Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Taller N°2
Álgebra (IME006)

Profesores: M. T. Alcalde, R. Benavides, C. Burgueño,
M. Carrillo, F. Salazar, A. Sepúlveda.

29 de Abril 2008.

1. Demuestre por inducción que $2^{2n+1}+1$ es divisible por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Solución.

Primer paso. Verificamos que la aseveración se válida para $n=1$. En efecto, si $n=1$ tenemos $2^{2\cdot 1+1}+1=9$ que es divisible por 3.
Segundo paso. Suponemos válida la afirmación para n, es decir, tenemos la hipótesis de inducción

$$2^{2n+1}+1=3a,$$

para cierto $a \in \mathbb{Z}$.
Tercer paso. Demostramos que la aseveración se cumple para $n+1$, es decir, $2^{2(n+1)+1}+1=2^{2n+3}+1=3b$, para algún $b \in \mathbb{Z}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
2^{2n+3}+1 &= 2^2\cdot 2^{2n+1}+1\\
&= 4\cdot 2^{2n+1}+1\\
&= (3+1)\cdot 2^{2n+1}+1\\
&= 3\cdot 2^{2n+1}+2^{2n+1}+1,\\
&= 3\cdot 2^{2n+1}+3a,\\
&= 3\left(2^{2n+1}+a\right),\\
&= 3b.
\end{aligned}$$

En el paso de la cuarta a la quinta línea hemos utilizado la hipótesis de inducción y en la última hemos llamado $b=2^{2n+1}+a \in \mathbb{Z}$. De acuerdo a los tres pasos descritos, concluimos que la afirmación es verdadera para tono $n \in \mathbb{N}$.

2. Encuentre el término independiente de x y déjelo expresado como producto de números primos, en el desarrollo del binomio:

$$\left(2x^2-\frac{3}{4x^3}\right)^{20}.$$

$\boxed{\textbf{Solución.}}$

El término general del binomio es

$$\binom{20}{k}\left(2x^2\right)^{20-k}\left(-3\cdot 2^{-2}\cdot x^{-3}\right)^k .$$

Para que éste sea independiente de x, se debe cumplir que el exponente de x sea cero, es decir,

$$\left(x^2\right)^{20-k}\cdot x^{-3k}=x^0,$$

de donde, se obtenemos $k=8$. Con esto, el término pedido es

$$\binom{20}{8}\cdot 2^{20-8}\cdot\left(-3\cdot 2^{-2}\right)^8=\frac{20!}{8!\cdot 12!}\cdot 2^{-4}\cdot 3^8,$$

que una vez simplificado y expresado como producto de números primos queda como

$$2^{-3}\cdot 3^9\cdot 5\cdot 13\cdot 17\cdot 19.$$