Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática y C.C.

Recepción alumnos(as) Ingenierías 2009

Estimados alumnos y alumnas, cachorros todos, la Facultad de Ingeniería y la Facultad de Ciencias se han unido para poder brindar un apoyo eficaz, respecto a lo que es necesario saber y dominar para tener éxito en los futuros estudios.
Estamos plenamente conscientes que llevan a lo menos 12 años de estudios formales, que han trabajado ciertos tópicos que son imprescindibles para cualquier inicio en la educación superior. Precisamente a esos primeros temas nos dedicaremos en estas seis horas pedagógicas, tratando de cubrir el mayor número de aplicaciones.
Especificamente se trata de la materia de primer año medio, aquella que ha resultado la más árida de toda la enseñanza media, nos referimos al álgebra clásica y en especial a los productos y factorizaciones.
Todo lo anterior se funda en los axiomas del cuerpo conmutativo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Todos ellos se vienen trabajando desde los primeros años de la Enseñanza Básica, con el fin de llegar al término de la Enseñanza Media e inicio de la Enseñanza Superior con cierto grado de dominio, en el lenguaje actual, con una Competencia.

Veamos previamente algo del lenguaje y operatoria elemental.

El ideal es responder verbalmente, sin necesidad de usar lápiz ni papel

(1) Si a la fecha de nacimiento de una persona se le agrega su edad, ¿qué se obtiene?

(2) Si al precio de venta de un artículo se le sustrae la ganancia, ¿qué nos resulta?

(3) Si a una suma ya realizada se le adiciona la suma de las mismas cantidades, ¿qué obtendremos?

(4) ¿Qué número resulta si adicionamos el sustraendo con la diferencia?

(5) Si al minuendo le quitamos la diferencia, ¿qué nos queda?
(6) ¿Qué se obtiene al sumar el minuendo, el sustraendo y la diferencia?

(7) ¿Qué nos queda si de la suma de dos números restamos la diferencia?

(8) La suma de dos números es 48 y su diferencia, 24. ¿Cuál es el número menor?

(9) La suma de dos números es 196 y el duplo de su diferencia, 140, ¿cuáles son dichos números?

(10) ¿Qué resulta si se resta la suma de dos números del doble del mayor?

(11) La suma de dos números es 300 y el duplo del mayor, 480. ¿Cuáles son esos números?

(12) Si de la suma de dos números se resta el duplo del número menor, ¿qué resultado obtendremos?

(13) La suma de dos números es 105 y el duplo del menor, 40. ¿Cuál es la diferencia entre ellos?

(14) Diga cuando un producto es:
a) igual al multiplicando
b) mayor que el multiplicando
c) menor que el multiplicando

(15) ¿Qué ocurre en un producto cuando se duplica, o triplica uno de sus factores?

(16) ¿Que ocurre en un producto de dos factores cuando cada uno de ellos se duplica?
y si son tres factores y cada uno se triplica, ¿qué ocurre con el producto?

(17) La suma de cuatro números es 12. ¿Qué resultado obtendremos si cada sumando se multiplica por 5?

(18) La diferencia de dos números es 12. ¿Cuál será la diferencia si cada término se multiplica por 4?

(19) Escriba de modo equivalente, a lo menos de dos formas distinas:
9×15
48×21

(20) Si a ambos factores de un producto se les agrega un mismo número, por ejemplo 3. ¿Qué cambio sufre el producto?

(21) Sin multiplicar directamente, de el resultado de:
$999.999.999.998 \times 1.000.000.000.002$
2495×2495

(22) ¿Cómo se determina el divisor en una división exacta al conocer el dividendo y el cociente?

(23) Conocidos el dividendo, el divisor y el cociente de una división, ¿cómo se obtiene el resto?

(24) Dígase que alteración sufre el cociente de una división exacta si:
a) se aumenta el dividendo
b) se duplica el dividendo
c) se triplica el dividendo
d) al dividendo se le suma el divisor
e) al dividendo se le suma el triple del divisor
f) se duplica el divisor
g) el divisor se reduce a la mitad

(25) ¿Qué cambio experimenta el cociente de una división si:
a) se suman el dividendo con el divisor y se divide por el mismo divisor?
b) al dividendo se le resta el divisor y se divide por el mismo divisor?

(26) Conocidas la suma y el cociente de dos números, ¿cómo se obtiene el número menor?

(27) Conocidas la diferencia de dos números y su cociente, ¿cómo se halla el número menor?

(28) ¿Qué residuos o restos diferentes se pueden obtener al dividir un número por 9?

(29) Se considera la quinta parte del dividendo y el quíntuplo del divisor. ¿Qué alteración sufre el cociente?

(30) ¿En qué caso, agregando una cantidad al dividendo, no se altera el cociente, aunque si el resto?

(31) En una división inexacta, ¿cuál es la menor cantidad que se puede restar al dividendo para que el cociente resulte exacto?

(32) ¿Cómo multiplicar una suma indicada por un número?

(33) Cuando se multiplica por 9 uno de los sumandos de una adición, ¿qué cambio experimenta la suma?

(34) La suma de dos números es 1.058,25 y su diferencia, 403,75. ¿Cuáles son esos números?

(35) Dos amigos han de repartirse 58 vales de modo que uno de ellos tenga 6 vales más que el otro. ¿Cuántos corresponden a cada uno?

(36) Lo que costó $7.480, se vendió posteriormente en $8.145. ¿Cuánto se ganó?

(37) Rafael Victoriano Nació en 1.876, nació de nuevo el año 1.916 (conoció al Señor) y vivió 98 años. ¿Cuántos años caminó?, ¿ qué año fue llamado a la presencia del Señor?

(38) Un padre tenía 25 años cuando nació su hijo. ¿Cuál será la edad de éste cuando el padre cumpla 59 años de edad?

(39) La suma de dos números es 5.312 y el duplo de su diferencia 1.914, entonces los números son:

(40) La diferencia entre dos sumas de dinero es $875. Si la mayor es $3.419. ¿Cuál es la suma menor?

(41) La diferencia de dos números es 3.569, y el duplo del menor es 14.628, ¿cuál es el número mayor?

(42) La suma de dos números es 5.890, y el duplo del número menor es 4.600. ¿Cuál es la diferencia entre ambos números?

(43) Dos jinetes corren en sus respectivos caballos uno a 15 kilómetros por hora y el otro a 17 kilómetros por hora, hace ya 12 horas que estan corriendo (relevan caballos cada 3 horas). Si salieron desde un mismo punto a la misma hora, ¿qué distancia los separa si:
van en la misma dirección ?
b) van en direcciones opuestas?

(44) El producto de dos números es 720; si se agregan 6 unidades al multiplicando, el producto será entonces 816. ¿Cuáles son los factores de ese producto?

(45) Al multiplicar un número por 34 el valor primitivo se ha acrecentado en 4.059 unidades, ¿cuál es el número?

(46) Un estudiante debe multiplicar un número por 50, se olvidó de anotar el cero a la derecha del resultado, llegando a presentar un número que se diferencia en 116.010 unidades del correcto. ¿Cuál es ese número?

(47) En un libro de contabilidad se descubre la siguiente situación
$\clubsuit\clubsuit\clubsuit \times 9 = \clubsuit 167$. Restablecer la operación

(48) El cociente de una división es 413; el divisor 437 y el resto 243, ¿cuál es el dividendo?

(49) Un tornillo micrométrico debe dar 25 vueltas para entrar 3 décimas de milímetro. ¿Cuántas vueltas tendrá que dar para entrar $4\frac{1}{2}$ milímetros?

(50) ¿Cuántos días necesitará un pintor para pintar 840 ventanas, si trabaja 8 horas diarias y pinta tres ventanas cada 2horas?

(51) La suma de dos números es 75 y su cociente exacto, 4. ¿Cuáles son esos números?

(52) La diferencia de dos números es 75 y su cociente exacto, 4. ¿Cuáles son son esos números?

(53) Al dividir un número por otro se ha hallado 27 por cociente y 12 por resto; si se agregan 31 unidades al dividendo, entonces el cociente exacto es 28. ¿Cuáles son el dividendo y el divisor?

$\mathbb{R}$: el Conjunto de los Números Reales

En la antigua Grecia, existió una secta científico-filosófica llamada **Los Pitagóricos**, dentro de sus creencias estaba aquella que aseveraba que su dios había creado y contruíodo todo con números y que en ellos había perfección, todo funcionaba según ellos creián, sin embargo al avanzar en sus estudios descubrieron que no todo obedecía a sus reglas, constataron que no existía una unidad de cuenta común entre los lados de un cuadrado y su diagonal (aquí aparece ya el problema de medir), cabe notar que este debió ser un problema teórico puro, pues en la práctica no hay como darse cuenta de esto (observen que en la Biblia, para π consideran que su valor es 3, y para Pitágoras es $\frac{22}{7}$), nunca un artesano ha medido $\sqrt{2}$ centímetros para confeccionar un triángulo rectángulo isósceles de cateto 1 centímetro en madera u otro elemento, el excedente lo rebaja con una lima o una lija y queda perfecto. Aquí tenemos una primera moraleja: **La matemática no avanza por mediciones concretas, sino que por uso de la Razón y la capacidad de Abstracción, propias del ser humano**.

