Guía de Ejercicios - Algebra - IME 003

Profesores: M. Teresa Alcalde - César Burgueño - Floridemia Salazar

Año 2008

Lógica y Conjuntos

1. Si p es la proposición "hoy es miércoles" y q es "mañana es domingo". Determine los días de la semana en que son verdaderas las proposiciones siguientes:

   (a) $p \vee q$ (b) $p \wedge q$ (c) $p \Rightarrow q$ (d) $p \Leftrightarrow q$ (e) $\overline{p} \wedge (p \vee q)$

2. Determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

   Si $3^4 - 4^3 = 7$ entonces $\frac{a}{b} : \frac{b}{a} = 1$

3. Si p, q, r son proposiciones y $p \equiv V$, $q \equiv F$ y r es una proposición cualesquiera, obtenga el valor de verdad de:

   (a) $(p \wedge q) \vee r$ (b) $\overline{p \wedge \overline{q}} \Rightarrow (p \vee r)$
   (c) $(p \vee r) \Rightarrow r$ (d) $[(p \Rightarrow r) \Rightarrow q] \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)$
   (e) $(\overline{p} \vee \overline{r} \wedge r)$

4. Estudie el valor de verdad de las siguientes proposiciones, y en caso de ser falsas dé un contraejemplo.

   (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(x + 3 > n)$
   (b) $(\exists! m \in \mathbb{Z})(3 + m = 5)$
   (c) $(\forall m \in \mathbb{Z})(\exists! n \in \mathbb{Z}; n|m)$

5. Niegue las proposiciones de la pregunta anterior.

6. Estudie el valor de verdad de las siguientes proposiciones, y en caso de ser falsas dé un contraejemplo.

   (a) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ (b) $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(\overline{p} \wedge \overline{r}) \Rightarrow q]$
   (c) $(p \wedge \overline{p}) \vee (q \vee \overline{q})$ (d) $\overline{[p \wedge (q \vee r)]}$

7. Si p, q, r son proposiciones, pruebe sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología:

   $(p \vee q \Leftrightarrow p \wedge r) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)]$

8. Sea $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$. Diga cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas
   (a) $a \subseteq A$ $\quad(b)$ $a \in A$ $\quad(c)$ $\{a\} \in A$
   (d) $\{a\} \subseteq A$ $\quad(e)$ $\{\{a\}\} \subseteq A$ $\quad(f)$ $\{\{a\}, a\} \subseteq A$

9. Sea $A = \{a, \emptyset, \{b\}, \{a\}, \{\emptyset\}, \{a, \emptyset\}\}$. Encuentre $P(A)$.

10. Puede dar un ejemplo en que $P(A) = \emptyset$?

11. Un hotel recibe 60 visitantes, de los cuales 37 permanecen al menos una semana, 43 gastan al menos \$30 diarios, 32 están completamente satisfechos del servicio; 30 permanecieron al menos una semana y gastaron al menos \$ 30 diarios; 26 permanecieron al menos una semana y quedaron completamente satisfechos; 27 gastaron al menos \$30 diarios y quedaron completamente satisfechos y 24 permanecieron al menos una semana, gastaron al menos \$ 30 diarios y quedaron completamente satisfechos.

    a) Cuántos visitantes permanecieron al menos una semana, gastaron al menos \$ 30 diarios pero no quedaron completamente satisfechos?

    b) Cuántos visitantes quedaron completamente satisfechos pero permanecieron menos de una semana y gastaron menos de \$ 30 diarios?

    c) Cuántos visitantes permanecieron menos de una semana, gastaron menos de \$ 30 diarios y no quedaron completamente satisfechos.

12. Demuestre que: $A \cap (A \cup B) = A$

13. Para cuáles $S \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ son verdaderas las siguientes afirmaciones?
    (a) $\{x \in S / x^2 = 5\} \neq \emptyset$ $\quad(b)$ $\{x \in S / \mid x - 1 \mid \leq \frac{1}{2}\} = \{1\}$
    (c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\} = \emptyset$

14. Dé un ejemplo de tres conjuntos A, B y C tales que:

$$A \cap B \neq \emptyset, B \cap C \neq \emptyset, A \cap C \neq \emptyset \text{ pero } A \cap B \cap C = \emptyset$$

15. Dibuje los siguientes subconjuntos del plano
    $a)\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x^2 + y^2 = 1\}$ $\quad(b)\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x \geq 1\}$
    $c)\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x + y \geq 1\}$ $\quad(d)\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; xy = 1\}$

