

æ
æ

Algebra Lineal

Dra. María Teresa Alcalde
Dr. César Burgueño

Depto. de Matemática y Estadística
Facultad de Ingeniería, Ciencias y Administración
Universidad de La Frontera

Tercera Edición - 2008

Índice de materias

Introducción	5
1 Sistemas de Ecuaciones Lineales	7
1.1 Definiciones y ejemplos	7
1.2 Combinación lineal de ecuaciones	12
1.3 Operaciones elementales	13
1.4 Sistemas dependientes e independientes	16
1.5 Sistema de Cramer	17
1.6 Proceso de escalonamiento de un sistema	19
1.7 Ejercicios Resueltos	22
2 Espacios Vectoriales	31
2.1 Definición y propiedades básicas de espacio vectorial . .	31
2.2 Sub-espacios vectoriales	42
2.3 Combinaciones Lineales	52
2.4 Sub-espacio generado	58
2.5 Dependencia Lineal.	69
2.6 Bases de un espacio vectorial	79
2.6.1 Método para encontrar una base de un espacio vectorial	85
2.6.2 Aplicación del Teorema de Steinitz	89
2.7 Dimensión de un espacio vectorial	92
2.8 Suma de sub-espacios vectoriales	101
2.9 Ejercicios propuestos	116
3 Aplicaciones Lineales	119
3.1 Introducción, definición y ejemplos	119

3.2	Determinación de una aplicación lineal	126
3.3	Imagen y Núcleo de una aplicación lineal	131
3.4	Morfismos y dimensiones	141
3.5	Estructura de un conjunto de morfismos	152
3.6	Ejercicios resueltos	155
3.7	Ejercicios propuestos	170
4	Matrices	173
4.1	Matriz asociada a una aplicación lineal	173
4.2	Suma de morfismos y suma de matrices	179
4.3	Producto de un escalar por un morfismo y producto de un escalar por una matriz	181
4.4	Composición de morfismos y producto de matrices . . .	183
4.5	Algunos tipos especiales de matrices	186
4.6	Forma matricial de $f(v) = w$	193
4.7	Forma matricial de un sistema de ec. lineales	195
4.8	Isomorfismos y matrices invertibles	195
4.9	Automorfismo y matriz de cambio de base	200
4.10	Un morfismo cualquiera y matrices equivalentes	203
4.11	Ejercicios resueltos	206
4.12	Ejercicios propuestos	215
5	Determinantes	219
5.1	Determinantes de matrices de $M_2(K)$	219
5.2	Determinantes de matrices de $M_3(K)$	225
5.3	Determinante de matrices de $M_n(K)$	228
5.4	Interpretación geométrica del determinante	231
5.5	Matriz adjunta	232
5.6	Determinante de un endomorfismo	234
5.7	Ejercicios resueltos	236
5.8	Ejercicios propuestos	246
6	Diagonalización	249
6.1	Introducción	249
6.2	Valores propios y vectores propios	253
6.3	Valores propios simples	258
6.4	Valores propios múltiples	265

6.5	Ejercicios resueltos	268
6.6	Ejercicios propuestos	273
7	Aplicaciones Bilineales	275
7.1	Aplicaciones bilineales	276
7.1.1	Ejemplos. Propiedades generales	276
7.2	Formas bilineales	287
7.2.1	Matriz asociada a una forma bilineal	288
7.2.2	Representación matricial de $f(x, y)$	289
7.3	Espacios Euclidianos	291
7.3.1	Producto escalar	291
7.3.2	Norma	293
7.3.3	Ortogonalidad	298
7.3.4	Angulo y distancia entre vectores	304
7.4	Formas bilineales simétricas	306
7.5	Ejercicios resueltos	307
7.6	Ejercicios propuestos	315
	Epílogo	317
	Bibliografía	319

Introducción

Queremos que sepas que estos apuntes los escribimos con toda dedicación para ti. Deseamos que te entretengas estudiando y que por supuesto, te alegre aprender.

Tratamos de explicarte cómo ha ido naciendo el Algebra Lineal. Tu sabes, las matemáticas han sido creadas por personas al igual que ti y siempre tuvieron un motivo para crear tal definición, proposición o teorema. Siempre tuvieron un motivo para dar tal nombre a tal ente matemático.

Queremos conversarte de lo importante que es para ti, estudiar clase a clase, muy especialmente en el primer y segundo capítulo. Son conceptos muy distintos, sin embargo, bastantes alumnos los confunden y esto se debe exclusivamente a la falta de estudio organizado.

El Algebra Lineal, como las demás materias, no se puede estudiar sólo la última semana antes de la prueba. Que no tengas que decir: "Estudié los dos últimos días hasta la madrugada y mire profe, me saqué un dos"

Al ir estudiando es muy importante que leas con mucha atención la introducción en cada capítulo y en cada sección. Ahí se explica lo que se quiere conseguir en esa sección, se explica cuál es el problema a estudiar. Así será más fácil entender la materia. Si tienes poco tiempo para estudiar, no creas que ganarás tiempo saltándote las introducciones. Eso es un error.

Las explicaciones que hay a lo largo de los apuntes se deben a una serie de consultas que han hecho los alumnos en forma frecuente y también

a errores que cometen todos los semestres en sus pruebas.

Es por estos motivos que nos hemos dado el trabajo de dar ciertas explicaciones. Piensa querido alumno o querida alumna, en todos los jóvenes que te han presedido y nos han pedido esa explicación. ¿De acuerdo?

Estamos seguros que en este tercer milenio tendrán ventaja en su profesión, aquellas personas que dominen los conceptos. Tienes que pensar en tu futuro y no solamente en la nota que tendrás en los días próximos.

Queremos que sepas que estamos muy agradecidos de muchas personas que han permitido la realización de estos apuntes. Muchos alumnos que nos animaron a escribirlos. El doctor Cristián Mallol, amigo y colega quien es el autor de muchos ejercicios y quien nos hizo varias sugerencias. Nuestros hijos quienes pacientemente han aceptado las horas dedicadas a este escrito.

María Teresa y César

Capítulo 1

Sistemas de Ecuaciones Lineales

1.1 Definiciones y ejemplos

Nos hemos dado cuenta que muchos alumnos que llegan al curso de álgebra lineal no saben qué es una ecuación lineal, entonces ¿empecemos por el principio?

Comencemos por ver algunos ejemplos de ecuaciones lineales:

Ejemplo: $x + 2y - 3z + t = 6$

Ejemplo: $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7$

Antiejemplo: $2xy + 5x + 5z = 4$ No es lineal, pues hay incógnitas multiplicadas entre sí.

Antiejemplo: $2x^2 + 3x - 5t = 5$ No es lineal, pues la incógnita x está elevada a una potencia distinta a 1.

Creo que ahora vas a entender bien la definición ¿cierto?

Definición 1.1.1 Una ecuación lineal de n incógnitas es una expresión del tipo:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta \quad , \quad \alpha_i, \beta \in K$$

K un cuerpo. Los x_i son llamados incógnitas.

$$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_p, \quad p \text{ primo}$$

Recuerde que \mathbb{Z} es un anillo, no alcanza a ser un cuerpo.

Resolver una ecuación es encontrar **todos** los elementos de K que cumplen la igualdad. Esto quiere decir que no basta con encontrar algunas soluciones.

Veamos en un ejemplo cómo encontrar todas las soluciones.

Ejemplo

Resolvamos la ecuación lineal $2x + 3y - 2z = 5$

Solución

Bueno hay que despejar una de las incógnitas. En esta oportunidad escogeremos x :

$$x = -\frac{3}{2}y + z + \frac{5}{2}; \quad y, z \in \mathbb{R}$$

Esto quiere decir que cada vez que le demos un valor a y y a z , tendremos una solución (x, y, z) .

Por ejemplo: Sea $y = z = 0$, entonces $x = \frac{5}{2}$ luego la solución es $(\frac{5}{2}, 0, 0)$

Otro ejemplo: Sea $y = 1, z = 0$, entonces $x = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}$, luego $x = 1$. Luego otra solución es $(1, 1, 0)$

El conjunto de soluciones está dado por $\{(-\frac{3}{2}y + z + \frac{5}{2}, y, z); y, z \in \mathbb{R}\}$

Es interesante que sepas, que cuando en matemática uno define un ente, el próximo paso a seguir es definir cuando dos de esos entes son iguales.

En este caso no hablaremos de igualdad de ecuaciones, sino, siguiendo la tradición hablaremos de ecuaciones equivalentes, ¿de acuerdo?

Definición 1.1.2 Diremos que dos ecuaciones lineales son **equivalentes** si y sólo si tienen las mismas soluciones.

Veamos dos ejemplos:

Ejemplo

Consideremos las ecuaciones

$$\begin{aligned} E1 : \quad x + y + z &= 3 \\ E2 : \quad 2x + 2y + 2z &= 6 \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones son equivalentes pues tienen las mismas soluciones.

Ejemplo

$$\begin{aligned} 1) : \quad x + 3y - 5z &= 5 \\ 2) : \quad 2x + 6y - 10z &= 10 \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones son equivalentes.

Nota

Hemos observado que hay alumnos que no saben resolver la ecuación lineal:

$$E : 0x = 0$$

¿Cuáles son los números reales que cumplen esta ecuación? Por supuesto, todos los números reales! ¡trivial!

Algunos contestan $x = 0$.

A lo largo del curso nos encontraremos en repetidas oportunidades ante esta situación, así es que: ¡no lo olvides!

Antes de dar la definición de un sistema de ecuaciones lineales, veremos algunos ejemplos:

Ejemplo

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + z = -1 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{array} \right\}$$

Este es un sistema de ecuaciones lineales de 2 ecuaciones y 3 incógnitas.

Resolver este sistema, significa que debemos encontrar **todos** los $x, y, z \in K$, tales que cumplen las 2 ecuaciones al mismo tiempo.

Ejemplo

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 11 \\ 4x - y = 11 \\ x + 3y = 9 \\ x + y = 14 \end{array} \right\}$$

Sistema formado por 4 ecuaciones y 2 incógnitas

Ejemplo

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ 2x + 3y = 7 \\ 3x - y + z = -2 \end{array} \right\}$$

Sistema formado por 3 ecuaciones y 3 incógnitas.

Ejemplo

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 2z = 5 \end{array} \right\}$$

Este sistema es incompatible, pues no existen 3 números que al sumarlos se obtenga 2 y $\frac{5}{2}$ al mismo tiempo.

Bueno, como has podido apreciar no hay relación entre el número de ecuaciones y el número de incógnitas para tener un sistema. Veamos la definición.

Definición 1.1.3 *Un sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas, es un sistema del tipo:*

$$\left. \begin{array}{rcll} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + & \cdots & +\alpha_{1n}x_n & = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + & \cdots & +\alpha_{2n}x_n & = \beta_2 \\ \dots\dots\dots & & & \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + & \cdots & +\alpha_{mn}x_n & = \beta_m \end{array} \right\}$$

Donde $\alpha_{ij}, \beta_i \in K$, los x_j son llamados las **incógnitas**.

Dada la definición, el próximo paso a seguir es definir cuándo dos sistemas son equivalentes. A la vista, no es obvio cuándo dos sistemas lo son.

¿Lo vemos primero en un ejemplo?

Observación

Estudiemos el sistema

$$\left. \begin{array}{l} E_1: 2x - y = 4 \\ E_2: 3x + y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow E_1 + E_2: 5x = 5 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$x = 1 \quad \text{en} \quad E_2 : y = 1 - 3 \Rightarrow \boxed{y = -2}$$

Ahora estudiemos el siguiente sistema, de apariencia muy distinta al anterior:

$$\left. \begin{array}{l} E_1: 3x - 2y = 7 \\ E_2: x + 2y = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow E_1 + E_2: 4x = 4 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$x = 1 \quad \text{en} \quad E_2 : 2y = -3 - 1 \Rightarrow \boxed{y = -2}$$

Puesto que los dos sistemas tienen las mismas soluciones diremos que son "equivalentes".

Tenemos, entonces, la definición siguiente:

Definición 1.1.4 Diremos que dos sistemas son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.

1.2 Combinación lineal de ecuaciones

En esta sección nos ocuparemos de cómo obtener a partir de algunas ecuaciones, otras ecuaciones, dentro del mismo sistema.

Veamoslo en un ejemplo. ¡ Es tan fácil comprender los conceptos en un ejemplo! ... y luego generalizarlo.

Observación

Consideremos el sistema siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} E_1 : x + 2y = -1 \\ E_2 : 2x + y = 1 \end{array} \right\}$$

De este sistema podemos obtener la ecuación

$E_3 = E_2 + 2E_1 : 4x + 5y = -1$, de tal modo que, si x e y cumplen las ecuaciones E_1 y E_2 , entonces cumplen E_3 .

Diremos que E_3 es una "combinación lineal" de E_1 y E_2

Ahora, entenderás la definición siguiente:

Definición 1.2.1 Sean E_1, E_2, \dots, E_n , n ecuaciones. Diremos que la ecuación

$$E = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots + \alpha_n E_n$$

es una **combinación lineal** de las ecuaciones E_1, E_2, \dots, E_n

1.3 Operaciones elementales

Bueno, el problema que enfrentaremos ahora es encontrar las operaciones que podemos efectuar a un sistema de manera de obtener otro equivalente.

Definición 1.3.1 Diremos que una **operación es elemental** si nos permite pasar de un sistema de ecuaciones a otro equivalente.

Pero, veamos cuáles son estas operaciones. Es trivial que si cambiamos el orden de las ecuaciones seguimos teniendo el mismo sistema, es decir, uno equivalente. Entonces

Primera operación: Consiste en intercambiar el orden de las ecuaciones.

Ejemplo

Es super importante que comiences a aprender la notación que usaremos para indicar la operación ¡Es fácil! ¡Es trivial!

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = 7 \end{array} \right\} \xrightarrow{L_{12}} \left. \begin{array}{l} x - y = 7 \\ x + y = 3 \end{array} \right\}$$

A pesar de ser una operación trivial, la usaremos a lo largo de **todo** el curso con el objetivo de ordenar algunas cosas.

Notación: L_{ij} denota el intercambio de la ecuación i con la ecuación j .

También es trivial la operación siguiente:

Segunda operación: Consiste en multiplicar una ecuación por un número distinto de cero.

Ejemplo

(Nuevamente observe la notación)

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - 2y = 7 \end{array} \right\} \xrightarrow{L_1(2)} \left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 6 \\ x - 2y = 7 \end{array} \right\}$$

La ecuación (1) fue multiplicada por 2.

Observación: Si se multiplica una ecuación por cero, ésta se elimina, por lo tanto el sistema obtenido no es equivalente al original. Es decir no está permitida la multiplicación por cero.

Notación: $L_i(\alpha)$ denotará la multiplicación por α de la ecuación i .

Ejemplo

$$\left. \begin{array}{l} x = 6 \\ x + 2y = 7 \end{array} \right\} \xrightarrow{L_1(0)} \left. \begin{array}{l} 0x = 0 \\ x + 2y = 7 \end{array} \right\}$$

En el primer sistema, existe una única solución, ésta es $(6, \frac{1}{2})$. En el segundo sistema, el conjunto de soluciones es

$$\{(x, \frac{7-x}{2}); x \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo

$$(\alpha - 5)x + (\alpha - 5)y = 3(\alpha - 5)$$

Esta ecuación es equivalente a $x + y = 3$ **salvo en el caso** $\alpha = 5$

Tercera operación: Consiste en sumarle a una ecuación un múltiplo de otra ecuación.

Ejemplo

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = 7 \end{array} \right\} \xrightarrow{L_{21}^{(1)}} \left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2x = 10 \end{array} \right\}$$

A la segunda ecuación, le hemos sumado 1 vez la primera ecuación.

Notación: $L_{ij}(\alpha)$ denotará sumarle a la ecuación i , α veces la ecuación j .

Estas son las únicas tres operaciones elementales. No hay otras.

Nota

Estas operaciones son reversibles. En efecto:

1. La primera operación: Si cambiamos la ecuación E_i con la ecuación E_j , la operación inversa es ella misma.
2. La segunda operación: Si la ecuación E_i la multiplicamos por α , $\alpha \neq 0$, entonces la operación inversa es multiplicar la ecuación E_i por $\frac{1}{\alpha}$.
3. La tercera operación: Si la ecuación E_i la cambiamos por $E'_i = E_i + \alpha E_j$, volvemos a la ecuación E_i , al efectuar la operación $E'_i - \alpha E_j = E_i$.

El hecho de que tales operaciones sean reversibles garantiza que el sistema que se obtiene de otro por operaciones elementales sucesivas sea equivalente al inicial.

Luego los dos sistemas son equivalentes.

El sentido de utilizar las operaciones elementales es conseguir trabajar sobre un sistema con una escritura más simple.

Debemos cuidar de ir haciendo tales transformaciones por etapa.

1.4 Sistemas dependientes e independientes

Si en un sistema, una ecuación está escrita dos veces, es algo realmente inútil. ¡Trivial!

Pero, a veces, no es tan trivial que hay ecuaciones agregadas inútilmente, es decir ecuaciones que se pueden obtener de las anteriores. En lenguaje elegante: ecuaciones que son combinación lineal de las demás.

Observación

Consideremos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} E_1 : 3x + y = 2 \\ E_2 : 2x - y = 3 \\ E_3 : x + 2y = -1 \end{array} \right\}$$

Vemos que $E_3 = E_1 - E_2$, es decir, E_3 es una combinación lineal de E_1 y E_2 .

Diremos que el sistema es "dependiente".

Es obvio, que para buscar la solución del sistema nos quedamos solamente con las dos primeras ecuaciones.

Definición 1.4.1 Diremos que un sistema de ecuaciones es **linealmente dependiente** si al menos una ecuación es combinación lineal de las otras.