Una observación importante para ustedes, con la nueva era ha renacido esta herética secta y esta actualmente influyendo en las débiles mentes de los hombres, con sistema de predicción llamado numerología, los horóscopos lo usan frecuentemente, al igual que los tarotistas. No se les debe creer, son un fracaso. Ya en esos tiempos fueron desenmascarados, los que insistieron se hicieron tan odiosos que en una de sus reuniones, el pueblo los acorraló e incendió el lugar en que se encontraban, se dice que todos los asistentes perecieron

Vamos a lo que nos compete.

si nos dan dos segmentos y nos preguntan por su unidad común de medida, lo que se hace es sobre poner el menor sobre el mayor, tantas veces como sea posible, si no genera resto, entonces la unidad común es el segmento menor. En cambio, si genera un resto, entonces el resto se sobrepone sobre el segmento menor tantas veces como sea posible, si no genera resto, entonces la medida común es ese resto, si generase un nuevo resto, se repite la operación sobreponiendo el nuevo resto sobre el primer resto, esto se repite hasta que no exista resto. Este es el algoritmo de Euclides.

Consideremos esto con una notación más matemática:

Sean a y b las medidas de ambos segmentos, digamos que $a > b$, entonces procedemos así

$a \div b = c$

r ¿es $r = 0$? si, entonces $a = b \cdot c$

no, entonces $b \div r = c_1$

r_1 ¿Es $r_1 = 0$? si, entonces $a = c \cdot r \cdot c_1$

no, entonces $r \div r_1 = c_2$

etc...

Sería muy interesante que pudiesen construir un algoritmo computacional que lo ejecute, en un computador o en una calculadora científica.

Pitágoras se dió cuenta con la diagonal de un cuadrado y su lado, usando regla y compás, su trabajo no puede haber sido sólo práctico, sino que teórico en toda su extensión, de no haberlo sido, habría concluído que sería así: *el lado del cuadrado está contenido 1,14 veces en la diagonal*, de haber tenido los números decimales que hoy tenemos.

Por fortuna hoy contamos con bastantes más recursos que esos brillantes genios de la antigüedad, algunos de ellos los veremos ahora en primero medio, otros se verán más adelante, incluso algunos sólo en la universidad.

No sólo descubrieron este número, sino que también otros como π y el número de oro o número aúrico, este último talvez no de modo consciente, pero con él construyeron la estrella de cinco puntas.

Y ahora manos a la obra:

$\sqrt{2} = x$, en expresión decimal ¿qué es x?
x es un número positivo tal que al elevarlo al cuadrado da por resultado 2.

Pero este número x no es entero, ya que:

$$1 = 1^2 < 2 < 2^2 = 4$$

y

$$1,96 = 1,4^2 < 2 < 1,5^2 = 2,25$$

, pero una mejor aproximación se tiene con

$$1,9881 = 1,41^2 < 2 < 1,42^2 = 2,0164$$

y mejor aún si consideramos

$$1,999396 < 1,414^2 < 2 < 1,415^2 = 2,002225$$

Este método se denomina exaustación o agotamiento y se dice que se debe a Eudoxio de Cnido, fue usado por Arquímides y por los fundadores del cálculo infinitesimal.

La busqueda de los números adecuados se puede hacer en orden, por un método llamado bipartición, el cual tiene también el siguiente algoritmo, lo mostraremos sólo para las raíces cuadradas.

se pide $\sqrt{b}$, y sabemos que $a < \sqrt{b} < c$

$$a^2 < b < c^2$$

$$d = \frac{a+b}{2}, \quad d^2 < b?, \ Si, entonces \ \ d^2 < b < c^2$$

$$No, entonces \ \ d_1 = \frac{a+d}{2} \ y \ \ d_1^2 < b?....$$

Desafío: construir un algoritmo para hacer este trabajo con cualquier raíz de cualquier orden.

Observación: Los números así obtenidos se llaman algebraicos, ya que son **una solución** de una ecuación de la forma $x^n - a = 0$, con la condición que si $n > 0$, entonces $a > 0$ y la solución es también positiva, más adelante consideraremos otras situaciones con mayor detalle y rigor matemático

Ejercicios

(1) Por el método de agotamiento obtenga con 4 decimales las raíces de
- $\sqrt{3}$
- $\sqrt{8}$
- $\sqrt{24}$

(2) Una calculadora entrega las raíces con 10 cifras decimales, obtenga dos cifras más para
- $\sqrt{5}$
- $\sqrt{19}$
- $\sqrt{39}$
- $\sqrt{35}$

(3) Por bipartición obtenga una aproximación con 3 decimales de:
- $\sqrt[3]{4}$
- $\sqrt[3]{7}$
- $\sqrt[5]{4}$

Algunos de estos números algebraicos son constructibles geometricamente, su construcción se basa principalmente en el Teorema de Pitágoras.

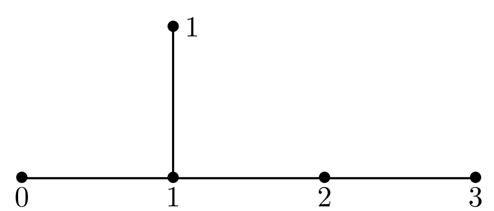
El enunciado original de este teorema es como sigue (por supuesto que originalmente está en griego): *En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado de lado la hipotenusa del triángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados iguales a los catetos del mismo triángulo.*

Por ejemplo para construir $\sqrt{7}$, sabemos que $\sqrt{7} = \sqrt{4+3} = \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2}$, entonces lo que necesitamos es considerar un triángulo rectángulo de catetos 2 y $\sqrt{3}$

Ahora tenemos el problema que no conocemos o no tenemos ubicado $\sqrt{3}$ y encontramos que $\sqrt{3} = \sqrt{2+1} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2}$; para lo cual debemos considerar un triángulo de catetos $\sqrt{2}$ y 1 y ocurre que tampoco tenemos $\sqrt{2}$

$\sqrt{2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{1^2 + 1^2}$, lo que contamos le ocurrió a Pitágoras. Un triángulo rectángulo isósceles de cateto 1.

Haz la construcción de lo anterior en esta página, usa la linea que se dibuja aquí:



Construye usando regla y compás, junto al teorema de Pitágoras para obtener graficamente las siguientes raíces
- $\sqrt{5}$

- $\sqrt{12}$
- $\sqrt{24}$

Ahora consideraremos una propiedad muy importante de los números reales, se le llama propiedad arquimediana, no la enunciaremos con todo el rigor, pero si de modo que sea comprensible.

(1) ***Dado un número real*** x ***positivo cualesquiera, entonces existe un número natural*** n ***tal que*** $n < x < n+1$, es decir, un número real positivo está entre dos números naturales consecutivos.

(2) ***Dado un número real*** x ***positivo, existen dos números naturales*** m ***y*** n ***tales que*** $\frac{m}{n} < x < \frac{m+1}{n}$, es decir, siempre es posible ubicar entre dos racionales un número real cualesquiera. Si eres observador(a) te habrás fijado que es el mismo método de agotamiento.

Como ejercicio puedes obtener una aproximación racional, no decimal para $\sqrt{15}$, $\sqrt[3]{9}$, π, recuerda que ya se dijo que para Pitágoras bastó que π fuese $\frac{22}{7}$

Otra propiedad importante para $\mathbf{R}$ es la siguiente regularidad:

$$a > b$$

$$c > d$$

$$a + c > b + d$$

y si además $a, \ b, \ c, \ d \ \in \mathbf{R}_+$, entonces

$$a \cdot c > b \cdot d$$

Esta importante regla corresponde estudiarla con detalle en tercero medio, por el momento debes confiar que no hay engaño.

Cuando dos alumnos suman con una calculadora dos números reales irracionales, es muy probable que obtengan resultados diferentes, algunas máquinas aproximan por defecto y otras por exceso, sin embargo para la precisión que nosotros necesitamos es un detalle menor.

Usando esta regularidad, obtener una aproximación decimal para $\sqrt{6}$
y compararla con la aproximación de $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$,
y además $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

Ud. mismo(a) puede inventarse otros ejercicios para ejercitar esta propiedad, por ejemplo

$$\pi + \sqrt{7} - \sqrt[3]{9} \times 2,5\overline{34}$$

con 4 cifras exactas **(no use calculadora para hacer este cálculo, puede usarla para comprobar)**

Propiedades algebraicas de los números reales

- *i*) La suma y el producto de números reales es un número real, es decir, si a y b son números reales, entonces $a + b$ y $a \cdot b$ son también números reales
- *ii*) Tres o más números reales se pueden adicionar o multiplicar, siempre que se asocien de dos en dos, del modo uno lo desee, es decir, $a, \ b, \ c \ \in \mathbf{R}$, entonces

  $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$ y

  $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- *iii*) Existen en los reales un neutro para la adición y un neutro para la multiplicación, lo que se formaliza así
  $a \in \mathbf{R}$, entonces $a + 0 = 0 + a = a$ y
  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

- *iv*) Existe inverso aditivo (opuesto) para todo número real, tal que al sumar dos opuestos, se obtiene el neutro. Formalmente $a+(^{-}a) = (^{-}a)+a = 0$. Donde a y ^{-}a son opuestos uno del otro.

