Guía de Ejercicios - Algebra - Plan Común
Ingenierías Civiles y Matemática

Profesores: M. Teresa Alcalde - Raúl Benavides - César Burgueño
Mauricio Carrillo - Floridemia Salazar - Alex Sepúlveda

IME-006 Año 2008

Lógica y Conjuntos

1. Si p es la proposición "hoy es miércoles" y q es "mañana es domingo". Determine los días de la semana en que son verdaderas las proposiciones siguientes:

   (a) $p \vee q$ (b) $p \wedge q$ (c) $p \Rightarrow q$ (d) $p \Leftrightarrow q$ (e) $\overline{p} \wedge (p \vee q)$

2. Determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

   Si $3^4 - 4^3 = 7$ entonces $\frac{a}{b} : \frac{b}{a} = 1$

3. Si p, q, r son proposiciones y $p \equiv V$, $q \equiv F$ y r es una proposición cualesquiera, obtenga el valor de verdad de:

   (a) $(p \wedge q) \vee r$ (b) $\overline{p \wedge \overline{q}} \Rightarrow (p \vee r)$
   (c) $(p \vee r) \Rightarrow r$ (d) $[(p \Rightarrow r) \Rightarrow q] \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)$
   (e) $(\overline{p} \vee \overline{r} \wedge r)$

4. Estudie el valor de verdad de las siguientes proposiciones, y en caso de ser falsas dé un contraejemplo.

   (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(x + 3 > n)$
   (b) $(\exists! m \in \mathbb{Z})(3 + m = 5)$
   (c) $(\forall m \in \mathbb{Z})(\exists! n \in \mathbb{Z}; n|m)$

5. Niegue las proposiciones de la pregunta anterior.

6. Estudie el valor de verdad de las siguientes proposiciones, y en caso de ser falsas dé un contraejemplo.

   (a) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ (b) $\overline{[p \Rightarrow (q \vee r)]} \Leftrightarrow [(\overline{p} \wedge \overline{r}) \Rightarrow q]$
   (c) $(p \wedge \overline{p}) \vee (q \vee \overline{q})$ (d) $\overline{[p \wedge (q \vee r)]}$

7. Si p, q, r son proposiciones, pruebe sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología:

   $(p \vee q \Leftrightarrow p \wedge r) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)]$

8. Sea $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$. Diga cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

   (a) $a \subseteq A$ (b) $a \in A$ (c) $\{a\} \in A$
   (d) $\{a\} \subseteq A$ (e) $\{\{a\}\} \subseteq A$ (f) $\{\{a\}, a\} \subseteq A$

9. Sea $A = \{a, \emptyset, \{b\}, \{a\}, \{\emptyset\}, \{a, \emptyset\}\}$. Encuentre $P(A)$.

10. Puede dar un ejemplo en que $P(A) = \emptyset$?

11. Un hotel recibe 60 visitantes, de los cuales 37 permanecen al menos una semana, 43 gastan al menos \$30 diarios, 32 están completamente satisfechos del servicio; 30 permanecieron al menos una semana y gastaron al menos \$ 30 diarios; 26 permanecieron al menos una semana y quedaron completamente satisfechos; 27 gastaron al menos \$30 diarios y quedaron completamente satisfechos y 24 permanecieron al menos una semana, gastaron al menos \$ 30 diarios y quedaron completamente satisfechos.

    a) Cuántos visitantes permanecieron al menos una semana, gastaron al menos \$ 30 diarios pero no quedaron completamente satisfechos?

    b) Cuántos visitantes quedaron completamente satisfechos pero permanecieron menos de una semana y gastaron menos de \$ 30 diarios?

    c) Cuántos visitantes permanecieron menos de una semana, gastaron menos de \$ 30 diarios y no quedaron completamente satisfechos.

12. Demuestre que: $A \cap (A \cup B) = A$

13. Para cuáles $S \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ son verdaderas las siguientes afirmaciones?

    (a) $\{x \in S / x^2 = 5\} \neq \emptyset$ (b) $\{x \in S / \mid x - 1 \mid \leq \frac{1}{2}\} = \{1\}$
    (c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\} = \emptyset$

14. Dé un ejemplo de tres conjuntos A, B y C tales que:

    $$A \cap B \neq \emptyset, B \cap C \neq \emptyset, A \cap C \neq \emptyset \text{ pero } A \cap B \cap C = \emptyset$$

15. Dibuje los siguientes subconjuntos del plano

    $a)\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x^2 + y^2 = 1\}$ $(b)\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x \geq 1\}$
    $c)\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x + y \geq 1\}$ $(d)\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; xy = 1\}$

16. Sea $A = [1, 4] \subseteq \mathbb{R},\ B = [0, 4] \subseteq \mathbb{R},\ C = [0, 3] \subseteq \mathbb{R};\ D = [1, 2] \subseteq \mathbb{R}$.
Dibuje en un diagrama $(A \times B) \cap (C \times D)$

17. Determine las posibles relaciones de inclusión entre A y B:
    a) $A = \{0, 1, 2, 6\}$, $B = \{$ divisores de 30 $\}$
    b) $A = X - (Y - T)$, $B = T$
    c) $A = E - S$, $B = \{x \in S; x \in E - S\}$
    d) $A = P(E - S)$, $B = P(E) - P(S)$

18. Demostrar las identidades:
    a) $X - (Y - X) = X$ *b)* $X - (X - Y) = X \cap Y$
    c) $P(A) = P(B) \Leftrightarrow A = B$ *d)* $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$
    e) $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B) \Leftrightarrow A \subset B$ *o* $B \subset A$

19. Sea $X = \{1, 2, 3, ..., 18\}$. Si X tiene p subconjuntos con un número par de elementos e i subconjuntos con un número impar de elementos, compare p e i. ¿ Puede calcularlos ?

20. Verdadero o falso?:
    (a) $\forall x : x \supseteq \Phi$
    (b) $\forall x : \emptyset \in x$
    (c) El único conjunto que es subconjunto de todos los conjuntos es el vacío.
    (d) $\emptyset \subseteq \{\{\}\}$
    (e) $\{1\} \in \mathbb{N}$
    (f) $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$

21. Sea P el conjunto de los nmeros primos (un primo es un entero que tiene exactamente cuatro divisores). Describa el conjunto P.

22. Muestre que $\{2x + 5/x \in \mathbb{Z}\} = \{1 + 2y/y \in \mathbb{Z}\}$

23. Pruebe las siguientes propiedades:
    (a) $A \subseteq A \cup B;\quad A \cap B \subseteq A$
    (b) $B \subseteq A \Leftrightarrow A \cup B = A$
    (c) $B \subseteq A \Leftrightarrow A \cap B = B$
    (d) $A, B \subseteq C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$
    (e) $A, B \supseteq C \Leftrightarrow A \cap B \supseteq C$
    (f) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$

(g) $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$

(h) $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

24. ¿Verdadero o falso? (dar una demostración o un contraejemplo):

   (a) Si para todo X se tiene $X \cap B = X \cap C$ entonces $B = C$

   (b) Si existe un X tal que $X \cap B = X \cap C$, entonces $B = C$

   (c) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

   (d) Si $A \subseteq B$ y B y C son disjuntos, entonces $A \cap (B \cup C) = A$

   (e) $(A \cup B) - A = B - A$

   (f) $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

   (g) $A - (B - C) = (A - B) - C$

25. Dados los conjuntos A y B, se define su diferencia simétrica por: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

   (a) Muestre que la operación Δ es conmutativa.

   (b) ¿Qué conjunto es $A\Delta\emptyset$?