Observación

Consideremos el sistema siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} E_1 : x + y = 3 \\ E_2 : x + 3y = 5 \end{array} \right\}$$

Este sistema no es dependiente pues una ecuación no es múltiplo de la otra. Diremos que es "independiente".

Definición 1.4.2 Diremos que un sistema de ecuaciones es **linealmente independiente** cuando no es linealmente dependiente, es decir, si ninguna ecuación es combinación lineal de las otras.

En definitiva, en un sistema linealmente independiente no hay información de más.

Un sistema de ecuaciones linealmente independiente puede tener tres aspectos posibles:



más incógnitas que ecuaciones.



más ecuaciones que incógnitas.



número de ecuaciones = número de incógnitas.

1.5 Sistema de Cramer

Cuando estudiamos un sistema de ecuaciones lineales, a nosotros nos interesa el número de ecuaciones independientes.

Se supone que el primer paso para resolver un sistema, es quedarse con un sistema independiente.

Entonces, comencemos por estudiar un sistema independiente.

Definición 1.5.1 Un sistema de n ecuaciones y n incógnitas, linealmente independiente, es llamado **Sistema de Cramer**.

Observación

En la Educación Media, uno comprendió que un sistema lineal de 2 ecuaciones y 2 incógnitas tiene una única solución. Comprendimos que

Estudiemos el sistema formado por las n primeras ecuaciones. Este sistema lo escribimos de la manera siguiente:

Podemos pensar $\gamma_j = \beta_j - \alpha_{jn+1}x_{n+1}$ como constantes. Entonces, tenemos un sistema de Cramer de $n \times n$, luego tiene solución única, a saber $\theta_1, \dots, \theta_n$, con los elementos θ_i en función de α_{ij}, β_i y x_{n+1} . Estos $\theta_1, \dots, \theta_n$ los reemplazamos en E_{n+1} y tenemos:

$$E_{n+1} : \alpha_{n+11}\theta_1 + \alpha_{n+12}\theta_2 + \dots + \alpha_{n+1n}\theta_n + \alpha_{n+1n+1}x_{n+1} = \beta_{n+1}$$

De esta ecuación se despeja x_{n+1} (recuerde que los $\theta_1, \dots, \theta_n$ están en función de x_{n+1})

Entonces tenemos una solución única. Luego todo sistema de Cramer de n ecuaciones y n incógnitas tiene una única solución, para todo n , número natural.

1.6 Proceso de escalonamiento de un sistema

El proceso que nos ocupa ahora es escribir los sistemas en su forma más simple posible, pero, antes debemos definir qué será para nosotros "la forma más simple posible". A esta forma la llamaremos **forma escalonada**.

Entonces, comencemos por ver algunos ejemplos de sistemas escalonados.

Ejemplo

El sistema siguiente está en su forma escalonada:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 5t = 2 \\ z + 3t = 3 \\ u = 4 \end{array} \right\}$$

Observemos cómo están dispuestos los coeficientes:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Definición de sistema escalonado

Diremos que un sistema de ecuaciones lineales está escalonado si satisface las tres condiciones siguientes:

1. El coeficiente de la primera incógnita distinta de cero de cada ecuación es 1. Es llamado líder.
2. Cuando hay un líder, los demás elementos de la columna son ceros.
3. Los líderes deben ir de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.

Veamos otros ejemplos:

Ejemplo

$$\left. \begin{array}{l} x + 4z + 3t = 1 \\ y + 2z + 5t = 4 \end{array} \right\}$$

Los coeficientes están distribuidos como sigue:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{array} \right)$$

El cual es un sistema escalonado.

Ejemplo

Se puede tener también el sistema, obviamente incompatible, siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x + 4z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 1 \end{array} \right\}$$

Sus coeficientes están distribuidos como sigue:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

El cual es un sistema escalonado.

Definición 1.6.1 *Matriz es una ordenación rectangular de números.*

Definición 1.6.2 *Escalonar un sistema de ecuaciones lineales es llevarlo a un sistema escalonado equivalente, a través de operaciones elementales.*

Observaciones

Si al escalonar quedan filas con ceros únicamente, significa que el sistema inicial era dependiente, es decir había información de sobra.

Si al escalonar queda una fila del tipo:

$$0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad | \quad 1$$

significa que el sistema no tiene solución.

Si al escalonar, las filas distintas de cero corresponden a un sistema de n ecuaciones y n incógnitas, es un sistema de Cramer, luego tiene solución única.

Y si al escalar, las filas distintas de cero corresponde a un sistema que tiene menos ecuaciones que incógnitas, obviamente que habrá infinitas soluciones.

Pero más que saber cuántas soluciones tiene un sistema, es importante encontrar las soluciones.

A continuación veremos varios ejercicios en los cuales se encuentran las soluciones de los sistemas, en caso que estas soluciones existan.

Es emocionante ver cómo recién comenzado el curso, podemos resolver los sistemas lineales y familias de sistemas lineales.

1.7 Ejercicios Resueltos

Ejercicio

Estudiemos el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ x - y + 2z = -3 \end{array} \right\}$$

Solución

Comencemos por escalar el sistema, es decir, escribámoslo en su forma más simple.

Anotemos solamente los coeficientes, para no escribir tantas letras,

pero, siempre respetando el orden.

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[L_{41}^{(-1)}]{L_{21}^{(-2)} \quad L_{31}^{(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \end{array} \right) \\
 \\
 L_2^{(\frac{-1}{3})} \xrightarrow[L_4^{(-1)}]{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{array} \right)} \xrightarrow[L_{42}^{(-2)}]{L_{12}^{(-1)} \quad L_{32}^{(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
 \\
 L_{13}^{(-1)} \xrightarrow[L_{43}^{(1)}]{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)} \Rightarrow \begin{array}{|c|} \hline x=1 \\ \hline y=2 \\ \hline z=-1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Es decir, la solución es $(1, 2, -1)$

Realmente fácil de obtener la solución ¿cierto ?

Ejercicio

Estudiemos el sistema de ecuaciones sgte.:

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z + 2u = 0 \\ x + y + 3z + 4u = 0 \\ 2x + y + 4z + 7u = 0 \\ 3x + y + 5z + 10u = 0 \end{array} \right\}$$

Solución

Comencemos por escalar el sistema:

$$\begin{array}{ccc}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 10 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_{21}^{(-1)} \\ \longrightarrow \\ L_{31}^{(-2)} \\ L_{41}^{(-3)} \end{array} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 0 \end{array} \right) \\
\\
L_2^{(\frac{1}{2})} & \longrightarrow & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_{12}^{(1)} \\ \longrightarrow \\ L_{32}^{(-1)} \\ L_{42}^{(-1)} \end{array} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

Es decir tenemos el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x + z + 3u = 0 \\ y + 2z + u = 0 \end{array} \right\}$$

Si despejamos las incógnitas que corresponden a los líderes, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} x = -z - 3u \\ y = -2z - u \end{array} \right\} ; z, u \in \mathbb{R}$$

Luego, el conjunto de soluciones es:

$$\{(-z - 3u, -2z - u, z, u); z, u \in \mathbb{R}\}$$

Definición 1.7.1 Una familia de sistemas es un conjunto formado por una cantidad infinita de sistemas que han sido contruídos de manera análoga.

Ejercicio

Estudiemos la familia de sistemas siguiente para los diferentes valores de $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} x + 4z + 6t = 1 \\ x + y + 9z + 6t = 3 \\ 2y + 10z + (\alpha + 3)t = (\alpha + 3) \end{array} \right\}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 10 & \alpha+3 & \alpha+3 \end{array} \right) & \xrightarrow{L_{21}^{(-1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & \alpha+3 & \alpha+3 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{L_{32}^{(-2)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+3 & \alpha-1 \end{array} \right) \quad (1.1)
\end{aligned}$$

Debemos estudiar separadamente el sistema con $\alpha+3=0$ y la familia con $\alpha+3 \neq 0$.

Caso 1 | $\alpha+3=0$ es decir $\alpha=-3$

Tenemos el sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow 0 = -4 \Rightarrow \Leftarrow$$

Es decir, este sistema no tiene solución.

Caso 2 | $\alpha+3 \neq 0$ es decir $\alpha \neq -3$

Seguimos escalonando el sistema (1.1):

$$\begin{aligned}
L_3^{(\frac{1}{\alpha+3})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha-1}{\alpha+3} \end{array} \right) & \xrightarrow{L_{13}^{(-6)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & \frac{-5\alpha+9}{\alpha+3} \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha-1}{\alpha+3} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

La familia de sistemas escalonada es la siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x + 4z = \frac{-5\alpha+9}{\alpha+3} \\ y + 5z = 2 \\ t = \frac{\alpha-1}{\alpha+3} \end{array} \right\} \alpha \neq -3$$

Despejando las incógnitas que corresponden a los líderes tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{-5\alpha+9}{\alpha+3} - 4z \\ y = 2 - 5z \\ t = \frac{\alpha-1}{\alpha+3} \end{array} \right\} ; z \in \mathbb{R}, \alpha \neq -3$$

Comprobemos las soluciones:

Caso $\alpha = -3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 10 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad 2E_1 - 2E_2 + E_3 : \quad 0 = -4 \Rightarrow \Leftarrow$$

Luego no existe solución.

Caso $\alpha \neq -3$

$$\begin{aligned} E_1 : & \quad \left(\frac{-5\alpha+9}{\alpha+3} - 4z \right) + 4z + \frac{6\alpha-6}{\alpha+3} = \frac{\alpha+3}{\alpha+3} = 1 \\ E_2 : & \quad \left(\frac{-5\alpha+9}{\alpha+3} - 4z \right) + (2 - 5z) + 9z + \frac{6\alpha-6}{\alpha+3} = \frac{\alpha+3}{\alpha+3} + 2 = 3 \\ E_3 : & \quad 2(2 - 5z) + 10z + (\alpha + 3)\frac{\alpha-1}{\alpha+3} = 4 + \alpha - 1 = (\alpha + 3) \end{aligned}$$

Luego cumple

Ejercicio

Resolvamos la siguiente familia de sistemas según los diferentes valores de $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = -1 \\ x + (\alpha + 1)y + (\alpha + 2)z = 2 \\ x + 2y + (\alpha + 5)z = \alpha^2 - \alpha - 7 \end{array} \right\}$$

Solución

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+2 & 2 \\ 1 & 2 & \alpha+5 & \alpha^2-\alpha-7 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow[L_{31}^{(-1)}]{L_{21}^{(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha+2 & \alpha^2-\alpha-6 \end{array} \right) \quad (1.2)
\end{aligned}$$

Caso 1 $\mid \alpha + 2 = 0$ es decir $\alpha = -2$

Reemplazando en (1.2), tenemos:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2^{(\frac{-1}{3})}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{L_{12}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

El sistema escalonado es :

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ y + z = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = -1 - z \end{array} \right\} ; z \in \mathbb{R}$$

Caso 2 $\mid \alpha + 2 \neq 0$ es decir $\alpha \neq -2$. Puesto que $\alpha + 2 \neq 0$ podemos seguir escalonando el sistema (1.2):

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{L_3^{(\frac{1}{\alpha+2})}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha-3 \end{array} \right) \quad (1.3)
\end{aligned}$$

Caso 2i $\mid \alpha - 1 = 0$, es decir $\alpha = 1$

En el sistema (1.3), la segunda ecuación queda

$$0 = 3 \Rightarrow \Leftarrow$$

Luego no existe solución.

Caso 2ii $\mid \alpha \neq 1, -2$

Seguimos escalonando el sistema (1.3). Tenemos

$$\begin{aligned} L_2^{(\frac{1}{\alpha-1})} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha-3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_{13}^{(-3)} \quad L_{23}^{(-1)}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3\alpha+8 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-\alpha^2+4\alpha}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha-3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_{12}^{(-2)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-\alpha^2+3\alpha-8}{\alpha-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-\alpha^2+4\alpha}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha-3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Luego tenemos una única solución, a saber

$$x = \frac{-\alpha^2 + 3\alpha - 8}{\alpha - 1}; \quad y = \frac{-\alpha^2 + 4\alpha}{\alpha - 1}; \quad z = \alpha - 3$$

Sólo haremos la comprobación del caso $\alpha = 1$

Tenemos

$$\left. \begin{array}{l} E_1 : x + 2y + 3z = -1 \\ E_2 : x + 2y + 3z = 2 \end{array} \right\}$$

Con estas dos ecuaciones basta ver que el sistema es inconsistente. Las demás soluciones satisfacen el sistema. Ahora es su turno comprobar las otras soluciones. ¡Ánimo!

Ejercicio

Estudiemos la siguiente familia de sistemas de ecuaciones según los diferentes valores de $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ y + z = -1 \\ (\alpha^2 - 4)y + (\alpha - 2)z = \alpha + 2 \end{array} \right\}$$

Solución

Comencemos a escalonar el sistema. Tenemos

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha^2 - 4 & \alpha - 2 & \alpha + 2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_{32}^{(-\alpha^2+4)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 + \alpha + 2 & \alpha^2 + \alpha - 2 \end{array} \right) = \\ & = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -(\alpha - 2)(\alpha + 1) & (\alpha + 2)(\alpha - 1) \end{array} \right) \quad (1.4) \end{aligned}$$

Caso 1 $\mid \alpha - 2 = 0$, es decir $\alpha = 2$

La tercera ecuación queda $0 = 4 \Rightarrow \Leftarrow$ Luego no existe solución.

Caso 2 $\mid \alpha + 1 = 0$, es decir $\alpha = -1$

La tercera ecuación queda $0 = -2 \Rightarrow \Leftarrow$ Luego no existe solución.

Caso 3 $\mid \alpha \neq -1, 2$

Escalonamos a partir de (1.4)

$$\xrightarrow{L_3\left(\frac{-1}{(\alpha-2)(\alpha+1)}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\alpha+2)(\alpha-1)}{-(\alpha-2)(\alpha+1)} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c} L_{13}^{(-1)} \\ \longrightarrow \\ L_{23}^{(-1)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2(\alpha^2-2)}{(\alpha-2)(\alpha+1)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2\alpha}{(\alpha-2)(\alpha+1)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-(\alpha+2)(\alpha-1)}{(\alpha-2)(\alpha+1)} \end{array} \right)$$

Luego se tiene la solución única:

$$x = \frac{2(\alpha^2 - 2)}{(\alpha - 2)(\alpha + 1)}; \quad y = \frac{2\alpha}{(\alpha - 2)(\alpha + 1)}; \quad z = \frac{-(\alpha + 2)(\alpha - 1)}{(\alpha - 2)(\alpha + 1)}$$

Ejercicios Propuestos

1. Considere el sistema de 2 ecuaciones lineales y 5 incógnitas y encuentre todas sus soluciones.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 3 \end{array} \right\}$$

2. Resuelva el sistema siguiente

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 3 \\ 2x + y - z = 8 \\ 4x + 3y + 3z = 14 \end{array} \right\}$$

3. Resuelva la familia de sistemas, según el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{array} \right\}$$

4. Según los diferentes valores de $k \in \mathbb{R}$ encuentre todas las soluciones de la siguiente familia de sistemas de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{array} \right\}$$

Capítulo 2

Espacios Vectoriales

2.1 Definición y propiedades básicas de espacio vectorial

Nos parece que este es uno de los capítulos más emocionante del curso. Este concepto de "espacio vectorial", realmente hace crear un nuevo espacio en nuestras mentes. Es algo muy diferente a lo estudiado en el curso anterior de Álgebra.

Todos los conceptos de este capítulo, los veremos geoméricamente para poder entenderlos mejor.

Después de haber visualizado estos conceptos uno puede hacer hermosas abstracciones y llegar a tener pensamientos tales como "una función es un vector".

Veremos muchísimos ejemplos y ejercicios. Vas a poder experimentar, tú mismo, qué es un espacio vectorial y qué es lo que ocurre en él que lo hace algo tan especial.

Además esperamos que te vayas imaginando los conceptos y propiedades, de manera que vayas haciéndote preguntas de materias que veremos unas hojas más adelante.

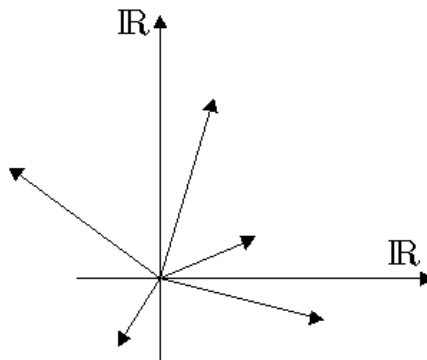
Es tratar de vivir uno mismo la historia de la creación de esta rama

de las matemáticas que es el Algebra Lineal.

Te invitamos a sumergirte en los "Espacios Vectoriales". Bienvenido!.

Observación

Consideremos \mathbb{R}^2 , el plano cartesiano y en él consideremos los vectores que parten en el origen y solamente ellos.



Algebraicamente, \mathbb{R}^2 se describe como $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$. En \mathbb{R}^2 , podemos definir la suma de dos elementos, de la manera siguiente:

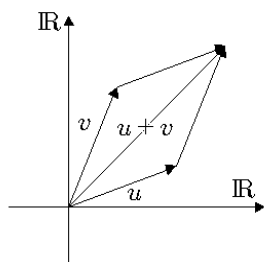
Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$, luego $u = (x, y)$, $v = (x', y')$, ciertos $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$.

Entonces $u + v = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.

Este último es un elemento típico de \mathbb{R}^2 , es decir, \mathbb{R}^2 es cerrada para la suma.

Esta suma, geométicamente corresponde a "la ley del paralelogramo".