  Si el número es distinto de 0, entonces tiene inverso multiplicativo (recíproco). Formalmente se tiene $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Donde a y a^{-1} son reciprocos entre si.
  Neutros e Inversos son propiedades muy importantes.
- *v*) La multiplicación se distribuye sobre la adición. En lengua romance *el producto entre un número y la suma de otros dos es igual a la suma de los productos parciales entre ese número y cada uno de los otros dos.*
  Formalmente $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
  Esta es también una propiedad muy importante, más adelante verás cuan relevante es saberla bién
- *vi*) La adición y la multiplicación son conmutativas en los reales, es decir,
  $a + b = b + a$ y
  $a \cdot b = b \cdot a$

Con todo esto procederemos a trabajar algunas situaciones, las cuales te permitirán ir avanzando en el camino del conocimiento, es importante que seas capaz de resolver muchos ejercicios en poco tiempo, es decir, desarrollar destreza, pero es también importante que resuelvas problemas, es decir, desarrollar habilidad y competencia.

Si tienes interés en saber más de la matemática, su desarrollo y de sus precursores, debes además leer sobre su historia. La colección LIFE tiene una buena recopilación del desarrollo de las ideas matemáticas.

Ejercicios y Problemas

En las clases se entregarán las directrices para trabajar todos y cada uno de los ejercicios propuestos
Valor numérico

(1) $3x^3 + 2x^2 + 3x + 1 =$ para $x = 2$ **R: 39**
(2) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 =$ para $x = 1$ **R: 15**
(3) $2x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1 =$ para $x = 2$ **R: 65**
(4) $5x^3 - 5x^2 + 5x - 525 =$ para $x = 5$ **R: 0**
(5) $5b - 2bc + c =$ para $b = 1,\ c = 2$ **R: 3**
(6) $2a^2 + 3b^3 - 4c^4 =$ para $a = -4,\ b = -3,\ c = 2$ **R: -113**
(7) $(ab)^2 + (bc)^3 - c^2 =$ para $a = -1,\ b = 3,\ c = -2$ **R: -211**
(8) $2ac + 2ab + cb =$ para $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{4},\ c = 1$ **R: -1**
(9) $(x + y) : (x - y) - (x - 1)(y + 1) =$ para $x = -\frac{2}{3},\ y = -\frac{1}{4}$ **R: 3,45**
(10) $2a^2 - 6ab + 36a^3b^3 + 8a^4b =$ para $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{3}$ **R:** $\frac{-1}{3}$
(11) $\frac{a}{3} + b^2 + \frac{c^2}{9} - ab + \frac{ac}{3} - \frac{2bc}{3} =$ para $a = 2,\ b = 3,\ c = -1$ **R:** $5\frac{1}{9}$
(12) $\frac{x^2-y^2}{x+y} + \frac{x^3-y}{x-y} + \frac{x-y}{y} =$ para $x = -\frac{1}{2},\ y = -\frac{2}{3}$ **R:** $3\frac{1}{6}$
(13) $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{3a-2b}{b-2c} + \frac{1}{a} - \frac{3}{7ac} =$ para $a = \frac{1}{2},\ b = -3,\ c = 2$ **R: 4**

Los siguientes van sin respuesta, la idea es que tu mismo(a) te asegures que estas respondiendo bién

(14) $a + b$ para $a = \sqrt{3},\ b = \sqrt{27}$
(15) $a^2 + b^2$ para $a = \sqrt[3]{2},\ b = \sqrt{27}$
(16) $a^2 - b^2$ para $a = \frac{3}{5},\ b = \sqrt{7}$
(17) $x^2 - 3x + 1$ para $x = \frac{2}{9}$
(18) $x^3 + 5x^2 - 16$ para $x = \frac{5\sqrt{2}}{7}$
(19) $\frac{1}{a} + b$ para $a = \sqrt{3},\ b = \sqrt{243}$
(20) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ para $x = \sqrt{3},\ y = \sqrt{27}$

(21) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ para $a=\sqrt{2},\ b=\sqrt{3}$

Álgebra

Consideraremos el álgebra, por ahora, como una generalización de la aritmética. Propiamente no es álgebra en el sentido actual.

El trabajo que haremos se referirá a una abstracción y generalización de situaciones de cálculo aritmético.

Por ejemplo, cuando decimos un número, lo registraremos con una letra, si lo suponemos conocido lo denotaremos con una de las primeras del alfabeto (a, b, $c\cdots$) y si es desconocido con una de las últimas (u, v, w, $\cdots$)

Se puede dar el caso que necesitemos operar con números, conocidos o desconocidos, y en este caso lo haremos así:

- dos números suman 45, como $x+y=45$, donde x e y son los números
- el producto de la suma de dos números impares consecutivos por un tercero es 100, como $[(2n+1)+(2n+3)]\cdot z=100$
- la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de dos números es, como $\sqrt{x^2+y^2}$
- el cuadrado de la suma de dos números es la suma de los cuadrados de cada número más el doble del producto entre los dos, como $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=a^2+2ab+b^2$
- Las edades de dos niños son entre si como 3 es a 5, como $x:y::3:5$, donde x e y son las edades de los niños

Para lograr estas conductas, es preciso desarrollar las habilidades adecuadas, ejercitando las propiedades y teoremas que sintetizan la información y nos permiten trabajar de modo más eficiente.

Manos a la obra entonces:

Expresión algebraica es toda combinación de números y letras ligados por los signos de las operaciones aritméticas: adición, sustracción, multiplicación, división , potenciación u otras.

Ej. $3abc$, $3xy^2z+2xy$, $\frac{a^2-b^2}{2ab}$

Valor numérico de una expresión algebraica, es el resultado que se obtiene cuando reemplazamos las letras por números.
Esto lo denominamos evaluación de expresiones algebraicas.

Términos semejantes son aquellas expresiones que tienen las mismas letras; en caso de que alguna de ellas tenga exponente, este también deberá ser igual.

Ej. ab^2, $-2ab^2$, $10ab^2$.

Hay también semejanzas parciales, es decir, se agrupan respecto a una letra.

Monomio entero es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones con letras que interviene son la multiplicación y la potenciación de exponente natural, los coeficientes numéricos pueden ser racionales .

Ej. $5ab^2$, $-7xyz$, p^2q^3, $\frac{3}{5}r$, $\frac{xy}{12}$, etc.

El grado de un monomio es la suma de los exponentes de sus letras o variables, también aquí se consideran grados parciales.

Polinomio entero (o tambien multinomio) es una expresión algebraica formada por la suma o diferencia de dos o más monomios enteros.

Un polinomio puede tener una o más variables. Los polinomios se designan por $P(x)$, $Q(x)$, ..., $P(x, y)$, $Q(x, y$ indicando entre paréntesis las variables o simplemente, con las letras mayúsculas, P, $Q, cdots$si no hay posibilidad de confusión. Ej. $3a + 2b$, $x^2 + 2xy + y^2$, $x^3 - 3xz^2 - 7t$.

Cada uno de los monomios que componen un polinomio se llama término.

Depende del número de términos que tiene un polinomio se denomina: binomio (dos términos), trinomio (tres términos), etc. El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los términos que lo forman Ej. $2x^3y + 4xy^2 + x - 3$ es de grado 4.

Operatoria algebraica.
Adición y sustracción de polinomios.

(a) Suma y diferencia de monomios: es otro monomio semejante cuyo coeficiente es la suma o diferencia de los coeficientes.
Ej. $3p^2q + 6p^2q = 9p^2q$
$3p2q - 6p2q = -3p2q$

(b) Suma y diferencia de monomios no semejantes es un binomio

Ej.$3p - 5q$ sólo debe quedar así

(c) Suma y diferencia de polinomios es otro polinomio formado por la suma o diferencia indicada de los términos no semejantes de ambos y por la suma o diferencia de los términos semejantes de ambos.

Ej. $(3x^2 - 5x + 1) + (x^2 - 7x - 3) = 4x^2 - 12x - 2$

$(3x^2 - 5x + 1) - (x^2 - 7x - 3) = 2x^2 + 2x + 4$

$(3x^2 - 5x + 2) + (x^4 - x + 2) = x^4 + 3x^2 - 6x + 4$

Multiplicación de polinomios

(a) Producto de dos monomios: es otro monomio que tiene como coeficiente el producto de los coeficientes, como parte literal , las letras que aparecen en los monomios con exponente igual a la suma de los exponentes con que figuran en los factores.
Ej. $\dfrac{-2}{3}xy^2m \cdot \dfrac{4}{7}x^3y^4t^2 = \dfrac{-8}{21}x^4y^6t^2$

(b) Producto de polinomios: se basa en el producto de monomio y en la propiedad distributiva $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

El producto de dos polinomios es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen multiplicando cada término del primero por cada término del segundo, y reduciendo luego los términos semejantes.

Ej. $a(p + q + r) = ap + aq + ar$
$(a + b) \cdot (c - d) = ac + bc - ad - bd$
$(px^2 + rx + a) \cdot (2x + 5) = 2px3 + (2r + 5p)x2 + (2a + 5r)x + 5a$, polinomio ordenado respecto a x y su grado es 3 respecto a x, en general es 4.

