Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Taller N°3
Cálculo I (IME002)

Profesores: Mauricio Carrillo, Alex Sepúlveda.

02 de Junio 2008.

1. (3 Puntos) Calcule

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}-x\right).$$

Solución.
Amplificando por $\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}+x$, reduciendo y luego dividiendo el numerador y denominador por la mayor potencia tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha+\beta)+\frac{\alpha\beta}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)\left(1+\frac{\beta}{x}\right)}+1}.\end{aligned}$$

Tomando límite, concluimos

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}-x\right)=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

2. (3 Puntos) Determine el valor de las constantes a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases}3x+6a & \text{si } x<-3,\\ 3ax-7b & \text{si } -3\le x\le 3,\\ x-12b & \text{si } x>3,\end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$.

Solución.
Para $x=-3$ los límites laterales son

$$\lim_{x\to-3^-} f(x)=\lim_{x\to-3^-}(3x+6a)=-9+6a,$$

y

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} (3ax - 7b) = -9a - 7b.$$

Para que f se continua en $x = -3$ imponemos que $-9 + 6a = -9a - 7b$, es decir,

$$15a + 7b = 9. \tag{1}$$

Por otra parte, para $x = 3$ los límites laterales son

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (3ax - 7b) = 9a - 7b,$$

y

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x - 12b) = 3 - 12b.$$

Análogo al caso anterior imponemos la condición $9a - 7b = 3 - 12b$, es decir,

$$9a + 5b = 3. \tag{2}$$

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2) obtenemos $a = 2$ y $b = -3$.