RWTH Aachen · AVT **Systemverfahrenstechnik** · 52056 Aachen · **Prof. Alexander Mitsos, Ph.D.**

Schriftliche Prüfung: Aufgaben des AVT-Teils. Jeder Punkt entspricht 1 Minute.

Simulationstechnik

Wintersemester 2024/2025

1. Aufgabe: Fragen (20 Punkte)

1.1. Simulation

a) Nennen Sie jeweils eine beispielhafte Anwendung für OFF-Line und ON-Line Simulationsaufgaben.

b) Ordnen Sie die folgenden Softwaretoolkategorien für dynamische Modelle in absteigender Flexibilität.

   (i) Spezielle Simulatoren
   (ii) Gleichungsorientierte Simulatoren (z.B. gPROMS, Dymola)
   (iii) Phänomenologische Modellierung und meta-modeling (z.B. MODEL.LA, VEDA)
   (iv) Programmiersprache mit numerischen Bibliotheken (z.B. C++, Matlab)

c) Wieso ist die Einführung einer Vorzeichenkonvention sinnvoll? Welche Vorzeichenkonvention wird in der Vorlesung für die (über die Grenzen des Bilanzraums auftretende) Flüsse angewandt?

(4 Punkte)

1.2. In der Vorlesung wurden verschieden Arten von Freiheitsgraden eines dynamischen Systems behandelt.

a) Welche drei Freiheitsgrade gibt es in einem dynamischen System? Nehmen Sie an, dass Naturkonstanten <u>**nicht**</u> zu den Freiheitsgraden zählen.

b) Ordnen Sie die in a) genannten Freiheitsgrade gemäß der Vorlesung in zwei Klassen. Benennen Sie die zwei Klassen gemäß der Vorlesung.

Hinweis: Für das nennen expliziter Beispiele, wie z.B. „Masse des Pendels“, werden keine Punkte vergeben. **(2,5 Punkte)**

1.3. Zustandsraum

a) Nennen Sie die Definition des Zustandsraums.

b) Nennen Sie zwei Vorteile der Darstellung eines Systems in der Zustandsraumdarstellung.

c) Überführen Sie das folgende System in die Zustandsraumdarstellung in Matrixschreibweise.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\sin\left(\exp(t)\right) x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + \ln(t)u(t) \\ y(t) &= x_1(t) + \exp\left(-42t\right) x_2(t)\end{aligned} \tag{1}$$

d) Benennen Sie **<u>alle</u>** in Ihrer Lösung von c) vorkommenden Symbole (z.B. t ist die Zeit) und Matrizen gemäß der Vorlesung. Die Zeit t und die mathematischen Funktionen ($\sin$, $\exp$, $\ln$,...) brauchen Sie nicht zu benennen.

e) Klassifizieren Sie das System aus c) entsprechend der Vorlesung.

(8 Punkte)

1.4. Ist die Funktion $f(x,t) = 2x^2t$ linear in x? Begründen Sie kurz. **(1,5 Punkte)**

1.5. In welchem Fall können bei einem differentiell-algebraischen System nicht alle Anfangsbedingungen der differentiellen Größen frei gewählt werden? Begründen Sie kurz warum dies so ist. **(1 Punkt)**

1.6. Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine extensive und eine intensive Schnittgröße an. **(1 Punkt)**

1.7. Diskret-kontinuierliche Systeme

a) Welche zwei Lösungsansätze können Sie bei der Implementierung von diskret-kontinuierlichen Systemen laut Vorlesung verfolgen?

b) Wie unterscheiden sich explizite und implizite Ereignisse?

(2 Punkte)

2. Aufgabe: Systemtheorie (20 Punkte)

Gegeben sei das nichtlineare, gewöhnliche Differentialgleichungssystem (2) mit $a, b, c > 0$ und $d \geq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_3(t) - ax_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= b - cx_2(t) + dx_1(t) - x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t)x_2(t) - x_3(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Das System (2) besitzt die folgenden zwei Ruhelagen $\boldsymbol{x}_{\mathrm{R},1} = \begin{pmatrix} \frac{b-ca}{a-d} & a & a\frac{b-ca}{a-d} \end{pmatrix}^T$ und $\boldsymbol{x}_{\mathrm{R},2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{c} & 0 \end{pmatrix}^T$.

2.1. Im folgenden soll das System (2) linearisiert werden.

a) Geben Sie die **allgemeine Formel der Taylorentwicklung** um den allgemeinen Punkt $\boldsymbol{x}_*$ für das System (2) an.

b) **Linearisieren** Sie das System (2) um den allgemeinen Punkt $\boldsymbol{x}_*$ und geben Sie alle auftretenden Terme explizit an!

(5,5 Punkte)

2.2. Nehmen Sie an, dass das um die Ruhelage $\boldsymbol{x}_{\mathrm{R},2}$ linearisierte System lautet

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)\,, \qquad \text{mit } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 1 \\ d - \frac{b}{c} & -c & 0 \\ \frac{b}{c} & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte des Systems (3).

b) Sei $0 < a - \frac{b}{c} < \left(\frac{1+a}{2}\right)^2$. Was lässt sich anhand der Eigenwerte der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ bezüglich der Stabilität und Schwingungsfähigkeit des linearen Systems (3) um die Ruhelage $\boldsymbol{x}_{\mathrm{R},2}$ aussagen? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Aussagen.

c) Können Sie Ihre Ergebnisse aus b) hinsichtlich der Stabilität des linearisierten Systems (3) auf das nichtlineare System (2) übertragen? Begründen Sie.

Hinweis: Die Determinante einer 3×3*-Matrix* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ *berechnet sich wie folgt:*

$$\det(\boldsymbol{A}) = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g - a \cdot f \cdot h - b \cdot d \cdot i.$$

(5 Punkte)

2.3. Betrachten Sie für die folgende Aufgabe das System

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)\,, \quad \text{mit } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{mit den Eigenwerten } \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i. \qquad (4)$$

Zeichnen Sie qualitativ das Phasenportrait für System (4) und benennen Sie es gemäß der Vorlesung.

Hinweis: Die Berechnung von Eigenvektoren ist nicht nötig. Eine explizite Nebenrechnung zur Bestimmung der Drehrichtung ist nicht nötig (zeichnen Sie in diesem Fall eine beliebige Drehrichtung ein). **(1,5 Punkte)**

2.4. Zeigen Sie mithilfe der analytischen Lösung für das allgemeine autonome System $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$, mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t_0 = 0$ und $\boldsymbol{x}(t=0) = \boldsymbol{x}_0$, dass das System asymptotisch stabil um die Ruhelage $\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{0}$ ist, wenn alle Eigenwerte λ_i von $\boldsymbol{A}$ kleiner null sind. Vereinfachen Sie hierzu die analytische Lösung mittels der Hinweise und ziehen Sie anschließend Rückschlüsse für $\boldsymbol{x}(t \to \infty)$.

Hinweis:

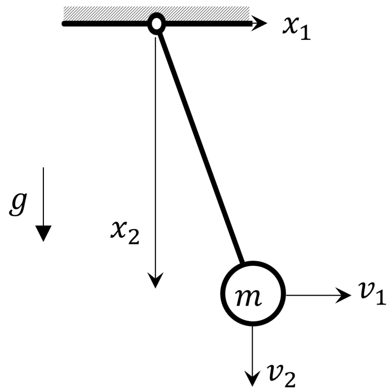
- *Die Matrixexponentialfunktion einer quadratischen Matrix berechnet sich über* $e^{\boldsymbol{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k$.
- *Die Spektralzerlegung einer quadratischen Matrix* $\boldsymbol{A}$*, bei der diese durch ihre Eigenwerte* λ_i *und ihre Eigenvektoren* $\boldsymbol{v}_i$ *dargestellt werden, ergibt sich zu* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1}$ *mit* $\boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}\{\lambda_i\} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ *und* $\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$.
- *Für eine Diagonalmatrix* $\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}\{a_i\}$ *vereinfacht sich die Matrixexponentialfunktion zu* $e^{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{a_n} \end{pmatrix}$.

(8 Punkte)

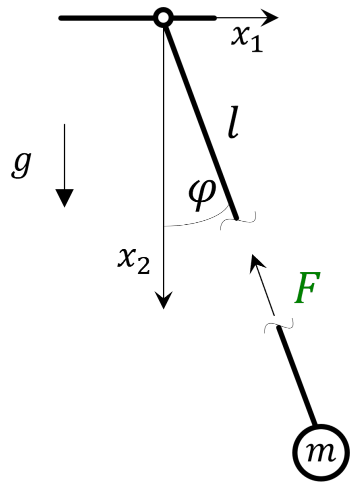
3. Aufgabe: DA-Systeme (20 Punkte)

Um die Simulationstechnikvorlesung nachzuarbeiten betrachten Sie die Modellierung eines mathematischen Pendels im kartesischen Koordinatensystem. Abb. 1 zeigt das Pendel und die freigeschnittene Masse. Sie wollen die Position $(x_1, x_2)^T$ und Geschwindigkeit $(v_1, v_2)^T$ der Masse m modellieren um die Auslenkung φ zu bestimmen. In der Modellierung werden die folgenden Annahmen getroffen:

- Das System ist reibungsfrei und es wirkt die Erdbeschleunigung g.
- Das Pendel ist an einem starren Stab der Länge l befestigt der keine Querkräfte aufnehmen kann.



(a) Skizze des Pendels im kartesischen Koordinatensystem.



(b) Freischnitt der Masse mit der Kraft F.

Abbildung 1: Betrachtetes System des Pendels.

Gegeben sind die folgenden Systemgleichungen:

$$m \cdot \dot{v}_1(t) = -F(t) \cdot \sin(\varphi(t)) \tag{5}$$

$$m \cdot \dot{v}_2(t) = m \cdot g - F(t) \cdot \cos(\varphi(t)) \tag{6}$$

$$\dot{x}_1(t) = v_1(t) \tag{7}$$

$$\dot{x}_2(t) = v_2(t) \tag{8}$$

$$0 = x_1(t) - l \cdot \sin(\varphi(t)) \tag{9}$$

$$0 = l^2 - x_1^2(t) - x_2^2(t) \tag{10}$$

3.1. Sie betrachten das gegebene System aus den Gleichungen Gleichungen (5) bis (10).

a) Ist das System autonom? Begründen Sie.

b) Geben Sie an, welche der auftretenden Größen differentielle Variablen, algebraische Variablen und Parameter sind.

c) Geben Sie an, welche der Gleichungen algebraische und differentielle Gleichungen sind.

Hinweis: Schreiben Sie Ihre Lösung nicht auf das Aufgabenblatt.

(3 Punkte)

3.2.

a) Geben Sie die aus der Vorlesung bekannte Definition des differentiellen Index an.

b) Stellen Sie die Inzidenzmatrix des DA-Systems auf. Beschriften Sie die Zeilen und Spalten der Inzidenzmatrix. Prüfen Sie damit, ob es ein Index-1-System sein kann. Begründen Sie kurz.

c) Können Sie die Anfangsbedingungen für das gegebene DA-System frei wählen? Begründen Sie kurz.

(4,5 Punkte)

3.3.

a) Führen Sie eine Indexreduktion bis zu einem Index-1-System durch. Geben Sie Zwischenschritte an und machen Sie versteckte Gleichungen deutlich. Bestimmen Sie darauf aufbauend den differentiellen Index des ursprünglichen DA-Systems.

b) Welche Gleichungen sollten Sie laut Vorlesung zur Simulation des Systems verwenden?

c) Geben Sie die differentiellen und algebraischen Variablen des resultierenden Systems aus den ausgewählten Gleichungen an.

d) Für welche der Variablen des gewählten Systems können Anfangsbedingungen gewählt werden?

e) Begründen Sie warum laut Vorlesung ein Index-1 statt einem Index-0 System zur numerischen Lösung gewählt werden soll.