Potencias de base real y exponente Entero

Definición, primero con el exponente en los naturales:

$$x \neq 0 \;\; x^n = \begin{cases} 1 & si \quad n = 0 \\ x & si \quad n = 1 \\ x \cdot x^n & si \quad n > 1 \end{cases}$$

Cabe aquí hacer una importante observación con respecto a que si el 0 es o no un número natural. Filosoficamente hay vigentes dos escuelas o tendencias matemáticas que disputan entre ellas por el cero, la más actual dice que si lo es, en cambio la otra, la antigua lo niega. La nueva se basa en la teoría de conjuntos para definir **N** como el conjunto de los cardinales de todos los conjuntos. La antigua dice :**N** son los números que el hombre primitivo usó para contar sus pertenencias. En la nueva, el conjunto vacio existe y su cardinal es cero, 0. En la antigua, si el hombre no tiene, no necesita un número para decirlo. Que el cero sea o no natural nos debe tener sin cuidado, es muy dificil que se desee preguntar sobre estos temas, sobre todo si aún no se consolida la nueva visión y para efectos prácticos es inoperante.

Para las potencias se consideran los siguientes teoremas, los cuales son demostrados por el método de inducción

- $x^n \cdot x^m \; = \; x^{n+m}$
- $(x^n)^m \; = \; x^{n \cdot m}$
- $x^n \cdot y^n \; = \; (x \cdot y)^n$

Sus demostraciones se harán como sigue:

$i)$ aplicando inducción sobre m

- Si $m = 0$, se tiene que:

  registra al frente de cada paso la justificación adecuada

$$\begin{aligned} x^n \cdot x^m \; &= \; x^n \cdot x^0 \\ & x^n \cdot 1 \\ & x^n \\ & x^{n+0} \\ & x^{n+m} \end{aligned}$$

  Aquí sólo hemos verificado para cuando $m = 0$

- Podemos postular sin dificultad alguna que para algún $m = k$ cualquiera se cumplirá que

  $x^n \cdot x^k = x^{n+k}$ y usaremos esta información para probar que si $m = k + 1$, es decir, Si m es el siguiente de k, entonces también se cumple manos a la obra:
  registra al frente de cada paso la justificación adecuada

$$\begin{aligned} x^n \cdot x^m \; &= \; x^n \cdot x^{k+1} \\ & x^n \cdot (x^k \cdot x^1) \\ & x^n \cdot (x \cdot x^k) \\ & (x^n \cdot x) \cdot x^k \\ & (x \cdot x^n) \cdot x^k \\ & x^{n+1} \cdot x^k \\ & x^{(n+1)+k} \\ & x^{n+(1+k)} \\ & x^{n+(k+1)} \\ & x^{n+m} \end{aligned}$$

Las otras demostraciones considérelas como ejercicio.

Definición con el exponente en los enteros:

$$x \neq 0, \quad x^n = \begin{cases} x^n & si \quad n \geq 0 \\ \dfrac{1}{x^{-n}} & si \quad n \leq 0 \end{cases}$$

Las propiedades o teoremas son los mismos tres anteriores, lo que ocurre es que se hacen más amplios en su campo de aplicación.

Por ejemplo, al tener que operar $x^n : x^m$, este puede ser desarrollado como $x^n : x^m = x^n \cdot x^{-1 \cdot m} = x^n \cdot x^{-m} = x^{n+(^-m)} = x^{n-m}$

Algunos ejercicios

(1) Desarrolle las siguientes potencias

- $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3} =$
- $\left(\dfrac{-2}{3}\right)^{-5} =$
- $\left(\dfrac{3\dfrac{1}{2}}{14}\right)^{-1} =$
- $(-0,00002)^3 =$
- $-0,002^{-2} =$
- $\left[\left(1\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{-2} =$

(2) Desarrolle las siguientes operaciones

- $4^{-2} \cdot 125^{-3} \cdot 5^4 =$
- $\left[-2^{-2}\right]^3 \cdot (-3)^{-4} =$
- $\left[-2^{-2}\right]^3 \cdot \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-3} =$
- $\dfrac{-2^{-3} \div 2^4}{8^{-1} \cdot 4^{-2}} =$
- $\dfrac{-1^2 + (-1)^3 \cdot (-1)^3 \div (-1)^{-3}}{4} =$
- $\left[\dfrac{2^3 \div -8^{-2} + 1^{-5} - 3^{-1}}{-2^{-2} + 2^3}\right]^{-1} =$

(3) Desarrolle usando las propiedades adecuadas

- $(-1)^n + (-1)^{2n+1} + (-1)^{n+1} =$
- $-2^{-n+3} \cdot 2^{2n-1} : 2^{n+2} =$
- $\left[6 - 4\left(\dfrac{5}{16}\right)^0\right]^{-2} =$
- $\dfrac{3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} + 4^{-1}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} + 5} =$
- $2^3 a^{-3} b^4 \div (2^{-2} a^{-4} b^{-3}) =$
- $\left(\dfrac{1}{1+a}\right)^5 \left(\dfrac{1}{1-a}\right)^{-7} \left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^{-6} =$

(4) Resuelva las siguientes ecuaciones

- $2^x + 1 = 9$
- $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2+x} + 2 = 29$
- $25^{2x-1} = 125 : 5^{-x+2}$

- $2^{x-1} = 4^{2-3x}$
- $4^{3x-8} = 64^{4x+2}$
- $(a^{x-2})^{x-3} = (a^{x-4})^{x-6}$

Productos notables.

(1) Multiplicación de dos binomios con un término común
$(x+a)\cdot(x+b) = x^2 + (a+b)\cdot x + a\cdot b$
(2) Cuadrado de binomio $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$
(3) Suma por su diferencia $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$
(4) Cubo de binomio $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
(5) Cuadrado de un trinomio $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Factorización: es el procedimiento de transformar una suma de términos en un producto de factores.

(1) Factor común $ab + ac + ad - a^2 = a\cdot(b + c + d - a)$
(2) Diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$
(3) Trinomio cuadrado perfecto $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$
(4) Trinomio cuadrado no perfecto $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)\cdot(x+b)$
(5) Suma de cubos $a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$
(6) Diferencia de cubos $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$

Productos y factorización son aplicaciones de la ley distributiva.

Para operar con polinomios hay bastantes y buenos algoritmos que no restan al aprendizaje de la matemática.

Ejercicios propuestos

(1) Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones para los valores que se indican:
  (a) $x^2 + y^2$ para $x = 2$, $y = 5$
  (b) $a^2 - b^2$ para $a = 15$, $b = 5$
  (c) $(1-2x)(1-2x)x$ para $x = \frac{1}{5}$
  (d) $\pi\, r^2$ para $r = 5$, $r = 10$, $r = 0,4$

(2) En los siguientes ejercicios resuelve las sumas y diferencias que se indican y reduce términos semejantes:
  (a) $(a-b) - (b+c-d) + (2b-a)$
  (b) $x + [(y-x) - (y-z)]$
  (c) $a^2 - (b^2 - c^2) + b^2 - (a^2 + c^2) - c^2 - (a^2 - b^2)$

(d) $(a+2b-6a)-[3b-(6a-6b)]$
(e) $\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{3}+\dfrac{a}{5}$
(f) $\dfrac{2x}{5}+\dfrac{x}{6}+\dfrac{3x}{4}$
(g) $\dfrac{7}{8}x+\dfrac{1}{12}x-7\dfrac{2}{9}x$
(h) $\dfrac{1}{4}\left[a-5(b-2a)\right]+\dfrac{3}{2}\left\{\dfrac{1}{3}\left(b-\dfrac{a}{3}\right)-\dfrac{2}{9}\left(a-\left[\dfrac{3}{4}\left(b-\dfrac{4a}{5}\right)\right]\right)\right\}$

(3) Simplifica las siguientes expresiones:
(a) $(x+y-z)-(x-y+z)+)-(x+y+z)-(-x-y+z)$
(b) $(4x^3-2x^2+x+1)-(3x^3-x^2-x-7)-(x^3-4x^2+2x+8)$
(c) $\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}y-\dfrac{1}{2}z\right)-\left[x-\left\{\dfrac{1}{2}x-\left(\dfrac{1}{3}y-\dfrac{1}{4}z\right)\right\}-\left(\dfrac{2}{3}y-\dfrac{1}{2}z\right)\right]$

(4) En los siguientes ejercicios calcula los cuadrados de los binomios que se indican:
(a) $(x+a)^2$, $(x-m)^2$
(b) $(2a+9b)^2$ $(x^2+8)^2$
(c) $(x^6+1)^2$ $(3a^3-10)^2$
(d) $(a^m+y^n)^2$ $(a-\dfrac{2b}{3})^2$
(e) $(\dfrac{x^2}{3}-3x)^2$ $(\dfrac{a}{6}-\dfrac{x}{4})^2$

(5) En los siguientes ejercicios calcula los cuadrados de trinomios que se indican y reduce términos semejantes:
(a) $(a+b-c)^2$
(b) $(-a-b+c)^2$
(c) $(x^2+x+1)^2$
(d) $(2x^2+3x-1)^2$
(e) $(a^{2m}+a^mb+b^2)^2$
(f) $\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}x^2\right)^2$
(g) $\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{2x}{3}+\dfrac{x^2}{5}\right)^2$
(h) $\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{4}\right)^2$

(6) En los siguientes ejercicios calcula directamente los productos de las sumas por diferencias.
(a) $(a+b)(a-b)$
(b) $(x+2a)(x-2a)$
(c) $(3x+1)(3x-1)$
(d) $(x^3+y^3+2)(x^3-y^3-2)$
(e) $\left(\dfrac{3x}{4}-y^3+3\right)\left(\dfrac{3x}{4}+y^3+3\right)$
(f) $\left(\dfrac{2x^2}{3}+\dfrac{a}{2}-1\right)\left(\dfrac{2x^2}{3}-\dfrac{a}{2}+1\right)$

(7) Calcula las siguientes expresiones:
(a) $(1+2a-3b)^2-(3b-2a-1)^2$
(b) $(a+b+c)^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$
(c) $(a+b)^3+3(a+b)^2(a-b)+3(a+b)+(a-b)^2+(a-b)^3$

Ecuaciones

Ecuación: es una igualdad algebraica que se verifica o es cierta para algunos valores determinados de las letras, se debe indicar respecto a qué resolver.