16. Sea $A = [1, 4] \subseteq \mathbb{R},\ B = [0, 4] \subseteq \mathbb{R},\ C = [0, 3] \subseteq \mathbb{R};\ D = [1, 2] \subseteq \mathbb{R}$.
    Dibuje en un diagrama $(A \times B) \cap (C \times D)$

17. Determine las posibles relaciones de inclusión entre A y B:

    a) $A = \{0, 1, 2, 6\}$, $B = \{$ divisores de 30 $\}$

    b) $A = X - (Y - T)$, $B = T$

    c) $A = E - S$, $B = \{x \in S; x \in E - S\}$

    d) $A = P(E - S)$, $B = P(E) - P(S)$

18. Demostrar las identidades:

    a) $X - (Y - X) = X$ *b)* $X - (X - Y) = X \cap Y$

    c) $P(A) = P(B) \Leftrightarrow A = B$ *d)* $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

    e) $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B) \Leftrightarrow A \subset B$ *o* $B \subset A$

19. Sea $X = \{1, 2, 3, ..., 18\}$. Si X tiene p subconjuntos con un número par de elementos e i subconjuntos con un número impar de elementos, compare p e i. ¿ Puede calcularlos ?

20. Verdadero o falso?:

    (a) $\forall x : x \supseteq \Phi$

    (b) $\forall x : \emptyset \in x$

    (c) El único conjunto que es subconjunto de todos los conjuntos es el vacío.

    (d) $\emptyset \subseteq \{\{\}\}$

    (e) $\{1\} \in \mathbb{N}$

    (f) $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$

21. Sea P el conjunto de los nmeros primos (un primo es un entero que tiene exactamente cuatro divisores). Describa el conjunto P.

22. Muestre que $\{2x + 5/x \in \mathbb{Z}\} = \{1 + 2y/y \in \mathbb{Z}\}$

23. Pruebe las siguientes propiedades:

    (a) $A \subseteq A \cup B$; $A \cap B \subseteq A$

    (b) $B \subseteq A \Leftrightarrow A \cup B = A$

    (c) $B \subseteq A \Leftrightarrow A \cap B = B$

    (d) $A, B \subseteq C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$

    (e) $A, B \supseteq C \Leftrightarrow A \cap B \supseteq C$

    (f) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$

    (g) $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$

    (h) $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

24. ¿Verdadero o falso? (dar una demostración o un contraejemplo):

    (a) Si para todo X se tiene $X \cap B = X \cap C$ entonces $B = C$
    (b) Si existe un X tal que $X \cap B = X \cap C$, entonces $B = C$
    (c) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$
    (d) Si $A \subseteq B$ y B y C son disjuntos, entonces $A \cap (B \cup C) = A$
    (e) $(A \cup B) - A = B - A$
    (f) $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$
    (g) $A - (B - C) = (A - B) - C$

25. Dados los conjuntos A y B, se define su diferencia simétrica por: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

    (a) Muestre que la operación Δ es conmutativa.
    (b) ¿Qué conjunto es $A \Delta \emptyset$?
    (c) ¿Qué conjunto es $A \Delta U$?
    (d) Si $A \subseteq B$ diga qué conjunto es $A \Delta B$
    (e) Muestre que: $\overline{A \Delta B} = \overline{A \cup B} \bigcup (A \cap B)$
    (f) Muestre que: $A = B \Leftrightarrow A \Delta B = \emptyset$
    (g) Muestre que: $A \Delta B = C \Leftrightarrow A \Delta C = B$

26. Analice la posible relación entre los siguientes pares de conjuntos:

    (a) $P(\overline{A})$, $\overline{P(A)}$
    (b) $P(A - B)$, $P(A) - P(B)$

27. Sean E, F dos conjuntos y $S_{E,F}$ definido por:
    $S_{E,F} = \{A \times B; A \subset E, B \subset F\}$
    Muestre que:
    a)$S_{E,F} \subset P(E \times F)$
    b)$S_{E,F} = P(E \times F) \Leftrightarrow$ E *o* F es un singleton.

28. Sea $A = \{a, b, c\}$
    a) ¿ Cuántas relaciones se pueden establecer de A en A ?
    b) ¿ Cuántas reflexivas ? ¿ Simétricas ?
    c) Construya todas las relaciones de equivalencia posibles sobre A.