(12,5 Punkte)

4. Aufgabe: Strukturierte Systeme & Modelica (20 Punkte)

Der Ladevorgang eines Containers in einem Hafen soll als strukturiertes System modelliert werden. Dafür betrachten Sie die in Abbildung 2 dargestellte Containerbrücke mit den einzelnen Bauteilbezeichnungen und einen zugehörigen Container. Das Grundgestell der Containerbrücke besteht aus Stiele, Querriegel, Träger und Zugbändern. Zum Verladen von Containern befindet sich am Träger ein beweglicher Wagen, der mit einer elektrischen Winde verbunden ist. Die Winde wird durch einen Motor (M) angetrieben und ermöglicht das Auf- und Abrollen eines Seils in vertikale Richtung. Das Seil ist mit einem Geschirr verbunden. Über Verschlüsse, die mit dem Geschirr verbunden sind, kann ein Container aufgenommen werden.

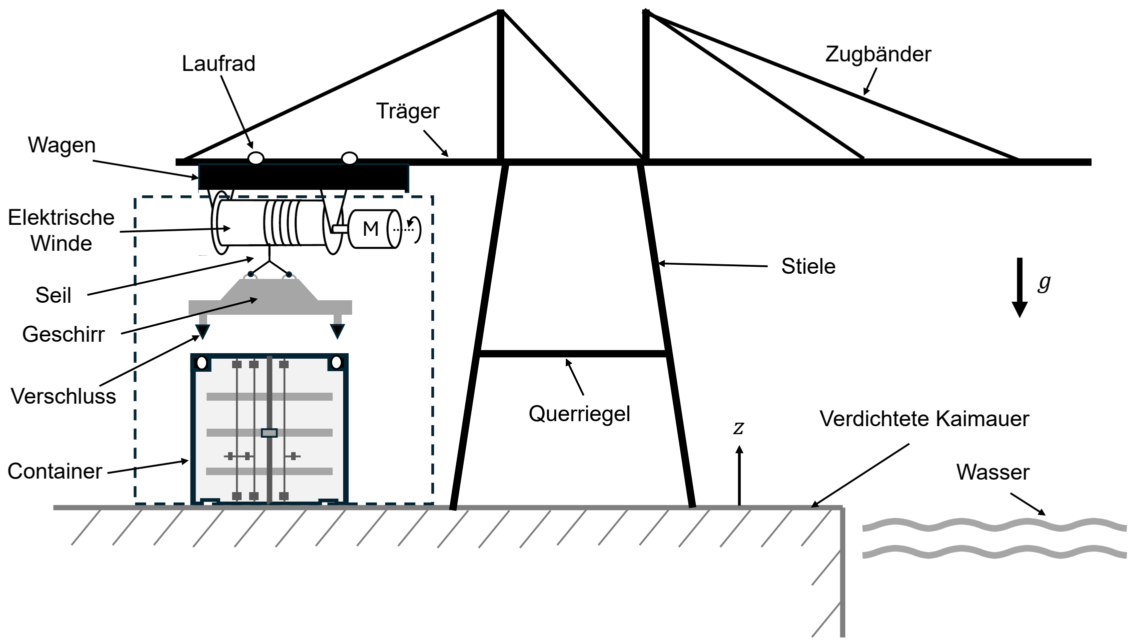


Abbildung 2: Containerbrücke zum Verladen von Containern.

Für die Modellierung betrachten Sie nur das mit *gestrichelter Linie gekennzeichnete Teilsystem*. Weiterhin betrachten Sie nur die vertikale Richtung z. Es wirkt die Gewichtskraft mit der Gravitationskonstante g.

Zur Bestimmung der Kräfte gelten folgende vereinfachte Annahmen:

- Die elektrische Winde und die Seilkraft $F_S(t)$ lassen sich durch folgendes Momentengleichgewicht in Verbindung bringen: $\Theta \cdot \dot{\omega}(t) = M_M(t) + F_S(t) \cdot r$, wobei Θ das

Trägheitsmoment, $\omega(t)$ die Winkelgeschwindigkeit, $M_M(t)$ das Motormoment und r den Radius der elektrischen Winde beschreibt.

- Für die Bestimmung der Auf- und Abrollgeschwindigkeit $v_S(t)$ des Seils können Sie vereinfacht annehmen, dass diese lediglich von der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ und dem Radius der Winde r abhängt.

Des Weiteren gelten folgende Annahmen:

- Die Erdbeschleunigung wird zu $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ angenommen.
- Die elektrische Winde hat die Masse $m_W = 200\,\mathrm{kg}$.
- Das Geschirr hat die Masse $m_G = 500\,\mathrm{kg}$.
- Der Container hat die Masse $m_C = 25\,000\,\mathrm{kg}$.
- Das Seil ist masselos und steht durchgehend unter Spannung.
- Der Verschluss ist masselos und umfasst alle Verschlussstellen an den Ecken des Containers.
- Es wirken außer den angegebenen Kräften keine weiteren Einflüsse auf das System.

Modellierung

4.1. Strukturieren Sie das gegebene Teilsystem (gestrichelte Linie) in **fünf** sinnvolle Teilsysteme. Ordnen Sie die Teilsysteme jeweils einer der beiden folgenden Kategorien zu: Speichersystem, Verknüpfungssystem. **(2,5 Punkte)**

Implementierung in Modelica

Hinweis zur Implementierung: Sie können in den folgenden Teilaufgaben für die Deklaration der Variablen und Parameter einen generischen Typ verwenden.

4.2. Nehmen Sie nun für die Implementierung vereinfachend an, dass der Verschluss als Konnektor, d.h. als Verbindung zwischen dem Geschirr und dem Container, dient. Schreiben Sie den Modelica-Code für den Konnektor `Verschluss`, welcher die Geschwindigkeit, $v(t)$, sowie die notwendigen Schnittkräfte des Verschlusses in z-Richtung übergibt. **(3 Punkte)**

4.3. Gegeben ist nun das unvollständige Modelica-Modell `ElektrischeWinde` (s. Modellica-Modell Nr. 1). Schreiben Sie den fehlenden Modelica-Code für die Implementierung der Modellgleichungen. Diese umfassen:

- die Abrollgeschwindigkeit;
- das Momentengleichgewicht;
- das Ändern der Eingangsgröße für das Motormoment in Abhängigkeit der Variable Zeit `time`. Im Zeitraum von $2\,\mathrm{s}$ bis $4\,\mathrm{s}$ ist das Motormoment um $0{,}2\,\mathrm{Nm}$ geringer als das Moment aus Seilkraft und Radius der Winde. Ansonsten entspricht das Motormoment eben diesem Moment, so dass das System im statischen Gleichgewicht ist.
- die Übertragung der Zustände an das Seil.

Hinweis: Die Modellierung des Seils als Konnektor ist äquivalent zum Verschluss und dient der Übertragung der Geschwindigkeit und der Schnittkräfte in z-Richtung. **(6,5 Punkte)**

```
model ElektrischeWinde
    import Modelica.Units.SI.*;
    parameter MomentOfInertia Theta = 3; // Traegheitsmoment
    parameter Length r = 0.2;            // Radius Winde
    parameter Position z = 10;           // Hoehe der Winde
    Torque M_M;                          // Motormoment
    AngularVelocity omega(start=0);      // Winkelgeschw.
    Force F_W_S;     // Kraft auf Seil verknuepft mit Last
    Velocity v_W_S;  // Geschwindigkeit von Seil mit Last
    Seil s;          // Konnektor Seil
equation

// fehlender Code

end ElektrischeWinde;
```

Modelica-Modell Nr. 1: Model ElektrischeWinde.

4.4. Gegeben ist das unvollständige partielle Modelica-Modell `Last` (s. Modellica-Modell Nr. 2). Schreiben Sie den fehlenden Modelica-Code für die Deklarationen von Konstanten bzw. Parametern und Zuständen. Verwenden Sie dazu die gegebenen Symbole in der Gleichungsumgebung. Geben Sie dabei die Anfangswerte der Zustände explizit mit dem Wert 0 an. **(3 Punkte)**

```
partial model Last
    import Modelica.Units.SI.*;
    parameter Mass m_L = 5;             // Masse der Last
    Force F_z;                          // Externe Kraft

// fehlender Code

equation
    m_L*der(v_z_L) = m_L*g + F_z;       // Newton in z-Richtung
    der(z_L)  = v_z_L;                  // Hoehe - Geschw.
end Last;
```

Modelica-Modell Nr. 2: Partial model Last.

4.5. Sie sollen nun das partielle Modell `Last` für die Implementierung des Containers verwenden. Gehen Sie davon aus, dass das Geschirr den Container mithilfe des Verschlusses aufgenommen hat. Schreiben Sie den benötigten Modelica-Code für die Implementierung des Modells `Container`, welches von dem partiellen Modell `Last` erbt. Die externe Kraft $F_z(t)$ aus dem Modell `Last` als Eingang soll dabei für mögliche Verknüpfungen genutzt werden. *Hinweis: Sie müssen die vorherige Teilaufgabe dafür nicht lösen.* **(5 Punkte)**

5. Aufgabe: Sensitivitätsanalyse und Parameterschätzung (20 Punkte)

In einem ideal durchmischten Batchreaktor findet die Reaktion von Komponente A zu Produkt B und eine Folgereaktion des Produktes B zum Nebenprodukt C statt. Beide Reaktionen sind stark exotherm. Um die Reaktionswärme effektiv abzuführen, ist ein Umlaufkühler mit Wärmeübertragungsfläche A_{W} installiert, durch den ein konstanter Massenstrom F gefördert wird. Das Reaktionsmedium wird mit Kühlwasser konstanter Eintrittstemperatur $T_{\mathsf{KW,ein}}$ heruntergekühlt und in den Reaktor zurückgeführt.

$$\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B} \rightarrow \mathsf{C}$$

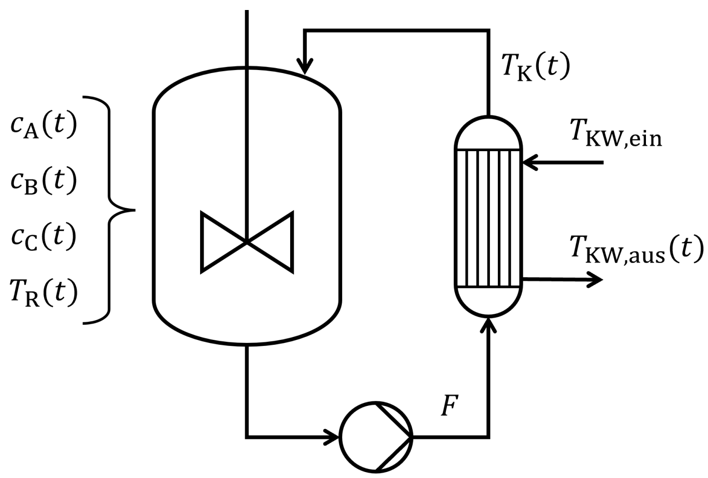


Abbildung 3: Batchreaktor mit Umlaufkühler

Die zeitliche Änderung der Konzentrationen ($c_{\mathsf{A}}(t)$, $c_{\mathsf{B}}(t)$, $c_{\mathsf{C}}(t)$) kann durch folgende Modellgleichungen beschrieben werden:

$$\dot{c}_{\mathsf{A}}(t) = -k_1 \cdot e^{\frac{-E_1}{T_{\mathsf{R}}(t)\cdot R}} \cdot c_{\mathsf{A}}(t) \tag{11}$$

$$\dot{c}_{\mathsf{B}}(t) = k_1 \cdot e^{\frac{-E_1}{T_{\mathsf{R}}(t)\cdot R}} \cdot c_{\mathsf{A}}(t) - k_2 \cdot e^{\frac{-E_2}{T_{\mathsf{R}}(t)\cdot R}} \cdot c_{\mathsf{B}}(t) \tag{12}$$

$$\dot{c}_{C}(t) = k_2 \cdot e^{\frac{-E_2}{T_{\mathsf{R}}(t)\cdot R}} \cdot c_{\mathsf{B}}(t) \tag{13}$$

$$c_{\mathsf{A}}(t=0) = c_{\mathsf{A},0} \tag{14}$$

$$c_{\mathsf{B}}(t=0) = c_{\mathsf{B},0} \tag{15}$$

$$c_{\mathsf{C}}(t=0) = c_{\mathsf{C},0} \tag{16}$$

Dabei sind k_1 und k_2 die Stoßfaktoren und E_1 und E_2 die Aktivierungsenergien der beiden Reaktionen. R ist die universelle Gaskonstante. Die Konzentrationsänderungen hängen von der Reaktortemperatur $T_\mathsf{R}(t)$ ab.

