Solución Prueba N°1
IME 006 Álgebra
Ingenierías Civiles Plan Anual

Profesores: M. T. Alcalde, R. Benavides, C. Burgueño,
M. Carrillo, F. Salazar, A. Sepúlveda.

09 de abril de 2008

1. Si la proposición p es Falsa, determine el valor de verdad de:

$$\{(p \Rightarrow q) \vee [r \Rightarrow (\overline{q} \wedge p)]\} \Rightarrow (r \wedge p \wedge q)\,.$$

Solución.
Como $p \equiv F$, entonces $(p \Rightarrow q) \equiv V$ y $(r \wedge p \wedge q) \equiv F$. Luego, independiente del valor de verdad de $[r \Rightarrow (\overline{q} \wedge p)]$ tenemos que $\{(p \Rightarrow q) \vee [r \Rightarrow (\overline{q} \wedge p)]\} \equiv V$. Así, tenemos $V \Rightarrow F$, lo que es Falso.

2. Traduzca a lenguaje simbólico y niegue la proposición siguiente:

> *"Cuando el producto de dos números reales positivos cualesquiera es mayor que veinticinco, podemos concluir que uno de los números debe ser mayor que cinco."*

Solución.
La escritura simbólica de la proposición es

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+; x \cdot y > 25 \Rightarrow x > 5 \vee y > 5.$$

Para su negación recordemos previamente que $\overline{p \Rightarrow q} \equiv p \wedge \overline{q}$. Con esto tenemos,

$$\exists x, y \in \mathbb{R}^+; x \cdot y > 25 \wedge (x \leq 5 \wedge y \leq 5)\,.$$

3. Estudie el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones y luego niéguelas.

   a) $\exists! m \in \mathbb{Z}; 3 + m^2 = 12.$

   b) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}; x + 7 > n.$

Solución.

a) La proposición $\exists ! m \in \mathbb{Z}; 3 + m^2 = 12$ es Falsa, pues $m = \pm 3 \in \mathbb{Z}$ cumplen el enunciado. Su negación es

$$\big(\forall m \in \mathbb{Z}; 3 + m^2 \neq 12\big) \vee \big(\exists m, n \in \mathbb{Z}; 3 + m^2 = 12 \wedge 3 + n^2 = 12 \wedge m \neq n\big).$$

Notemos que el primer paréntesis es Falso y el segundo es Verdadero, luego $F \vee V \equiv V$.

b) La proposición $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}; x + 7 > n$ es Falsa. Su negación es

$$\exists x \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}; x + 7 \leq n,$$

con valor de verdad V, pues basta tomar cualquier $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x < -7$.

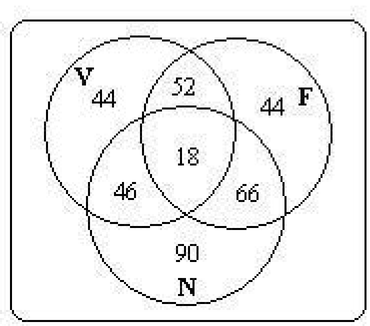
4. Todos los 360 alumnos que toman el curso de álgebra deciden practicar deporte. 160 juegan volleyball, 180 football, 220 natación, 70 juegan volleyball y football, 84 juegan football y practican natación, 64 juegan volleyball y practican natación ¿Cuántos practican los los tres deportes? ¿Cuántos practican sólo volleyball? ¿Cuántos sólo football? ¿Cuántos sólo natación?
Solución.
Definamos los conjuntos

$$\begin{aligned} U &= \{\text{Todos los alumnos que toman el curso de álgebra}\}, \\ V &= \{\text{Los alumnos que juegan volleyball}\}, \\ F &= \{\text{Los alumnos que juegan football}\}, \\ N &= \{\text{Los alumnos que practican natación}\}. \end{aligned}$$

De acuerdo al enunciado tenemos $|U| = 360$, $|V| = 160$, $|F| = 180$, $|N| = 220$, $|V \cap F| = 70$, $|F \cap N| = 84$ y $|V \cap N| = 64$. Llamando $x = |V \cap F \cap N|$ y de acuerdo a la cardinalidad de la unión de tres conjuntos tenemos

$$360 = 160 + 180 + 220 - 70 - 84 - 64 + x,$$

lo que implica $x = 18$. Llevando a un diagrama de Venn-Euler tenemos



Así, 18 realizan los tres deportes, 44 alumnos juegan sólo volleyball, 44 juegan sólo football y 90 sólo practican natación.

5. Sean $A, B \subset U$. Demuestre que,

$$B \subset A \Leftrightarrow A \cap B = B.$$

Solución.
($\Leftarrow$) Sea $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \Rightarrow x \in A$.
($\Rightarrow$) Mostremos primero que $B \subseteq A \cap B$. En efecto, sea $x \in B \Rightarrow (x \in B \wedge x \in A) \Rightarrow x \in A \cap B$.

Para la inclusión $A \cap B \subseteq B$ tenemos, $x \in A \cap B \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \Rightarrow x \in B$.