   (c) ¿Qué conjunto es $A\Delta U$?

   (d) Si $A \subseteq B$ diga qué conjunto es $A\Delta B$

   (e) Muestre que: $\overline{A\Delta B} = \overline{A \cup B} \bigcup (A \cap B)$

   (f) Muestre que: $A = B \Leftrightarrow A\Delta B = \emptyset$

   (g) Muestre que: $A\Delta B = C \Leftrightarrow A\Delta C = B$

26. Analice la posible relación entre los siguientes pares de conjuntos:

   (a) $P(\overline{A}),\ \ \overline{P(A)}$

   (b) $P(A - B),\ \ P(A) - P(B)$

27. Sean E, F dos conjuntos y $S_{E,F}$ definido por:
   $S_{E,F} = \{A \times B; A \subset E, B \subset F\}$
   Muestre que:
   a)$S_{E,F} \subset P(E \times F)$
   b)$S_{E,F} = P(E \times F) \Leftrightarrow$ E *o* F es un singleton.

28. Sea $A = \{a, b, c\}$
   a) ¿ Cuántas relaciones se pueden establecer de A en A ?
   b) ¿ Cuántas reflexivas ? ¿ Simétricas ?
   c) Construya todas las relaciones de equivalencia posibles sobre A.

29. Sea $n \in \mathbb{N}$

$$xRy \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} = 1 \quad \text{si } x \neq y \end{cases}$$

a) Demuestre que R es una relación de equivalencia.

b) Describa las clases de equivalencia para $n = 0, 1, 2$.

30. Sea una relación definida en $\mathbb{R}$ por $xSy \Longleftrightarrow x^2 = x \mid y + 1 \mid$. Haga el gráfico.

31. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine los gráficos de las relaciones R, S, definidas en A por (i) $aRb \Longleftrightarrow a + b \leq 4$, (ii) $aSb \Longleftrightarrow a(b + 1) \leq 6$

32. Las relaciones R_1 y R_2 están definidas por
(i) $xR_1y \Longleftrightarrow -10 \leq x + 5y \leq 10$
(ii) $xR_2y \Longleftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4, x \geq y$
Haga un gráfico de estas relaciones.

33. Discuta la reflexividad, simetría, antisimetría y transitividad de las siguientes relaciones en el conjunto $\{a, b, c\}$:
(i) $\{(a, a), (b, b)\}$ (ii) $\{(c, c), (c, b)\}$ (iii) $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$
(iv) $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ (v) $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$

34. Sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, discuta las relaciones siguientes:
(i) $\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; a^2 + b^2 \geq 0\}$ (ii) $\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; 0 < ab < 1\}$

35. Averigue si la relación en $\mathbb{Z}$ definida por $aRb \Longleftrightarrow ab \geq 0$ es una relación de equivalencia.

36. En $\mathbb{Z}$ definimos: a Rb $\Longleftrightarrow a^2 + a = b^2 + b$. Demuestre que R es una relación de equivalencia y encuentre las clases de equivalencia de los elementos 0,1,a.

37. En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define $(a, b) \sim (c, d)$ ssi $a + d = b + c$. Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia y encuentre la clase del elemento $(2, 1)$.

38. Consideremos $P(A)$, donde A es un conjunto. En $P(A)$ se define una relación como sigue: ARB ssi $A \subset B$. Determine si R es una relación de orden.

39. Sea $A \neq \phi$ y R una relación en A. Se dice que R es circular si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ entonces $(z, x) \in R$. Demuestre que si R es refleja y circular, entonces R es simétrica.

40. Considere el conjunto $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ de n-tuplas con componentes en los naturales. Se define la relación R_1 sobre $\mathbb{N}^n$ por

$$xR_1y \Leftrightarrow [x_1 \leq y_1, x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2, \cdots, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i]$$

(a) Demuestre que R_1 es una relación de orden parcial.

(b) Sea R_2 la relación de orden de orden usual de n-tuplas, es decir,

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^n, xR_2y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

Demuestre que

$$xR_2y \Rightarrow xR_1y$$

Verifique que la implicación en el otro sentido es falsa. Para ello construya un contraejemplo.

Funciones

41. Considere las funciones $f : \mathbb{N} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida en cada $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ por $f(n) = \frac{1}{2n}$ y $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida en cada $q \in \mathbb{Q}$ por $g(q) = \frac{q}{2}$.

(a) Determine si f, g, $g \circ f$ son inyectivas, epiyectivas y biyectivas.

(b) Determine los conjuntos pre-imágenes $g^{-1}(\mathbb{Z})$

42. Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{3} & ; \; n \text{ es múltiplo de 3} \\ \frac{n+2}{3} & ; \; n \text{ es múltiplo de 3 más 1} \\ \frac{n+1}{3} & ; \; n \text{ es múltiplo de 3 más 2} \end{cases}$$

Encuentre el dominio de f, la imagen de f y estudie si f es inyectiva, epiyectiva o biyectiva.

43. Estudie en $P(\mathbb{N})$ si son inyectivas o epiyectivas las funciones$f_i : P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N})$ definidas por:

(a) $f_1(X) = X \bigcap \{2\}$

(b) $f_2(X) = X \bigcup \{2\}$

(c) $f_3(X) = X - \{2\}$

44. Sean $A, B \subseteq E$ y $h : P(E) \to P(A) \times P(B)$ definida por $h(X) = (X \cap A, X \cap B)$. Estudie las condiciones para que h sea: (a) inyectiva, (b) epiyectiva, (c) biyectiva.

45. Sea $f_{ab} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; $f_{ab}(n) = an + b$, con $a, b \in \mathbb{Z}$. Encuentre para qué valores de a, b, la aplicación f_{ab} es biyectiva.

46. Sea $f_i : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, definidas por:

    (a) $f_1(x) = x + 3$
    (b) $f_2(x) = \frac{1}{x}$

    Encuentre $f_i^n = f_i \circ f_i \circ \cdots \circ f_i$, n veces.

47. Sean $P_f(\mathbb{N}) = \{A; A \subseteq \mathbb{N}, A finito\}$ y $s : P_f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$; $s(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

    (a) Estudie si s es inyectiva o epiyectiva.
    (b) Calcule $s(\{n, n+1, \ldots, 2n\})$
    (c) $s^{-1}(\{6\})$

48. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = |2x + 3|$

    (a) Estudie si f es inyectiva o epiyectiva.
    (b) Calcule $f \circ f$.

49. Sean $A = \{0, 1, 2, \ldots, 99\}$ y $f : A \to A$ definida por $f(a) = |a - 99|$

    (a) Demuestre que f es biyectiva.
    (b) Determine f^{-1}

50. Sea $f : A \to B$ una función. Considere en A la relación:

$$aRb \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

    (a) Pruebe que R es una relación de equivalencia.
    (b) Para $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ y

$$f(n) = \begin{cases} n+2 & ; \text{ si } n \text{ es par} \\ n+1 & ; \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

    Encuentre A/R (el conjunto cuociente de A/R)

51. Sean $f, g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dos funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & ; \quad x > 0 \\ x + 2 & ; \quad x \neq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 5 & ; \quad x > 3 \\ x^3 & ; \quad x < 3 \end{cases}$$

Determine $g(f(x))$

52. Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto fijo. Para todo subconjunto A de E ($\forall A \subset E$) se define la función característica de A como sigue:
$\Psi_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$; tal que

$$\Psi_A(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad \text{si } x \in A \\ 0 & ; \quad \text{si } x \notin A \end{cases}$$

   (a) Describa $\Psi_E(x)$ y $\Psi_\emptyset(x)$, $\forall x \in E$.
   (b) Demuestre que ($\forall x \in E$): $\Psi_{A \cap B}(x) = \Psi_A(x) \cdot \Psi_B(x)$
   (c) Si $C, D \subset E$, entonces

$$C \subset D \Leftrightarrow (\forall x \in E); \Psi_C(x) \leq \Psi_D(x)$$

53. Sea $A = \{-7, -6, -5, \cdots, 5\} \subset \mathbb{Z}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{Z}$; tal que

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(n + 7) + 2 & ; \quad -7 \leq n < -3 \\ 1 & ; \quad -3 \leq n \leq 0 \\ (n - 3)^2 - 1 & ; \quad 1 \leq n \leq 5 \end{cases}$$

Calcule $f(3)$, $f(1)$; $f(5)$. Estudie si f es inyectiva y justifique. Haga las restricciones mínimas necesarias para que f sea una función biyectiva y determine f^{-1}.

54. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow D$, con la condición $D \subset A$. Probar que:

   (a) Si f y g son inyectivas, entonces fog es inyectiva.
   (b) Si f y g son epiyectivas, entonces fog es epiyectiva
   (c) Si f y g son crecientes, entonces fog es creciente

55. Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ una función con la propiedad siguiente:

$$f(n + m) = f(n) + f(m).$$

para cada par de enteros n y m

(a) Se define la relación R en $\mathbb{Z}$ por:

$$nRm \Leftrightarrow f(n) = f(m)$$

Probar que R es una relación de equivalencia.

(b) Probar que $f(0) = 0$, recuerde para ello que $0 + 0 = 0$

(c) Probar que $f(-m) = -f(m); \forall m \in \mathbb{Z}$. Indicación: use que $m - m = 0$

(d) Pruebe que f es inyectiva ssi$f{-}1^(\{0\}) = \{0\}$

56. Sea $f : E \longrightarrow F$ una función. Se dice que un subconjunto A de E es estable si $f^{-1}(f(A)) = A$. Probar que si A y B son subconjuntos estables de E entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ también lo son.

57. Sea $\mathcal{F} = \{f : A \longrightarrow B; f\text{es función}\}$, es decir, es el conjunto que contiene a todas las funciones de A en B. Sea R una relación de orden en B. Se define en $\mathcal{F}$ la relación R^* por:

$$fR^*g \Leftrightarrow \forall a \in A, f(a)Rg(a)$$

Probar que R^* es una relación de orden en $\mathcal{F}$. Probar que si A y B tienen al menos dos elementos entonces R^* es una relación de orden parcial.

Inducción y Conteo

58. Calcule las siguientes sumatorias:

(a) $\sum_{i=1}^{n}(2 + 3i)$

(b) $\sum_{i=8}^{100} i$

59. La suma de 3 números en Progresión Aritmética es 27 y la suma de sus cuadrados es 293. Determine tales números.

60. Si en una progresión aritmética, el quinto término es 15 y el décimo es 30, entonces determine la P.A.

61. Calcule la suma de los 101 primeros términos de la P.G. siguiente:

$$G = \{\frac{12}{\sqrt{3}}, 3\sqrt{3}, \cdots\}$$

62. La suma de tres números en P.G. es 26, su producto es 216. Determine tales números.

63. Si los números x, y, z están en P.G. y son distintos, demuestre que

$$\frac{1}{y-x}, \frac{1}{2y}, \frac{1}{y-z}$$

están en P.A.

64. La suma de tres números en P.A. es 30. Si al primero de ellos se le agrega 1, al segundo 5 y al tercero 29 se obtiene una P.G. Determinar ambas progresiones.

65. Considere las progresiones

$$G = \{g_1, g_2, g_3, \cdots\} \quad P.G. \quad A = \{3, a_2, a_3, \cdots\} \quad P.A.$$

Tal que

(a) $g_3 = 12$; $g_7 = 192$

(b) $\sum_{i=1}^{11} g_i = \sum_{i=1}^{50} a_i$

Determine la diferencia de la P.A.

66. Demuestre usando inducción las fórmulas proposicionales siguientes:

(a) $F(n) = \sum_{i=1}^{n} i2^{i-1} = 1 + (n-1)2^n$.

(b) $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9.

(c) $n^3 + 2n$ es divisible por 3.

(d) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7

(e) $5^{2n} + (-1)^{n+1}$ es divisible por 13.

(f) $7^{2n} + 16n - 1$ es divisible por 64.

(g) $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x - y$.

(h) $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ divisible por $x + y$

(i) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

Son verdaderas $\forall n; n \in \mathbb{N}$

67. Demostrar que si n es un entero, entonces $\frac{(n+6)(n+13)(n-4)}{6}$, también es un número entero.

68. Demuestre que si n es un entero, entonces $n^3 + 11n$ es divisible por 6

69. Probar que para todo natural mayor o igual a 1 se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}$$

70. La a_k es una sucesión de números reales tal que satisface : $\sum_{k=1}^{n} = 2n+3n^2$. Demuestre que es una P.A. y encuentre una expresión para a_n en términos de n.

71. Sean $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dos secuencias de números reales. Considere los naturales p y n tales que $p \leq n$. Probar que

$$\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1}-a_k)b_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_p b_p - \sum_{k=p}^{n} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k)$$

72. Demuestre, sin inducción que:

 (a) $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot n$

 (b) $\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$

73. Demuestre que $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n-1}}{n+1}$

74. Sea $k \in \{0, 1, \cdot, n-1\}$. Verifique que $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$

75. Determine el término que contiene $\frac{x^2}{y^2}$ en el desarrollo binomial:

$$(\frac{x}{y} - \frac{y^2}{2x^2})^8$$

76. Pruebe que para $n \geq 1$, para cualquier $j \geq 0$ se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i+j-1}{j} = \binom{n+j}{j+1}$$

77. Pruebe sin usar inducción que para $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$$

 y deduzca que

$$(1+\frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

78. Demuestre que si C es el coeficiente del término que contiene a x^a en el desarrollo binomial

$$(x^3 - \frac{1}{x})^{3n}$$

 entonces

$$C = (-1)^{\frac{9n-a}{4}} \frac{(3n)!}{(\frac{9n-a}{4})!(\frac{3n+a}{4})!)}$$

79. Sean p y q dos reales no negativos tales que $p+q=1$. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k$$

Indicación: $k^2 = k(k-1)+k$

Estructuras Algebraicas

80. En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define la ley de composición siguiente:

$$(a,b) * (c,d) = (ac, bc+d)$$

(a) Estudie las propiedades de $*$

(b) Calcule $(1,2)^3$, $(2,1)^{-2}$, $(2,4)^4$

81. Estudie las siguientes estructuras:

(a) $(\mathbb{R}^2, *)$; $(a,b)*(c,d) = (a+c, b+d+2bd)$

(b) Sea $S = \{a + b\sqrt{2};\ a,b \in \mathbb{R}\}$. Se define $\forall x,y \in S$
$x * y = (a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})$
$x \triangle y = (a+b\sqrt{2}) + (c+d\sqrt{2})$

(c) $(\mathbb{N}, *)$, $a*b = \text{máx}\{a,b\}$

(d) $(\mathbb{N}, *)$, $a*b = \text{máx}\{a,b\} - \text{mín}\{a,b\}$

(e) Sea $S = \{1,2,3,4,6\}$, Estudie $(S,*)$, donde $a*b = m.c.d.(a,b)$

(f) Sea $S = \{1,2,5,10\}$, y considere $(S,+,*)$, donde $a+b = m.c.d.(a,b)$ y $a*b = m.c.m.(a,b)$

(g) $(P(X), \triangle, \cap)$, $X \neq \emptyset$, donde $\triangle$ es la diferencia simétrica.