Sensitivitätsanalyse

5.1. Stellen Sie zunächst für das allgemeine System (17) die Definitionen der Zustands- und Ausgangssensivitäten sowie die Sensitivitätsgleichungen für die Parameter $\boldsymbol{p}$ auf.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}(t)) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}(t)) \\ \boldsymbol{x}(t=0) &= \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{p}) \end{aligned} \tag{17}$$

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass die Eingänge $\boldsymbol{u}(t)$ unabhängig von den Parametern $\boldsymbol{p}$ sind. Sie müssen keine Anfangsbedingungen angeben. **(3 Punkte)**

5.2. Gehen Sie zunächst von einer konstanten Reaktortemperatur $T_\mathsf{R}(t) = T_\mathsf{R}^*$ aus und stellen Sie die Sensitivitätsgleichungen der Konzentrationen $\boldsymbol{c}(t) = (c_\mathsf{A}(t)\ c_\mathsf{B}(t)\ c_\mathsf{C}(t))^T$ bezüglich der Reaktortemperatur T_R^* für das Modell in Gleichungen (11) bis (16) auf.

Hinweis: Die Werte der Parameter (k_1, k_2, E_1, E_2, R) sind gegeben. Sie müssen keine Anfangsbedingungen angeben. **(6 Punkte)**

Parameterschätzung

Das Modell wird durch die Energiebilanzen um den Batchreaktor und den Wärmeübertrager ergänzt, um die Zeitabhängigkeit der Reaktortemperatur beschreiben zu können:

$$c_\mathsf{p} \cdot m_\mathsf{R} \cdot \dot{T}_\mathsf{R}(t) = (F \cdot c_\mathsf{p} \cdot (T_\mathsf{K}(t) - T_\mathsf{R}(t)) + \Delta h_{\mathsf{R},1} \cdot \dot{c}_\mathsf{A}(t) - \Delta h_{\mathsf{R},2} \cdot \dot{c}_\mathsf{C}(t)) \tag{18}$$

$$F \cdot c_\mathsf{p} \cdot (T_\mathsf{R}(t) - T_\mathsf{K}(t)) = U \cdot A_\mathsf{W} \cdot \Delta T_\mathsf{LN} \tag{19}$$

Die Reaktionsenthalpien $\Delta h_{\mathsf{R},1}$ und $\Delta h_{\mathsf{R},2}$, die Wärmekapazität c_p, die Masse des Reaktionsmediums m_R, die Wärmeübertragungsfläche A_W und die logarithmische Temperaturdifferenz ΔT_LN können als konstant angenommen werden. Darüber hinaus beschreibt U den Wärmedurchgangskoeffizienten des Umlaufkühlers.

5.3. Sie sollen nun den unbekannten Wärmedurchgangskoeffizienten U mittels einer Parameterschätzung bestimmen. Betrachten Sie dazu die algebraische Gleichung (19). Ihnen stehen zusätzlich experimentelle Messwerte der Temperaturen $T_\mathsf{R}(t)$ und $T_\mathsf{K}(t)$ zu den Zeitpunkten t_i zur Verfügung (s. Tabelle 1). Die Werte der bekannten Parameter sind in Tabelle 2 gegeben. Auf die Angabe der Einheiten wird im Folgenden verzichtet.

Tabelle 1: Messwerte

i	$T_{\mathsf{R,i}}$	$T_{\mathsf{K,i}}$
1	50	30
2	70	40
3	80	45

Tabelle 2: Bekannte Parameter

Parameter	Wert
F	50
c_p	4
A_W	5
ΔT_LN	10

a) Geben Sie die Formel für die Gütefunktion eines allgemeinen Parameterschätzproblems nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate an und benennen Sie alle vorkommenden Symbole.

b) Stellen Sie nun das Parameterschätzproblem nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate für den Parameter U in Gleichung (19) auf. Wählen Sie dazu T_K als Ausgang und setzen Sie den Ausdruck für T_K entsprechend in die Gütefunktion ein.

c) Nennen Sie die notwendige Bedingung dafür, dass ein Parameterwert U eine Lösung des Parameterschätzproblemes ist.

d) Leiten Sie aus der notwendigen Bedingung für die Lösung des Parameterschätzproblems eine Formel für den Wärmedurchgangskoeffizienten U her und berechnen Sie diesen anschließend mit Hilfe der gegebenen Messwerte und Parameter aus Tabelle 1 und 2.

(11 Punkte)

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik

Wintersemester 2024/2025

1. Aufgabe: Fragen (20 Punkte)

* Lösung *

1.1. Lösung:

a) Beispiele für OFF-Line Anwendungen sind Vorhersage des Verhaltens und Bewertung eines Entwurfs von Robotern, Flugzeugen, etc. oder die Optimierung der aussichtsreichen Entwürfe (0,5 TP).
Beispiele für ON-Line Anwendungen sind Training des Bedienungspersonals, Vorhersage des Betriebsverhaltens, z.B. Szenarien zur Analyse von Betriebseingriffen, Überwachung, Regelung und Steuerung (0,5 TP).

b) Die Softwaretoolkategorien für dynamische Modelle in absteigender Flexibilität sind:

   1) Programmiersprache mit numerischen Bibliotheken (iv) (0,5 TP)
   2) Gleichungsorientierte Simulatoren (ii) (0,5 TP)
   3) Phänomenologische Modellierung und meta-modeling (iii) (0,5 TP)
   4) Spezielle Simulatoren (i) (0,5 TP)

c) Durch die Einführung einer einheitlichen Vorzeichenkonvention können Teilsysteme einfacher aggregiert werden (0,5 TP). In der Vorlesung und Übung werden alle (Schnitt-) Größen als positiv angenommen (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(4 Punkte)**

1.2. Lösung:

a) Zu den Freiheitsgraden zählen zeitinvariante Parameter $\boldsymbol{p}$ (0,5 TP), zeitvariante Eingänge $\boldsymbol{u}(t)$ (0,5 TP) und unabhängige, frei wählbare Anfangswerte $\boldsymbol{x}_0$ (0,5 TP).

b) Zu den konstruktionsbedingte Freiheitsgrade zählen zeitinvariante Parameter $\boldsymbol{p}$ (0,5 TP). Zu den betriebsbedingte Freiheitsgrade zählen zeitvariante Eingänge $\boldsymbol{u}(t)$ und unabhängige, frei wählbare Anfangswerte $\boldsymbol{x}_0$ (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(2,5 Punkte)**

1.3. Lösung:

a) Der Zustandsraum ist der Raum, der von den Zuständen eines dynamischen Systems aufgespannt wird (1 TP).

b) Vorteile sind

- einheitliche und übersichtliche Formulierung
- sehr gut geeignet zur Analyse von wichtigen Systemeigenschaften
- wird von vielen Software Werkzeugen vorausgesetzt

c)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin(\exp(t)) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}(t)\ \text{(1 TP)}} \boldsymbol{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \ln(t) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}(t)\ \text{(0,5 TP)}} \boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \exp(-42t) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{C}(t)\ \text{(0,5 TP)}} \boldsymbol{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}(t)\ \text{(0,5 TP)}} \boldsymbol{u}(t) \end{aligned} \tag{20}$$

d) Die Matrizen heißen Systemmatrix $\boldsymbol{A}(t)$, Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}(t)$, Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C}(t)$ (und Durchgangsmatrix $\boldsymbol{D}(t)$), Eingangsgrößen $\boldsymbol{u}(t)$, Zustandsgrößen $\boldsymbol{x}(t)$, und Ausgangsgrößen $\boldsymbol{y}(t)$ (3 TP).

e) Es handelt sich um ein lineares zeitvariantes System (0,5 TP)

Bewertung: Siehe oben. b) Pro genannter Vorteil 0,5 TP (in Summe maximal 1 TP). In c) muss die Durchgangsmatrix $\boldsymbol{D}(t) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ nicht explizit angegeben werden (Nullmatrix). **(8 Punkte)**

1.4. Lösung: Die Funktion $f(x,t) = 2x^2t$ ist nicht linear in x (0,5 TP), da x quadriert wird (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. Alternative Begründungen möglich. **(1,5 Punkte)**

1.5. Lösung: Bei differentiell-algebraischen System können die Anfangsbedingungen der differentiellen Größen nicht frei gewählt werden, wenn die algebraischen Gleichungen nicht explizit nach den algebraischen Variablen aufgelößt werden können (0,5 TP). Die Einschränkungen der Anfangswerte können in diesem Fall „unsichtbar", d.h. nicht explizit in den Modellgleichungen angegeben sein (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. Alternativ, kann mit einem Index > 1 im ersten Teil der Antwort argumentiert werden. **(1 Punkt)**

1.6. Lösung: Beispiele für extensive Schnittgrößen sind Massen- und Wärmeströme (0,5 TP). Bespiele für intensive Schnittgrößen sind Konzentration, Druck und Temperatur (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(1 Punkt)**

1.7. Lösung:

a) Glättung (0,5 TP) und somit die Zurückführung auf ein kontinuierliches Problem oder Lokalisierung des Umschaltzeitpunktes mit Hilfe von „Schaltfunktionen" (0,5 TP).

b) Bei expliziten Ereignissen hängen nur von der Zeit t und/oder von den Eingängen $\boldsymbol{u}(t)$ ab, während implizite Ereignisse von den Zuständen abhängen (1 TP)

Bewertung: Das benennen von „(hybriden) Automaten" wird als Alternative zu „Schaltfunktionen" akzeptiert. **(2 Punkte)**

2. Aufgabe: Systemtheorie (20 Punkte)

* Lösung *

2.1. Lösung:

a) Die allgemeine Taylorreihenentwicklung lautet

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \underbrace{\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_*\right)}_{(0{,}5\ \text{TP})} + \underbrace{\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}_*}}_{(0{,}5\ \text{TP})} \underbrace{\left(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_*\right)}_{(0{,}5\ \text{TP})} + \underbrace{\text{T.h.O.}}_{(0{,}5\ \text{TP})} \tag{21}$$

b) Die Linearisierung des Systems (2) um den allgemeinen Punkt $\boldsymbol{x}_*$ berechnet sich zu

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \approx \underbrace{\begin{bmatrix} x_{3,*} - a x_{1,*} \\ b - c x_{2,*} + d x_{1,*} - x_{1,*} x_{2,*} \\ x_{1,*} x_{2,*} - x_{3,*} \end{bmatrix}}_{(0{,}5\ \text{TP})} + \underbrace{\begin{bmatrix} -a & 0 & 1 \\ d - x_{2,*} & -c - x_{1,*} & 0 \\ x_{2,*} & x_{1,*} & -1 \end{bmatrix}}_{(3\ \text{TP})} \left(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_*\right) \tag{22}$$

Bewertung: In Gleichung (21) kann anstatt von „T.h.O." auch die unendl. Summe angegeben werden. Falls T.h.O. in Gleichung (22) angegeben werden, können maximal 3 TP für Gleichung (22) erreicht werden. Falls im zweiten Summanden in Gleichung (22) der Term $(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_*)$ fehlt bzw. falsch ist können für die Gleichung maximal 3 TP erreicht werden. In Gleichung (22) werden in der Matrix $\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}_*}$ jeweils 1 TP pro richtige Zeile bzw. Spalte vergeben. **(5,5 Punkte)**

2.2. Lösung:

a) Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ lösen das charakteristische Polynom

$$\det\left(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}\right) = \det \begin{pmatrix} -a - \lambda & 0 & 1 \\ d - \frac{b}{c} & -c - \lambda & 0 \\ \frac{b}{c} & 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Dies führt zu dem kubischen Polynom

$$-\left(a + \lambda\right)\left(c + \lambda\right)\left(1 + \lambda\right) + \frac{b}{c}\left(c + \lambda\right) = 0 \quad (1\ \text{TP}),$$

welche offensichtlich die Lösungen

$$\lambda_1 = -c \quad \text{(0,5 TP)}$$

hat. Für $\lambda \neq -c$ verbleibt das Polynom

$$-(a+\lambda)(1+\lambda) + \frac{b}{c} = 0 \quad \text{(0,5 TP)},$$

welche die Lösungen

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1+a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1+a}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{b}{c}\right)} \quad \text{(1 TP)} \tag{23}$$

hat.

