

# CÁLCULO I

*Luis Martínez Alonso*

Madrid, octubre de 2006

# Índice general

<b>1</b>	<b>LOS NÚMEROS REALES</b>	<b>1</b>
1.1	Números naturales, enteros y racionales . . . . .	1
1.2	El conjunto de los números reales . . . . .	5
1.3	Abiertos y cerrados en $\mathbb{R}$ . . . . .	9
1.4	Funciones de variable real . . . . .	11
<b>2</b>	<b>SUCESIONES Y LÍMITES DE NÚMEROS REALES</b>	<b>16</b>
2.1	Sucesiones y límites en $\mathbb{R}$ . . . . .	16
2.2	El concepto de límite . . . . .	17
2.3	Cálculo de límites . . . . .	19
2.4	Sucesiones no convergentes . . . . .	24
<b>3</b>	<b>LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD</b>	<b>26</b>
3.1	Límites de funciones . . . . .	26
3.2	Funciones continuas . . . . .	31
3.3	Dos teoremas fundamentales sobre funciones continuas . . . . .	35
<b>4</b>	<b>EL CONCEPTO DE DERIVADA. CÁLCULO DE DERIVADAS</b>	<b>39</b>
4.1	Derivadas de funciones . . . . .	39
4.2	Cálculo de derivadas . . . . .	42
4.3	Derivación de funciones inversas . . . . .	43
4.4	Derivación de funciones compuestas. La regla de la cadena . . . . .	45
<b>5</b>	<b>APLICACIONES DE LA DERIVADA I</b>	<b>48</b>
5.1	Los teoremas de Rolle y del valor medio . . . . .	48
5.2	Crecimiento y decrecimiento . . . . .	52
5.3	Concavidad y convexidad . . . . .	55
5.4	Límites indeterminados. Regla de l'Hôpital . . . . .	57
5.5	Representación gráfica de funciones . . . . .	61
<b>6</b>	<b>APLICACIONES DE LA DERIVADA II</b>	<b>65</b>
6.1	Comparación de funciones cerca de un punto . . . . .	65
6.2	Desarrollos de Taylor . . . . .	68
6.3	Cálculo de desarrollos de Taylor . . . . .	73
6.4	Cálculo de límites indeterminados mediante desarrollos de Taylor . . . . .	77
<b>7</b>	<b>LA INTEGRAL INDEFINIDA</b>	<b>79</b>
7.1	Integral indefinida de una función . . . . .	79
7.2	Cálculo de integrales . . . . .	82

<b>8</b>	<b>LA INTEGRAL DEFINIDA</b>	<b>89</b>
8.1	Integral definida de una función . . . . .	89
8.2	Propiedades de la integral definida . . . . .	92
8.3	El teorema fundamental del Cálculo . . . . .	94
8.4	Aplicaciones al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes . . . . .	97
<b>9</b>	<b>INTEGRALES IMPROPIAS</b>	<b>102</b>
9.1	Integrales impropias . . . . .	102
9.2	Criterios de convergencia de integrales impropias . . . . .	104
<b>10</b>	<b>SERIES</b>	<b>111</b>
10.1	Series de números reales . . . . .	111
10.2	Criterios de convergencia de series . . . . .	115
10.3	Criterios de comparación por paso al límite . . . . .	120
10.4	Introducción a las series de potencias . . . . .	124

# Capítulo 1

## LOS NÚMEROS REALES

En este capítulo se define el conjunto  $\mathbb{R}$  de los números reales. Previamente se repasan ciertas nociones necesarias para entender la definición de  $\mathbb{R}$ .

### 1.1 Números naturales, enteros y racionales

Antes de introducir los números reales recordemos algunos conjuntos de números que nos son familiares.

#### El conjunto $\mathbb{N}$ de los números enteros

Está formado por

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Podemos representarlo geométricamente en la recta tomando un punto como *cero* (el punto 0) y tomando luego todos los puntos a la derecha de este resultantes de su traslado sucesivo según una distancia fija. (fig.1.1). Como sabemos los números naturales pueden sumarse y multiplicarse entre ellos obteniéndose nuevos naturales. También pueden compararse. Dados dos naturales  $a, b$  distintos consideramos  $a$  menor que  $b$ , y escribimos  $a < b$ , cuando  $b$  está a la derecha de  $a$ .

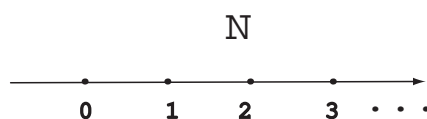


Figura 1.1:

Los naturales tienen *problemas* con la resta y la división, pues en general se generan números no naturales ( $a - b$  es natural solo si  $b \leq a$ ;  $a/b$  ( $b \neq 0$ ) solo es un natural cuando  $a$  es múltiplo de  $b$

#### El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros

Está formado por

$$\mathbb{Z} := \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{-1, -2, \dots\}.$$

Podemos representarlo geoméricamente en la recta tomando como puntos negativos los simétricos de los positivos con respecto al punto 0 (fig.1.2). En  $\mathbb{Z}$  podemos sumar, multiplicar y restar sin salirnos de  $\mathbb{Z}$ . También podemos comparar números enteros usando el mismo criterio que con los naturales. Sin embargo la división de enteros produce, en general, números no enteros.

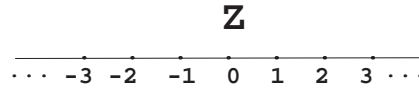


Figura 1.2:

### El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales

Está formado por

$$\mathbb{Q} := \{\pm \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0\}.$$

Para representar en la recta los números racionales  $\pm a/b$ , en primer lugar se divide la longitud unidad en  $b$  partes, cada una de ellas representa el número  $1/b$  (fig.1.3). Después trasladamos a derecha e izquierda  $a$  veces la longitud  $1/b$  y obtenemos así  $+a/b$  y  $-a/b$ , respectivamente.

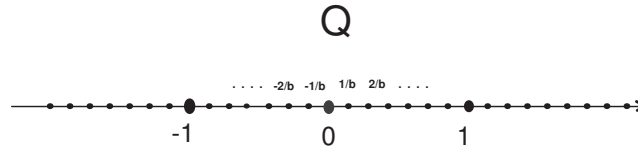


Figura 1.3:

Los números racionales pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse dando lugar a nuevos racionales. Recordemos las reglas respectivas

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}.$$

Para comparar dos racionales  $x$  y  $x'$  podemos usar el criterio geométrico :  $x \leq x'$  si  $x$  está a la izquierda de  $x'$  en la recta ( ó si  $x = x'$ ). Pero es más práctico usar la regla

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \quad \text{si y solo si} \quad ad \leq bc,$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ .

La representación más útil de los racionales para operar y comparar es la **representación decimal** como una fila de cifras ( números  $0, 1, \dots, 9$ ) precedida de un signo y con una coma

$$x = \pm a_r \cdots a_1 a_0, b_1 b_2 \cdots,$$

que significa

$$x = \pm a_r \cdots a_1 a_0, b_1 b_2 \cdots = a_r \cdot 10^r + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{100} + \cdots.$$

- El grupo de cifras  $a_r \cdots a_1 a_0$  que precede a la coma se denomina parte entera de  $x$ . El grupo de cifras  $b_1 b_2 \cdots$  que sigue a la coma, que puede tener infinitos elementos, se denomina parte decimal de  $x$ .
- No se admiten representaciones decimales con colas infinitas de solo nueves  $\cdots 99999 \cdots 9999 \cdots$ . De esta forma la representación decimal de un racional resulta ser única (basta utilizar el enunciado del ejercicio siguiente)

**Ejercicio 1.1.** Demostrar que

$$\begin{aligned} 0,9999 \cdots 9999 \cdots &= 1, \\ 0,0999 \cdots 9999 \cdots &= 0,1, \\ 0,0099 \cdots 9999 \cdots &= 0,01. \end{aligned}$$

*Ayuda: una fórmula importante que veremos en el capítulo sobre series*

**La suma de una serie geométrica de razón  $-1 < r < 1$  es**

$$a_0(1 + r + r^2 + \cdots) = \frac{a_0}{1 - r}.$$

La parte decimal de un racional puede ser un grupo finito de cifras  $b_1 b_2 \cdots b_N$  o un grupo infinito con una subgrupo finito de cifras  $c_1 c_2 \cdots c_M$  que se repite indefinidamente

$$b_1 b_2 \cdots b_N c_1 c_2 \cdots c_M c_1 c_2 \cdots c_M \cdots c_1 c_2 \cdots c_M \cdots,$$

**Ejemplo 1.2.**

$$\frac{5}{7} = 0,71428571\,428571\,428571 \cdots.$$

**Ejercicio 1.3.** ¿Como podemos operar de manera exacta con dos números racionales con partes decimales de infinitas cifras?

**Antes de seguir es necesario asegurarse de que sabemos**

- Utilizar la representación decimal de racionales
- Operar con racionales
- Comparar racionales

### La estructura de cuerpo

Entre las características básicas que queremos para un conjunto de números están las de poseer operaciones de suma y producto entre sus elementos. La estructura que posee la mejor formulación de estas operaciones es la de **cuerpo**.

**Definición 1.4.** Un conjunto no vacío  $\mathbb{K}$  (con elementos que denotamos  $a, b, c, \dots$ ) es un cuerpo si posee una operación de suma  $a + b$  y otra de producto  $a b$  con las propiedades siguientes

*Respecto de la suma*

- i) Conmutativa:  $a + b = b + a, \quad \forall a, b \in \mathbb{K}.$

- ii) Asociativa:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ .
- iii) Existencia de elemento cero:  $\exists 0 \in \mathbb{K}$  tal que  $a + 0 = a$ ,  $\forall a \in \mathbb{K}$ .
- iv) Existencia de elemento opuesto:  $\forall a \in \mathbb{K} \exists -a \in \mathbb{K}$  tal que  $a + (-a) = 0$ . Podemos entonces introducir la operación de resta como  $a - b = a + (-b)$ .

*Respecto del producto*

- i) Conmutativa:  $a b = b a$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{K}$ .
- ii) Asociativa:  $(a b) c = a (b c)$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ .
- iii) Existencia de elemento unidad:  $\exists 1 \in \mathbb{K}$  tal que  $a 1 = a$ ,  $\forall a \in \mathbb{K}$ .
- iv) Existencia de elemento inverso:  $\forall a \in \mathbb{K} - \{0\} \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{K}$  tal que  $a \frac{1}{a} = 1$ . Podemos entonces introducir la operación de división como  $\frac{b}{a} = b \frac{1}{a}$ .

*Respecto de ambas*

- Distributiva:  $a(b + c) = a b + a c$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ .

**Aunque la definición es algo extensa, lo que expresa es el conjunto de reglas que usamos habitualmente para operar con números, pero con la condición de que al usar dichas reglas con los elementos de  $\mathbb{K}$  no nos salimos de  $\mathbb{K}$**

El conjunto  $\mathbb{Q}$  de los racionales es un cuerpo pero no lo son ni el conjunto  $\mathbb{N}$  de los naturales ni el conjunto  $\mathbb{Z}$  de los enteros. Basta ver como ejemplo que  $1 \in \mathbb{N}$ ,  $-1 \notin \mathbb{N}$  o que  $2 \in \mathbb{Z}$ ,  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ .

**Ejercicio 1.5.** Demostrar que el conjunto  $\mathbb{K} = \{x + y\sqrt{2}, \quad x, y \in \mathbb{Q}\}$  es un cuerpo respecto de las operaciones

$$\begin{aligned}(x + y\sqrt{2}) + (x' + y'\sqrt{2}) &= (x + x') + (y + y')\sqrt{2}, \\(x + y\sqrt{2})(x' + y'\sqrt{2}) &= (xx' + 2yy') + (xy' + yx')\sqrt{2}.\end{aligned}$$

### Relación de orden en un conjunto

Otra propiedad importante que deseamos en un conjunto de números es que estos puedan compararse entre si. Es decir que exista un criterio para decidir dados dos números cual es mayor que el otro. La forma precisa de esta noción se define en Matemáticas mediante el concepto de **relación de orden total**.

**Definición 1.6.** Un conjunto no vacío  $\mathbb{K}$  (con elementos que denotamos  $a, b, c, \dots$ ) posee una **relación de orden total** (que denotamos  $\leq$ ) si para todo par de elementos  $a, b \in \mathbb{K}$  se verifica siempre que ó bien  $a \leq b$  ó  $b \leq a$ . Además deben cumplirse la propiedades siguientes:

- i) Reflexiva:  $a \leq a$ ,  $\forall a \in \mathbb{K}$ .
- ii) Antisimétrica: Dados  $a, b \in \mathbb{K}$

$$a \leq b, \quad b \leq a \implies a = b.$$

iii) Transitiva: Dados  $a, b, c \in \mathbb{K}$

$$a \leq b, \quad b \leq c \implies a \leq c.$$

**Definición 1.7.** Sea  $A$  un subconjunto no vacío de un conjunto  $\mathbb{K}$  que posee una relación de orden total  $\leq$ . Un elemento  $c \in \mathbb{K}$  se denomina **cota superior** de  $A$  (respectivamente **cota inferior** de  $A$ ) si  $a \leq c$ ,  $\forall a \in A$  ( $c \leq a$ ,  $\forall a \in A$ ). Si  $A$  posee alguna cota superior (inferior) se dice que  $A$  está acotado superiormente (inferiormente). Diremos que  $A$  está acotado si lo está superiormente e inferiormente.

En caso de que exista una cota superior  $c_S$  de  $A$  tal que  $c_S \leq c$  para toda cota superior  $c$  de  $A$  se dice que  $c_S$  es el **supremo** de  $A$ . De igual forma, si exista una cota inferior  $c_I$  de  $A$  tal que  $c \leq c_I$  para toda cota inferior  $c$  de  $A$  se dice que  $c_I$  es el **ínfimo** de  $A$ . Tales elementos se denotarán

$$c_S = \sup A, \quad c_I = \inf A.$$

Si además  $c_S = \sup A \in A$  se dice que  $c_S$  es el **máximo** de  $A$ . De igual manera, si  $c_I = \inf A \in A$  se dice que  $c_I$  es el **mínimo** de  $A$ .

**Ejemplo 1.8.** Sea  $A = \{0, 1, 2, 3\}$  como subconjunto de  $\mathbb{N}$ . Las cotas superiores de  $A$  son los naturales  $\{3, 4, 5, \dots\}$  y  $\sup A = 3$ . La única cota inferior de  $A$  es 0 y es el  $\inf A$ . También 3 es el máximo de  $A$  y 0 es el mínimo de  $A$ .

**Ejemplo 1.9.** Considérese en  $Q$  el siguiente subconjunto

$$A = \{0, 1, \quad 0, 121, \quad 0, 121221, \dots\}$$

cuyos elementos son expresiones decimales en que vamos añadiendo grupos crecientes de doses 22...222 entre dos unos 122...2221. ¿Existe  $\sup A$  en  $Q$ ?. El conjunto  $A$  está acotado superiormente, por ejemplo 0, 13 es cota superior de  $A$ , y puede observarse que sus elementos pueden ordenarse como una sucesión creciente

$$0, 1 \leq 0, 121 \leq 0, 121221 \leq 0, 1212212221 \leq,$$

Intuitivamente parece que el candidato a supremo tendría una representación decimal con una cola infinita no periódica

$$0, 121221222122221222221222221 \dots,$$

que no puede ser un racional. ¿Qué tipo de número es?. La respuesta es: un número irracional. Así surge de forma natural un conjunto de números, los reales, que es más amplio que  $\mathbb{Q}$ .

**Ejercicio 1.10.** Probar que en caso de que existan  $\sup A$  ó  $\inf A$  en  $\mathbb{K}$  son únicos.

## 1.2 El conjunto de los números reales

Vamos a introducir el conjunto  $\mathbb{R}$  de forma axiomática, es decir exigiremos que tal conjunto cumpla una serie de propiedades básicas(axiomas) que serán las reglas de juego en que fundamentaremos todos los desarrollos posteriores.



**Definición 1.11.** El conjunto  $\mathbb{R}$  de los números reales está caracterizado por los tres axiomas siguientes

- i) Axioma de cuerpo:  $\mathbb{R}$  es un cuerpo.
- ii) Axioma de orden total:  $\mathbb{R}$  posee una relación de orden total que verifica
  - $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$
  - $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz, \quad \forall z \geq 0$
- iii) Axioma del supremo: Si  $A$  es un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$  acotado superiormente entonces existe  $\sup A$  en  $\mathbb{R}$ .

El tercer axioma es el que distingue a  $\mathbb{R}$  frente a  $\mathbb{Q}$  (como hemos visto en un ejemplo anterior  $\mathbb{Q}$  no satisface tal propiedad) y será el arma más potente que tendremos para generar resultados en  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 1.12.** Demostrar que el axioma del supremo es equivalente al enunciado siguiente: Si  $A$  es un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$  acotado inferiormente entonces existe  $\inf A$  en  $\mathbb{R}$ .

Una pregunta fundamental en este momento es si podemos construir algún conjunto que satisfaga los axiomas de la definición de  $\mathbb{R}$ . Existen diferentes versiones de tales construcciones y para nosotros lo más útil es tomar como modelo de  $\mathbb{R}$  el conjunto de expresiones decimales generales

$$x = \pm a_r \cdots a_1 a_0, b_1 b_2 \cdots,$$

donde la parte decimal puede ser un grupo finito o infinito de dígitos, con cola periódica o no. Los racionales son como hemos visto las expresiones decimales con parte decimal finita o infinita con cola periódica, los restantes números en  $\mathbb{R}$  se denominan números irracionales.

Podemos pensar en los números reales como los puntos de una recta graduada infinita a derecha e izquierda y **continua**, es decir sin agujeros. La ausencia de agujeros es la representación intuitiva del axioma del supremo.

**Ejercicio 1.13.** Demostrar las siguientes propiedades de la relación de orden en  $\mathbb{R}$ :

- i) Dados  $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x \leq y + z \Rightarrow x - z \leq y; \quad x + z \leq y \Rightarrow x \leq y - z.$$

- ii) Dados  $x, y, z \in \mathbb{R}, z > 0$

$$x \leq y \Rightarrow xz \leq yz.$$

- iii) Dados  $x \geq 0$  é  $y \geq 0$  en  $\mathbb{R}$

$$x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}.$$

- Podemos pasar términos de un lado a otro de una desigualdad y multiplicar ambos lados por un número positivo si cambiar el sentido de la desigualdad.
- Al multiplicar una desigualdad por un número negativo esta cambia de sentido

Es fundamental tener en cuenta las reglas anteriores para manejar desigualdades. Como muestra véase el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1.14.** Determinar los números reales  $x$  que cumplen la desigualdad

$$\frac{1}{x+4} > \frac{1}{x-4}.$$

Para eliminar los denominadores se nos ocurre multiplicar la desigualdad por el producto  $(x+4)(x-4)$  de ambos. Sin embargo la desigualdad resultante dependerá del signo de este producto. Ahora bien

$$(x+4)(x-4) > 0 \iff \begin{cases} x+4 > 0 & \text{y} & x-4 > 0 \iff x > 4 \\ x+4 < 0 & \text{y} & x-4 < 0 \iff x < -4 \end{cases}$$

Es decir

$$\begin{aligned} (x+4)(x-4) > 0 &\iff |x| > 4, \\ (x+4)(x-4) < 0 &\iff |x| < 4. \end{aligned}$$

Así la desigualdad queda

$$\begin{aligned} x-4 > x+4 &\iff -4 > 4 & \text{si } |x| > 4, \\ x-4 < x+4 &\iff -4 < 4 & \text{si } |x| < 4. \end{aligned}$$

El primer caso nos lleva a un absurdo ( $-4 > 4$ ) y el segundo a una verdad ( $-4 < 4$ ). Luego la desigualdad solo se cumple en  $|x| < 4$ .

**Definición 1.15.** Uno de los tipos de subconjuntos de números reales que usaremos más a menudo son los **intervalos**:

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, & (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, & [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}. \end{aligned}$$

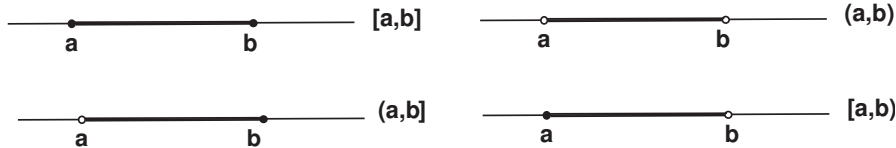


Figura 1.4:

Comencemos a experimentar la potencia del axioma del supremo con la demostración de la propiedad siguiente. Viene a decir que no hay números reales inaccesiblemente grandes ya que tomando múltiplos de cualquier real positivo superamos a cualquier otro real positivo.

**Teorema 1.16. (Propiedad Arquimediana)** Dado un  $x > 0$  cualquiera en  $\mathbb{R}$ , se verifica que para todo  $y > 0$  existe un natural  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $y \leq nx$ .

*Demostración.* Consideremos el conjunto  $A = \{nx, n = 1, 2, 3, \dots\}$  y supongamos que la hipótesis siguiente es cierta

Existe  $y > 0$  tal que  $nx < y$  para todo  $n = 1, 2, \dots$ .

En ese caso  $y$  es cota superior de  $A$ , luego  $A$  está acotado superiormente y por el axioma del supremo ( $A$  es no vacío) existirá el supremo  $s = \sup A$  en  $\mathbb{R}$ . Como  $x > 0$  entonces  $s < s + x$  y en consecuencia  $s - x < s$ . Entonces  $s - x$  no puede ser cota superior de  $A$ , pues es menor que la menor cota superior de  $A$  (que es  $s$ ). Por tanto algún elemento  $nx$  de  $A$  será mayor que  $s - x$

$$s - x < nx.$$

Pero entonces

$$s < (n + 1)x,$$

y como  $(n + 1)x \in A$ , deducimos que  $s$  no es cota superior de  $A$ . Llegamos a una contradicción, luego la hipótesis que asumimos es falsa. Así la propiedad del enunciado es cierta *Q.E.D.*

**Ejercicio 1.17. (Propiedad Arquimediana (segunda versión))** Demostrar que no hay números reales inaccesiblemente pequeños. Es decir: Dado un  $x > 0$  cualquiera en  $\mathbb{R}$ , se verifica que para todo  $y > 0$  existe un natural  $n \geq 1$  tal que  $0 < \frac{x}{n} \leq y$ .

En esta propiedad vemos que dados dos números positivos cualesquiera  $x$  é  $y$ , dividiendo  $x$  suficientes veces logramos un número  $x/n$  más pequeño que  $y$ .

**Definición 1.18.** Dado un número real  $x$ , se define su **valor absoluto**  $|x|$  como el propio  $x$  si  $x \geq 0$  y como su opuesto  $-x$  en caso de que  $x < 0$ . La distancia entre dos números reales  $x, y$  se define como

$$d(x, y) := |x - y|.$$

Es fácil probar que

- i)  $x \geq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
- ii)  $|xy| = |x||y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$
- iii)  $|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

**Ejercicio 1.19.** Probar que

$$|x - y| \geq ||x| - |y||, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

De igual forma es sencillo demostrar que

- i)  $d(x, y) = 0 \iff x = y.$
- ii)  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$

**Ejemplo 1.20.** Demostremos de manera intuitiva que entre dos números reales distintos cualesquiera  $x < y$  existen racionales e irracionales entre ellos.

Sea  $d := y - x$  la distancia entre  $x$  é  $y$ . Por la segunda versión de la propiedad Arquimediana existen naturales  $n$  y  $n'$  tales que

$$\frac{1}{n} < d, \quad \frac{\sqrt{2}}{n'} < d.$$

Si marcamos en la recta los números del conjunto  $A = \{\pm m \frac{1}{n}, \quad m = 0, 1, 2, \dots\}$ , alguno de ellos  $\pm m_0 \frac{1}{n}$  (que es un racional) caerá dentro del intervalo  $[x, y]$  pues la longitud  $d$  de este intervalo es estrictamente mayor que la distancia entre dos puntos consecutivos de  $A$ .

De igual forma sea  $A' = \{\pm m \frac{\sqrt{2}}{n}, \quad m = 0, 1, 2, \dots\}$ , alguno de estos puntos  $\pm m_0 \frac{\sqrt{2}}{n}$  (que es un irracional) caerá dentro del intervalo  $[x, y]$  pues la longitud  $d$  de este intervalo es estrictamente mayor que la distancia entre dos puntos consecutivos de  $A'$ .

### 1.3 Abiertos y cerrados en $\mathbb{R}$

En el resto del curso usaremos determinados tipos de subconjuntos  $\mathbb{R}$  que introducimos aquí.

**Definición 1.21.** Dado un punto  $a \in \mathbb{R}$  y un número real positivo  $r > 0$  cualesquiera, denominaremos **intervalo abierto de centro  $a$  y radio  $r$**  al intervalo

$$I(a, r) := (a - r, a + r).$$

Es decir al conjunto de puntos de  $\mathbb{R}$  cuya distancia al punto  $a$  es estrictamente menor que  $r$ .

En ocasiones usaremos también el intervalo abierto punteado  $I^*(a, r) = I(a, r) - \{a\}$ .

**Definición 1.22.** Un subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}$  se dice que es **abierto** si verifica

$$\forall a \in A, \exists r > 0 \text{ tal que } I(a, r) \subset A.$$

Es decir todo punto de  $A$  posee un intervalo abierto centrado en él que está completamente contenido en  $A$ . Por definición consideramos el conjunto vacío  $\emptyset$ , al cual no podríamos aplicarle este criterio, como abierto.

**Ejemplo 1.23.** Todo intervalo del tipo  $(a, b)$  es abierto y no lo son los intervalos  $[a, b]$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ . Por ejemplo en  $A = (a, b]$  el punto  $b \in A$  no verifica el criterio anterior, pues todo intervalo  $I(b, r)$  tiene todos los puntos entre  $b$  y  $b + r$  fuera de  $A$ .

El conjunto  $\mathbb{R}$  es abierto pues verifica el criterio de la definición

**Definición 1.24.** Un subconjunto  $C$  de  $\mathbb{R}$  se dice que es **cerrado** si su complementario  $\overline{C} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin C\}$  es abierto en  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 1.25.** El intervalo  $[a, b]$  es cerrado pues su complementario es  $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$  que es abierto. Los intervalos  $(a, b]$ ,  $[a, b)$  no son cerrados ya que sus complementarios respectivos  $(-\infty, a] \cup (b, +\infty)$  y  $(-\infty, a) \cup [b, +\infty)$  no son abiertos.

**Ejercicio 1.26.** Probar que tanto  $\mathbb{R}$  como  $\emptyset$  son al mismo tiempo abiertos y cerrados.

Un criterio importante para averiguar si un conjunto es cerrado está basado en el concepto siguiente

**Definición 1.27.** Sea  $A$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$ , un punto  $c$  de  $\mathbb{R}$  diremos que es un **punto de acumulación** de  $A$  si

$$\forall r > 0, I^*(a, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Es decir tan cerca como queramos de  $c$  hay puntos de  $A$  (distintos de  $c$ ).

**Ejemplo 1.28.** Denotemos  $P_{ac}(A)$  al conjunto de puntos de acumulación de  $A$ . Es fácil ver que

$$\begin{aligned} P_{ac}([a, b]) &= [a, b], \quad P_{ac}((a, b]) = [a, b], \quad P_{ac}([a, b)) = [a, b], \\ P_{ac}(\mathbb{N}) &= \emptyset, \quad P_{ac}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Teorema 1.29. Bolzano-Weierstrass**

*Si  $A$  es un subconjunto infinito de números reales y está acotado, entonces posee al menos un punto de acumulación.*

Sin entrar en la demostración de este resultado su significado es el siguiente:

*Dado un conjunto infinito de puntos si está acotado sus elementos deben aglomerarse en algún lugar*

El conjunto  $\{1, 2, 3, \dots\}$  de los naturales constituye un conjunto infinito. Sin embargo no tiene, ningún punto de acumulación. Ello no contradice el teorema anterior pues el conjunto no está acotado.

**Teorema 1.30.** *Un conjunto  $C$  es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos de acumulación ( $P_{ac}(C) \subset C$ )*

*Demostración.* ( $\implies$ ) Sea  $C$  cerrado y  $c \in P_{ac}(C)$ . Supongamos que

$$c \text{ no pertenece a } C. \quad (1.1)$$

El conjunto  $A := \overline{C}$  es abierto y contiene a  $c$ , luego existe un intervalo abierto  $I(c, r) \subset A$ . Por tanto  $I(c, r) \cap C = \emptyset$  y como consecuencia  $I^*(c, r) \cap C = \emptyset$ . Esto último es una contradicción con el hecho de que  $c \in P_{ac}(C)$ . De esta forma nuestra suposición (1.1) es falsa, luego  $c \in C$ .

( $\impliedby$ ) Sea ahora  $P_{ac}(C) \subset C$  y denotemos  $A := \overline{C}$ . Supongamos que

$$C \text{ no es cerrado.} \quad (1.2)$$

Entonces  $A$  no será abierto y existirá algún  $a \in A$  tal que

$$I^*(a, r) \not\subset A, \quad \forall r > 0.$$

Pero en ese caso

$$I^*(a, r) \cap C \neq \emptyset, \quad \forall r > 0.$$

Esto significa que  $a \in P_{ac}(C) \subset C$  y por tanto  $a \in C$ . Esto es una contradicción pues  $a$  está en  $A$  que es el complementario de  $C$ . De esta forma nuestra suposición (1.2) es falsa, luego  $C$  es cerrado.

