UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIENCIAS Y ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Solución Taller N°2
Cálculo I (IME002)

Profesores: Mauricio Carrillo, Alex Sepúlveda.

05 de Mayo 2008.

Problema

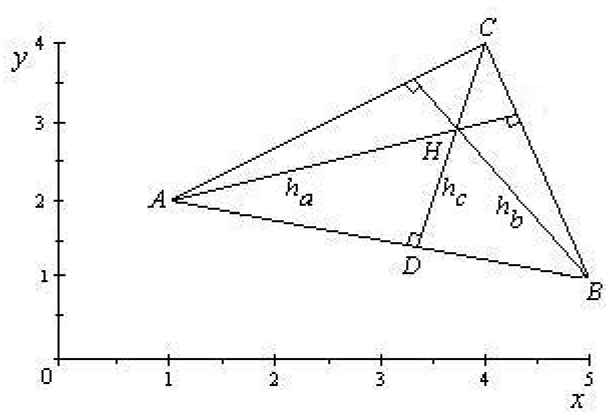
Considere el triángulo de vértices $A\,(1,2)$, $B\,(5,1)$ y $C\,(4,4)$.

1. Demuestre que las alturas trazadas desde cada uno de los vértices hasta los respectivos lados opuestos, se cortan en un único punto.
2. Calcule el área del triángulo.

Solución

De la geometría elemental sabemos que las alturas son las perpendiculares trazadas desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación. En el caso del triángulo, éstas concurren en un mismo punto llamado *Ortocentro*.

La situación planteada en el problema se bosqueja en la siguiente figura,



Para la primera parte la estrategia de solución será determinar las pendientes de cada lado del triángulo y luego las ecuaciones de las alturas, para posteriormente determinar el punto solución del sistema formado por las tres ecuaciones encontradas.

Un sencillo cálculo indica que $m_{AB} = -\frac{1}{4}$, $m_{AC} = \frac{2}{3}$ y $m_{BC} = -3$. Como las alturas son perpendiculares a los lados tenemos que $m_{h_c} = -\frac{1}{m_{AB}} = 4$, que junto al punto $C\,(4,4)$, determinan que la ecuación de la altura trazada desde ese vértice es $4x-y-12=0$. Por su parte, $m_{h_b} = -\frac{1}{m_{AC}} = -\frac{3}{2}$, junto al punto $B\,(5,1)$ determinan que la ecuación de la altura para este caso es $3x+2y-17=0$. Finalmente, $m_{h_a} = -\frac{1}{m_{BC}} = \frac{1}{3}$, que junto al punto $A\,(1,2)$ determinan como ecuación de altura $x-3y+5=0$. Falta, entonces, verificar que las tres ecuaciones de alturas se cortan en un mismo punto, es decir, determinar la solución del sistema,

$$\left.\begin{array}{r} 4x-y-12=0 \\ 3x+2y-17=0 \\ x-3y+5=0 \end{array}\right|$$

Para ello podemos resolver el sistema con dos de ellas escogidas arbitrariamente y luego verificar que la solución encontrada satisface la restante ecuación. Así, resolviendo el sistema con la primera y tercera encontramos $x = \frac{41}{11}$ e $y = \frac{32}{11}$. Luego, un sencillo calculo muestra que estos valores satisfacen la segunda ecuación, por tanto, las tres alturas se cortan en el punto $H\left(\frac{41}{11}, \frac{32}{11}\right)$.

Para la segunda parte, el área del triángulo se puede calcular como el semiproducto de una base por su respectiva altura o utilizar la Formula de Herón[1].

La primera estrategia necesita conocer la longitud del lado que se obtiene utilizando la formula de distancia entre dos puntos y la longitud de la altura que require conocer la ecuación del lado y el punto intersección de éste con la altura. Consideremos como base el lado $c = \overline{AB}$, es fácil determinar que su longitud es $c = \sqrt{17}$ y la ecuación del segmento es $x+4y-9=0$. El punto intersección entre la altura h_c y la base respectiva se obtiene resolviendo el sistema,

$$\left.\begin{array}{r} 4x-y-12=0 \\ x+4y-9=0 \end{array}\right|$$

cuya solución es $D\left(\frac{57}{17}, \frac{24}{17}\right)$. A partir de esto, $d\,(C,D) = \frac{11}{17}\sqrt{17}$. Así, el área del triángulo es $A = \frac{\sqrt{17}\cdot\frac{11}{17}\sqrt{17}}{2} = \frac{11}{2}$.

Para calcular el área utilizando la Formula de Herón, debemos determinar la longitud de los lados del triángulo. Aplicando la formula de distancia entre dos puntos a los vértices obtenemos $a = d\,(B,C) = \sqrt{10}$, $b = d\,(A,C) = \sqrt{13}$ y $c = d\,(A,B) = \sqrt{17}$. Con esto tenemos $s = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{13}+\sqrt{17}}{2}$, que reemplazado en la Formula de Herón resulta $A = \frac{11}{2}$.

[1] Formula de Herón: el área de un triángulo en función de la longitud de sus lados a, b, c está dada por,

$$A = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},$$

donde s es el semiperímetro definido como $s = \frac{a+b+c}{2}$