**EJERCICIOS 1 -CALCULO 10001 - A 01**
**27 de marzo de 2009**

Prof: Gladys Bobadilla A.

---

REPASO DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

---

1. Resuelva las siguientes ecuaciones.

   *a)* $(x+1)(x+2)+2(x-1)(x-2)=3(x-2)(x+2)$.

   *b)* $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=0$.

   *c)* $\left(\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)\left(\dfrac{3}{4x}+\dfrac{x}{4}-x\right)=\dfrac{\left(x-3+\dfrac{5x}{2x-6}\right)\dfrac{3x}{2}}{2x-1+\dfrac{15}{x-3}}$.

   *d)* $x^2-x+\sqrt{2}-2=0$.

   *e)* $\dfrac{3}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{1}{x(x-1)^2}+\dfrac{3}{x(x-3)}$.

   *f)* $(2a^2-3a-2)x^2+(a^2+7a+2)x-a^2-2a=0$, donde $a$ es una constante.

   *g)* $x^4-20x^2+81=0$.

   *h)* $x^4-a(a+b)x^2+a^3b=0$, $a$ y $b$ son constantes.

   *i)* $1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}=0$.

   *j)* $x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}=0$.

2. Factorice los siguientes polinomios en factores lineales y cuadráticos con coeficientes en $\mathbb{R}$.

   *a)* $x^2-1, \quad x^3-1, \quad x^4-1, \quad x^3+1, \quad x^3+8$.

   *b)* $x^4+1$. Indicación: sume y reste $2x^2$.

   *c)* $x^4+4$. Indicación: sume y reste $4x^2$.

   *d)* $x^4+x^2+1$. Indicación: sume y reste $x^2$.

   *e)* $x^4-x^2+1$. Indicación: sume y reste $2x^2$.

   *f)* $x^6-1, \quad x^6+1$.

3. **Resolución de ecuaciones cúbicas recíprocas** Para ello, factorice según los coeficientes y obtendrá como raíz 1 o $-1$. Enseguida resuelva la ecuación cuadrática correspondiente.

   *a)* $3x^3-13x^2+13x-3=0$.

   *b)* $2x^3+7x^2+7x+2=0$.

   *c)* $5x^3-31x^2+31x-5=0$.

4. Escriba una ecuación cúbica con las raíces: $0$ , $1$ y $-1$.

5. Resuelva la ecuación dada sabiendo que una raíz es $\frac{1}{2}$.

$$20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 = 0.$$

6. Resuelva la ecuación dada sabiendo que una raíz es $(a+1)$.

$$x^3 - (2a+1)x^2 + a(a+2)x - a(a+1) = 0.$$

7. Sea $p$ el polinomio definido por:

$$p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2.$$

   *a*) Verifique que :
   $$p(x) = (x+1)(2x^2 - 3x - 2).$$

   *b*) Resuelva la ecuación $p(x) = 0$.

8. **La fórmula de Cardano-Tartaglia para resolver ecuaciones cúbicas**.

   *a*) Verifique que el cambio de variable $y = x - \frac{a}{3}$ transforma la ecuación

   $$y^3 + ay + by + c = 0$$

   en una de la forma $x^3 + px + q = 0$, donde $p = b - \frac{a^2}{3}$ y $q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$.

   *b*) Verifique que $x^3 + px + q = 0$, si

   $$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

   Fórmula de G. Cardano (1501-1571) y N. Tartaglia (1506- 1557).

   *c*) Encuentre una raíz de la ecuación $x^3 + 3x + 2 = 0$.

9. Existe un teorema que dice que las posibles raíces enteras de una ecuación algebraica con **coeficientes enteros** de la forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x^1 + a_0 = 0,$$

son los divisores de $a_0$.

   *a*) Use este teorema para encontrar una raíz entera de la ecuación $x^3 - 6x + 4 = 0$.

   *b*) Encuentre todas las raíces de $x^3 - 6x + 4 = 0$.

   *c*) Factorice $x^3 - 6x^2 + 5x - 12$.

10. *a*) Encuentre todas las raíces de $x^3 + x^2 - 2 = 0$, usando el teorema de las raices racionales.

   *b*) Use la fórmula de Cardano-Tartaglia para expresar la raíz racional de la ecuación en términos de radicales.

   *c*) Demuestre que
   $$\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = 4.$$

11. Si $(x + 3y)$es un factor de $x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$, factorice completamente la expresión.

12. Si 2 y $-2$ son raíces de la ecuación $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 12x - 8 = 0$, encuentre las otras raíces de la ecuación.

13. Consideremos la ecuación :

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0 \tag{1}$$

   *a*) ¿Es $x = 0$ una solución de la ecuación (1)? Deduzca que resolver la ecuación (1) es equivalente a resolver la ecuación

$$6x^2 + 5x - 38 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0. \tag{2}$$

   *b*) Sea $z = x + \dfrac{1}{x}$,

      1) Exprese $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ en términos de $z^2$.

      2) Verifique que la ecuación (2) se escribe como:

$$6z^2 + 5z - 50 = 0. \tag{3}$$

      3) Resuelva la ecuación (3)

   *c*) 1) Resuelva la ecuación:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}.$$

      2) Resuelva la ecuación:

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}.$$

      3) Deduzca las soluciones de la ecuación (1).

14. Investique la posibilidad de aplicar el método descrito en el ítem anterior a la ecuación del ejercicio (12). Escriba claramente su conclusión.

15. ¿Para qué valores de $a$ y $b$ el polinomio $x^2 + 3x + 2$ es factor de $x^3 + ax^2 + bx + 4$?

16. Un alambre tiene la forma de un triángulo equilátero que encierra un área de $A$ cm$^2$. Si posteriormente, al alambre se le da forma de una circunferencia, encuentre una expresión para el área del círculo correspondiente.