*Q.E.D.*

## 1.4 Funciones de variable real

En este curso el objetivo fundamental es el de proporcionar métodos de análisis de funciones de variable real.

**Definición 1.31.** Una **función de variable real** es una aplicación

$$f : D \mapsto \mathbb{R}, \quad y = f(x),$$

que asigna a cada elemento  $x$  de un cierto subconjunto no vacío  $D$  de  $\mathbb{R}$  (**dominio de  $f$** ) un número real  $y = f(x)$  (**imagen de  $x$** ). El conjunto de los puntos imagen de algún punto del dominio de  $f$

$$R := \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ para algún } x \in D\},$$

se denomina **conjunto imagen ó recorrido de  $f$** .

En realidad una función  $y = f(x)$  es un procedimiento por el que construimos el valor  $y$  cuando nos dan  $x$  en un cierto subconjunto  $D$  de  $\mathbb{R}$ . Los tipos de dominios  $D$  que usaremos nosotros serán del tipo

$$D = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_N,$$

donde  $I_1, I_2, \dots, I_N$  son una colección finita de intervalos de  $\mathbb{R}$ .

La elección de  $D$  dependerá del problema que estemos considerando. Es decir, para una misma función podremos considerar diversos dominios diferentes. Salvo que digamos otra cosa tomaremos como dominio de una función el mayor posible.

### Función inversa de una función inyectiva

Una forma de generar funciones interesantes es tomar inversas de funciones inyectivas. Recordemos que una función  $f : D \mapsto \mathbb{R}$  es inyectiva si las imágenes no se repiten. Es decir, si dados puntos distintos  $x_1 \neq x_2$  en  $D$  sus imágenes  $y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2)$  también lo son.

**Un tipo elemental importante de funciones inyectivas son las funciones monótonas crecientes**

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2),$$

**o monótonas decrecientes**

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

En el caso de funciones inyectivas podemos construir la **función inversa**  $f^{-1}$  de  $f$  que asocia a cada punto imagen de  $f$  su único punto de procedencia en el dominio  $D$

$$f^{-1} : R \mapsto \mathbb{R}, \quad y = f(x) \mapsto x,$$

donde  $R$  es el recorrido de  $f$ .

**Usaremos la notación  $x = x(y)$  para la función inversa de una función inyectiva  $y = y(x)$ .**

### Construcción de funciones

En este curso debemos profundizar en el conocimiento de varios tipos básicos de funciones elementales. En este sentido lo primero que tenemos que plantearnos es como se construyen. Es decir, dado  $x$  como se determina  $y = f(x)$ .

### **Funciones polinómicas y racionales**

Las funciones **polinómicas** son de la forma

$$y = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

se construyen usando las operaciones de suma y producto en  $\mathbb{R}$  y claramente poseen como dominio toda la recta  $\mathbb{R}$ .

Las funciones **racionales** son cocientes de dos polinómios

$$y = \frac{a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots b_1 x + b_0},$$

y por tanto se construyen usando las operaciones de suma, producto y división en  $\mathbb{R}$ . Poseen como dominio todo  $\mathbb{R}$  salvo los puntos en que se anula el denominador.

**Ejemplo 1.32.** Por ejemplo

$$y = \frac{x+1}{x^2-4},$$

tiene como dominio  $D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ .

### **Raíces** $y = \sqrt[n]{x}$

Las funciones

$$y = x, x^3, x^5, \dots, x^{2n+1}, \dots$$

son monótonas crecientes en todo  $\mathbb{R}$  y su recorrido es también todo  $\mathbb{R}$ . Por tanto sus funciones inversas  $x = \sqrt[n+1]{y}$ , ó mejor cambiando los nombres de las variables,

$$y = \sqrt[n+1]{x},$$

existen con dominio todo  $\mathbb{R}$ .

Las funciones  $y = x^2, x^4, x^6, \dots, x^{2n}, \dots$  no son monótonas en todo  $\mathbb{R}$ , lo son por separado en los subconjuntos  $D_- := (-\infty, 0]$  (monótonas decrecientes) ó  $D_+ := [0, \infty)$  (monótonas crecientes) con recorrido  $R := [0, +\infty)$ . Así cada una de ellas determina dos funciones inyectivas

$$y_+(x) = x^{2n}, \quad x \in D_+; \quad y_-(x) = x^{2n}, \quad x \in D_-,$$

sus respectivas funciones inversas  $x = +\sqrt[n]{y} > 0$  y  $x = -\sqrt[n]{y}$ , ó en notación habitual,

$$y = +\sqrt[n]{x}, \quad y = -\sqrt[n]{x},$$

existen con dominio  $[0, +\infty)$ .

### Funciones algebraicas y trascendentes

Una función polinómica  $y = P(x)$  se determina despejando  $y$  en la ecuación

$$y - P(x) = 0.$$

Una función racional  $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$  se obtiene al despejar  $y$  en la ecuación

$$Q(x)y + P(x) = 0.$$

Funciones definidas mediante raíces de polinomios  $y = \sqrt[n]{P(x)}$  son también soluciones de ecuaciones

$$y^n - P(x) = 0.$$

Surge de este modo de forma natural la noción de **funciones algebraicas**  $y = f(x)$  definidas como las soluciones de ecuaciones polinómicas en  $y$  del tipo

$$P_n(x)y^n + \cdots + P_1(x)y + P_0(x) = 0,$$

siendo los coeficientes  $P_n(x), \dots, P_0(x)$  polinomios en la variable  $x$ . Las funciones que no son algebraicas se denominan **funciones trascendentes**.

### La función exponencial y las funciones seno y coseno

Funciones tales como

$$e^x, \quad \text{sen } x, \quad \text{cos } x, \quad \ln x,$$

son trascendentes. Su construcción es no trivial y exige operaciones matemáticas sofisticadas, como el empleo de sumas con infinitas funciones (series de funciones)

$$\sum_{n \geq 1} f_n(x).$$

Así resulta que las funciones

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{sen } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{cos } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

son sumas de infinitos monomios definidas en todo  $\mathbb{R}$ . Para poder extraer información precisa de estas definiciones necesitamos desarrollar las herramientas del cálculo diferencial.

Afortunadamente podemos basarnos en la definición geométrica de las funciones seno y coseno para comprender fácilmente las propiedades básicas de estas funciones, como las identidades

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x &= 1, \\ \text{sen}(x+y) &= \text{sen } x \text{ cos } y + \text{cos } x \text{ sen } y, \\ \text{cos}(x+y) &= \text{cos } x \text{ cos } y - \text{sen } x \text{ sen } y, \\ \text{sen}(-x) &= -\text{sen } x, \quad \text{cos}(-x) = \text{cos } x. \end{aligned}$$



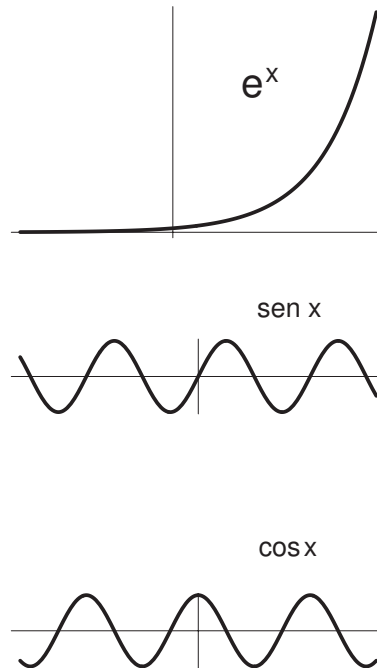


Figura 1.5:

### La función logaritmo y las funciones trigonométricas inversas

Partiendo de la exponencial y de las funciones trigonométricas básicas  $\text{sen } x$  y  $\text{cos } x$  podemos construir mediante inversión otras funciones interesantes. La función exponencial  $y = e^x$  resulta ser monótona creciente en todo  $\mathbb{R}$  con dominio  $(0, +\infty)$ . Su inversa es la función logaritmo

$$y = \ln x, \quad D = (0, +\infty).$$

La función  $y = \text{sen } x$  es monótona creciente en  $[-\pi/2, \pi/2]$  con recorrido  $[-1, 1]$ , luego su función inversa existe

$$y = \text{arc sen } x, \quad D = [-1, 1].$$

Descripciones análogas pueden hacerse para las funciones inversas de  $\text{cos } x$  ó  $\text{tan } x = \text{sen } x / \text{cos } x$ .

### Composición de funciones

Muy a menudo consideraremos **composiciones** de dos funciones  $f : D_1 \mapsto \mathbb{R}$  y  $g : D_2 \mapsto \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)),$$

que no son más que encadenamientos

$$x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) = g(f(x)).$$

En este caso el dominio de la composición es

$$D = \{\text{El conjunto de puntos } x \in D_1 \text{ tales que } y = f(x) \in D_2 \}.$$

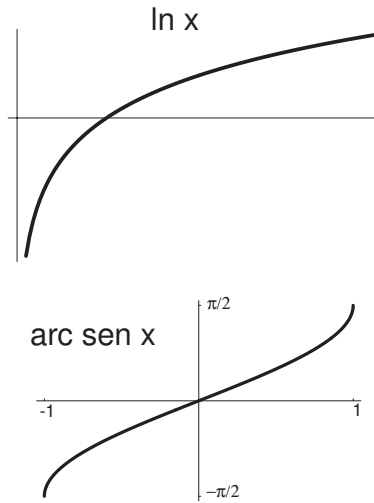


Figura 1.6:

**Usaremos la notación**

$$z = Z(x) := z(y(x))$$

**para la composición de dos funciones  $y = y(x)$  y  $z = z(y)$**

Para analizar funciones complicadas es muy importante saber descomponer en términos de funciones más sencillas. Por ejemplo

$$f(x) = \exp(\sin x) = Z(x) = z(y(x)),$$

es una composición de

$$y(x) = \sin x, \quad z(y) = \exp y.$$

De forma similar

$$f(x) = (\ln x)^2 = Z(x) = z(y(x)), \quad y(x) = \ln x, \quad z(y) = y^2.$$

Sabiendo descomponer podemos determinar dominios de funciones complicadas. Por ejemplo, nos permite ver que las raíces cuadradas de polinomios

$$y = \sqrt{P(x)} = Z(x) = z(y(x)); \quad y(x) := P(x), \quad z(y) := \sqrt{y}.$$

tienen como dominio el conjunto de puntos de  $\mathbb{R}$  en donde el polinomio  $P(x)$  no es negativo.

**Ejercicio 1.33.** Probar que el dominio de

$$y = \sqrt{(x-1)(x-2)},$$

es  $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ .

## Capítulo 2

# SUCESIONES Y LÍMITES DE NÚMEROS REALES

Introducimos el concepto fundamental de límite de una sucesión y comenzamos a aprender estrategias para cálculo de límites. No obstante hasta que no veamos los capítulos de cálculo diferencial no dispondremos de algunas de las técnicas más útiles que debemos dominar.

### 2.1 Sucesiones y límites en $\mathbb{R}$

**Definición 2.1.** Una **sucesión** de números reales es una fila infinita de elementos de  $\mathbb{R}$

$$(a_n)_1^\infty = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots).$$

Los elementos de una sucesión  $(a_n)_1^\infty$  no tienen por que ser distintos entre si y pueden repetirse arbitrariamente. Por ejemplo

$$a_n = 1, \quad \forall n = 1, 2, \dots; \quad (a_n)_1^\infty = (1, 1, 1, \dots),$$

ó

$$a_n = (-1)^n; \quad (a_n)_1^\infty = (-1, 1, -1, \dots).$$

Denominaremos **sucesiones infinitas** a aquellas que posean un conjunto infinito de elementos distintos.

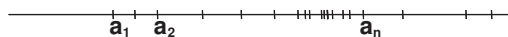


Figura 2.1: Sucesión de números reales

#### Formas de construir sucesiones

Hay dos formas básicas de construir sucesiones:

- i) Usando una función  $y = f(x)$  y tomando las imágenes de los naturales positivos

$$a_n = f(n), \quad n = 1, 2, \dots$$

- ii) Usando recurrencias que determinen cada elemento de la sucesión en función de algunos de los anteriores y fijando los elementos iniciales necesarios.

**Ejemplo 2.2.** Usando el primer método:

$$f(x) = \frac{x^2}{2x^3 - x}; \quad \rightsquigarrow \quad a_n = \frac{n^2}{2n^3 - n}$$

$$f(x) = \sin x; \quad \rightsquigarrow \quad a_n = \sin n,$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}; \quad \rightsquigarrow \quad a_n = \sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + 1}.$$

Con el segundo método:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n}, \quad a_1 := \sqrt{2}; \quad \rightsquigarrow \quad a_2 = \sqrt{\sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}, \dots,$$

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, \quad a_1 := 1, \quad a_2 := 1; \quad \rightsquigarrow \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 3, \dots$$

### Operaciones con sucesiones

Podemos efectuar varias operaciones con sucesiones:

- i) Sumarlas

$$(a_n)_1^\infty + (b_n)_1^\infty := (a_n + b_n)_1^\infty.$$

- ii) Multiplicarlas

$$(a_n)_1^\infty (b_n)_1^\infty := (a_n b_n)_1^\infty.$$

- iii) Multiplicarlas por un número

$$c(a_n)_1^\infty := (c a_n)_1^\infty.$$

- iv) Dividir las

$$\frac{(a_n)_1^\infty}{(b_n)_1^\infty} := \left( \frac{a_n}{b_n} \right)_1^\infty,$$

cuando  $b_n \neq 0, \forall n \geq 1$ .

## 2.2 El concepto de límite

**Definición 2.3.** Dada una sucesión  $(a_n)_1^\infty$  se dice que un número real  $a$  es el límite de la sucesión cuando  $n$  tiende a infinito

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

si se verifica

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \text{tal que si } n \geq n_0 \text{ entonces } |a_n - a| < \epsilon.$$

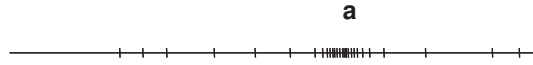


Figura 2.2: Límite de una sucesión

**Consecuencias y observaciones**

- i) Cuando existe el límite de una sucesión este es **único**.

*Demostración.* Supongamos que una sucesión tuviera dos límites

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Tomemos un número  $\epsilon > 0$  cualquiera, aplicando la definición existiran  $n_0$  y  $n'_0$  tales que

$$n > n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon; \quad n > n'_0 \implies |a_n - b| < \epsilon.$$

Por tanto si  $n$  es a la vez mayor que  $n_0$  y  $n'_0$  podemos escribir

$$|a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| = |a_n - a| + |a_n - b| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Como  $\epsilon > 0$  es arbitrario, esto nos dice que  $|a - b| = 0$  y por tanto  $a = b$ . *Q.E.D.*

- ii) Las sucesiones que admiten límite se denominan **sucesiones convergentes**.
- iii) Las sucesiones convergentes se *concentran* sobre un único punto de  $\mathbb{R}$  (su límite). Es útil pensar en una sucesión como en un punto que se mueve sobre la recta ocupando en cada tiempo  $t = n$  la posición  $a_n$ . Las sucesiones convergentes  $(a_n)_1^\infty$  son aquellas que se dirigen a su punto límite  $a$  cuando crece el tiempo. Según la definición considerando cualquier distancia  $\epsilon > 0$  tan pequeña como queramos, existe un instante  $n_0$  a partir del cual (para  $t = n > n_0$ ) el punto móvil  $a_n$  estará confinado en el intervalo  $I(a; \epsilon)$ .
- iv) En la definición de límite el valor del índice  $n_0$  será en general distinto para diferentes valores de  $\epsilon$ . Podemos suponer entonces que puede tomarse  $n_0$  como una función  $n_0(\epsilon)$  de  $\epsilon$ . Así  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , si existe una función  $n_0(\epsilon)$  tal que

$$|a_n - a| < \epsilon, \quad \forall n > n_0(\epsilon).$$

- v) Si una sucesión  $(a_n)_1^\infty$  es convergente entonces forma un subconjunto acotado en  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.* Dado  $\epsilon > 0$  cualquiera, todos los puntos  $a_n$  con  $n > n_0(\epsilon)$  están en el intervalo  $I(a; \epsilon)$  y solo quedarán fuera, a lo sumo, el conjunto finito  $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$ . Es por tanto obvio que la sucesión forma un conjunto acotado. *Q.E.D.*

Acabamos de ver que las sucesiones convergentes son siempre acotadas. Por tanto si una sucesión no es acotada no puede ser convergente. Algunas sucesiones no acotadas sin embargo se dice que tienen un límite igual a  $+\infty$  ó a  $-\infty$  (esto no contradice lo anterior pues  $\pm\infty$  no son puntos de  $\mathbb{R}$ )

**Definición 2.4.** Dada una sucesión  $(a_n)_1^\infty$  se dice que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$$

si se verifica

$$\forall K > 0 \quad \exists n_0 \quad \text{tal que si } n \geq n_0 \text{ entonces } a_n > K.$$

Por otra parte se dice que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = +\infty$

**Ejemplo 2.5.** Es claro que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty, \tag{2.1}$$

pero si queremos demostrarlo con rigor hay que usar la propiedad Arquimediana. Así dado  $K > 0$  cualquiera, siempre existe  $n_0$  tal que  $n_0 \geq K$  (propiedad Arquimediana con  $x = 1$  é  $y = K$ ). Por tanto si  $n > n_0$  entonces  $n > K$  lo que demuestra (2.1).

**Ejercicio 2.6.** Usar la segunda versión de la propiedad Arquimediana para probar rigurosamente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

## 2.3 Cálculo de límites

### Operaciones con límites de sucesiones convergentes

Supongamos sucesiones convergentes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Se verifican las propiedades siguientes:

i) El límite de la suma es la suma de los límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

ii) El límite del producto es el producto de los límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = a b.$$

iii) El límite del producto por un número es el número por el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c a_n) = c a.$$

iv) El límite del cociente es el cociente de los límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

siempre que  $b \neq 0$ .

v) Si  $a > 0$  entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b.$$

*Demostración.* Demostraremos solo la propiedad sobre el límite del producto. Para cualquier valor de  $n$  se verifica que

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| \\ &= |(a_n - a)b_n| + |a(b_n - b)| = |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \end{aligned} \quad (2.2)$$

Por hipótesis dado  $\epsilon > 0$  arbitrario existen  $n_0(\epsilon)$  y  $n'_0(\epsilon)$  tales que

$$n > n_0(\epsilon) \implies |a_n - a| < \epsilon; \quad n > n'_0(\epsilon) \implies |b_n - b| < \epsilon.$$

Además como  $(b_n)_1^\infty$  está acotada (por ser convergente), existirá un  $M > 0$  tal que  $|b_n| < M, \forall n$ . Como consecuencia si tomamos

$$n > \max(n_0(\epsilon/2M), n'_0(\epsilon/2A)),$$

siendo  $A > |a|$  de (2.2) se deduce

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n - a|M + A|b_n - b| < \epsilon.$$

Lo cual prueba la propiedad del límite del producto.

*Q.E.D.*

### Comparación de sucesiones

En ocasiones sucede que podemos averiguar el límite de una sucesión complicada  $(a_n)_1^\infty$  al acotarla o compararla con otras más sencillas. Así es fácil demostrar los siguientes enunciados

i) Si  $|a_n| \leq b_n, \forall n$  a partir de un cierto  $n_0$  entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

ii) **Criterio del bocado.** Sean sucesiones tales que  $b_n \leq a_n \leq c_n, \forall n$  a partir de un cierto  $n_0$  entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l.$$

iii) Si  $b_n \leq a_n, \forall n$  a partir de un cierto  $n_0$  entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

**Ejemplo 2.7.** Sea la sucesión

$$a_n = \frac{\sin(\cos(n))}{n}.$$

Como  $|a_n| \leq b_n$  con  $b_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  concluimos que también  $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

**Operaciones con límites infinitos**

En ocasiones es posible operar con límites de sucesiones que divergen a  $\pm\infty$  o que no convergen y concluir un resultado concreto. Otras veces el cálculo no siempre arroja el mismo resultado y se dice entonces que estamos ante un límite **indeterminado**. Para tales casos veremos más adelante metodos para decidir el resultado.

Empleemos la notación siguiente

$$\begin{aligned}\mathbf{Acot} &\equiv \text{sucesión acotada (convergente o no),} \\ \pm\infty &\equiv \text{sucesión que diverge a } \pm\infty.\end{aligned}$$

Entonces se verifica:

$$\begin{aligned}\mathbf{Acot} \pm\infty &= \pm\infty, & \infty + \infty &= \infty, \\ (\mathbf{Acot} \geq c > 0) \cdot \infty &= \infty, & \infty \cdot \infty &= \infty, \\ \frac{\mathbf{Acot}}{\infty} &= 0, & \infty^\infty &= \infty \\ \infty^c &= \infty, (c > 0), & \infty^{-c} &= 0, (c > 0), \\ c^\infty &= \infty, (c > 1), & c^\infty &= 0, (0 < c < 1).\end{aligned}$$

Sin embargo los siguientes límites son indeterminados

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Veamos algunos ejemplos

**Cálculo de límites**

Comencemos con dos límites que hemos calculado rigurosamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Si utilizamos las reglas de límites de productos deducimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0, \quad r = 1, 2, \dots$$

Consideremos ahora el límite de una sucesión definida mediante una función polinómica de grado  $r > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \dots + a_1 n + a_0), \quad a_r \neq 0.$$

Sacando factor común  $a_r n^r$  la sucesión es un producto de dos sucesiones

$$\left(1 + \frac{a_{r-1}}{a_r n} + \dots + \frac{a_1}{a_r n^{r-1}} + \frac{a_0}{a_r n^r}\right) (a_r n^r).$$



La primera es acotada (tiende a 1) y la segunda tiende a  $\pm\infty$  dependiendo del signo de  $a_r$ . Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \cdots + a_1 n + a_0) = \pm\infty.$$

Tomemos una sucesión definida mediante una función racional

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_s n^s + b_{s-1} n^{s-1} + \cdots + b_1 n + b_0}, \quad a_r \neq 0, b_s \neq 0.$$

La técnica para su cálculo es una instrucción simple que usaremos a menudo con sucesiones tipo cociente de dos sucesiones: **dividir numerador y denominador por el término dominante**. En este caso habría que dividir por  $n^r$  si  $r \geq s$  ó por  $n^s$  si  $s \geq r$ . El resultado es un cociente de dos sucesiones que sabemos analizar y cuyo límite es

$$\begin{cases} \infty & \text{si } r > s, \\ 0 & \text{si } s > r, \\ \frac{a_r}{b_r} & \text{si } r = s \end{cases}$$

Cálculos que podemos efectuar con sucesiones acotadas y divergentes son por ejemplo los siguientes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n + n) = \text{Acot} + \infty = \infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((2 + \sin^2(n^3)) n) = (\text{Acot} \geq 1 > 0) \cdot \infty = \infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 10^{7-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^7}{10^n} = \frac{\text{Acot}}{\infty} = 0.$$

Podemos comprobar algunas de las indeterminaciones descritas anteriormente con los ejemplos siguientes.

**Tipo  $\infty - \infty$**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1) - n) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \infty.$$

**Tipo  $0 \cdot \infty$**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot n \right) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot n^2 \right) = \infty.$$

**Tipo  $\frac{\infty}{\infty}$**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0.$$

### Sucesiones monótonas

Uno de los criterios más útiles de convergencia de sucesiones es el criterio de las sucesiones monótonas. Describe una de las propiedades distintivas de  $\mathbb{R}$  ya que está estrechamente relacionado con el axioma del supremo.

**Definición 2.8.** Una sucesión  $(a_n)_1^\infty$  se dice **monótona creciente** si  $a_{n+1} > a_n$ ,  $\forall n$ , y **monótona decreciente** si  $a_{n+1} < a_n$ ,  $\forall n$ .

**Teorema 2.9. Convergencia de sucesiones monotonas acotadas**  
*Toda sucesión monótona creciente (decreciente) acotada superiormente (inferiormente) es convergente. Además su límite es su supremo (su ínfimo).*

*Demostración.* Sea  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión monótona creciente acotada superiormente. Por el axioma del supremo existirá  $a \equiv \sup\{a_n : n \geq 1\}$ . Veamos que  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Dado  $\epsilon > 0$ , por la definición del punto  $a$  debe existir algún elemento  $a_{n_0}$  del conjunto formado por la sucesión tal que

$$a - \epsilon < a_{n_0} \leq a$$

En caso contrario sucedería que  $a - \epsilon$  sería una cota superior más pequeña que  $a$ . Ahora bien, por ser la sucesión monótona creciente

$$n > n_0 \implies a_n \geq a_{n_0}$$

y como  $a_n \leq a$ , obtendríamos

$$a - \epsilon < a_n \leq a$$

Luego  $|a_n - a| < \epsilon$  y por tanto  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

*Q.E.D.*

**Ejemplo 2.10.** Este resultado se aplica a muchas sucesiones interesantes definidas mediante recurrencias, como la sucesión

$$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, x_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$$

que está definida por la recurrencia

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n}.$$

Veamos que se verifica:

- La sucesión está acotada superiormente:

$$x_n \leq 2, \forall n.$$

La desigualdad es cierta para  $n = 1$ . Por otra parte si suponemos que es cierta para  $n = N$ , entonces también lo es para  $n = N + 1$  ya que

$$x_{N+1} = \sqrt{2x_N} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = 2.$$

Luego por el principio de inducción, la desigualdad será cierta para todo  $n$ .

- La sucesión es monótona creciente

La demostración es inmediata ya que:

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \geq \sqrt{x_n} \sqrt{x_n} = x_n.$$

Como la sucesión es monótona creciente y acotada superiormente, será convergente.

Si denotamos  $x$  a su límite, entonces tomando el límite en la relación de recurrencia se obtiene  $x = \sqrt{2x}$ , y por tanto  $x = 2$ .

## 2.4 Sucesiones no convergentes

Hasta ahora solo hemos considerado un tipo de sucesiones no convergentes que son las que tienden a  $+\infty$  ó a  $-\infty$ . Vamos a describir ahora los otros casos posibles de sucesiones no convergentes.

Hemos visto que un rasgo característico de la sucesiones convergentes es que están acotadas. Sin embargo no todas las sucesiones acotadas son convergentes, como muestra el siguiente ejemplo

**Ejemplo 2.11.** La sucesión

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n},$$

está acotada ya que

$$|a_n| \leq |(-1)^n| + \left|\frac{1}{n}\right| \leq 1 + 1 = 2.$$

Pero no es convergente. Basta con ver que los elementos del tipo

$$a_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1},$$

se acumulan sobre  $-1$  mientras que los del tipo

$$a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n},$$

se acumulan sobre  $1$ .

Para comprender como pueden ser las sucesiones acotadas no convergentes podemos fijarnos en los puntos de acumulación que posee una sucesión. De acuerdo al teorema de Weierstrass un subconjunto de  $\mathbb{R}$  infinito y acotado tiene siempre algún punto de acumulación. Si repasamos ahora la definición de punto de acumulación de un conjunto vemos que es equivalente al siguiente criterio:

**Un punto  $c$  es punto de acumulación de un conjunto  $A$  en  $\mathbb{R}$  si y solo si existe una sucesión infinita  $(x_n)_1^\infty$  dentro de  $A$  cuyo límite es  $c$**

De esta forma un punto  $c$  es punto de acumulación de una sucesión  $(a_n)_1^\infty$  cuando existe una **subsucesión** de  $(a_n)_1^\infty$

$$x_n = a_{f(n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

cuyo límite es  $c$ .

**Ejemplo 2.12.** En el ejemplo anterior de la sucesión

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n},$$

es claro que  $-1$  y  $1$  son puntos de acumulación de la sucesión ya que las subsucesiones

$$x_n := a_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1}, \quad x'_n := a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n},$$

tienden a  $-1$  y  $1$  respectivamente.

Podemos ahora enunciar el siguiente criterio de caracterización de sucesiones acotadas no convergentes que llamaremos **sucesiones acotadas oscilantes**

**Una sucesión infinita acotada es no convergente cuando posee más de un punto de acumulación.**

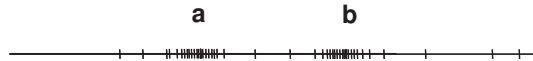


Figura 2.3: Sucesión con dos puntos de acumulación

De hecho una sucesión infinita acotada puede tener infinitos puntos de acumulación, como prueba el siguiente ejercicio

**Ejercicio 2.13.** Puede demostrarse que los números racionales de cualquier intervalo  $[a, b]$  pueden ordenarse en una sucesión  $(x_n)_1^\infty$ . Probar que el conjunto de puntos de acumulación de tal sucesión es todo el intervalo  $[a, b]$ .

Adviértase que las sucesiones no acotadas pueden presentar también comportamiento oscilante. Basta examinar los siguientes ejemplos

**Ejercicio 2.14.** Determinar las subsucesiones que convergen o tienden a  $\pm\infty$  de las dos sucesiones siguientes:

$$(-1)^n \cdot n; \quad n + (-1)^n \cdot n + \frac{1}{n}.$$

## Capítulo 3

# LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

Se introduce la noción de límite de una función cuando la variable tiende a un valor dado. Además se define una clase básica de funciones: las funciones continuas. También se proporcionan métodos para analizar la continuidad de funciones construidas mediante operaciones simples con funciones elementales.