Veámoslo geométicamente



Tenemos que \mathbb{R}^2 con esta suma cumple las siguientes propiedades

1. La suma es asociativa
2. Existe neutro: $\vec{0} = (0, 0)$
3. Todo elemento tiene inverso, a saber

$$-(x, y) = (-x, -y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

4. La suma es conmutativa

Es decir, $(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo abeliano.

Bueno, la novedad es que a estos vectores les podemos cambiar su magnitud, es decir, multiplicarlos por un número, por ejemplo: $2 \cdot \overrightarrow{(1, 5)}$, dos veces el vector $\overrightarrow{(1, 5)}$, obtenemos el vector $\overrightarrow{(2, 10)}$ que sigue estando en \mathbb{R}^2 .

Es decir, uno puede definir la operación externa, llamada ponderación, siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Ex : } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\alpha, (x, y)) &\mapsto (\alpha x, \alpha y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Esta operación cumple las siguientes propiedades:

5. $1 \cdot (x, y) = (x, y)$

$$6. (\alpha + \beta)(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y)$$

$$7. \alpha((x, y) + (x', y')) = \alpha(x, y) + \alpha(x', y')$$

$$8. (\alpha \cdot \beta)(x, y) = \alpha \cdot (\beta(x, y))$$

Esto para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Bueno, creo que esto te parece fácil ¿cierto?

¡Esperamos no equivocarme en nuestra apreciación!

Ocurre que por cumplir \mathbb{R}^2 estas 8 propiedades, diremos que \mathbb{R}^2 es un "ℝ-espacio vectorial o un "espacio vectorial sobre ℝ".

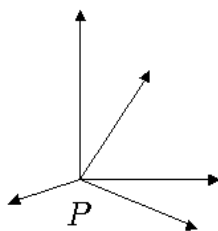
Resumiendo, veremos \mathbb{R}^2 como un conjunto cuyos elementos son vectores que parten en el origen y tales que se pueden sumar y ponderar.

Esta estructura la vamos a generalizar

¿Te animas a dar un salto de abstracción?

Observación

Un ejemplo físico de espacio vectorial, es el modelo que representa las fuerzas ejercidas sobre un punto material.



Definición 2.1.1 Sea V un conjunto. Sea K un cuerpo ($K = \mathbb{Q}; \mathbb{R}; \mathbb{C}; \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_3; \mathbb{Z}_p, p$ primo, etc.). Sobre V definamos dos operaciones:

1. Una operación llamada suma, denotada por $+$:

$$+ : V \times V \rightarrow V; (v, w) \rightsquigarrow v + w$$

Esta operación es una ley de composición interna.

2. Una operación entre los elementos de V y los elementos de K , denotada por Ex que cumple

$$Ex : K \times V \rightarrow V; (\alpha, v) \rightsquigarrow \alpha \cdot v$$

*Es una operación externa, pues opera con elementos que están fuera de V . Esta operación es conocida con el nombre de **producto por escalar** o **ponderación**.*

*Los elementos de V son llamados **vectores** y los elementos de K son llamados **escalares**. Sobre este conjunto V haremos, además, 8 exigencias, llamadas los axiomas de espacios vectoriales. Son los siguientes:*

E.V.1. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ (Asociatividad)

E.V.2. Existe neutro aditivo, denotado por $\vec{0}$.

E.V.3. Para todo $\vec{v} \in V$, existe $\vec{w} \in V$ tal que $\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.

Notación $\vec{w} = -\vec{v}$.

E.V.4. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$. (Conmutatividad)

E.V.5. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

E.V.6. $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v} \forall \alpha, \beta \in K, \forall \vec{v} \in V$

E.V.7. $\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}, \forall \alpha \in K, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$

E.V.8. $(\alpha\beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}), \forall \alpha, \beta \in K, \forall \vec{v} \in V$

*En tal caso diremos que V es un **K - espacio vectorial** o un **espacio vectorial sobre K**.*

Nota

Fundándose en estos axiomas, se desarrolla la teoría llamada **Álgebra Lineal**.

Nota

De ahora en adelante, K , denotará \mathbb{Q} , \mathbb{R} o \mathbb{C} .

Ejemplo

Estudiemos V sobre K . Donde $V = \{(-2x, x); x \in K\} \subset K^2$

Sea $\vec{v}, \vec{w} \in V$, luego los vectores \vec{v} y \vec{w} tienen la forma $\vec{v} = (-2x, x)$ y $\vec{w} = (-2y, y)$. V es cerrado para la suma pues,

$$\vec{v} + \vec{w} = (-2x, x) + (-2y, y) = (-2x + (-2y), x + y) = (-2(x+y), x+y)$$

el cual es un elemento típico de V . También es cerrado para la ponderación, pues,

$$\alpha \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (-2x, x) = (\alpha(-2x), \alpha x) = (-2(\alpha x), \alpha x)$$

el cual es un elemento típico de V . Además V cumple los 8 axiomas de espacios vectoriales. En efecto, cumple:

(En lo sucesivo escribiremos simplemente v en lugar de \vec{v}).

E.V.1. Sean $u, v, w \in V$, luego $u = (-2x, x), v = (-2y, y), w = (-2z, z)$, ciertos $x, y, z \in K$.

$$\begin{aligned} (u + v) + w &= ((-2x, x) + (-2y, y)) + (-2z, z) \\ &= (-2x + -2y, x + y) + (-2z, z) \\ &= ((-2x + -2y) + -2z, (x + y) + z) \\ &= (-2x + (-2y + -2z), x + (y + z)) \\ &= (-2x, x) + (-2y + -2z, y + z) \\ &= (-2x, x) + ((-2y, y) + (-2z, z)) \\ &= u + (v + w) \end{aligned}$$

E.V.2. $\vec{0} = (0, 0) = ((-2)0, 0)$, el cual es un elemento típico de V .

E.V.3. Sea $v = (-2x, x) \in V$, entonces $-v = (-2(-x), (-x))$, el cual es un elemento de V .

$$\begin{aligned}
\text{E.V.4. } v + w &= (-2x, x) + (-2y, y) = (-2x + -2y, x + y) \\
&= (-2y + -2x, y + x) = (-2y, y) + (-2x, x) \\
&= w + v
\end{aligned}$$

$$\text{E.V.5. } 1 \cdot v = 1 \cdot (-2x, x) = (1(-2x), 1x) = (-2x, x) = v.$$

$$\begin{aligned}
\text{E.V.6. } (\alpha + \beta)v &= (\alpha + \beta) \cdot (-2x, x) \\
&= ((\alpha + \beta)(-2x), (\alpha + \beta)x) \\
&= (\alpha(-2x) + \beta(-2x), \alpha x + \beta x) \\
&= (\alpha(-2x), \alpha x) + (\beta(-2x), \beta x) \\
&= \alpha(-2x, x) + \beta(-2x, x) = \alpha v + \beta v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{E.V.7. } \alpha \cdot (v + w) &= \alpha \cdot ((-2x, x) + (-2y, y)) \\
&= \alpha \cdot (-2x + -2y, x + y) \\
&= (\alpha(-2x + -2y), \alpha(x + y)) \\
&= (\alpha(-2x) + \alpha(-2y), \alpha x + \alpha y) \\
&= (\alpha(-2x), \alpha x) + (\alpha(-2y), \alpha y) \\
&= \alpha \cdot (-2x, x) + \alpha \cdot (-2y, y) \\
&= \alpha \cdot v + \alpha \cdot w
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{E.V.8. } (\alpha\beta) \cdot v &= (\alpha\beta)(-2x, x) = ((\alpha\beta)(-2x), (\alpha\beta)x) \\
&= (\alpha(\beta(-2x)), \alpha(\beta x)) = \alpha(\beta(-2x), \alpha(\beta x)) \\
&= \alpha(\beta(-2x, x)) = \alpha(\beta v)
\end{aligned}$$

Luego hemos demostrado que V es un K espacio vectorial.

Ejemplo

$V = \{(3x, x); x \in K\}$, es un K -espacio vectorial.

Ejemplo

Sea $V = K^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, x_2, \dots, x_n \in K\}$. Entonces K^n es un K -espacio vectorial, donde la suma está definida por:

$$(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_n + x'_n)$$

y el producto por escalar está definido por:

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

Ejemplo

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ es un \mathbb{Q} -espacio vectorial, donde la suma está definida por:

$$(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{2}$$

y el producto por escalar por:

$$\alpha(a + b\sqrt{2}) = \alpha a + (\alpha b)\sqrt{2}$$

de donde $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es cerrado para la suma y producto por escalar. Se tiene que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ con la suma y la ponderación así definidas, cumple los ocho axiomas.

Ejemplo

Sea $V = K[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n; a_0, \dots, a_n \in K\}$ el conjunto de los polinomios con coeficientes en K .

Entonces $K[X]$ es un espacio vectorial sobre K con la suma y la ponderación definidas en el curso anterior.

Ejemplo

Sea $V = K_2[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2; a_0, a_1, a_2 \in K\}$ el conjunto de los **polinomios truncos de grado 2**. Entonces $K_2[X]$ es un espacio vectorial sobre K .

Ejemplo

$V = K_m[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m; a_0, \dots, a_m \in K\}$ **polinomios truncos de grado m**.

Nótese que los polinomios tienen grado menor o igual a m , razón por la cual m interviene en el nombre del conjunto: $K_m[X]$.

Sin embargo, en $K[X]$ los polinomios pueden tener cualquier grado, pues la letra n no tiene relación con la notación $K[X]$.

Bueno, $K_m[X]$ es un K -espacio vectorial.

Ejemplo

$M_{2 \times 2}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in K \right\}$, es el espacio vectorial formado por todas las matrices de 2×2 con coeficientes en K .

La igualdad de matrices está dada por:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \text{ si y sólo si } a = a', b = b', c = c', d = d'.$$

Además la suma está definida por:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

y la multiplicación por escalar está definida por:

$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$V = \{f; f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ es el espacio vectorial formado por todas las funciones reales sobre los reales.

La suma de dos funciones f y g es una función, denotada por $f + g$, y en cada número real se comporta de la siguiente manera:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

La ponderación de una función f por un escalar α , es una función, es denotada por $\alpha \cdot f$, y en cada número real se comporta de la manera siguiente:

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

Estas dos operaciones cumplen los 8 axiomas.

Sólo mostraremos E.V.2 y E.V.3, el resto queda de ejercicio.

El neutro es la función $0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; 0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

El inverso aditivo de la función f es $-f$, dada por $(-f)(x) = -f(x)$

Definición 2.1.2 *Un espacio vectorial finito es un espacio vectorial que tiene una cantidad finita de vectores.*

Ejemplo de un espacio vectorial finito

$$\mathbb{Z}_3(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}_3\}$$

es un espacio vectorial sobre \mathbb{Z}_3 , con la suma definida por

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

y la ponderación definida por

$$\alpha \cdot (a + b\sqrt{2}) = (\alpha a) + (\alpha b)\sqrt{2}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_3$$

Ejemplo de un espacio vectorial finito

$$\mathbb{Z}_3(\sqrt{2}, \sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} + d\sqrt{10}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3\}$$

es un espacio vectorial sobre \mathbb{Z}_3 , sobre $\mathbb{Z}_3(\sqrt{2})$ y sobre $\mathbb{Z}_3(\sqrt{5})$

Ejemplo

$\mathbb{Z}_5[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n; a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}_5\}$ es un \mathbb{Z}_5 -espacio vectorial, con la suma definida en $\mathbb{Z}_5[X]$:

Cuya multiplicación por escalar está definida por:

$$\alpha(a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)X + \dots + (\alpha a_n)X^n$$

Observe que este espacio vectorial tiene un número infinito de elementos.

Proposición 2.1.1 *Sea V un K -espacio vectorial. Entonces*

1. *El neutro es único.*
2. *Todo vector tiene un único inverso aditivo.*

Demostración de 1

Sean 0 y $0'$ dos neutros, entonces $0 = 0 + 0' = 0'$. En la primera igualdad usamos que el $0'$ es neutro y en la segunda igualdad usamos que 0 es neutro.

Demostración de 2

Sean v' y v'' dos opuestos aditivos de v . Entonces tenemos que

$$v' = v' + 0 = v' + (v + v'') = (v' + v) + v'' = 0 + v'' = v''$$

luego $v' = v''$, es decir, el inverso es único.

Proposición 2.1.2 *Sea V un K -espacio vectorial. Entonces:*

1. $0v = \vec{0}, \forall v \in V.$
2. $\alpha\vec{0} = \vec{0}, \forall \alpha \in K$
3. $\alpha\vec{v} = \vec{0}, \alpha \in K, v \in V \implies \alpha = 0 \text{ o } v = \vec{0}$
4. $\alpha(-v) = -(\alpha v) = (-\alpha)v, \forall \alpha \in K, \forall v \in V$
5. $(-1)v = -v, \forall v \in V$

Demostración 1

$$0 \cdot v = (0 + 0)v = 0 \cdot v + 0 \cdot v \text{ luego } 0 \cdot v = \vec{0}$$

Demostración 2

$$\alpha \cdot \vec{0} = \alpha(\vec{0} + \vec{0}) = \alpha \cdot \vec{0} + \alpha \cdot \vec{0} \text{ luego } \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

Demostración 3

Si $\alpha = 0$ está demostrada la proposición.

Supongamos $\alpha \neq 0$, luego existe $\alpha^{-1} \in K$. Multiplicando $\alpha v = \vec{0}$ por α^{-1} , se tiene $\alpha^{-1} \cdot (\alpha v) = \alpha^{-1} \cdot \vec{0}$, luego $(\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot v = \vec{0}$ luego $1 \cdot v = \vec{0}$ luego $v = \vec{0}$.

Demostración 4

Por (2) se tiene $\alpha \vec{0} = \vec{0}$, luego, $\alpha(v + -v) = \vec{0}$, luego $\alpha v + \alpha(-v) = \vec{0}$, luego $-(\alpha v) = \alpha(-v)$, es decir, el opuesto de αv es $\alpha(-v)$.

Además $0v = \vec{0}$ y $\vec{0} = 0v = (\alpha + -\alpha)v = \alpha v + (-\alpha)v$, luego $0 = \alpha v + (-\alpha)v$. Esto dice que el inverso aditivo de αv es $(-\alpha)v$ y se escribe $-(\alpha v) = (-\alpha)v$

Demostración 5

$$(-1)v + v = (-1)v + 1v = (-1 + 1)v = 0v = \vec{0}$$

luego el inverso aditivo de v es $(-1)v$, se escribe $-v = (-1)v$.

2.2 Sub-espacios vectoriales

Ahora sabemos bien qué es un espacio vectorial ¿No te parece?. Bueno, es natural preguntarse si puede haber un espacio vectorial dentro de

otro espacio vectorial.

En el curso anterior, estudiamos los grupos y luego definimos los subgrupos.

Entonces, inspirados en el concepto de sub-grupo, definamos un "sub-espacio vectorial".

Definición 2.2.1 Sea $S \subset V$, $S \neq \emptyset$, entonces S es un **sub-espacio vectorial** de V si S es un K -espacio vectorial, con las mismas operaciones de V . Notación $S \leq V$.

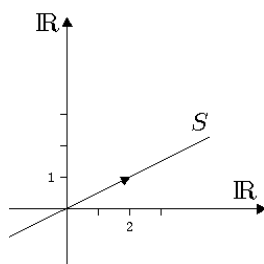
Ejemplo

Sabemos que \mathbb{R}^2 es un espacio vectorial y conocemos la interpretación geométrica de sus vectores. En \mathbb{R}^2 , consideremos el subconjunto

$$S = \{(2x, x); x \in \mathbb{R}\}$$

S es una recta que pasa por el origen.

Observemos que S es cerrado para la suma y la ponderación y S es un espacio vectorial. Luego S es un sub-espacio vectorial de \mathbb{R}^2 .



Observación

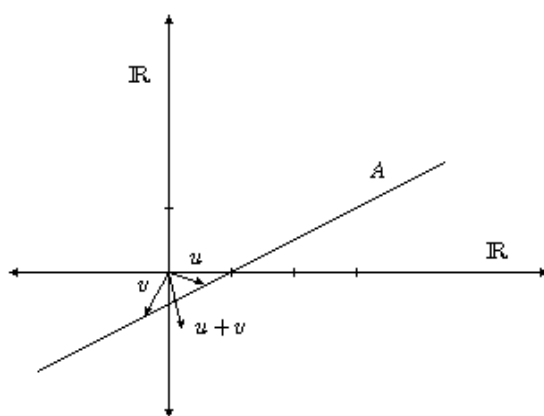
En K^2 , consideremos

$$A = \{(2x + 1, x); x \in K\}$$

Sea $v = (2x + 1, x)$ un elemento de A . Ponderemos este vector por el escalar 5, tenemos

$$5 \cdot v = 5(2x + 1, x) = (10x + 5, 5x)$$

el cual no es un elemento de A .



Luego esta operación no es una ponderación, es decir, la operación E_x , no cumple

$$E_x : K \times A \rightarrow A$$

Luego A no es un sub-espacio vectorial de K^2 .

Problema

Si uno se pone a meditar sobre el ejercicio penúltimo, comprende que no era necesario demostrar E.V.1, E.V.4, E.V.5, E.V.6, E.V.7, E.V.8. Entonces a uno le gustaría saber qué es lo justo y necesario que hay que probar para tener que S es sub-espacio vectorial de V .

La respuesta a esta inquietud la tenemos en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1 (Caracterización de sub-espacio vectorial)

Sea V un K -espacio vectorial. $S \subset V$, $S \neq \emptyset$. Entonces son equivalentes

1. S es sub-espacio de V .
2. (a) $v + w \in S, \forall v, w \in S$
 (b) $\alpha v \in S, \forall \alpha \in K, \forall v \in S$
3. $\alpha v + w \in S \forall v, w \in S, \forall \alpha \in K$

Demostración

(1) \Rightarrow (2)

Puesto que S es un sub-espacio vectorial de V , en particular es un espacio vectorial, luego cumple (2).

