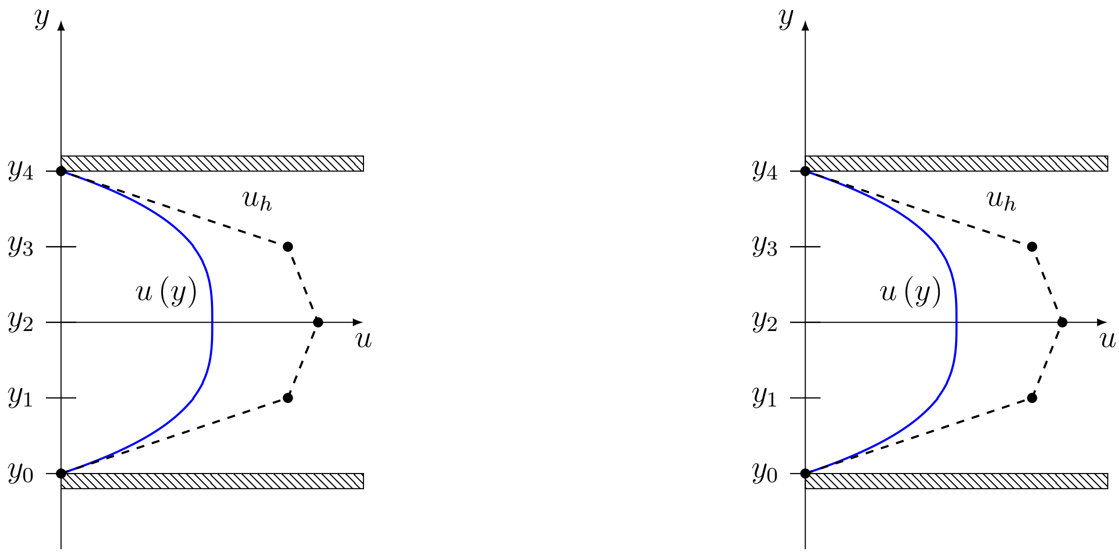
$$u_{i\pm1} = u_i \pm \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=y_i} \Delta y + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=y_i} \frac{\Delta y^2}{2} \pm \left.\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right|_{y=y_i} \frac{\Delta y^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta y^4), \tag{12}$$

$$p_{j+1} = p_j + \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=x_j} \Delta x + \left.\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|_{x=x_j} \frac{\Delta x^2}{2} + \left.\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\right|_{x=x_j} \frac{\Delta x^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta x^4). \tag{13}$$

4.1. Zeigen oder widerlegen Sie die Konsistenz des Verfahrens in Gleichung (11) in Bezug auf die Bewegungsgleichung (10).

Welche Genauigkeitsordnung hat das Lösungsverfahren? **(8 Punkte)**

4.2. In den Abbildungen 5(a) und 5(b) ist die physikalische Lösung $u\,(y)$ und die



(a) Interpolationsfehler (b) Diskretisierungsfehler

Abbildung 5: Geschwindigkeitsprofile der Kanalströmung.

Finite-Elemente Lösung u_h einer Kanalströmung dargestellt. Skizzieren Sie in der jeweiligen Abbildung den Interpolationsfehler und den Diskretisierungsfehler:

Hinweis: Die Lösung darf direkt in den Abbildungen auf dem Aufgabenblatt skizziert werden! **(2 Punkte)**

4.3. Die Stabilität numerischer Verfahren zur Strömungsberechnung kann mit Hilfe der Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung geprüft werden, welche für eindimensionale Konfigurationen und das explizite Euler-Verfahren als

$$\frac{u\Delta t}{\Delta x} \overset{!}{<} 1 \tag{14}$$

gegeben ist.

In einer Untersuchung sind Geschwindigkeiten zwischen $u = 0,001\frac{m}{s}$ und $u = 0,1\frac{m}{s}$ zu erwarten. Mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens soll eine Lösung auf einem Gitter mit variabler Gitterschrittweite zwischen $\Delta x = 0,005\,m$ und $\Delta x = 0,01\,m$ berechnet werden. Wie muss der Zeitschritt gewählt werden, damit das Verfahren stabil ist?