29. Sea $n \in \mathbb{N}$

$$xRy \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = y \\ \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} = 1 \quad \text{si } x \neq y \end{array} \right.$$

a) Demuestre que R es una relación de equivalencia.

b) Describa las clases de equivalencia para $n = 0, 1, 2$.

30. Sea una relación definida en $\mathbb{R}$ por $xSy \Longleftrightarrow x^2 = x \mid y + 1 \mid$. Haga el gráfico.

31. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine los gráficos de las relaciones R, S, definidas en A por (i) $aRb \Longleftrightarrow a + b \leq 4$, (ii) $aSb \Longleftrightarrow a(b + 1) \leq 6$

32. Las relaciones R_1 y R_2 están definidas por
(i) $xR_1y \Longleftrightarrow -10 \leq x + 5y \leq 10$
(ii) $xR_2y \Longleftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4, x \geq y$
Haga un gráfico de estas relaciones.

33. Discuta la reflexividad, simetría, antisimetría y transitividad de las siguientes relaciones en el conjunto $\{a, b, c\}$:
(i) $\{(a, a), (b, b)\}$ (ii) $\{(c, c), (c, b)\}$ (iii) $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$
(iv) $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ (v) $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$

34. Sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, discuta las relaciones siguientes:
(i) $\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; a^2 + b^2 \geq 0\}$ (ii) $\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; 0 < ab < 1\}$

35. Averigue si la relación en $\mathbb{Z}$ definida por $aRb \Longleftrightarrow ab \geq 0$ es una relación de equivalencia.

36. En $\mathbb{Z}$ definimos: a Rb $\Longleftrightarrow a^2 + a = b^2 + b$. Demuestre que R es una relación de equivalencia y encuentre las clases de equivalencia de los elementos 0,1,a.

37. En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define $(a, b) \sim (c, d)$ ssi $a + d = b + c$. Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia y encuentre la clase del elemento $(2, 1)$.

38. Consideremos $P(A)$, donde A es un conjunto. En $P(A)$ se define una relación como sigue: ARB ssi $A \subset B$. Determine si R es una relación de orden.

39. Sea $A \neq \phi$ y R una relación en A. Se dice que R es circular si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ entonces $(z, x) \in R$. Demuestre que si R es refleja y circular, entonces R es simétrica.

40. Considere el conjunto $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ de n-tuplas con componentes en los naturales. Se define la relación R_1 sobre $\mathbb{N}^n$ por

$$xR_1y \Leftrightarrow [x_1 \leq y_1, x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2, \cdots, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i]$$

   (a) Demuestre que R_1 es una relación de orden parcial.

   (b) Sea R_2 la relación de orden de orden usual de n-tuplas, es decir,

   $$\forall x, y \in \mathbb{N}^n, xR_2y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

   Demuestre que

   $$xR_2y \Rightarrow xR_1y$$

   Verifique que la implicación en el otro sentido es falsa. Para ello construya un contraejemplo.

Funciones

41. Considere las funciones $f : \mathbb{N} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida en cada $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ por $f(n) = \frac{1}{2n}$ y $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida en cada $q \in \mathbb{Q}$ por $g(q) = \frac{q}{2}$.

   (a) Determine si f, g, $g \circ f$ son inyectivas, epiyectivas y biyectivas.

   (b) Determine los conjuntos pre-imágenes $g^{-1}(\mathbb{Z})$

42. Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por:

$$f(n) \quad = \quad \begin{cases} \frac{n}{3} & ; \quad n \quad \text{es múltiplo de 3} \\ \frac{n+2}{3} & ; \quad n \quad \text{es múltiplo de 3 más 1} \\ \frac{n+1}{3} & ; \quad n \quad \text{es múltiplo de 3 más 2} \end{cases}$$

   Encuentre el dominio de f, la imagen de f y estudie si f es inyectiva, epiyectiva o biyectiva.

43. Estudie en $P(\mathbb{N})$ si son inyectivas o epiyectivas las funciones$f_i : P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N})$ definidas por:

   (a) $f_1(X) = X \bigcap \{2\}$

   (b) $f_2(X) = X \bigcup \{2\}$

   (c) $f_3(X) = X - \{2\}$

44. Sean $A, B \subseteq E$ y $h : P(E) \to P(A) \times P(B)$ definida por $h(X) = (X \cap A, X \cap B)$. Estudie las condiciones para que h sea: (a) inyectiva, (b) epiyectiva, (c) biyectiva.