### 3.1 Límites de funciones

Como dijimos antes consideraremos siempre funciones

$$f : D \mapsto \mathbb{R}, \quad y = f(x),$$

cuyo dominio  $D$  es una unión de un número finito de intervalos.

**Definición 3.1.** Sea  $a$  un punto de acumulación del dominio  $D$  de una función  $y = f(x)$ . Se dice que un número real  $l$  es el **límite de la función cuando la variable tiende al punto  $a$**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l,$$

cuando para toda sucesión  $(x_n)_1^\infty$  en  $D$  que no pase por  $a$  ( $x_n \neq a, \forall n$ ) tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l, \quad (y_n := f(x_n)).$$

La definición se generaliza a los casos en que  $l = \pm\infty$ . Así, se dice que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$$

cuando para toda sucesión  $(x_n)_1^\infty$  en  $D$  que no pase por  $a$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty, \quad (y_n := f(x_n)).$$

Análogamente se dice que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  cuando  $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = +\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  significa que cuando  $x$  tiende al punto  $a$  sin pasar por  $a$  entonces  $y = f(x)$  tiende a  $l$

### Observaciones

- i) Exigir al punto  $a$  que sea un punto de acumulación del dominio  $D$  de  $f$  es necesario para poder tener sucesiones infinitas en  $D$  que tiendan al punto  $a$  sin pasar por él.
- ii) Si para toda sucesión  $(x_n)_1^\infty \subset D$  a la derecha de  $a$  ( $x_n > a \forall n$ ) con límite  $a$  se verifica que  $y_n = f(x_n)$  tiende a un  $l_+ \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , entonces diremos que  $l$  es el límite lateral por la derecha de  $f$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = l_+.$$

De forma similar se define el límite lateral por la izquierda de  $f$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = l_-.$$

Puede demostrarse que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  si y solo si existen los dos límites laterales y estos coinciden  $l_+ = l_-$ .

- iii) En el caso de funciones con dominio  $D$  no acotado a derecha o a izquierda puede definirse de manera obvia los límites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

**Ejemplo 3.2.** La función

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x \neq 0, \\ 0 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

tiene límite 0 cuando  $x \rightarrow 0$ .

**Ejemplo 3.3.** La función

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x \neq 0, \\ 1 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

tiene límite 0 cuando  $x \rightarrow 0$ .

**Ejemplo 3.4.** La función

$$f_3(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } x \text{ en } [-1, 0], \\ 1 & \text{para } x \text{ en } (0, 1] \end{cases}$$

no posee límite en  $a = 0$ . Los límites por la izquierda y por la derecha son distintos  $l_+ = -1$  y  $l_- = 1$

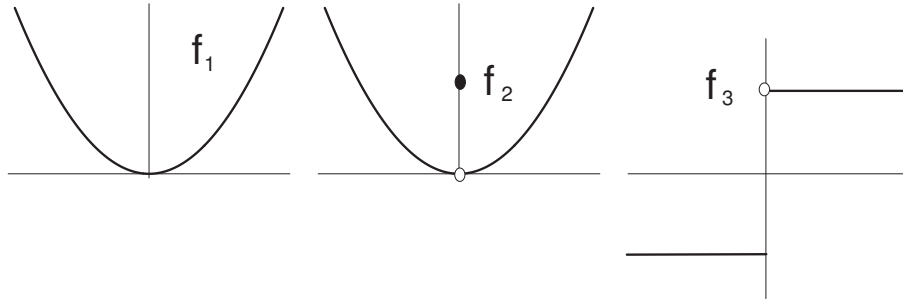


Figura 3.1:

**Caracterización  $\epsilon - \delta$** 

Una condición equivalente para  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  cuando  $a$  y  $l$  son finitos es:

**Teorema 3.5.**

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{tal que} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad (x \in D) \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

De igual forma para  $l \in \mathbb{R}$  y  $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \iff \forall \epsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad \text{tal que} \quad x > A \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{tal que} \quad 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > A.$$

Criterios análogos se verifican para  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ , etc.

**Operaciones con límites de funciones**

Supongamos funciones con límite cuando  $x \rightarrow a$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = m \in \mathbb{R}.$$

usando las propiedades respectivas para sucesiones se encuentra inmediatamente que verifican las propiedades siguientes:

i) El límite de la suma es la suma de los límites

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = l + m.$$

ii) El límite del producto es el producto de los límites

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) g(x)) = l m.$$

iii) El límite del producto por un número es el número por el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c a_n) = c a.$$

iv) El límite del cociente es el cociente de los límites

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m},$$

siempre que  $m \neq 0$ .

**Las mismas operaciones con límites infinitos así como la clasificación de límites indeterminados para las sucesiones se extienden a los límites de funciones.**

Veamos algunas técnicas para calcular límites de funciones

### Cálculo de límites de funciones

Comencemos con límites de la función  $f(x) = x$ . Es evidente de la propia definición que

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty.$$

Si utilizamos las reglas de límites de productos deducimos que para  $n \geq 1$

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = (\pm 1)^n \cdot \infty.$$

Consideremos ahora los límites de una función polinómica  $y = P(x)$  de grado  $n > 0$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Por las propiedades de los límites de sumas y productos se obtiene inmediatamente que

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = a_n a^n + \cdots + a_1 a + a_0 = P(a), \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

y dependiendo del signo de  $a_n$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = (\pm 1)^n \text{signo}(a_n) \infty.$$

Consideremos ahora una función racional

$$R(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad a_n \neq 0, b_m \neq 0.$$

Por lo demostrado para límites de polinomios y la propiedad del límite del cociente se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow a} R(x) = R(a), \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (P_2(a) \neq 0),$$

Para los límites en el infinito usamos la técnica : **dividir numerador y denominador por el término dominante**. En este caso habría que dividir por  $x^n$  si  $n \geq m$  ó por



$x^m$  si  $m \geq n$ . El resultado es un cociente de dos funciones que sabemos analizar y cuyo límite es

$$\begin{cases} \pm\infty & \text{si } n > m, \\ 0 & \text{si } m > n, \\ \frac{a_n}{b_n} & \text{si } n = m \end{cases}$$

Muchas de las funciones que utilizaremos en el curso satisfacen en los puntos  $a \in D$  de sus dominios la propiedad de **continuidad**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Esto sucede para las funciones trigonométricas, hiperbólicas y exponencial en todos los puntos  $a$  de la recta

$$\operatorname{sen} x, \quad \cos x, \quad \sinh x, \quad \cosh x, \quad e^x.$$

Para raíces  $x^{1/n}$  y logaritmos  $\ln x$  sucede en la semirecta positiva.

**Ejemplo 3.6.** Un tipo distinto de argumento debe usarse para calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}$$

Como geoméricamente es claro comparando las áreas de los tres recintos de la figura

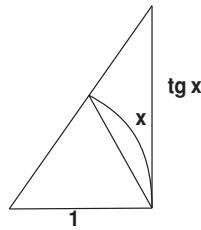


Figura 3.2:

que:

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

dividiendo entre  $\operatorname{sen} x$ :

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\tan x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Haciendo tender  $x \rightarrow 0$ , como  $\cos x \rightarrow 1$ , se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1.$$

Un resultado importante que luego usaremos para determinar las derivadas de las funciones seno y coseno.

## 3.2 Funciones continuas

### Definición de continuidad

Sea una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida sobre un dominio  $D$  tal que todos sus puntos son de acumulación. Es decir  $D \subset P_{ac}(D)$ .

**Definición 3.7.** Decimos que  $f$  es **continua en**  $a \in D$  cuando existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y es igual a  $f(a)$ . Es decir, se cumplen las condiciones

i)  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$   
 ii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

### Observaciones

- i) Adviértase que en la definición el punto  $a$  debe pertenecer al dominio  $D$  de la función.
- ii) Podemos aplicar el siguiente **criterio**  $\epsilon - \delta$ : La función  $f$  es continua en  $a \in D$  si y solo si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad |x - a| < \delta, \quad (x \in D) \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

- iii) Se dice que  $f$  es continua en  $D$  si lo es en todo punto de  $D$ .
- iv) Por las propiedades de los límites de funciones vistas anteriormente se deduce que si  $f_1, f_2$  son funciones continuas en  $a$ , entonces también lo son

$$f_1 + f_2, \quad f_1 f_2, \quad \frac{f_1}{f_2} \quad \text{si } f_2(c) \neq 0.$$

- v) Es también inmediato demostrar que la composición  $f_1 \circ f_2$  de funciones continuas es de nuevo una función continua.
- vi) Por los ejemplos vistos anteriormente se deduce
  - a) Un polinomio es una función continua en todo  $\mathbb{R}$ .
  - b) Una función racional es continua en todo  $\mathbb{R}$  salvo en los ceros del denominador.

### Métodos de construcción de funciones continuas

Por su importancia describiremos a continuación algunos resultados prácticos para construir funciones continuas. En particular estos métodos nos sirven para determinar donde son continuas las funciones habituales. Aunque todavía no hemos estudiado en este curso operaciones tales como la integración o la suma de series de funciones, utilizamos aquí tales operaciones asumiendo que el estudiante conoce algunos aspectos de estas nociones. En todo caso volveremos a ellas en los capítulos posteriores .

**Funciones definidas mediante integrales con extremo variable**

Si  $g = g(x)$  es una función continua en un intervalo  $(a, b)$  entonces fijado un punto  $c \in (a, b)$  la función

$$f(x) = \int_c^x g(t) dt$$

es también continua en  $(a, b)$ .

**Ejemplo 3.8.** La función logaritmo se define por

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Por tanto es continua en  $(0, +\infty)$ .

**Funciones definidas mediante series**

Si  $(f_n(x))$  son una sucesión de funciones continuas en un intervalo  $[a, b]$  cuya serie

$$\sum_{n \geq 1} f_n(x),$$

es convergente uniformemente en  $[a, b]$ , entonces la suma de la serie también es continua en  $[a, b]$ .

**Ejemplo 3.9.** Este resultado permite concluir que funciones tales como

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

son continuas en  $\mathbb{R}$

**Ejercicio 3.10.** A partir de la continuidad de la función exponencial  $e^x$ , demostrar que las funciones hiperbólicas

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

son continuas en todo  $\mathbb{R}$

**Funciones inversas de funciones continuas monótonas**

**Teorema 3.11. Continuidad de la función inversa.** Sea  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  una función monótona estricta y continua en un intervalo  $I$  abierto. Entonces su función inversa  $f^{-1} : f(I) \mapsto \mathbb{R}$ , que existe por ser  $f$  inyectiva, es también continua en su dominio  $f(I)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es monótona creciente estricta. Denotemos  $x = f^{-1}(y)$  a su función inversa. Dado  $b = f(a) \in f(I)$  arbitrario y  $\epsilon > 0$  arbitrario debemos probar que existe un  $\delta > 0$  tal que

$$|y - b| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| = |x - a| < \epsilon.$$

Veamos que esto se verifica si tomamos

$$\delta := \min(b - f(a - \epsilon_1), f(a + \epsilon_1) - b), \quad (3.1)$$

siendo  $0 < \epsilon_1 < \epsilon$  cualquiera verificando

$$(a - \epsilon_1, a + \epsilon_1) \subset I.$$

Efectivamente si  $|y - b| < \delta$

$$b - \delta < y < b + \delta. \quad (3.2)$$

Pero por (3.1)

$$\delta \leq b - f(a - \epsilon_1) \Rightarrow b - \delta \geq f(a - \epsilon_1); \quad \delta \leq f(a + \epsilon_1) - b \Rightarrow b + \delta \leq f(a + \epsilon_1).$$

De esta forma (3.2) implica

$$f(a - \epsilon_1) < y < f(a + \epsilon_1),$$

y como  $f$  es monótona creciente estricta, esta desigualdad implica a su vez que

$$a - \epsilon_1 < x < a + \epsilon_1.$$

Ahora bien  $\epsilon_1 < \epsilon$ , luego

$$a - \epsilon < a - \epsilon_1 < x < a + \epsilon_1 < a + \epsilon.$$

Es decir

$$|x - a| < \epsilon,$$

Como queríamos probar

*Q.E.D.*

**Ejemplo 3.12.** i) La función  $y = x^{2n}$ ,  $n \geq 1$  es monótona creciente estricta y continua en  $(0, +\infty)$ . Su función inversa  $y = \sqrt[2n]{x}$  es por tanto continua en  $(0, +\infty)$  (el recorrido de  $f$ ).

ii) La función  $y = x^{2n+1}$ ,  $n \geq 0$  es monótona creciente estricta y continua en  $(-\infty, +\infty)$ . Su función inversa  $y = \sqrt[2n+1]{x}$  es por tanto continua en  $(-\infty, +\infty)$  (el recorrido de  $f$ ).

iii) La función  $y = \sin x$  es monótona creciente estricta y continua en  $(-\pi/2, +\pi/2)$ . Su función inversa  $y = \arcsin x$  es por tanto continua en  $(-1, 1)$  (el recorrido de  $f$ ).

### Tipos de discontinuidades

Sea una función  $f : D \mapsto \mathbb{R}$  y  $a$  un punto de acumulación de  $D$ .

**Definición 3.13.** Decimos que  $a$  es una discontinuidad evitable de  $f$  si existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

En ese caso podemos extender la función  $f$  al dominio  $D \cup \{a\}$  en la forma siguiente

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{para } x = a \end{cases}$$

La nueva función  $f$  es también continua en  $x = a$ .

**Ejemplo 3.14.** La función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

tiene una discontinuidad evitable en  $x = 0$ .

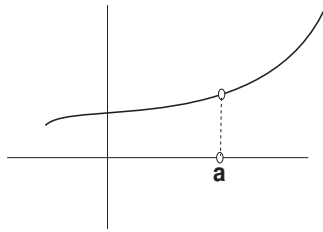


Figura 3.3: Discontinuidad evitable.

**Definición 3.15.** Se dice que  $a$  es una **discontinuidad de primera especie (discontinuidad de salto finito)** si existen los límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = l_+ \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = l_- \in \mathbb{R},$$

y son distintos. Los restantes casos de discontinuidades (distintos de los casos evitable y primera especie) se denominan **discontinuidades de segunda especie**.

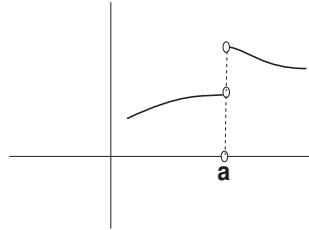


Figura 3.4: Discontinuidad de salto finito.

Se dice que  $a$  es una discontinuidad de segunda especie de tipo **divergencia** si al menos uno de los límites

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x),$$

es infinito.

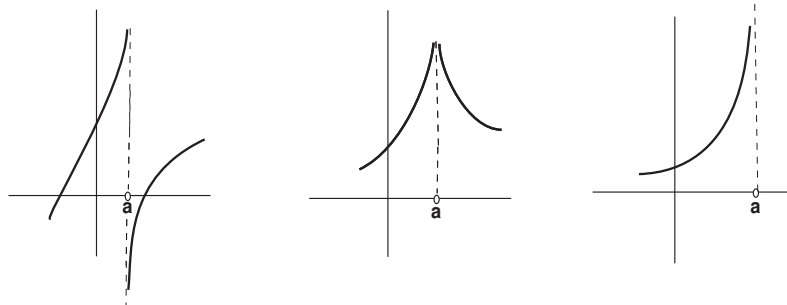


Figura 3.5: Discontinuidades de salto infinito.

**Ejemplo 3.16.** Las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}$$

tienen una divergencia en  $x = 0$ .

**Ejercicio 3.17.** Analizar el tipo de discontinuidad de la función

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x},$$

en  $x = 0$ .

**Ejemplo 3.18.** Sea la función con dominio todo  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

No existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  en ningún punto  $a$ . Siempre existen sucesiones  $(x_n)_1^\infty$  de racionales y  $(x'_n)_1^\infty$  de irracionales que tienden al punto  $a$ , sin embargo las sucesiones imagen  $(y_n = f(x_n) = 1)_1^\infty$  e  $(y'_n = f(x'_n) = 0)_1^\infty$  tienden a valores diferentes 1 y 0 respectivamente. Luego  $f$  no es continua en ningún punto de  $\mathbb{R}$

**Ejercicio 3.19.** Sea la función con dominio todo  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Probar que  $f$  es solo continua en  $x = 0$ .

### 3.3 Dos teoremas fundamentales sobre funciones continuas

Dos de las propiedades esenciales de las funciones continuas son descritas en los dos teoremas clásicos siguientes.

**Teorema 3.20. El teorema del valor intermedio de Bolzano.** *Dada una función continua:*

$$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R},$$

*en un intervalo cerrado y acotado, tal que:*

$$f(a) \neq f(b),$$

*entonces para cualquier valor  $y_0$  intermedio entre  $f(a)$  y  $f(b)$  existe un  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = y_0$ .*

*Demostración.* El proceso de demostración es el siguiente:

- i) Se divide  $[a, b]$  en dos intervalos  $I_1 = [a, x_0]$  y  $I'_1 = [x_0, b]$  de igual longitud ( $x_0 = \frac{a+b}{2}$ ). Si sucediera que  $f(x_0) = y_0$ , en tal caso  $c = x_0$  es el punto buscado.

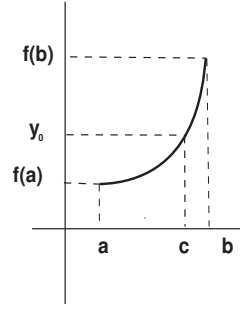


Figura 3.6: Interpretación geométrica del teorema de Bolzano

- ii) Si  $f(x_0) \neq y_0$ , en alguno de los intervalos  $I_1$  y  $I'_1$ , que designaremos  $[a_1, b_1]$ , sucederá que  $y_0$  es intermedio entre  $f(a_1)$  y  $f(b_1)$ . Dividiendo  $[a_1, b_1]$  en dos intervalos iguales  $I_2$  y  $I'_2$  con un extremo común, si la imagen de este no es  $y_0$ , designamos  $[a_2, b_2]$  al intervalo en que se verifica que  $y_0$  es intermedio entre  $f(a_2)$  y  $f(b_2)$ .

La repetición de este argumento puede dar lugar a dos situaciones distintas

- i) Encontramos un punto común en una pareja de intervalos  $I_n$  y  $I'_n$  en el que  $f$  toma el valor  $y_0$ .
- ii) No encontramos un punto del tipo anterior y por tanto obtenemos dos sucesiones monótonas  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ,

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad b_{n+1} \leq b_n, \quad a_n < b_n,$$

acotadas, ya que están en  $[a, b]$ . Obviamente convergen al mismo punto  $c \in (a, b)$ , y como  $y_0$  es intermedio entre  $f(a_n)$  y  $f(b_n)$ , y  $f$  es continua en  $c$ , tenemos que

$$y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c).$$

En ambos casos el teorema queda demostrado.

*Q.E.D.*

### Soluciones de ecuaciones

Este resultado es de gran utilidad para saber si una ecuación

$$f(x) = 0,$$

tiene alguna solución en un cierto intervalo  $[a, b]$  en que  $f$  es continua. Basta probar que  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos distintos, pues en ese caso el valor 0 será un valor intermedio entre  $f(a)$  y  $f(b)$ .

**Ejemplo 3.21.** Para demostrar que la ecuación

$$x^3 - x^2 + 1 = 0,$$

tiene alguna solución en  $[-1, 0]$ , consideramos la función

$$f(x) = x^3 - x^2 + 1.$$

Esta función es un polinomio y por tanto es continua en todo  $\mathbb{R}$ , en particular en el intervalo  $[-1, 0]$ . Además

$$f(-1) = -1, \quad f(0) = 1,$$

luego aplicando el teorema anterior existirá un punto intermedio  $a < c < b$  en el que  $f(c) = 0$ .

**Ejercicio 3.22.** Probar que la ecuación

$$\operatorname{sen} x = x,$$

tiene alguna solución en el intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,

**Teorema 3.23. El teorema del supremo y el ínfimo de Weierstrass.**

*Dada una función continua:*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

*en un intervalo cerrado y acotado, entonces existen puntos  $x_m, x_M$  en  $[a, b]$  en los que  $f$  alcanza su ínfimo  $\operatorname{inff}$  y su supremo  $\operatorname{supf}$ . Es decir:*

$$f(x_m) = \operatorname{inff}, \quad f(x_M) = \operatorname{supf}.$$

*Demostración.* La demostración se hace siguiendo los pasos que indicamos a continuación.

i)  $f([a, b])$  es un conjunto acotado de  $\mathbb{R}$ .

Si no lo fuera, por ejemplo no acotado superiormente, existiría una sucesión monótona creciente  $(y_n)_1^\infty \subset f([a, b])$ :

$$y_1 < y_2 < \dots < y_n < \dots$$

con límite  $\infty$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty.$$

Tomemos puntos  $(x_n)_1^\infty \subset [a, b]$  tal que:

$$f(x_n) = y_n.$$

Todos los elementos de la sucesión  $(x_n)_1^\infty$  son distintos (sus imágenes mediante  $f$  son distintas), luego forman un conjunto infinito y acotado (está contenido en  $[a, b]$ ). Dado que todo conjunto infinito acotado tiene algún punto de acumulación (teorema de Bolzano-Weierstrass), existirá una subsucesión  $(x'_n)_1^\infty \subset (x_n)_1^\infty$  convergente a un punto  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n \in [a, b]$  (el intervalo es un conjunto cerrado y  $c$  es un punto de acumulación). Como  $f$  es continua en  $c$

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty.$$

Contradicción pues por hipótesis  $f$  debe estar definida en todo  $[a, b]$ .



ii)  $f$  alcanza su supremo y su ínfimo en  $[a, b]$

Supongamos que no alcanza su supremo  $M := \sup f$ . Entonces la función

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)},$$

es continua en  $[a, b]$  y por tanto acotada ( por la primera parte del teorema que ya ha sido demostrada). Es decir

$$\exists A > 0 \quad \text{tal que} \quad \frac{1}{M - f(x)} < A, \quad \forall x \in [a, b]$$

Entonces

$$f(x) < M - \frac{1}{A},$$

lo cual nos indica una contradicción al encontrar una cota superior de  $f([a, b])$  estrictamente inferior al supremo.

*Q.E.D.*

Adviértase que  $f(x_m)$  y  $f(x_M)$  son respectivamente el máximo y el mínimo del conjunto  $f([a, b])$  formado por el recorrido de  $f$ .

## Capítulo 4

# EL CONCEPTO DE DERIVADA. CÁLCULO DE DERIVADAS

Se introduce la operación fundamental del cálculo diferencial: la derivada. Se proporcionan los resultados básicos para calcular derivadas de las funciones elementales

### 4.1 Derivadas de funciones

#### Definición de derivada

Sea una función  $f : D \mapsto \mathbb{R}$  y  $a \in D$  un punto interior a  $D$  (existe un intervalo  $I(a, r)$  centrado en  $a$  y de radio  $r$  que está contenido en  $D$ ).

**Definición 4.1.** Se dice que  $f$  es **derivable en  $a$**  si existe el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Cuando ello sucede dicho límite se denota por  $f'(a)$  ó  $\frac{df}{dx}(a)$  y se denomina **derivada de  $f$  en  $a$** .

Se dice que  $f$  es derivable en  $D$  si lo es en cada uno de los puntos de  $D$ . En ese caso se define la función derivada  $f' : D \mapsto \mathbb{R}$  como aquella que asocia a cada punto  $x$  de  $D$  el valor  $f'(x)$ . Análogamente se definen la derivadas sucesivas  $f'' := (f')', \dots, f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ .

#### Observaciones

- i) El valor  $f'(a)$  expresa la **tasa de variación** de  $f(x)$  alrededor de  $a$  con respecto a variaciones de  $x$ . Si interpretamos  $x$  como el tiempo é  $y = f(x)$  como la posición de un punto móvil sobre el eje OY, entonces  $f'(a)$  es la velocidad del móvil en el instante  $a$ .
- ii) Geométricamente  $f'(a)$  mide la pendiente de la recta tangente a la gráfica en  $x = a$ .

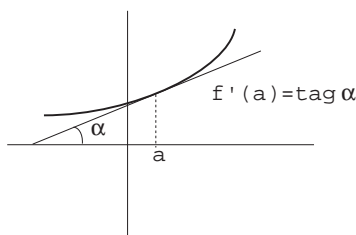


Figura 4.1: La derivada es la pendiente de la recta tangente

iii) De acuerdo a lo que sabemos de límites de funciones es claro que podemos escribir

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Este límite existirá cuando los límites laterales existan y coincidan. En términos geométricos esta propiedad significa que cuando la tangente a la gráfica no está definida de forma precisa e inambigua en un punto, la función no será derivable en ese punto.

**Ejemplo 4.2.** La función

$$f(x) = |x|,$$

no es derivable en  $x = 0$ . En  $x = 0$  no está definida la tangente a la gráfica de forma inambigua. El hecho es que los límites laterales cuando  $x \rightarrow 0$  existen pero no coinciden

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x} = -1.$$

### Continuidad de funciones derivables

**Teorema 4.3.**  $f$  derivable en  $a \implies f$  continua en  $a$ .

*Demostración.* Para cada  $x \in D$  distinto de  $a$  podemos escribir la identidad:

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a).$$

Tomando el límite cuando  $x \rightarrow a$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= f(a) + \left[ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \\ &= f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a). \end{aligned}$$

Luego  $f$  es continua en  $a$ .

*Q.E.D.*

Este resultado permite descartar la existencia de derivada en los puntos de discontinuidad.

**Ejemplo 4.4.** La continuidad no implica la derivabilidad. Obsérvese el ejemplo de la función

$$f(x) = |x|,$$

que es continua en  $x = 0$  y sin embargo no es derivable en ese punto.

**Recordar**

$$f \text{ derivable en } a \implies f \text{ continua en } a$$

$$f \text{ continua en } a \not\implies f \text{ derivable en } a$$

### Operaciones con derivadas

Es fácil demostrar las siguientes propiedades de funciones derivables

- i) La derivada de una suma es la suma de las derivadas

$$(f + g)' = f' + g'.$$

- ii) La derivada de una constante por una función es el producto de la constante por la derivada de la función

$$(cf)' = cf'.$$

- iii) La derivada de un producto de funciones satisface **la regla de Leibnitz del producto**:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

- iv) La derivada de un cociente de funciones satisface:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

siempre que el denominador no se anule en el punto en que se calcula tal derivada.

*Demostración.* Veamos por ejemplo la demostración de la tercera propiedad. Por definición

$$(fg)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Sumando al numerador la expresión ( que es idénticamente igual a cero)

$$-f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h),$$

se obtiene

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= f'(x) \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + f(x)g'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \end{aligned}$$

donde hemos usado la continuidad de  $g$  en  $x$ , que es consecuencia de su derivabilidad en el punto  $x$ . *Q.E.D.*

## 4.2 Cálculo de derivadas

### Derivadas de funciones racionales

Comencemos por la función constante  $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ . De la propia definición de derivada es claro que  $f$  es derivable en todo  $\mathbb{R}$  y que su función derivada  $f'(x)$  es idénticamente nula.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0.$$

El siguiente caso de mayor dificultad es  $f(x) = x$ . Claramente:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Utilizando ahora la regla de Leibnitz del producto, deducimos

$$(x^2)' = 2x, \dots, (x^n)' = nx^{n-1}.$$

Si usamos las propiedades i) y ii) de la derivada, obtenemos la derivada de cualquier polinomio:

$$P'(x) = (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)' = a_1 + 2a_2 x + \dots + na_n x^{n-1}.$$

Finalmente por la propiedad iv) de derivación de cocientes podemos obtener la derivada de cualquier función racional:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.$$

Adviértase que la derivada de una función racional es de nuevo una función racional con un denominador igual al de la anterior elevado al cuadrado. De ello deducimos que las funciones racionales admiten todas las derivadas en toda la recta salvo en los puntos en que se anula el denominador.

### Derivadas de funciones trigonométricas

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\operatorname{sen} x,$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Para calcular la derivada de la función seno se procede en la forma siguiente

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen} x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x) \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) \operatorname{sen} x + \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \cos x = \cos x, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1,$$

así como el resultante del siguiente cálculo

$$\begin{aligned}\frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ &= -\frac{\sin h}{h} \frac{\sin h}{\cos h + 1}, \\ \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= -1 \cdot \frac{0}{2} = 0.\end{aligned}$$

Las otras dos fórmulas para las derivadas del coseno y la tangente se deducen inmediatamente de la anterior utilizando las identidades

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

### 4.3 Derivación de funciones inversas

**Teorema 4.5.** Sea  $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  continua y monótona estricta (creciente o decreciente) y  $g : R = f((a, b)) \longrightarrow \mathbb{R}$  su función inversa. Si  $f$  es derivable en  $x_0 \in (a, b)$  y  $f'(x_0) \neq 0$ , entonces  $g$  es derivable en  $y_0 = f(x_0)$  y se verifica:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

*Demostración.* Sea  $y \in R$  con  $y \neq y_0$ , como  $f$  es monótona estricta también lo será  $g$ , luego  $x = g(y)$  será distinto de  $x_0$ . Consideremos la identidad:

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]^{-1}.$$

Como  $g$  es la inversa de una función continua monótona estricta,  $g$  también será continua. Por tanto si en la identidad anterior hacemos tender  $y$  a  $y_0$ , entonces  $x = g(y)$  tenderá a  $x_0 = g(y_0)$  y obtenemos:

$$g'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}.$$

*Q.E.D.*

#### Fórmula de derivación de funciones inversas

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.$$

**Ejemplo 4.6.** Mediante derivación de funciones inversas se demuestra inmediatamente que

$$(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Basta escribir

$$y = x^n, \quad x = y^{\frac{1}{n}}.$$

Luego

$$(y^{\frac{1}{n}})' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{(x^n)'} = \frac{1}{n x^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Cambiando ahora los nombres de las variables se obtiene la fórmula enunciada.