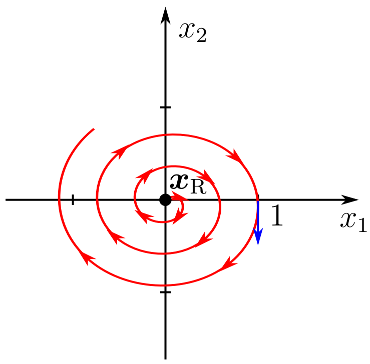
b) Mit $a, b, c > 0$ und $0 < a - \frac{b}{c} < \left(\frac{1+a}{2}\right)^2$ folgt, dass $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2,3}) < 0$ und $\mathrm{Im}(\lambda_{1,2,3}) = 0$ ist. Alle Eigenwert haben einen Realteil < 0, womit das linearisierte System asymptotisch stabil (0,5 TP) ist. Da keine komplex-konjugierten Eigenwerte vorliegen, ist das linearisierte System ist nicht schwingungsfähig (0,5 TP).

c) Gemäß des Satzes von Hartmann-Grobmann kann man lokal die Dynamiken des linearisierten Systems auf die des nichtlinearen Systems abbilden, wenn $\boldsymbol{A}$ keinen Eigenwert mit Realteil 0 hat (0,5 TP). Dies ist in diesem Fall erfüllt, sodass Aussagen über das Verhalten des nichtlinearen Systems möglich sind (0,5 TP).

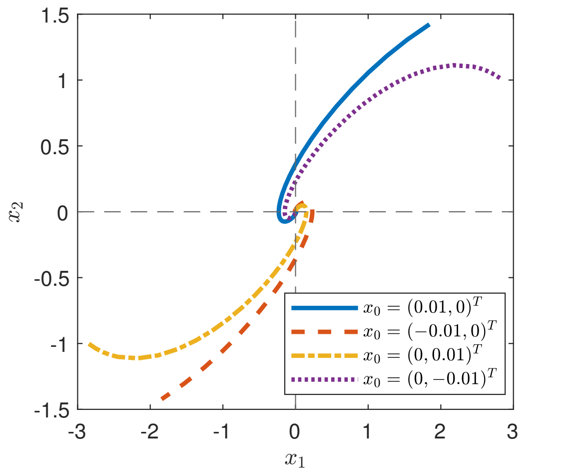
Bewertung: Siehe oben. In b) kann durch eine **vollständige** Angabe aller möglichen Fälle **ohne** Anwendung nur max. die hälfte der TP erreicht werden. In c) kann durch die **vollständige** Wiedergabe des Satzes von Hartmann-Grobmann **ohne** Anwendung nur max. die hälfte der TP erreicht werden. **(5 Punkte)**

2.3. Lösung: Gemäß der Vorlesung handelt es sich bei dem Phasenportrait um einen instabilen Fokus (0,5 TP).
Zusatz: Die Drehrichtung kann durch Einsetzen eines Testpunktes (z.B. $\boldsymbol{x}_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$) in die Systemgleichung ermittelt werden, womit gezeigt wird, dass die Drehrichtung gegen den Uhrzeigersinn ist (vgl. blauer Vektor in Abb. 4a).

$$\dot{\boldsymbol{x}}|_{\boldsymbol{x}_*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} \tag{24}$$



(a) Qualitatives Phasenportrait instabiler Fokus (1 TP).



(b) Zusatz: Simulationsergebnisse für verschiedene Startwerte und $t \in [0, 10]$.

Abbildung 4: Qualitatives Phasenportrait und Simulationsergebnisse für verschiedene Startwerte (Zusatz). Abb. 4b dient ausschließlich als Lernhilfe. Simuliert man System (4) mit den angegeben Startwerten, so erhält man die dargestellten Trajektorien. $\boldsymbol{x}(t)$ entfernt sich von den jeweiligen Startwerten im Uhrzeigersinn. Da sich jeweils $\boldsymbol{x}(t)$ sehr schnell von seinem Startwert entfernt, ist in dem ausgewählten Diagrammausschnitt keine vollständige Umdrehung um die Ruhelage zu sehen.

Bewertung: Siehe oben. Für richtigen den Trajektorienverlauf 0,5 TP (instabiler Fokus erkennbar). 0,5 TP für ein aussagekräftiges Diagramm (Koordinatenachsen mit Zustandsvariablen beschriftet, Ruhelage eingezeichnet bzw. erkennbar).

(1,5 Punkte)

2.4. Lösung: Die allgemeine Lösung für das System $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$, mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t_0 = 0$ und $\boldsymbol{x}(t = 0) = \boldsymbol{x}_0$ lautet

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 e^{\boldsymbol{A}t} \quad \text{(0,5 TP)}. \tag{25}$$

Durch einsetzen der Hinweise und durch vereinfachen erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{x}_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{A}^k t^k && \text{(1 TP)} \\
&= \boldsymbol{x}_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1}\right)^k t^k && \text{(1 TP)} \\
&= \boldsymbol{x}_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\cancelto{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{V}}\boldsymbol{\Lambda}\cancelto{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{V}^{-1}\dots\boldsymbol{V}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1}}_{\text{k-mal}} t^k \\
&= \boldsymbol{x}_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{V}^{-1} t^k && \text{(1,5 TP)} \\
&= \boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{V} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{\Lambda}^k t^k \right) \boldsymbol{V}^{-1} && \text{(1 TP)} \\
&= \boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{V} e^{\boldsymbol{\Lambda} t} \boldsymbol{V}^{-1} && \text{(1 TP)} \\
&= \boldsymbol{x}_0 \underbrace{\boldsymbol{V} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{V}^{-1} && \text{(1 TP)}
\end{aligned} \tag{26}
$$

Für $t \to \infty$ und $\lambda_i < 0, \forall i$ folgt $\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{0}$, womit direkt folgt $\boldsymbol{x}(t \to \infty) = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}_R$ (1 TP).

Bewertung: Siehe oben. **(8 Punkte)**

3. Aufgabe: DA-Systeme (20 Punkte)

* Lösung *

3.1. Lösung:

a) Das System ist autonom da es keine Eingänge hat. (0,5 TP)

b)

$$\text{diff. Var.:}, \boldsymbol{x} = [x_1(t), x_2(t), v_1(t), v_2(t)]^T \qquad (0{,}5 \text{ TP})$$
$$\text{alg. Var.:}, \boldsymbol{z} = [F(t), \varphi(t)]^T \qquad (0{,}5 \text{ TP})$$
$$\text{Parameter:}, \boldsymbol{p} = [m, l]^T \qquad (0{,}5 \text{ TP})$$

c) Die algebraische Gleichungen sind die Gleichungen Gleichungen (9) und (10) (0,5 TP), die differentiellen Gleichungen sind die Gleichungen Gleichungen (5) bis (8) (0,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. In b) und c) werden 0,5 TP jeweils nur bei korrekter Zuweisung aller Variablen/Gleichungen vergeben. Die Gravitationskonstante g kann als Parameter oder Naturkonstante angenommen werden. **(3 Punkte)**

3.2. Lösung:

a) Die *Zahl der zeitlichen Ableitungen der algebraischen Gleichungen* (alle oder nur Teil) (0,5 TP), die für die Herleitung von *expliziten Dgln.* mit kontinuierlicher Funktion in der *rechten Seite* für *alle algebraische Variablen* eines DA-Systems erforderlich ist (0,5 TP), wird differentieller Index des DA-Systems genannt. (Die Ausgänge betrachtet man nicht.)

b) Die *quadratische* Inzidenzmatrix hat einen strukturellen Rangdefekt (0,5 TP). Folglich liegt ein Index > 1 vor. Es kann sich nicht um ein Index-1-System handeln (0,5 TP).

c) Nein. Das System hat einen Index größer als 1 (1 TP). Daher unterliegen die Anfangswerte der differentiellen Variablen Beschränkungen, die in den Modellgleichungen nicht explizit angegeben sind.

	$\varphi(t)$	$F(t)$
(9)	x	
(10)		

Tabelle 3: Inzidenzmatrix für das untersuchte DA-System (1,5 TP).

Bewertung: Siehe oben. Struktur der Inzidenzmatrix richtig (0,5 TP). Inzidenzmatrix richtig ausgefüllt (1 TP). Wenn die Struktur der Inzidenzmatrix falsch ist, werden bei korrektem Ausfüllen von einer Gleichung 0,5 TP gegeben. Bei c) werden nur bei korrekter Begründung TP vergeben (Index $>$ 1 reicht als Begründung). **(4,5 Punkte)**

3.3. Lösung:

a)

Ableitung von Gleichung (9) nach der Zeit und Einsetzen von Gleichung (7):

$$0 = \dot{x}_1(t) - l\cos(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \qquad \text{(0,5 TP)}$$

$$0 = v_1(t) - l\cos(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \qquad \text{(0,5 TP)}$$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{v_1(t)}{l\cos(\varphi(t))} \tag{p}$$

Die Ableitung von Gleichung (9) ergibt die explizite Differentialgleichung (p) für die algebraische Variable φ (0,5 TP). Da dieser Schritt keine versteckte algebraische Gleichung oder differentielle Gleichung für die algebraische Variable $F(t)$ ergeben hat, ist die Indexreduktion noch nicht abgeschlossen.

Die Inzidenzmatrix hat gezeigt, dass Gleichung (10) keine algebraischen Variablen beinhaltet. Daher differenzieren wir sie einmal nach der Zeit:

$$0 = -2x_1(t)\dot{x}_1(t) - 2x_2(t)\dot{x}_2(t) \qquad \text{(1 TP)}$$

Einsetzen von Gleichungen (7) und (8):

$$\Leftrightarrow 0 = -2x_1(t)v_1(t) - 2x_2(t)v_2(t) \qquad \text{(0,5 TP)} \tag{q}$$

Nach der ersten Differenzierung finden wir eine neue versteckte algebraische Gleichung (q) (0,5 TP). Diese Gleichung enthält jedoch nicht explizit die algebraische Variable $F(t)$. Daher differenzieren wir (q) ein weiteres Mal nach der Zeit:

$$0 = -2\dot{x}_1(t)v_1(t) - 2x_1(t)\dot{v}_1(t) - 2\dot{x}_2(t)v_2(t) - 2x_2(t)\dot{v}_2(t) \quad \text{(1 TP)}$$

Einsetzen von Gleichungen (5) bis (8):

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 0 = &- 2v_1^2(t) + 2x_1(t)\frac{F(t)\sin(\varphi(t))}{m} - 2v_2^2(t) - 2x_2(t)g \\ &+ 2x_2(t)\frac{F(t)\cos(\varphi(t))}{m} \quad \text{(2 TP)}\end{aligned} \tag{r}$$

Nach der Differenzierung finden wir eine zweite versteckte algebraische Gleichung (r) (0,5 TP). Gleichung (r) kann explizit nach der algebraischen Variable $F(t)$ umgestellt werden. Somit ist *nur noch eine weitere zeitliche Ableitung* (0,5 TP) für die Herleitung von expliziten Dgln. mit kontinuierlichen Funktionen in der rechten Seite für alle algebraischen Variablen des DA-Systems erforderlich (0,5 TP). Daher hat das ursprünglich gegebene DA-System ein Index von 3 (0,5 TP).

b) und c)

Zur Simulation des Systems werden alle algebraischen Gleichungen sowie eine Teilmenge der differentiellen Gleichungen ausgewählt. Die Anzahl der Gleichungen muss mit der Anzahl an Variablen übereinstimmen. Es müssen die algebraischen Gleichungen (9), (10), (q) und (r) gewählt werden (1 TP).