(2) \Rightarrow (1)

Para demostrar (1), tenemos que demostrar que se cumplen los 8 axiomas y que las operaciones están bien definidas.

Que S es cerrado para la suma, lo sabemos por (a). Que la ponderación está bien definida, lo sabemos por (b).

Sabemos que en V , la suma es asociativa y conmutativa y $S \subset V$, luego la suma es asociativa y conmutativa en S .

En la hipótesis general, tenemos que $S \neq \emptyset$, luego existe un vector en S , llamémosle v . Multipliquemos v por el escalar 0 (este existe, pues K es un cuerpo) tenemos $0 \cdot v = \vec{0}$. Luego $\vec{0}$ está en S . Así tenemos E.V.2.

Sea $v \in S$, un vector cualquiera. Este vector lo podemos multiplicar por (-1) , tenemos $(-1)v = -v$, luego $-v \in S$. Así tenemos E.V.3.

En ambos casos, usamos (b).

los restantes axiomas se obtienen trivialmente por el hecho que S es un subconjunto de V .

Luego (2) \Rightarrow (1)

Nota

Una "Caracterización" significa que podemos usar la proposición, en vez de la definición. Estas propiedades "caracterizan" un sub-espacio vectorial.

Ejemplo

$$S = \{(a, 0) \mid a \in K\} \leq K^2$$

En efecto, $S \neq \emptyset$, pues, por ejemplo $(2, 0) \in S$. Sean $s, s' \in S$, luego $s = (a, 0)$ y $s' = (a', 0)$, ciertos $a, a' \in K$. Tenemos $s + s' = (a, 0) + (a' + 0) = (a + a', 0)$ el cual es un elemento de S .

Sea $\alpha \in K$, luego $\alpha \cdot s = \alpha \cdot (a, 0) = (\alpha a, \alpha \cdot 0) = (\alpha a, 0)$ el cual es también un elemento de S . Luego S es un sub-espacio vectorial de K^2 .

Ejemplos

$S = \{(0, 0)\} \leq K^2$; $U = \{(0, 0, 0)\} \leq K^3$; $S = \{\vec{0}\} \leq K$; $\{\vec{0}\} \leq V$, para todo V , espacio vectorial.

Ejemplo

$$S = \{(a, b) \mid a + b = 0\} \leq K^2$$

En efecto, $S \neq \emptyset$, pues, por ejemplo $(2, -2) \in S$. Sean $s, s' \in S$, entonces $s = (a, -a)$, $s' = (b, -b)$, ciertos $a, b \in K$. Tenemos $s + s' = (a, -a) + (b, -b) = (a + b, -a - b)$ el cual es un elemento de S , pues la suma de las componentes del par ordenado es nula.

Sea $\alpha \in K$, tenemos $\alpha(a, -a) = (\alpha a, \alpha(-a)) = (\alpha a, -\alpha a)$, el cual es un elemento de S . Luego $S \leq K^2$.

Ejercicio

Demostremos que $S = \{(x, y) \mid 2x - 3y = 0\} \leq \mathbb{R}^2$.

Solución

1. Demostremos que en S hay al menos un elemento:

$(3, 2) \in S$ pues $2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0$. Luego $S \neq \emptyset$

2. Demostremos que $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$

Sean $u, v \in S$. Esto significa que u y v tienen la forma $u = (x, y)$, $v = (x_1, y_1)$ donde $2x - 3y = 0$ y $2x_1 - 3y_1 = 0$. La suma de u y v es:

$$u + v = (x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$$

y se cumple:

$$\begin{aligned} 2(x + x_1) - 3(y + y_1) &= 2x + 2x_1 - 3y - 3y_1 = \\ &= (2x - 3y) + (2x_1 - 3y_1) = 0 \end{aligned}$$

Luego $u + v \in S$.

3. Demostremos que $u \in S \Rightarrow \alpha u \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Sea $u \in S$, luego $u = (x, y)$ con $2x - 3y = 0$, de donde:

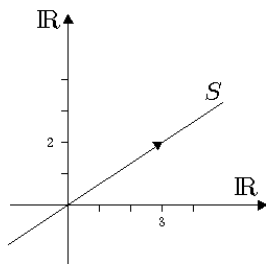
$$\alpha u = \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Se tiene:

$$2(\alpha x) - 3(\alpha y) = \alpha(2x - 3y) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Así hemos demostrado que S es un sub-espacio vectorial de \mathbb{R}^2 .

Además observamos que S representa la recta que pasa por el origen con pendiente $2/3$.



Ejercicio

Demostremos que $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}; a, b, c \in K \right\} \leq M_{2 \times 2}(K)$.

Solución

1. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in S$, luego $S \neq \emptyset$.

2. $u, v \in S$. Esto significa que u y v tienen la forma:

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ y } v = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Sumando tenemos:

$$u + v = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a_1 & b + b_1 \\ 0 & c + c_1 \end{pmatrix} \in S.$$

3. $\alpha \cdot u = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ 0 & \alpha c \end{pmatrix} \in S$.

Luego S es un sub-espacio vectorial de $M_{2 \times 2}(K)$.

Ejercicio

Demostremos que $K_2[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 / a_0, a_1, a_2 \in K\}$ es un sub-espacio vectorial de $K[X]$.

Solución

1. $3 + 2X + X^2 \in K_2[X]$, luego $K_2[X] \neq \emptyset$.

2. Sean $p(X), q(X) \in K_2[X]$. Luego $p(X)$ y $q(X)$ tienen la forma:

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 \text{ y } q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2.$$

$$\begin{aligned} p(X) + q(X) &= (a_0 + a_1X + a_2X^2) + (b_0 + b_1X + b_2X^2) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 \in K_2[X] \end{aligned}$$

3. Sea $p(X) \in K[X]$, luego $p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$, luego tenemos:
 $\alpha \cdot p(X) = \alpha \cdot (a_0 + a_1X + a_2X^2) = \alpha a_0 + (\alpha a_1)X + (\alpha a_2)X^2 \in K_2[X]$.

De (1), (2) y (3), tenemos que $K_2[X]$ es un sub-espacio vectorial de $K[X]$.

Otra forma de escribir $K_2[X]$ es:

$$K_2[X] = \{p(X) \in K[X] / \text{gr } p(X) \leq 2\}$$

Ejercicio

¿Es el conjunto $S = \{p(X) \in K[X] / \text{gr } p(X) = 2\}$ un sub-espacio vectorial de $K[X]$?

Solución

1. $p(X) = 1 + X + X^2 \in S$, luego $S \neq \emptyset$.
2. Sean $p(X), q(X) \in S$, dados por
 $p(X) = 2 + 3X + 5X^2$ y $q(X) = 4 + 7X - 5X^2 \in S$. Sin embargo
 $p(X) + q(X) = (2 + 3X + 5X^2) + (4 + 7X - 5X^2) = 6 + 10X$, el cual
 no pertenece a S pues su grado no es 2. Esto es un contraejemplo.

Concluimos entonces que S no es un sub-espacio de $K[X]$.

Ejercicio

Sea $C = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ es continua}\}$. Probemos que C es un sub-espacio vectorial de $F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Solución

Del curso de Cálculo recordamos que:

1. La función $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; id(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ es una función continua, luego $C \neq \emptyset$.
2. La suma de dos funciones continuas es continua.
3. La ponderación de una función continua es continua.

Luego C es un sub-espacio vectorial de F .

Ejercicio

Sea $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$. Sea $S = \{f \in V; f(x-1) = f(x)\}$. Demostremos que S es un sub-espacio vectorial de V

Solución

1. La aplicación nula pertenece a S , pues $0(x-1) = 0(x)$. Luego $S \neq \emptyset$
2. Sean $f, g \in S$, luego
 $(f+g)(x-1) = f(x-1) + g(x-1) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$.
Luego $(f+g) \in S$
3. Sean $f, g \in S$, luego $(\alpha f)(x-1) = \alpha(f(x-1)) = \alpha(f(x)) = (\alpha f)(x)$

Por (1), (2), (3), tenemos que S es sub-espacio vectorial de V

Ejercicio

En K^4 , considere el sub-espacio

$$S = \{(x+y+2z, x+2y+2z, 2x+3y+5z, x+2y+5z); x, y, z \in K\}.$$

Busquemos una representación cartesiana de S .

Solución

Sea

$$\left. \begin{aligned} x + y + 2z &= a \\ x + 2y + 2z &= b \\ 2x + 3y + 5z &= c \\ x + 2y + 5z &= d \end{aligned} \right\}$$

Luego escalonando el sistema se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 2 & b \\ 2 & 3 & 5 & c \\ 1 & 2 & 5 & d \end{array} \right) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2a - b \\ 0 & 1 & 0 & b - a \\ 0 & 0 & 1 & c - b - a \\ 0 & 0 & 0 & 3a + 2b - 3c + d \end{array} \right)$$

El sistema representa el sub-espacio dado ssi $3a + 2b - 3c + d = 0$

Luego $S = \{(a, b, c, d); 3a + 2b - c + d = 0\}$ es la representación cartesiana de S

Ejercicio

En K^4 , considere el sub-espacio

$$S = \{(a, b, c, d); 2a - b - c + d = 0, a + b + d = 0\}$$

descrito en forma cartesiana.

Busquemos una representación paramétrica de S .

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Luego } \left. \begin{aligned} a - \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}d &= 0 \\ b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Es decir } \left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{3}c - \frac{2}{3}d \\ b &= -\frac{1}{3}c - \frac{1}{3}d \end{aligned} \right\} c, d \in K$$

$$S = \{(\frac{1}{3}c - \frac{2}{3}d, -\frac{1}{3}c - \frac{1}{3}d, c, d); c, d \in K\}$$

Ejercicio

Sea V un K -espacio vectorial y $S, T \leq V$. Demostremos que $S \cap T$ es un sub-espacio vectorial de V .

Solución

1. $0 \in S, 0 \in T$ luego $0 \in S \cap T$, es decir $S \cap T \neq \emptyset$
2. Sean $u, v \in S \cap T$, esto significa que $u, v \in S$ y al mismo tiempo $u, v \in T$.
Pero si $u, v \in S$ se tiene que $u + v \in S$, pues S es un sub-espacio vectorial de V y $u + v \in T$, pues T es un sub-espacio vectorial de V . Luego $u + v \in S \cap T$.
3. Sea $u \in S \cap T$, luego $u \in S$ y $u \in T$. Puesto que S y T son sub-espacios vectoriales, tenemos que $\alpha \cdot u \in S$ y $\alpha \cdot u \in T \forall \alpha \in K$, es decir, $\alpha \cdot u \in S \cap T, \forall \alpha \in K$

Por (1), (2), (3) tenemos que $S \cap T$ es un sub-espacio vectorial de V .

Ejercicio

Sea V un K -espacio vectorial. Sea $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Demuestre que $S = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K\}$ es un sub-espacio de V .

Demostración

El $\vec{0} \in S$, pues $\vec{0} = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$. Observemos que al sumar dos elementos de S obtenemos un elemento de S y que al multiplicar un elemento de S por un escalar también obtenemos un elemento de S .

2.3 Combinaciones Lineales

Sabes, el problema que tenemos ahora es saber si dado un vector, lo podemos obtener a partir de otros dos vectores dados. Bueno, es decir sumando y ponderando esos vectores.

Nos parece bastante lógico hacerse esta pregunta pues en todo espacio vectorial se puede sumar y ponderar ¿Es lógico, cierto?

Observación

Sea $V = \mathbb{R}^2$, espacio vectorial sobre \mathbb{R} , sea $u = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$. A partir de u podemos obtener otros vectores, como por ejemplo, $u_1 = 3(2, 1)$, es decir, $u_1 = (6, 3)$, o bien $u_2 = (10, 5)$, o $u_3 = (-8, -4)$, etc.

Entonces diremos que u_1 es "combinación lineal" de u . Lo mismo para u_2 y u_3 .

Observación

Sea $V = \mathbb{R}^2$, $u = (2, 1)$, $v = (1, 2)$. A partir de u y v podemos obtener otros vectores. Recordemos que solamente está permitido sumar y cambiar la magnitud de los vectores. Por ejemplo, el vector $w_1 = (3, 3)$ se puede obtener de u y v :

$$w_1 = u + v; (3, 3) = (2, 1) + (1, 2)$$

También, el vector $w_2 = (5, 4)$, pues:

$$w_2 = 2u + v; (5, 4) = 2(2, 1) + (1, 2)$$

Diremos que w_1 es "combinación lineal" de u y v . Lo mismo para w_2 .

Observación

Sea $u = (2, 1)$, $v = (4, 2)$. Veamos si hay algún par de escalares α y β que satisfagan la igualdad:

$$(3, 3) = \alpha(2, 1) + \beta(4, 2)$$

Luego

$$(3, 3) = (2\alpha + 4\beta, \alpha + 2\beta)$$

es decir, que cumplan simultáneamente

$$\left. \begin{array}{l} 3 = 2\alpha + 4\beta \\ 3 = \alpha + 2\beta \end{array} \right\}$$

pero, dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre si, luego comparando las ecuaciones tenemos $3 = \frac{3}{2}$, lo cual es una contradicción. El error estuvo en suponer que w lo podíamos obtener a partir de u y v .

En este caso diremos que w "no es combinación lineal" de u y v .

Definición 2.3.1 *Un vector $v \in V$ se dice que es **combinación lineal** de los vectores v_1, v_2, \dots, v_n , si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ tales que:*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

Definición 2.3.2 *Sea S un subconjunto de V , $v \in V$, se dice que v es **combinación lineal de los vectores de S** si:*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, \text{ ciertos } \alpha_i \in K, \text{ ciertos } v_i \in S$$

Ejemplo

Sea $V = K^3$, es decir los vectores son 3-uplas. Sea $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 5, -1)$, entonces $v = (-9, -22, 1)$ es combinación lineal de v_1 y v_2 . En efecto:

$$(-9, -22, 1) = -1(1, 2, 3) + -4(2, 5, -1)$$

Ejercicio

En $K_2[X]$, consideremos los vectores $u = 1 + 2X + X^2$ y $v = X - X^2$

1. Demostremos que el vector $w_1 = 2 + 3X + 3X^2$ es combinación lineal de u y v .
2. Veamos si el vector $w_2 = 3 + X$ es combinación lineal de u y v .
3. Queremos saber para qué valor de k , el vector $w_3 = 1 + kX - X^2$ es combinación lineal de u y v .

Solución

1. Sea $w_1 = \alpha(1 + 2X + X^2) + \beta(X - X^2)$. Luego

$$2 + 3X + 3X^2 = \alpha + (2\alpha + \beta)X + (\alpha - \beta)X^2$$

Por definición de igualdad de polinomios tenemos

$$\left. \begin{array}{rcl} \alpha - \beta & = & 3 \\ 2\alpha + \beta & = & 3 \\ \alpha & = & 2 \end{array} \right\}$$

Escalonemos este sistema. Tenemos:

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \right) & \begin{array}{c} L_{21}^{(-2)} \\ \longrightarrow \\ L_{31}^{(-1)} \end{array} & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{c} L_{13}^{(1)} \\ \longrightarrow \\ L_{23}^{(-3)} \end{array} \\ \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) & \text{Luego} & \begin{array}{|c|} \hline \alpha = 2 \\ \hline \beta = -1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Luego $w_1 = 2u + (-1)v$. Efectivamente w_1 es combinación lineal de u y v .

2. Supongamos que $w_2 = 3 + X$ es combinación lineal de u y v , es decir, supongamos que existe α y β reales tal que:

$$\begin{aligned} 3 + X &= \alpha(1 + 2X + X^2) + \beta(X - X^2) \\ &= \alpha + (2\alpha + \beta)X + (\alpha - \beta)X^2 \end{aligned}$$

Por la definición de igualdad de polinomios tenemos:

$$\left. \begin{array}{rcl} \alpha - \beta & = & 0 \\ 2\alpha + \beta & = & 1 \\ \alpha & = & 3 \end{array} \right\}$$

Escalonando este sistema tenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[L_{31}^{(-1)}]{L_{21}^{(-2)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[L_{23}^{(-3)}]{L_{13}^{(1)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

En la segunda ecuación nos queda $0 = -8$, lo que es una contradicción. Bueno, el error estuvo en suponer que existía un tal α y β , es decir en suponer que w_2 era combinación lineal de u y v .

Luego w_2 no es combinación lineal de u y v .

3. Sea $w_3 = \alpha u + \beta v$. Luego:

$$1 + kX - X^2 = \alpha 1 + (2\alpha + \beta)X + (\alpha - \beta)X^2$$

Luego se tiene que se deben cumplir las ecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{array}{rcl} \alpha - \beta & = & -1 \\ 2\alpha + \beta & = & k \\ \alpha & = & 1 \end{array} \right\}$$

Escribamos este sistema en forma matricial y luego escalonémoslo.

Tenemos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & k \end{array} \right) \xrightarrow[L_{31}^{(-2)}]{L_{21}^{(-1)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & k-2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_{31}^{(1)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k-4 \end{array} \right)$$

Vemos que este sistema tiene solución si y sólo si $k - 4 = 0$, es decir $k = 4$.

Luego w_3 es combinación lineal de u y v si y sólo si $k = 4$.

Ejercicio

Sea $V = M_{2 \times 3}(K)$ sobre K . Es decir, los vectores son matrices de 2 filas y 3 columnas.

Sean

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Demostremos que $v = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de v_1 , v_2 y v_3 .

Es decir, tenemos que encontrar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$.