**Derivadas del logaritmo, de la exponencial y de las funciones hiperbólicas**

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \frac{1}{x}, & (e^x)' &= e^x, \\ (\sinh x)' &= \cosh x, & (\cosh x)' &= \sinh x. \end{aligned}$$

Para derivar la función logaritmo nos basamos en su definición como una integral con extremo variable

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Por el teorema fundamental del Cálculo, que veremos más adelante, sabemos que para funciones continuas  $f = f(x)$  se verifica

$$\left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

Aplicando esta fórmula a la expresión del logaritmo se obtiene

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Podemos ahora determinar la derivada de la función exponencial utilizando la regla de derivación de funciones inversas

$$y = \ln x, \quad x = e^y,$$

$$\frac{de^y}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{d \ln x}{dx}} = x = e^y.$$

A partir de la derivada de la exponencial es ahora trivial calcular las derivadas de las funciones hiperbólicas.

**Derivadas de funciones trigonométricas inversas**

$$\begin{aligned} (\arcsen x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Probaremos solo la del arcoseno y dejaremos como ejercicio las restantes.

$$y = \sen x, \quad x = \arcsen y.$$

Luego

$$(\arcsen y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{(\sen x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sen^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

**Ejercicio 4.7.** Determinar las derivadas

$$(\operatorname{arcsenh} x)', \quad (\operatorname{arccosh} x)', \quad (\operatorname{arctanh} x)'.$$

## 4.4 Derivación de funciones compuestas. La regla de la cadena

**Teorema 4.8.** Sean dos funciones

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : D' \longrightarrow \mathbb{R},$$

tales que

i)  $f$  es derivable en  $a \in D$ .

ii) El conjunto imagen de  $f$  está contenido en el dominio de  $g$

$$f(D) \subset D'.$$

iii)  $g$  es derivable en  $b = f(a)$ .

Entonces la función compuesta  $h = g \circ f$  es derivable en  $a$  y satisface la relación siguiente

$$h'(a) = g'(b)f'(a).$$

*Demostración.* Sea  $F$  definida sobre  $D'$  como

$$F(y) = \frac{g(y) - g(b)}{y - b} - g'(b), \quad y \neq b; \quad F(b) = 0.$$

Esta función satisface las siguientes propiedades:

- $F$  es continua en  $b$ . Efectivamente, como  $g$  es derivable en  $y = b$  es claro que

$$\lim_{y \rightarrow b} F(y) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} - g'(b) =$$

$$g'(b) - g'(b) = 0 = F(b).$$

Luego  $F$  es continua en el punto  $b$ .

- Cuando  $f(x) \neq b$  se verifica la identidad:

$$F(f(x)) = \frac{g(f(x)) - g(b)}{f(x) - b} - g'(b),$$

Esto es obvio debido a la definición de  $F$ . Despejando, se obtiene

$$g(f(x)) - g(b) = [F(f(x)) + g'(b)](f(x) - b).$$

Esta última igualdad es también cierta si  $f(x) = b$  ya que queda  $0 = 0$ . dividiendo ahora por  $x - a$  y tomando el límite cuando  $x \rightarrow a$ , se obtiene

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} [F(f(x)) + g'(b)] \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= [F(b) + g'(b)]f'(a) = g'(b)f'(a), \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar.



Q.E.D.

De forma operativa este resultado se expresa en la forma siguiente: dada una función compuesta  $z = Z(x) := z(y(x))$ , entonces

**Regla de la cadena**

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

La regla de la cadena es fundamental para saber derivar funciones definidas en términos de las funciones elementales básicas.

**Ejemplo 4.9.** Calculemos mediante la regla de la cadena la derivada de:

$$f(x) = \sqrt{\sin(x^2)}.$$

Lo haremos mediante dos aplicaciones de la regla de la cadena. Denotemos primero

$$y(x) = x^2, \quad z(y) = \sin y, \quad z = Z(x) = z(y(x)) = \sin(x^2).$$

La regla de la cadena nos dice que

$$\frac{d \sin(x^2)}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{d \sin y}{dy} \frac{dx^2}{dx} = (\cos y) 2x = 2x \cos(x^2).$$

Escribamos ahora

$$y(x) = \sin(x^2), \quad z(y) = \sqrt{y}, \quad z = Z(x) = z(y(x)) = \sqrt{\sin(x^2)}.$$

Aplicando de nuevo la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\sqrt{\sin(x^2)}}{dx} &= \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{y}}{dy} \frac{d \sin(x^2)}{dx} \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) 2x \cos(x^2) = \frac{x \cos(x^2)}{\sqrt{\sin(x^2)}} \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.10.**

Sea la función  $f = f(x)$  definida para todo  $x \in \mathbb{R}$  según:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

¿Dónde es continua?. ¿Dónde es derivable?

Es conveniente distinguir varios casos.

- Si  $x \neq 0$  y racional entonces:

$$f(x) = x^2 \neq 0.$$

Pero existirá sucesiones  $(x_n)$  de irracionales tales que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

mientras que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \neq f(x).$$

Ello prueba que  $f$  no es continua en  $x$ . Al no ser continua no puede ser derivable.

- Si  $x$  es irracional entonces

$$f(x) = 0.$$

Pero existirán sucesiones  $(x_n)$  de racionales tales que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

y se verificará:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = x^2 \neq 0 = f(x).$$

Luego  $f$  no es continua en los irracionales, y como consecuencia tampoco será derivable.

- En  $x = 0$  la función es derivable ya que si  $h_n$  es una sucesión que tiende a cero, entonces:

$$\frac{f(h_n) - f(0)}{h_n} = \begin{cases} \frac{h_n^2}{h_n} = h_n & \text{si } h_n \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } h_n \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Obviamente el límite cuando  $h_n$  tiende a cero de esta expresión es 0, luego  $f'(0) = 0$  y al ser  $f$  derivable en  $x = 0$  será continua en  $x = 0$ .

**Ejemplo 4.11.** Utilizando la regla de derivación de funciones compuestas, demostrar que si  $f$  es una función par (impar), entonces  $f'$  es impar (par).

Supongamos que  $f$  es par. Es decir:

$$f(-x) = f(x).$$

Llamando

$$y(x) = -x, \quad z(y) = f(y), \quad z = Z(x) = z(y(x)) = f(-x),$$

por la regla de la cadena tenemos

$$(f(-x))' = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = f'(y(x))y'(x) = f'(-x)(-1) = -f'(-x). \quad (4.1)$$

y como  $g(x) := f(-x) = f(x)$  se verifica que  $g'(x) = (f(-x))' = f'(x)$ . Sustituyendo esto en (4.1) se obtiene

$$f'(-x) = -f'(x).$$

Luego  $f'$  es impar. Se demuestra igualmente el enunciado para las  $f$  impares.

## Capítulo 5

# APLICACIONES DE LA DERIVADA I

Se proporcionan algunas de las aplicaciones fundamentales de la derivada para el estudio de funciones.

### 5.1 Los teoremas de Rolle y del valor medio

La siguiente definición introduce dos nociones que en principio parecen distintas. Pero inmediatamente veremos que están relacionadas estrechamente.

**Definición 5.1.** Sea una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que un punto  $c \in D$  es un punto de **máximo (mínimo) local** de  $f$  si existe un  $r > 0$  tal que  $f(x) \leq f(c)$  ( $f(x) \geq f(c)$ ) para todo  $x \in D$  tal que  $|x - c| < r$ . En ambos casos también se dice que  $c$  es un punto de **extremo local**. Se dice que un punto  $c \in D$  es un punto de **máximo (mínimo) absoluto** de  $f$  si

$$f(x) \leq f(c), (f(x) \geq f(c)) \quad \forall x \in D.$$

En ambos casos también se dice que  $c$  es un punto de **extremo global**.

Un punto  $c$  interior a  $D$  se dice que es un **punto crítico** de  $f$  si  $f'(c) = 0$ .

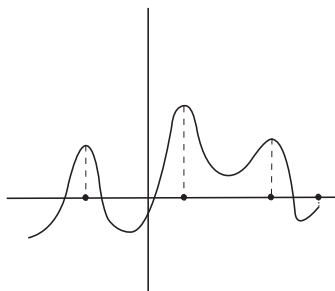


Figura 5.1: Máximos locales

#### Observaciones

- i) Un punto de extremo local no tiene que ser necesariamente interior al dominio de la función. Por ejemplo  $f(x) = x$  sobre el dominio  $D = [0, 1]$  tiene un máximo

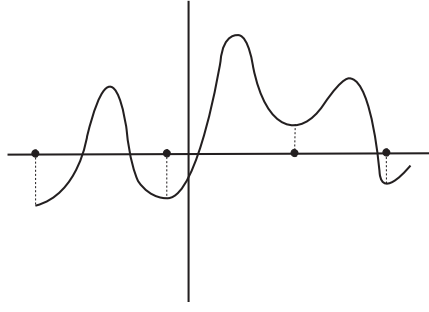


Figura 5.2: Mínimos locales

local en  $c = 1$  y un mínimo local en  $x = 0$ .

- ii) Una función puede tener varios o ningún punto de máximo o mínimo local en su dominio. Por ejemplo  $f(x) = x$  sobre el dominio  $D = \mathbb{R}$  no posee ningún punto de máximo o mínimo local. Sin embargo  $f(x) = x^2$  sobre el dominio  $D = [-1, 1]$  posee dos máximos locales en  $c = \pm 1$ .
- iii) Un punto de extremo absoluto sobre un dominio es obviamente también un punto de extremo local en ese dominio.
- iv) Por el teorema del supremo y el ínfimo de Weierstrass que vimos en el capítulo 3, toda función continua en un intervalo cerrado y acotado tiene puntos en que toma sus valores de máximo y mínimo absolutos.

**Teorema 5.2.** Si  $c$  es un punto de extremo local de  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  interior a  $D$  y además existe  $f'(c)$ , entonces  $c$  es un punto crítico.

*Demostración.* Supongamos, por ejemplo, que  $c$  es punto de máximo local de  $f$  entonces, al ser un punto interior en  $D$ , existe un  $r > 0$  tal que

$$f(x) \leq f(c), \quad \forall x \in (c - r, c + r) \subset D.$$

En ese caso

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \in (c, c + r) \\ \leq 0 & \text{si } x \in (c - r, c) \end{cases}$$

Por tanto como existe la derivada  $f'(c)$ , esta ha de ser igual a los límites laterales que verifican

$$\lim_{x \rightarrow c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \quad \lim_{x \rightarrow c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Por tanto  $f'(c) = 0$ .

*Q.E.D.*

El enunciado recíproco no es cierto. Es decir pueden existir puntos críticos que no son puntos de extremo local (puntos de inflexión).

**Ejemplo 5.3.** La función  $f(x) = x^3$  sobre el dominio  $D = (-1, 1)$  tiene un punto crítico en  $c = 0$  que sin embargo no es ni máximo ni mínimo local.

**Recordar**

$c$  punto interior de extremo local para  $f \implies c$  punto crítico de  $f$

$c$  punto crítico de  $f \not\implies c$  punto de extremo local para  $f$

**Aplicación : Cálculo de máximos y mínimos absolutos**

Un problema típico cuando se maneja una función es calcular sus valores máximo y mínimo absolutos. En primer lugar hay que preguntarse si estos existen. La respuesta, como hemos visto, es afirmativa siempre que manejemos una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Supongamos además que  $f$  es derivable en todo el interior  $(a, b)$  y posee un número finito de puntos críticos  $c_1, \dots, c_n$ . Es fácil convencerse que los candidatos para puntos de máximo o mínimo absoluto son solo los puntos

$$a, c_1, \dots, c_n, b,$$

dado que si un punto de máximo o mínimo absoluto está en el interior entonces ha de ser punto crítico. Por tanto lo que debemos hacer es calcular

$$f(a), f(c_1), \dots, f(c_n), f(b),$$

y ver cuales dan el mayor y el menor valor.

**Ejemplo 5.4.** Sea la función

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1.$$

Para determinar sus puntos de máximo y mínimo absoluto en  $[0, 2]$  determinamos sus puntos críticos en ese dominio

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \implies x = 1.$$

Determinamos ahora los valores

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 3.$$

Luego hay dos puntos  $x = 0, 1$  donde toma su valor de mínimo absoluto 1, y un punto  $x = 2$  donde toma su valor de máximo absoluto 3.

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida sobre un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$  tal que

- i)  $f$  es continua en todo el intervalo.
- ii)  $f$  es derivable en el interior del intervalo.

**Teorema 5.5. Teorema de Rolle**

Si  $f(a) = f(b)$  entonces existe un punto crítico  $a < c < b$ .

**Teorema 5.6. Teorema del valor medio**

Existe un punto interior  $a < c < b$  tal que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

*Demostración.* Empecemos por el teorema de Rolle.

Como  $[a, b]$  es cerrado y acotado, al ser  $f$  continua en  $[a, b]$  existirán dos puntos  $r, r'$  en los que  $f$  alcanzará su máximo y su mínimo absolutos. Si el conjunto formado por ambos puntos  $\{r, r'\}$  coincide con el formado por  $a$  y  $b$ , entonces como  $f(a) = f(b)$  sucederá que el máximo y el mínimo absoluto de  $f$  son iguales. Luego en ese caso  $f$  es una constante y por tanto  $f'(c) = 0$  para todo  $c \in (a, b)$ . La conclusión se sigue entonces trivialmente.

La situación que queda por analizar es aquella en que alguno de los dos,  $r$  ó  $r'$  esté en el interior  $(a, b)$  de  $[a, b]$ , pero en tal caso ese punto será un máximo o un mínimo local, luego al existir la derivada en ese punto, ha de ser cero. Ese sería entonces el punto  $c$  buscado. De esta forma el teorema de Rolle queda probado.

Veamos ahora el teorema del valor medio.

Debemos probar la existencia de un punto  $c$  en  $(a, b)$  tal que

$$[f(b) - f(a)] - f'(c)(b - a) = 0.$$

Pero el primer miembro de esta ecuación es la derivada en un punto  $c$  de la función

$$g(x) := [f(b) - f(a)]x - f(x)(b - a).$$

Obviamente  $g$  cumple las hipótesis del teorema de Rolle:

- i)  $g$  es continua en  $[a, b]$ .
- ii)  $g$  es derivable en  $(a, b)$ .
- iii) Además se cumple que

$$g(a) = g(b)$$

ya que:

$$g(a) = [f(b) - f(a)]a - f(a)(b - a) = a f(b) - b f(a) = g(b).$$

Luego por el teorema de Rolle existirá un punto  $c$  entre  $a$  y  $b$  verificando:

$$g'(c) = 0,$$

y por tanto el teorema queda probado ya que

$$g'(c) = [f(b) - f(a)] - f'(c)(b - a).$$

*Q.E.D.*

Adviértase que la identidad del teorema del valor medio es simétrica respecto de  $a$  y  $b$ , por lo que para aplicarla no es preciso suponer que  $a < b$ .

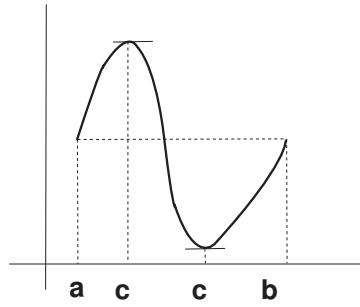


Figura 5.3: Interpretación geométrica del teorema de Rolle

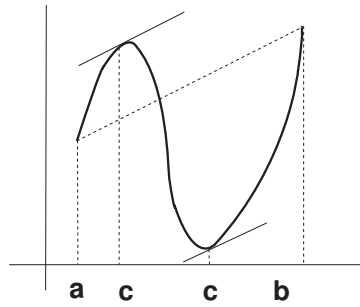


Figura 5.4: Interpretación geométrica del teorema del valor medio

## 5.2 Crecimiento y decrecimiento

El siguiente teorema proporciona un método simple para averiguar la naturaleza creciente o decreciente de una función en un intervalo. Para ello asumiremos de nuevo que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función definida sobre un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$  tal que

- i)  $f$  es continua en todo el intervalo.
- ii)  $f$  es derivable en el interior del intervalo.

### Teorema 5.7. Crecimiento y decrecimiento

$f'(x) > 0, \quad \forall x \in (a, b) \implies f$  estrictamente creciente en  $[a, b]$ .  
 $f'(x) < 0, \quad \forall x \in (a, b) \implies f$  estrictamente decreciente en  $[a, b]$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f'(x) > 0, \quad \forall x \in (a, b)$ . Sean dos puntos distintos  $x_1 < x_2$  en el intervalo  $[a, b]$ . Aplicando el teorema del valor medio al intervalo  $[x_1, x_2]$  tenemos que  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ , siendo  $c$  algún punto intermedio  $x_1 < c < x_2$ . Como  $c$  es interior al intervalo  $[a, b]$  entonces por hipótesis  $f'(c) > 0$ . Por tanto  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$ , lo que nos asegura que  $f(x_2) > f(x_1)$ . Es decir  $f$  es estrictamente creciente.

El restante caso se demuestra de forma similar.

*Q.E.D.*

**Ejemplo 5.8.** Consideremos la función  $f(x) = x \log x + 3x$ . La función está definida y es derivable en el intervalo:  $(0, +\infty)$ . La derivada es la función  $f'(x) = 4 + \log x$ . El

único punto en que cambia de signo la derivada es el que verifica:  $4 + \log x = 0$ . Es decir  $x = e^{-4}$ . Entonces se verifica:

$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in (0, e^{-4}),$$

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in (e^{-4}, +\infty),$$

luego  $f$  es decreciente en  $(0, e^{-4})$  y creciente en  $(e^{-4}, +\infty)$ .

### Aplicación : Aproximación poligonal a una gráfica

Supongamos que nuestra función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $[a, b]$  y dos veces derivable  $(\exists f', f'')$  en  $(a, b)$ . Sean  $c_1 < c_2 < \dots < c_r$  sus puntos críticos en  $(a, b)$ . Al existir  $f''$ , la primera derivada  $f'$  será continua y como no se anula entre cada dos puntos críticos consecutivos, su signo será constante en cada intervalo  $(c_i, c_{i+1})$ . Por tanto

**Entre dos puntos críticos consecutivos de una función dos veces derivable la función es monótona estricta**

Es muy útil utilizar este resultado para elaborar una aproximación poligonal de la gráfica de  $f$ . Para ello se procede de la forma siguiente:

- i) Se determinan los puntos críticos  $c_1 < c_2 < \dots < c_r$  de  $f$  en  $(a, b)$ .
- ii) Se calculan los valores  $f(c_i)$ ,  $i = 1, \dots, r$ .
- iii) Se representan los puntos  $(c_i, f(c_i))$ ,  $i = 1, \dots, r$  así como  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$ . Finalmente se unen todos esos puntos mediante una poligonal.

Esta técnica puede aprovecharse para problemas tales como

- Representación de funciones.
- Determinación del número de soluciones de una ecuación  $f(x) = 0$ .
- Demostración de desigualdades  $f(x) \leq g(x)$ .

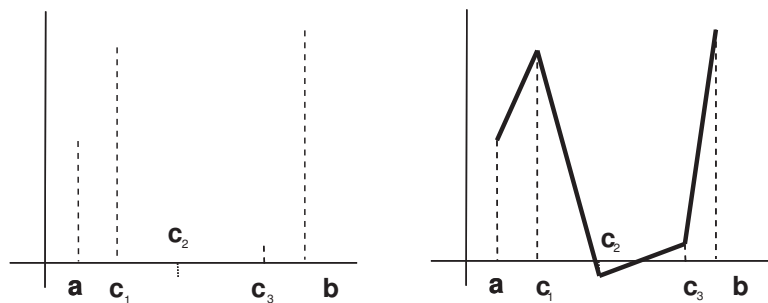


Figura 5.5: Aproximación poligonal a una gráfica



**Ejemplo 5.9.** Para determinar el número de soluciones de la ecuación

$$f(x) := x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x = 0,$$

en el dominio  $[0, +\infty)$  trazamos la aproximación poligonal a la gráfica de  $f$ . Para ello calculamos la derivada

$$f'(x) = 2x - x \cos x = x(2 - \cos x).$$

Como  $2 - \cos x > 0$  para todo  $x$ , es claro que el único punto crítico de  $f$  en  $(0, +\infty)$  es  $c = 0$ . Entonces dado que

$$f(0) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

la aproximación poligonal a la gráfica de  $f$  es una semirrecta que parte del punto  $(0, -1)$  y parte hacia  $(+\infty, +\infty)$ . Obviamente solo hay una solución de la ecuación anterior.

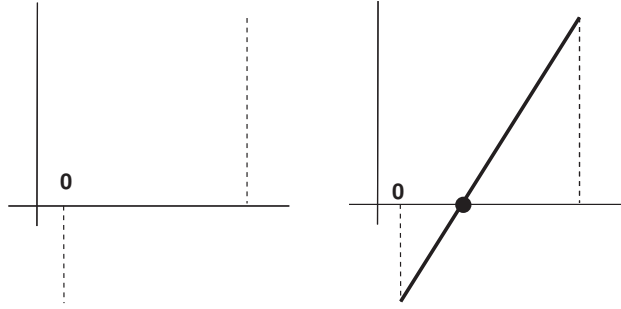


Figura 5.6:

**Ejemplo 5.10.** Para probar la desigualdad

$$\log(1+x) \leq x, \quad \forall x \in [1, 2],$$

trazamos la aproximación poligonal a la gráfica de

$$f(x) := x - \log(1+x),$$

en  $[1, 2]$ . Como

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \neq 0, \quad x \in (1, 2),$$

no hay puntos críticos en  $(1, 2)$ . Luego basta determinar

$$f(1) = 1 - \log 2 \approx 0,4, \quad f(2) = 2 - \log 3 \approx 0,9.$$

La aproximación poligonal a la gráfica es un segmento que une los puntos  $(1, 0,4)$  y  $(2, 0,9)$ , luego  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [1, 2]$ , lo cual prueba la desigualdad.

### 5.3 Concavidad y convexidad

Una de las características básicas de la gráfica de una función es su concavidad o convexidad. Vamos a ver ahora la forma de estudiar esta propiedad mediante el análisis de las derivadas.

En esta sección supondremos que nuestra función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $[a, b]$  y dos veces derivable ( $\exists f', f''$  en  $(a, b)$ ).

**Definición 5.11.** Se dice que  $f$  es **cóncava** en  $[a, b]$  si para toda pareja de puntos  $x_1 < x_2$  en  $[a, b]$  la gráfica de  $f$  en el intervalo  $[x_1, x_2]$  está por debajo de la cuerda que une los puntos  $(x_1, f(x_1))$  y  $(x_2, f(x_2))$ . Se dice que  $f$  es **convexa** en  $[a, b]$  si para todo par de puntos  $x_1 < x_2$  en  $I$ , la gráfica de  $f$  en  $[x_1, x_2]$  está por encima de la cuerda que une  $(x_1, f(x_1))$  y  $(x_2, f(x_2))$ .

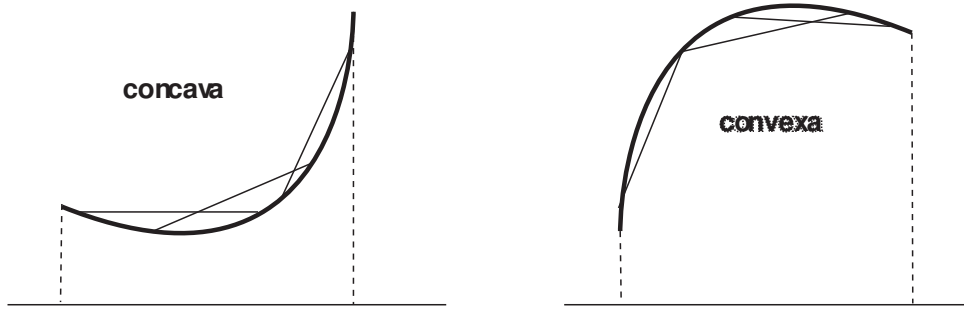


Figura 5.7: Concavidad y convexidad

Usando la interpretación de la derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente en ese punto, es intuitivamente obvio que se verifica

$$\begin{aligned} f \text{ cóncava} &\iff f' \text{ estrictamente creciente.} \\ f \text{ convexa} &\iff f' \text{ estrictamente decreciente.} \end{aligned}$$

Aplicando el teorema sobre crecimiento y decrecimiento podemos entonces enunciar el siguiente teorema que proporciona un criterio útil para caracterizar la concavidad y convexidad.

**Teorema 5.12. Concavidad y convexidad**

$$\begin{aligned} f''(x) > 0, \quad \forall x \in (a, b) &\implies f \text{ cóncava.} \\ f''(x) \leq 0, \quad \forall x \in (a, b) &\implies f \text{ convexa.} \end{aligned}$$

#### Puntos de inflexión

**Definición 5.13.** Se dice que un punto  $c \in (a, b)$  es un **punto de inflexión** de  $f$  si la gráfica de  $f$  cambia de cóncava a convexa, o de convexa a cóncava, al atravesar el punto  $c$ .

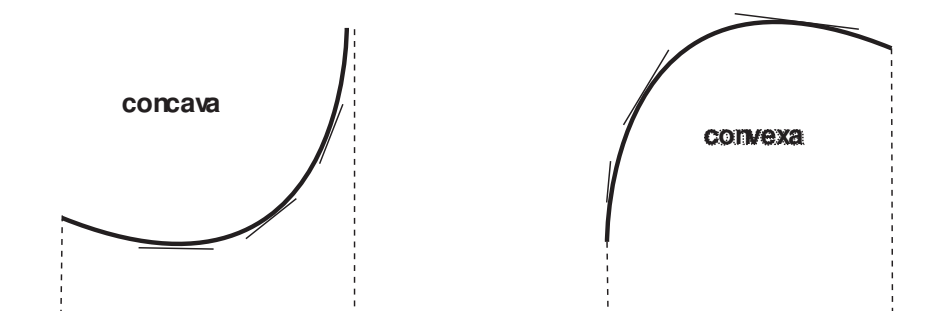


Figura 5.8: Otro criterio para la concavidad y la convexidad

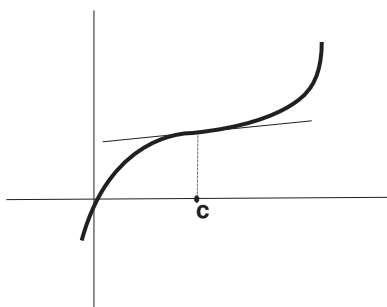


Figura 5.9: Punto de inflexión

Usando el teorema anterior para la concavidad y convexidad es claro que para funciones derivables dos veces con segunda derivada  $f''$  continua, una condición necesaria para los puntos de inflexión es que  $f''(c) = 0$ .

**Ejemplo 5.14.** La función  $f(x) = x^3$  tiene como segunda derivada  $f''(x) = 6x$ , luego  $f''(x) > 0$ ,  $\forall x > 0$ . Entonces  $f$  es cóncava en  $(0, +\infty)$ . Por otra parte  $f''(x) < 0$ ,  $\forall x < 0$ . Así,  $f$  es convexa en  $(-\infty, 0)$ . El punto  $x = 0$  es de inflexión.

**Ejemplo 5.15.** La función  $f(x) = \cos x$  tiene una segunda derivada  $f''(x) = -\cos x$ , luego  $f''(x) > 0$ ,  $\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , y será cóncava en tales intervalos. Por otra parte:

$$f''(x) < 0, \quad \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi < x < \frac{\pi}{2} + (2n+2)\pi, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

luego es convexa en estos otros intervalos. Los puntos

$$x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

son de inflexión.

### Aplicación : Cálculo de máximos y mínimos locales

Hemos visto antes que no todos los puntos críticos son extremos locales, vamos a demostrar ahora que sí lo son cuando la segunda derivada no es cero sobre ellos.

#### Teorema 5.16. Extremos locales

$$\begin{aligned} f'(c) = 0, \quad f''(c) > 0 &\implies c \text{ punto de máximo local} \\ f'(c) = 0, \quad f''(c) < 0 &\implies c \text{ punto de mínimo local} \end{aligned}$$

*Demostración.* Supongamos el primer caso  $f'(c) = 0$ ,  $f''(c) > 0$ . Entonces

$$f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{x - c} = l > 0.$$

Por el criterio  $\epsilon - \delta$  del límite de funciones, tomando  $\epsilon = l/2$  tenemos que existe un  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta$  entonces

$$\frac{f'(x)}{x - c} \in \left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}\right).$$

Por tanto

$$\frac{f'(x)}{x - c} > 0, \quad \forall x \in (c - \delta, c + \delta), \quad x \neq c.$$

Por tanto  $f'(x) > 0$ ,  $c - \delta < x < c$  ( $f$  creciente en  $(c - \delta, c)$ ) y  $f'(x) < 0$ ,  $c < x < c + \delta$  ( $f$  decreciente en  $(c, c + \delta)$ ). Ello significa que  $c$  es un punto de máximo local.