Aus den differentiellen Gleichungen (5) bis (8) müssen zwei Gleichungen gewählt werden. Die folgenden Kombinationen mit den resultierenden differentiellen Variablen sind möglich:

1. Gleichungen (5) und (7) (1 TP) mit den diff. Var. $\boldsymbol{x} = [x_1(t), v_1(t)]^T$ (0,5 TP) und alg. Var. $\boldsymbol{z} = [F(t), \varphi(t), x_2(t), v_2(t)]^T$ (0,5 TP)
2. Gleichungen (5) und (8) mit den diff. Var. $\boldsymbol{x} = [x_2(t), v_1(t)]^T$ alg. Var. $\boldsymbol{z} = [F(t), \varphi(t), x_1(t), v_2(t)]^T$
3. Gleichungen (6) und (7) mit den diff. Var. $\boldsymbol{x} = [x_1(t), v_2(t)]^T$ alg. Var. $\boldsymbol{z} = [F(t), \varphi(t), x_2(t), v_1(t)]^T$
4. Gleichungen (6) und (8) mit den diff. Var. $\boldsymbol{x} = [x_2(t), v_2(t)]^T$ alg. Var. $\boldsymbol{z} = [F(t), \varphi(t), x_1(t), v_1(t)]^T$

d)

Die Anfangsbedingungen der differentiellen Variablen des gewählten Systems können frei gewählt werden (1 TP).

e)

Ein Index-0-System ist die Menge aller hergeleiteten Differentialgleichungen und enthält keine algebraischen Gleichungen. Das Index-0-System kann (oft) numerisch nicht stabil gelöst werden da die numerische Lösung die algebraischen Gleichungen in der Regel nicht erfüllt. (1 TP)

Bewertung: Siehe oben. Bei fehlender oder falscher Begründung werden für die Angabe des Index in a) die jeweiligen Punkte nicht vergeben. Wird Gleichung (9) nicht abgeleitet und begründet das richtige Ergebnis erzielt wird die volle Punktzahl vergeben. In e) wird mit sinnvoller Begründung 1 TP vergeben. **(12,5 Punkte)**

4. Aufgabe: Strukturierte Systeme & Modelica (20 Punkte)
* Lösung *

4.1. Lösung: Elektrische Winde (Speichersystem), Seil (Verknüpfungssystem), Geschirr (Speichersystem), Verschluss (Verknüpfungssystem), (Verknüpfungssystem), Container (Speichersystem)

Bewertung: Jeweils 0,5 TP für richtige Nennung des Teilsystems inklusive Zuordnung.
(2,5 Punkte)

4.2. Lösung:

```
connector Verschluss          // 0,5 TP: "connector", 0,5 TP:
   "Verschluss"
import Modelica.Units.SI.*;
    flow Force F;             // 1 TP: "flow" + Deklaration
    Velocity v;               // 0,5 TP: Deklaration
end Verschluss;               // 0,5 TP: Modellumgebung
```

Bewertung: Siehe Kommentare. Deklaration alternativ über Real. Importieren der Units.SI ist nicht notwendig. **(3 Punkte)**

4.3. Lösung:

```
model ElektrischeWinde
    import Modelica.Units.SI.*;
    parameter MomentOfInertia Theta = 3;//
       Massentraegheitsmoment
    parameter Length r = 0.2;            // Radius Winde
    parameter Position z = 10;           // Hoehe der Winde
    Torque M_M;                          // Motormoment
    AngularVelocity omega(start=0);      //
       Winkelgeschwindigkeit
```

```
    Force F_W_S;                        // Kraft auf Seil
       verknuepft mit Last
    Velocity v_W_S;                     // Geschwindigkeit
       von Seil mit Last
    Seil s;                             // Konnektor Seil

equation

    // Momentengleichgewicht
    Theta*der(omega) = M_M + F_W_S*r;   // 1 TP

    // Abrollgeschwindigkeit
    v_W_S = r*omega;                    // 1 TP

    //  Kopplung Elektrische Winde und Last
    v_W_S = s.v;                        // 0,5 TP
    F_W_S = s.F;                        // 0,5 TP

    // Moment als Eingangsgroesse
    if time > 2 and time < 4 then       // 1,5 TP
        M_M = - 0.2 - F_W_S*r;          // 0,5 TP
    else                                // 0,5 TP
        M_M = - F_W_S*r;                // 0,5 TP
    end if;                             // 0,5 TP

end ElektrischeWinde;
```

Bewertung: Siehe Kommentare. Deklaration alternativ über Real. Importieren der Units.SI nicht notwendig. **(6,5 Punkte)**

4.4. Lösung:

```
partial model Last
    import Modelica.Units.SI.*;
    parameter Mass m_L = 5;             // Masse der Last
```

```
    Force F_z;                              // Externe Kraft

    constant Acceleration g = 9.81;         // 1 TP
    Position z_L(start=0);                  // 1 TP
    Velocity v_z_L(start=0);                // 1 TP

equation
    m_L*der(v_z_L) = m_L*g + f;             // Newton in
       z-Richtung
    der(z_L)  = v_z_L;                      // Hoehe - Geschw.
end Last;
```

Bewertung: Siehe oben. Deklaration alternativ über Real. Die Initialwerte können alternativ in der initial equation Umgebung angegeben werden. Die Erdbeschleunigung kann alternativ auch als Parameter deklariert werden. **(3 Punkte)**

4.5. Lösung:

```
model Container                   // 0,5 TP
    extends Last(m_L=25000);      // 2 TP
    Verschluss v;                 // 0,5 TP
equation                          // 0,5 TP
    F_z = v.F;                    // 0,5 TP
    v_z_L = v.v;                  // 0,5 TP
end Container;                    // 0,5 TP
```

Bewertung: Siehe oben. Deklaration alternativ über Real. **(5 Punkte)**

5. Aufgabe: Sensitivitätsanalyse und Parameterschätzung (20 Punkte) * Lösung *

5.1. Lösung:

Die Sensitivitätsgleichungen für ein allgemeines System sind gegeben durch

$$\boldsymbol{S}^x = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\right|_t \qquad (0{,}5\ \text{TP}) \qquad (27a)$$

$$\boldsymbol{S}^y = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\right|_t \qquad (0{,}5\ \text{TP}) \qquad (27b)$$

$$\dot{\boldsymbol{S}}^x(t) = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\right|_t \qquad (27c)$$

$$= \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}(t)} \boldsymbol{S}^x(t) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{p}}\right|_{\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}(t)} \qquad (1\ \text{TP}) \qquad (27d)$$

$$\boldsymbol{S}^y(t) = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\right|_t \qquad (27e)$$

$$= \left.\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}(t)} \boldsymbol{S}^x(t) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{p}}\right|_{\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}(t)} \qquad (1\ \text{TP}) \qquad (27f)$$

Bewertung: Siehe oben. Wird in Gleichungen (27a) und (27b) ein partielles Differential verwendet, werden keine Punkte vergeben. Wird für $\boldsymbol{h}$ und $\boldsymbol{f}$ in Gleichungen (27d) und (27f) ein totales Differential verwendet, kann jeweils nur max. die Hälfte der Teilpunkte in Gleichungen (27d) und (27f) erreicht werden. **(3 Punkte)**

5.2. Lösung:

Aus Gleichung (27d) folgt mit $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{c}(t) = (c_{\mathsf{A}}(t)\ c_{\mathsf{B}}(t)\ c_{\mathsf{C}}(t))^T$, $\boldsymbol{p} = T_{\mathsf{R}}^*$, $\boldsymbol{f}(t) = \dot{\boldsymbol{c}}(t) = (\dot{c}_{\mathsf{A}}(t)\ \dot{c}_{\mathsf{B}}(t)\ \dot{c}_{\mathsf{C}}(t))^T$:

$$\dot{\boldsymbol{S}}^c_{T_{\mathsf{R}}^*} = \left.\frac{\partial \dot{\boldsymbol{c}}}{\partial \boldsymbol{c}}\right|_{\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{p}} \boldsymbol{S}^c_{T_{\mathsf{R}}^*} + \left.\frac{\partial \dot{\boldsymbol{c}}}{\partial T_{\mathsf{R}}^*}\right|_{\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{p}} \qquad (1\ \text{TP})$$

mit

$$\left.\frac{\partial \dot{\boldsymbol{c}}}{\partial \boldsymbol{c}}\right|_{\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} -k_1 \cdot e^{\frac{-E_1}{T_\mathsf{R}^* \cdot R}} & 0 & 0 \\ k_1 e^{\frac{-E_1}{T_\mathsf{R}^* \cdot R}} & -k_2 e^{\frac{-E_2}{T_\mathsf{R}^* \cdot R}} & 0 \\ 0 & k_2 \cdot e^{\frac{-E_2}{T_\mathsf{R}^* \cdot R}} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 TP)}$$

$$\left.\frac{\partial \dot{\boldsymbol{c}}}{\partial T_\mathsf{R}^*}\right|_{\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1 \cdot E_1}{R \cdot T_\mathsf{R}^{*2}} \cdot e^{\frac{-E_1}{T_\mathsf{R}^* \cdot R}} c_\mathsf{A}(t) \\ \frac{k_1 \cdot E_1}{R \cdot T_\mathsf{R}^{*2}} \cdot e^{\frac{-E_1}{T_\mathsf{R}^* \cdot R}} c_\mathsf{A}(t) - \frac{k_2 \cdot E_2}{R \cdot T_\mathsf{R}^{*2}} \cdot e^{\frac{-E_2}{T_\mathsf{R}^* \cdot R}} c_\mathsf{B}(t) \\ \frac{k_2 \cdot E_2}{R \cdot T_\mathsf{R}^{*2}} \cdot e^{\frac{-E_2}{T_\mathsf{R}^* \cdot R}} c_\mathsf{B}(t) \end{pmatrix} \qquad \text{(2 TP)}$$

und

$$\boldsymbol{S}^c_{T_\mathsf{R}^*} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}c_A}{\mathrm{d}T_\mathsf{R}^*} \\ \frac{\mathrm{d}c_B}{\mathrm{d}T_\mathsf{R}^*} \\ \frac{\mathrm{d}c_C}{\mathrm{d}T_\mathsf{R}^*} \end{pmatrix} \qquad \text{(1 TP)}$$

Bewertung: Siehe oben. Für den letzten Ausdruck ist auch $\boldsymbol{S}^c_{T_\mathsf{R}^*} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}T_\mathsf{R}^*}$ gültig.

(6 Punkte)

5.3. Lösung:

a) Die Gütefunktion für das allgemeine Parameterschätzproblem lautet

$$J(\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{N} \left(y(t_i, \boldsymbol{p}) - \tilde{y}_i\right)^2 \quad \text{(1 TP)}$$

mit Ausgängen $\boldsymbol{y}$, Messzeiten t_i, Parametern $\boldsymbol{p}$, Anzahl Messungen N und Messwerten $\tilde{y}_i$ (1 TP).

b) Der Ausgang von Gleichung (19) soll zu T_K gewählt werden, d.h.

$$y(t_i, \boldsymbol{p}) = T_\mathsf{K,i} = -\frac{U \cdot A_\mathsf{W} \cdot \Delta T_\mathsf{LN}}{F \cdot c_\mathsf{p}} + T_\mathsf{R,i} \quad \text{(1 TP)}$$

Somit folgt für die Gütefunktion

$$J(\boldsymbol{p}) = \underbrace{J(U)}_{\text{(1 TP)}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \left(\left(-\frac{U \cdot A_\mathsf{W} \cdot \Delta T_\mathsf{LN}}{F \cdot c_\mathsf{p}} + T_\mathsf{R,i} \right) - \tilde{T}_\mathsf{K,i} \right)^2}_{\text{(1 TP)}}$$

Aufstellen des Parameterschätzproblems bezüglich U:

$$\min_U J(U) \quad \text{(1 TP)}$$

c)
$$\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}U}\right|_U = 0 \quad \text{(1 TP)}$$

d) Entsprechend der notwendigen Bedingung in Teilaufgabe 5.3 wird die Ableitung berechnet.

$$\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}U}\right|_U = \underbrace{\sum_{i=1}^{3} 2 \cdot \left(\left(-\frac{U \cdot A_\mathsf{W} \cdot \Delta T_\mathsf{LN}}{F \cdot c_\mathsf{p}} + T_\mathsf{R,i}\right) - \tilde{T}_\mathsf{K,i}\right)}_{\text{(1 TP)}} \cdot \underbrace{\frac{-A_\mathsf{W} \cdot \Delta T_\mathsf{LN}}{F \cdot c_\mathsf{p}}}_{\text{(1 TP)}}$$

Nullsetzen und umstellen:

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{3} T_\mathsf{R,i} - \tilde{T}_\mathsf{K,i}}{\sum_{i=1}^{3} \frac{A_\mathsf{W} \cdot \Delta T_\mathsf{LN}}{F \cdot c_\mathsf{p}}} \quad \text{(1 TP)}$$