45. Sea $f_{ab} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; $f_{ab}(n) = an + b$, con $a, b \in \mathbb{Z}$. Encuentre para qué valores de a, b, la aplicación f_{ab} es biyectiva.

46. Sea $f_i : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, definidas por:

    (a) $f_1(x) = x + 3$
    (b) $f_2(x) = \frac{1}{x}$

    Encuentre $f_i^n = f_i \circ f_i \circ \cdots \circ f_i$, n veces.

47. Sean $P_f(\mathbb{N}) = \{A; A \subseteq \mathbb{N}, A finito\}$ y $s : P_f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$; $s(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

    (a) Estudie si s es inyectiva o epiyectiva.
    (b) Calcule $s(\{n, n+1, \ldots, 2n\})$
    (c) $s^{-1}(\{6\})$

48. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = |2x + 3|$

    (a) Estudie si f es inyectiva o epiyectiva.
    (b) Calcule $f \circ f$.

49. Sean $A = \{0, 1, 2, \ldots, 99\}$ y $f : A \to A$ definida por $f(a) = |a - 99|$

    (a) Demuestre que f es biyectiva.
    (b) Determine f^{-1}

50. Sea $f : A \to B$ una función. Considere en A la relación:

$$aRb \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

    (a) Pruebe que R es una relación de equivalencia.
    (b) Para $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ y

$$f(n) = \begin{cases} n+2 & ; \text{ si } n \text{ es par} \\ n+1 & ; \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

    Encuentre A/R (el conjunto cuociente de A/R)

51. Sean $f, g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dos funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & ; \quad x > 0 \\ x + 2 & ; \quad x \neq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 5 & ; \quad x > 3 \\ x^3 & ; \quad x < 3 \end{cases}$$

Determine $g(f(x))$

52. Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto fijo. Para todo subconjunto A de E ($\forall A \subset E$) se define la función característica de A como sigue:
$\Psi_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$; tal que

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad \text{si } x \in A \\ 0 & ; \quad \text{si } x \notin A \end{cases}$$

(a) Describa $\Psi_E(x)$ y $\Psi_\emptyset(x)$, $\forall x \in E$.

(b) Demuestre que ($\forall x \in E$): $\Psi_{A \cap B}(x) = \Psi_A(x) \cdot \Psi_B(x)$

(c) Si $C, D \subset E$, entonces

$$C \subset D \Leftrightarrow (\forall x \in E); \Psi_C(x) \leq \Psi_D(x)$$

53. Sea $A = \{-7, -6, -5, \cdots, 5\} \subset \mathbb{Z}$ $f : A \longrightarrow \mathbb{Z}$; tal que

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(n + 7) + 2 & ; \quad -7 \leq n < -3 \\ 1 & ; \quad -3 \leq n \leq 0 \\ (n - 3)^2 - 1 & ; \quad 1 \leq n \leq 5 \end{cases}$$

Calcule $f(3)$, $f(1)$; $f(5)$. Estudie si f es inyectiva y justifique. Haga las restricciones mínimas necesarias para que f sea una función biyectiva y determine f^{-1}

54. Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$, con la condición $D \subset A$. Probar que:

(a) Si f y g son inyectivas, entonces fog es inyectiva.

(b) Si f y g son epiyectivas, entonces fog es epiyectiva

(c) Si f y g son crecientes, entonces fog es creciente

55. Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ una función con la propiedad siguiente:

$$f(n + m) = f(n) + f(m).$$

para cada par de enteros n y m

(a) Se define la relación R en $\mathbb{Z}$ por:

$$nRm \Leftrightarrow f(n) = f(m)$$

Probar que R es una relación de equivalencia.

(b) Probar que $f(0) = 0$, recuerde para ello que $0 + 0 = 0$

(c) Probar que $f(-m) = -f(m); \forall m \in \mathbb{Z}$. Indicación: use que $m-m = 0$

(d) Pruebe que f es inyectiva ssi$f-1^(\{0\}) = \{0\}$

56. Sea $f : E \longrightarrow F$ una función. Se dice que un subconjunto A de E es estable si $f^{-1}(f(A)) = A$. Probar que si A y B son subconjuntos estables de E entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ también lo son.

