Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Prueba N°2
Álgebra (IME006)

Profesores: M. T. Alcalde, R. Benavides, C. Burgueño,
M. Carrillo, F. Salazar, A. Sepúlveda.

14 de Mayo 2008.

1. Decimos que tres números x, y y z están en progresión armónica si $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{z} - \frac{1}{y}$. Probar que si $\frac{a+b}{2}$, b y $\frac{b+c}{2}$ están en progresión armónica, entonces a, b y c están en progresión geométrica.

   Solución.

   De acuerdo a la definición de progresíón geométrica debemos mostrar que $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$. Por hipótesis $\frac{a+b}{2}$, b y $\frac{b+c}{2}$ están en progresión armónica, por tanto, tenemos

$$\frac{1}{b} - \frac{2}{a+b} = \frac{2}{b+c} - \frac{1}{b}.$$

   Operando a en cada miembro y simplificando obtenemos,

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{b-c}{b+c}.$$

   Quitando denominadores y simplificando resulta,

$$ac = b^2,$$

   de donde concluimos que $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$.

2. Demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot 2^k}{(k+2)!} = 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$$

   Solución.

   Aplicamos los tres pasos de una demostración por inducción.

a) Verificamos para $n = 1$. Por una parte,

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k \cdot 2^k}{(k+2)!} = \frac{1 \cdot 2^1}{(1+2)!} = \frac{1}{3}.$$

Por otra,

$$1 - \frac{2^2}{3!} = \frac{1}{3}.$$

Como ambos valores coinciden hemos inicializado la recurrencia.

b) Suponemos válida la afirmación para n, es decir, tenemos la hipótesis de inducción,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot 2^k}{(k+2)!} = 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}.$$

Debemos demostrar la veracidad de la afirmación para $n+1$, es decir,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k \cdot 2^k}{(k+2)!} = 1 - \frac{2^{n+2}}{(n+3)!}.$$

c) En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k \cdot 2^k}{(k+2)!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot 2^k}{(k+2)!} + \frac{(n+1) \cdot 2^{n+1}}{(n+3)!} \\ &= 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} + \frac{(n+1) \cdot 2^{n+1}}{(n+3)!} \\ &= 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \left[1 - \frac{n+1}{n+3} \right] \\ &= 1 - \frac{2^{n+2}}{(n+3)!}. \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que la afirmación en válida para $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. Sea $x > 0$ e $y \neq 0$. Encuentre el valor de las constantes a y n para que el quinto término del desarrollo $(2x - 3y)^n$ sea igual al segundo término del desarrollo $(ay\sqrt{x} + y^2)^3$.

Solución.

De acuerdo al enunciado tenemos que

$$\binom{n}{4} (2x)^{n-4} (-3y)^4 = \binom{3}{1} \left(ay\sqrt{x}\right)^2 \left(y^2\right)^1,$$

es decir,

$$\binom{n}{4}2^{n-4}3^4x^{n-4}y^4 = \binom{3}{1}3a^2xy^4.$$

Igualando los exponentes de x obtenemos $n = 5$. Luego, reemplazando en la ecuación anterior e igualando coeficiente tenemos $3a^2 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5$, de donde, $a = \pm 3\sqrt{30}$.

4. En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la siguiente forma

$$(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \Leftrightarrow a + b - (c+d) = 2k, \text{para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

   a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

   b) Determine las clases de equivalencias del $(0,0)$ y $(1,0)$

   c) Determine el conjunto cuociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})\,/\mathcal{R}$.

Solución.

a) Debemos mostrar que $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva. En efecto,

1) **Reflexiva.** $(a,b)\,\mathcal{R}\,(a,b) \Leftrightarrow a+b-(a+b) = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ es verdadera para $k = 0$. Por tanto, $\mathcal{R}$ es reflexiva.

2) **Simetría.** Si $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ entonces $a + b - (c+d) = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, esto implica, $c + d - (a+b) = -2k$, $k \in \mathbb{Z}$, es decir, $c + d - (a+b) = 2t$, $t = -k \in \mathbb{Z}$, por tanto, $(c,d)\,\mathcal{R}\,(a,b)$. Concluimos que $\mathcal{R}$ es simétrica.

3) **Transitividad.** Si $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ y $(c,d)\,\mathcal{R}\,(e,f)$ tenemos $a + b - (c+d) = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ y $c + d\,(e+f) = 2t$, $t \in \mathbb{Z}$. De donde, sumando miembro a miembro obtenemos $a + b - (e+f) = 2\,(k+t)$, $k + t \in \mathbb{Z}$. Es decir, $\mathcal{R}$ es transitiva.

Concluimos, entonces, que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Para las clases de equivalencias tenemos,

1) **Clase del** $(0,0)$**.**
$(a,b)\,\mathcal{R}\,(0,0) \Leftrightarrow x + y = 2k$, es decir, $x + y$ es un número par, pero esto ocurre sólo si x e y son pares o si x e y son impares. Luego,

$$cl\,(0,0) = \{(2k, 2t) \mid k, t \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2k+1, 2t+1) \mid k, t \in \mathbb{Z}\}$$

2) **Clase del** $(1,0)$**.**
$(a,b)\,\mathcal{R}\,(1,0) \Leftrightarrow x + y = 2k + 1$, es decir, $x + y$ es un número impar, pero esto ocurre sólo si x es par e y impar o vice versa. Luego,

$$cl\,(1,0) = \{(2k+1, 2t) \mid k, t \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2k, 2t+1) \mid k, t \in \mathbb{Z}\}$$

c) Del punto anterior no es difícil ver que sólo hay dos clases de equivalencia, por tanto, el conjunto cuociente es,

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})\,/\mathcal{R} = cl\,(0,0) \cup cl\,(1,0)\,.$$