Einsetzen:

$$U = \frac{20 + 30 + 35}{3 \cdot \frac{5 \cdot 10}{50 \cdot 4}} \approx 113,3 \quad \text{(1 TP)}$$

Bewertung: Siehe oben. **(11 Punkte)**

Lehrstuhl für Computergestützte Analyse Technischer Systeme

Schriftliche Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Wintersemester 2024/2025

6. Aufgabe: Finite Differenzen (13 Punkte)

Gegeben sei folgender Differenzenausdruck zur Approximation der zweiten räumlichen Ableitung von $g(x)$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{-g_{i+3} + 4g_{i+2} - 5g_{i+1} + 2g_i}{\Delta x^2} + \text{Abbruchfehler} \tag{1}$$

Gegeben seien die Taylorreihen für $g(x)$ entwickelt um g_i, ausgewertet an g_{i+1} und g_{i+2}:

$$g_{i+1} \approx g_i + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=x_i} \Delta x + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \left.\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}\right|_{x=x_i} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \left.\frac{\partial^4 g}{\partial x^4}\right|_{x=x_i} \Delta x^4 + \ldots . \tag{2}$$

$$g_{i+2} \approx g_i + 2\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=x_i} \Delta x + 2 \left.\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} \Delta x^2 + \frac{8}{6} \left.\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}\right|_{x=x_i} \Delta x^3 + \frac{16}{24} \left.\frac{\partial^4 g}{\partial x^4}\right|_{x=x_i} \Delta x^4 + \ldots . \tag{3}$$

6.1. Stellen Sie eine weitere Taylorreihe für $g(x)$ entwickelt um g_i, ausgewertet an g_{i+3} auf, welche Ihnen die Herleitung des Abbruchfehlers in Gleichung (1) ermöglicht. Berücksichtigen Sie die Terme bis zur vierten Ableitung. **(2.5 Punkte)**

6.2. Leiten Sie nun den Abbruchfehler aus Gleichung (1) mithilfe der aufgestellen Taylorreihe aus Aufgabe 6.1 her. Geben Sie einen nachvollziehbaren Rechenweg an. Geben Sie auch die Genauigkeitsordnung an und machen Sie deutlich, welcher Term der Abbruchfehler ist. **(5.5 Punkte)**

6.3. Wie kann der Fehler von Differenzenausdrücken verringert werden? Geben Sie zwei verschiedene Möglichkeiten an. **(2 Punkte)**

6.4. Betrachen Sie die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2g = 0 \quad x \in [0, 5], t \in [0, t_{end}]. \tag{4}$$

Diskretisieren Sie Gleichung (4) mit Hilfe von Ausdruck (1) und dem Euler-vorwärts Verfahren in der Zeit. **(3 Punkte)**

7. Aufgabe: Finite Elemente (14.5 Punkte)

Die gewöhnliche Differenzialgleichung zur Beschreibung der Verschiebung u eines eindimensionalen Stabs mit linear-elastischem Materialverhalten unter stationärer Betrachtung und Annahme kleiner Verformungen sei

$$-\frac{\partial}{\partial x}(A\sigma) = q \qquad \forall x \in \Omega \qquad \text{(Differentialgleichung)} \tag{5a}$$

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \forall x \in \Omega \qquad \text{(Kinematische Beziehung)} \tag{5b}$$

$$\sigma = Ee \qquad \forall x \in \Omega \qquad \text{(Konstitutives Gesetz)} \tag{5c}$$

$$u = 0 \qquad \forall x \in \{0, L\} \qquad \text{(Dirichlet Randbedingungen)} \tag{5d}$$

mit dem Lösungsgebiet $\Omega = [0, L]$, dem Stabquerschnitt A, der Spannung σ, der Dehnung e, der Volumenlast q und dem Elastizitätsmodul $E = 10.0$ und es gilt für die Gesamtlänge des Stabs $L = \sum_{i=1}^{3} l_i$. Wir betrachten das diskrete System eines konischen Stabes in Abbildung 5 mit drei linearen Elementen mit jeweils konstanten Querschnitten A_i über die Teillängen l_i. Beide Enden des Stabs ($x = 0$, $x = L$) sind ist eingespannt.

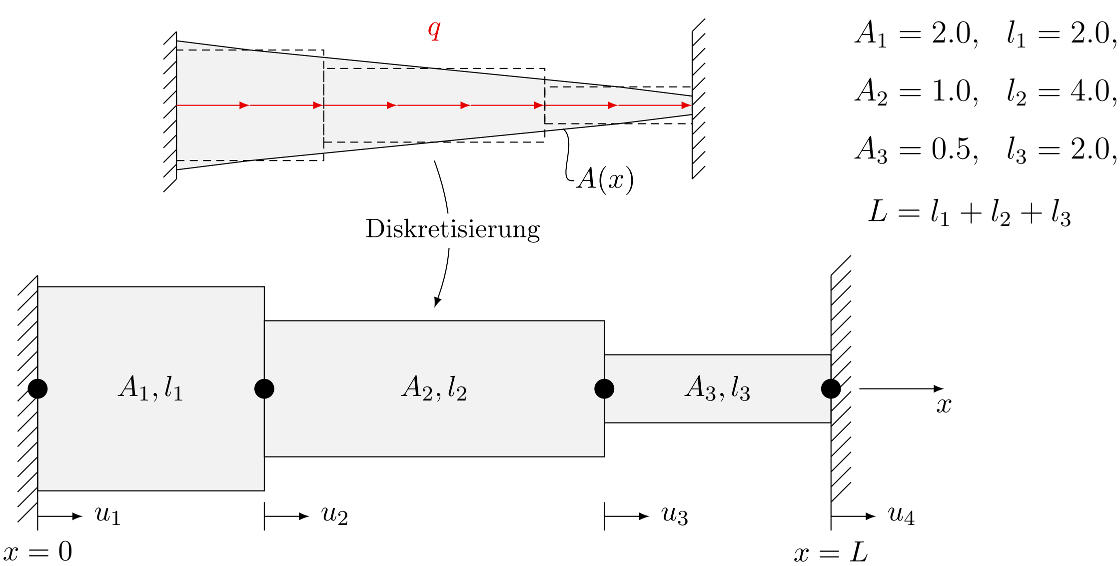


Abbildung 5: Ein konischer Stab unter Streckung, unterteilt in drei finite Elemente.

7.1. Formulieren Sie die Differentialgleichung (5a) in Abhängigkeit der Verschiebung u unter Berücksichtigung der Gleichungen (5b) und (5c). Vereinfachen Sie dabei soweit wie möglich unter Annahme eines konstanten Elastizitätsmoduls E. **(1.5 Punkte)**

7.2. Bilden Sie die schwache Form der Differentialgleichung (5a). Integrieren Sie dabei über das gesamte Lösungsgebiet $\Omega = [0, L]$ und vereinfachen Sie soweit wie möglich unter Annahme eines konstanten Elastizitätsmoduls E. Begründen Sie welche Randterme entfallen und markieren Sie diese deutlich. *Hinweis: Wenden Sie partielle Integration zur Herleitung der schwachen Form an.* **(3 Punkte)**

7.3. Zeichnen Sie in Abbildung 6 auf dem Referenzelement $\Omega^e = [-1, 1]$:

(i) die lokalen Interpolationfunktionen $\phi_1^e(\xi) = \dfrac{1-\xi}{2}$ und $\phi_2^e(\xi) = \dfrac{1+\xi}{2}$,

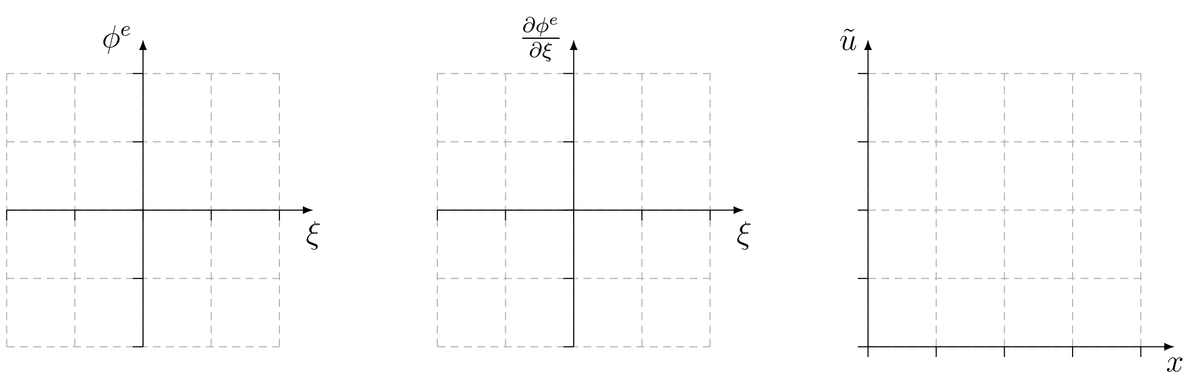
(ii) die erste Ableitung der Interpolationfunktionen nach ξ,

sowie auf dem gesamten Lösungsgebiet $\Omega = [0, L]$ unter Annahme isoparametrischer Elemente:

(iii) die Lösungsapproximation $\tilde{u} = \sum_{i=1}^{4} \phi_i u_i$ unter der Annahme von $u_2 = 0.1$ und $u_3 = 0.2$ ein.

Beschriften Sie beide Achsen vollständig mit Zahlenwerten.

Hinweis: Nutzen Sie in (i) *und* (ii) *die lokalen Interpolationsfunktionen* $\phi_1^e(\xi)$ *und* $\phi_2^e(\xi)$. *In* (iii) *nutzen Sie die globalen Intpolationsfunktionen* $\phi_i(x)$ *an den Knoten* $i = 1, 2, 3, 4$. **(3 Punkte)**



Ihre Antwort zu (i) *Ihre Antwort zu* (ii) *Ihre Antwort zu* (iii)

Abbildung 6: Antwortvorlage mit Referenzelement in (i) und (ii), sowie dem physikalischen Element in (iii).

7.4. Berechnen Sie die Jacobi Determinante $\det \mathbf{J}$ des zweiten Elements. Verwenden Sie das isoparametrische Element aus der vorherigen Aufgabe **7.3** mit den gegebenen linearen Interpolationsfunktionen. *Hinweis: Die Jacobi Matrix wird allgemein durch* $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$, *mit den Indizes* i *und* j *entsprechend der Raumkoordinaten, beschrieben.* **(2 Punkte)**

7.5. Das aus der schwachen Form resultierende lineare Gleichungssystem sei $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$. Markieren Sie in Abbildung 7, welche Einträge der globalen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ und des Lastvektors $\mathbf{f}$ ungleich null sind. *Hinweis: Setzen Sie ein Kreuz in die von Ihnen gewählten Einträge. Möchten Sie ein Kreuz widerrufen, füllen Sie das Kästchen vollständig aus.* **(1 Punkt)**

$$\mathbf{K} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \times & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \qquad \mathbf{f} = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

Abbildung 7: Antwortvorlage mit der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ und dem Lastvektor $\mathbf{f}$.

7.6. Berechnen Sie den Zahlenwert des Eintrags $\mathbf{K}_{12}$ der globalen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ (s. Kreuzmarkierung in Abb. 7) unter Annahme des isoparametrischen Elements mit den gegebenen linearen Interpolationsfunktionen aus **7.3**. *Hinweis: Nehmen Sie den Integralterm* $\int_\Omega \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\left(EA\frac{\partial \phi_j}{\partial x}\right) dx$ *zur Berechnung des Eintrags* $\mathbf{K}_{ij}$ *entsprechend der Knoten* $\{i, j\} = 1, 2, 3, 4$ *an.* **(4 Punkte)**

8. Aufgabe: Finite Volumen (12.5 Punkte)

Betrachten Sie im Folgenden die gegebene zweidimensionale partielle Differentialgleichung für $\phi(x, y)$ mit bekanntem Quellterm $s(x, y)$ ($\eta = const$, $\mathbf{c} = const$):

$$\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi - \eta \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi = s(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \Omega. \tag{6}$$

8.1. Bestimmen Sie die integrale Form der Gleichung im allgemeinen Gebiet Ω und vereinfachen Sie analytisch so weit wie möglich. Nutzen Sie den Satz von Gauss:

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{g} \, \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s. \tag{7}$$

Beachten Sie, dass für eine skalarwertige Funktion f und einen konstanten Vektor $\mathbf{g}$ ebenfalls gilt:

$$\int_V \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\nabla} f \, \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \mathbf{g} \cdot f\mathbf{n} \, \mathrm{d}s. \tag{8}$$

(2 Punkte)

Gegeben sei nun folgendes wabenförmiges Rechengebiet, ausgefüllt mit einem zweidimensionalen Gitter aus gleichseitigen Sechsecken.