57. Sea $\mathcal{F} = \{f : A \longrightarrow B; f \text{es función}\}$, es decir, es el conjunto que contiene a todas las funciones de A en B. Sea R una relación de orden en B. Se define en $\mathcal{F}$ la relación R^* por:

$$fR^*g \Leftrightarrow \forall a \in A, f(a)Rg(a)$$

Probar que R^* es una relación de orden en $\mathcal{F}$. Probar que si A y B tienen al menos dos elementos entonces R^* es una relación de orden parcial.

Inducción y Conteo

58. Calcule las siguientes sumatorias:

(a) $\sum_{i=1}^{n}(2 + 3i)$

(b) $\sum_{i=8}^{100} i$

59. La suma de 3 números en Progresión Aritmética es 27 y la suma de sus cuadrados es 293. Determine tales números.

60. Si en una progresión aritmética, el quinto término es 15 y el décimo es 30, entonces determine la P.A.

61. Calcule la suma de los 101 primeros términos de la P.G. siguiente:

$$G = \{\frac{12}{\sqrt{3}}, 3\sqrt{3}, \cdots\}$$

62. La suma de tres números en P.G. es 26, su producto es 216. Determine tales números.

63. Si los números x, y, z están en P.G. y son distintos, demuestre que

$$\frac{1}{y-x}, \frac{1}{2y}, \frac{1}{y-z}$$

están en P.A.

64. La suma de tres números en P.A. es 30. Si al primero de ellos se le agrega 1, al segundo 5 y al tercero 29 se obtiene una P.G. Determinar ambas progresiones.

65. Considere las progresiones

$$G = \{g_1, g_2, g_3, \cdots\} \quad P.G. \quad A = \{3, a_2, a_3, \cdots\} \quad P.A.$$

Tal que

(a) $g_3 = 12$; $g_7 = 192$

(b) $\sum_{i=1}^{11} g_i = \sum_{i=1}^{50} a_i$

Determine la diferencia de la P.A.

66. Demuestre usando inducción las fórmulas proposicionales siguientes:

(a) $F(n) = \sum_{i=1}^{n} i2^{i-1} = 1 + (n-1)2^n$.

(b) $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9.

(c) $n^3 + 2n$ es divisible por 3.

(d) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7

(e) $5^{2n} + (-1)^{n+1}$ es divisible por 13.

(f) $7^{2n} + 16n - 1$ es divisible por 64.

(g) $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x - y$.

(h) $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ divisible por $x + y$

(i) $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Son verdaderas $\forall n; n \in \mathbb{N}$

67. Demostrar que si n es un entero, entonces $\frac{(n+6)(n+13)(n-4)}{6}$, también es un número entero.

68. Demuestre que si n es un entero, entonces $n^3 + 11n$ es divisible por 6

69. Probar que para todo natural mayor o igual a 1 se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}$$

70. La a_k es una sucesión de números reales tal que satisface : $\sum_{k=1}^{n} = 2n+3n^2$. Demuestre que es una P.A. y encuentre una expresión para a_n en términos de n.

71. Sean $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dos secuencias de números reales. Considere los naturales p y n tales que $p \leq n$. Probar que

$$\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1}-a_k)b_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_p b_p - \sum_{k=p}^{n} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k)$$

72. Demuestre, sin inducción que:

(a) $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot n$

(b) $\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$

73. Demuestre que $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n-1}}{n+1}$

74. Sea $k \in \{0, 1, \cdot, n-1\}$. Verifique que $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$

75. Determine el término que contiene $\frac{x^2}{y^2}$ en el desarrollo binomial:

$$(\frac{x}{y} - \frac{y^2}{2x^2})^8$$

76. Pruebe que para $n \geq 1$, para cualquier $j \geq 0$ se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i+j-1}{j} = \binom{n+j}{j+1}$$

77. Pruebe sin usar inducción que para $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$$

y deduzca que

$$(1+\frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

78. Demuestre que si C es el coeficiente del término que contiene a x^a en el desarrollo binomial

$$(x^3 - \frac{1}{x})^{3n}$$

entonces

$$C = (-1)^{\frac{9n-a}{4}} \frac{(3n)!}{(\frac{9n-a}{4})!(\frac{3n+a}{4})!)}$$

79. Sean p y q dos reales no negativos tales que $p+q=1$. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k$$

Indicación: $k^2 = k(k-1)+k$

Estructuras Algebraicas

80. En $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ se define la ley de composición siguiente:

$$(a,b)*(c,d) = (ac, bc+d)$$

(a) Estudie las propiedades de $*$

(b) Calcule $(1,2)^3$, $(2,1)^{-2}$, $(2,4)^4$

81. Estudie las siguientes estructuras:

(a) $(\mathbb{R}^2,*)$; $\quad (a,b)*(c,d) = (a+c, b+d+2bd)$

(b) Sea $S=\{a+b\sqrt{2};\ \ a,b\in\mathbb{R}\}$. Se define $\forall x,y\in S$
$x*y = (a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})$
$x\triangle y = (a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})$