(h) $(P(X), \cup, \cap)$, $X \neq \emptyset$

82. (a) Demuestre que el conjunto formado por los giros alrededor del origen forman un grupo con la composición. Demuestre además que si g_α denota el giro en α grados, entonces

$$g_\alpha \cdot g_\beta = g_{\alpha+\beta}$$

.

(b) Demuestre que $(\mathcal{M}, \cdot)$ es un grupo, donde

$$\mathcal{M} = \{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} ; a^2+b^2=1, a,b \in \mathbb{R}\}$$

(c) Demuestre que los dos grupos anteriores son isomorfos.

83. Demuestre que

    (a) $H_1 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}_6, +)$

    (b) $H_2 = \{Id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\}$ es un subgrupo de $(S_3, \cdot)$

    (c) $H_3 = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{9}\}$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}_{13}*, \cdot)$

84. Demuestre que si $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $S = \{id, \tau\}$ no es un subgrupo de S_3, sin embargo $H = \{id, \tau, \tau^{-1}\}$ es un subgrupo de S_3

85. Dados $\mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_3$, se define la operación $*$ en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ dada por:

$$(a, b) * (c, d) = (a \otimes_2 c, b \oplus_3 d)$$

    Estudie las propiedades de $*$.

86. Sea $A = \mathbb{Q} - \{\frac{1}{4}\}$. Para todo $x, y \in A$ se define $x \otimes y = x + y - 4xy$

    (a) Demuestre que $\otimes$ es una ley de composición interna.

    (b) Demuestre que $(A, \otimes)$ es un grupo abeliano.

87. En el conjunto de los números naturales, se da la siguiente ley de composición interna $x \otimes y = |x - y|$. Pruebe que esta ley de composición las siguientes propiedades:

    (a) No asociativa (basta un contra-ejemplo)

    (b) Conmutativa

    (c) Tiene neutro

    (d) Tiene inversos

88. Sabiendo que $A = \{a, b, c, d\}$ es un grupo, complete la siguiente tabla de composición:

$\circ$	a	b	c	d
a	c			
b				
c				
d			c	

89. Consideremos la permutación $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

    (a) Determine σ^{12345}

(b) Determine $\theta \in S_5$, tal que $\sigma^{-1} \circ \theta \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

90. En $\mathbb{Z}_{11}$

    (a) Encuentre $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{8}$

    (b) calcule: $\frac{3}{7} - \frac{1}{5}$.

    (c) Resuelva la ecuación: $3x + 7 = 2$

91. Estudie si el número: $1273^{1273} + 806^{806}$, es divisible por 7.

92. Determine la hora que marca un reloj 777 horas después de que sean las once?

Números Complejos

93. Dados $z_1 = -3 + 4i$ y $z_2 = 5 + i$. Calcule $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1^{-1}, z_2^{-1}

94. Expresar en la forma $x + yi$, el número complejo:

$$\frac{(3+5i)(2-i)^3}{-1+4i}$$

95. Calcular el módulo del complejo:

$$\frac{(2-3i)^4(1-i)^3}{5+i}$$

96. Hallar un complejo z tal que:

$$|z| = \frac{1}{|z|} = |1-z|$$

97. Hallar un complejo z tal que $z^{-1} + 2(\overline{z})^{-1} = 1 + i$

98. Expresar en su forma polar los complejos $-\sqrt{3} + i$ y $3 - 4i$

99. Calcule $(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i})^{40}$

100. Dados los números complejos $z_1 = -2 - \frac{2}{\sqrt{3}}i$ y $z_2 = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$, determine:

    (a) z_1^{12}

    (b) Las raíces cuartas de z_2

101. Sea dada la ecuación: $iz^3 + 27 = 0$. Determinar sus soluciones y representarlas gráficamente en el plano complejo.

102. En $\mathbb{C}$, resuelva la ecuación $x^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

103. (a) Calcule todas las soluciones complejas de la ecuación

$$z^n = -1, \quad \text{para} \quad n \geq 2$$

(b) Pruebe que la suma de las soluciones obtenidas en la parte anterior es cero.

104. Calcule las raíces de la ecuación $z^2 = -i$ y exprésela de la forma $a + bi$

105. Si $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$, calcule los posibles valores de $z \in \mathbb{C}$ y muestre que $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha$

106. Dados los números complejos : $z_1 = e^{-\frac{\pi}{3}i}$ y $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Calcule las raíces cúbicas de: $\frac{z_1}{z_2}$

107. Demuestre que $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ es una raíz octava de 1.

108. Pruebe que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1-i)^n + (1+i)^n \in \mathbb{R}$$

109. Sea $z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. Verifique que $z^5 - 1 = 0$

110. Demostrar que $\overline{cis\alpha} = cis - \alpha$ y $cis(\alpha - \beta) = \frac{cis\alpha}{cis\beta}$

111. Demostrar que las raíces cúbicas de

$$z = 4(1 + \sqrt{3}i)$$

tienen suma nula.

112. Se tiene que $(S^1, \cdot)$ es un grupo, donde $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ y el producto habitual de números complejos.Demuestre que el producto en S^1 es una ley de composición interna.

Polinomios

113. Al dividir el polinomio$P(X)$ por $(X-1)$ el resto es a y al dividirlo por $(X-2)$ es b. Encuentre el resto que resulta al dividirlo por $(X-1)(X-2)$.

114. Determine los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $P(X) = 2k^2X^3 + 3kX^2 - 2$ sea divisible por $X-1$ y tenga slo raíces reales.

115. Estudie si el polinomio $P(x) = \frac{1}{2}X^4 - \frac{1}{2}X^3 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$, es reducible el $\mathbb{Q}[X]$

116. Encuentre todos los polinomios irreducibles de grado 2, en $\mathbb{R}[X]$

117. Sabiendo que el polnomio
$$P(X) = X^4 - 4X^3 + 10X^2 - 12X + 8$$
posee solamente raíces complejas y que una de ellas tiene módulo 2, encuentre todas las raíces del polinomio

118. Sea $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polinomio con coeficientes reales. Sea $r(X)$ el resto de la división de $P(X)$ por $X-1$. Si $r(4) = 0$ y $x = i$ es una raíz de $P(X)$, calcule a, b, c.

119. Estudie para que valores de a y b, el polinomio $P(X) = 3X^2 + bX - b^2 - a$ es divisible por $X+2$, pero al dividirlo por $X-1$ da resto 1.

120. Al dividir el polinomio $P(X) = aX^4 - 2X^3 + bX^2 - 18X + a$ por $(X-1)$ el resto es 3 y el cuociente es un polinomio que toma el valor 33 para $X = 2$. Encuentre el valor de a y b.

121. Factorice en $\mathbb{C}[X]$ y en $\mathbb{R}[X]$, el polinomio
$$P(X) = X^3 - 14X^2 + 124X - 200$$
sabiendo que una de sus raíces es $6-8i$

122. Sea $P(X) = X^4 + bX^3 - 13^2 - 14X + 24$.
    (a) Determinar $b \in \mathbb{R}$, de modo que -2 sea una raíz de $P(X)$
    (b) Determinar las raíces restantes.