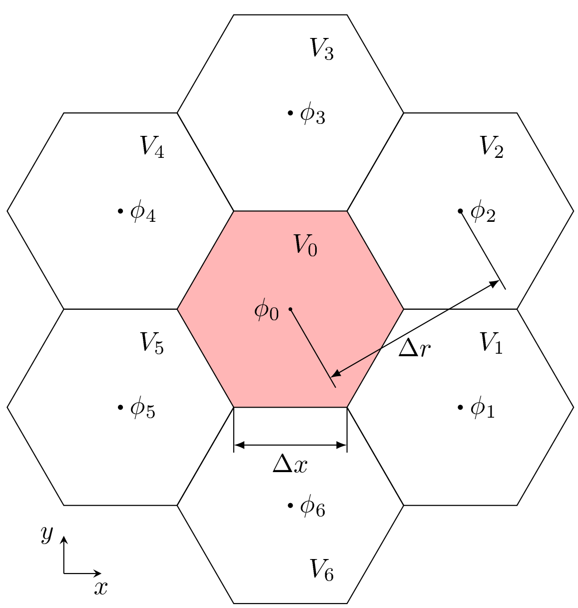


Abbildung 8: 2D Gitter.

8.2. Nennen Sie die zwei verschiedenen Art der Gitteranordnung bei der Finite-Volumen-Diskretisierung.
Welche Gitteranordnung wird in Abbildung 8 verwendet? Benennen Sie die Ihnen bekannte Art von Randbedingung, die bei diesem Gittertyp direkt vorgegeben werden kann und begründen Sie weshalb. **(2.5 Punkte)**

In den folgenden Aufgabenteilen soll die Gleichung nun vollständig für das interne Volumen V_0 diskretisiert werden.

8.3. Bestimmen Sie dazu zunächst die Abstände benachbarter Zellzentren Δr als Funktion von Δx.
Hinweis: Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit Kantenlänge l beträgt $h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$.
(1 Punkt)

8.4. Diskretisieren Sie nun die Flussterme für das Volumen V_0 unter Verwendung möglichst einfacher, zentraler Approximationen. Beachten Sie dazu, dass die Flüsse entlang jeder einzelnen Randlinie konstant sind. Vereinfachen Sie so weit wie möglich. Geben Sie die Lösung in Abhängigkeit gegebener Größen an. **(3 Punkte)**

8.5. Überführen Sie anschließend die übrigen Randterme für das Volumen V_0 nach der Ihnen bekannten Vorgehensweise in Summenform und vereinfachen Sie so weit wie möglich. Nehmen Sie zur Vereinfachung die Randnormalen $\mathbf{n}_k$ als gegeben an. Geben Sie die Lösung in Abhängigkeit gegebener Größen an. **(3 Punkte)**

8.6. Diskretisieren Sie nun Gleichung 6 vollständig für das Volumen V_0. Setzten Sie alle berechneten Terme ein. *Hinweis: Wenden Sie die Volumenmittelung an.* **(1 Punkt)**

9. Aufgabe: Fehler (10 Punkte)

Gegeben sei die instationäre eindimensionale Diffusionsgleichung zur Modellierung des Transports einer chemischen Spezies ϕ auf dem Gebiet $x \in [0m, 2m]$ im Zeitraum $t \in [0s, 5s]$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0\,, \tag{9}$$

mit dem Diffusionskoeffizienten $\lambda = 3.2\frac{m^2}{s}$. Die Gleichung kann mit dem folgenden expliziten Differenzenschema diskretisiert werden.

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} - \lambda \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0\,. \tag{10}$$

Gehen Sie dabei von einem äquidistanten Gitter aus

$$x_i = i \cdot \Delta x. \tag{11}$$

9.1. Bestimmen sie mit Hilfe der v. Neumann-Stabilitätsanalyse die Stabilitätsgrenze des Verfahrens. Verwenden sie als Ansatz

$$\phi(x,t) = V(t)e^{I(k\cdot x)}, \qquad I = \sqrt{-1}, \qquad k \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Hinweis: Euler'sche Formel $e^{\pm I\Phi} = cos(\Phi) \pm I sin(\Phi)$ **(6 Punkte)**

9.2. Das Diskretisierungsverfahren (10) soll auf einem Gitter mit 5 Elementen und mit einer Zeitschrittweite $\Delta t = 0.1s$ durchgeführt werden.

Hinweis: Sollten sie Aufgabe 9.1 nicht gelöst haben, verwenden sie die Stabilitätsgrenze $r = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$.

a) Warum ist die angegebene Diskretisierung nicht sinnvoll? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Wie müsste sinnvollerweise die Diskretisierung jeweils angepasst werden. Geben Sie je ein Beispiel für eine korrekte Wahl der Diskretisierung in Raum und Zeit an, halten Sie dabei alle weiteren Größen jeweils konstant. Beachten Sie die äquidistante Gitterschrittweite.

c) Welche Größe darf nicht verändert werden? Welche Fehlerart würde aus der Änderung dieser Größe resultieren.

(4 Punkte)

Musterlösung zur schriftlichen Prüfung

Simulationstechnik: Klausur

Wintersemester 2024/2025

6. Aufgabe: Finite Differenzen (13 Punkte)

* Lösung *

6.1. Lösung:

$$g_{i+3} \approx g_i + 3\frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{x=x_i}\Delta x + \frac{9}{2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^2 + \frac{27}{6}\,\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^3 + \frac{81}{24}\,\frac{\partial^4 g}{\partial x^4}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^4 + \ldots. \tag{1}$$

Richtiger Entwicklungspunkt und Auswertepunkt und Ungefährzeichen/+... 0,5

jeder weitere Term 0,5 0,5 0,5 0,5

$\frac{2.5}{2.5}$

6.2. Lösung: Berechne Term: $-g_{i+3} + 4g_{i+2} - 5g_{i+1} + 2g_i$ 1

$$-g_{i+3} + 4g_{i+2} - 5g_{i+1} + 2g_i = 2g_i \tag{2}$$

$$-g_i - 3\frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{x=x_i}\Delta x - \frac{9}{2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^2 - \frac{27}{6}\,\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^3 - \frac{81}{24}\,\frac{\partial^4 g}{\partial x^4}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^4 \tag{3}$$

$$+4g_i + 8\frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{x=x_i}\Delta x + 8\,\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^2 + \frac{16}{3}\,\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^3 + \frac{8}{3}\,\frac{\partial^4 g}{\partial x^4}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^4 \tag{4}$$

$$-5g_i - 5\frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{x=x_i}\Delta x - \frac{5}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^2 - \frac{5}{6}\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^3 - \frac{5}{24}\frac{\partial^4 g}{\partial x^4}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^4 \quad 2 \tag{5}$$

Vereinfachen:

$$-g_{i+3} + 4g_{i+2} - 5g_{i+1} + 2g_i = 0\,\frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{x=x_i}\Delta x + 1\,\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^2 + 0\,\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^3 - \frac{11}{12}\frac{\partial^4 g}{\partial x^4}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^4 \quad 1 \tag{6}$$

Umformen:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{-g_{i+3} + 4g_{i+2} - 5g_{i+1} + 2g_i}{\Delta x^2} + \underbrace{\frac{11}{12}\frac{\partial^4 g}{\partial x^4}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^2}_{Abbruchfehler} \quad 0{,}5 \tag{7}$$

Der Ausdruck ist 2. Ordnung genau. 0,5 Abbruchfehler markiert 0,5

$\frac{5.5}{5.5}$

6.3. Lösung:

Δx verringern 1

Die Genauigkeitsordnung erhöhen 0.5 , indem man das Stencil anpasst/ mehr Stützstellen benutzt 0.5

$\frac{2}{2}$

6.4. Lösung:

$$\frac{g_i^{n+1} - g_i^n}{\Delta t} \; 1 - \frac{-g_{i+3}^n + 4g_{i+2}^n - 5g_{i+1}^n + 2g_i^n}{\Delta x^2} \; 1 + 2g_i^n \; 1 = 0 \tag{8}$$

0.5 Punkte Abzug pro falschem oder fehlendem Index

$\frac{3}{3}$

7. Aufgabe: Finite Elemente (14.5 Punkte)

* Lösung *

7.1. Lösung:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right) = q \; 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad -E\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x}\right) = q \tag{9}$$

E ausgeklammert, da $E = \text{const}$ und A nicht ausgeklammert, da $A = A(x)$ 0.5 $\frac{1.5}{1.5}$

7.2. Lösung: Für $\int_\Omega$ gilt auch $\int_0^L$, für $\big]_0^L$ gilt auch $\big]_\Gamma$ oder $\big]_{\partial\Omega}$.

Multiplikation mit Testfunktion w und Integration über Lösungsgebiet:

$$\underbrace{-\int_\Omega w\frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx}_{0.5} = \underbrace{\int_\Omega wq\,dx}_{0.5} \qquad \underbrace{\forall w}_{0.5} \tag{10a}$$

Vereinfachung durch $E = \text{const}$:

$$\underbrace{-E\int_\Omega w\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx}_{E=\text{const außerhalb und } A=A(x) \text{ im Integral } 0.5} = \int_\Omega wq\,dx \qquad \forall w \tag{10b}$$

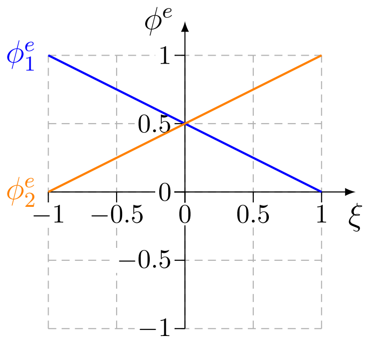
Anwendung partieller Integration:

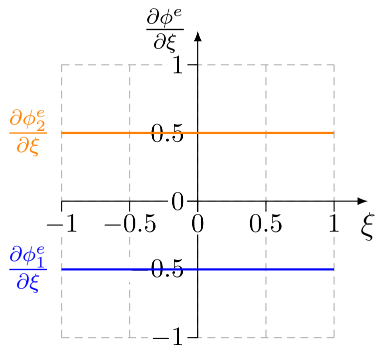
$$E\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx = \int_\Omega wq\,dx + \underbrace{\cancelto{0}{\left[wEA\frac{\partial u}{\partial x}n\right]_0^L}}_{w=0 \text{ auf Dirichlet-Rand } x\in\{0,L\} \text{ (und keine Neumann R.b.) } 1.0} \tag{10c}$$

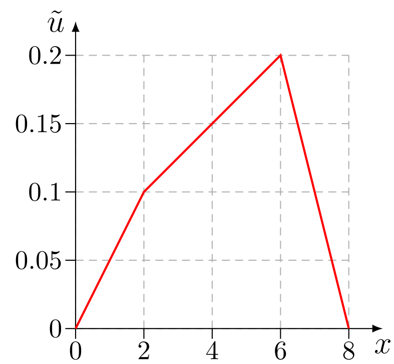
$$\forall w \in \{w \,|\, w = 0 \;\forall x \in \{0, L\}\}$$

$\frac{3}{3}$

7.3. Lösung:







(i): 0.5 + 0.5 (ii): 0.5 + 0.5 (iii): 1

Für (i) & (ii): Jeweils einen **halben Punkt** für die richtig eingezeichneten Funktionen mit eindeutiger Achsenbeschriftung und einen **halben Punkt** für die richtige Zuordnung der Funktionen (Legendenbeschriftung).