Solución

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Usando la definición de igualdad de matrices, tenemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{rcl} \alpha_1 + \alpha_2 & = & 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 & = & -1 \\ 5\alpha_1 + \alpha_3 & = & -4 \\ 0 & = & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_1 + 6\alpha_2 + 2\alpha_3 & = & 7 \end{array} \right\}$$

El cual reducido a su forma más simple, mediante el escalonamiento del sistema, tenemos

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 1$$

Luego $v = -1v_1 + 1v_2 + 1v_3$, es decir, v es combinación lineal de v_1 , v_2 , v_3 .

Como ejercicio al lector, te proponemos lo siguiente:

Comprueba que el vector $w = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_3 .

Además, estudie la pregunta siguiente:

¿ Es $t = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ combinación lineal de v_1, v_2, v_3 ?

2.4 Sub-espacio generado

La pregunta que ahora uno se hace es un poco más exigente. La idea es fácil: dado un vector, queremos encontrar **todos** los vectores que se pueden obtener a partir de él. Bueno, se trata de ir sumando y ponderando los vectores que se van obteniendo.

... y los queremos "todos".

O bien, dados dos vectores, queremos encontrar **todos** los vectores que se pueden obtener a partir de ellos. Idem para el caso de n vectores.

Observación

Consideremos $V = K^2$, un K -espacio vectorial. En él, démosnos el vector $v = (-1, 2)$. Entonces queremos encontrar todos los vectores que se pueden obtener a partir de v . Estos vectores son todos aquellos de la forma $w = \alpha(-1, 2)$, es decir, $w = (-\alpha, 2\alpha)$.

El conjunto obtenido es

$$S = \{(x, y); y = -2x\}$$

Escribiremos $S = \langle (-1, 2) \rangle$.

En este caso, S es un sub-espacio vectorial de K^2 . ¿ Ocurrirá esto, siempre ?

Observación

Consideremos $V = \mathbb{R}^2$ y $u = (-1, 2)$ y $v = (2, -4)$. ¿Cuánto es lo máximo de espacio que podemos alcanzar a partir de u y v ? Es decir, haciendo combinaciones lineales de estos vectores, ¿Qué vectores podemos obtener?. Es decir, ¿A qué conjunto es igual el conjunto $\{\alpha(-1, 2) + \beta(2, -4); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$?

Observamos que haciendo combinaciones lineales de estos vectores no es posible "salir" de la recta. Diremos que el espacio generado por u y v es la recta $L = \{(x, y); y = -2x\}$ y escribiremos $L = \langle (-1, 2), (2, -4) \rangle$.

En este caso L también es un sub-espacio vectorial de \mathbb{R}^2 . Esto es curioso. ¿No te parece? Tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.4.1 Sean V un K -espacio vectorial y $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Entonces

$$S = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K\}$$

es el más pequeño sub-espacio de V que contiene a v_1, v_2, \dots, v_n .

Demostración

Vimos en un ejercicio que S es un subespacio vectorial de V , al final de la sección 2.2

Demostremos ahora que es el más pequeño que contiene a v_1, v_2, \dots, v_n .

Sea H un sub-espacio vectorial de V que contiene a v_1, v_2, \dots, v_n . Por ser un sub-espacio debe contener $\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \dots, \alpha_n v_n$ para todo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$. También debe contener todas las sumas de vectores de H , es decir, H debe contener $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ para todo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$. Luego H debe contener a S . Bueno, esto quiere decir que es el más pequeño que contiene a v_1, v_2, \dots, v_n .

Ejemplo

Sea $V = K^3$. Consideremos los vectores $v_1 = (1, 2, 1)$ y $v_2 = (-1, 1, 3)$. Entonces $S = \{\alpha(1, 2, 1) + \beta(-1, 1, 3); \alpha, \beta \in K\}$ es un sub-espacio vectorial de K^3 , el cual será denotado por $S = \langle (1, 2, 1), (-1, 1, 3) \rangle$.

Definición 2.4.1 Sea V un K -espacio vectorial. Sean $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Entonces el conjunto formado por todas las combinaciones lineales de v_1, v_2, \dots, v_n es el sub-espacio llamado el **sub-espacio generado** por v_1, v_2, \dots, v_n y se denota $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, es decir,

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K\} = S.$$

Diremos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto de generadores de S .

Pregunta

Sea $V = K^2$. Sea $u = (3, 1)$ y $v = (1, -3)$ ¿Cuál es el sub-espacio más grande que se puede obtener ponderando y sumando estos vectores? Es decir, ¿Cuál es el sub-espacio generado por u y v ?

Respuesta

$$\begin{aligned} \langle (3, 1), (1, -3) \rangle &= \{\alpha(3, 1) + \beta(1, -3); \alpha, \beta \in K\} = \\ &= \{(3\alpha + \beta, \alpha - 3\beta); \alpha, \beta \in K\} \end{aligned}$$

Luego

$$(x, y) = \frac{3x + y}{10}(3, 1) + \frac{x - 3y}{10}(1, -3)$$

Es decir todo vector (x, y) de K^2 , es combinación lineal de $(3, 1)$ y $(1, -3)$. De donde tenemos que $\langle (3, 1), (1, -3) \rangle = K^2$.

Ejercicio

Busquemos el sub-espacio de K^3 , generado por $u = (1, 1, 1)$ y $v = (2, 3, 1)$ y demos una descripción cartesiana de este sub-espacio.

Solución

$$S = \{\alpha(1, 1, 1) + \beta(2, 3, 1)\}; \alpha, \beta \in K\}$$

Sea $(x, y, z) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(2, 3, 1)$. Esto equivale a suponer que el sistema de ecuaciones siguiente

$$\left. \begin{array}{l} x = \alpha + 2\beta \\ y = \alpha + 3\beta \\ z = \alpha + \beta \end{array} \right\} \text{ tiene solución}$$

Es decir, debemos encontrar la condición necesaria y suficiente, para que este sistema tenga solución.

Escalonemos el sistema. Tenemos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 1 & 3 & y \\ 1 & 1 & z \end{array} \right) \xrightarrow[L_{31}^{(-1)}]{L_{21}^{(-1)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & -1 & z-x \end{array} \right) \xrightarrow{L_{32}^{(1)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & y+z-2x \end{array} \right)$$

$$\text{Luego } \langle (1, 1, 1), (2, 3, 1) \rangle = \{(x, y, z); 2x - y - z = 0\}$$

Ejercicio

Encontremos un sistema de generadores para el sub-espacio de K^3 , siguiente:

$$U = \{(x, y, z); 2x + y = 0\}$$

Solución

Los elementos de U tienen entonces la forma típica $(x, -2x, z)$. Ahora bien $(x, -2x, z) = x(1, -2, 0) + z(0, 0, 1)$. Esto nos dice que todo vector de U lo podemos obtener a partir de $(1, -2, 0)$ y $(0, 0, 1)$, es decir, lo podemos obtener como combinación lineal de $(1, -2, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Entonces $(1, -2, 0)$ y $(0, 0, 1)$ generan U , es decir

$$U = \langle (1, -2, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

Ejercicio

Busquemos un conjunto de generadores para el sub-espacio V de K^3 ,
 $V = \{(x + 2y + z, x + 2y, -x - 2y + 3z); x, y, z \in K\}$

Solución

Observamos que:

$$(x + 2y + z, x + 2y, -x - 2y + 3z) = x(1, 1, -1) + y(2, 2, -2) + z(1, 0, 3)$$

Luego los vectores $(1, 1, -1)$, $(2, 2, -2)$, $(1, 0, 3)$ generan V , es decir

$$V = \langle (1, 1, -1), (2, 2, -2), (1, 0, 3) \rangle$$

Ejercicio

Busquemos un conjunto de generadores para el sub-espacio W de K^3 ,

$$W = \{(x, y, z); x + 3y - z = 0\}$$

Solución

Los elementos de W tienen la forma típica $(x, y, x + 3y)$. Tenemos que:

$$(x, y, x + 3y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 3)$$

Luego **un** conjunto de generadores de W es $\{(1, 0, 1), (0, 1, 3)\}$ y luego

$$W = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 3) \rangle$$

Ejercicio

Sea $V = K^3$.

Sea $U = \langle (1, -2, 0), (0, 0, 1) \rangle$ y $V = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 3) \rangle$.

Busquemos **un** conjunto de generadores de $U \cap V$.

Solución

Sea $v \in U \cap V$, luego:

$$v = \alpha(1, -2, 0) + \beta(0, 0, 1) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, 3)$$

Tenemos:

$$\left. \begin{array}{rcl} \alpha & = & a \\ -2\alpha & = & b \\ \beta & = & a + 3b \end{array} \right\}$$

Luego $\beta = -5\alpha$.

Entonces $v = \alpha(1, -2, 0) - 5\alpha(0, 0, 1) = (\alpha, -2\alpha, -5\alpha) = \alpha(1, -2, -5)$

Luego $U \cap V = \langle (1, -2, -5) \rangle$. Entonces $\{(1, -2, -5)\}$ es un conjunto de generadores de $U \cap V$

Ejercicio

Sea $V = K^3$ y $S = \langle (1, 2, 1), (1, 0, 1) \rangle$. Busquemos 5 vectores de S .

Solución

Por ejemplo:

$$v_1 = (1, 2, 1) + (1, 0, 1), \text{ es decir } v_1 = (2, 2, 2);$$

$$v_2 = 2(1, 2, 1) = (2, 4, 2);$$

$$v_3 = 3(1, 2, 1) - (1, 0, 1) = (2, 6, 2);$$

$$v_4 = 2(1, 0, 1) = (2, 0, 2);$$

$$v_5 = (1, 2, 1) + 3(1, 0, 1) = (4, 2, 4)$$

En fin, toda combinación lineal de $(1, 2, 1)$ y $(1, 0, 1)$ es un vector de S .

Ejercicio

Sea $V = K_3[X]$. Busquemos un conjunto de generadores de

$$S = \{a + bX + cX^2 + dX^3; 2a + b = c\}$$

Solución

Los elementos de S se caracterizan por tener el coeficiente de X^2 igual a la suma del doble de la constante más el coeficiente de X . Un elemento típico de S , tiene la forma $s = a + bX + (2a + b)X^2 + dX^3$, luego $s = a(1 + 2X^2) + b(X + X^2) + dX^3$. Tenemos

$$S = \langle 1 + 2X^2, X + X^2, X^3 \rangle$$

puesto que todo elemento de S se puede escribir como una combinación lineal de estos tres vectores.

Propiedades elementales de un sub-espacio generado

1. $\langle u, v \rangle = \langle \alpha u, v \rangle; \forall \alpha \in K - \{0\}$
2. $\langle u, v \rangle = \langle u + \beta v, v \rangle, \forall \beta \in K$
3. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

Demostración 1

Sea $w \in \langle u, v \rangle$, luego w tiene la forma $w = \alpha_1 u + \alpha_2 v$, ciertos $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. Pero:

$$w = \frac{\alpha_1}{\alpha} \alpha u + \alpha_2 v, \alpha \neq 0 \text{ luego } w \in \langle \alpha u, v \rangle$$

Por otra parte, sea $w \in \langle \alpha u, v \rangle$, entonces:

$$w = \beta_1(\alpha u) + \beta_2 v = (\beta_1 \alpha) u + \beta_2 v, \text{ luego } w \in \langle u, v \rangle$$

Demostración 2

Sea $w \in \langle u, v \rangle$, luego:

$$w = \alpha_1 u + \alpha_2 v = \alpha_1(u + \beta v) + (\alpha_2 - \alpha_1 \beta)v, \text{ luego } w \in \langle u + \beta v, v \rangle$$

Por otra parte, sea $w \in \langle u + \beta v, v \rangle$, entonces:

$$w = \alpha_1(u + \beta v) + \alpha_2 v = \alpha_1 u + (\alpha_1 \beta + \alpha_2)v, \text{ luego } w \in \langle u, v \rangle$$

Demostración 3

Sea $w \in \langle u, v \rangle$, luego: $w = \alpha u + \beta v$, ciertos $\alpha, \beta \in K$ ssi $w = \beta v + \alpha u$ ssi $w \in \langle v, u \rangle$

Notación

Estas tres propiedades se cumplen para el segundo vector.

Observación

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v, 0 \rangle$$

Observación

Esto se generaliza para un conjunto finito de vectores. Se tiene:

1. $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle = \langle \alpha u_1, u_2, \dots, u_n \rangle; \alpha \in K, \alpha \neq 0.$
2. $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle = \langle u_1 + \alpha u_2, u_2, \dots, u_n \rangle, \alpha \in K.$
3. $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle = \langle u_2, u_1, \dots, u_n \rangle$

Estas operaciones que han sido realizadas en u_1, u_2 , pueden realizarse

$$\forall u_i, u_j; i, j = 1, \dots, n.$$

Definición 2.4.2 *Estos tres tipos de operaciones que dejan invariante un conjunto de generadores son llamadas **operaciones elementales**.*

Ejercicio

Sea $V = K^3$, $U = \langle (3, 9, 12), (1, 3, 6), (1, 3, 4) \rangle$. Busquemos una presentación más simple de U .

Solución

Para mayor comodidad, los vectores los anotaremos sin comas y los ordenaremos en una matriz. Hagamos las siguientes operaciones elementales:

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_{21}(-1) \\ L_{31}(-1) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Es decir, $\langle (3, 9, 12), (1, 3, 6), (1, 3, 4) \rangle = \langle (1, 3, 4), (0, 0, 2) \rangle$.

Con esto hemos conseguido una presentación más simple del espacio.

Ejercicio

En \mathbb{R}^2 , determinemos el sub-espacio generado por el conjunto de vectores:

$$A = \{(1, 3), (3, 9), (2, 6)\}$$

Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $\langle (1, 3), (3, 9), (2, 6) \rangle = \langle (1, 3) \rangle = \{(x, 3x); x \in \mathbb{R}\}$. Este sub-espacio de \mathbb{R}^2 , representa la recta que pasa por el origen y tiene pendiente 3.

Ejercicio

Lo mismo que el ejercicio anterior, para

$$A = \{(2, 4, 6), (1, 2, 3), (5, 10, 15)\}$$

Solución

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{31}(-5)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \implies \langle (2, 4, 6), (1, 2, 3), (5, 10, 15) \rangle &= \langle (1, 2, 3) \rangle \\ &= \{(x, 2x, 3x); x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

El cual representa una recta de \mathbb{R}^3 que pasa por el origen.

Ejercicio

En K^2 , consideremos $A = \{(1, 2), (1, 1)\}$. Determinemos el espacio generado por A .

Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $\langle (1, 2), (1, 1) \rangle = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle = \{(x, y); x, y \in K\} = K^2$
Entonces A genera K^2 .

Ejercicio

En $V = K_3[X]$ consideremos el sub-espacio

$$S = \langle 2 + X + 5X^2 + X^3, 4 + 2X + 10X^2 + 2X^3, 1 + X + 2X^2 + X^3 \rangle$$

Busquemos un conjunto de generadores que tenga una cantidad mínima de elementos.

Solución

Por comodidad anotaremos solamente los coeficientes de cada polinomio.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, basta generar S por el conjunto de vectores

$$\{1 + 3X^2, X - X^2 + X^3\}$$

Nota

Hemos observado que a un conjunto A de generadores de un sub-espacio S de V , al sacarle uno o más vectores puede, a veces seguir generando el mismo sub-espacio S .

Esto nos conduce a la siguiente definición.

Definición 2.4.3 Sea V un K -espacio vectorial. Sea G un conjunto finito de generadores de un sub-espacio S de V . Diremos que G es un **conjunto minimal de generadores de S** , si cada vez que se le quita alguno de sus elementos, pierde su propiedad de ser generador de S .

Ejemplo

$G = \{(1, 2), (3, 2)\}$ es un conjunto minimal de generadores de K^2 .

$T = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ es un conjunto minimal de generadores de K^3 .

2.5 Dependencia Lineal

Ahora es necesario que recuerdes el concepto de dependencia lineal en un sistema de ecuaciones lineales. A veces, teníamos ecuaciones que podían ser obtenidas de otras, entonces decíamos que el sistema era linealmente dependiente.

Ahora pensemos en un conjunto de vectores en un espacio vectorial. De la misma manera, a veces hay vectores que se pueden obtener de los otros, pues son combinación lineal de ellos.

Es entonces natural usar este mismo concepto para un conjunto de vectores. ¿No es así?

Nos encantaría que esta sección la encuentres ¡Trivial!. Eso diría que estás asimilando bien el curso.

Te recomendamos no empezar esta sección si no has comprendido las anteriores, pues se te pueden confundir los conceptos que, sin embargo, son muy diferentes.

Observación

Sea $V = \mathbb{R}^2$, $u = (2, 3)$, $v = (10, 15)$. Observamos que $v = 5u$, diremos que el conjunto $\{u, v\}$ es "linealmente dependiente", es decir que el vector v se puede obtener a partir de u

Observación

Sea $V = K^3$, $u = (1, 1, 2)$, $v = (2, 1, 5)$, $w = (4, 3, 9)$. Tenemos que $w = 2u + v$. Diremos que el conjunto $\{u, v, w\}$ es "linealmente dependiente".

Ahora que tienes el concepto en forma intuitiva, podrás apreciar mejor la definición siguiente.

Definición 2.5.1 Sea V un K -espacio vectorial. Sea

$$A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

Diremos que A es **linealmente dependiente** si al menos un vector $v_i \in A$ es combinación lineal de los demás vectores de A .

Diremos que un conjunto es **linealmente independiente** si ningún vector depende de los otros, es decir, si ningún vector es combinación lineal de los demás. Abreviamos l.d. y l.i respectivamente.

Ejercicio

Sea $V = K^4$. Sea $A = \{(1, 0, 0, 5), (0, 1, 0, 4), (0, 0, 1, 1)\}$. Demostremos que A es linealmente independiente.