*Q.E.D.*

## 5.4 Límites indeterminados. Regla de l'Hôpital

Veamos en primer lugar una generalización del teorema del valor medio

### **Teorema 5.17. Teorema del valor medio de Cauchy**

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones continuas en  $[a, b]$  y derivables en su interior  $(a, b)$ . Entonces existe un punto intermedio  $c \in (a, b)$  tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

*Demostración.* La demostración es una aplicación simple del teorema de Rolle a la función

$$F(x) := (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Obviamente  $F$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$  con derivada

$$F'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x).$$

Además

$$F(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = F(b).$$

Aplicando el teorema de Rolle existirá un punto  $c \in (a, b)$  tal que

$$F'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0.$$

Lo cual prueba el enunciado.

*Q.E.D.*

### **Límites indeterminados $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$**

Supongamos ahora dos funciones definidas sobre un dominio común  $D$

$$f : D \mapsto \mathbb{R}, \quad g : D \mapsto \mathbb{R},$$

cuyo cociente tiene un límite indeterminado de uno de los tipos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{ó} \quad \frac{\infty}{\infty},$$

y sin embargo sucede que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Vamos a demostrar que bajo ciertas condiciones se verifica

**Regla de L'Hôpital**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Consideraremos las tres situaciones siguientes

**Caso I**

- i)  $x_0$  es un punto de acumulación de  $D$ .
- ii) La función  $g$  y su derivada no se anulan en algún intervalo  $I$  tal que  $a \in P_{ac}(I)$ .

**Caso II**

- i)  $x_0 = +\infty$  y  $D$  contiene una semirrecta  $(K, +\infty)$ .
- ii) La función  $g$  y su derivada no se anulan en algún intervalo  $(K', +\infty)$

**Caso III**

- i)  $x_0 = -\infty$  y  $D$  contiene una semirrecta  $(-\infty, K)$ .
- ii) La función  $g$  y su derivada no se anulan en algún intervalo  $(-\infty, K')$

*Demostración.* Demostremos un par de situaciones

**1.**  $x_0$  es un punto de acumulación de  $D$  y tenemos una indeterminación  $0/0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

En ese caso podemos redefinir  $f$  y  $g$  en  $x_0$  como iguales a cero y de esa forma  $f$  y  $g$  serán continuas en algún intervalo  $[x_0, K]$  ó  $[K, x_0]$  y derivables en su interior. Para todo  $x$  en ese intervalo podemos aplicar el teorema del valor medio de Cauchy al intervalo con extremos  $x_0$  y  $x$ . Así existirá algún punto  $c$  entre  $x_0$  y  $x$  tal que

$$(f(x) - f(x_0))g'(c) = (g(x) - g(x_0))f'(c) \implies f(x)g'(c) = g(x)f'(c),$$

y como tanto  $f$  como  $g$  no se anulan cerca de  $x_0$ , podemos despejar en la forma

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \tag{5.1}$$

Como  $c$  está entre  $a$  y  $x$ , si  $x \rightarrow a$  también  $c \rightarrow a$ . Así que por la hipótesis sobre el límite del cociente de derivadas, tomando el límite en (5.1) se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = l.$$

**2.**  $x_0 = +\infty$ , las funciones  $f$  y  $g$  están definidas en algún intervalo  $[K, +\infty)$  ( $K > 0$ ) y tenemos una indeterminación  $0/0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

Introducimos nuevas funciones

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \quad G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right),$$

ahora definidas sobre el intervalo  $(0, \frac{1}{K})$ . Podemos aplicar al límite cuando  $t \rightarrow 0$  del cociente de las funciones  $F$  y  $G$  lo que acabamos de demostrar en el punto 1. Por tanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l. \end{aligned}$$

Como queríamos probar.

*Q.E.D.*

### **Cálculo de otros límites indeterminados**

Recordemos la lista de límites indeterminados:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Podemos aplicar la regla de l'Hôpital a los otros límites indeterminados reduciendo su cálculo a los casos  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$ , procediendo en la forma siguiente:

#### **Reducción de $\infty - \infty$**

Si el límite de  $f(x) - g(x)$  es del tipo  $\infty - \infty$  podemos escribir

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}},$$

y lo convertimos en una expresión del tipo  $\frac{0}{0}$ .

**Reducción de  $0 \cdot \infty$** 

Si el límite de  $f(x)g(x)$  es del tipo  $0 \cdot \infty$  podemos partir de

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

y obtenemos una expresión del tipo  $\frac{0}{0}$ . También podemos escribir

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

y obtenemos una expresión del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$

**Reducción de  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$** 

Cuando el límite de  $f(x)^{g(x)}$  es de uno de los tipos  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$  podemos trabajar con

$$f(x)^{g(x)} = \exp\left(g(x) \log f(x)\right)$$

y determinar el límite de  $g(x) \log f(x)$  que será una expresión del tipo  $\infty \cdot 0$ ,  $0 \cdot \infty$  y  $0 \cdot \infty$ , respectivamente.

**Ejemplo 5.18.** Para determinar

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \log(\tan x)),$$

vemos en primer lugar que es una expresión del tipo

$$0 \cdot \log(\tan 0) = 0 \log 0 = 0 \cdot (-\infty).$$

De forma que lo reducimos a un  $\frac{\infty}{\infty}$  y aplicamos la regla de l'Hôpital dos veces. Así se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \log(\tan x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\tan x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\tan' x}{\tan x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{\sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.19.** Calculemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\sin x}.$$

Es una indeterminación del tipo  $0^0$ . De forma que lo escribimos como

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\sin x} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \left((\sin x) \ln(\sin x)\right)\right),$$

en que aparece otro límite indeterminado del tipo  $0 \cdot \infty$  que reducimos a un  $\frac{\infty}{\infty}$  para aplicar la regla de l'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left((\sin x) \ln(\sin x)\right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-\sin x \cos x) = 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1.$$

## 5.5 Representación gráfica de funciones

Para obtener una representación gráfica de una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  hay que considerar en primer lugar la posible existencia de simetrías del tipo

función par  $f(-x) = f(x)$  ó impar  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in D$ ,  
función periodica  $\exists T > 0$  tal que  $f(x + T) = f(x)$  para todo  $x \in D$ ,

que nos pueden llevar a una reducción drástica del dominio sobre el que debemos representar la función.

A continuación debemos analizar sobre el dominio resultante una serie de cuestiones sobre su comportamiento alrededor de ciertos puntos aislados (análisis local) y su comportamiento sobre intervalos de longitud finita o infinita en los que sea derivable (análisis global).

### Análisis local

El análisis local se efectúa sobre puntos de los tipos siguientes:

- Singularidades y asíntotas verticales

Una singularidad es un punto  $c$  de acumulación del dominio  $D$  en el cual  $f$  no está definida. Si existe  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ , la singularidad es evitable. Si sucede que uno al menos de los límites laterales  $\lim_{x \rightarrow c \pm} f(x)$  es  $\infty$ , entonces la recta  $x = c$  es una asíntota vertical de la gráfica de  $f$ . También deben estudiarse posibles singularidades de  $f'(x)$ .

- Puntos  $x = \pm\infty$  y asíntotas oblicuas

En el caso en que el dominio  $D$  no esté acotado superiormente (o inferiormente) hay que estudiar el comportamiento de  $f$  cuando  $x$  tiende a  $+\infty$  (ó a  $-\infty$ ). Por ejemplo, es conveniente analizar si en tales límites  $f$  se comporta como algún polinomio. El caso más simple es cuando

$$f(x) - (mx + n) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty, \quad m \neq 0$$

donde. En este caso la recta  $y = mx + n$  es una asíntota oblicua de  $f$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ . Esto sucede si

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= m \neq 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) &= n. \end{aligned}$$

- Puntos críticos (donde se anula primera derivada  $f'(c) = 0$ .) En estos puntos la función posee máximos, mínimos locales o puntos de inflexión. Debemos determinar los valores  $f(c)$  de la función en los puntos críticos



**Análisis global**

Una vez estudiados los puntos objeto del análisis local, la situación habitual es encontrarnos con una partición del dominio

$$D = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n,$$

en intervalos en los que la función es derivable hasta un cierto orden mayor o igual a 2. Podemos obtener entonces una aproximación poligonal a la gráfica de  $f$  en cada uno de los intervalos  $I_i$  dado que conocemos el comportamiento de  $f$  cuando nos acercamos a los extremos de  $I_i$ , así como los valores de  $f$  en los puntos críticos en el interior de  $I_i$ . Normalmente las aproximaciones poligonales nos proporcionarán la información sobre

- Regiones de crecimiento y decrecimiento
- Regiones de concavidad y convexidad

En todo caso siempre podemos de manera alternativa o complementaria usar los criterios de los Teoremas 5.7 y 5.12.

**Ejemplo 5.20.** La función

$$f(x) = (x+4)^{\frac{2}{3}} - (x-4)^{\frac{2}{3}},$$

está definida y es continua en todo  $\mathbb{R}$ . Su derivada es

$$f'(x) = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{(x+4)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{(x-4)^{\frac{1}{3}}} \right),$$

Luego  $f'(x)$  tiene singularidades en

$$x = \pm 4.$$

No hay extremos relativos, ya que  $f'(x) = 0$  no posee soluciones. Es también fácil ver que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Por otra parte

$$f'(x) > 0,$$

en los puntos  $x$  para los que:

$$\frac{1}{x+4} > \frac{1}{x-4},$$

lo cual equivale a (ver ejemplo 1.14):

$$|x| < 4.$$

Es decir  $f$  es creciente si  $|x| < 4$  y decreciente si  $|x| > 4$ . En cuanto a la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{2}{9} \left( \frac{1}{(x-4)^{\frac{4}{3}}} - \frac{1}{(x+4)^{\frac{4}{3}}} \right).$$

Claramente  $f''(x) > 0$  (cóncava) si  $x > 0, x \neq 4$ , y  $f''(x) < 0$  (convexa) si  $x < 0, x \neq -4$ .

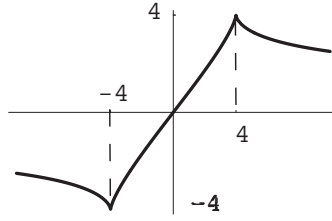


Figura 5.10:

**Ejemplo 5.21.** La función siguiente

$$f_{Planck}(x) := \frac{x^3}{e^x - 1}, \quad x \in (0, +\infty),$$

describe una relación fundamental en la Física: **la fórmula de Plank para la densidad de energía radiante del cuerpo negro**. Es por lo tanto imprescindible saber estudiar esta función a través de los métodos que acabamos de ver. El dominio de interés es el intervalo  $(0, +\infty)$  sobre el que la función es un cociente de funciones derivables a todo orden, siendo el denominador  $e^x - 1$  que no se anula en el intervalo  $(0, +\infty)$ . Como consecuencia la función admite todas las derivadas en dicho intervalo. Veamos su comportamiento en los extremos 0 y  $+\infty$ .

- Cuando  $x \rightarrow 0$  la función presenta una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ , si aplicamos la regla de l'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_{Planck}(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{e^x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Lo cual nos dice que  $x = 0$  es una discontinuidad evitable de  $f_{Planck}$ .

- Cuando  $x \rightarrow +\infty$  la función presenta una indeterminación del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ , si aplicamos la regla de l'Hôpital tres veces se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_{Planck}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{e^x} = \frac{6}{\infty} = 0.$$

Para determinar la posible existencia de puntos críticos examinamos la ecuación

$$f'_{Planck}(x) = \frac{(3x^2 - x^3)e^x - 3x^2}{(e^x - 1)^2} = 0.$$

Es decir las soluciones de

$$(3x^2 - x^3)e^x - 3x^2 = 0, \quad 0 < x < \infty.$$

Para determinar cuantas soluciones hay, construimos la aproximación poligonal de la gráfica de la función

$$g(x) := (3x^2 - x^3)e^x - 3x^2.$$

sobre el intervalo  $(0, +\infty)$ . Así vemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty.$$

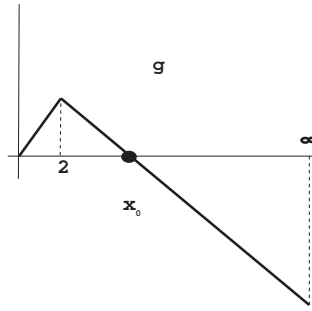


Figura 5.11:

En cuanto a sus puntos críticos, solo hay uno  $x = 2$  dado que

$$g'(x) = (x - 2)e^x.$$

Como  $g(2) = e^2 - 3 > 0$  es claro que la aproximación poligonal a  $g$  es la de la figura que obviamente muestra que existe un solo punto  $x_0$  en el que  $g(x_0) = 0$ .

Volviendo ahora a  $f_{Planck}$ , el punto  $x_0$  anterior es el único punto crítico de  $f_{Planck}$  y obviamente, viendo el comportamiento cuando  $x \rightarrow 0$  y  $x \rightarrow \infty$  y el hecho de ser  $f_{Planck}(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$ , ha de ser un punto de máximo. Puede asimismo comprobarse que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'_{Planck}(x) = 0,$$

lo que nos indica que la tangente tiende a ser el eje OX en  $x = 0$ . Todo ello nos conduce a una gráfica como la de la figura adjunta.

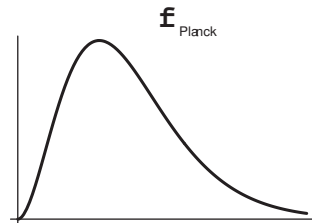


Figura 5.12:

## Capítulo 6

# APLICACIONES DE LA DERIVADA II

Se introducen las nociones fundamentales para comparar y aproximar funciones cerca de un punto dado. En particular se analizan los desarrollos de Taylor que permiten aproximar localmente mediante polinomios funciones derivables. Se proporcionan las técnicas básicas para el cálculo y manejo operacional de desarrollos de Taylor.

### 6.1 Comparación de funciones cerca de un punto

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones definidas y distintas de cero en un dominio  $D$ . Sea  $x_0$  un punto de acumulación de  $D$  (en el caso en que  $D$  sea no acotado admitiremos que  $x_0$  pueda ser  $\pm\infty$ ).

#### La relación $f \ll g$

**Definición 6.1.** Se dice que  $f$  es despreciable frente a  $g$  cuando  $x \rightarrow x_0$  y se denota

$$f \ll g, \quad (x \rightarrow x_0),$$

cuando se verifica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

#### Propiedades

Cuando  $x \rightarrow x_0$

- i)  $f \ll g$  y  $g \ll h \implies f \ll h$ .
- ii)  $f \ll g \implies f h \ll g h$ ,  $\forall$  función  $h$
- iii)  $f_1 \ll g$ ,  $f_2 \ll g \implies f_1 + f_2 \ll g$ .

*Demostración.* Para la primera propiedad basta ver que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{h(x)} \right) = 0.$$

En cuanto a la segunda

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)h(x)}{g(x)h(x)} = 0.$$

Por último la tercera

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g(x)} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{g(x)} = 0 + 0 = 0.$$

Lo cual prueba las propiedades enunciadas.

*Q.E.D.*

### Ejemplos

**Cuando  $x \rightarrow \infty$  se verifica**

$$x^a \ll x^b, \quad \forall a < b;$$

$$\ln x \ll x^a \ll e^{bx}, \quad \forall a > 0, b > 0.$$

*Demostración.* Veamos por ejemplo que

$$\ln x \ll x^a, \quad \forall a > 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Para ello vemos que aplicando la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{a x^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a x^a} = 0.$$

*Q.E.D.*

De igual forma dado  $x_0 \in \mathbb{R}$  se demuestra

**Cuando  $x \rightarrow x_0$  se verifica**

$$(x - x_0)^b \ll (x - x_0)^a, \quad \forall a < b;$$

$$\ln(x - x_0) \ll \frac{1}{(x - x_0)^a} \ll \exp\left(\frac{b}{|x - x_0|}\right), \quad \forall a > 0, b > 0.$$

### La relación $f \sim g$

**Definición 6.2.** Se dice que  $f$  es del mismo orden que  $g$  cuando  $x \rightarrow x_0$  y se denota

$$f \sim g, \quad (x \rightarrow x_0),$$

cuando se verifica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Para enunciar las propiedades de esta nueva relación es útil emplear la siguiente notación alternativa

**Notación de resto**

$$r = o(g), \quad (x \rightarrow x_0), \iff r << g, \quad (x \rightarrow x_0).$$

De esta forma cuando escribamos

$$f_1 = f_2 + o(g), \quad (x \rightarrow x_0),$$

significa que la diferencia entre ambas funciones verifica

$$r := f_1 - f_2, \quad r << g, \quad (x \rightarrow x_0).$$

**Ejemplo 6.3.** Podemos escribir

$$\operatorname{sen} x = x + o(x), \quad (x \rightarrow 0),$$

dado que  $r(x) := \operatorname{sen} x - x = o(x)$  pues satisface

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0.$$

**Ejercicio 6.4.** Probar que

$$\ln(1+x) = x + o(x), \quad (x \rightarrow 0).$$

**Propiedades**

Cuando  $x \rightarrow x_0$

- i)  $f \sim g \iff f = g + o(g).$
- ii)  $f \sim g \iff g \sim f.$
- iii)  $f \sim g, \quad g \sim h \implies f \sim h.$
- iv)  $f \sim g \implies fh \sim gh, \quad \frac{h}{f} \sim \frac{h}{g}.$
- v)  $f_1 \sim g_1, \quad f_2 \sim g_2 \iff f_1 f_2 \sim g_1 g_2, \quad \frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$
- vi)  $f \sim g, \quad g << h \implies f << h.$

*Demostración.* Las demostraciones son muy simples

i) Denotando  $r := f - g$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r}{g} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f - g}{g} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} - 1.$$

Luego se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r}{g} = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 1.$$

Es decir

$$r \ll g \iff f \sim g.$$

ii) Obviamente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g}{f}}.$$

Por tanto es claro que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 1 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g}{f} = 1.$$

Es decir

$$f \sim g \iff g \sim f.$$

iii) La hipótesis implica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f h}{g h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 1.$$

Por otra parte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h/f}{h/g} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g}{f} = 1.$$

iv) Basta proceder en la forma siguiente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 f_2}{g_1 g_2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1}{g_1} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2}{g_2} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1/f_2}{g_1/g_2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1}{g_1} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_2}{f_2} = 1.$$

v) A partir de las hipótesis deducimos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f g}{g h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g}{h} = 1 \cdot 0 = 0.$$

*Q.E.D.*

## 6.2 Desarrollos de Taylor

### El teorema del valor medio generalizado

**Teorema 6.5.** Sean  $f$  y  $g$  funciones definidas sobre un intervalo abierto  $I$  tal que sobre un subintervalo  $[a, b] \subset I$  satisfacen

i) Todas las derivadas  $f^{(k)}$  y  $g^{(k)}$  de ordenes  $k = 1, \dots, n-1$  existen y son continuas en  $[a, b]$ .

ii) Las derivadas  $f^{(n)}$  y  $g^{(n)}$  de orden  $n$  existen en  $(a, b)$ .

Entonces existe un punto intermedio  $a < c < b$  tal que se cumple la siguiente identidad

$$\left( f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right) g^{(n)}(c) = \left( g(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right) f^{(n)}(c). \quad (6.1)$$

*Demostración.* Consideremos las funciones

$$F(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k, \quad G(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k.$$

Observando su dependencia en la variable  $x$  y teniendo en cuenta las hipótesis del teorema se deduce que ambas son continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $(a, b)$ . Por tanto podemos aplicar el teorema del valor medio de Cauchy, así que existirá un punto intermedio  $a < c < b$  tal que

$$\left( F(b) - F(a) \right) G'(c) = \left( G(b) - G(a) \right) F'(c). \quad (6.2)$$

Ahora bien

$$F(b) = f(b), \quad F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k,$$

$$G(b) = g(b), \quad G(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k.$$

Además teniendo en cuenta que

$$\left( \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k \right)' = \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1},$$

es fácil comprobar que

$$F'(x) = \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} (b-x)^{n-1}.$$

De igual manera se prueba que

$$G'(x) = \frac{g^{(n)}(x)}{(n-1)!} (b-x)^{n-1}.$$

Como consecuencia

$$F'(c) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!} (b-c)^{n-1}, \quad G'(c) = \frac{g^{(n)}(c)}{(n-1)!} (b-c)^{n-1}.$$

Usando estos resultados en (6.2) se obtiene inmediatamente la identidad (6.1) *Q.E.D.*

### El teorema de Taylor

El siguiente teorema es uno de los resultados fundamentales del Análisis:



**Teorema 6.6.** Sea  $f$  una función definida sobre un intervalo abierto  $I$  tal que sobre un subintervalo  $[a, b] \subset I$  satisface

- i) Todas las derivadas  $f^{(k)}$  de ordenes  $k = 1, \dots, n-1$  existen y son continuas en  $[a, b]$ .
- ii) La derivada  $f^{(n)}$  de orden  $n$  existe en  $(a, b)$ .

Entonces existe un punto intermedio  $a < c < b$  tal que se cumple la siguiente identidad

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (b-a)^n. \quad (6.3)$$

*Demostración.* Basta aplicar el teorema del valor medio generalizado a  $f$  y a la función  $g(x) := (x-a)^n$ . Así teniendo en cuenta que

$$g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n-1)}(a) = 0, \quad g^{(n)}(a) = n!, \quad g(b) = (b-a)^n,$$

la identidad (6.1) nos dice que

$$\left( f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right) n! = (b-a)^n f^{(n)}(c).$$

Lo cual demuestra el teorema.

*Q.E.D.*

### Polinomios de Taylor. Aproximación polinomial.

Como consecuencia del teorema de Taylor podemos demostrar el siguiente resultado que introduce los **desarrollos de Taylor**

**Teorema 6.7.** Sea  $f$  una función definida sobre un intervalo abierto  $I$  tal que todas las derivadas  $f^{(k)}$  de ordenes  $k = 1, \dots, n+1$  existen y son continuas en un subintervalo  $I(x_0, r) \subset I$  centrado en un punto  $x_0 \in I$ . Entonces  $\forall x \in I(x_0, r)$  existe un punto  $c$  intermedio entre  $x_0$  y  $x$  tal que

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x), \quad (6.4)$$

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k, \quad R_{n+1}(x) := \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

Además se verifica que

$$R_{n+1}(x) = o\left((x-x_0)^n\right), \quad (x \rightarrow x_0). \quad (6.5)$$

*Demostración.* El resultado es una consecuencia inmediata del teorema de Taylor con la excepción de la afirmación sobre  $R_{n+1}(x)$ . Debe observarse que el enunciado introduce una hipótesis más con respecto al teorema de Taylor, que es suponer que la última

derivada  $f^{(n+1)}$  no solo existe en el intervalo  $I(x_0, r)$  sino que también es continua en él. Como consecuencia  $f^{(n+1)}$  es continua en el intervalo cerrado y acotado  $I'$  de extremos  $x_0$  y  $x$ . Por tanto será una función acotada

$$\exists M > 0 \quad \text{tal que} \quad |f^{(n+1)}(x)| < M, \quad \forall x \in I'.$$

De esta forma se obtiene

$$\left| \frac{R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^n} \right| = \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(c)| |x - x_0| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|,$$

que implica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Ello prueba (6.5).

*Q.E.D.*

### Propiedades

- i) El resultado que acabamos de probar puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right), \quad (x \rightarrow x_0), \\ T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned} \tag{6.6}$$

La función  $T_n(x)$  recibe el nombre de **polinomio de Taylor** de orden  $n$  de la función  $f$  alrededor del punto  $x_0$ . Cuando  $T_n(x)$  no es idénticamente cero representa una aproximación polinomial (**desarrollo de Taylor**) a la función  $f$

$$f(x) \approx T_n(x), \quad (x \rightarrow x_0),$$

pues cerca de  $x_0$  el error de la aproximación verifica

$$R_{n+1}(x) \ll (x - x_0)^n \ll (x - x_0)^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

y por tanto, debido a la propiedad iii) de la relación  $\ll$ , es despreciable frente a la aproximación  $T_n(x)$

$$R_{n+1}(x) \ll T_n(x), \quad (x \rightarrow x_0).$$

Adviértase que este desarrollo depende del punto  $x_0$ , variando el punto varía el desarrollo.

- ii) El error que cometemos al aproximar una función por su polinomio de Taylor  $T_n(x)$  viene dado por la función  $R_{n+1}(x)$ . Por supuesto es fundamental conocer una estimación de tal error y para ello disponemos de la fórmula obtenida en la demostración anterior

$$|R_{n+1}(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{6.7}$$

donde podemos tomar como  $M$  cualquier cota superior de  $|f^{(n+1)}|$  en el intervalo de extremos  $x_0$  y  $x$ .

**Ejemplo 6.8.** Para desarrollar  $\sin x$  alrededor de  $x_0 = 0$  calculamos

$$\sin 0 = 0, \quad (\sin x)'|_{x=0} = \cos x|_{x=0} = 1, \quad (\sin x)''|_{x=0} = -\sin x|_{x=0} = 0.$$

Por tanto  $T_2(x) = x$  y podemos escribir

$$\sin x = x + o(x^2).$$

Por otro lado si desarrollamos cerca de  $x_0 = \pi/2$  tenemos que

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad (\sin x)'|_{x=\pi/2} = \cos x|_{x=\pi/2} = 0, \quad (\sin x)''|_{x=\pi/2} = -\sin x|_{x=\pi/2} = -1.$$

Por tanto alrededor de  $x_0 = \pi/2$

$$T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2,$$

y se obtiene el desarrollo

$$\sin x = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right).$$

**Ejemplo 6.9.** Usemos el desarrollo

$$\sin x \approx T_2(x) = x, \quad (x \rightarrow 0)$$

para calcular  $\sin(0,1) \approx 0,1$ . Para estimar el error cometido utilizamos la fórmula (6.7), que en este caso se escribe

$$|R_3(x)| \leq M \frac{|x|^3}{3!},$$

donde  $M$  es cualquier cota superior de  $|(\sin x)'''| = |\sin x|$  en el intervalo de extremos 0 y  $x$ . Si tomamos  $M = 1$  obtenemos

$$|R_3(x)| \leq \frac{0,1^3}{3!} = \frac{0,001}{6} \approx 0,00017$$

Es elemental deducir los siguientes desarrollos de Taylor alrededor de  $x_0 = 0$

**Desarrollos de Taylor importantes cuando  $x \rightarrow 0$**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots - (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

*Demostración.* Por ejemplo la función  $f(x) = \ln(1+x)$  admite derivadas de todos los ordenes continuas cerca de  $x_0 = 0$

$$f(x) = \ln(1+x) \implies f(0) = \ln 1 = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \implies f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \implies f''(0) = -1,$$

$$f'''(x) = +2 \frac{1}{(1+x)^3} \implies f'''(0) = 2,$$

.....

.....

$$f^{(n)}(x) = -(-1)^n (n-1)! \frac{1}{(1+x)^n} \implies f^{(n)}(0) = -(-1)^n (n-1)!.$$

De donde se deduce el desarrollo de  $\ln(1+x)$  alrededor de  $x_0 = 0$

*Q.E.D.*

### 6.3 Cálculo de desarrollos de Taylor

El método general para determinar un desarrollo de Taylor de una función  $f(x)$  es determinar el polinomio de Taylor deseado  $T_n(x)$  calculando las correspondientes derivadas en  $x = x_0$ . Sin embargo este método no es el más eficaz cuando  $f(x)$  es el resultado de aplicar operaciones básicas (sumas, productos, cocientes, composiciones e inversiones) sobre funciones elementales con desarrollos conocidos. A continuación veremos algunas técnicas para obtener desarrollos de Taylor a partir de los de las funciones elementales sin tener que derivar funciones complicadas.

Consideraremos solo desarrollos alrededor de  $x_0 = 0$ . Para tratar casos alrededor de  $x_0 \neq 0$  basta hacer un cambio de variable (sustitución)  $x \rightarrow x - x_0$  en la función que se está estudiando.

