Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Taller N°4
Cálculo I (IME002)

Profesores: Mauricio Carrillo, Alex Sepúlveda.

29 de Julio 2008.

Problema.
Considere la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1} + x$. Determine,

1. Dominio, ceros, paridad.
2. Puntos críticos y puntos extremales.
3. Puntos de inflexión, intervalos de monotonía, intervalos de concavidad y convexidad.
4. Ecuaciones de las asíntotas.
5. Esboce la gráfica de f.

Solución.

1. Tenemos que $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Resolviendo $f(x) = 0$ tenemos que los ceros son $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$. Además, como $f(-x) = \frac{x^2}{-x-1} - x$ vemos que f no es par ni impar.
2. La primera derivada de f es $f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} + 1$. Resolviendo $f'(x) = 0$ tenemos que los puntos críticos son $x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. La segunda derivada de f, una vez simplificada es $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$. Con esto, $f''\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2} > 0 \Rightarrow$ con $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ f tiene un mínimo relativo, de coordenada $(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right))$, es decir, $(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2} + 3)$. Por otro lado, $f''\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2} < 0 \Rightarrow$ con $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ f tiene un máximo relativo, de coordenada $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right))$, es decir, $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 3 - 2\sqrt{2})$.
3. Imponiendo la condición $f''(x) = 0$, vemos que no existen puntos de inflexión, pues dicha ecuación no tiene solución. Para la monotonía tenemos,

$\left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$	$\left(1, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

Concluimos que f es creciente en $\left(-\infty, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, decreciente en $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, decreciente en $\left(1, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y creciente en $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$. Para la concavidad y convexidad tenemos,

$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$

Luego, f es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(, \infty)$.

4. Como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ no hay asíntotas horizontales. Por otro lado, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \infty$ tenemos que la recta $x = 1$ es asíntota vertical. Para las asíntotas oblicuas, $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}+x}{x} = 2$ y $n = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} + x - 2x\right) = 1$, concluyendo que la recta $y = 2x + 1$ es asíntota oblicua.

5. Reuniendo toda la información anterior tenemos el siguiente gráfico de f,

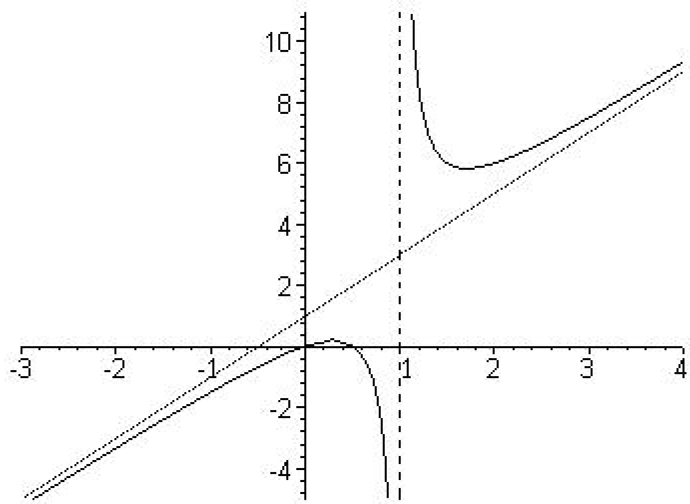

Figura 1: Gráfico de $f(x) = \frac{x^2}{x-1} + x$.