Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Prueba Sustitutiva
Cálculo I (IME002)

Profesores: Mauricio Carrillo, Alex Sepúlveda.

15 de Julio 2008.

1. Encuentre el valor de las constantes α y β para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{si } x < -2, \\ x^3 + 1 & \text{si } -2 \le x \le 2, \\ \sqrt{(\alpha + 3)\, x^3 + 25\beta} & \text{si } x > 2, \end{cases}$$

sea contínua en todo $\mathbb{R}$.

Solución.

Para $x = -2$ los límites laterales son,

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (\alpha x + \beta) = -2\alpha + \beta,$$

y

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \left(x^3 + 1\right) = -7.$$

Para que f sea continua en $x = -2$ imponemos la condición,

$$-2\alpha + \beta = -7. \tag{1}$$

Por su parte, para $x = 2$ tenemos,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(x^3 + 1\right) = 9,$$

y

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \sqrt{(\alpha + 3)\, x^3 + 25\beta} = \sqrt{8(\alpha + 3) + 25\beta}.$$

Como en el caso anterior, para que f sea continua en $x = 2$ se debe cumplir que,

$$\sqrt{8(\alpha + 3) + 25\beta} = 9. \tag{2}$$

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2) encontramos que $\alpha = 4$ y $\beta = 1$.

2. Calcule los siguientes límites,

   a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{1+\cos \pi x}$.

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

$\boxed{\textbf{Solución.}}$

   a) El $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{1+\cos \pi x}$ tiene la forma $\frac{0}{0}$, luego aplicando la Regla de L'Hôpital tenemos,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{1+\cos \pi x} &= \lim_{x\to 1} \frac{-1+\frac{1}{x}}{-\pi \sin \pi x} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{-\pi x \sin \pi x} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{-\pi \sin \pi x - \pi^2 x \cos \pi x} \\
&= -\frac{1}{\pi^2}.
\end{aligned}
$$

   b) El $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$ tiene la forma $\infty - \infty$. Sumando fracciones tenemos $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$, o lo que es lo mismo $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right)\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)$. Como $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1$, sólo queda el $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}$, que tiene la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôpital tenemos,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2 x}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2\sin x \cos x}{4x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin 2x}{4x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{12x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4\sin 2x}{24x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{8\cos 2x}{24} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

3. Demuestre que la ecuación de la recta tangente a la curva dada por $e^{xy} + 2x^2 + 3y = 10$ en $x = 0$ es $x + y - 3 = 0$.

$\boxed{\textbf{Solución.}}$

Haciendo $x = 0$ en $e^{xy} + 2x^2 + 3y = 10$ obtenemos $y = 3$ y con esto el punto $(0, 3)$. Para la pendiente, derivamos implícitamente,

$$\begin{aligned} e^{xy}\left(y+xy'\right)+4x+3y' &= 0 \\ y'\left(xe^{xy}+3\right) &= -4x-ye^{xy} \\ y' &= \frac{-4x-ye^{xy}}{xe^{xy}+3}. \end{aligned}$$

Con esto, $m=y'(0,3)=-1$. Finalmente, encontrando la ecuación de recta dado un punto y su pendiente, obtenemos $x+y-3=0$.

4. En cada caso calcule la derivada que se indica.

   a) $f'(x)$ si $f(x)=\ln\left(x-\sqrt[3]{1-\tan x}\right)+e^{\pi}$.

   b) $g'(x)$ si $g(x)=\sec\left(\sec^2 x-x^2\right)+\frac{x^3\cdot\cos\left(e^{-x}\right)}{1+\ln(1-x)}$.

   c) $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $y=\arctan\left(\frac{1-\sqrt{1-x^4}}{x^2}\right)$. Simplifique su respuesta.

$\boxed{\textbf{Solución.}}$

a) Para $f(x)=\ln\left(x-\sqrt[3]{1-\tan x}\right)+e^{\pi}$ tenemos,

$$f'(x)=\frac{1}{x-\sqrt[3]{1-\tan x}}\left[1-\frac{1}{3\left(1-\tan x\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(-\sec^2 x\right)\right].$$

b) La primera derivada de $g(x)=\sec\left(\sec^2 x-x^2\right)+\frac{x^3\cdot\cos\left(e^{-x}\right)}{1+\ln(1-x)}$ es

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sec\left(\sec^2 x-x^2\right)\tan\left(\sec^2 x-x^2\right)\left(2\sec x\sec x\tan x-2x\right) \\ &\quad+\frac{\left[3x^2\cos\left(e^{-x}\right)+x^3\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)e^{-x}\right]\left[1+\ln\left(1-x\right)\right]-x^3\cos\left(e^{-x}\right)\frac{-1}{1-x}}{\left[1+\ln\left(1-x\right)\right]^2}. \end{aligned}$$

c) Si $y=\arctan\left(\frac{1-\sqrt{1-x^4}}{x^2}\right)$, entonces,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1+\left(\frac{1-\sqrt{1-x^4}}{x^2}\right)^2}\cdot\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x^4}}\cdot\left(-4x^3\right)\cdot x^2-2x\left(1-\sqrt{1-x^4}\right)}{x^4} \\ &= \frac{x^4}{x^4+\left(1-\sqrt{1-x^4}\right)^2}\cdot\frac{\frac{2x^5}{\sqrt{1-x^4}}-2x\left(1-\sqrt{1-x^4}\right)}{x^4} \\ &= \frac{1}{x^4+\left(1-\sqrt{1-x^4}\right)^2}\cdot\frac{2x^5-2x\sqrt{1-x^4}\left(1-\sqrt{1-x^4}\right)}{\sqrt{1-x^4}} \\ &= \frac{1}{2\left(1-\sqrt{1-x^4}\right)}\cdot\frac{2x\left(1-\sqrt{1-x^4}\right)}{\sqrt{1-x^4}} \end{aligned}$$

Simplificando esto último encontramos,

$$y' = = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Derivando nuevamente tenemos,

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{\sqrt{1-x^4} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^4}} \cdot (-4x^3)}{\left(\sqrt{1-x^4}\right)^2} \\ &= \frac{1+x^4}{\sqrt{1-x^4}\,(1-x^4)} \\ &= \frac{1+x^4}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

5. Una compañía inmobiliaria posee 180 departamentos. Cuando el valor del arriendo es de 300 dólares al mes, todos los están ocupados. Se estima que por cada 10 dólares de aumento en el arriendo, se desocupan 5 departamentos ¿Cuál debe ser el precio del arriendo para obtener mayor ganancia?

   Solución.

   Sabemos que la Ganancia = (Nro. Deptos. Arrendados) $\cdot$ (Valor Arriendo). Sea x el número de veces que se sube el arriendo en 10 dólares cada vez. De acuerdo al enunciado, el número de departamentos arrendados será $180 - 5x$ y el valor del arriendo estará dado por $300 + 10x$. Luego, la función ganancia queda como,

$$G(x) = (180 - 5x)(300 + 10x) = 54000 + 300x - 50x^2.$$

   Calculando la primera derivada e igualando a cero obtenemos como único punto crítico $x = 3$. Evaluando la segunda derivada en este valor resulta $G'(3) = -100 < 0$. Por tanto, con $x = 3$ se obtiene mayor ganancia, es decir, el valor del arriendo será 330 dólares y habrá 165 departamentos arrendados.