(c) $(\mathbb{N},*)$, $\quad a*b = \text{máx}\{a,b\}$

(d) $(\mathbb{N},*)$, $\quad a*b = \text{máx}\{a,b\} - \text{mín}\{a,b\}$

(e) Sea $S=\{1,2,3,4,6\}$, Estudie $(S,*)$, donde $a*b = m.c.d.(a,b)$

(f) Sea $S=\{1,2,5,10\}$, y considere $(S,+,*)$, donde $a+b = m.c.d.(a,b)$ y $a*b = m.c.m.(a,b)$

(g) $(P(X),\triangle,\cap)$, $X\neq\emptyset$, donde $\triangle$ es la diferencia simétrica.

(h) $(P(X),\cup,\cap)$, $X\neq\emptyset$

82. (a) Demuestre que el conjunto formado por los giros alrededor del origen forman un grupo con la composición. Demuestre además que si g_α denota el giro en α grados, entonces

$$g_\alpha\cdot g_\beta = g_{\alpha+\beta}$$

.

(b) Demuestre que $(\mathcal{M},\cdot)$ es un grupo, donde

$$\mathcal{M} = \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; a^2+b^2=1, a,b\in\mathbb{R}\}$$

(c) Demuestre que los dos grupos anteriores son isomorfos.

83. Demuestre que

    (a) $H_1 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}_6, +)$

    (b) $H_2 = \{Id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\}$ es un subgrupo de $(S_3, \cdot)$

    (c) $H_3 = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{9}\}$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}_{13}*, \cdot)$

84. Demuestre que si $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $S = \{id, \tau\}$ no es un subgrupo de S_3, sin embargo $H = \{id, \tau, \tau^{-1}\}$ es un subgrupo de S_3

85. Dados $\mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_3$, se define la operación $*$ en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ dada por:

$$(a, b) * (c, d) = (a \otimes_2 c, b \oplus_3 d)$$

    Estudie las propiedades de $*$.

86. Sea $A = \mathbb{Q} - \{\frac{1}{4}\}$. Para todo $x, y \in A$ se define $x \otimes y = x + y - 4xy$

    (a) Demuestre que $\otimes$ es una ley de composición interna.

    (b) Demuestre que $(A, \otimes)$ es un grupo abeliano.

87. En el conjunto de los números naturales, se da la siguiente ley de composición interna $x \otimes y = |x - y|$. Pruebe que esta ley de composición las siguientes propiedades:

    (a) No asociativa (basta un contra-ejemplo)

    (b) Conmutativa

    (c) Tiene neutro

    (d) Tiene inversos

88. Sabiendo que $A = \{a, b, c, d\}$ es un grupo, complete la siguiente tabla de composición:

$\circ$	a	b	c	d
a	c			
b				
c				
d			c	

89. Consideremos la permutación $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

    (a) Determine σ^{12345}

(b) Determine $\theta \in S_5$, tal que $\sigma^{-1} \circ \theta \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

90. En $\mathbb{Z}_{11}$

    (a) Encuentre $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{8}$

    (b) calcule: $\frac{3}{7} - \frac{1}{5}$.

    (c) Resuelva la ecuación: $3x + 7 = 2$

91. Estudie si el número: $1273^{1273} + 806^{806}$, es divisible por 7.

92. Determine la hora que marca un reloj 777 horas después de que sean las once?

Números Complejos

93. Dados $z_1 = -3 + 4i$ y $z_2 = 5 + i$. Calcule $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1^{-1}, z_2^{-1}

94. Expresar en la forma $x + yi$, el número complejo:

$$\frac{(3+5i)(2-i)^3}{-1+4i}$$

95. Calcular el módulo del complejo:

$$\frac{(2-3i)^4(1-i)^3}{5+i}$$

96. Hallar un complejo z tal que:

$$|z| = \frac{1}{|z|} = |1 - z|$$

97. Hallar un complejo z tal que $z^{-1} + 2(\overline{z})^{-1} = 1 + i$

98. Expresar en su forma polar los complejos $-\sqrt{3} + i$ y $3 - 4i$

99. Calcule $(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i})^{40}$

100. Dados los números complejos $z_1 = -2 - \frac{2}{\sqrt{3}}i$ y $z_2 = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$, determine:

    (a) z_1^{12}

    (b) Las raíces cuartas de z_2

101. Sea dada la ecuación: $iz^3 + 27 = 0$. Determinar sus soluciones y representarlas gráficamente en el plano complejo.