Solución

Si suponemos que existen $a, b \in K$ tal que

$$(1, 0, 0, 5) = a(0, 1, 0, 4) + b(0, 0, 1, 1)$$

llegaremos a una contradicción. Lo mismo ocurre si suponemos que existen $c, d, e, f \in K$ tales que

$$(0, 1, 0, 4) = c(1, 0, 0, 5) + d(0, 0, 1, 1) \text{ ó}$$
$$(0, 0, 1, 1) = e(1, 0, 0, 5) + f(0, 1, 0, 4)$$

Luego el conjunto A es linealmente independiente

Observación

Sea $V = K^2$. Sea $A = \{(3, 1), (6, 2)\}$. Estudiemos la dependencia lineal de A .

Observe el chispazo genial siguiente: Obtengamos el vector $\vec{0} = (0, 0)$ a partir de estos dos vectores.

Por ejemplo, tenemos

1. $\vec{0} = (0, 0) = (-2)(3, 1) + 1(6, 2)$, o bien
2. $\vec{0} = (0, 0) = (-4)(3, 1) + 2(6, 2)$, o bien
3. $\vec{0} = (0, 0) = 0(3, 1) + 0(6, 2)$

De (2): $4(3, 1) = 2(6, 2)$, como $4 \neq 0$, podemos despejar $(3, 1) = \frac{2}{4}(6, 2)$, es decir

$$(3, 1) = \frac{1}{2}(6, 2)$$

Conclusión: el conjunto A es l.d.

Observemos que esto lo pudimos hacer, pues teníamos más de una manera de obtener el vector $\vec{0}$, a partir de los vectores en estudio.

Ejercicio

Sea $V = K^2$ Estudiemos la dependencia lineal del conjunto

$$A = \{(3, 1), (6, 2), (1, 1)\}$$

Solución

Veamos las posibles maneras de obtener el vector $(0, 0)$

Sea $(0, 0) = \alpha(3, 1) + \beta(6, 2) + \gamma(1, 1)$. luego:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = 3\alpha + 6\beta + \gamma \\ 0 = 3\alpha + 6\beta + 3\gamma \end{array} \right\}$$

Tenemos $\gamma = 0$, $\alpha = -2\beta$. Luego

$$(0, 0) = -2\beta(3, 1) + \beta(6, 2) + 0(1, 1), \quad \beta \in K$$

Tomemos $\beta = 1$

$$(0, 0) = -2(3, 1) + 1 \cdot (6, 2) + 0(1, 1)$$

luego

$$(6, 2) = 2(3, 1) + 0(1, 1)$$

Entonces el conjunto A es l.d.

Nota

Esta forma de estudiar la dependencia lineal parece interesante. No hay que estudiar tantas ecuaciones como al usar directamente la definición.

Antes de estudiar una caracterización de dependencia lineal, veamos las siguientes definiciones:

Definición 2.5.2 Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores de un espacio V . Diremos que

$$0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$$

es una **combinación lineal trivial**.

Definición 2.5.3 $\{\vec{0}\}$ es linealmente dependiente.

$\{v\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\vec{v} \neq \vec{0}$

Proposición 2.5.1 (Caracterización de dependencia lineal)

Sea V un espacio vectorial sobre K . Sea $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, entonces son equivalentes:

1. A es linealmente dependiente.
2. $\exists \alpha_i \neq 0, \alpha_i \in K$ tal que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i v_i + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$.

Demostración

Dem (1) \Rightarrow (2):

Sea A linealmente dependiente, luego existe al menos un vector que es combinación lineal de los demás. Sin pérdida de generalidad, supongamos que v_1 es combinación lineal de los demás. Tenemos

$v_1 = \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, ciertos $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$, luego

$$0 = (-1)v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

luego tenemos (2)

Dem (2) \Rightarrow (1) :

Supongamos que existe $\alpha_i \neq 0, \alpha_i \in K$ tal que

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i v_i + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos $\alpha_1 \neq 0$. Luego

$\alpha_1 v_1 = -\alpha_2 v_2 + \dots + -\alpha_n v_n$, puesto que $\alpha_1 \neq 0$, tenemos

$$v_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} v_2 + \dots + \frac{-\alpha_n}{\alpha_1} v_n, \text{ luego tenemos (1)}$$

Repaso de lógica

La proposición: (1) \Leftrightarrow (2) , es lógicamente equivalente a la proposición: $no(1) \Leftrightarrow no(2)$.

Luego la proposición anterior es lógicamente equivalente al siguiente corolario:

Corolario 2.5.2 Sea V un K -espacio vectorial. Sea

$$A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:

1. A es linealmente independiente.
2. Existe una única manera de obtener el vector $\vec{0}$, a saber, como una combinación lineal trivial.

Escrito en forma simbólica es

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Ejercicio

En $V = K^3$, consideremos $A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$. Estudiemos la dependencia lineal de A .

Solución

Sea $\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Luego

$$\left. \begin{array}{rcl} \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ \alpha + \beta & = & 0 \\ \alpha & = & 0 \end{array} \right\}$$

luego $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Entonces la única manera de obtener el vector $(0, 0, 0)$, es la forma trivial. Luego A es l.i.

Ejercicio

Estudiemos en K^3 , la dependencia lineal del conjunto

$$A = \{(1, 1, 2), (3, 3, 6), (1, 2, 5)\}$$

Solución

Sea $\alpha(1, 1, 2) + \beta(3, 3, 6) + \gamma(1, 2, 5) = (0, 0, 0)$.

De aquí obtenemos que $\alpha = -3\beta$ y $\gamma = 0$. Luego todas las maneras posibles de obtener el vector $\vec{0}$ son:

$$(0, 0, 0) = -3\beta(1, 1, 2) + \beta(3, 3, 6) + 0(1, 2, 5); \beta \in K$$

es decir, hay más de una manera de obtener el vector $\vec{0}$. Luego A es l.d.

Proposición 2.5.3 *Sea V un K -espacio vectorial. Entonces:*

1. *Sea $A \subset V$, $B \subset A$ y A linealmente independiente, entonces B es linealmente independiente.*
2. *Si un conjunto de vectores contiene el $\vec{0}$, entonces el conjunto es linealmente dependiente.*
3. *Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ l.i. y $\{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$ l.d., entonces w es combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_n .*
4. *Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ l.i. y supongamos que w no es combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_n , entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$ es l.i.*

Demostración 1: ¡Trivial!**Demostración 2**

Basta con escribir una combinación lineal nula no trivial como:

$$5\vec{0} + 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = \vec{0}$$

Demostración 3

Supongamos que $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$ es l.d., entonces se puede obtener una combinación lineal nula no trivial con los elementos de A :

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \beta w = \vec{0}$$

Si $\beta = 0$ entonces:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0}$$

y como $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es l.i., tenemos que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

luego A es l.i. contradicción, luego $\beta \neq 0$, es decir, podemos despejar w en la primera ecuación:

$$w = \frac{-\alpha_1}{\beta} v_1 + \frac{-\alpha_2}{\beta} v_2 + \cdots + \frac{-\alpha_n}{\beta} v_n$$

es decir, w es combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_n

Demostración 4

Sea $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta w = \vec{0}$, tenemos que $\beta = 0$ pues w no es combinación lineal de los otros vectores, luego:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0}$$

luego $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Ejercicio

Sea V un K -espacio vectorial y $\{u, v, w\}$ un conjunto de vectores l.i.

Estudiemos la dependencia lineal de los vectores

$$s = u + 2v, t = u + v - w, r = v + 2w$$

Solución

Sea $\alpha s + \beta t + \gamma r = \vec{0}$. Luego $\alpha(u + 2v) + \beta(u + v - w) + \gamma(v + 2w) = \vec{0}$, luego $(\alpha + \beta)u + (2\alpha + \beta + \gamma)v + (-\beta + 2\gamma)w = \vec{0}$.

Puesto que $\{u, v, w\}$ es l.i., hay una única manera de obtener el $\vec{0}$ y ésta es:

$$\left. \begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ -\beta + 2\gamma & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Luego $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, es decir $\{r, s, t\}$ es l.i.

Ejercicio

Sea V un K -espacio vectorial y $\{u, v, w\}$ un conjunto l.i. Estudiemos la dependencia lineal de la siguiente familia de vectores.

$$\{u, s = (\alpha - 2)v + (\alpha - 2)w, t = v + (\alpha^2 - 4)w; \alpha \in K\}$$

Solución

Sea $au + bs + ct = \vec{0}$. Luego

$$au + b((\alpha - 2)v + (\alpha - 2)w) + c(v + (\alpha^2 - 4)w) = \vec{0}$$

Es decir $au + ((\alpha - 2)b + c)v + ((\alpha - 2)b + (\alpha^2 - 4)c)w = \vec{0}$.

Puesto que $\{u, v, w\}$ es un conjunto l.i., entonces

$$\left. \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ (\alpha - 2)b + c & = & 0 \\ (\alpha - 2)b + (\alpha^2 - 4)c & = & 0 \end{array} \right\}$$

En forma matricial, tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & \alpha^2 - 4 & 0 \end{array} \right) \quad (2.1)$$

Caso $\alpha - 2 = 0$ ssi $\alpha = 2$

Tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ Luego } \left. \begin{array}{l} a = 0 \\ c = 0 \end{array} \right\} \text{ Para todo } b \in \mathbb{R}$$

Reemplazando en (2.1), tenemos $u, s = \vec{0}, t = v$. Luego para todo $b \in \mathbb{R}$, tenemos $0u + bs + 0t = \vec{0}$, luego $\{u, \vec{0}, t\}$ es l.d., luego $\{u, s, t\}$ es l.d.

Caso $\alpha - 2 \neq 0$ ssi $\alpha \neq 2$

$$(2.1) \quad \begin{array}{c} L_2(\frac{1}{\alpha-2}) \\ \longrightarrow \\ L_3(\frac{1}{\alpha-2}) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha-2} & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+2 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha-2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha^2-5}{\alpha-2} & 0 \end{array} \right)$$

Caso $\alpha^2 - 5 = 0$ ssi $\alpha^2 = 5$

Tenemos

$$\left. \begin{array}{l} a = 0 \\ b + \frac{1}{\alpha-2}c = 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} a = 0 \\ b = \frac{1}{\alpha-2}c \end{array} \right\} \quad c \in \mathbb{R}$$

Luego $0u + \frac{1}{\alpha-2}cs + ct = \vec{0}, \forall c \in \mathbb{R}, \alpha^2 = 5$. Luego $\{u, s, t\}$ es l.d. en este caso

Caso $\alpha^2 \neq 5$

en este caso tenemos $a = b = c = 0$, luego $\{u, s, t\}$ es l.i.

Definición 2.5.4 Sea $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial V . Diremos que A es un **conjunto maximal linealmente independiente** si $\{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$ es linealmente dependiente para todo $w \in V$

Ejemplo

Sea $V = K^2$. $A = \{(1, 1), (1, 0)\}$ es un conjunto maximal linealmente independiente en V . En efecto, todo $(a, b) \in V$ se puede escribir como $(a, b) = (b - a)(1, 1) + b(1, 0)$. Luego

$$\{(a, b), (1, 1), (1, 0)\} \text{ es l.d. } \forall (a, b) \in K^2$$

2.6 Bases de un espacio vectorial

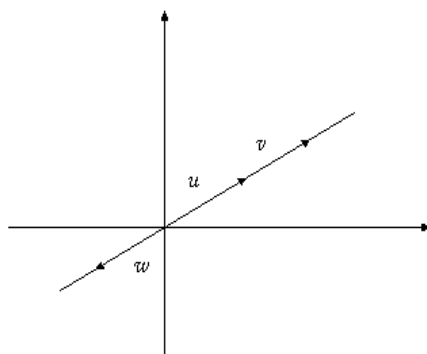
Ahora vamos a estudiar al mismo tiempo las dos secciones anteriores. Vamos a entrelazar el concepto de generadores de un espacio, con el concepto de dependencia lineal.

Para esto vamos a iniciar esta sección con algunas consideraciones sobre las posibles posiciones de tres vectores no nulos en el plano.

Sea $V = \mathbb{R}^2$ y consideramos $u, v, w \in V$. Las posibles ubicaciones de u, v, w en el plano son las dadas en las siguientes tres observaciones:

Observación

Observemos la siguiente figura:



Los vectores u, v, w no nulos son colineales, es decir se encuentran sobre una recta que denotamos por L .

Observamos que:

$$\begin{aligned} \langle u, v, w \rangle &= L = \langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = \langle u \rangle = \langle v \rangle = \\ &= \langle w \rangle \end{aligned}$$

En este caso:

$$\{u, v, w\}, \{u, v\}, \{u, w\}, \{v, w\}$$

son linealmente dependientes, mientras que

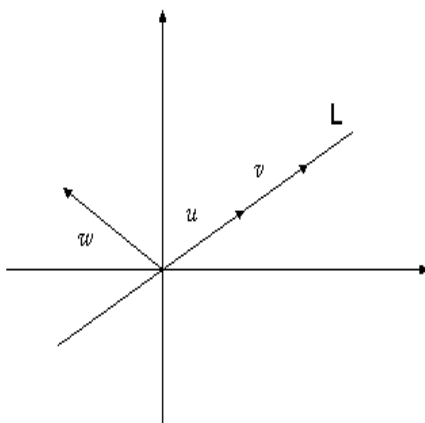
$$\{u\}, \{v\}, \{w\}$$

son linealmente independientes.

Diremos que los conjuntos $\{u\}$, $\{v\}$, $\{w\}$, son "bases de L ".

Observación

Consideremos vectores no nulos u , v colineales, es decir se encuentran sobre una recta que denotamos por L y w otro vector que no se encuentra sobre L .



Dada una combinación lineal nula de los vectores u , v , w :

$$\vec{0} = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

necesariamente se debe tener $\gamma = 0$; mientras que α y β pueden ser no nulos.

El sub-espacio generado por estos tres vectores es:

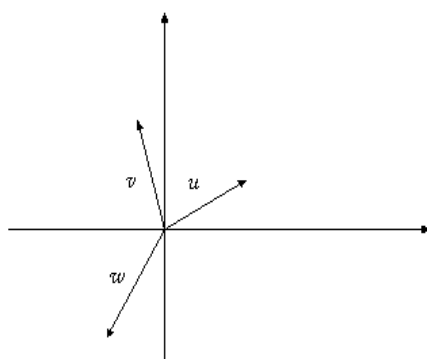
$$\langle u, v, w \rangle = \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = \mathbb{R}^2 \quad \text{y} \quad \langle u, v \rangle \neq \mathbb{R}^2$$

En este caso $\{u, v, w\}$, $\{u, v\}$ son linealmente dependientes y $\{u, w\}$, $\{v, w\}$, $\{u\}$, $\{v\}$, $\{w\}$ son linealmente independientes.

Diremos que $\{u, w\}$, $\{v, w\}$ forman, cada uno de ellos, una "base de \mathbb{R}^2 ".

Observación

Sean u, v, w tres vectores no nulos, de los cuales no hay dos sobre la misma recta:



Se puede tener:

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = \vec{0} \text{ con } \alpha, \beta, \gamma \neq 0$$

Luego se tiene:

$$\langle u, v, w \rangle = \mathbb{R}^2 = \langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle = \langle u, w \rangle$$

Además se tiene que $\{u, v, w\}$ l.d.; $\{u, w\}$ l.i.; $\{v, w\}$ l.i.; $\{u, v\}$ l.i. Diremos que $\{u, v\}$, $\{u, w\}$, $\{v, w\}$ forman "bases de \mathbb{R}^2 ".

Definición 2.6.1 *Un subconjunto B de V , se dice que forma una base de V , si B es l.i. y B es un conjunto de generadores de V .*

Problema

En este momento, uno se pregunta qué relación habrá entre base y los conceptos de conjunto l.i. maximal y conjunto de generadores minimal.

La respuesta a esta inquietud, está dada en la proposición siguiente:

Proposición 2.6.1 (Conceptos equivalentes a base)

Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, entonces son equivalentes:

1. B es l.i. y $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = V$
2. $\forall v \in V$, existen únicos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$, tales que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

3. B es un conjunto minimal de generadores de V
4. B es un conjunto maximal l.i. de V

Demostración

(1) \implies (3)

Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ l.i y $V = \langle B \rangle$. Por demostrar que B es un conjunto minimal de generadores de V . Por hipótesis B genera V . Sólo falta demostrar que este conjunto es minimal.

Supongamos que no es minimal, es decir, supongamos sin pérdida de generalidad que $B = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ genera V , luego v_n es combinación lineal de v_1, \dots, v_{n-1} , es decir, $v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$, ciertos $\alpha_i \in K$, luego $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es l.d. contradicción. Luego B es minimal.

(3) \implies (4)

Supongamos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto minimal de generadores y supongamos además que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es l.i. Sea $C = \{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$. Por (3) se tiene que $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$. Luego $\{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$ es l.d., luego $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es l.i. maximal

(4) \implies (1)

B es l.i. pues es l.i. maximal

Sea $w \in V$ un vector cualquiera. Tenemos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$ es l.d., luego $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, luego $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = V$

(1) \implies (2)

Sea $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ y $v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$. Dos descomposiciones de v .

Luego $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$.

Luego $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = \vec{0}$.

Puesto que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es l.i. tenemos que $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$, luego $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$. Entonces existe una única manera de escribir los vectores de V según el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

(2) \implies (1)

(i) Por demostrar $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es l.i. Sea $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$.

Pero $0 = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$. Entonces $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$.

Puesto que la escritura es única, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$. Luego es l.i.

(ii) Sea $v \in V$, entonces $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ de manera única, en particular $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$. Por (i) y (ii), tenemos (1)

Hemos demostrado que (1) \implies (3), (3) \implies (4), (4) \implies (1) y (1) \implies (2), (2) \implies (1). Luego el teorema está demostrado.