#### Sumas y productos de desarrollos de Taylor

**Para determinar sumas y productos con errores  $o(x^n)$**

$$f(x) + g(x) = T(x) + o(x^n), \quad f(x) \cdot g(x) = S(x) + o(x^n),$$

**se suman y multiplican los desarrollos con errores  $o(x^n)$**

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n), \quad g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n),$$

**reteniendo solo los términos no despreciables frente a  $x^n$ .**

En lugar de desplegar una demostración abstracta, consideremos un ejemplo concreto para aprender la técnica

**Ejemplo 6.10.** Consideremos las funciones

$$f(x) = \sqrt{1+x}, \quad g(x) = \cos x.$$

Supongamos que queremos calcular los desarrollos de la suma y el producto con errores  $o(x^2)$

$$\sqrt{1+x} + \cos x = T(x) + o(x^2), \quad \sqrt{1+x} \cos x = S(x) + o(x^2).$$

Para ello utilizamos los desarrollos de  $f$  y  $g$  con errores  $o(x^2)$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2), \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

y los sumamos y multiplicamos manteniendo solo términos no despreciables frente a  $x^2$ . Para ello debemos tener en cuenta que

$$x^n \ll x^2, \quad n = 3, 4, \dots,$$

así que términos del tipo

$$x^n, \quad n \geq 3 \quad \text{ó} \quad x^m o(x^2), \quad m \geq 0,$$

$$o(x^2) o(x^2) \quad (\text{que representa una función } o(x^4) \text{ despreciable frente a } x^4)$$

deben ser eliminados en nuestro cálculo. Por otra parte, debido a la propiedad iii) de la relación  $\ll$ , debemos interpretar

$$o(x^2) + o(x^2) = o(x^2).$$

De esta forma

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} + \cos x &= \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) + \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= 2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2); \\ \sqrt{1+x} \cos x &= \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}x + o(x^2) \\ &\quad - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

División de desarrollos de Taylor

Para determinar con error  $o(x^n)$  el desarrollo de un cociente

$$\frac{f(x)}{g(x)} = T(x) + o(x^n),$$

- Se parte de los desarrollos con error  $o(x^n)$

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n), \quad g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n).$$

- Se calculan los coeficientes  $c_0, \dots, c_n$  del desarrollo

$$\frac{1}{g(x)} = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + o(x^n),$$

mediante la identificación de coeficientes en la identidad

$$1 = g(x) \frac{1}{g(x)} = (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n))(c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + o(x^n)).$$

- Por último se efectúa el producto

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)} = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n))(c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + o(x^n)).$$

De nuevo consideraremos un ejemplo concreto para aprender la técnica

**Ejemplo 6.11.** Calculemos el desarrollo con error  $o(x^6)$

$$\tan x = a_0 + a_1x + \cdots + a_6x^6 + o(x^6).$$

Partimos de

$$\sen x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^6).$$

Primero calculamos los coeficientes del desarrollo de  $1/\cos x$  imponiendo

$$1 = \cos x \frac{1}{\cos x} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^6)\right)(c_0 + c_1x + \cdots + c_6x^6 + o(x^6))$$

$$= c_0 + c_1x + \left(c_2 - \frac{c_0}{2}\right)x^2 + \left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right)x^3 + \left(c_4 - \frac{c_2}{2} + \frac{c_0}{24}\right)x^4 + \left(c_5 - \frac{c_3}{2} + \frac{c_1}{24}\right)x^5 + o(x^6).$$

No es necesario calcular  $c_6$  pues el desarrollo de  $\sen x$  comienza con el término  $x$ . Identificando coeficientes de potencias de  $x$  se obtiene

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0, \quad c_2 - \frac{c_0}{2} = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2},$$

$$c_3 - \frac{c_1}{2} = 0 \Rightarrow c_3 = 0; \quad c_4 - \frac{c_2}{2} + \frac{c_0}{24} \Rightarrow c_4 = \frac{5}{24},$$

$$c_5 - \frac{c_3}{2} + \frac{c_1}{24} \Rightarrow c_5 = 0$$

Finalmente efectuamos el producto de los desarrollos

$$\tan x = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)\right) \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^6)\right) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6).$$

### Composición de desarrollos de Taylor

**Para determinar con error  $o(x^n)$  el desarrollo de una composición**

$$f(g(x)) = T(x) + o(x^n),$$

**a partir de desarrollos (obsérvese que  $b_0 = 0$ )**

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n), \quad g(x) = b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n).$$

**Se sustituye en el desarrollo de  $f$  la variable  $x$  por el desarrollo de  $g$**

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1g(x) + \cdots + a_ng(x)^n + o(g(x)^n) \\ &= a_0 + a_1(b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n)) + \cdots + a_n(b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n))^n + o(x^n), \end{aligned}$$

**y se retienen solo los términos no despreciables frente a  $x^n$ .**

**Ejemplo 6.12.** Calculemos el desarrollo

$$\exp(x^2 + x^3) = a_0 + a_1x + \cdots + a_6x^6 + o(x^6).$$

En este caso

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad g(x) = x^2 + x^3.$$

Vemos que se cumple la condición de que el término constante del desarrollo de  $g$  es cero. El cálculo se efectúa como sigue

$$\begin{aligned} \exp(x^2 + x^3) &= 1 + (x^2 + x^3) + \frac{1}{2}(x^2 + x^3)^2 + \frac{1}{6}(x^2 + x^3)^3 + o(x^6), \\ &= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + x^5 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6). \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.13.** Para comprender las correcciones que introduce **la teoría de la relatividad especial** a las fórmulas de la teoría no relativista debe considerarse el límite cuando el cociente  $v/c$  entre la velocidad característica  $v$  del problema y la velocidad de la luz  $c$  tiende a cero.

Consideremos por ejemplo la energía relativista de una partícula libre de masa  $m_0$  y velocidad  $v$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Introduciendo la variable  $x := v/c$  podemos escribir

$$E(x) = m_0 c^2 (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Cuando  $x \rightarrow 0$  la función  $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$  es una composición  $f(g(x))$  siendo

$$f(x) = (1 + x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2), \quad g(x) = -x^2.$$

Por tanto componiendo los desarrollos se obtiene

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4).$$

Así que podemos desarrollar  $E$  en el límite no relativista en la forma

$$E = m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{3}{8}m_0 \frac{v^4}{c^2} + o\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right), \quad \left(\frac{v}{c} \rightarrow 0\right).$$

## 6.4 Cálculo de límites indeterminados mediante desarrollos de Taylor

En ocasiones nos enfrentamos con límites indeterminados cuando  $x \rightarrow x_0$  del tipo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0},$$

en los que la regla de l'Hôpital resulta poco eficiente. Esto sucede cuando ambas funciones y varias de sus derivadas se anulan en  $x_0$ . En ese caso sus desarrollos de Taylor serán de la forma

$$f(x) = a(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad g(x) = b(x - x_0)^m + o((x - x_0)^m),$$

con  $a$  y  $b$  distintos de cero y  $m$  y  $n$  mayores que 1. Por tanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)}{b(x - x_0)^m + o((x - x_0)^m)},$$

y dividiendo numerador y denominador por el factor dominante (la potencia con menor exponente  $(x - x_0)^n$  ó  $(x - x_0)^m$ ) deducimos que el límite coincide con el del cociente de los monomios dominantes en numerador y denominador. Es decir

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x - x_0)^n}{b(x - x_0)^m} = \begin{cases} \infty & \text{si } m > n, \\ 0 & \text{si } n > m, \\ \frac{a}{b} & \text{si } n = m \end{cases}$$

**Ejemplo 6.14.** Usando desarrollos de Taylor podemos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{2}.$$

**Ejemplo 6.15.** Consideremos el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1 - x)^2} - \cos x}{x^4}.$$

Usando los desarrollos

$$\sqrt{(1 - x)^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4), \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1 - x)^2} - \cos x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{6}.$$



El uso de series de Taylor para calcular límites indeterminados se aplica también en otras situaciones aparte del caso  $x_0 \in \mathbb{R}$  con indeterminación del tipo  $0/0$ .

**Ejemplo 6.16.** El límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x}),$$

es del tipo  $\infty - \infty$ . Introduciendo el cambio de variable  $t := 1/x$  se reduce a

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{t}} - \sqrt{\frac{1}{t}} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{t}} (\sqrt{1+t} - 1) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{t}} \left( \frac{1}{2}t + o(t) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} \sqrt{t} + o(\sqrt{t}) \right) = 0. \end{aligned}$$

## Capítulo 7

# LA INTEGRAL INDEFINIDA

Se introduce la operación de integración de funciones y se explican algunos de los principales métodos para calcular integrales.

### 7.1 Integral indefinida de una función

La noción de integral indefinida (primitiva) de una función está asociada a la operación inversa de la operación de derivación. Dada una función  $f$  la cuestión es escribirla como una derivada  $g'$  de otra función .

**Definición 7.1.** Sea  $f$  una función definida sobre un intervalo  $I$ , una **primitiva o integral indefinida** de  $f$  es toda función  $g$  derivable en  $I$  que verifique

$$g'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Obviamente si  $g$  es una primitiva de  $f$  en  $I$ , también lo es  $g + C$  para toda constante  $C \in \mathbb{R}$ . El siguiente resultado nos dice que no hay otras primitivas distintas de estas.

**Teorema 7.2.** Si dos funciones  $g_1$  y  $g_2$  son primitivas de  $f$  en  $I$ , entonces su diferencia  $g := g_1 - g_2$  es una función constante en  $I$

*Demostración.* Sea  $g := g_1 - g_2$ , dados dos puntos cualesquiera  $a, b \in I$  al ser  $g$  derivable en  $I$  (con derivada cero pues  $g' = g'_1 - g'_2 = f - f = 0$ ) lo será en todos los puntos de  $[a, b]$ . Por tanto será continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Aplicando el teorema del valor medio existirá un punto  $c \in (a, b)$  tal que

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a) = 0 \cdot (b - a) = 0.$$

Luego  $g(b) = g(a)$ . Es decir  $g$  toma el mismo valor en todos los puntos de  $I$ . *Q.E.D.*

**El conjunto de primitivas de una función  $f$  se denota mediante el símbolo de integración indefinida**

$$\int f(x)dx = g(x) + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ constante arbitraria.}$$

**Integrales básicas**

Dado que determinar primitivas de funciones es efectuar la operación inversa de la derivación, es inmediato comprobar las siguientes integrales fundamentales que debemos memorizar:

$$\int x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log |x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2} = \frac{1}{b} \arctan \frac{x-a}{b} + C, \quad b \neq 0,$$

$$\int \sin x = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x = \sin x + C,$$

$$\int e^x = e^x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x-b)^2}} = \arcsen \frac{x-b}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

Por supuesto hay muchas otras integrales que podemos escribir. Basta leer al contrario la tabla de derivadas de las funciones elementales.

**Propiedades**

Hay una serie de propiedades básicas que satisface la integración indefinida, las más importantes son las siguientes:

i)  $\left( \int f(x) dx \right)' = f(x).$

ii)  $\int f'(x) = f(x) + C.$

iii)  $\int (u(x) + v(x)) dx = \int u(x) dx + \int v(x) dx, \quad \int cf(x) = c \int f(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}.$

iv) **Fórmula de integración por partes:**

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx.$$

- v) **Fórmula de cambio de variable:** Dada una función  $x = x(u)$  con derivada no nula, se verifica que

$$\int f(x)dx = \int f(x(u))x'(u)du,$$

donde en el segundo miembro se supone efectuado el cambio de variable inverso  $u = u(x)$  tras el resultado de la integración en  $u$ .

*Demostración.* i) Sea

$$\int f(x)dx = g(x) + C.$$

Entonces  $g'(x) = f(x)$  y por tanto

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (g(x) + C)' = g'(x) = f(x).$$

- ii) Denotemos  $F(x) := f'(x)$ . Por definición

$$\int F(x)dx = \int f'(x)dx = f(x) + C.$$

- iii) Supongamos que

$$\int u(x)dx = g_1(x) + C_1, \quad \int v(x)dx = g_2(x) + C_2.$$

Entonces

$$g_1'(x) = u(x), \quad g_2'(x) = v(x) \Rightarrow (g_1 + g_2)'(x) = u(x) + v(x).$$

Como consecuencia

$$\int (u(x) + v(x))dx = g_1(x) + g_2(x) + C = g_1(x) + C_1 + g_2(x) + C_2 = \int u(x)dx + \int v(x)dx,$$

dado que la suma de dos constantes arbitrarias  $C_1 + C_2$  es una constante arbitraria  $C$ .

Denotemos

$$\int f(x)dx = g(x) + C.$$

Entonces

$$g'(x) = f(x) \Rightarrow (c g(x))'(x) = c f(x).$$

Ello implica que

$$\int c f(x)dx = c g(x) + C = c \int f(x)dx,$$

dado que el producto de un número  $c$  por una constante arbitraria  $C$  representa de nuevo una constante arbitraria  $C$ .

- iv) Por la fórmula de la derivada de un producto

$$(u(x) v(x))' = u'(x) v(x) + u(x) v'(x),$$

tenemos que

$$u(x) v'(x) = (u(x) v(x))' - u'(x) v(x).$$

Entonces, como consecuencia de las propiedades ii) y iii) deducimos

$$\int u(x) v'(x) dx = \int (u(x) v(x))' dx - \int u'(x) v(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx.$$

v) Denotemos

$$\int f(x) dx = g(x) + C.$$

Es decir, se verifica  $g'(x) = f(x)$ . Consideremos ahora la función compuesta

$$G(u) := g(x(u)),$$

y apliquemos la regla de la cadena

$$G'(u) = g'(x(u)) x'(u) = f(x(u)) x'(u).$$

Por tanto

$$\int f(x(u)) x'(u) du|_{u=u(x)} = G(u(x)) + C = g(x) + C = \int f(x) dx.$$

*Q.E.D.*

## 7.2 Cálculo de integrales

Existen multitud de métodos especiales de cálculo de integrales a través de diversos algoritmos. Ahora bien, es sabido que los métodos de integración de las denominadas **funciones elementales** tienen un alcance limitado dado que el conjunto de tales funciones no es invariante bajo la operación de integración. Es decir, la integral de una función elemental no siempre es otra función elemental. En este sentido la operación de integración es mucho más complicada que la de derivación.

### Integración de funciones racionales

Todas las integrales de funciones racionales pueden calcularse en términos de funciones elementales. Sea la integral

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son polinomios arbitrarios.

Supongamos que la factorización de  $Q(x)$  es de la forma

$$Q(x) = C \cdot \prod_r (x - x_r)^{m_r} \prod_s [(x - a_s)^2 + b_s^2]^{n_s}.$$

Es decir:

- Cada factor del tipo  $(x - x_r)^{m_r}$  representa una raíz real de  $Q(x)$  con multiplicidad  $m_r \geq 1$ .
- Cada factor  $[(x - a_s)^2 + b_s^2]^{n_s}$  indica un par de raíces complejas  $z_{\pm} = a_s \pm ib_s$  conjugadas una de la otra con multiplicidad  $n_s \geq 1$ .

Aplicando el método de descomposición en fracciones simples podemos desarrollar el integrando según la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= N(x) + \sum_r \left[ \frac{A_{r,1}}{x-x_r} + \cdots + \frac{A_{r,m_r}}{(x-x_r)^{m_r}} \right] + \\ &+ \sum_s \left[ \frac{B_{s,1} + C_{s,1}x}{(x-a_s)^2 + b_s^2} + \cdots + \frac{B_{s,n_s} + C_{s,n_s}x}{((x-a_s)^2 + b_s^2)^{n_s}} \right], \end{aligned}$$

donde  $N(x)$  es un polinomio y  $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j} \in \mathbb{R}$ .

Todos los términos de la descomposición en fracciones simples se integran con facilidad ya que:

i)

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a|.$$

ii)

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} \text{ si } n \neq -1.$$

iii)

$$\begin{aligned} \int \frac{B+Cx}{(x-a)^2 + b^2} dx &= (B+Ca) \int \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2} + C \int \frac{(x-a)}{(x-a)^2 + b^2} dx = \\ &= (B+Ca) \frac{1}{b} \arctan \frac{x-a}{b} + \frac{C}{2} \log[(x-a)^2 + b^2]. \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} \int \frac{B+Cx}{((x-a)^2 + b^2)^n} dx &= \frac{C}{2} \int \frac{2(x-a)}{((x-a)^2 + b^2)^n} dx + \int \frac{B+Ca}{((x-a)^2 + b^2)^n} dx \\ &= \frac{C}{2} \frac{1}{1-n} \frac{1}{((x-a)^2 + b^2)^{n-1}} + (B+Ca) I_n(a, b), \end{aligned}$$

donde la familia de integrales

$$I_n(a, b) = \int \frac{dx}{((x-a)^2 + b^2)^n}$$

se puede calcular por recurrencia mediante la fórmula

$$I_n(a, b) = \frac{x-a}{2(n-1)b^2((x-a)^2 + b^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)b^2} I_{n-1}(a, b)$$

y la integral inicial

$$I_1(a, b) = \int \frac{dx}{((x-a)^2 + b^2)} = \frac{1}{b} \arctan \frac{x-a}{b}.$$

**Ejemplo 7.3.** Calculemos la siguiente integral con integrando racional

$$I = \int \frac{dx}{x^3 - 1}.$$

La factorización del denominador del integrando es

$$(x - 1)^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x - 1) \left[ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \right].$$

Por lo tanto, la descomposición del integrando en fracciones simples será de la forma

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Eliminando los denominadores se obtiene

$$1 = (A + B)x^2 + (A - B + C)x + (A - C).$$

Lo cual equivale al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A - B + C = 0, \\ A - C = 1 \end{cases}$$

cuya solución es:

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = -\frac{2}{3}.$$

Así, el cálculo de la integral nos da

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 - 1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{3} \int \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \frac{1}{3} \log |x - 1| - \frac{1}{6} \log(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Vamos a analizar ahora dos métodos generales de cálculo de primitivas que luego pueden adaptarse y combinarse para generar gran cantidad de técnicas particulares.

### Integración por partes

Este método está basado en la fórmula de integración por partes:

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx.$$

**El método de integración por partes debe aplicarse cuando  $u(x) v'(x)$  sea una función más difícil de integrar que  $u'(x) v(x)$ .**

**Ejemplos**

i) Integrales del tipo

$$\int u(x) x^n dx, \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq -1,$$

donde  $u(x)$  es una función con derivada *fácil* como

$$u(x) = \ln x, \quad \text{ó} \quad \arctan x,$$

En este caso podemos tomar  $v' = x^n$ . De esta forma

$$\int u(x) x^n dx = u(x) \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int u'(x) \frac{x^{n+1}}{n+1} dx.$$

La integral que nos queda será más simple que la inicial.

ii) El método sirve frecuentemente para obtener relaciones de recurrencia que permiten calcular familias infinitas de integrales. Por ejemplo, veamos cómo se calculan las integrales

$$I_n = \int (\sen x)^n dx, \quad n \geq 0.$$

Aplicando integración por partes se obtiene inmediatamente la siguiente relación:

$$I_n = \int (\sen x)^{n-1} (-\cos x)' dx = -(\sen x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sen x)^{n-2} \cos^2 x dx.$$

Insertando la identidad

$$\cos^2 x = 1 - \sen^2 x$$

en la última integral, encontramos

$$I_n = -(\sen x)^{n-1} \cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

y despejando  $I_n$  se deduce inmediatamente la identidad

$$I_n = -\frac{1}{n}(\sen x)^{n-1} \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

De esta forma calculamos toda la familia a partir de

$$I_0 = \int dx = x + C, \quad I_1 = \int \sen x dx = -\cos x + C.$$

**Ejemplo 7.4.**

$$\int \ln x x dx = (\ln x) \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

**Ejemplo 7.5.**

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{2} \sen x \cos x + \frac{1}{2} x + C, \\ I_3 &= -\frac{1}{3} \sen^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x + C. \end{aligned}$$

**Ejercicio 7.6.** Determinar relaciones de recurrencia que permitan calcular las integrales

$$\int x^n e^x dx, \quad \int \sen^n x e^x dx, \quad n \geq 0.$$



**Cambios de variable**

Posiblemente el ingrediente más abundante en todos los métodos de integración sea el uso de la fórmula de cambio de variable

$$\int f(x)dx = \int f(x(u))x'(u)du.$$

Sería necesario un gran espacio para hacer la lista de los cambios clásicos que han permitido establecer las tablas de integrales que conocemos hoy en día .

**Dos estrategias típicas**

- **Buscar un cambio de variable  $u = u(x)$  tal que  $f(x(u))x'(u)$  sea la derivada  $g'(u)$  de una función conocida.**
- **Buscar un cambio de variable  $u = u(x)$  tal que  $f(x(u))x'(u)$  sea una función racional de  $u$ .**

**Ejemplos importantes de cambios de variable**

- 1)  $I = \int R(\sin x, \cos x)dx$  donde  $R$  es una función racional.

En este caso introducimos el cambio de variable

$$x = 2 \arctan u.$$

Así se verifica

$$u = \tan \frac{x}{2}, \quad x = 2 \arctan u, \quad x'(u) = \frac{2}{1+u^2}.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2u}{1+u^2}, \\ \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}. \end{aligned}$$

De esta forma la integral se reduce a

$$I = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \cdot \frac{2}{1+u^2} du,$$

cuyo integrando es racional en  $u$ .

- 2)  $\int \sin^m x \cos^n x dx$  .

Podemos distinguir varios casos

- i)  $m$  impar. Se hace el cambio  $u = \cos x$ .

$$\int (\sin x)^{2k+1} (\cos x)^n dx = \int (1 - \cos^2 x)^k (\cos x)^n \sin x dx = - \int (1 - u^2)^k u^n du.$$

ii)  $n$  impar. Se hace el cambio  $u = \operatorname{sen} x$ .

$$\int (\operatorname{sen} x)^m (\cos x)^{2k+1} dx = \int (\operatorname{sen} x)^m (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x dx = \int u^m (1 - u^2)^k du.$$

iii)  $m$  y  $n$  pares. Se usan fórmulas del tipo

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2},$$

las veces necesarias para conseguir integrandos con monomios impares en funciones  $\cos(2lx)$ .

### 3) Integrales del tipo $\int R(x, \sqrt[n]{ax^2 + bx + cd}) dx$ con $R$ una función racional

Algunos ejemplos resolubles son

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax + b}) dx, \quad u = \sqrt[n]{ax + b};$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \quad x = a \operatorname{sen} u;$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + a}) dx, \quad u = x + \sqrt{x^2 + a}.$$

**Ejemplo 7.7.** Sea

$$I := \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx.$$

Al usar el cambio

$$u = \ln x, \quad x = e^u,$$

el integrando se convierte en  $u^2$

$$I = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(\ln x)^3}{3} + C.$$

**Ejemplo 7.8.** Para calcular la integral

$$I = \int (\operatorname{sen} x)^2 (\cos x)^3 dx,$$

podemos hacer el cambio

$$u = \operatorname{sen} x,$$

para convertirla en

$$I = \int u^2 (1 - u^2) du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C.$$

**Ejemplo 7.9.** Sea la integral

$$I = \int \cos^4 x \, dx.$$

Utilizando las identidades del ángulo doble

$$\begin{aligned} I &= \int \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \int \left( \frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2(2x)}{4} \right) dx \\ &= \int \left( \frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos(4x)}{8} \right) dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + C. \end{aligned}$$

**Ejemplo 7.10.** Para calcular la integral

$$I = \int x \sqrt[3]{x+1} \, dx,$$

podemos usar el cambio

$$u = \sqrt[3]{x+1}, \quad x = u^3 - 1, \quad dx = 3u^2 \, du,$$

con lo cual

$$I = \int (u^3 - 1) u \, 3u^2 \, du,$$

que se calcula trivialmente.

**Ejercicio 7.11.** Calcular las integrales

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \cos(\ln x) \, dx, \quad \int \frac{\sqrt{1+x}}{x} \, dx.$$

## Capítulo 8

# LA INTEGRAL DEFINIDA

En el capítulo anterior se introdujo la operación de integral indefinida de una función sin considerar la cuestión de la existencia de tal integral. Para tratar ese problema, en este capítulo se proporciona la definición de integral definida, un concepto estrechamente relacionado con el de integral indefinida.

### 8.1 Integral definida de una función

#### Sumas de Riemann

Sea  $f = f(x)$  una función acotada definida sobre un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ . es decir

$$\exists M > 0 \quad \text{tal que} \quad |f(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b].$$

Por definición, una **partición de**  $[a, b]$  es una colección finita de números

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_r\},$$

tales que:

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_r = b.$$

Cada partición determina una división del intervalo en intervalos más pequeños de la forma:

$$I_1 = [x_0, x_1], \quad I_2 = [x_1, x_2], \dots, I_r = [x_{r-1}, x_r].$$

Dado que la función  $f$  es acotada, existirán los supremos y los ínfimos de  $f$  sobre cada uno de estos subintervalos

$$M_i = \sup_{I_i} f(x), \quad m_i = \inf_{I_i} f(x),$$

y por tanto podremos formar las sumas:

$$S(P) = \sum_{i=1}^r M_i l(I_i), \quad s(P) = \sum_{i=1}^r m_i l(I_i),$$

siendo

$$l(I_i) = x_i - x_{i-1},$$

las longitudes de los intervalos  $I_i$ . **Los números  $S(P)$  y  $s(P)$  se denominan sumas superior e inferior de Riemann, respectivamente, asociadas a la partición  $P$ .**

Pensemos en la idea intuitiva del **área con signo** contenida entre la gráfica de  $f$  y el eje  $OX$ , considerando positivas (negativas) áreas correspondientes a gráficas por encima (por debajo) del eje  $OX$ . Podemos interpretar  $S(P)$  como una estimación por exceso del área bajo la gráfica de  $f$ , mientras que  $s(P)$  representa una estimación por defecto.

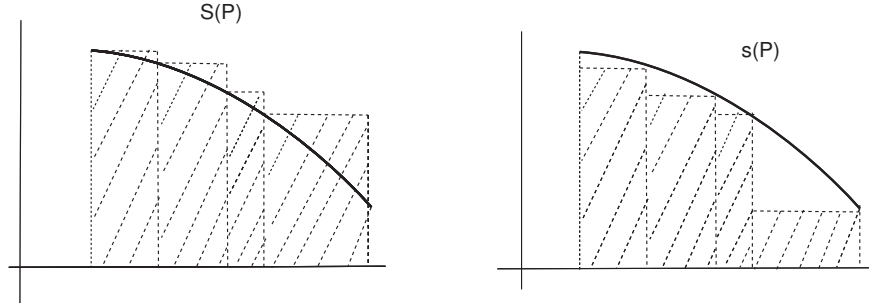


Figura 8.1: Sumas superior é inferior.

### Integrales superior e inferior

Sea  $\mathbf{P}$  el conjunto de todas la particiones del intervalo  $[a, b]$ . De su propia definición se deduce que para toda partición  $P \in \mathbf{P}$  se verifican las desigualdades siguientes:

$$-M(b-a) \leq s(P) \leq S(P) \leq M(b-a), \quad (8.1)$$

siendo  $M > 0$  tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b].$$

La demostración de (8.1) es muy simple teniendo en cuenta que

$$-M \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b].$$

Es evidente que dada una partición  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_r\}$ ,

$$-M \leq m_i \leq M_i \leq M, \quad \forall i.$$

Luego

$$-M \sum_i l(I_i) \leq \sum_i m_i l(I_i) \leq \sum_i M_i l(I_i) \leq M \sum_i l(I_i),$$

y teniendo en cuenta que

$$\sum_i l(I_i) = b - a,$$

deducimos inmediatamente (8.1).

Por otra parte, invocando de nuevo el **axioma del supremo** del conjunto de los números reales, sabemos que todo subconjunto no vacío de números reales acotado superiormente (inferiormente) posee un supremo (un ínfimo) en  $\mathbb{R}$ . Luego, los siguientes dos números están bien definidos.

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} = \inf\{S(P) \quad \text{con} \quad P \in \mathbf{P}\},$$

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} = \sup\{s(P) \quad \text{con} \quad P \in \mathbf{P}\}.$$

Tales números se denominan, **integral superior e inferior de Riemann**, respectivamente. Obviamente representan las optimizaciones de los procesos de cálculo de áreas mediante aproximaciones por exceso y defecto. La integral superior es la menor aproximación por exceso y la integral inferior es la mayor aproximación por defecto.

### Definición de función integrable

**Definición 8.1.** Se dice que  $f$  es **integrable en el sentido de Riemann** si coinciden su integral superior e inferior. En ese caso el valor común se denota

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx} = \underline{\int_a^b f(x)dx},$$

y se denomina **integral definida** en el sentido de Riemann de  $f$  sobre  $[a, b]$ .

Las funciones integrables son por tanto aquellas para las que los dos procesos de aproximación al cálculo del área bajo su gráfica dan el mismo resultado.

**Ejercicio 8.2.** Usando la idea intuitiva de integral definida en términos de área con signo, demostrar que

$$\int_a^b dx = b - a, \quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}, \quad \int_{-1}^2 x dx = \frac{3}{2}.$$

### Observaciones

i) No toda función acotada es integrable. Considerese por ejemplo

$$f : [0, 1] \longrightarrow R,$$

dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Para cualquier partición  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_r\}$  del intervalo  $[0, 1]$ , en cualquier subintervalo  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$  habrá racionales e irracionales, luego siempre tendremos que los ínfimos y los supremos en esos subintervalos serán:

$$m_i = 0, \quad M_i = 1.$$

En consecuencia:

$$s(P) = \sum_i 0 \cdot l(I_i) = 0,$$

y

$$S(P) = \sum_i 1 \cdot l(I_i) = l([0, 1]) = 1,$$

para cualquier partición  $P$  del intervalo  $[0, 1]$ . Ello implica

$$\underline{\int_0^1 f(x)dx} = 0, \quad \overline{\int_0^1 f(x)dx} = 1.$$

Como no coinciden, la función no es integrable Riemann. Sin embargo  $f$  es acotada ya que  $|f(x)| \leq 1$  en todo el intervalo.

- ii) Para funciones acotadas integrables que son positivas

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b],$$

la integral de  $f$  sobre  $[a, b]$  define el área bajo la gráfica de  $f$ . Si  $f$  no es positiva en todo el intervalo, podemos considerar dos subconjuntos disjuntos:

$$I_+ = \{x \in [a, b] : f(x) > 0\}, \quad I_- = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\},$$

así como los subconjuntos del plano

$$C_+ = \{(x, y) : x \in I_+, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

$$C_- = \{(x, y) : x \in I_-, f(x) \leq y \leq 0\},$$

Entonces la integral de  $f$  sobre  $[a, b]$  es la diferencia

$$A(C_+) - A(C_-),$$

entre las áreas de estos conjuntos. Ese número representa el área con signo bajo la gráfica de  $f$ .

- iii) Puede demostrarse que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$  es integrable. También resulta serlo una función continua en un intervalo  $[a, b]$  salvo en un conjunto finito de puntos  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  en los que posea discontinuidades de primera especie.