Las soluciones o raíces de una ecuación son los valores que al sustituirlos en la ecuación hacen que la igualdad sea cierta.

Resolver una ecuación es hallar las soluciones de la misma. Las letras que aparecen en una ecuación, son valores desconocidos que hay que hallar para verificar la ecuación, se llaman incógnitas.

Comprobar una ecuación consiste en sustituir las letras por los valores obtenidos y ver si la igualdad resultante es verdadera.. Este paso es conveniente hacerlo siempre para ver si la solución es correcta. Muchas veces es preciso transformar la ecuación en otra, y este proceso puede agregarle soluciones no existentes.

Planteando ecuaciones. Escribir una ecuación es igualar dos expresiones algebraicas cualesquiera.

La obtención de ecuaciones es útil e interesante cuando se hace a partir de las condiciones que se presentan al resolver problemas matemáticos, físicos, económicos, etc.

En un problema intervienen generalmente:
a) valores conocidos que se llaman datos del problema,
b) valores desconocidos que hay que obtener y que se llaman incógnitas,
c) relaciones entre los datos y las incógnitas que forman las ecuaciones.

Para tener éxito en la resolución de problemas se necesita comprender el problema (leerlo detenidamente), y luego seguir ordenadamente los siguientes pasos:
i. Elección de incógnitas.
ii. Escribir las relaciones entre los datos e incógnitas
iii. Resolver las ecuaciones resultantes
iv. Comprobar, discutir e interpretar las soluciones.

Ej: Un alumno tiene el triple de la edad que tenía hace 8 años.
La ecuación a que da a lugar este enunciado es: x = 3(x - 8) , se considera x = la edad actual del alumno.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

La ecuación de primer grado tiene siempre solución única.

Ejercicios propuestos

(1) Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:
  (a) $3x = 21$
  (b) $3x - 12 = 0$
  (c) $2x + 3 = 11$
  (d) $3x = 2x + 5$
(2) Resuelve las siguientes ecuaciones:
  (a) $5x + 8 = 8x + 2$
  (b) $9 + 9x = 117 - 3x$
  (c) $21 - 7x = 41x - 123$
  (d) $500 - 24x = -4 - 3x$
  (e) $3x + 100 = 5(200 - 3x)$
  (f) $5(20 - x) = 4(2x - 1)$

(g) $7(x-18)=3(x-14)$
(h) $4(x-3)-7(x-4)=6-x$
(i) $x-1\dfrac{x-2}{2}+\dfrac{x-3}{3}=0$
(j) $\dfrac{3x-11}{20}-\dfrac{5x-1}{14}=\dfrac{x-7}{10}+\dfrac{6-5x}{21}$
(k) $\dfrac{3x-17}{8}-\dfrac{1-4x}{13}=\dfrac{1-x}{4}-\dfrac{9+x}{6}$
(l) $\dfrac{3x-16}{x}=\dfrac{5}{3}$
(m) $\dfrac{21-x}{23-x}=\dfrac{2}{3}$

Resuelva los siguientes problemas

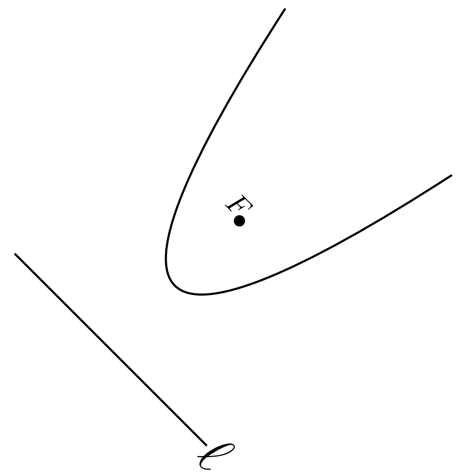
- Obtener un número de seis cifras. Las decenas y las unidades son 42. Si se colocan estas dos cifras al principio, antes que las otras cuatro, el número resultante es la mitad del número original. ¿Cuál es el número?
- Una liebre perseguida por un perro lleva ya adelantados 90 saltos y da 5 saltos mientras que el perro da 4; y como 7 saltos de la liebre igualan a 5 saltos del perro; ¿cuántos saltos tendrá que dar este para alcanzarla?
- Determine dos números que sumen 1140, y que sean entre si como 5 es a 7.
- Busque dos números cuya diferencia sea 41 y que sean entre si como 7 es a 9.
- Se cuenta con un capital de \$1.800.000; se colca una parte en una financiera al 5% y otra en un banco al 4%. Determinar cada una de las partes, si el interés total de un año da \$87.000.
- Encuentre una fracción tal que si se agregan dos unidades a cada uno de sus términos, es igual a $\frac{2}{3}$, y si se quitan 10 unidades a cada uno de los mismos resulta $\frac{2}{9}$.
- Dos jugadores acuerdan en que quien pierda debe duplicar el dinero que posee quien gana; juegan y pierden una vez cada uno, y se despiden el primero con \$6.000 y el segundo con \$21.000. ¿Cuánto dinero tenía cada uno antes de jugar?
- Un día se da 12 sillas y \$18.000 en cambio de 6 sofás; otro día se da 37 sillas y se recibe en cambio 15 sofás y \$18.000. ¿Cuál es precio respectivo?
- Hallar el número de puntos que poseen dos alumnos, sabiendo que si el primero da 9 al segundo, ambos quedan iguales; y si es el segundo quien da 6 puntos al primero, éste tendrá el duplo de lo que le queda al segundo.
- ¿Cuál es el día y hora exacta del mes de marzo para que la fracción respecto al mes sea la misma que respecto al año? (considere año normal y año bisiesto)
- Pedro, Juan y Carlos hacen un recorrido de 100 kilómetros así: Pedro y Carlos parten en una bicicleta a 25 kilómetros por hora, al mismo tiempo que Juan sale, a pie, a 5 kilómetros por hora. A cierta distancia, Carlos se baja de la bicicleta y continua caminando a 5 kilómetros por hora. Pedro se devuelve, recoge a Juan y continúa la marcha, siempre a 25 kilómetros por hora, llegando al lugar de destino al mismo tiempo que Carlos. Determine el número de horas que emplearon en el viaje.

Función Cuadrática y Ecuación de segundo grado

Ya sabemos algo de la función cuadrática, ahora nos internaremos un poco más.
La gráfica de la función cuadrática es una parábola cuadrática y esta se define así :

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto dado F y una recta dada ℓ es una parábola.

Podemos considerar la siguiente situación:



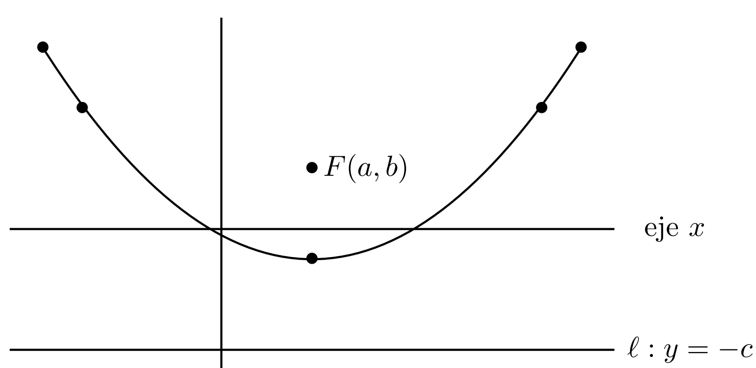
La linea curva es parte de la parábola

Para comprobar si es o no la pedida según ℓ y F, construir una recta paralela a ℓ a una distancia r dada y una circunferencia de radio igual al r anterior con centro en F. Los puntos de intersección deben quedar en la curva dibujada.

Esta curva tiene un historia muy interesante. Si la hacemos rotar en torno a la perpendicular a ℓ por F, obtendemos un paraboloide de revolución, el cual tendrá la forma de esas antenas parabólicas, las que captan señales de video, radio, etc. Esta propiedad se dice fue descubierta por Arquímides y la empleo contra la flota romana cuando esta invadía Siracusa. Constuyó unos espejos parabólicos y con ellos incendió la famosa flota. Por que ocurrió esto, lo dejaré para que lo investigues.