Definición 2.6.2 Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V . Sea $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$. Entonces $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son llamadas **las componentes** de v , según la base B

Definición 2.6.3 Llamaremos la **base canónica** de K^n a la base $\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)\}$.

Observamos que para todo elemento de K^n se tiene:

Si $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n$, entonces

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, a_n) &= a_1(1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + \\ &\quad + a_n(0, 0, \dots, 1) = \\ &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n \end{aligned}$$

Definición 2.6.4 La base canónica de $K_m[X]$, es la base $\{1, X, X^2, \dots, X^m\}$.
y la base canónica de $K[X]$, es la base $\{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$.

Por ejemplo la base canónica de K^2 , es $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$.

Por otra parte la base canónica de $K_2[X]$, es la base $\{1, X, X^2\}$.

Ejercicio

Sea $V = K^2$. Demostremos que $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$ es una base de K^2 .

Solución

1. Demostremos que B genera K^2 .

Sea $(x, y) = \alpha(1, 1) + \beta(1, 2)$, ciertos $\alpha, \beta \in K$ luego:

$$(x, y) = (\alpha + \beta, \alpha + 2\beta)$$

de donde $\beta = y - x$ y $\alpha = 2x - y$, es decir:

$$(x, y) = (2x - y)(1, 1) + (y - x)(1, 2)$$

2. Demostremos que B es l.i. Sea $\alpha(1, 1) + \beta(1, 2) = (0, 0)$, luego:

$$(\alpha + \beta, \alpha + 2\beta) = (0, 0)$$

De aquí se desprende que $\alpha = \beta = 0$.

Puesto que la única manera de escribir el $\vec{0}$ a partir de los dos vectores de B es la forma trivial, se tiene que B es l.i.

Por (1) y (2) se tiene que B es una base de K^2 .

Las componentes de un vector cualquiera (x, y) según la base B son: $2x - y, y - x$. Por ejemplo: $(3, 5) = 1(1, 1) + 2(1, 2)$

Luego un vector (x, y) , cualquiera de K^2 , se puede escribir como combinación lineal de $(1, 1)$ y $(1, 2)$.

Proposición 2.6.2 *Sea V un K -espacio vectorial. Entonces*

1. *Las componentes de la suma de dos vectores, son la suma de las componentes.*
2. *Las componentes del producto de un vector por un escalar, son el producto de las componentes por el escalar.*

Demostración

Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V sobre K . Sea

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \text{ y } w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$$

Entonces:

$$\begin{aligned} v + w &= (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) v_n \end{aligned}$$

Luego se tiene (1).

Además:

$$\begin{aligned} \beta \cdot v &= \beta(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= (\beta \alpha_1) v_1 + (\beta \alpha_2) v_2 + \dots + (\beta \alpha_n) v_n \end{aligned}$$

Luego se tiene (2)

2.6.1 Método para encontrar una base de un espacio vectorial

Recuerda que para tener escrito un sistema de ecuaciones lineales en su forma más simple, hacíamos el proceso de escalonamiento, pues las operaciones elementales no alteran el sistema.

De la misma manera, tu sabes, que las operaciones elementales en un conjunto de generadores no alteran el espacio obtenido.

¿Te parece, entonces, natural, escalonar un conjunto de generadores?

Obviamente que al escalar un conjunto de vectores, el conjunto obtenido, quitándole los vectores nulos, es un conjunto minimal de generadores, luego es una base.

También los vectores escalonados son l.i., luego forman una base del espacio en cuestión.

Ejercicio

Sea $V = K^3$, $U = \langle (2, 4, -5), (-4, -8, -2), (2, 4, 5) \rangle$. Busquemos una base de U cuyos vectores estén escalonados.

Solución

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -4 & -8 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_{31}^{(-2)}]{L_{21}^{(2)}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3^{(\frac{1}{10})}]{L_2^{(-\frac{1}{12})}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_{32}^{(-1)}]{L_{12}^{(5)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diremos que la "base escalonada" de U es $B = \{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$.

Definición 2.6.5 Sea V un espacio vectorial. Diremos que un conjunto de vectores de V es **escalonado** si al escribirlos como filas de una matriz, se obtiene una matriz escalonada.

Proposición 2.6.3 Sea V un K -espacio vectorial y sea $S \leq V$, entonces el conjunto escalonado de generadores de S es único y constituye una base de S .

Definición 2.6.6 La base de un espacio vectorial formada por el conjunto de vectores escalonados es llamada **la base escalonada** del espacio considerado.

Corolario 2.6.4 (Caracterización de igualdad de sub-espacios)

Sean $S, T \leq V$, V un K -espacio vectorial, entonces $S = T$ si y sólo si tienen la misma base escalonada.

Ejercicio

En K^3 , busquemos la base escalonada del subespacio vectorial descrito por

$$S = \{(x, y, z); 5x - 3y - z = 0\}$$

Solución

Tenemos que $z = 5x - 3y$, luego los elementos de S tienen la forma $v = (x, y, 5x - 3y)$. Además:

$$(x, y, 5x - 3y) = x(1, 0, 5) + y(0, 1, -3)$$

Luego el conjunto $B = \{(1, 0, 5), (0, 1, -3)\}$ es un conjunto de generadores de S y puesto que están escalonados, B es la base escalonada de S .

Ejercicio

En K^3 , busquemos la base escalonada del sub-espacio S generado por el conjunto de vectores $\{(1, 2, 4), (3, 6, 1), (5, 10, 9), (2, 4, -3)\}$

Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 10 & 9 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_{21}(-3) \\ L_{31}(-5) \\ L_{41}(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, la base escalonada de S es $\{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$.

Ejercicio

En K^4 , busquemos la base escalonada del sub-espacio

$$S = \{(x - y - z + 2u, x + y + 3z + 4u, 2x + y + 4z + 7u, 3x + y + 5z + 10u); x, y, z, u \in K\}$$

Solución

Todo elemento de S lo podemos escribir en la forma:

$$v = x(1, 1, 2, 3) + y(-1, 1, 1, 1) + z(-1, 3, 4, 5) + u(2, 4, 7, 10)$$

luego

$$S = \langle (1, 1, 2, 3), (-1, 1, 1, 1), (-1, 3, 4, 5), (2, 4, 7, 10) \rangle$$

Al escalar este conjunto de vectores tenemos la base escalonada B ,

$$B = \{(1, 0, \frac{1}{2}, 1), (0, 1, \frac{3}{2}, 2)\}$$

Ejercicio

Sea $V = K^3$, $S, T \leq V$, definidos por:

$$S = \{(x + 2y, 2x + 4y, 3x + 10y); x, y \in K\}$$

$$T = \{(2x + 3y, 4x + 6y, 2x + 5y); x, y \in K\}$$

Estudiemos la posible igualdad de estos dos sub-espacios.

Solución

$S = \langle (1, 2, 3), (2, 4, 10) \rangle$; $T = \langle (2, 4, 2), (3, 6, 5) \rangle$. Ambos conjuntos al ser escalonados tienen la misma base escalonada $B = \{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$, luego $S = T$.

Teorema 2.6.5 (de Steinitz) Sea V un K -espacio vectorial. Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto l.i. y $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ un conjunto de generadores de V . Entonces existe una base de V de la forma:

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n, w_{k_1}, w_{k_2}, \dots, w_{k_p}\}, \text{ ciertos } k_1, k_2, \dots, k_p \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Demostración

Sea $S = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$

1. Tenemos dos posibilidades:

- (a) $w_j \in \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = S, \forall j = 1, 2, \dots, m$. Entonces tenemos que $S = V$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ forman una base de V .
- (b) Existe w_{k_1} que no pertenece a S . En este caso tenemos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n, w_{k_1}\}$ es l.i.

Sea $S_1 = \langle v_1, v_2, \dots, v_n, w_{k_1} \rangle$

2. Nuevamente tenemos dos posibilidades:

- (a) $S_1 = V$, entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_n, w_{k_1}\}$ es una base de V
- (b) $S_1 \neq V$, entonces existe w_{k_2} que no pertenece a S_1 . En este caso tenemos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n, w_{k_1}, w_{k_2}\}$ es l.i.

En forma análoga se construye $S_2 = \langle v_1, v_2, \dots, v_n, w_{k_1}, w_{k_2} \rangle$.

Luego de un número finito de pasos no mayor a m , se obtiene la base buscada.

2.6.2 Aplicación del Teorema de Steinitz

Sea V un K -espacio vectorial. Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto l.i. y sea $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ una base de V , entonces existe una base de V de la forma:

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n, e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_p}\}, \text{ ciertos } k_1, k_2, \dots, k_p \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Ejercicio

Obtengamos una base de K^4 que contenga al conjunto de vectores $A = \{(1, 3, 5, 7), (1, 6, 5, 0)\}$

Solución

La base escalonada del espacio generado por A es

$$B = \{(1, 0, 5, 14), (0, 1, 0, -\frac{7}{3})\}$$

Luego una base de V que contiene los vectores de A es

$$C = \{(1, 3, 5, 7), (1, 6, 5, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

Para esto se eligió dos vectores de la base canónica de K^4 que tienen el 1 en lugares distintos de los elementos líderes de B .

Ejercicio

Busquemos una base de $K_3[X]$ que contenga el conjunto de vectores

$$A = \{3 + 6X - 12X^3, 2 - 4X + X^2\}$$

Solución

La base escalonada del espacio generado por A es

$$B = \{1 + \frac{1}{4}X^2 - 2X^3, X - \frac{1}{8}X^2 - X^3\}$$

De la misma manera que en el caso anterior se elige una base que contenga los vectores de la base canónica de $K_3[X]$ que tienen el 1 en lugares diferentes de los líderes de la base B . Entonces se ha elegido la base

$$C = \{3 + 6X - 12X^3, 2 - 4X + X^2, X^2, X^3\}$$

Ejercicio

Sea $V = K^4$ y $S = \{(a + b + 3c, a + 2c, b + c, a + b + 3c); a, b, c \in K\}$ un sub-espacio de V . Busquemos una base B de S que contenga el vector $u = (0, 1, -1, 0)$ y una base C de S que contenga el vector $v = (5, 3, 2, 5)$

Solución

El conjunto escalonado de generadores de S es

$$A = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 0)\}$$

Entonces es fácil completar con vectores de la base escalonada de S , eligiendo vectores que tengan el elemento líder en un lugar distinto al del vector $u = (0, 1, -1, 0)$. Se tiene así la base

$$B = \{(0, 1, -1, 0), (1, 0, 1, 1)\}$$

Para la base C , tenemos

$$\langle (5, 3, 2, 5) \rangle = \langle (1, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 1) \rangle$$

La base pedida puede ser $C = \{(5, 3, 2, 5), (0, 1, -1, 0)\}$

Ejercicio

Sea $V = M_{2 \times 3}(K)$. $S \leq V$ definido por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b - c & -a - b + c & d \\ a & b & c \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Busquemos una base de S que contenga los vectores

$$u = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } v = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución

Un conjunto de generadores de S es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La base escalonada de S es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La base escalonada del subespacio generado por u y v , es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Luego una posibilidad para B es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2.7 Dimensión de un espacio vectorial

Sabes, es bueno que vayas comprendiendo que uno de los problemas que preocupa en matemáticas, es encontrar entes que permanezcan invariantes al producir ciertos cambios. Son los llamados **invariantes**.

Por el momento, hemos visto que todas las bases de K^2 , como K -espacio vectorial, tienen 2 elementos.

Es decir el número de elementos de cada base es "invariante" en K^2 .

¿Será cierto que en K^3 , todas las bases tienen 3 elementos?.

¿...Y en un K -espacio vectorial V , ocurrirá que todas las bases tiene la misma cantidad de elementos?.

Es decir, uno se pregunta si el número de elementos de las diferentes bases de un espacio vectorial es un invariante.

Interesante pregunta ¿cierto?.

Bueno, esta sección nos da la respuesta a esa pregunta.

Comencemos por unos lemas y luego el teorema que dará la respuesta a esta pregunta.

Lema

Sea $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base de un espacio vectorial V sobre K .

Sea $u \in V$ tal que $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_i u_i + \dots + \alpha_n u_n$, con algún $\alpha_i \neq 0$.

Entonces el conjunto $C = \{u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_n\}$ también es una base de V .

Demostración

Sin pérdida de generalidad, supongamos $\alpha_1 \neq 0$. En este caso

$C = \{u, u_2, \dots, u_n\}$, luego $u_1 = \alpha_1^{-1}u + -\alpha_1^{-1}\alpha_2 u_2 + \dots + -\alpha_1^{-1}\alpha_n u_n$

1. Demostremos que C genera V .

Sea $v \in V$. Entonces:

$v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n$, ciertos $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in K$.

Luego

$$\begin{aligned} v &= \beta_1(\alpha_1^{-1}u - \alpha_1^{-1}\alpha_2 u_2 - \dots - \alpha_1^{-1}\alpha_n u_n) + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n \\ &= \beta_1 \alpha_1^{-1}u + (-\alpha_2 \beta_1 \alpha_1^{-1} + \beta_2)u_2 + \dots + (-\alpha_n \beta_1 \alpha_1^{-1} + \beta_n)u_n \end{aligned}$$

Es decir, $v \in \langle u, u_2, \dots, u_n \rangle$, es decir $\{u, u_2, \dots, u_n\}$ genera V .

2. Demostremos que C es l.i.

Sea

$$\alpha u + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n = 0$$

Luego

$$\alpha(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n = 0$$

De donde

$$(\alpha\alpha_1)u_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta_2)u_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta_n)u_n = 0$$

Pero B es l.i., entonces:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad \alpha\alpha_1 = 0 \\ (2) \quad \alpha\alpha_2 + \beta_2 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ (n) \quad \alpha\alpha_n + \beta_n = 0 \end{array} \right\}$$

De 1) tenemos $\alpha = 0$, pues hemos supuesto $\alpha_1 \neq 0$. Reemplazando en las ecuaciones (2), ..., (n), se tiene $\beta_i = 0, i = 2, \dots, n$. Luego $\{u, u_2, \dots, u_n\}$ es l.i.

Ejemplo

$B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ es una base de K^3 .

Tenemos que:

$$(5, 5, 2) = 2(1, 1, 1) + 3(1, 1, 0) + 0(1, 0, 0)$$

Entonces $C = \{(5, 5, 2), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ es otra base de K^3 , o bien, $D = \{(1, 1, 1), (5, 5, 2), (1, 0, 0)\}$.

Sin embargo, el conjunto $A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (5, 5, 2)\}$ no es una base de K^3 .

Lema

Supongamos que existe una base de V con n vectores. Si $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$ es l.i. y posee n vectores, entonces B es una base de V .

Demostración

Sea $C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una tal base de V . Entonces:

$$u_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

ciertos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$. Sabemos que u_1 es no nulo, pues B es l.i., luego existe algún $\alpha_i \in K, i \in \{1, \dots, n\}$ no nulo. Sin pérdida de generalidad, supongamos $\alpha_1 \neq 0$. El lema anterior nos asegura que $\{u_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V . Luego u_2 es combinación lineal de u_1, v_2, \dots, v_n , luego existen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ no todos nulos tales que:

$$u_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$$

Si $\beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_n = 0$, se tendría $\beta_1 \neq 0$, luego $\{u_1, u_2\}$ es l.d., luego $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ l.d., lo cual es una contradicción. Luego existe al menos un β_j no nulo, $j \in \{2, \dots, n\}$. Supongamos que $\beta_2 \neq 0$, luego $\{u_1, u_2, v_3, \dots, v_n\}$ es una base de V . Repitiendo sucesivamente este proceso, tenemos que $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de V .

Lema

Supongamos que en V existe una base con n vectores. Entonces todo subconjunto de V que sea l.i. tiene a lo más n vectores. Es decir, si $A = \{v_1, \dots, v_m\}$, entonces $m \leq n$

Demostración

Supongamos que existe $S = \{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_t\} \subset V$ que tenga t vectores, con $t > n$ y que sea l.i. Entonces $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ tiene n vectores y es un conjunto l.i., luego B es una base, por el lema anterior. Luego existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ tal que:

$$u_{n+1} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

luego $\{u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}\}$ es l.d., lo que es una contradicción al hecho que S es l.i. Luego V tiene a lo más n vectores l.i.

Teorema 2.7.1 (de invariancia) *Sea V un K -espacio vectorial. Si V tiene una base con un número finito de elementos, entonces toda otra base tiene el mismo número de elementos.*

Demostración

Sean $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $C = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ dos bases cualesquieras de V .

Como B es una base de V y C es l.i. entonces $m \leq n$. Análogamente, como C es una base de V y B es l.i., entonces $n \leq m$. Luego $n=m$.

Nota

Este teorema se llama de **invariancia**, pues nos dice que el número de elementos de una base no varía en las diferentes bases de un espacio vectorial.

Definición 2.7.1 *Un espacio vectorial se dice de **dimensión finita** si posee una base con un número finito de elementos. En caso contrario se dice que es un espacio de **dimensión infinita**.*

Ejemplo

K^2 es un K -espacio vectorial de dimensión finita, pues:

$$B = \{(1, 2), (3, 5)\}$$

es una base de \mathbb{R}^2 sobre \mathbb{R} .

Ejemplo

K^3 es un K -espacio vectorial de dimensión finita, pues:

$$B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

es una base de \mathbb{R}^3 sobre K .

Ejemplo

$\mathbb{R}[X]$ es un espacio vectorial de dimensión infinita sobre \mathbb{R} , pues no es posible construir una base que tenga un número finito de elementos. En efecto, supongamos que existe un conjunto finito B , tal que:

$$B = \{P_1(X), \dots, P_n(X)\}$$

es un conjunto de generadores de $\mathbb{R}[X]$ con

$$m = \max \{gr(P_1(X)), \dots, gr(P_n(X))\},$$

entonces, por ejemplo, el polinomio $P(X) = 1 + X + X^{m+1}$ no es una combinación lineal de $P_1(X), \dots, P_n(X)$. Luego no es posible construir un conjunto finito de generadores.