## 8.2 Propiedades de la integral definida

Enunciamos sin demostración las siguientes propiedades de la integral definida:

- i) **Linealidad**

Sean  $f$  y  $g$  funciones integrables en  $[a, b]$ . Se verifica que  $f + g$  y  $cf$  con  $c \in \mathbb{R}$ , son también integrables en  $[a, b]$ . Además se cumple:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

- ii) **Aditividad**

Si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y  $c$  es un punto intermedio  $a < c < b$ , entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

iii) **Conservación de desigualdad**

Sean  $f$  y  $g$  funciones integrables en  $[a, b]$ , entonces

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

**Ejercicio 8.3.** Teniendo en cuenta que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

demostrar la siguiente desigualdad para funciones integrables

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**El teorema del valor medio del cálculo integral**

**Teorema 8.4.**  $f$  continua en un intervalo cerrado y acotado  $[a, b] \Rightarrow$

Existe  $c \in (a, b)$  tal que  $\int_a^b f(x) dx = f(c) (b - a)$ .

*Demostración.* Consideremos el ínfimo y el supremo de  $f$  sobre el intervalo:

$$m = \inf_{[a, b]} f(x), \quad M = \sup_{[a, b]} f(x).$$

Por la propiedad de **conservación de desigualdad** tenemos

$$\begin{aligned} m \leq f(x), \forall x \in [a, b] &\rightarrow \int_a^b m dx = m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx, \\ f(x) \leq M, \forall x \in [a, b] &\rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b - a). \end{aligned}$$

Como consecuencia, el número:

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx,$$

pertenece al recorrido de  $f$  ya que está comprendido entre el ínfimo  $m$  y el supremo  $M$ . Aplicando entonces el **Teorema del valor intermedio de Bolzano**, existirá un  $c \in (a, b)$  tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx.$$

*Q.E.D.*

**Ejemplo 8.5.** Dado que  $f(x) = \exp(x^2)$  es una función creciente en  $[0, 2]$ , se cumple que

$$f(0) = 1 \leq f(x) = e^{x^2} \leq f(2) = e^4, \quad \forall x \in [0, 2].$$



Por el teorema del valor medio que acabamos de ver existirá  $c \in (0, 2)$  tal que:

$$\int_0^2 e^{x^2} dx = 2 f(c).$$

Como  $1 \leq f(c) \leq e^4$ , podemos acotar la integral en la forma

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2 e^4.$$

### 8.3 El teorema fundamental del Cálculo

**Teorema 8.6.**  $f$  integrable sobre un intervalo  $[a, b]$  cerrado y acotado  $\implies$

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \text{es una función continua en } [a, b].$$

*Demostración.* Utilizando la **propiedad de aditividad** de la integral definida, es claro que:

$$g(x) - g(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Por otra parte dado que solo hablamos de funciones acotadas existirá  $M > 0$  tal que:

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b],$$

luego por la propiedad de **conservación de desigualdad**:

$$\left| \int_{x_0}^x f(t)dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)|dt \leq M(x - x_0).$$

Lo cual equivale a :

$$|g(x) - g(x_0)| \leq M(x - x_0).$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0).$$

Es decir,  $g(x)$  es continua en  $x_0$  para todo  $x_0 \in [a, b]$ .

*Q.E.D.*

#### **Teorema 8.7. Teorema fundamental del Cálculo**

$f = f(x)$  continua en  $[a, b] \implies g(x) = \int_a^x f(t)dt$  es derivable y  $g'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in (a, b)$

*Demostración.* Sea  $x_0 \in (a, b)$ . Por la propiedad de aditividad de la integral definida para todo  $x \in (a, b)$

$$g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Además, por el teorema del valor medio del cálculo integral, existirá un punto intermedio  $c$  entre  $x_0$  y  $x$  tal que

$$\int_{x_0}^x f(t)dt = f(c)(x - x_0).$$

Por lo tanto,

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f(c).$$

Si tomamos el límite  $x \rightarrow x_0$ , el punto intermedio  $c$  tenderá a  $x_0$  y como  $f$  es continua

$$\lim_{c \rightarrow x_0} f(c) = f(x_0).$$

Es decir:

$$g'(x_0) = f(x_0), \quad \forall x_0 \in (a, b).$$

*Q.E.D.*

Este resultado permite resolver un problema que teníamos pendiente: La existencia de primitivas de funciones continuas.

**El Teorema fundamental del Cálculo nos dice que la integral indefinida (primitiva)**

$$\int f(x) dx = g(x) + C,$$

**de una función continua  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  existe y viene determinada por la integral definida con extremo variable**

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

**Ejemplo 8.8.** Hasta ahora para saber si existe una integral indefinida como

$$\int e^{x^2} dx,$$

lo único que podíamos hacer era intentar calcularla directamente de alguna forma. Una vez visto el Teorema fundamental del Cálculo sabemos que esa integral indefinida existe pues el integrando es una función continua en todo  $\mathbb{R}$ . Por ejemplo una primitiva es la función

$$g(x) = \int_0^x e^{x^2} dx.$$

Por supuesto el conjunto completo de primitivas es  $g(x) + C$  con  $C \in \mathbb{R}$  arbitraria.

Sin embargo, desde el punto de vista práctico el teorema sirve en realidad para determinar integrales definidas a partir del cálculo de integrales indefinidas (primitivas). Para ello utilizamos el siguiente resultado

**Teorema 8.9. La regla de Barrow** Dada una función  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  continua sobre un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$  entonces

$$\int_a^b f(x) dx = g(x) \Big|_a^b = g(b) - g(a),$$

siendo  $g$  una primitiva  $g'(x) = f(x)$  continua en  $[a, b]$ .

*Demostración.* Sea  $g$  una primitiva de  $f$  continua en  $[a, b]$ . Por el Teorema fundamental del Cálculo la función

$$g_0(x) = \int_a^x f(x) dx, \quad x \in [a, b],$$

es también una primitiva de  $f$ . Luego existe un número  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = g_0(x) + C$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . En particular

$$g(a) = g_0(a) + C = \int_a^a f(x) dx = C, \quad g(b) = g_0(b) + C = \int_a^b f(x) dx + C,$$

Así que

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(x) dx + C - C = \int_a^b f(x) dx.$$

*Q.E.D.*

**Ejemplo 8.10.** Para calcular las integrales definidas

$$I_1 = \int_0^\pi \cos x dx, \quad I_2 = \int_{-1}^2 e^x dx,$$

determinamos primitivas sen  $x$  y  $e^x$  de los correspondientes integrandos y aplicamos la regla de Barrow

$$I_1 = \sin x \Big|_0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0, \quad I_2 = e^x \Big|_{-1}^2 = e^2 - \frac{1}{e}.$$

### Funciones definidas mediante integrales con extremos variables

Muchas funciones interesantes se construyen a través de integrales definidas con extremos variables de la forma

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt,$$

donde  $f$  es una función continua en un cierto intervalo  $I$  y donde las funciones  $u$  y  $v$  son derivables en un intervalo  $(a, b)$  con imágenes  $u([a, b]), v([a, b]) \subset I$ . Veamos que en ese caso

$$F'(x) = f(v(x)) v'(x) - f(u(x)) u'(x).$$

*Demostración.* Sea  $c \in I$  arbitrario y definamos las funciones

$$F_1(v) = \int_c^v f(t) dt, \quad F_2(u) = \int_c^u f(t) dt,$$

para  $u, v \in I$ . Es claro que

$$F(x) = F_1(v(x)) - F_2(u(x)),$$

y usando la regla de la cadena y la regla de Barrow se encuentra

$$F'(x) = F_1'(v(x)) v'(x) - F_2'(u(x)) u'(x) = f(v(x)) v'(x) - f(u(x)) u'(x).$$

*Q.E.D.*

**Ejemplo 8.11.** Para derivar la función

$$F(x) = \int_{\sin x}^{x^2} \cos x^2 dx,$$

identificamos  $u(x) = \sin x$  y  $v(x) = x^2$ , con lo cual

$$F'(x) = (\cos x)^2 2x - \cos(\sin x) \cos x.$$

**No pasar por alto la condición de continuidad del integrando al derivar funciones definidas por integrales y al aplicar la regla de Barrow.**

## 8.4 Aplicaciones al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes

### Longitudes de curvas

Dada una curva en el espacio  $\mathbb{R}^n$  parametrizada por una aplicación:

$$(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in [a, b],$$

la longitud de arco correspondiente viene dada por:

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'_1(t))^2 + \dots + (x'_n(t))^2} dt.$$

Cuando la curva es la gráfica de una función en el plano



Figura 8.2: Curva en  $\mathbb{R}^3$ .

$$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^{n-1}, \quad t \mapsto f(t) = (f_1(t), \dots, f_{n-1}(t)),$$

la longitud se reduce a la integral

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'_1(x))^2 + \dots + (f'_{n-1}(x))^2} dx.$$

**Ejemplo 8.12.** La longitud de una circunferencia de radio  $R$  puede calcularse con la parametrización:

$$(R \cos t, R \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Así se obtiene

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 ((-\sin t)^2 + (\cos t)^2)} dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

**Ejemplo 8.13.** Consideremos la gráfica de la función la (parábola semicúbica):

$$y = x^{\frac{3}{2}},$$

entre los puntos  $A = (0, 0)$  y  $B = (1, 1)$ .

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \, dx = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{94}{x}\right)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}.$$

### Áreas de recintos planos

- i) Como hemos visto antes el área determinada por la gráfica de una función positiva  $f(x) \geq 0$  sobre un intervalo  $[a, b]$  viene dada por

$$A = \int_a^b f(x) \, dx.$$

- ii) Si consideramos el área encerrada en el recinto comprendido entre las gráficas de dos funciones  $f(x)$ ,  $g(x)$  sobre un intervalo  $[a, b]$ , la fórmula para su cálculo es

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx.$$

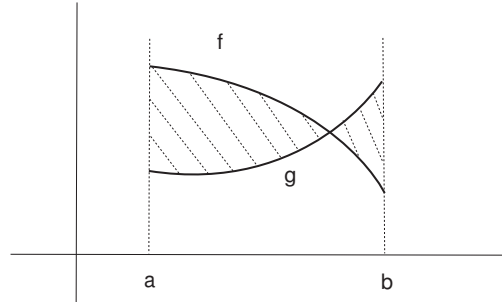


Figura 8.3: Área comprendida entre las gráficas de dos funciones  $f(x)$ ,  $g(x)$ .

- iii) Dada una curva cerrada simple en el plano orientada en el sentido antihorario, el área de su recinto interior viene dada por

$$A = - \int_a^b y(t) x'(t) \, dt = + \int_a^b x(t) y'(t) \, dt = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t) y'(t) - y(t) x'(t)) \, dt.$$

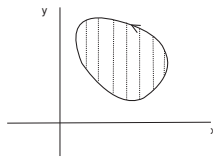


Figura 8.4: Área interior a una curva cerrada.

- iv) Dada una curva plana parametrizada en coordenadas polares  $r = r(\theta)$ . El área del recinto determinado por la curva y las semirectas  $\theta = a$  y  $\theta = b$  viene dada por:

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\theta) d\theta.$$

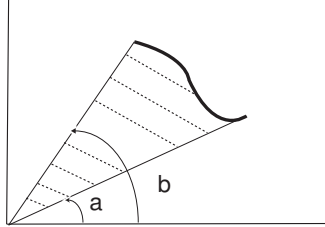


Figura 8.5: Área interior a un sector de una curva en polares.

**Ejemplo 8.14.** Calculemos el área determinada por el lazo:

$$r(\theta) = \cos 4\theta, \quad \theta \in [-\pi/8, \pi/8].$$

Para los dos valores extremos de  $\theta$  el punto de la curva pasa por el origen. Por tanto:

$$A = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{\cos^2 4\theta}{2} d\theta = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{1 + \cos 8\theta}{4} d\theta = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{16}.$$

### Cuerpos de revolución

Un **cuerpo de revolución** es generado por la rotación alrededor del eje  $OX$  de la gráfica de una función  $f(x) \geq 0$  definida sobre un intervalo  $[a, b]$ . El área lateral de ese

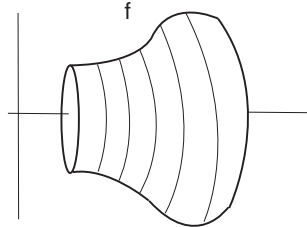


Figura 8.6: Cuerpo de revolución.

cuerpo viene dada por la integral definida

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

y su volumen por

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Para el caso del volumen de la región comprendida entre los cuerpos de revolución generados por dos gráficas  $f(x) \geq g(x)$ , se tiene la fórmula

$$V = \pi \int_a^b ((f(x))^2 - g(x)^2) dx.$$

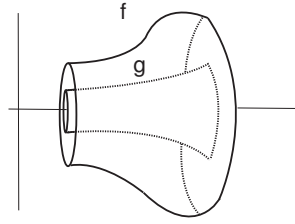


Figura 8.7: Región entre dos cuerpos de revolución.

**Ejemplo 8.15.** Calcular el área del círculo de radio  $R$ .

La función

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2},$$

tiene por gráfica sobre  $[-R, R]$  el semicírculo de radio  $R$ . Por lo tanto

$$A = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

Introduciendo el cambio de variable

$$x = R \cos t, \quad t \in [0, \pi].$$

$$A = 2R^2 \int_0^\pi \sin^2 t dt = 2R^2 \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2R^2 \int_0^\pi \frac{1}{2} dt = \pi R^2.$$

**Ejemplo 8.16.** Para calcular el área de la lemniscata usamos su parametrización en coordenadas polares

$$r(\theta) = \sqrt{2a^2 \cos 2\theta}, \quad \theta \in [-\pi/4, \pi/4].$$

En los puntos inicial y final la curva pasa por el origen, por lo tanto

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2a^2 \cos 2\theta d\theta = a^2 \left[ \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = a^2.$$

**Ejemplo 8.17.** Calcular la superficie de la esfera de radio  $R$ .

La esfera se obtiene como el cuerpo de revolución engendrado por:

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R, R].$$

Por lo tanto:

$$A = 2\pi \int_{-R}^R f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi R \int_{-R}^R dx = 4\pi R^2.$$

**Ejemplo 8.18.** Calcular el volumen de la esfera de radio  $R$ .

Utilizando la caracterización de la esfera del ejemplo anterior:

$$V = \pi \int_{-R}^R f(x)^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

**Ejemplo 8.19.** Hallar el volumen del sólido generado por la región entre las gráficas de las funciones:

$$y = \sqrt{x}, \quad y = x^2,$$

al girar sobre el eje  $OX$ .

La región en cuestión está sobre el intervalo  $[0, 1]$ . Las gráficas se cortan sobre los puntos extremos del intervalo. Utilizando la fórmula correspondiente se obtiene:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] dx = \int_0^1 \pi (x - x^4) dx \\ &= \pi \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{10}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 8.20.** Calcular la longitud de la cicloide

$$x(t) = R(t - \sin t), \quad y(t) = R(1 - \cos t); \quad t \in [0, 2\pi].$$

La longitud es:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} 2R \sin \frac{t}{2} dt = 8R,$$

**Ejemplo 8.21.** Calcular el área del cono.

El cono es el cuerpo de revolución generado por

$$f(x) = mx, \quad x \in [0, h].$$

El área será:

$$A = 2\pi \int_0^h f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi m \sqrt{1 + m^2} \int_0^h x dx = \pi R \sqrt{h^2 + R^2},$$

siendo  $R = mh$  el radio de la base.



## Capítulo 9

# INTEGRALES IMPROPIAS

En el capítulo anterior se introdujo el concepto de integral definida

$$\int_a^b f(x) dx,$$

donde  $[a, b]$  es un intervalo cerrado y acotado y  $f$  una función acotada sobre él. En este capítulo se generaliza la noción de integral cuando el intervalo no es acotado y/o la función tampoco lo es.

### 9.1 Integrales impropias

#### Tipos de integrales impropias

**Definición 9.1.** Dada una integral

$$\int_a^b f(x) dx,$$

si  $a = -\infty$  ( $b = +\infty$ ) se dice que la integral presenta una **impropiedad de primera especie** en  $-\infty$  (en  $+\infty$ ). Se dice que la integral presenta una **impropiedad de segunda especie** en un punto  $c \in [a, b]$  si la función  $f$  no está acotada cerca de ese punto (existen sucesiones  $x_n \rightarrow c$  en  $[a, b]$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \pm\infty$ ).

**Ejemplo 9.2.** Sean las integrales

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^2 \frac{dx}{x^2 + 1}, \quad \mathcal{I}_2 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}, \quad \mathcal{I}_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + 1} dx.$$

$\mathcal{I}_1$  presenta una impropiedad de primera especie en  $-\infty$ ,  $\mathcal{I}_2$  en  $+\infty$ , é  $\mathcal{I}_3$  en  $-\infty$  y en  $+\infty$ .

**Ejemplo 9.3.** Consideremos las integrales

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-1}^4 \frac{dx}{x-1}, \quad \mathcal{I}_2 = \int_1^2 \frac{dx}{x-2}, \quad \mathcal{I}_3 = \int_{-\infty}^1 \frac{e^{-x^2}}{x(x-2)} dx.$$

$\mathcal{I}_1$  presenta una impropiedad de segunda especie en  $c = 1$ ,  $\mathcal{I}_2$  una de segunda especie en  $c = 2$ . La integral  $\mathcal{I}_3$  presenta una de primera especie en  $-\infty$  y otra de segunda especie en  $c = 0$  (no hay impropiedad en  $c = 2$  pues este punto está fuera del intervalo de integración  $[-\infty, 1]$ ).

### Definición de integrales impropias

Para dar sentido a una integral

$$\int_a^b f(x) dx,$$

que presenta impropiedades debemos efectuar el proceso siguiente que debe considerarse como una definición.

**Definición 9.4.** Calculamos la integral a través de los pasos que se describen a continuación

- Se divide el intervalo  $[a, b]$  en subintervalos contiguos

$$[a, b] = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_N,$$

de forma que sobre cada  $I_n$  la integral presente una sola impropiedad  $c_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  y además localizada en uno de sus extremos. Es decir estos intervalos serán de la forma  $I_n = [p, c_n]$  ó  $I_n = [c_n, p]$ . Los puntos intermedios  $p$  pueden elegirse con total libertad entre dos impropiedades consecutivas.

- Se escribe la integral como

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{I_1} f(x) dx + \int_{I_2} f(x) dx + \cdots + \int_{I_N} f(x) dx.$$

- La definición de las integrales impropias que quedan en esta descomposición es la siguiente

$$\int_{-\infty}^p f(x) dx := \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^p f(x) dx, \quad \int_p^{+\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_p^r f(x) dx,$$

$$\int_c^p f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{c+\epsilon}^p f(x) dx, \quad \int_p^c f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_p^{c-\epsilon} f(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Si todos los límites existen diremos que la integral impropia es convergente. En el caso en que uno o varios de ellos no existan diremos que la integral impropia es divergente.**

**Ejemplo 9.5.** La integral

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1},$$

presenta impropiedades en  $-\infty$  y en  $+\infty$ . Por tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_{-\infty}^p \frac{dx}{x^2+1} + \int_p^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^p \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_p^r \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \lim_{r \rightarrow -\infty} (\arctan p - \arctan r) + \lim_{r \rightarrow +\infty} (\arctan r - \arctan p) \\ &= \arctan p - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \arctan p = \pi.\end{aligned}$$

**Ejemplo 9.6.** La integral

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x},$$

presenta impropiedades en  $-\infty$  y en 0. Por tanto, tomando un punto  $p$  intermedio entre  $-\infty$  y en 0, se calcula en la forma siguiente

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_{-\infty}^p \frac{dx}{x} + \int_p^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^p \frac{dx}{x} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_p^{-\epsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{r \rightarrow -\infty} (\ln |p| - \ln |r|) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\ln |\epsilon| - \ln |p|) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln |\epsilon|.\end{aligned}$$

Los tres límites son divergentes así que la integral también lo es.

**Ejercicio 9.7.** Analizar la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \sin x \, dx.$$

## 9.2 Criterios de convergencia de integrales impropias

El problema que queremos abordar es el de saber cuando una integral impropia converge o no. La idea principal que emplearemos es la de comparar el comportamiento de la función integrando sobre las impropiedades con el de funciones simples que tomaremos como patrones. Básicamente necesitamos analizar el comportamiento en  $\pm\infty$  (impropiedades de primera especie) y en cualquier punto  $c \in \mathbb{R}$  donde el integrando sea singular.

### Integrales impropias sencillas

Para calibrar el comportamiento en  $\pm\infty$  usaremos el siguiente resultado ( $p > 0$ )

$$\int_p^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int_{-\infty}^{-p} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{convergen solo si } \alpha > 1$$

Para analizar el comportamiento en un punto  $c \in \mathbb{R}$  singular del integrando nos basaremos en el siguiente resultado

$$\int_p^c \frac{dx}{(x-c)^\alpha}, \quad \int_c^p \frac{dx}{(x-c)^\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad \text{convergen solo si } 0 < \alpha < 1$$

*Demostración.* Para demostrar los enunciados basta emplear las integrales

$$\int \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln |x| & \text{si } \alpha = 1, \\ \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq 1, \end{cases} \quad \int \frac{dx}{(x-c)^\alpha} = \begin{cases} \ln |x-c| & \text{si } \alpha = 1, \\ \frac{(x-c)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq 1, \end{cases}$$

Así es claro que las integrales de los recuadros anteriores son divergentes para  $\alpha = 1$ , mientras que para  $\alpha \neq 1$  se tiene por ejemplo que

$$\int_p^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_p^r \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{-\alpha+1} (r^{-\alpha+1} - p^{-\alpha+1}),$$

$$\int_p^c \frac{dx}{(x-c)^\alpha} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_p^{c-\epsilon} \frac{dx}{(x-c)^\alpha} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{-\alpha+1} (\epsilon^{-\alpha+1} - p^{-\alpha+1}).$$

Obviamente la primera integral converge solo si  $-\alpha+1 < 0$ , mientras que la segunda lo hace solo si  $-\alpha+1 > 0$ . Q.E.D.

### Criterios de comparación

Como hemos visto antes, para estudiar una integral impropia la descomponemos en integrales impropias en subintervalos  $I_n$  del dominio de integración, con una sola impropiedad  $c_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  que además debe estar localizada en un extremo de  $I_n$ . Consideraremos ahora como tratar estas últimas integrales mediante criterios de comparación.

**Teorema 9.8.** Sean dos integrales impropias

$$\int_I f(x) dx, \quad \int_I g(x) dx,$$

con una sola impropiedad  $c$  en alguno de los extremos de  $I$ . Supongamos que

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in I \quad \text{en algún entorno de } c$$

Entonces se verifica

$$\int_I f(x) dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{convergente} \Longleftarrow \text{convergente} \\ \text{divergente} \Longrightarrow \text{divergente} \end{array} \right\} \int_I g(x) dx.$$

*Demostración.* Veamos por ejemplo el caso  $I = [p, +\infty)$ . Por hipótesis existirá algún  $M > 0$  tal que

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \geq M. \quad (9.1)$$

Por tanto descomponiendo las integrales en la forma

$$\int_I f(x) dx = \int_p^M f(x) dx + \int_M^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_I g(x) dx = \int_p^M g(x) dx + \int_M^{+\infty} g(x) dx,$$

debemos analizar el comportamiento de las integrales impropias sobre el intervalo  $[M, +\infty)$ , que definimos en la forma

$$\int_M^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_M^R f(x) dx, \quad \int_M^{+\infty} g(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_M^R g(x) dx.$$

Ahora bien debido a (9.1)

$$0 \leq \int_M^R f(x) dx \leq \int_M^R g(x) dx.$$

Por tanto, cuando  $R \rightarrow \infty$ , si la integral de  $f$  diverge a infinito también lo hará la de  $g$  (pues es mayor) y si la de  $g$  converge también lo hará la de  $f$  (pues es menor y monótona creciente al ser  $f$  positiva sobre  $[M, +\infty)$ ).

*Q.E.D.*

El significado del teorema es el siguiente

**Si la integral de la función más grande converge también lo hará la de la más pequeña.**  
**Si la integral de la función más pequeña diverge también lo hará la de la más grande.**

**Ejemplo 9.9.** Consideremos la integral

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sin^2 x + x^2 + 5},$$

presenta impropiedades en  $-\infty$  y en  $+\infty$ . Cerca de ambos infinitos (en realidad sobre toda la recta) se verifica que

$$0 \leq \frac{1}{\sin^2 x + x^2 + 5} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Por tanto como son convergentes las integrales

$$\int_{-\infty}^{-p} \frac{dx}{x^2}, \quad \int_p^{+\infty} \frac{dx}{x^2},$$

También lo serán

$$\int_{-\infty}^{-p} \frac{dx}{\sin^2 x + x^2 + 5}, \quad \int_p^{+\infty} \frac{dx}{\sin^2 x + x^2 + 5}.$$

Luego la integral  $\mathcal{I}$  es convergente.

El teorema anterior no nos permite analizar impropiedades cuando la función integrando no tiene un signo definido sobre ellas. Sin embargo a veces este problema podemos arreglarlo usando el siguiente resultado

**Teorema 9.10.**  $\int_I |f(x)| dx$  convergente  $\implies \int_I f(x) dx$  convergente.

*Demostración.* Basta aplicar el Teorema 9.8. La desigualdad

$$0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|, \quad \forall x \in I,$$

implica que

$$\int_I (f(x) + |f(x)|) dx = \int_I f(x) dx + \int_I |f(x)| dx,$$

es convergente al serlo la de  $2|f(x)|$ . Por hipótesis la segunda integral en el segundo miembro de esta ecuación es convergente, luego también lo será la primera. *Q.E.D.*

**Ejemplo 9.11.** Las integrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} dx,$$

son convergentes si  $\alpha > 1$  dado que las integrales de los valores absolutos son

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} \right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} dx.$$

### Criterios de comparación por paso al límite

Los criterios más prácticos para analizar la convergencia de integrales impropias son los llamados de **comparación por paso al límite**. Para aplicarlos necesitamos usar las nociones siguientes estudiadas en el capítulo 6.

Se dice que  $f$  es despreciable frente a  $g$  cuando  $x \rightarrow c$

$$f \ll g, \quad (x \rightarrow c),$$

cuando se verifica

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Se dice que  $f$  es del mismo orden que  $g$  cuando  $x \rightarrow c$

$$f \sim g, \quad (x \rightarrow c),$$

cuando se verifica

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

**Teorema 9.12.** Sean dos integrales impropias

$$\int_I f(x) dx, \quad \int_I g(x) dx,$$

con una sola impropiedad  $c$  en alguno de los extremos de  $I$ , y tal que  $f$  y  $g$  son positivas cerca de  $c$ . Entonces se verifican los siguientes resultados

i) Si  $f \sim g$ ,  $(x \rightarrow c)$  entonces

$$\int_I f(x) dx \text{ convergente (divergente)} \iff \int_I g(x) dx \text{ convergente (divergente)}.$$

ii) Si  $f << g$ ,  $(x \rightarrow c)$  entonces

$$\int_I f(x) dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{convergente} \iff \text{convergente} \\ \text{divergente} \implies \text{divergente} \end{array} \right\} \quad \int_I g(x) dx.$$

*Demostración.* Veamos la demostración de i) en el caso  $I = [p, c]$  con  $c \in \mathbb{R}$ . Por hipótesis

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Así tomando un  $0 < \epsilon < 1$  cualquiera existirá un  $\delta > 0$  tal que

$$c - \delta < x < c \implies \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \epsilon,$$

y como consecuencia

$$c - \delta < x < c \implies 1 - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < 1 + \epsilon,$$

y también (por ser  $f$  y  $g$  positivas cerca de  $c$ )

$$c - \delta < x < c \implies 0 < (1 - \epsilon)g(x) < f(x), \quad 0 < f(x) < (1 + \epsilon)g(x).$$

Es obvio entonces, aplicando el teorema 9.8, que si la integral de  $f$  converge (diverge) la de  $g$  converge (diverge).

La demostración de ii) es similar. Consideremos de nuevo el caso  $I = [p, c]$  con  $c \in \mathbb{R}$ . Por hipótesis

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Así tomando un  $\epsilon > 0$  cualquiera existirá un  $\delta > 0$  tal que

$$c - \delta < x < c \implies \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \frac{f(x)}{g(x)} < \epsilon,$$

y por tanto (al ser  $f$  y  $g$  positivas cerca de  $c$ )

$$c - \delta < x < c \implies 0 < f(x) < \epsilon g(x),$$

Es obvio entonces, aplicando el teorema 9.8, que si la integral de  $g$  converge la de  $f$  converge, y si la de  $f$  diverge la de  $g$  diverge. Q.E.D.