Cuando se lanza un piedra o cualquier otro proyectil, la trayectoría que describe es una parábola.

La gráfica anterior, no corresponde a una función, salvo que la representemos, considerando una recta paralela al eje x



Si nos fijamos en la figura, con a, b y c positivos y cualquier punto como $P(x, y)$, entonces se debe verificar lo siguiente:

$\delta(P, F) = \delta(P, \ell)$, donde δ indica la distancia

$\delta(P,\, F) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

$\delta(P,\, \ell) = |y + c|$
tenemos entonces la ecuación siguiente

$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = |y + c|$, elevamos al cuadrado

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (y+c)^2$, desarrollando

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = y^2 + 2cy + c^2$, ordenando y reduciendo

$2(b+c)y = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - c^2$, si además $b + c \neq 0$, nos queda

$y = \dfrac{1}{2(b+c)}x^2 + \dfrac{-a}{b+c}x + \dfrac{a^2+b^2-c^2}{b+c}$ Si hacemos abstracción de las expresiones fraccionarias, veremos la forma $y = ax^2 + bx + c$,

donde y es $f(x)$

Si con algo de imaginación desplazamos paralelamente a si mismo el eje x, observaremos que la parábola puede o no cortarlo, y si lo hace, lo puede hacer en uno o en dos puntos, llamados ceros de la función, Sean $(x_1,\, 0)$ y $(x_2,\, 0)$ esos puntos

$f(x_1) = f(x_2) = 0$ y además $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, pues si f se anula con x_1, entonces $x - x_1$ divide exactamente a $f(x)$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1\, x_2) \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1\, x_2 \end{aligned}$$

entonces debe ocurrir que $b = -a(x_1 + x_2)$ y $c = ax_1\, x_2$ y de aquí se tiene que:
$x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ y que $x_1\, x_2 = \dfrac{c}{a}$

Otra relación importante es que x_1 y x_2 son simétricos respecto a la recta $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, llamada eje de simetría de la parábola.

En este eje de simetría se encuentra el vértice de la parábola (el punto más bajo, si $a > 0$; o el más alto, si $a < 0$). Entonces el vértice de la parábola tiene por abscisa $\dfrac{-b}{2a}$ y por ordenada a $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.

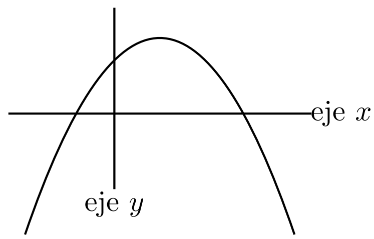
Si desarrollamos esta expresión nos quedará:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-b}{2a}\right) &= a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) + c \\ &= \frac{a \cdot b^2}{4 \cdot a^2} + \frac{-b^2}{2 \cdot a} + c \\ &= \frac{-b^2}{4 \cdot a} + c \end{aligned}$$

$$= \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}$$

Entonces el vértice tiene coordenadas:

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$



Observese que el vértice no tiene, en parte alguna, una condición de existencia respecto a los ceros de la función, es decir esto es válido incluso si no tiene ceros.

Una ecuación de segundo grado tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, por lo que es un caso particular de la función cuadrática, donde sólo interesa cuando es cero.

En los ejercicios y problemas que se proponen, tendrás la oportunidad de seguir aprendiendo:

(1) **Un problema muy antiguo** En un texto cuneiforme de la cultura babilónica, escrito hace más de cuatro mil años, se tiene el siguiente problema: Hallar los números de los cuales se conoce su suma s y su producto p.

El mismo problema en términos geométricos dice: determinar las medidas de los lados de un rectángulo cuya área y semi-perímetro se conocen.

En ambos casos la ecuación que resuelve el problema es
$x^2 - sx + p = 0$
Nuestros amigos babilónicos, por algún modo, que no registraron, descubrieron que las raices son simétricas y procedieron aproximadamente así:

Sean α y β los números buscados, digamos que $\alpha \leq \beta$ y esos números equidistan de la media aritmética, es decir, $\dfrac{s}{2} = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ y
debe ocurrir que $\beta - \dfrac{s}{2} = \dfrac{s}{2} - \alpha = d$, donde d es la diferencia
y de aquí $\alpha = \dfrac{s}{2} - d$ y $\beta = \dfrac{s}{2} + d$ d resulta fácil de obtener, pues

$$p = \alpha\,\beta = \left(\frac{s}{2} - d\right)\left(\frac{s}{2} + d\right) = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - d^2$$

por lo tanto $\qquad d^2 = \left(\dfrac{s}{2}\right)^2 - p$, entonces $d = \sqrt{\left(\dfrac{s}{2}\right)^2 - p}$,
recordando que d es positivo y de ahí

$$\alpha = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \text{ y además } \quad \beta = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

Como esto fue resuelto tantos siglos atras, tenía restricciones, como que $\left(\dfrac{s}{2}\right)^2 - p \geq 0$ para que la raíz tenga existencia, si no ocurre, simplemente no tiene solución.

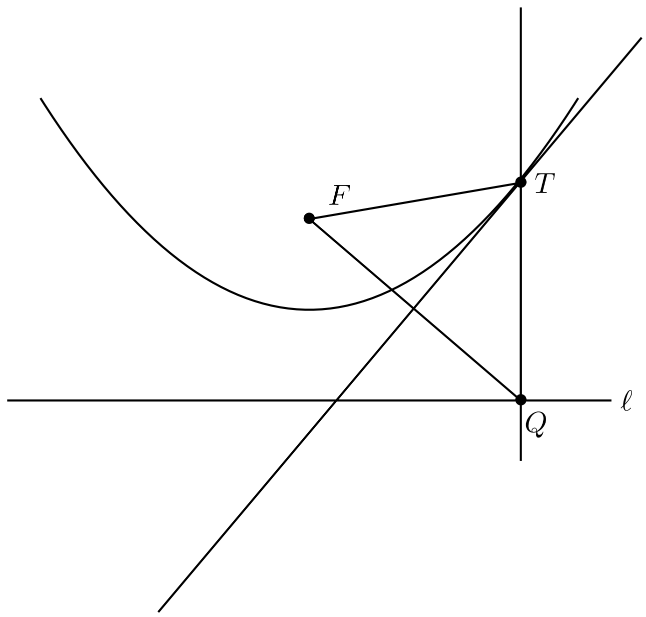
Desarrolle las raíces de la ecuación anterior, completando un cuadrado de binomio y una suma por su diferencia.

(2) Para la Parábola dada por $y = x^2$ determine las coordenadas del punto F y la recta ℓ, de los cuales equidistan los puntos de ella.

(3) Considere $f(x) = ax^2$ y represéntela en un gráfico para distintos valores de a, por ejemplo ± 1, ± 2, $\frac{\pm 1}{2}$, $\frac{\pm 1}{3}$, etc. generalice

(4) Considere $f(x) = a(x + m)^2$ y represéntela en un gráfico para distintos valores de a y de m, por ejemplo ± 1, ± 2, $\frac{\pm 1}{2}$, $\frac{\pm 1}{3}$, etc. combinados entre si. Generalice

(5) Considere una parábola y una recta cualquiera paralela al eje y y el punto Q donde ésta corta a la recta ℓ. Haga ver que la simetral del trazo $\overline{FQ}$ es tangente en T a la parábola.



Esta propiedad es la que usó Arquímides. Si no puede demostrarlo en general, use primero una parábola particular

(6) En el incendio del palacio Hirmas de Concepción, concurrieron 18 compañias de bomberos con sus respectivos carros con mangueras para lanzar agua, al conctarse la primera a un grifo, pudo lanzar 100 litros de agua por minuto, al conctarse una segunda a otro grifo, ambas pudieron arrojar 98 litros por minuto, al conectarse una tercera, cada una pudo arrojar 96 litros por minuto, si cada vez que se conectó una nueva manguera a otro grifo, todas arrojaron dos litros menos por cada minuto que lo que arrojaban antes. Con este conocimiento, ¿qué le aconsejaría a los bomberos respecto a las mangueras que se pueden conectar, ya que todos los grifos derivan de una misma matriz?

(7) Determine la función cuadrática para cada caso:
  (a) Pasa por los puntos de coordenadas $(0, -1), (1, 7)$ y $(2, 21)$
  (b) Pasa por los puntos $(4, 0)$ y $(6, -2)$, donde el segundo es el vértice
  (c) El vértice es $(3, 5)$ y pasa por $(1, 13)$
  (d) Pasa por los puntos $(-2, 3)$ y $(1, 9)$, al considerar 8 unidades desde el vértice, sobre el eje de simetría, el trazo perpendicular mide 4 unidades.

(8) Obtenga los valores mínimo y máximo que asume la función
$f(x) = x^2 - 4x + 3$ en cada uno de los siguientes intervalos:
  (a) $[1, 4]$
  (b) $[6, 10]$

(c) $[-3, 4]$

(9) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a > 0$

(a) Muestre que $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) < \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

(b) Generalice, muestre que si $0 < a < 1$, entonces

$$f(\alpha\, x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha\, f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

Interprete geometricamente esta propiedad.