123. Determinar las constantes realesA, B, C para que se cumpla:
$$\frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{2}{x-1} - \frac{9}{x-2} + \frac{8}{x-3}$$

124. Exprese como suma de fracciones parciales, la fracción racional siguiente:
$$\frac{5x^3 + 16x^2 + 13x + 9}{(x+2)^2(x^2 - x + 1)}$$

125. En los reales, descomponga en fracciones parciales, la fracción racional siguiente:

$$\frac{4x^3 + 10x^2 - x + 5}{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2}$$

Sistemas de Ecuaciones

126. Estudie los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

(a)
$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + x_4 & = & 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 & = & 4 \\ 3x_1 - 3x_3 - 2x_4 & = & 3 \end{array}\right\}$$

(b)
$$\left.\begin{array}{rcl} 2x + y + w & = & 2 \\ 3x + 3y + 3z + 5w & = & 3 \\ 3x - 3z - 2w & = & 3 \end{array}\right\}$$

(c)
$$\left.\begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & 1 \\ 4x + 2y + 3z & = & 1 \\ -2x - y + z & = & 2 \end{array}\right\}$$

(d)
$$\left.\begin{array}{rcr} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + 4x_6 & = & 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 & = & -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 5x_6 & = & 1 \end{array}\right\}$$

127. Estudie si existen, $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que la ecuación $x^3 = a + bx + cx^2$ se verifique para todo $x \in \mathbb{R}$.

128. Demuestre que no hay números reales a y b tales que $\sqrt{x} = a + bx$ se verifique para todo $x \in \mathbb{R}$.

129. En $\mathbb{C}$, estudie el sistema

1) $(1 + i)x + iy = 1$

2) $(1 - i)x + y + iz = i$

130. Estudie las siguientes familias de sistemas para los diferentes valores de k.

(a) 1) $x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1$
2) $2x_1 + kx_2 + 8x_3 = 8$

(b) 1) $kx_1 + x_2 + x_3 = 1$
2) $x_1 + kx_2 + x_3 = 1$
3) $x_1 + x_2 + kx_3 = 1$

Espacios Vectoriales

131. Verifique que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.

132. Demuestre que:

    (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$
    (b) $A = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3};\ a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
    (c) $B = \{a + b\Pi + c\Pi^2 + d\Pi^3;\ a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$

    son $\mathbb{Q}$-sub espacios vectoriales de $\mathbb{R}$

133. Demuestre que:

    (a) $\mathbb{Z}_3(\alpha) = \{a + b\alpha;\ a, b \in \mathbb{Z}_3,\ \alpha^2 = 2\}$
    (b) $C = \{a + be + ce^2;\ a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
    son $\mathbb{Z}_3$ -esp. vectoriales.

134. Si V y W son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, demuestre que $V \bigoplus W$ con las operaciones (v,w)+(v',w') = (v+v',w+w') y $\alpha \bullet (v, w) = (\alpha v, \alpha w)$ es también un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

135. Demuestre que son espacios vectoriales los sgtes. conjuntos:

    (a) $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones sgtes:
    $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$
    y $\alpha \odot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$
    (b) $D_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}\}$
    con las mismas operaciones anteriores.

136. Estudie si los sgtes. cjtos. con las operaciones suma y producto por escalar que se indican son $\mathbb{R}$ - esp. vect. y vea qué propiedades verifican:

    (a) $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$; con $(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$ y $\alpha \bullet (x, y) = (\alpha x, y)$
    (b) $V_2 = \mathbb{R}^3$ con las operaciones: $v \otimes w = v - w$, $\alpha \odot v = -\alpha v$
    (c) $V_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}; (x, y) \lhd (x_1, y_1) = (x + x_1, 0);\ \alpha \diamond (x, y) = (\alpha x, 0)$
    (d) $V_4 = \mathbb{R}^2$ con la suma habitual y $\alpha \star (x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y)$

137. Averigüe si los sgtes. subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son sub-espacios vectoriales reales (con las mismas operaciones que tiene $\mathbb{R}^3$)

    (a) $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\}$
    (b) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0, y = 3\}$
    (c) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 3\lambda, y = 2\lambda, z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$
    (d) $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 5y = 0\}$
    (e) $V_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; Ax + By + Cz = 0$ con A, B, C fijos en $\mathbb{R}\}$

138. Averigüe cuáles de los sgtes. sub-cjtos. son sub-espacios de $\mathbb{R}^4$:

    (a) $\{(x, y, x, y) \in \mathbb{R}^4\}$;
    (b) $\{(x, 2x, y, x + y) \in \mathbb{R}^4\}$;
    (c) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; 2y = 3t\}$;
    (d) $\{(x, y, x + y, 1) \in \mathbb{R}^4\}$;
    (e) $\{(x, \lambda_0, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ \lambda_0$ fijo en $\mathbb{R}\}$.

139. Ver si los sgtes. cjtos. con las operaciones habituales en el espacio de las funciones reales son $\mathbb{R}$-subespacios vectoriales de él:

    (a) $V_1 = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R};\ 2f(0) = f(1)\}$
    (b) $V_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ f(x) = f(1 - x)\}$
    (c) $V_3 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ f$ continua, $f \geq 0\}$
    (d) $V_4 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ f$ continua, $f(1) = f(0) + 1\}$
    (e) $V_5 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ f(-x) = f(x)\}$

140. Determinar cuales de los subconjuntos siguientes son subespacios de $\mathbb{R}^3$:

    (a) $\{(x, y, z); x + 2y - z = 0\}$
    (b) $\{(x, y, z); x + 2y - z = 1\}$
    (c) $\{(x, y, z);\ x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$
    (d) $\{(x, y, z);\ x \geq 0\}$
    (e) $\{(x, y, z);\ x^2 + y^2 + z^2 > 0\}$
    (f) ¿ Puede Ud. enunciar una regla general?

141. Sea S un sub-esp. de V. Demuestre que: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in S$, define una relación de equivalencia en V. Encuentre la clase de $\vec{0}$.

142. Sea $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Vea si son sub-esp. vect. de V:

(a) $\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}; a,b,c \in \mathbb{R}\}$

(b) $\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tales que $ad - bc = 0\}$

(c) $\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tales que $ad - bc = 1\}$

(d) $\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}; a,b,c \in \mathbb{R}\}$

143. Considere los vectores $u = (1,-3,2),\ v = (2,-1,1) \in \mathbb{R}^3$

   (a) Escriba como combinación lineal de u y v los vectores $w_1 = (0,-5,3)$, $w_2 = (5,-10,7)$

   (b) Diga para qué valores de k, l, m, el vector (k, l, m) es combinación lineal de los vectores w_1 y w_2

144. Escriba $u = 3t^2 + t - 7$ como combinación lineal de $v = 2t^2 + 3t - 4$ y $w = t^2 - 2t - 3$. Lo mismo para $u = 5t^2 + 4t - 11$.

145. Diga para que valores de α, el vector $(1,3,\alpha+3)$ es combinación lineal de los vectores $(1,1,0),(0,1,2),(4,9,10),(6,6,\alpha+3)$

146. Sea $V = \mathbb{R}^3$. Consideremos los sgtes. subcjtos. de $\mathbb{R}^3$:
$S = \{(1,0,1),(0,1,1)\},\ S' = \{(3,2,5),(0,2,2),(1,1,2)\}$. Demuestre que $< S > = < S' >$.

147. Encuentre 3 cjtos. de generadores de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ y $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de 4 elementos cada conjunto. Nótese *cuatro*.