$\frac{3}{3}$

7.4. Lösung:

Isoparametrische Interpolation der physikalischen Koordinaten durch

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^{2} x_i^e \phi_i^e(\xi) \quad 0.5 \tag{11}$$

Ableitung der physikalischen Koordinate nach der Referenzkoordinate liefert die Jacobi Matrix (hier in 1D eine skalare Größe und damit gleich der Jacobi Determinanten)

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sum_{i=1}^{2} x_i^e \phi_i^e\right) = \sum_{i=1}^{2} x_i^e \frac{\partial \phi_i^e}{\partial \xi} \quad 0.5 \tag{12a}$$

$$= x_1^e\left(-\frac{1}{2}\right) + x_2^e\left(\frac{1}{2}\right) \tag{12b}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(x_2^e - x_1^e)}_{0.5} = \frac{l_2}{2} = \underbrace{2.0}_{0.5} \tag{12c}$$

$\frac{2}{2}$

7.5. Lösung: Grundsätzlich sind beide Lösungsansätze als korrekt zu werten:

System vor Beachtung der Dirichlet-R.b.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_{11}u_1 + \mathbf{K}_{12}u_2 + \cancelto{0}{\mathbf{K}_{13}u_3} + \cancelto{0}{\mathbf{K}_{14}u_4} &= f_1\\
\mathbf{K}_{21}u_1 + \mathbf{K}_{22}u_2 + \mathbf{K}_{23}u_3 + \cancelto{0}{\mathbf{K}_{24}u_4} &= f_2\\
\cancelto{0}{\mathbf{K}_{31}u_1} + \mathbf{K}_{32}u_2 + \mathbf{K}_{33}u_3 + \mathbf{K}_{34}u_4 &= f_3\\
\cancelto{0}{\mathbf{K}_{41}u_1} + \cancelto{0}{\mathbf{K}_{42}u_2} + \mathbf{K}_{43}u_3 + \mathbf{K}_{44}u_4 &= f_4
\end{aligned}
$$

$$\downarrow$$

vorgegeben

$$
\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \times & \times & & \\ \times & \times & \times & \\ & \times & \times & \times \\ & & \times & \times \end{bmatrix} \quad 0.5 \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} \quad 0.5
$$

System nach Beachtung der Dirichlet-R.b.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_{11}u_1 + \mathbf{K}_{12}u_2 + \mathbf{K}_{13}u_3 + \cancelto{0}{\mathbf{K}_{14}u_4} &= f_1\\
\mathbf{K}_{21}u_1 + \cancelto{0}{\mathbf{K}_{22}u_2} + \cancelto{0}{\mathbf{K}_{23}u_3} + \cancelto{0}{\mathbf{K}_{24}u_4} &= \cancelto{0}{f_2}\\
\cancelto{0}{\mathbf{K}_{31}u_1} + \cancelto{0}{\mathbf{K}_{32}u_2} + \cancelto{0}{\mathbf{K}_{33}u_3} + \mathbf{K}_{34}u_4 &= \cancelto{0}{f_3}\\
\cancelto{0}{\mathbf{K}_{41}u_1} + \mathbf{K}_{42}u_2 + \mathbf{K}_{43}u_3 + \mathbf{K}_{44}u_4 &= f_4
\end{aligned}
$$

$$\downarrow$$

vorgegeben

$$
\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \\ \times & & & \\ & & & \times \\ & \times & \times & \times \end{bmatrix} \quad 0.5 \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \times \\ \\ \\ \times \end{bmatrix} \quad 0.5
$$

... oder jede andere gültige Reihenpermuation.

$\frac{1.0}{1.0}$

7.6. Lösung:

$$
\mathbf{K}_{12} = E \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\left(A \frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right) dx \tag{13a}
$$

$$
= EA_1 \int_0^{l_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\, dx + \underbrace{EA_2 \int_{l_1}^{l_1+l_2} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\, dx}_{\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 0} + \underbrace{EA_3 \int_{l_1+l_2}^{L} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\, dx}_{\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 0} \tag{13b}
$$

$$
= EA_1 \int_0^{l_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\, dx \quad 1 \tag{13c}
$$

Kettenregel für $\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\partial \phi_i^e}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $i = 1, 2$ mit $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{l_1}$ anwenden 1 .

Mapping auf $\Omega^{\xi} = [-1, 1]$ mit $dx = \det \mathbf{J} d\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi = \frac{l_1}{2} d\xi$ 0.5 .

$$
= EA_1 \int_{-1}^{1} \frac{\partial \phi_1^e}{\partial \xi}\frac{2}{l_1}\,\frac{\partial \phi_2^e}{\partial \xi}\frac{2}{l_1}\,\frac{l_1}{2}\, d\xi = \frac{2EA_1}{l_1}\int_{-1}^{1} \frac{\partial \phi_1^e}{\partial \xi}\frac{\partial \phi_2^e}{\partial \xi}\partial \xi \tag{13d}
$$

Ableitung der Interpolationfunktionen $\frac{\partial \phi_1^e}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}$ und $\frac{\partial \phi_2^e}{\partial \xi} = \frac{1}{2}$ 0.5 .

$$= -\frac{EA_1}{2l_1}\int\limits_{-1}^{1} d\xi = -\frac{EA_1}{2l_1}\left[\xi\right]_{-1}^{1} = -\frac{EA_1}{2l_1}(1-(-1)) = -\frac{EA_1}{l_1} \quad 0.5 \tag{13e}$$

$$= -10.0 \quad 0.5 \tag{13f}$$

$$\frac{4}{4}$$

$$\sum_{A7} = \frac{14.5}{14.5}$$

8. Aufgabe: Finite Volumen (12.5 Punkte)

* Lösung *

8.1. Lösung:

Integrale Form und Umformen mit Satz von Gauss:

$$\int_{\Omega} \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi \,\mathrm{d}\Omega - \eta \int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\phi) \,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} s(x,y) \,\mathrm{d}\Omega, \qquad 1 \tag{14}$$

$$\iff \oint_{\partial\Omega} \mathbf{c}\phi \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}s - \eta \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}s = \int_{\Omega} s(x,y) \,\mathrm{d}\Omega. \qquad 1 \tag{15}$$

$$\tag{16}$$

0.5 Punkte Abzug pro Fehler (z.B. Skalarprodukt Punkt falsch, Integral oder Integralgebiet falsch, Quellterm s falsch) $\frac{2}{2}$

8.2. Lösung:

Zellzentriert und Knotenzentriert 1

Hier: Zellzentriert 0.5

Neumann R.B. 0.5 da an Zellwänden der Fluss von der Ableitung abhängt. 0.5

$\frac{2.5}{2.5}$

8.3. Lösung:

Mit dem gegeben Hinweis zu gleichseitigen Dreiecken folgt:

$$\Delta r = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta x. \qquad 1 \tag{17}$$

$\frac{1}{1}$

8.4. Lösung:

Verwendung der Richtungsableitung sowie zentraler Differenzen liefert entsprechend für den zweiten Term:

$$\eta \oint_{\partial V_0} \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}s = \eta \sum_{j=1}^{6} \int_{(\partial V_0)_j} \boldsymbol{\nabla}\phi_{0,j} \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}s_j \qquad 1 \tag{18}$$

$$= \eta \sum_{j=1}^{6} \left(\boldsymbol{\nabla}\phi_{0,j} \cdot \mathbf{n} \right) \Big|_j \Delta s \qquad 1 \tag{19}$$

$$\approx \eta \sum_{j=1}^{6} \frac{\phi_j - \phi_0}{\Delta r_{0,j}} \Delta s \qquad 1.5 \tag{20}$$

$$= \eta \sum_{j=1}^{6} \frac{\phi_j - \phi_0}{\sqrt{3}\Delta x} \Delta x. \qquad 0.5 \tag{21}$$

$\frac{3}{3}$

8.5. Lösung:

Vereinfachung der Randintegrale jeweils durch Summation über stückweise lineare Kanten (∂V). Unter Benutzung von Mittelung können die gesuchten Größen des ersten Integrals auf dem Rand bestimmt werden:

$$\oint_{\partial V_0} \mathbf{c}\phi \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s = \sum_{j=1}^{6} \mathbf{c}\phi_{0,j} \cdot \mathbf{n}_j \Delta s \qquad 1 \tag{22}$$

$$\approx \sum_{j=1}^{6} \mathbf{c}\frac{1}{2}\left(\phi_0 + \phi_j\right) \cdot \mathbf{n}_j \Delta s \qquad 1.5 \tag{23}$$

$$= \sum_{j=1}^{6} \mathbf{c}\frac{1}{2}\left(\phi_0 + \phi_j\right) \cdot \mathbf{n}_j \Delta x. \qquad 0.5 \tag{24}$$

$\frac{3}{3}$

8.6. Lösung:

$$\sum_{j=1}^{6} \mathbf{c}\frac{1}{2}\left(\phi_0 + \phi_j\right) \cdot \mathbf{n}_j \Delta x - \eta \sum_{j=1}^{6} \frac{\phi_j - \phi_0}{\sqrt{3}\Delta x} \Delta x = s(x_0, y_0)\,|V_0| \qquad \forall (x, y) \in \Omega. \tag{25}$$

Richtiges einsetzen der Terme von oben und Einsetzen der Zellabstände 0.5 Indizes bei s und V_0 oder Integral 0.5 $\frac{1}{1}$

$$\sum\nolimits_{A3} = \frac{12.5}{12.5}$$

9. Aufgabe: Fehler (10 Punkte)

* Lösung *

9.1. Lösung: Das Einsetzen des Ansatzes an den Stützstellen, z.B.

$$\phi_i^n = \phi(x_i, t^n) = V(t^n)e^{I(k\cdot x_i)} = V^n e^{I(k\cdot i\cdot\Delta x)}, \quad 1 \tag{26}$$

ergibt

$$\frac{V^{n+1}-V^n}{\Delta t}e^{I(k\cdot i\cdot\Delta x)} - \frac{\lambda V^n}{\Delta x^2}(e^{I(k\cdot(i+1)\cdot\Delta x)} - 2e^{I(k\cdot i\cdot\Delta x)} + e^{I(k\cdot(i-1)\cdot\Delta x)}) = 0\,. \quad 1 \tag{27}$$

Durch Auflösen nach $\frac{V^{n+1}}{V^n}$ folgt

$$\frac{V^{n+1}}{V^n} = 1 + \frac{\Delta t\lambda}{\Delta x^2}\left(e^{Ik\Delta x} - 2 + e^{-Ik\Delta x}\right). \quad 1 \tag{28}$$

Unter Verwendung der Euler'schen Formel $e^{\pm I\Phi} = cos(\Phi) \pm I sin(\Phi)$ und der Stabilitätsbedingung $\left|\frac{V^{n+1}}{V^n}\right| \leq 1$ erhält man

$$\left|\frac{V^{n+1}}{V^n}\right| = \left|1 + \frac{\Delta t\lambda}{\Delta x^2}\cdot \underbrace{2\cdot\underbrace{\left(\underbrace{cos(k\Delta x)}_{[-1,1]} - 1\right)}_{[-2,0]}}_{[-4,0]}\right| \leq 1 \qquad 2 \tag{29}$$

und daraus

$$r = \frac{\lambda\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}. \quad 1 \tag{30}$$

$\frac{6}{6}$

9.2. Lösung:

a) Mit der von Neumann-Zahl $r = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$ erhält man für die angegebene Disretisierung und den vorgebenen Diffusionskoeffizienten:

$$r = \frac{3.2 \cdot 0.1}{(0.4)^2} = 2 > \frac{1}{2}, \tag{31}$$

d.h. die Stabilitätsgrenze wird nicht eingehalten. 1

b) Die für eine stabile Lösung maximale Zeitschrittweite kann wie folgt berechnet werden:

$$\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t_{stabil} \leq \frac{\Delta x^2}{2\lambda} = \frac{(0.4)^2}{2\lambda} = 0.025s \quad 1. \tag{32}$$

Analog ergibt sich für die räumliche Diskretisierung:

$$\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta x_{stabil} \geq \sqrt{2\lambda \Delta t} = 0.8m. \tag{33}$$

Da eine äquidistante Diskretisierung gefordert ist, darf das Gebiet ($L = 2m$) mit <u>maximal 2 Elementen</u> diskretisiert werden. 1

c) Der Diffusionskoeffizient λ darf nicht angepasst werden. Dies würde zu einem Modellierungsfehler führen. 1

$\frac{4}{4}$

$\sum_{A4} = \frac{10}{10}$