(10) Un grupo de alumnos, del taller de matemáticas, debe medir un segmento con la mayor precisión posible, cada uno de ellos entregó su medición, las que denotaremos x_1, x_2, x_3, ..., x_n, investigando en un libro de estadística, descubrieron que sus mediciones las podian registrar así:

$$d(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2$$

(a) Muestre que $d(x)$ se minimiza cuando:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

También descubrieron esta otra fórmula:
$e(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + \cdots + |x - x_n|$

(b) Muestre que esta función se minimiza cuando x es la mediana de la muestra.

(11) Se tiene un pedazo de espejo, su forma es de un triángulo rectángulo de lados 60 cm, 80 cm y 1 metro. Se desea sacar de allí un espejo rectangular con la mayor área posible y con uno de sus lados a lo menos sobre un lado del triángulo. De Ud. la solución al problema.

Otros ejercicios sobre la función cuadrática

(1) Grafique en un mismo plano las funciones
- $f_1(x) = x^2$
- $f_2(x) = 3$
- $f_3(x) = (f_1 + f_2)(x)$
- $f_4(x) = (f_1 - f_2)(x)$

(2) Grafique en un mismo plano las funciones
- $f_1(x) = \dfrac{x^2}{3}$
- $f_2(x) = 2x$
- $f_3(x) = (f_1 + f_2)(x)$
- $f_4(x) = (f_1 - f_2)(x)$

(3) En un mismo gráfico, represente las siguientes parábolas
- $y = \dfrac{1}{2}(x-4)^2$
- $y = \dfrac{1}{2}(x+4)^2$
- $y = \dfrac{1}{2}x^2$

Haga un estudio respecto a las gráficas, en relación al número 4

(4) Considere las parábolas
- $y = (x-1)^2 - 4$
- $y = 2x^2 - 4x - 6$

Estudie ambas respecto a los intervalos de crecimiento, decrecimiento, donde $y < 0$, donde $y > 0$, etc.

(5) Considere la parábola dada por $y = 2x^2 + 3x - 1$ y a partir de ella, obtenga la expresión cuando:
- Todos sus puntos se desplazan a la derecha 2 unidades
- todos sus puntos se desplazan a la izquierda 3 unidades
- todos sus puntos se desplazan hacia arriba 4 unidades
- todos sus puntos se desplazan 2 unidades hacia la derecha y 5 unidades hacia abajo

(6) Partir el número 12 en dos partes de modo que la suma de los cuadrados de esas partes sea mínima.

Otros ejercicios sobre la ecuación de segundo grado

(1) Resuelva y determine los valores permitidos para las soluciones de:
- $x^2 - c^2 = 0$
- $a^2\, x^2 - 4 = 0$
- $ax^2 - \dfrac{1}{a} = 0$
- $9x^2 = a^3$

(2) Dos ecuaciones son equivalentes, si y sólo si, tienen las mismas soluciones. De entre las ecuaciones dadas, ¿cuáles son equivalentes? Justifique
- $x^2 + 3x - 5 = x^2 + 4$ y $3x - 5 = 4$
- $(x - 2)x = x$ y $x - 2 = 1$
- $\dfrac{x^2 - 1}{x - 2} = \dfrac{8}{x - 2}$ y $x^2 - 1 = 8$
- $\dfrac{x^2 + 3}{x + 3} = \dfrac{3 - 3x}{x + 3}$ y $x^2 + 3 = 3 - 3x$

(3) Determine el valor de m, de modo que la solución de la ecuación sea igual a cero
- $3x^2 - 5x + m^2 - 4 = 0$
- $10x^2 + 4x - 2m = 0$

(4) Resolver las siguientes ecuaciones, en lo posible sin usar fórmulas
- $\dfrac{4x^2 - 1}{3} - \dfrac{3x^2 + 8}{5} = 1$
- $\dfrac{2x}{x + 1} + \dfrac{2x}{x - 1} = 5\dfrac{1}{3}$
- $\dfrac{x\sqrt{3}}{2x + \sqrt{3}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{3} + 2}$
- $\dfrac{x\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - x} = \dfrac{2x}{5 - x\sqrt{3}}$
- $x^2 - 6x + 8 = 0$ $\quad x^2 + 8x + 15 = 0$ $\quad x^2 - 2x - 35 = 0$
- $x^2 - 8x + 3 = 0$ $\quad 9x^2 + 18x + 5 = 0$ $\quad 3x^2 + 5x - 78 = 0$
- $5x^2 + 8x + 3 = 0$ $\quad 3x^2 + 5x - 2 = 0$ $\quad 3x^2 - 11x + 6 = 0$
- $3x^2 + 2x - 1 = 0$ $\quad 9x^2 + 9x + 2 = 0$ $\quad 4x^2 + 12x + 9 = 0$
- $(x + 3)(x - 2) + (x + 2)^2 - 3x - 10 = 0$
- $(x - 5)^2 + (3 - x)^2 - 4(x + 5)(3 - x) - 48 = (x + 1)^2$
- $(x - 1)(x - 2)(x - 3) - (x^2 + 3)(x - 5) + 2x - 33 = 0$
- $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{2x}{3} = \dfrac{3x - 10}{4}$ $\quad \dfrac{x(x + 4)}{2} - 3 = \dfrac{7x}{4} - \dfrac{5x - 4}{6}$
- $\dfrac{(x - 11)^2}{10} - \dfrac{(6x - 1)^2}{5} = 7 - \dfrac{7x - 3}{2}$ $\quad \dfrac{x - 3}{4} + \dfrac{2x + 3}{6} = \dfrac{x^2 - 11}{12}$
- $8x + 11 + \dfrac{7}{x} = \dfrac{21 + 65x}{7}$ $\quad \dfrac{21}{v + 5} = 3\dfrac{2}{7} - \dfrac{v}{7}$
- $\dfrac{12}{x} - \dfrac{7x - 6}{6} + 5x - 26 = 0$ $\quad \dfrac{5(x - 1)}{8} = \dfrac{x}{10} + \dfrac{10}{x}$

- $\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}=4\left(\frac{1+t^2}{t^2}-\frac{3}{2t}\right)$ $\qquad$ $\frac{u^2}{u-3}-\frac{u+6}{u-3}=1$
- $\frac{y+2}{y+1}=\frac{y-2}{1-y}-\frac{4}{y-1}$ $\qquad$ $\frac{3x-2}{x-3}-\frac{x-4}{x+3}=\frac{15x-3}{x^2-9}$
- $(x^2-4x+5)^2-(x-1)(x-3)=4$
- $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$
- $\frac{x^2+2x+7}{x^2+2x+3}=x^2+2x+4$
- $\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2}{x^2-2x+3}=\frac{6}{x^2-2x+4}$
- $x^2-4x+\frac{10}{x^2-4x+5}=2$

(5) Estudie cada una de las ecuaciones siguientes y determine la pertinencia de las soluciones:
- $x^2-5ax+6a^2=0$ $\qquad$ $x^2-2mx+m^2-n^2=0$
- $ay^2-(a+1)y+1=0$ $\qquad$ $z^2-2(p+q)z+4pq=0$
- $\frac{m}{t-n}-2=\frac{n}{m-t}$ $\qquad$ $t+\frac{b}{a}=\frac{1}{t}+\frac{a}{b}$
- $v+\frac{1}{v}=\frac{m-n}{m+n}+\frac{m+n}{m-n}$ $\qquad$ $\frac{a}{x-a}-\frac{x}{x+a}=\frac{1}{3}$
- $\frac{x(x+2b)}{a^2+2ab+b^2}=\frac{2x}{a+b}+\frac{b-a}{a+b}$ $\qquad$ $\left(\frac{y+m}{y-m}\right)^2+\frac{7}{2}\left(\frac{y+m}{y-m}\right)+3=0$
- $\frac{m^2+2n}{ny+2n+my+2m}-\frac{m}{y+2}-\frac{y}{m+n}+\frac{y}{y+2}=0$
- $\frac{x}{ax-3a}-\frac{a+3}{ax-3a-bx+3b}=\frac{1}{3-x}-\frac{x}{a^2-ab}$
- $\frac{x}{a^2+ab}-\frac{x}{ax+3a}+\frac{1}{x+3}=\frac{a+3}{ax+3a+bx+3b}$

(6) Determine la suma y el producto de las raíces de las siguientes ecuaciones
- $x^2-7x+2=0$ $\qquad$ $3x^2-4x+1=0$ $\qquad$ $3x^2-3ax-a^2=0$
- $-x^2-4x+2=0$ $\qquad$ $3x^2-\frac{4}{5}x-4=0$ $\qquad$ $\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}ax-a^2=0$