148. Averigüe si son generadores del esp. vect. respectivo, los cjtos. de vectores sgtes.:

   (a) $\{(1,-2,-3),(3,2,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$;

   (b) $\{(1,1),(2,1),(1,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$;

   (c) $\{(1,1,2),(1,1,1),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$

149. Averigüe si el vector (1,2,3) está contenido en el sub-esp. generado por los vectores (2,2,2) , (3,1,2).

150. Averigüe si son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$:

   (a) $\{(1,0),(0,1),(0,0)\}$

   (b) $\{(2,1),(1,3)\}$

   (c) $\{(1,1,-1),(1,0,0),(-3,-3,3)\}$

(d) $\{(1,1,2),(1,1,1),(-1,1,1)\}$

151. Encuentre 3 cjtos l.i. de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ y $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

152. En $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R};$ continuas $\}$, demuestre que son l.i. los sgtes. cjtos de vectores.:

    (a) $\{f_1, f_2, f_3 \in C[0,1];\ f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2\}$
    (b) $\{sen(\ ), cos(\ )\}$
    (c) $\{sen(\ ), sen2(\ )\}$
    (d) $\{e^{(\ )}, e^{2(\ )}\}$

153. En $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$, estudie la dependencia lineal de los vectores $u = (2 + 3i, 5 + 2i)$ y $v = (-4 + 7i, 1 + 12i)$.

154. Idem ejercicio anterior pero en $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$.

155. Sea V un K-espacio vectorial. Sea $\{u, v, w\}$ una base de V. Estudie la dependencia lineal del conjunto $\{u + v + w, u - 2v + w, u + v - w\}$.

156. Sean V un k-espacio vectorial, $\{s, u, v, w\}$ una familia l.i. de V. Sea α un escalar cualquiera y consideremos la familia de vectores $\{x, y, z, t\}$ definida por $x = s - u, y = u - v, z = v - w, t = \alpha w - s$.

    (a) Estudie para que valores de α la familia $\{x, y, z, t\}$ es l.i.
    (b) Demuestre que si la familia $\{x, y, z, t\}$ es l.i., entonces engendra el mismo subespacio que la familia $\{s, u, v, w\}$

157. Encuentre 3 bases diferentes de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ y $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

158. Sea V un K-espacio vectorial. Sea $\{u, v, w\}$ un conjunto linealmente independiente. Estudie la dependencia lineal del conjunto:

$$\{u, 2u+v, u+2v+(\alpha-5)w+(\alpha-5)t, -u+v+(\alpha+1)(\alpha-5)w+(2\alpha-10)t\}$$

159. Encuentre una base sobre $\mathbb{Q}$ de:

    (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$
    (b) $A = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3};\ a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
    (c) $B = \{a + b\Pi + c\Pi^2 + d\Pi^3;\ a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$

160. Encuentre una base sobre $\mathbb{Z}_3$ de:

    (a) $\mathbb{Z}_3(\alpha) = \{a + b\alpha;\ a, b \in \mathbb{Z}_3,\ \alpha^2 = 2\}$
    (b) $C = \{a + be + ce^2;\ a, b, c \in \mathbb{Z}_3\}$

161. Encuentre una base del sub-esp. generado por los vectores:

   (a) $\{(1,2),(1,3),(1,1),(2,3)\}$
   (b) $\{(1,1,2),(1,-1,1),(3,-1,4)\}$

162. Demuestre que :

   (a) $\{1,i\}$ es una base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.
   (b) $\{a+bi, c+di\}$ es una base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ ssi $ad-bc \neq 0$

163. Sean U y $W \leq \mathbb{R}_2[X]$ tal que $U =< 2+X, 1-X^2 >$,
   $W = \{a+bX+cX^2;\ a+b=0,\ 3b-2c=0\}$. Determine una base de W, $U\cap W$ y $U+W$.

164. Estudie la posible igualdad de los siguientes sub-espacios de $\mathbb{R}^4$:
   $S = \{(2x, x, 4x+2y, -2x-4y); x, y \in \mathbb{R}\}$ y
   $S' =< (1,0,2,3),(1,2,1,-1),(-1,-6,1,3) >$

165. Encuentre dos bases diferentes de los siguientes sub-espacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$, encuentre, si existe, un espacio suplementario en cada caso.
   $W = \{(x,y,z); x+3y-z=0\}$
   $T = \{(3y+3z+9u, x+4y+2z+5u, x+5y+3z+8u);\ x,y,z,u \in \mathbb{R}\}$

166. Sea V un K-espacio vectorial. Sea $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ una base de V. Estudie si $\{u_1+u_2, u_2, u_3+u_2, ..., u_n+u_2\}$ es una base de V.

167. En $\mathbb{R}^3$, encuentre un espacio suplementario de
   $S = \{(x+2y, x+y, 3x+y); x, y \in \mathbb{R}\}$

168. En $\mathbb{R}^4$, considere los sgtes. sub-espacios :
   $S_1 =< (2,2,-1,2),(1,1,1,-2),(0,0,2,-4) >$ y
   $S_2 =< (2,-1,1,1),(-2,1,3,3),(3,-6,0,0) >$.
   Encuentre $S_1 \cap S_2$ y las dimensiones de S_1, S_2 y $S_1 \cap S_2$.

169. Sea $V' \leq V$. Demuestre que:

   (a) $\dim V' \leq \dim V$.
   (b) Si $\dim V' = \dim V$ entonces $V' = V$.

170. Demuestre que $\omega = 1+i, \overline{\omega} = 1-i$, generan $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

171. Demuestre que $u_1 = 1, u_2 = 1-t, u_3 = (1-t)^2, u_4 = (1-t)^3$ generan el espacio de los polinomios de grado ≤ 3

172. Demuestre que la intersección de dos sub-esp. de V, es un sub-espacio vectorial de V.

173. Muestre en un ejemplo que se puede tener $S \bigoplus T = S \bigoplus W$, y $T \neq W$.

174. Sean U y V dos sub-esp. dados por: $U =< (1,2,0,1), (0,1,1,0) >$,
$V =< (1,1,2,1), (2,5,1,2) >$

   (a) Encuentre una base de $U + V$.
   (b) Encuentre si existe, un sub-espacio suplementario de $U + V$ en $\mathbb{R}^4$.

Aplicaciones Lineales

175. Determine cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (2x - y, x + y, -x + 3y)$
   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x + 2y - 1, 3y + z)$
   (c) $g : M_{2\times1}(\mathbb{R}) \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ definida por
   $g(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ x & x-y \end{pmatrix}$
   (d) $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ definida por

$$D(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1}$$

176. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es lineal y

$$f(1,1,1) = (1,1); f(1,1,0) = (1,1); f(1,0,0) = (1,0)$$

Calcule $f(2,3,1)$, $f(1,0,1)$ y $f(x,y,z)$

177. Determine si existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

   (a) $f(2,1) = (1,0), f(0,1) = (0,1)$ y $f(1,1) = (3,2)$
   (b) $f(2,1) = (1,0), f(0,1) = (0,1)$ y $f(1,1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

178. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; f(x,y,z) = (x + 2y + z, x - y - z)$.

   (a) Encuentre la base escalonada y la dimensión de $N(f)$ y de $Im(f)$.
   (b) Estudie la inyectividad y epiyectividad de f.
   (c) Obtenga una base de $\mathbb{R}^3$, completando la base obtenida para $N(f)$
   (d) Obtenga una base de $\mathbb{R}^2$, completando la base obtenida para $Im(f)$.

179. Sea F el operador lineal definido por $F : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$; $F(X) = BX$ donde $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$. Mismas preguntas que en el ejercicio anterior.

180. Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, definida por:

$f(x, y, z, u, v) =$

$= (x+y+z+u, 2x+2y+z+v, x+y+z+u, 2x-y+z+v, y-z-2u+v)$

Mismas preguntas que en el ejercicio anterior.

181. Sea $f : \mathbb{R}_2[t] \to M_2(\mathbb{R})$ lineal, tal que:

$f(1+t^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f(2t^2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f(1+t+t^2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Encuentre $f(x + yt + zt^2)$.

