Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Prueba N°3
Cálculo I (IME002)

Profesores: Mauricio Carrillo, Alex Sepúlveda.

08 de Julio 2008.

<u>Atención:</u> No está permitido el uso de la regla de L'Hôpital, ni calculadora.

1. Calcule los siguientes límites.

   a) $\lim\limits_{x \to \infty} (2x+1)\, sen \frac{1}{x}$.

   b) $\lim\limits_{x \to 3^+} (7-2x)^{\frac{1}{x-3}}$.

   Solución.

   a) Haciendo el cambio de variable $y = \frac{1}{x}$ tenemos $x \to \infty \Rightarrow y \to 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} (2x+1)\, sen \frac{1}{x} &= \lim_{y \to 0} \left(\frac{2}{y} + 1 \right) sen\,(y) \\ &= \lim_{y \to 0} \left[\frac{2 \sin y}{y} + \sin y \right] \\ &= 2. \end{aligned}$$

   b) Escribamos $\lim\limits_{x \to 3^+} (7-2x)^{\frac{1}{x-3}} = \lim\limits_{x \to 3^+} (1 + 2\,(3-x))^{\frac{-1}{3-x}}$. Haciendo $y = 2\,(3-x) \Rightarrow \frac{-2}{y} = \frac{-1}{3-x}$. Si $x \to 3^+ \Rightarrow y \to 0^-$. Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3^+} (1 + 2\,(3-x))^{\frac{-1}{3-x}} &= \lim_{y \to 0^-} (1+y)^{\frac{-2}{y}} \\ &= \lim_{y \to 0^-} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}} \right]^{-2} \\ &= e^{-2}. \end{aligned}$$

2. Demuestre que $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ es continua en $x = 0$, pero no derivable en ese punto.

Solución.

Escribimos f como

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{1}{1-x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Para la continuidad tenemos,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1-x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Así, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Además, $f(0) = 1$, por tanto, f es continua en $x = 0$.

Para la derivabilidad en $x = 0$ tenemos,

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1}{1-h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{1-h} = 1.$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-1}{1+h} = -1.$$

Como $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ se concluye que f no es derivable en $x = 0$.

3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada por $f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x - 7$ en $x = 2$.

Solución.

Calculando $f(2) = 9$ tenemos el punto $(2, 9)$. Por su parte, la pendiente está dada por $m = f'(2) = 26$, donde $f'(x) = 4x^3 - 6x + 6$. Luego la ecuación de la recta tangente queda como $y - 9 = 26(x - 2)$, es decir, $y = 26x - 43$.

4. Calcule,

   a) $f'(x)$ si $f(x) = \sin(x \sin x) + \sin(\sin x^2)$.

   b) $f'(x)$ si $f(x) = \ln \sqrt{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}} + \frac{\pi}{3}$. Simplifique al máximo su respuesta.

   c) y' si $e^{xy} + \ln(x^2 y) = 6$.

Solución.

   a) Para la primera derivada de $f(x) = \sin(x \sin x) + \sin(\sin x^2)$ tenemos,

$$f'(x) = \cos(x \sin x)[\sin x + x \cos x] + \cos\left(\sin x^2\right)\left(\cos x^2\right) 2x.$$

b) Si $f(x) = \ln \sqrt{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}} + \frac{\pi}{3}$ entonces

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}}} \cdot \left[\frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}\right] \\
&= \frac{-1}{2} \cdot \frac{(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)} \cdot \frac{\left[(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2\right]}{(\sin x - \cos x)^2} \\
&= \frac{-1}{(\sin x + \cos x)} \cdot \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x - \cos x)} \\
&= \frac{-1}{(\sin^2 x - \cos^2 x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2 - \sin^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos 2x} \\
&= \sec 2x.
\end{aligned}$$

c) Derivando implícitamente tenemos,

$$\begin{aligned}
e^{xy}(y + xy') + \frac{1}{x^2 y}\left(2xy + x^2 y'\right) &= 0 \\
y'\left[xe^{xy} + \frac{1}{y}\right] &= -\left(ye^{xy} + \frac{2}{x}\right) \\
y' &= \frac{-\left(ye^{xy} + \frac{2}{x}\right)}{xe^{xy} + \frac{1}{y}}.
\end{aligned}$$

5. Calcule $f^{(n)}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ si $f(x) = \ln(ax + b)$, donde a y b son constantes.

Solución.

Si $f(x) = \ln(ax + b)$ entonces

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{a}{ax + b} \\
f''(x) &= \frac{-1 \cdot a^2}{(ax + b)^2} \\
f'''(x) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot a^3}{(ax + b)^3} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a^4}{(ax + b)^4} \\
f^{(5)}(x) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a^5}{(ax + b)^5} \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

Concluimos que $f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot a^n}{(ax+b)^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.