**Consecuencias**

- 1) En el enunciado anterior nada cambia si en lugar de exigir que  $f$  y  $g$  sean ambas positivas cerca de  $c$  se exige que sean ambas negativas cerca de  $c$ . En este último caso basta aplicar el teorema a las funciones opuestas  $-f$  y  $-g$ .
- 2) Utilizando ahora los resultados sobre las integrales impropias sencillas vistas anteriormente podemos deducir la siguiente consecuencia importante del teorema anterior:

<b>Impropiedades convergentes</b>	
$f \sim \frac{1}{x^\alpha}$	ó $f \ll \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha > 1, \quad (x \rightarrow \pm\infty);$
$f \sim \frac{1}{(x-c)^\alpha}$	ó $f \ll \frac{1}{(x-c)^\alpha}$ con $0 < \alpha < 1, \quad (x \rightarrow \pm c \in \mathbb{R});$
<b>Impropiedades divergentes</b>	
$f \sim \frac{1}{x^\alpha}$	ó $f \gg \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha \leq 1, \quad (x \rightarrow \pm\infty);$
$f \sim \frac{1}{(x-c)^\alpha}$	ó $f \gg \frac{1}{(x-c)^\alpha}$ con $\alpha \geq 1, \quad (x \rightarrow \pm c \in \mathbb{R});$

**Ejemplo 9.13.** La integral

$$\mathcal{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1},$$

posee dos impropiedades, una en  $+\infty$  y la otra (debido al comportamiento de  $\ln x$ ) en 0. Utilizando propiedades vistas en el capítulo 6 vemos que

- Cuando  $x \rightarrow \infty$

$$x^2 + 1 \sim x^2, \quad \ln x \ll x^\alpha, \quad \forall \alpha > 0,$$

luego

$$\frac{\ln x}{x^2 + 1} \sim \frac{\ln x}{x^2} \ll \frac{x^\alpha}{x^2}, \quad \forall \alpha > 0.$$

Tomando en particular  $\alpha = 1/2$  se obtiene

$$\frac{\ln x}{x^2 + 1} \ll \frac{1}{x^{3/2}}, \quad (x \rightarrow \infty).$$

Luego la impropiedad en  $+\infty$  es convergente.

- Cuando  $x \rightarrow 0$

$$x^2 + 1 \sim 1, \quad \ln x \ll \frac{1}{x^\alpha}, \quad \forall \alpha > 0,$$

luego

$$\frac{\ln x}{x^2 + 1} \sim \ln x \ll \frac{1}{x^\alpha}, \quad \forall \alpha > 0.$$



Tomando en particular  $\alpha = 1/2$  se obtiene

$$\frac{\ln x}{x^2 + 1} << \frac{1}{x^{1/2}}, \quad (x \rightarrow 0).$$

Luego la impropiedad en 0 es convergente.

En resumen, la integral impropia  $\mathcal{I}$  es convergente

**Ejemplo 9.14. La catástrofe ultravioleta**

Una de las cuestiones que desencadenó la formulación de la Mecánica Cuántica fué la inconsistencia de la fórmula que la Mecánica Estadística Clásica proporciona para la energía total radiada por **el cuerpo negro**

$$E = \int_0^{+\infty} f_{clas}(x) dx, \quad f_{clas}(x) = C x^3,$$

donde  $C$  es una constante positiva y la variable  $x$  representa las frecuencias de radiación. Obviamente esta integral presenta una impropiedad de primera especie en  $+\infty$  divergente. El problema radica en el comportamiento de la función  $f_{clas}(x)$  para  $x \rightarrow +\infty$  (el límite de grandes frecuencias denominado **límite ultravioleta**). La solución que propuso Planck conduce a otra función densidad y, como consecuencia, a otra fórmula para la energía total radiada por el cuerpo negro

$$E = \int_0^{+\infty} f_{Planck}(x) dx, \quad f_{Planck}(x) = C \frac{x^3}{e^{ax} - 1},$$

donde  $a$  es otra constante positiva. Esta integral posee una impropiedad de primera especie en  $+\infty$  (no hay impropiedad en 0 pues  $\lim_{x \rightarrow 0} f_{Planck}(x) = 0$ ), pero ahora esta es convergente dado que cuando  $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{x^3}{e^{ax} - 1} \sim \frac{x^3}{e^{ax}} << \frac{x^3}{x^\alpha}, \quad \forall \alpha > 0,$$

así que tomando en particular  $\alpha = 6$  se obtiene

$$f_{Planck}(x) << \frac{1}{x^2}, \quad (x \rightarrow +\infty),$$

que conduce a una integral impropia convergente para la energía radiada por el cuerpo negro.

**Ejercicio 9.15.** Analizar la convergencia de las integrales impropias

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}.$$

# Capítulo 10

## SERIES

Se utiliza la noción de límite para definir *sumas con infinitos términos*, que se denominan series numéricas. Se proporcionan los principales criterios de convergencia para tales sumas. También se incluye una introducción a las series de potencias.

### 10.1 Series de números reales

**Definición 10.1.** Dada una sucesión de números reales  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , se define su **serie** asociada como la *suma con infinitos términos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots := \lim_{k \rightarrow \infty} S_k,$$

siendo

$$S_k := \sum_{n=1}^k a_n = a_1 + \cdots + a_k.$$

Es decir como el límite de la sucesión  $(S_k)_{k=1}^{\infty}$  (**sucesión de sumas parciales**). Si tal límite  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$  existe diremos que es la **suma de la serie**. Diremos que una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente, divergente, divergente a  $\pm\infty$  u oscilante cuando lo sea su correspondiente sucesión de sumas parciales  $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ .

**Ejemplo 10.2.** La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n,$$

posee como términos la sucesión

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = (-1)^n.$$

Su correspondiente sucesión de sumas parciales es

$$S_1 = -1, \quad S_2 = -1 + 1 = 0, \quad \dots \quad S_{2k} = 0, \quad S_{2k+1} = -1, \quad \dots$$

que es una sucesión divergente (oscilante), luego la serie es divergente.

**Ejemplo 10.3.** En la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

sus términos son la sucesión

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{1}{n}, \dots$$

La sucesión de sumas parciales es

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad \dots \quad S_k := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}, \quad \dots$$

Más adelante veremos que esta sucesión de sumas parciales no es convergente, luego la serie es divergente.

### Observaciones

1) Si modificamos un número finito de elementos  $a_{n_1}, \dots, a_{n_r}$  de una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , las sumas parciales de la nueva serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$  verificarán

$$S'_n = S_n + M, \quad n \geq \max(n_i)_{i=1}^r, \quad M := \sum_{i=1}^r (a'_{n_i} - a_{n_i}).$$

Por tanto es claro que la nueva serie será convergente o divergente según lo sea la original.

2) Por las propiedades de los límites es obvio que para series convergentes se verifica

i) La serie de la suma de términos es la suma de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

ii) La serie del producto de los términos por un número es el número por la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

3) Un criterio simple para detectar series divergentes es el siguiente

#### **Teorema 10.4. Criterio del término general**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

*Demostración.* Decir que la serie converge equivale a decir que la sucesión de sumas parciales es convergente, en otras palabras, que existe el límite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S \in \mathbb{R}.$$

Ahora bien

$$S_n = a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1},$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

*Q.E.D.*

Este resultado se aplica en la forma siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textbf{divergente}$$

**Ejemplo 10.5.** Las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^n,$$

son divergentes pues poseen como términos generales respectivos las sucesiones

$$\frac{n-1}{n+1}, \quad n \operatorname{sen} \frac{1}{n}, \quad e^n,$$

que no tienden a cero.

**Ejemplo 10.6.** El resultado anterior no es una condición suficiente de convergencia. Es decir una serie puede ser divergente a pesar de que su término general tienda a cero. Este es el caso con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que es divergente (como dijimos lo demostraremos luego) y sin embargo su término general  $a_n = 1/n$  tiende a cero.

#### Recordar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textbf{convergente} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textbf{convergente}$$

### Series geométricas

Un ejemplo sencillo de series son las **series geométricas**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = a + a r + a r^2 + \cdots, \quad a \neq 0, \quad r \neq 0.$$

Los números  $a$  y  $r$  se denominan, respectivamente, término inicial y razón de la serie. De entrada el término general es

$$a_n = a r^n,$$

que solo tiende a cero cuando  $|r| < 1$ . Es decir que para  $|r| \geq 1$  la serie es divergente. Para ver que ocurre cuando  $|r| < 1$  empleamos la expresión que conocemos para la suma de los  $k + 1$  primeros términos de una progresión geométrica

$$S_k = \sum_{n=0}^k a r^n = \frac{a - a r^{k+1}}{1 - r}.$$

Evidentemente para  $|r| < 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r^{k+1} = 0.$$

Luego en ese caso

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{a}{1 - r}.$$

**Una serie geométrica solo converge cuando el valor absoluto de su razón es estrictamente menor que la unidad ( $|r| < 1$ ). En tal caso la suma de la serie es**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = \frac{a}{1 - r}.$$

**Ejemplo 10.7.** La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots,$$

es divergente pues su razón  $r = 2$  tiene valor absoluto mayor que 1. Sin embargo la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots,$$

es convergente ya que su razón es  $1/2$ . La suma de la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \frac{3/2}{1/2} = 3.$$

### Series telescópicas

Otro de los tipos sencillos de series son las **series telescópicas**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots.$$

En este caso el término general es la diferencia de dos elementos consecutivos de una sucesión  $(b_n)_1^{\infty}$ . Es fácil ver que

$$S_k = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{k-2} - b_{k-1}) + (b_{k-1} - b_k) = b_1 - b_k,$$

luego

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = b_1 - \lim_{k \rightarrow \infty} b_k.$$

Es decir la serie solo es convergente cuando lo sea la sucesión  $(b_n)_1^\infty$ . En caso de que esta sucesión sea convergente la suma de la serie telescópica vendrá dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{k \rightarrow \infty} b_k.$$

**Ejemplo 10.8.** La serie telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (\log n - \log(n+1)),$$

es divergente dado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log n = \infty.$$

La serie telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

es convergente pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Por tanto su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = b_1 = 1.$$

## 10.2 Criterios de convergencia de series

El problema que queremos abordar es el de saber cuando una serie converge o no. Como hicimos en el estudio de integrales impropias, la idea principal que emplearemos es la de comparar el comportamiento de la sucesión de términos de la serie con el de sucesiones de términos de series sencillas cuya convergencia o divergencia es conocida. En realidad el problema es muy similar al análisis de integrales impropias de primera especie.

### Teorema 10.9. Criterio de comparación.

Sean dos series

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

cuyos términos son positivos y cumplen

$$0 \leq p_n \leq P_n, \quad \forall n \geq 1. \quad (10.1)$$

Entonces se verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{convergente} \Longleftarrow \text{convergente} \\ \text{divergente} \Longrightarrow \text{divergente} \end{array} \right\} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P_n.$$

*Demostración.* Al ser los términos positivos, las sucesiones de sumas parciales son sucesiones monótonas crecientes

$$S_n := p_1 + \cdots p_n \geq p_1 + \cdots p_{n-1} = S_{n-1},$$

$$S'_n := P_1 + \cdots P_n \geq P_1 + \cdots P_{n-1} = S'_{n-1}.$$

Además debido a (10.1)

$$S_n \leq S'_n, \quad \forall n \geq 1. \quad (10.2)$$

Por tanto es obvio que si  $(S'_n)_1^\infty$  es convergente su límite (que es el supremo  $M := \sup(S'_n)_1^\infty$  de la sucesión por ser esta una sucesión monótona creciente) es cota superior de la sucesión  $(S_n)_1^\infty$ . Luego  $(S_n)_1^\infty$  es también una sucesión convergente al ser monótona creciente y acotada superiormente.

Por otro lado si la sucesión  $(S_n)_1^\infty$  es divergente, será divergente a  $+\infty$  y como consecuencia de (10.2) la sucesión  $(S'_n)_1^\infty$  será también divergente a  $+\infty$ . *Q.E.D.*

El significado del teorema es el siguiente

**Si la suma de los términos más grandes converge también lo hará la de los más pequeños.**  
**Si la suma de los términos más pequeños diverge también lo hará la de los más grandes.**

**Ejemplo 10.10.** La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$$

es convergente dado que

$$0 \leq \frac{1}{n 2^n} \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Luego converge al serlo la serie geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  de razón  $1/2$ .

Cuando los términos de una serie no tienen un signo definido a veces puede ser útil considerar la serie de los valores absolutos dado que

**Criterio de convergencia absoluta**

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ convergente} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente}$$

*Demostración.* La estrategia de la demostración es la misma que la usada en el resultado análogo para integrales impropias. Dada la desigualdad

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|, \quad \forall n \geq 1,$$

Podemos usar el Teorema 10.9 para deducir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ convergente} \implies \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) \text{ convergente},$$

luego también lo es

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

*Q.E.D.*

**Ejemplo 10.11.** Los términos de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{2^n}, \quad (10.3)$$

no tienen un signo definido debido al numerador  $\operatorname{sen} n$  que oscila cuando  $n \rightarrow \infty$ . Ahora bien la serie de los valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{2^n},$$

es convergente dado que está mayorada por una serie convergente

$$0 \leq \frac{|\operatorname{sen} n|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n},$$

que es la serie geométrica de razón  $r = 1/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Luego aplicando el criterio de convergencia absoluta deducimos que la serie (10.3) es convergente.

Más adelante veremos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n := \frac{(-1)^n}{n},$$

converge y sin embargo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

diverge.

#### Recordar

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{convergente} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{convergente}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{convergente} \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{convergente}$$



**Criterios del cociente y de la raíz**

Podemos combinar ahora los criterios de comparación y de convergencia absoluta para deducir dos nuevos criterios que pueden aplicarse a series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

con términos de signo variable.

Criterio del cociente	
Si existe $C := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ a_{n+1} }{ a_n }$ entonces	$C < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <b>convergente,</b>
	$C > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <b>divergente,</b>
Criterio de la raíz	
Si existe $R := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n }$ entonces	$R < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <b>convergente,</b>
	$R > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <b>divergente,</b>

*Demostración.* Demostremos por ejemplo el criterio del cociente. Supongamos que existe

$$C := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Si  $C > 1$  existirá un  $\epsilon > 0$  tal que todo el intervalo  $I := (C - \epsilon, C + \epsilon)$  está a la derecha del punto  $x = 1$ . Para ese  $\epsilon$  existirá un  $N > 1$  tal que a partir de él toda la sucesión de cocientes estará en  $I$  y como consecuencia

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > C - \epsilon > 1, \quad \forall n > N.$$

Por tanto

$$|a_{n+1}| > |a_n|, \quad \forall n > N \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergente.}$$

Si  $C < 1$  existirá un  $\epsilon > 0$  tal que todo el intervalo  $I := (C - \epsilon, C + \epsilon)$  está entre  $x = 0$  y  $x = 1$ . Para ese  $\epsilon$  existirá un  $N > 1$  tal que a partir de él toda la sucesión de cocientes estará en  $I$  y como consecuencia

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r := C + \epsilon < 1, \quad \forall n > N.$$

Por tanto

$$|a_{n+1}| < |a_n| r, \quad \forall n > N \Rightarrow |a_{N+n+1}| < A r^n, \quad \forall n \geq 2, \quad A := |a_{N+1}|,$$

y como la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} A r^n$  es una serie geométrica convergente ( $0 < r < 1$ ) se obtiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_{N+n+1}| \text{ convergente} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_{N+n+1} \text{ convergente.}$$

Luego también será convergente nuestra serie dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = M + \sum_{n=2}^{\infty} a_{N+n+1}, \quad M := a_1 + \dots + a_{N+2}.$$

*Q.E.D.*

### Observaciones

1) Los casos  $C = 1$  y  $R = 1$  son inciertos en el sentido de que, como veremos más adelante, hay series convergentes y series divergentes con  $L = 1$  y  $C = 1$ .

2) La decisión de cuando aplicar el criterio del cociente o el de la raíz depende de la forma de los términos  $a_n$  de la serie. Es decir de cual de las dos sucesiones  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  ó  $\sqrt[n]{|a_n|}$  es más simple a la hora de calcular el límite necesario para aplicar el correspondiente criterio.

**Ejemplo 10.12.** Consideremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n := \frac{(-1)^n n^2 2^n}{n!}.$$

Aquí la sucesión de cocientes de valores absolutos es sencilla

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^2 2^n} = \frac{2(n+1)}{n^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Como  $C = 0 < 1$  la serie es convergente.

**Ejemplo 10.13.** La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n := \frac{(-1)^n n}{3^n},$$

determina la sucesión de raíces de valores absolutos de términos

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \frac{1}{3} \sqrt[n]{n} \rightarrow \frac{1}{3}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Al ser  $R = 1/3 < 1$  la serie es convergente.

**Ejercicio 10.14.** Aplicar los criterios del cociente y de la raíz a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

y ver que  $C = R = 1$ .

3) Puede probarse que si existe el límite  $C$  de la sucesión  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  entonces también existe el límite  $R$  de la sucesión  $\sqrt[n]{|a_n|}$  y  $C = R$  (ver [1]). Sin embargo el enunciado recíproco no es cierto lo cual quiere decir que podemos aplicar el criterio de la raíz a un conjunto más amplio de series que el criterio del cociente.

Otro criterio muy útil para series con términos de signo cambiante es el siguiente que se aplica a *series alternadas*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} p_n, \quad p_n > 0, \quad \forall n \geq 1.$$

**Criterio de Leibnitz para series alternadas**

$$p_1 > p_2 \dots p_n > p_{n+1} > \dots \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} p_n \quad \text{convergente.}$$

*Demostración.* Como la sucesión  $(p_n)_1^\infty$  es monótona decreciente estricta, las sumas parciales de la serie verifican

$$S_{2n+2} = S_{2n} + p_{2n+1} - p_{2n+2} > S_{2n}, \quad S_{2n+3} = S_{2n+1} - p_{2n+2} + p_{2n+3} < S_{2n+1}.$$

La sucesión  $(S_{2n})_1^\infty$  es monótona creciente estricta luego

$$S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Por otro lado la sucesión  $(S_{2n+1})_1^\infty$  es monótona decreciente estricta luego

$$S' := \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Además

$$S_{2n+1} - S_{2n} = p_{2n+1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Luego ambos límites  $S$  y  $S'$  han de ser finitos e iguales.

*Q.E.D.*

**Ejemplo 10.15.** Anteriormente hemos usado la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

que es la opuesta de una serie alternada que satisface el criterio de Leibnitz dado que

$$p_n := \frac{1}{n} \text{ es una sucesión monótona decreciente que tiende a cero.}$$

Luego nuestra serie es convergente.

### 10.3 Criterios de comparación por paso al límite

El siguiente criterio permite analizar la convergencia de muchas series importantes

**Teorema 10.16. Criterio integral** Sea  $f : [1, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$  una función continua, positiva y monótona decreciente. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{convergente} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \quad \text{convergente}$$

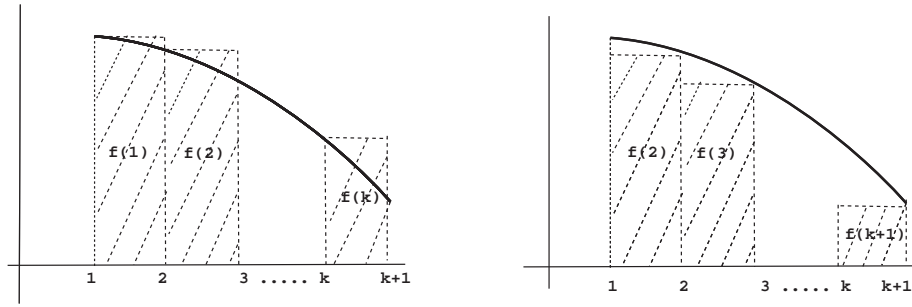


Figura 10.1:

*Demostración.* Es fácil de ver a través de las figuras que

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(k) \geq \int_1^{k+1} f(x) dx$$

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(k) \leq \int_1^{k+1} f(x) dx.$$

Por tanto la sucesión  $(S_n)_1^\infty$  de sumas parciales de la serie  $\sum_{n=1}^\infty f(n)$  es una sucesión monótona creciente que satisface las desigualdades

$$\int_1^{k+1} f(x) dx \leq S_k \leq f(1) + \int_1^{k+1} f(x) dx.$$

Es por ello claro que la sucesión  $(S_n)_1^\infty$  converge si y solo si lo hace la integral impropia de  $f$  sobre  $[1, \infty)$ . *Q.E.D.*

Como consecuencia inmediata somos capaces de analizar la convergencia de las llamadas series armónicas:

**Series armónicas**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{converge solo si } \alpha > 1$$

*Demostración.* Basta con escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n), \quad f(x) := \frac{1}{x^\alpha},$$

y aplicar el teorema anterior teniendo en cuenta que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{converge solo si } \alpha > 1$$

*Q.E.D.*

**Ejemplo 10.17.** Anteriormente hemos usado la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que corresponde al valor  $\alpha = 1$  y por tanto es una serie divergente.

**Criterios de comparación por paso al límite**

Como en el análisis de convergencia de integrales impropias, muchos de los criterios más prácticos para analizar la convergencia de series son los llamados de **comparación por paso al límite**. Para aplicarlos adaptemos en primer lugar algunas de las nociones estudiadas en el capítulo 6 a la comparación de sucesiones de números positivos

$$(p_n)_1^\infty, \quad p_n > 0, \quad \forall n \geq 1.$$

**Se dice que  $(p_n)_1^\infty$  es despreciable frente a  $(P_n)_1^\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y se denota  $p_n \ll P_n$ , ó  $p_n = o(P_n)$  si se verifica**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{P_n} = 0$$

**Se dice que  $p_n$  es del mismo orden que  $P_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y se denota  $p_n \sim P_n$  si se verifica**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{P_n} = 1$$

Todas las propiedades de estas relaciones de comparación estudiadas en el Capítulo 6 se cumplen de igual forma para sucesiones.

**Teorema 10.18.** *Sean dos series de términos positivos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

*Se verifican los siguientes resultados*

i) *Si  $p_n \sim P_n$  entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \text{ convergente (divergente)} \iff \sum_{n=1}^{\infty} P_n \text{ convergente (divergente)}.$$

ii) *Si  $p_n \ll P_n$  entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \left\{ \begin{array}{l} \text{convergente} \iff \text{convergente} \\ \text{divergente} \implies \text{divergente} \end{array} \right\} \sum_{n=1}^{\infty} P_n.$$

*Demostración.* i) Por hipótesis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{P_n} = 1.$$

Así tomando un  $0 < \epsilon < 1$  cualquiera, existirá un  $N > 0$  tal que

$$n > N \implies \left| \frac{p_n}{P_n} - 1 \right| < \epsilon,$$

y como consecuencia

$$n > N \implies 0 < 1 - \epsilon < \frac{p_n}{P_n} < 1 + \epsilon,$$

y también

$$n > N \implies 0 < (1 - \epsilon) P_n < p_n, \quad 0 < p_n < (1 + \epsilon) P_n.$$

Es obvio entonces, aplicando el Teorema 10.9, que si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$  converge (diverge) la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$  converge (diverge).

ii) Por hipótesis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{P_n} = 0.$$

Así tomando un  $\epsilon > 0$  cualquiera, existirá un  $N > 0$  tal que

$$n > N \implies \left| \frac{p_n}{P_n} \right| = \frac{p_n}{P_n} < \epsilon,$$

y por tanto

$$n > N \implies 0 < p_n < \epsilon P_n,$$

Es obvio entonces, aplicando el teorema 10.9, que si  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$  converge la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$  converge, y que si  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$  diverge  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$  diverge. Q.E.D.

Utilizando ahora los resultados sobre las series armónicas vistas anteriormente podemos deducir la siguiente consecuencia importante del teorema anterior:

<p><b>series <math>\sum_{n=1}^{\infty} a_n</math> convergentes</b></p> <p><math> a_n  \sim \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{ó} \quad  a_n  &lt;&lt; \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{con } \alpha &gt; 1.</math></p> <hr/> <p><b>series <math>\sum_{n=1}^{\infty} a_n</math> divergentes</b></p> <p><math> a_n  \sim \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{ó} \quad  a_n  &gt;&gt; \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{con } \alpha \leq 1.</math></p>
--

**Ejemplo 10.19.** La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n(2n-1)},$$

es divergente pues la sucesión de sus términos verifica

$$|a_n| = \left| \frac{3n+1}{n(2n-1)} \right| \sim \frac{3n}{2n^2} = \frac{3}{2} \frac{1}{n}.$$

luego es del mismo orden que la sucesión de términos de un múltiplo de la serie armónica divergente

$$\frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

**Ejemplo 10.20.** La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^2},$$

es divergente pues la sucesión de sus términos verifica

$$|a_n| = \frac{1}{(\log n)^2} \gg \frac{1}{n^{2\alpha}}, \quad \forall \alpha > 0.$$

Por tanto tomando por ejemplo  $\alpha = 1/2$  vemos que la sucesión  $|a_n|$  domina a la de los términos de la serie armónica divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

**Ejemplo 10.21.** Sea la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}.$$

Dado que

$$\frac{n}{e^{n^2}} \ll \frac{n}{n^\alpha}, \quad \forall \alpha > 0,$$

tomando por ejemplo  $\alpha = 2$  vemos que nuestra serie converge al estar sus términos dominados por los de la serie armónica convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

## 10.4 Introducción a las series de potencias

Al igual que consideramos series de números podemos considerar series de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

cuando estas poseen un dominio común  $D$  en la recta  $\mathbb{R}$ . En cada punto  $x_0 \in D$  la serie de funciones se reduce a una serie de números

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0),$$

que podrá ser convergente o divergente. El análisis de series de funciones es de enorme interés para abordar multitud de problemas en la resolución de ecuaciones de todo tipo.

Una clase especial de series de funciones son las denominadas **series de potencias alrededor de un punto**  $c \in \mathbb{R}$  que son de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - c)^n. \quad (10.4)$$

**Ejemplo 10.22.** Las siguientes son ejemplos típicos de series de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x-1)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x+1)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n (x-2)^n,$$

centradas respectivamente en  $c = 1, 0, -1, 2$

Puede probarse que para toda serie de potencias (10.4) existe un número  $0 \leq \rho \leq +\infty$  tal que

- i) La serie converge en el intervalo abierto  $(c - \rho, c + \rho)$ .
- ii) La serie puede ser convergente o divergente en alguno o ambos extremos  $c \pm \rho$  del intervalo.
- iii) La serie diverge en los puntos restantes  $x \in \mathbb{R} \mid |x - c| > \rho$ .

El intervalo  $(c - \rho, c + \rho)$  se denomina **intervalo de convergencia de la serie** y el número  $\rho$  recibe el nombre de **radio de convergencia de la serie**.

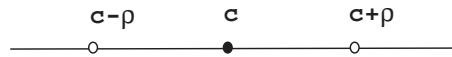


Figura 10.2: Intervalo de convergencia

Para muchas series de potencias interesantes podemos calcular el radio de convergencia usando el método siguiente. Sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - c)^n.$$

<p><b>Cálculo del radio de convergencia</b></p> <p><i>Si existen</i></p> $C := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ a_{n+1} }{ a_n } \quad \text{ó} \quad R := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n }$ <p><i>entonces</i></p> $\rho = \frac{1}{C} \quad \text{ó} \quad \rho = \frac{1}{R}.$
--

*Demostración.* Supongamos por ejemplo que existe

$$R := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Aplicaremos el criterio de la raíz a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n := a_n (x - c)^n.$$



Se verificará que

$$\text{Si existe } \mathcal{R} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} \text{ entonces } \begin{cases} \mathcal{R} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} A_n & \text{convergente,} \\ \mathcal{R} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} A_n & \text{divergente,} \end{cases}$$

Ahora bien

$$\mathcal{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right) |x - c| = R |x - c|.$$

Como consecuencia tenemos que

$$\begin{cases} |x - c| < \frac{1}{R} \implies \text{serie convergente en } x, \\ |x - c| > \frac{1}{R} \implies \text{serie divergente en } x \end{cases}$$

Luego es claro que  $\rho = 1/R$ .

*Q.E.D.*

**Ejemplo 10.23.** La serie centrada en  $c = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

verifica

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Luego

$$\rho = \frac{1}{0} = +\infty.$$

Así que la serie converge en toda la recta  $(-\infty, +\infty)$ .

**Ejemplo 10.24.** La serie centrada en  $c = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-1)^n,$$

verifica

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Por tanto

$$\rho = \frac{1}{1} = 1.$$

Así que la serie converge en el intervalo  $(1-1, 1+1) = (0, 2)$  y diverge en  $|x-1| > 1$ . Veamos que ocurre en los extremos  $x = 0, 2$ .

$$x = 0 \rightarrow \text{La serie se reduce a } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que es una serie divergente.

$$x = 2 \rightarrow \text{La serie se reduce a } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

que es una serie alternada convergente.

De esta forma concluimos que la serie converge en  $(0, 2]$  y diverge en el resto de la recta.

**Series de Taylor**

Dentro de su intervalo de convergencia una series de potencias define una función

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n, \quad x \in (c-\rho, c+\rho).$$

Puede probarse que esta función admite todas las derivadas de orden arbitrario en dicho intervalo y además resulta que los coeficientes de la serie satisfacen

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c), \quad \forall n \geq 0.$$

De esta forma resulta que la función suma de una serie de potencias adquiere la forma de un desarrollo infinito de Taylor alrededor de su centro  $c$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-c)^n, \quad x \in (c-\rho, c+\rho).$$

Pero este es ya un tema para cursos posteriores.

# Bibliografía

- [1] M. Guzman y B. Rubio: *Problemas conceptos y métodos del análisis matemático*, Volúmenes 1 y 2, Ed. Pirámide (1990).
- [2] R. Courant y F. John: *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, Ed. Limusa (1971).
- [3] *Apuntes de Cálculo I* Departamento de Métodos Matemáticos, UCM (2006).
- [4] J. Stewart: *Cálculo*, Thomson ed. (1998)
- [5] J. W. Kitchen: *Cálculo*, McGraw-Hill (1986)