(2 Punkte)

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Wintersemester 2018/19

1. Aufgabe: Finite Differenzen (13 Punkte)

* Lösung *

1.1. Lösung:

$$T_{i-2} \approx T_i - 2\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=x_i}\Delta x + 2\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x=x_i}\Delta x^2 - \frac{4}{3}\left.\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right|_{x=x_i}\Delta x^3 + \ldots \quad 2.5 \qquad (1)$$

$\frac{2.5}{2.5}$

1.2. Lösung: Taylorreihe aus 1.1 - 2 mal gegebende Taylorreihe:

$$T_{i-2} - 2T_{i-1} = -T_i + \left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x=x_i}\Delta x^2 - \left.\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right|_{x=x_i}\Delta x^3 \quad 2 \qquad (2)$$

Umformen nach der gesuchten Ableitung:

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} = \frac{T_i - 2T_{i-1} + T_{i-2}}{\Delta x^2} + \underbrace{\left.\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right|_{x=x_i}\Delta x}_{Abbruchfehler \quad 0.5} \quad 1 \qquad (3)$$

Der Ausdruck ist 1. Ordnung genau. 0.5

$\frac{4}{4}$

1.3. Lösung:

Gleichung für T_2^{n+1}:

$$\frac{3T_2^{n+1} - 4T_2^n + T_2^{n-1}}{2\Delta t} = \lambda \frac{T_3^{n+1} - 2T_2^{n+1} + T_1^{n+1}}{\Delta x^2} \quad 2 \tag{4}$$

Gleichung für T_3^{n+1}:

$$\frac{3T_3^{n+1} - 4T_3^n + T_3^{n-1}}{2\Delta t} = \lambda \frac{T_4^{n+1} - 2T_3^{n+1} + T_2^{n+1}}{\Delta x^2} \quad 2 \tag{5}$$

$\frac{4}{4}$

1.4. Lösung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2\Delta t} + \frac{2\lambda}{\Delta x^2} & -\frac{\lambda}{\Delta x^2} \\ -\frac{\lambda}{\Delta x^2} & \frac{3}{2\Delta t} + \frac{2\lambda}{\Delta x^2} \end{pmatrix}}_{1} \underbrace{\begin{pmatrix} T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \end{pmatrix}}_{0.5} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\Delta x^2} T_1^{n+1} + \frac{2}{\Delta t} T_2^n - \frac{1}{2\Delta t} T_2^{n-1} \\ \frac{\lambda}{\Delta x^2} T_4^{n+1} + \frac{2}{\Delta t} T_3^n - \frac{1}{2\Delta t} T_3^{n-1} \end{pmatrix}}_{1} \tag{6}$$

$\frac{2.5}{2.5}$

$$\sum_{A1} = \frac{13}{13}$$

2. Aufgabe: Finite Elemente (13 Punkte)

* Lösung *

2.1. Lösung:

$$\int_0^L \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}\right) w \mathrm{d}x \;\; 0.5 \quad = 0 \;\overbrace{\forall w,}^{0.5} \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^L \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right) \, w \mathrm{d}x - \kappa \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}\right) w \mathrm{d}x \quad = \; 0 \;\forall w. \tag{8}$$

Anwenden des Satz von Gauss (Partielle Integration auf den Term der räumlichen Ableitung).

$$\Leftrightarrow \int_0^L \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right) \, w \mathrm{d}x + \kappa \int_0^L \frac{\partial \Theta}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} \mathrm{d}x - \kappa \left[\frac{\partial \Theta}{\partial x} w\right]_0^L \quad = 0. \;\; 1.0 \tag{9}$$

Berücksichtigung der Dirichlet Randbedingungen ($w(x) = 0 \; \forall x$ at $0, L$) 0.5 :

$$\int_0^L \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right) \, w \mathrm{d}x + \kappa \int_0^L \frac{\partial \Theta}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} \mathrm{d}x = 0. \;\; 0.5$$

$\frac{3}{3}$

2.2. Lösung:

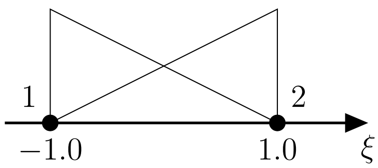


Abbildung 1: 1D Referenzelement.

$\phi_1 = 0,5(1-\xi),$ 1.0

$\phi_2 = 0,5(1+\xi).$ 1.0

$\frac{2}{2}$

2.3. Lösung: Darstellung der Ortskoordinaten x mittels des isoparametrischen Prinzips.

$$x = \sum_{i=1}^{2} \phi_i(\xi)x_i = 0,5(1-\xi)x_1 + 0,5(1+\xi)x_2 \; 1.0 \tag{10}$$

$$= 0,5(1-\xi)0,0 + 0,5(1+\xi)\,3,0 \tag{11}$$

$$= 1,5(1+\xi). \; 1.0 \tag{12}$$

$\frac{2}{2}$

2.4. Lösung: Die parametrische Koordinate zum Punkt $x = 2,25$ berechnet sich zu $\xi = 0,5$. 1.0 Die Funktion $\Theta(x)$ lässt sich damit durch die für das Referenzelement definierten Interpolationsfunktionen berechnen:

$$\Theta(x) \approx \hat{\Theta}(\xi) = \sum_{i=1}^{2} \phi_i(\xi)\Theta_i = \phi_1(\xi)\Theta_1 + \phi_2(\xi)\Theta_2$$