(b) Encuentre la base escalonada del núcleo de f y de la imagen de f.

182. Sea $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; una transformación lineal tal que:

$$f_\alpha(x, y, z) = (x + z, y + 2z, (\alpha - 3)z)$$

Estudie le inyectividad y epiyectividad de f_α de acuerdo a los distintos valores de α.

183. Observando las imagenes de los elementos de la base, estudie si la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(1, 0, 0) = (1, 1, 0)$; $f(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ y $f(0, 0, 1) = (2, 2, -1)$ es un:

(a) Monomorfismo

(b) Epimorfismo

(c) Automorfismo

184. Misma pregunta que en ejercicio anterior para $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(1, 0, 0) = (1, -1, 1)$; $f(0, 1, 0) = (1, 2, -1)$ y $f(0, 0, 1) = (-1, 1, 3)$.

185. Misma pregunta que en ejercicio anterior para la aplicación lineal

$f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definida por $f(1) = x - x^2$; $f(x) = 1 + x + x^2$;

$f(x^2) = 2 - x + 5x^2$.

186. Sea $f_\alpha : K^3 \longrightarrow K^3$, definida por

$$f_\alpha(x, y, z) = (x + z, (\alpha + 5)y, (\alpha + 5)y + (\alpha^2 - 25)z)$$

(a) Encuentre la base escalonada del núcleo e imagen de de f_α.

(b) Estudie la inyectividad y epiyectividad de f_α.

según los diferentes valores de α

187. Sea $f_\alpha : K^3 \longrightarrow K^3$, definida por
$f_\alpha(x,y,z) = (x+\alpha z, x+y+(\alpha+2)z, (\alpha)-3)z)$
Según los diferentes valores del escalar α

(a) Encuentre la base escalonada deImf_α y $N(f_\alpha)$
(b) Estudie en cada caso si es inyectiva o epiyectiva

Matrices

188. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Encuentre la matriz asociada a f según las bases $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $C = \{(1,0),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, en los siguientes casos:

(a) $f(x,y,z) = (x+2y, x)$
(b) $f(x,y,z) = (3z, x-y)$

189. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Encuentre la matriz asociada a f según las bases $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y la base canónica de $\mathbb{R}^2$, donde:

(a) $f(x,y) = (2x, x+y, x-2y)$
(b) $f(x,y) = (x+y, x-y, 2y)$

190. Sea $F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ def. por $F(P(x)) = (1-x)P'(x)$. Determinar la matriz de F con respecto a la base canónica.

191. Determinar el endomorfismo f de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz con respecto a la base $B = \{(2,1),(1,2)\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

192. Determinar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz con respecto a las bases $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ y $C = \{(1,1,1),(1,0,0),(1,1,0)\}$ es
$(f;B,C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

193. Sea F un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz con respecto, a la base $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ es $(F;B) = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determinar la matriz de F con respecto a la base canónica.

194. Considere $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Determine la matriz de $f \in End(\mathbb{C})$ dada por $f(z) = \overline{z}$ con respecto a la base $\{1, i\}$ y la base $\{1+i, 1+2i\}$.

195. Sea $F : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}$ la transformación lineal definida por $F(P(t)) = \int_0^1 P(t)dt$. Determinar la matriz de F con respecto a las bases $B = \{1, t, t^2, t^3\}$ y $C = \{1\}$ de $\mathbb{R}_3[t]$ y $\mathbb{R}$ respectivamente.

196. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $f(x, y) = (2x, x - y)$; $g(x, y) = (x, 2y - x)$. Encuentre la matriz de f, g, $f + g$, fog, $3f$ y f^2 con respecto a la base canónica.

197. Sean $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, sabiendo que $F(x, y) = (3x, x+y, y)$ y que la matriz de $F + G$ con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ es $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, determine $G(x, y)$ y la matriz de G con respecto a esas bases.

198. Sea A una matriz cuadrada de orden 3.
   (a) Si A es simétrica, encuentre $A - A^t$
   (b) Si A es triangular superior, encuentre A^t y A^2
   (c) Si A es diagonal, encuentre A^t

199. Una matriz se dice idempotente si y sólo si $A^2 = A$.
   (a) Pruebe que $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ es idempotente.
   (b) Demuestre que si A es idempotente, entonces $B = I_n - A$ es idempotente y $AB = BA$.

200. Determinar A^t, B^t, $(A + B)^t$, $A^t + B^t$, $B + B^t$, $A + A^t$, $A - A^t$, $A \cdot A^t$, $B \cdot B^t$; para las matrices A y B siguinetes:
   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$
   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

201. Sea V un K-espacio vectorial y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. Se considera $f : V \to V$ un endomorfismo definido por

$$f(v_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1 \\ v_1 + v_2 + \cdots + v_{k-1} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

   (a) Encuentre $(f; B, B)$.
   (b) Estudie si f es inyectiva o epiyectiva

(c) Para $n = 2, 3, 4$ encuentre $(f; B, B)$. En cada unos de stos tres casos encuentre $m \in \mathbb{N}$ tal que $(f; B, B)^m = 0$. Deduzca el caso general (n cualquiera).

202. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, una transformación lineal tal que:

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, x + z, z)$$

(a) Encuentre f^{-1}.

(b) Si $B = \{(-1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 1)\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^3$, encuentre $(f; B)$ y $(f^{-1}; B)$.

203. Encuentre, si existe, la inversa de los siguientes endomorfismos:

(a) $f(x, y) = 2(x, -y)$;

(b) $f : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$; $f(X) = AX$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$;

(c) $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$; $f(p(x)) = p(x) - p(0)$

204. Calcule la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

205. Demuestre que una matriz triangular superior con elementos distintos de cero en la diagonal principal, tiene por inversa una matriz triangular superior.

206. Sea $A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$. Encuentre A^{-1}.

207. Si A es invertible, demuestre que $(A^{-1})^{-1} = A$.

208. Si $AB = 0$, $B \neq 0$. ¿Es A invertible?

209. Si $A^2 = 0$. Estudie si A es invertible.

210. Determinar $a \in \mathbb{R}$, de manera que la matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ sea invertible.

211. Encuentre los valores de α en K, para los cuales la matriz:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - 2 & \alpha^2 - 4 \\ 1 & 2\alpha - 4 & 2\alpha^2 - 8 \\ 0 & \alpha - 2 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

es invertible y en los casos que sea invertible, encuentre su inversa.

212. Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Encuentre B^n

   (b) Demuestre por inducción que su resultado es el correcto.

213. Si A es una matriz invertible, demuestre que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$, donde A^t es la transpuesta de A, y $A \in M_{3\times 3}(K)$.

214. Una matriz A se dice ortogonal si A es invertible y $A^{-1} = A^t$.

   (a) Determine si es posible $x, y \in \mathbb{R}$, de manera que la matriz $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ sea ortogonal.

   (b) Demuestre que el producto de dos matrices ortogonales es ortogonal.

215. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,0) = (0,1)$, $f(0,1) = (1,-1)$. Encuentre $f(x,y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que f es un isomorfismo y encuentre su inverso.

216. Determine cuáles de las siguientes matrices son invertibles, y en caso que lo sean, encuentre sus inversas:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   (f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; (h) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

217. Si la matriz de un endomorfismo con respecto a la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determine la matriz de este endomorfismo con respecto a la base $B = \{(1,1), (1,-1)\}$.

