Solución Prueba N°1
IME 002 Cálculo I

Profesores: Mauricio Carrillo O., Alex Sepúlveda C.

08 de abril de 2008

1. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $a < b < c < d$. Simplifique,

$$\frac{|a-b|}{a-b} - \frac{|a-c|\,|c-b|\,|d-a|}{(c-a)\,(b-c)\,(a-d)} + \frac{\sqrt{(b-d)^2}}{d-b} \tag{1}$$

Solución.
De acuerdo a las hipótesis tenemos,

$$\begin{aligned} a < b \Rightarrow a-b < 0 \quad &\Rightarrow \quad |a-b| = -(a-b)\,, \\ a < c \Rightarrow a-c < 0 \quad &\Rightarrow \quad |a-c| = -(a-c)\,, \\ b < c \Rightarrow c-b > 0 \quad &\Rightarrow \quad |c-b| = c-b, \\ a < d \Rightarrow d-a > 0 \quad &\Rightarrow \quad |d-a| = d-a, \\ b < d \Rightarrow b-d < 0 \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{(b-d)^2} = \sqrt{(d-b)^2} = d-b. \end{aligned}$$

Reemplazando en (1) concluimos,

$$\begin{aligned} \frac{-(a-b)}{a-b} - \frac{-(a-c)\cdot(c-b)\cdot(d-a)}{(c-a)\,(b-c)\,(a-d)} + \frac{d-b}{d-b} &= \frac{-(a-b)}{a-b} - \frac{(c-a)\cdot(b-c)\cdot(a-d)}{(c-a)\,(b-c)\,(a-d)} + \frac{d-b}{d-b} \\ &= -1-1+1 = -1. \end{aligned}$$

2. Encuentre el conjunto solución de las siguientes inecuaciones,

   a) $|x^2-5| \leq 1$.

   b) $\frac{2}{x} + \frac{x-1}{x+1} \geq 1$.

   Solución.

   a) Aplicando propiedades del valor absoluto a la inecuación $|x^2-5| \leq 1$ tenemos,

$$\left|x^2-5\right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x^2-5 \leq 1. \tag{2}$$

   Esto implica que debemos resolver $-1 \leq x^2-5$ y $x^2-5 \leq 1$.

Para la inecuación $-1 \leq x^2 - 5$ tenemos,

$$-1 \leq x^2 - 5 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) \geq 0.$$

Los puntos que anulan los factores son $x = \pm 2$. Luego, la tabla de signos es,

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)(x-2)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

De donde, $S_1 = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.
Por su parte, para $x^2 - 5 \leq 1$ tenemos,

$$x^2 - 5 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 6 \leq 9 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{6}\right)\left(x - \sqrt{6}\right) \leq 0.$$

Los puntos que anulan las factores son $x = \pm\sqrt{6}$. Con esto, la tabla de signos es,

	$(-\infty, -\sqrt{6})$	$(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$	$(\sqrt{6}, \infty)$
$x+\sqrt{6}$	$-$	$+$	$+$
$x-\sqrt{6}$	$-$	$-$	$+$
$(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

De donde $S_2 = \left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right]$.
Finalmente la solución de (2) es (Ver Figura 1)

$$S = S_1 \cap S_2 = \Big((-\infty, -2] \cup [2, \infty)\Big) \cap \left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right] = \left[-\sqrt{6}, 2\right] \cup \left[2, \sqrt{6}\right].$$

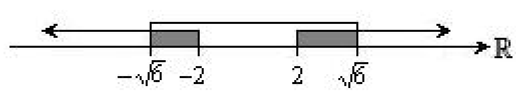

Figura 1: Solución de (2).

$b)$ Para la inecuación $\frac{2}{x} + \frac{x-1}{x+1} \geq 1$ tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{x-1}{x+1} \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x} + \frac{x-1}{x+1} - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x(x+1)} \geq 0. \end{aligned}$$

Los puntos que anulan los factores son $x = 0$ y $x = -1$. Luego, la tabla de signos queda como,

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
x	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x\,(x+1)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

De donde $S=(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$.

3. Demuestre que $\forall x,y\in\mathbb{R}$ se tiene que $x^2+xy+y^2\geq 0$.
Solución.
Si $xy\geq 0$ es inmediato que $x^2+xy+y^2\geq 0$, pues es suma de números reales no negativos.

Si $xy\leq 0$, entonces $-xy\geq 0$, de donde $-2xy\geq -xy\geq 0$. Esto junto al hecho que $(x+y)^2\geq 0$, o equivalentemente $x^2+y^2\geq -2xy$ permite concluir que $x^2+y^2\geq -xy$, de donde $x^2+xy+y^2\geq 0$.

4. Indique si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifique las falsas.

a) Todo $S\subset\mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente tiene máximo.
Solución.
Falso. Basta tomar como contraejemplo $S=(a,b)$, con $a<b<\infty$. Tenemos que $\sup(S)=b$, pero $b\notin S$, luego b no es máximo.

b) El conjunto $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=2-\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}\right\}\cup[0,1)$, tiene $\sup(A)=2$ y $\min(A)=0$.
Solución.
El intervalo $[0,1)$ es continuo, por lo cual, toma todos sus puntos incluyendo al 0 y exceptuando al 1. Por su parte, el conjunto $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=2-\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}\right\}$ es discreto, por tanto, tomará sólo algunos puntos de la recta real, comenzando por el 1; intuitivamente vemos que este conjunto se acerca tanto como se quiera al 2, pero nunca llega a tocarlo ni superarlo. Gráficamente tenemos,

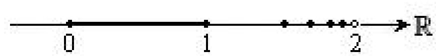

Figura 2: Conjunto A.

Así, $\sup(A)=2$ y $\min(A)=0$.

c) El conjunto $\mathbb{Q}$, de los números racionales, satisface el axioma del supremo.
Solución.
Falso. Pues, por ejemplo, el conjunto $S=\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2\leq 2\}$ es acotado, pero el $\sup(S)=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

d) Si $S\subset\mathbb{R}$ tiene supremo, entonces él es único.
Solución.
Verdadero. Sean M y M' supremos de S. Por definición, M es la menor de las cotas superiores, así $M\leq M'$. De forma análoga, $M'\leq M$. Por tanto, $M=M'$.

e) La ecuación $|x| + |x - 1| = -3$, sólo tiene dos soluciones.
Solución.
Falso. La ecuación $|x| + |x - 1| = -3$ no tiene solución, pues $|x| \geq 0$ y $|x - 1| \geq 0$. Luego, la suma de números reales no negativos no puede dar negativo.