Auswertung der Basisfunktionen ϕ_i bei ξ=(0,5).

$$\phi_1(0.5) = \frac{(1-0.5)}{2} = 0,25, \; 0.5$$
$$\phi_2(0.5) = \frac{(1+0.5)}{2} = 0,75. \; 0.5$$

Einsetzen der Basisfunktionen in die Interpolationsgleichung:

$$\hat{\Theta} = 0,25 \cdot 40 + 0,75 \cdot 80 \; = 70,0. \; 1.0$$

$\frac{3}{3}$

2.5. Lösung: Approximation von Θ mittels Interpolationsfunktionen:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \sum_{i=1}^{2} \Theta_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}. \; 1.5 \tag{13}$$

Ableiten der Funktionen ϕ_i mit Berücksichtigung der Kettenregel:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \sum_{i=1}^{2} \Theta_i \frac{\partial \phi_i^e}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \; 1.5 \tag{14}$$

$\frac{3}{3}$

$$\sum_{A2} = \frac{13}{13}$$

3. Aufgabe: Finite Volumen (12 Punkte)

* Lösung *

3.1. Lösung:

Integrale Form und Umformen mit Satz von Gauss:

$$\int_\Omega \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi\,\mathrm{d}\Omega - \lambda\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi)\,\mathrm{d}\Omega = 0, \quad 1 \tag{15}$$

$$\iff \oint_{\partial\Omega} \mathbf{a}\phi\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s - \lambda\oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = 0. \quad 1 \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

$\frac{2}{2}$

3.2. Lösung:

Mit dem gegeben Hinweis zu gleichseitigen Dreiecken folgt:

$$\Delta r = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta x. \quad 1 \tag{18}$$

Vereinfachung der Randintegrale jeweils durch Summation über stückweise lineare Kanten (∂V). Unter Benutzung von Mittelung können die gesuchten Größen des ersten Integrals auf dem Rand bestimmt werden:

$$\oint_{\partial V_0} \mathbf{a}\phi\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \sum_{j=1}^{6} \mathbf{a}\phi_{0,j}\cdot\mathbf{n}_j\Delta s \quad 1 \tag{19}$$

$$\approx \sum_{j=1}^{6} \mathbf{a}\frac{1}{2}(\phi_0+\phi_j)\cdot\mathbf{n}_j\Delta s \quad 2 \tag{20}$$

$$= \sum_{j=1}^{6} \mathbf{a}\frac{1}{2}(\phi_0+\phi_j)\cdot\mathbf{n}_j\Delta x. \tag{21}$$

Verwendung der Richtungsableitung sowie zentraler Differenzen liefert entsprechend für den zweiten Term:

$$\lambda\oint_{\partial V_0} \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \lambda\sum_{j=1}^{6}\int_{(\partial V_0)_j} \boldsymbol{\nabla}\phi_{0,j}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s_j \quad 1 \tag{22}$$

$$= \lambda\sum_{j=1}^{6}\left.(\boldsymbol{\nabla}\phi_{0,j}\cdot\mathbf{n})\right|_j \Delta s \quad 1 \tag{23}$$

$$\approx \lambda \sum_{j=1}^{6} \frac{\phi_j - \phi_0}{\Delta r_{0,j}} \Delta s \quad 2 \tag{24}$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{6} \frac{\phi_j - \phi_0}{\sqrt{3}\Delta x} \Delta x. \tag{25}$$

$\frac{8}{8}$

3.3. Lösung:

Es handelt sich um die zellzentrierte Finite-Volumen-Diskretisierung. 1

Bei Verwendung eines zellzentrierten Ansatz lassen sich Neumann-Randbedingungen direkt am Rand vorgeben. 0.5

Der Grund ist, dass der Flusswert direkt in der Summenform einen Summanden ersetzt. 0.5

$\frac{2}{2}$

$$\sum_{A3} = \frac{12}{12}$$

4. Aufgabe: Fehler (12 Punkte)

* Lösung *

4.1. Lösung: Damit das gegebene Verfahren die partielle Differentialgleichung 10 konsistent diskretisiert, muss die folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} ||L - L_\Delta|| = 0. \; 0.5 \tag{26}$$