102. En $\mathbb{C}$, resuelva la ecuación $x^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

103. (a) Calcule todas las soluciones complejas de la ecuación

$$z^n = -1, \quad \text{para} \quad n \geq 2$$

(b) Pruebe que la suma de las soluciones obtenidas en la parte anterior es cero.

104. Calcule las raíces de la ecuación $z^2 = -i$ y exprésela de la forma $a + bi$

105. Si $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$, calcule los posibles valores de $z \in \mathbb{C}$ y muestre que $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha$

106. Dados los números complejos : $z_1 = e^{-\frac{\pi}{3}i}$ y $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Calcule las raíces cúbicas de: $\frac{z_1}{z_2}$

107. Demuestre que $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ es una raíz octava de 1.

108. Pruebe que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1-i)^n + (1+i)^n \in \mathbb{R}$$

109. Sea $z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. Verifique que $z^5 - 1 = 0$

110. Demostrar que $\overline{cis\alpha} = cis - \alpha$ y $cis(\alpha - \beta) = \frac{cis\alpha}{cis\beta}$

111. Demostrar que las raíces cúbicas de

$$z = 4(1 + \sqrt{3}i)$$

tienen suma nula.

112. Se tiene que $(S^1, \cdot)$ es un grupo, donde $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ y el producto habitual de números complejos.Demuestre que el producto en S^1 es una ley de composición interna.

Polinomios

113. Al dividir el polinomio$P(X)$ por $(X-1)$ el resto es a y al dividirlo por $(X-2)$ es b. Encuentre el resto que resulta al dividirlo por $(X-1)(X-2)$.

114. Determine los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $P(X) = 2k^2X^3 + 3kX^2 - 2$ sea divisible por $X-1$ y tenga slo raíces reales.

115. Estudie si el polinomio $P(x) = \frac{1}{2}X^4 - \frac{1}{2}X^3 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$, es reducible el $\mathbb{Q}[X]$

116. Encuentre todos los polinomios irreducibles de grado 2, en $\mathbb{R}[X]$

117. Sabiendo que el polnomio

$$P(X) = X^4 - 4X^3 + 10X^2 - 12X + 8$$

posee solamente raíces complejas y que una de ellas tiene módulo 2, encuentre todas las raíces del polinomio

118. Sea $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polinomio con coeficientes reales. Sea $r(X)$ el resto de la división de $P(X)$ por $X-1$. Si $r(4) = 0$ y $x = i$ es una raíz de $P(X)$, calcule a, b, c.

119. Estudie para que valores de a y b, el polinomio $P(X) = 3X^2 + bX - b^2 - a$ es divisible por $X+2$, pero al dividirlo por $X-1$ da resto 1.

120. Al dividir el polinomio $P(X) = aX^4 - 2X^3 + bX^2 - 18X + a$ por $(X-1)$ el resto es 3 y el cuociente es un polinomio que toma el valor 33 para $X = 2$. Encuentre el valor de a y b.

121. Factorice en $\mathbb{C}[X]$ y en $\mathbb{R}[X]$, el polinomio

$$P(X) = X^3 - 14X^2 + 124X - 200$$

sabiendo que una de sus raíces es $6 - 8i$

122. Sea $P(X) = X^4 + bX^3 - 13^2 - 14X + 24$.

    (a) Determinar $b \in \mathbb{R}$, de modo que -2 sea una raíz de $P(X)$

    (b) Determinar las raíces restantes.

123. Determinar las constantes realesA, B, C para que se cumpla:

$$\frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{2}{x-1} - \frac{9}{x-2} + \frac{8}{x-3}$$

124. Exprese como suma de fracciones parciales, la fracción racional siguiente:

$$\frac{5x^3 + 16x^2 + 13x + 9}{(x+2)^2(x^2 - x + 1)}$$

125. En los reales, descomponga en fracciones parciales, la fracción racional siguiente:

$$\frac{4x^3 + 10x^2 - x + 5}{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2}$$