218. Determine los valores de α para los cuales las siguientes matrices son invertibles y en caso que lo sean encuentre su inversa:

   (a) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$;

   (e) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$; (g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

219. Calcule la inversa de cada una de las siguientes matrices, cuando ella exista:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} cos\theta & 0 & -sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sen\theta & 0 & cos\theta \end{pmatrix}$

Determinantes

220. Calcule el determinante de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

221. Pruebe la siguiente identidad:

$$det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

222. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Constate que $det(AB) = det(A)det(B)$

223. Si ω es una raíz cúbica imaginaria de la unidad, hallar el valor de:

$$det \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{pmatrix}, \quad det \begin{pmatrix} 1 & \omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{pmatrix}$$

224. Calcule el determinante de cada una de las siguientes matrices :

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

225. Si A y B son matrices invertibles de $n \times n$. Estudie si AB y A+B son invertibles.

226. Estudie para qué valores de x la matriz $\begin{pmatrix} x-3 & 4 \\ 2 & x-1 \end{pmatrix}$ no es invertible

227. Se define la traza de una matriz de $n \times n$ como la suma de los elementos de la diagonal. Sea A una matriz de 2×2. Pruebe que:

$det(I_2 + A) = 1 + detA$ si y sólo si Tr(A) = 0 (donde Tr(A)=Traza de A).

228. Sea A una matriz de 3×3. Pruebe que si $det(xI_3 - A) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, entonces $a = 1$, $b = Tr(A)$ y $d = -detA$

Diagonalización

229. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (-3x + z, -2x + y, -x + 2y + 4z)$

(a) Calcule la matriz asociada a T según la base canónica.

(b) Encuentre bases C y D de $\mathbb{R}^3$ tal que $(T; C, D)$ esté en su forma normal.

(c) Estudie si existe una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $(T; B)$ sea diagonal.

230. Analice la diagonalización de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (i) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ (j) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(k) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (l) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (m) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(n) $\begin{pmatrix} cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

231. Sea v un vector propio de T asociado al valor propio λ, probar que $\forall n \in \mathbb{N}$ v también es un vector propio de T^n correspondiente al valor propio λ^n.

232. Ilustre el ejercicio anterior haciendo $n = 2$ y la matriz asociada a T igual a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

233. Si λ es un valor propio de T y $F(x)$ es un polinomio, pruebe que $F(\lambda)$ es un valor propio de $F(T)$.

234. Una matriz cuadrada $A \neq 0$ se dice que es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}, k \neq 0$ tal que $A^k = 0$. Probar que si A es nilpotente entonces 0 es el único valor propio de A. Concluya que A no es diagonalizable.

235. Para cada una de las siguientes matrices, encuentre, si existe, una matriz invertible P, tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

236. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (2x + 3y, -y + 4z, 3z)$. Encuentre el polinomio característico y los valores y vectores propios de f.

237. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Encuentre:

(a) Valores propios asociados a A.
(b) Subespacios propios de A.
(c) Una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.

238. Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \to V$ lineal, distinta de la identidad. Muestre que:

(a) Si $f^2 = f$, entonces f es diagonalizable.
(b) Si $f^3 = Id$, entonces f no es diagonalizable.

Formas Bilineales

239. Estudie cuales de las siguientes funciones son bilineales:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f((x, y, z), (a, b, c)) = x + a + y + b + z + c$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f((x, y), (a, b)) = 3ax + by$

(c) $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tal que $f((x, y, z, t), (a, b, c, d)) = ax + 2by - 3cz + kdt$, donde k es un real fijo.

(d) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f((x, y), (a, b)) = ay - 1$

Para aquellas que son bilineales, encuentre la matriz con respecto a:

i. La base canónica. ii. Las bases

$B = \{(0, 1), (1, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$, $C = \{(1, 0, 2), (-1, 2, 0), (0, 1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y

$D = \{(1, 1, 1, 2), (1, 2, -1, -1), (0, 0, 2, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

240. Diga cuales de las formas bilineales del ejercicio anterior son producto escalar.

241. Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f((x,y),(a,b)) = xa + ya + xb + 2yb$

(a) Demuestre que f es un producto escalar.

(b) Defina norma para este producto escalar y calcule la longitud del vector $(0,1)$

(c) Defina el ángulo entre dos vectores y calcule el ángulo entre los vectores $(0,1)$ y $(1,0)$

242. Sea $k \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f((a,b),(x,y)) = ax - 3ay - 3bx + kby$$

Diga para qué valores de k, f es un producto escalar en $\mathbb{R}^2$

243. Si $f : V \times V \to \mathbb{R}$ es un producto interno, verifique que

$$f(u,v) = \frac{1}{4}(\| u+v \|^2 - \| u-v \|^2)$$

244. Sea $g : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $g(A,B) = tr(B^t A)$

(a) Demuestre que g es un producto interno.

(b) Para $n = 2$ y para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, calcule $\| A \|$, $d(A,B)$, el ángulo entre A y B

245. Encuentre bases ortonormales para los siguientes subespacios sobre $\mathbb{R}$:

(a) $< (i,i,-i),(i,0,i) >$ (b) $< (2,1,1),(1,3,-1) >$

(c) $< (1,2,1,0),(1,2,3,1) >$ (d) $< (1,1,0,0),(1,-1,1,1),(-1,0,2,1) >$

246. Sea $v = (1,2,-1)$, $w = (0,2,0)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Encuentre el conjunto S de todos los vectores ortogonales a v y w simultáneamente. Demuestre que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

247. Encuentre una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenga el vector $(1,-1,0)$. Lo mismo para $\mathbb{R}^4$, con el vector $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$

248. Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal tal que

$$f((a,b,c),(x,y,z)) = ax - 2bx + 3cx - 2ay + by + cy + 3az + 4cz.$$

(a) Encuentre la matriz de f, respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$

(b) Diga si f es un producto interno en $\mathbb{R}^3$. Justifique.

(c) Si la respuesta en (b) es afirmativa, ortonormalice $\{(1,1,0),(1,2,3)\}$ con respecto al producto interno f.

(d) Si la respuesta en (b) es negativa, ortonormalice el conjunto dado con respecto al producto usual.

249. Encuentre una base ortonormal de $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; y = 3x\}$ con respecto al producto usual y extiéndala hasta una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

250. Sea V el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a n. Demuestre que:

$$< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

es un producto escalar y encuentre su matriz con respecto a la base $\{1, t, t^2, ..., t^n\}$.

251. Sea $V = \mathbb{R}^3[t]$, dotado del producto escalar definido en el ejercicio anterior. Ortonormalice la base $\{1, t, t^2, t^3\}$.

252. Sea V el espacio vectorial real con base $\{sen(t), cos(t)\}$. Se define el producto escalar:

$$< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)d(t)$$

(a) Encuentre la matriz de este producto escalar con respecto a la base dada.

(b) Encuentre un vector ortogonal al vector $2sen(t) - 3cos(t)$.

253. Sea V un espacio euclidiano y sean u y v vectores de V. Demuestre que : $u = v$ si y sólo si $< u, w >=< v, w > \forall w \in V$

254. Considerar $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ formado por todos los vectores ortogonales a $(1, 0, -1, 1)$ y $(2, 3, -1, 2)$. Encuentre una base de W.

255. Si $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, encuentre la forma bilineal asociada a cada una de las formas cuadráticas:

$$f(v) = xy; \qquad g(v) = xz + y^2; \qquad h(v) = 2xy - zx$$

256. Dada la función cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$;

$$q(x, y, z) = 10xy + 4xz - 10x^2 + 6yz + 6z^3$$

(a) Encuentre la matriz de q con respecto a la base canónica.

(b) Si $v = (x, y, z)$, $w = (a, b, c)$ y f es la función bilineal asociada a q, calcule $f(v, w)$.