Das Einsetzen der Taylorreihen in (11) ergibt:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta y^2}(u_{i,j} + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\Delta y^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\frac{\Delta y^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta y^4)) \; 0.5 \\ &-\frac{2}{\Delta y^2}u_{i,j} \\ &+\frac{1}{\Delta y^2}(u_{i,j} - \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\Delta y^2}{2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\frac{\Delta y^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta y^4)) \; 0.5 \\ &-\frac{1}{\eta \Delta x}(p_{i,j} + \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\frac{\Delta x^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta x^4) - p_{i,j}) = 0 \; 0.5 \end{aligned} \tag{27}$$

Eine Vereinfachung der Terme ergibt:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathcal{O}(\Delta y^2) \\ &-\frac{1}{\eta}(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\frac{\Delta x^2}{6} + \mathcal{O}(\Delta x^3)) = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

und damit

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathcal{O}(\Delta y^2) \; 1 \\ &-\frac{1}{\eta}(\frac{\partial p}{\partial x}) - \mathcal{O}(\Delta x) \; 1 = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

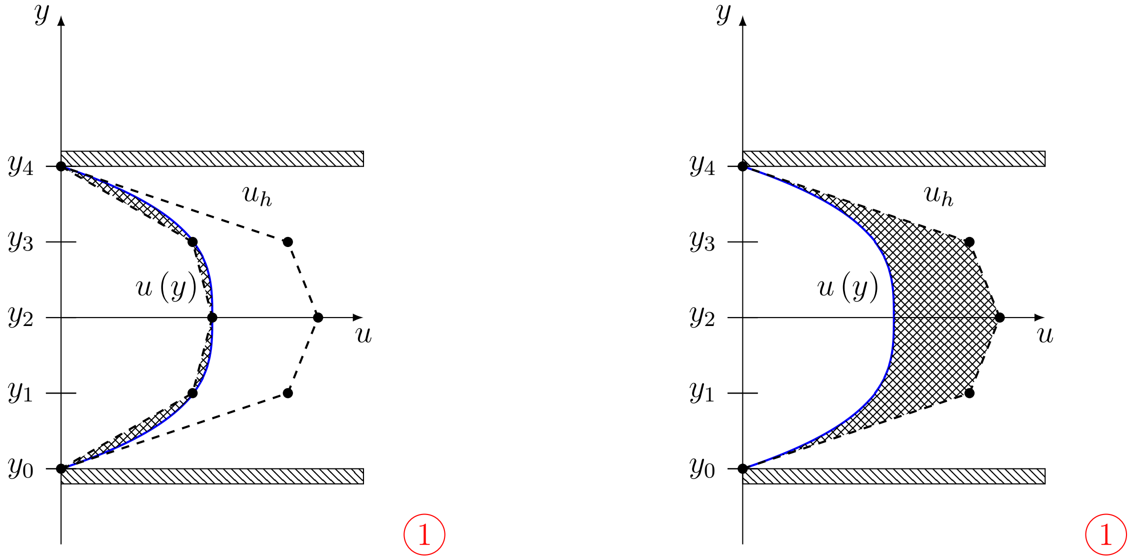
Das Einsetzen von (29) als L_Δ und (10) in Gleichung (26) ergibt

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} ||L - L_\Delta|| = \\ &\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \left|\left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x} - (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathcal{O}(\Delta y^2) - \frac{1}{\eta}(\frac{\partial p}{\partial x}) - \mathcal{O}(\Delta x)) \right|\right| = \; 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0} \underbrace{\left|\left|-\mathcal{O}(\Delta y^2)+\mathcal{O}(\Delta x)\right|\right|}_{1} = 0\;0.5, \tag{30}$$

Daraus folgt, dass das Verfahren konsistent ist. 0.5 Aus (30) folgt dann unmittelbar die Genauigkeitsordnung. Das Verfahren ist 1. Ordnung in x- und 2. Ordnung in y-Richtung 1 . $\frac{8}{8}$

4.2. Lösung:



(a) Interpolationsfehler (b) Diskretisierungsfehler

Abbildung 2: Strömungsprofil in der Kanalströmung.

$\frac{2}{2}$

4.3. Lösung:

Die Stabilitätsbedingung muss für alle Elemente für alle Geschwindigkeiten erfüllt sein, d.h.

$$max\left(\frac{u\Delta t}{\Delta x}\right) = \frac{0.1\frac{m}{s}\Delta t}{0.005m} < 1.\;1 \tag{31}$$

Daraus ergibt sich der Zeitschritt wie folgt:

$$\Delta t < \frac{0.005m}{0.1\frac{m}{s}} = 0.05s.\;1 \tag{32}$$

$\frac{2}{2}$

$$\sum_{A4} = \frac{12}{12}$$