Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Prueba N°2
Cálculo I (IME002)

Profesores: Mauricio Carrillo, Alex Sepúlveda.

06 de Mayo 2008.

1. Encuentre el valor de a, para que la recta $2x + ay = 4$ sea tangente a la circunferencia $4x^2 + 4y^2 - 16x - 40y + 107 = 0$.

   Solución.

   Completando cuadrados encontramos que el cento de la circunferencia está en $C\,(2, 5)$ y tiene radio $r = \frac{3}{2}$. Como la recta $2x + ay = 4$ es tangente a la circunferencia se debe cumplir que la distancia del centro a ella es igual al radio, luego usando la formula de distancia de un punto a una recta y una vez simplificado tenemos la ecuación,

$$\frac{|5a|}{\sqrt{4 + a^2}} = \frac{3}{2}.$$

   Elevando al cuadrado y despejando a obtenemos $a = \pm\frac{6}{\sqrt{91}} = \pm\frac{6\sqrt{91}}{91}$.

2. Considere la función $f\,(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$. Analice,

   a) Dominio, recorrido y ceros.

   b) Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.

   c) Determine la función inversa restringiendo el dominio y/o recorrido si es necesario.

   d) Esboce la gráfica de f.

   Solución.

   a) La raíz cuadrada existe en $\mathbb{R}$ sólo cuando la cantidad subradical es no negativa, pero el denomnador no puede ser nulo, por tanto, $Dom\,(f) = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$. Escribiendo $y = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ y despejando x obtenemos $x = \frac{y^2}{(1y^2)^2}$, de donde $Rec\,(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Respecto a los ceros de f, se encuentra fácilmente que $x = 0$ es el único.

b) Para la inyectividad comenzamos de $f(x_1) = f(x_2)$, es decir, $\frac{\sqrt{x_1}}{1-\sqrt{x_1}} = \frac{\sqrt{x_2}}{1-\sqrt{x_2}}$, con $x_1, x_2 \in Dom(f)$. Eliminando denominadores y simplificando obtenemos $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$, de donde, $x_1 = x_2$, luego f es inyectiva. Claramente f no es sobreyectiva pues -1 no tiene preimagen. Por tanto, f no es biyectiva.

c) La función $f : \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x \mapsto f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ es biyectiva, por tanto, invertible. Para la inversa tenemos,

$$\begin{aligned} \left(f \circ f^{-1}\right)(x) &= x \\ f\left(f^{-1}(x)\right) &= x \\ \frac{\sqrt{f^{-1}(x)}}{1-\sqrt{f^{-1}(x)}} &= x, \end{aligned}$$

de donde, $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$. Concluyendo, $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$, $x \mapsto f^{-1}(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$

d) La gráfica de f es

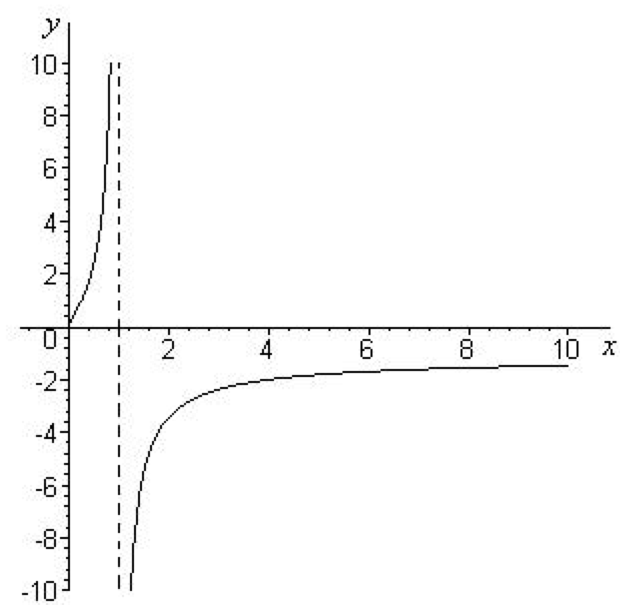


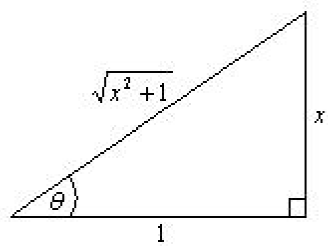
Figura 1: Gráfico de $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

3. *a*) Si $tg(\theta) = x$, calcule $sen(\theta)$ y $cos(2\theta)$ en términos de x.

   b) Sean $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = 2arctg(x)$. Muestre que $(f \circ g)(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. (Indicación: Use la parte a)).

$\boxed{\textbf{Solución.}}$

a) De la relación $tg\,(\theta) = x$ podemos construir el triángulo



de donde obtenemos inmediatamente $sen\,(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ y $cos\,(\theta) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Reemplazando esto en la identidad $cos\,(2\theta) = cos^2\,(\theta) - sen^2\,(\theta)$ y operando, concluimos que $cos\,(2\theta) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

b) Sabemos que la función $arctg\,(x)$ entrega como imagen un ángulo, por tanto, hacemos $\theta = arctg\,(x)$. Con esto, tenemos $(f \circ g)\,(x) = f\,(g\,(x)) = sen\,(2arctg\,(x)) = sen\,(2\theta) = 2sen\,(\theta)\,cos\,(\theta) = 2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{x^2+1}$. Concluyendo la demostración.

4. Demuestre la identidad,

$$(1 - cos\,(2x))\,ctg^2\,(x) + \frac{sen^2\,(2x)\,sec^2\,(x)}{2} = 2.$$

$\boxed{\textbf{Solución.}}$

De la identidad $sen^2\,(x) = \frac{1}{2}\,(1 - cos\,(2x)) \Rightarrow 1 - cos\,(2x) = 2sen^2 x$, así,

$$\begin{aligned} (1 - cos\,(2x))\,ctg^2\,(x) + \frac{sen^2\,(2x)\,sec^2\,(x)}{2} &= 2sen^2\,(x)\,\frac{cos^2\,(x)}{sen^2\,(x)} + \frac{[2sen\,(x)\,cos\,(x)]^2}{2}\frac{1}{cos^2\,(x)} \\ &= 2cos^2\,(x) + 2sen^2\,(x) = 2. \end{aligned}$$