(7) Conocidas las dos raíces x_1 y x_2, determine la ecuación en los siguientes casos:
- $x_1=3\wedge x_2=4$ $\qquad$ $x_1=-3\wedge x_2=5$ $\qquad$ $x_1=-3\wedge x_2=\sqrt{3}$
- $x_1=0,3\wedge x_2=0,4$ $\qquad$ $x_1=-\sqrt{3}\wedge x_2=\sqrt{5}$
- $x_1=\sqrt{2}-3\wedge x_2=1+\sqrt{3}$ $\qquad$ $x_1=x_2=a$
- $x_1=a-b\wedge x_2=a+b$ $\qquad$ $x_1=0\wedge x_2=5$ $\qquad$ $x_1=\frac{a+b}{a-b}\wedge x_2=1$
- $x_1=a-\sqrt{b}\wedge x_2=1+\sqrt{b}$ $\qquad$ $x_1=3a-2b\sqrt{7}\wedge x_2=3a+2b\sqrt{7}$
- $x_1=x_2=1-\sqrt{3}$ $\qquad$ $x_1=\frac{a}{b}\wedge x_2=\frac{b}{a}$

(8) Obtenga la ecuación de segundo grado de coeficientes racionales, donde se conoce una de las raíces:
- $2+\sqrt{3}$ $\qquad$ $5-\sqrt{5}$ $\qquad$ $a-b\sqrt{m}$
- $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\frac{-m+\sqrt{n}}{2}$ $\qquad$ $\frac{6-\sqrt{2}}{5}$

(9) Por división, obtenga la otra raíz de la ecuación
- $x^2-x-12=0\wedge x_1=4$ $\qquad$ $6x^2+5x+1=0\wedge x_1=\frac{-1}{3}$

(10) x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $x^2+9x+14=0$, sin resolver, obtenga otra ecuación tal que sus raíces verifiquen lo siguiente:
- Sean el doble de las raíces x_1 y x_2
- sean un quinto de las raíces x_1 y x_2
- sean las recíprocas de las raíces x_1 y x_2

(11) Siendo x_1 y x_2 las raíces de las ecuaciones dadas a continuación, obtenga, sin resolverla:
(a) x_1+x_2 $\qquad$ $x_1\cdot x_2$ $\qquad$ x_1-x_2

(b) ${x_1}^2 + {x_2}^2$ ${x_1}^2 - {x_2}^2$ $(x_1 - x_2)^2$

- $x^2 - 3x - 10 = 0$
- $2x^2 + 5x - 1 = 0$
- $ax^2 + bx + c = 0$

(12) Para la ecuación $x^2 + px + 3 = 0$ determinar el valor de p para que:

- la diferencia entre las raíces sea 2
- la suma de los cuadrados de las raíces sea 19
- la diferencia entre los cuadrados de sus raíces sea $12\sqrt{6}$

(13) La ecuación $x^2 - 4x + q = 0$ de raíces x_1 y x_2, determine q de modo que:
- una raíz sea el triple de la otra
- las raíces sean iguales
- una raíz es tres unidades mayor que la otra
- una raíz es recíproca de la otra

(14) Las raíces de la ecuación $x^2 + 3x + m = 0$ son x_1 y x_2. Determine los valores de m tales que:
- $3x_1 - x_2 = 4$
- $\dfrac{x_1}{x_2} = -\dfrac{2}{5}$
- $x_1 = x_2$
- $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{3}{2}$

(15) x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ determine una nueva ecuación de modo que sus raíces y_1 e y_2 sean:
- $y_1 = 1 + x_1$ e $y_2 = 1 + x_2$
- $y_1 = x_1^2$ e $y_2 = x_2^2$
- $y_1 = \dfrac{2}{x_1} - 1$ e $y_2 = \dfrac{2}{x_2} - 1$
- $y_1 = x_1 + \dfrac{1}{x_2}$ e $y_2 = x_2 + \dfrac{1}{x_1}$
- $y_1 = \dfrac{x_1}{x_2}$ e $y_2 = \dfrac{x_2}{x_1}$
- $y_1 = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$ e $y_2 = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}$

(16) En la ecuación $2x^2 - (m-1)x + m - 1 = 0$, ¿qué valores debe m para que las raíces difieran en 1?

(17) Se da la ecuación $8x^2 - (m-1)x + m - 7 = 0$, ¿qué valores debe tomar m para que las raíces sean:
- reales e iguales   opuestas   reciprocas   una igual a cero

(18) Factorizar los siguientes trinomios:
- $x^2 + 10x + 9$ $-x^2 + x + 42$ $x^2 - 25x + 114$
- $n + mn(2-n)x - 2m^2n^2x^2$ $2x^2 + (3a + 4b)x + a^2 + 3ab + 2b^2$
- $2x^2 - ax - a^2$ $2m^2 - 5mny + 3n^2y^2$
- $2a^2x^2 + abx - b^2$ $4x^2 - 2bx + ab - a^2$
- $2a^3b^3 + ab(2a - b)x - x^2$ $2mnx^2 + (2m^2 + 2mn - 3n^2)x + 2m^2 - 3mn$

(19) Simplificar las siguientes fracciones:

- $\dfrac{a^2-3a+2}{a^2+2a-8}$ $\quad\dfrac{2a^2-8a-90}{3a^2+36a+105}$ $\quad\dfrac{2m^2-3mn+n^2}{3mn-m^2-2n^2}$
- $\dfrac{a^2+ab+2b^2}{a^2+9ab14b^2}$ $\quad\dfrac{3a^2-5ab-8b^2}{2a^2+3ab+b^2}$ $\quad\dfrac{x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+(1-3\sqrt{2})x-3x^2}$

(20) Muestre que el trinomio x^2+px+q se puede representar en la forma $\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\dfrac{p^2}{4}$ y que el trinomio ax^2+bx+c en la forma

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$$

(21) ¿Cuál es la condición para que los trinomios

- x^2+px+q
- ax^2+bx+c
- $10x^2+bx+40$
- $3x^2+bx+16$

sean trinomios cuadrados perfectos?

(22) Resuelva las siguientes ecuaciones irracionales

- $2\sqrt{x}\,(4\sqrt{x}\,-2)-4=0$ $\qquad x+\sqrt{x+5}=7$
- $x+2\sqrt{x}\,(4\sqrt{x}\,+2)-4=0$ $\qquad (-2+3\sqrt{x-7})(-1+\sqrt{x-7})=14$
- $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{6x+1}$ $\qquad \sqrt{x}+\sqrt{x-5}=5$
- $2x-5+2\sqrt{x^2-5x}=25$ $\qquad \sqrt{14+x}+\sqrt{5+2x}=1$
- $\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}=\dfrac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ $\qquad \sqrt{5a+x}+\sqrt{5a-x}=\dfrac{12a}{\sqrt{5a+x}}$
- $x\sqrt{\dfrac{a}{x}-1}=\sqrt{x^2-b^2}$ $\qquad \dfrac{2}{x+\sqrt{2-x^2}}+\dfrac{2}{x-\sqrt{2-x^2}}=x$
- $\dfrac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}=1$
- $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$

(23) Si tenemos una ecuación de grado mayor a dos, en la cual se tiene que al reemplazar x por $\dfrac{1}{x}$ queda una ecuación como la original, salvo un factor común, como por ejemplo: $4x^4-9x^3-26x^2-9x+4=0$

$$4\left(\frac{1}{x}\right)^4-9\left(\frac{1}{x}\right)^3-26\left(\frac{1}{x}\right)^2-9\left(\frac{1}{x}\right)+4+0$$

Al desarrollar las potencias, queda:

$$\frac{4-9x-26x^2-9x^3+4x^4}{x^4}=0$$

La ecuación original la anotaremos: $4(x^4+1)-9(x^3+x)-26x^2=0$, dividiendo por x^2, la expresión nos quedará así

$4\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-26=0$, supongamos ahora que $z=x+\dfrac{1}{x}$

de aquí $z^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$

y con esto, nuestra ecuación se transforma en:

$4(z^2-4)-9z-26=0$ o en $4z^2-9z-34=0$ Resolvemos para z, comprobamos su pertinencia y sustituimos en la ecuación $x+\dfrac{1}{x}=z$ Termine Ud esta ecuación

(24) Resolver las ecuaciones siguientes e indique si hay raíces extrañas:

- $\dfrac{2}{2-x}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{2x-x^2}$
- $\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{2-x}{1-x}+\dfrac{4}{x-1}=0$
- $1+\sqrt{2x+7}=x-3$
- $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$
- $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$

(25) Resolver las siguientes ecuaciones usando algún artificio algebraico

- $x^4-1=0$ $\quad$ $x^4+16=0$
- $x^3+x-2=0$ $\quad$ $x^3-4x^2+x+6=0$
- $x^3+9x+23x+15=0$ $\quad$ $(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)=2$
- $x^8-15x^4-16=0$
- $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$
- $(x^2-2x-5)^2-2(x^2-2x-3)-4=0$
- $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=2,9$
- $\dfrac{3}{1+x+x^2}=3-x-x^2$
- $\dfrac{1}{x^2-3x+3}+\dfrac{2}{x^2-3x+4}=\dfrac{6}{x^2-3x+5}$
- $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+9=0$
- $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=5\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{4}{x}\right)$
- $|x|+x^3=0$ $\quad$ $(x-1)(|x|-1)=-0,5$
- $\dfrac{4x-8}{|x-2|}=x$ $\quad$ $\dfrac{7x+4}{5}-x=\dfrac{|3x-5|}{2}$
- $|x^2-3x+3|=2$ $\quad$ $x^2+3|x|+2=0$
- $x^2+2x-3|x+1|+3=0$ $\quad$ $||3-2x|-1|=2|x|$
- $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$