Definición 2.7.2 Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita. Se llama **dimensión** de V al número de elementos de una (luego de cualquier) base de V .

Notación: $\dim_K V$

Ejemplos

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2, \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$$

Ejercicios de espacios vectoriales complejos

Ejercicio

Sea $V = \mathbb{C}$ y $K = \mathbb{R}$. Encuentre una base de \mathbb{C} sobre \mathbb{R} .

Solución

Afirmación: $B = \{1, i\}$ es una base de \mathbb{C} sobre \mathbb{R}

Un elemento cualquiera de \mathbb{C} tiene la forma $a + bi$ y tenemos que $a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i$ luego B genera \mathbb{C} sobre K .

Además, sea $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i = 0 \cdot 1 + 0 \cdot i$ luego $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ luego B es l.i. es decir, B es una base de \mathbb{C} sobre \mathbb{R} .

Ejercicio

Sea $V = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ y $K = \mathbb{C}$. Busquemos una base de \mathbb{C}^2 sobre \mathbb{C} .

Solución

Afirmación: $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$ es una base de \mathbb{C}^2 sobre \mathbb{C} .

La forma típica de un elemento de \mathbb{C}^2 es $(a + bi, c + di)$ el cual se escribe:

$$(a + bi, c + di) = (a + bi)(1, 0) + (c + di)(0, 1)$$

Luego A genera \mathbb{C}^2 sobre \mathbb{C} .

Demostremos que A es l.i. sobre \mathbb{C} . Sea $(\alpha + \beta i)(1, 0) + (\gamma + \delta i)(0, 1) = (0, 0)$, con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Nótese que esta igualdad está en \mathbb{C}^2 . Luego $\alpha + \beta i = 0 + 0i$ y $\gamma + \delta i = 0 + 0i$, (ambas igualdades en \mathbb{C}), luego $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Luego A es una base de \mathbb{C}^2 sobre \mathbb{C} y $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$.

Nótese que los escalares están en \mathbb{C} , luego $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$

Ejercicio

Sea $V = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ y $K = \mathbb{R}$. Busquemos la dimensión de \mathbb{C}^2 sobre \mathbb{R}

Solución

Afirmación: $A = \{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$ es una base de \mathbb{C}^2 sobre \mathbb{R} .

La forma típica de un elemento de \mathbb{C}^2 es $(a+bi, c+di)$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ el cual se escribe:

$$(a + bi, c + di) = a(1, 0) + b(i, 0) + c(0, 1) + d(0, i)$$

Luego A genera \mathbb{C}^2 sobre \mathbb{R} .

Demostremos que A es l.i. sobre \mathbb{R} .

Sea $\alpha(1, 0) + \beta(i, 0) + \gamma(0, 1) + \delta(0, i) = (0 + 0i, 0 + 0i)$, (esta igualdad está en \mathbb{C}^2), luego $(\alpha + \beta i, \gamma + \delta i) = (0 + 0i, 0 + 0i)$, luego $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Se tiene que A es una base de \mathbb{C}^2 sobre \mathbb{R} y $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$.

Ejercicio

Sea $V = \mathbb{C}^3$ y $K = \mathbb{C}$. Busquemos la dimensión de \mathbb{C}^3 sobre \mathbb{C} .

Solución

Afirmación: $A = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ es una base de \mathbb{C}^3 sobre \mathbb{C} .

La forma típica de un elemento de \mathbb{C}^3 es $(a + bi, c + di, e + fi)$, el cual se escribe:

$$(a + bi, c + di, e + fi) = (a + bi)(1, 0, 0) + (c + di)(0, 1, 0) + (e + fi)(0, 0, 1)$$

Prueba que A es un conjunto l.i.

Ejercicio

Sea $V = \mathbb{C}^3$ y $K = \mathbb{R}$. Busquemos la dimensión de \mathbb{C}^3 sobre \mathbb{R} .

Solución

Afirmación: $A = \{(1, 0, 0), (i, 0, 0), (0, 1, 0), (0, i, 0), (0, 0, 1), (0, 0, i)\}$ es una base de \mathbb{C}^3 sobre \mathbb{R} y $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^3 = 6$.

Bueno, la demostración queda para ti como ejercicio.

Ejercicio

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre \mathbb{C} . Demostremos que V tiene dimensión $2n$ sobre \mathbb{R} .

Solución

Sea $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V sobre \mathbb{C} . Luego $v \in V$ se escribe en la forma:

$$\begin{aligned} v &= (\alpha_1 + \beta_1 i)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2 i)v_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n i)v_n \\ &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + (\beta_1 i)v_1 + (\beta_2 i)v_2 + \dots + (\beta_n i)v_n \\ &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1(iv_1) + \beta_2(iv_2) + \dots + \beta_n(iv_n) \end{aligned}$$

Luego $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n, iv_1, iv_2, \dots, iv_n\}$ genera \mathbb{C} sobre \mathbb{R} .

Sea $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 iv_1 + \beta_2 iv_2 + \dots + \beta_n iv_n = 0 + 0i$

Luego

$$(\alpha_1 + i\beta_1)v_1 + (\alpha_2 + i\beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_n + i\beta_n)v_n = 0 + 0i$$

Pero $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es l.i. sobre \mathbb{C} , luego

$$\alpha_1 + i\beta_1 = 0 + 0i, \quad \alpha_2 + i\beta_2 = 0 + 0i, \dots, \alpha_n + i\beta_n = 0 + 0i$$

por definición de igualdad de números complejos, tenemos

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0 = \alpha_2 = \beta_2 = \dots = \alpha_n = \beta_n$$

Luego $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n, iv_1, iv_2, \dots, iv_n\}$ es l.i. sobre \mathbb{R} .

Luego B forma una base sobre \mathbb{R} . Entonces V tiene dimensión $2n$ sobre \mathbb{R} .

2.8 Suma de sub-espacios vectoriales

Nosotros vimos que la intersección de los sub-espacios vectoriales es un sub-espacio vectorial.

Uno se pregunta si ocurre lo mismo con la unión de dos sub-espacios. A simple vista, ¿¡intuición!?, parece que no.

Entonces si no lo fuera ¿Cuál sería el más pequeño sub-espacio que contiene a la unión de dos sub-espacios?

Bueno, de esto se trata esta sección.

Comencemos por estudiar un ejemplo concreto ¿Te animas?, ¡Vamos!.

Observación

En \mathbb{R}^2 , consideremos $S = \langle (1, 2) \rangle$ y $T = \langle (1, 1) \rangle$, ¿Es $S \cup T$ un sub-espacio vectorial?

Tenemos que $(1, 2) \in S \cup T$. Además $(1, 1) \in S \cup T$. Sin embargo, $(1, 2) + (1, 1) = (2, 3) \notin S \cup T$. Luego $S \cup T$ no es un sub-espacio vectorial.

¿Cuándo $S \cup T$ es un sub-espacio vectorial?

¿Cuál es el sub-espacio más pequeño que contiene a $S \cup T$?

$\langle (1, 2), (1, 1) \rangle = \{ \alpha(1, 2) + \beta(1, 1); \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} = \{ s + t; s \in S, t \in T \} = S + T$

Este sub-espacio debe contener todas las combinaciones lineales de $(1, 2)$ y $(1, 1)$. ¿Será entonces $\{ \alpha(1, 2) + \beta(1, 1); \alpha, \beta \in K \}$?

Definición 2.8.1 Sea V un K -espacio vectorial. Sean $S, T \leq V$. Entonces se define el conjunto

$$S + T = \{ s + t; s \in S, t \in T \}$$

Proposición 2.8.1 Sean S y T dos sub-espacios de V . Entonces $S+T$ es un sub-espacio de V .

Demostración

1. $S + T \neq \emptyset$ pues $0 + 0 \in S + T$
2. Sean $u, v \in S + T$, luego $u = s + t$ y $v = s' + t'$, ciertos $s, s' \in S$, ciertos $t, t' \in T$. Tenemos que:

$$u + v = (s + t) + (s' + t') = (s + s') + (t + t')$$

que es un elemento típico de $S + T$. Luego $S + T$ es cerrado para la suma.

3. Sea $v \in S + T$, luego $v = s + t$ ciertos $s \in S$, cierto $t \in T$. Ahora bien

$$\alpha v = \alpha(s + t) = \alpha s + \alpha t$$

el cual es un elemento de $S + T$.

Por (1), (2), (3), $S + T$ es un sub-espacio de V .

Definición 2.8.2 *El sub-espacio vectorial $S + T$ es llamado el sub-espacio suma de S y T .*

Proposición 2.8.2 *Sea V un K -espacio vectorial. Sean $S, T \leq V$. Entonces $S + T$ es el más pequeño sub-espacio de V que contiene a $S \cup T$*

Demostración

Demostremos que $S \cup T \subset S + T$.

$v \in S \cup T \Leftrightarrow v = s$, cierto $s \in S$, o bien $v = t$, cierto $t \in T$. Luego $v = s + 0 \in S + T$ o bien $v = 0 + t \in S + T$, en ambos casos $v \in S + T$

Demostremos que todo sub-espacio vectorial que contiene a S y T debe contener a $S + T$.

Sea $H \leq V$ tal que $S, T \leq H$. Sea $s \in S$ y $t \in T$, luego $s \in H$ y $t \in H$, luego $s + t \in H$, pues H es un sub-espacio vectorial, luego todo elemento de la forma $s + t$ pertenece a H . Esto quiere decir que $S + T \subset H$.

Corolario 2.8.3 $S \subset T \Leftrightarrow S + T = T$

Demostración

\Rightarrow)

$S + T$ es el más pequeño sub-espacio que contiene a $S \cup T$, pero $S \cup T = T$. Además T es un sub-espacio vectorial y es el más pequeño que se contiene a si mismo, luego $S + T = T$.

\Leftarrow)

$$S \subset S \cup T \subset S + T = T$$

Nota

Sean $S, T \leq V$ con bases B y C respectivamente. Entonces:

$$S + T = \langle B \cup C \rangle$$

Ejercicio

Sea $V = K^3$, $S = \langle (1, -1, 1), (1, 2, 3) \rangle$, $T = \langle (1, -1, 1), (2, 1, 0) \rangle$.

Busquemos la base escalonada de $S + T$.

Solución

$$S + T = \langle (1, -1, 1), (2, 1, 0), (1, -1, 1), (1, 2, 3) \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La base escalonada de $S + T$ es $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Ejercicio

Sea $U = K^4$.

Sean $S = \langle (1, 1, -1, 1), (1, 2, 3, 0) \rangle$, $T = \langle (3, 4, 1, 2), (0, 1, -1, 0) \rangle$

Busquemos la base escalonada de $S + T$

Solución

Sabemos que:

$$S + T = \langle (1, 1, -1, 1), (1, 2, 3, 0), (3, 4, 1, 2), (0, 1, -1, 0) \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{42}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

La base escalonada de $S + T$ es: $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -\frac{1}{5}), (0, 0, 1, -\frac{1}{5})\}$

Observación

Sea $V = K^3$, $S = \langle (1, -1, 0), (1, 2, 3) \rangle$, $T = \langle (1, -1, 1), (2, 1, 0) \rangle$,
 $\dim S = 2, \dim T = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $\dim(S + T) = 3$

Busquemos $S \cap T$. Sea $v \in S \cap T$, luego

$$v = \alpha(1, -1, 0) + \beta(1, 2, 3) = a(1, -1, 1) + b(2, 1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{lcl} (1) & : & \alpha + \beta = a + 2b \\ (2) & : & -\alpha + 2\beta = -a + b \\ (3) & : & 3\beta = a \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{lcl} (3) \text{ en } (1) & : & \alpha = 2\beta + 2b \\ (3) \text{ en } (2) & : & -\alpha = -5\beta + b \end{array} \right\}$$

A la primera ecuación, restémosle 2 veces la segunda. Tenemos $3\alpha = 12\beta$, es decir, $\alpha = 4\beta$.

Luego $v = 4\beta(1, -1, 0) + \beta(1, 2, 3)$, es decir $v = \beta(5, -2, 3)$, de donde $S \cap T = \langle (5, -2, 3) \rangle$ y $\dim S \cap T = 1$.

Resulta que $\dim S + \dim T = \dim S + T - \dim S \cap T$. ¿Ocurrirá esto siempre?

Uno piensa: en la suma, puede que se repitan vectores, entonces hay que restarle la intersección. ¡Parece obvio!. Bueno, este chispazo genial está enunciado en el siguiente teorema.

Teorema 2.8.4 Sean $S, T \leq V$. Entonces:

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$$

Demostración

Sea $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ base de $S \cap T$

Como B_1 es linealmente independiente, entonces por el corolario del teorema de Steinitz:

(1) $\exists v_1, v_2, \dots, v_s \in S$ tal que $B_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_s\}$ es una base de S .

(2) $\exists w_1, w_2, \dots, w_t$, en T tal que $B_3 = \{u_1, u_2, \dots, u_r, w_1, w_2, \dots, w_t\}$ es una base de T .

Demostremos que:

$B = \{u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_s, w_1, w_2, \dots, w_t\}$ es una base de $S+T$.

1. Por demostrar que B genera $S+T$:

Sea $w \in S+T$, luego $w = s + t$, cierto $s \in S$ y $t \in T$.

Luego:

$$\begin{aligned} w &= (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s) + \\ &\quad (\alpha'_1 u_1 + \dots + \alpha'_r u_r + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_t w_t) \\ &= (\alpha_1 + \alpha'_1) u_1 + \dots + (\alpha_r + \alpha'_r) u_r + \\ &\quad \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_t w_t \in \langle B \rangle \end{aligned}$$

2. Por demostrar que B es l.i.

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_t w_t = \vec{0} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s = -\gamma_1 w_1 - \gamma_2 w_2 - \dots - \gamma_t w_t \in S \cap T$$

$$\Rightarrow -\gamma_1 w_1 - \gamma_2 w_2 - \dots - \gamma_t w_t \in S \cap T$$

$$\Rightarrow -\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_t w_t = \delta_1 u_1 + \dots + \delta_r u_r$$

$$\Rightarrow \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_t w_t + \delta_1 u_1 + \dots + \delta_r u_r = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = \dots = \gamma_t = \delta_1 = \dots = \delta_r = 0$$

Reemplazando en $(*)$ tenemos que:

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s = \vec{0}$$

$$\text{Entonces } \alpha_1 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \dots = \beta_s = 0$$

Luego B es l.i.

Por (1) y (2) se tiene que B es una base de $S + T$.

Luego $\dim(S+T) = r+s+t$; $\dim S = r+s$, $\dim T = r+t$, $\dim S \cap T = r$

$$r + s + t = (r + s) + (r + t) - r$$

Luego $\dim S + T = \dim S + \dim T - \dim S \cap T$

Ejercicio

Consideremos los sub-espacios de K^4 .

$S = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle$; $T = \{(x, y, z, t); x + y = 0\}$

Busquemos una base de $S \cap T$ y $S + T$.

Solución

Sea $v = (x, y, z, t) \in T$ luego:

$$(x, y, z, t) = (x, -x, z, t) = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(S + T) = 4$$

$$4 = 2 + 3 - \dim(S \cap T) \Rightarrow \dim(S \cap T) = 1$$

Necesitamos encontrar $v \in S \cap T$, $v \neq \vec{0}$

$$v = \alpha(1, 0, 1, 0) + \beta(0, 1, 0, 0) = \gamma(1, -1, 0, 0) + \delta(0, 0, 1, 0) + \epsilon(0, 0, 0, 1)$$

Luego, $(\alpha, \beta, \alpha, 0) = (\gamma, -\gamma, \delta, \epsilon)$, de donde $\alpha = -\beta = \gamma = \delta$, $\epsilon = 0$

Entonces tenemos

$$v = \alpha(1, 0, 1, 0) - \alpha(0, 1, 0, 0) \quad \text{o bien,}$$

$$v = \alpha(1, -1, 0, 0) + \alpha(0, 0, 1, 0) + 0(0, 0, 0, 1)$$

Luego $S \cap T = \langle (1, -1, 1, 0) \rangle$

Nota

Ahora vamos a poner la atención en aquellos sub-espacios cuya intersección entre ellos es $\{\vec{0}\}$.

Definición 2.8.3 Sean S, T, W sub-espacios de V , diremos que un sub-espacio W de V es **suma directa de los sub-espacios S y T** si:

1. $W = S + T$
2. $S \cap T = \{\vec{0}\}$.

Notación: $W = S \oplus T$

Ejercicio

Sea $V = K^3$, $S = \{(x, 0, 0); x \in K\}$, $T = \{(0, y, z); y, z \in K\}$.

Entonces, demostremos que $S \oplus T = K^3$

Solución

1. Demostremos que $K^3 = S + T$

Sea $v \in K^3$ luego $v = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, z)$ luego (x, y, z) se escribe como un vector de S más un vector de T . Luego $K^3 \subseteq S + T$, luego $K^3 = S + T$

Otra manera de verlo sería la siguiente:

$$S = \langle (1, 0, 0) \rangle \text{ y } T = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle.$$

Luego $S + T = \langle (1, 0, 0) \rangle + \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ y este último es K^3

2. Sea $v \in S \cap T$, luego $v \in S$ y $v \in T$. Luego $v = (x, 0, 0)$ y $v = (0, y, z)$. Luego $(x, 0, 0) = (0, y, z) \Rightarrow x = 0, y = 0, z = 0 \Rightarrow v = \vec{0} = (0, 0, 0)$

Entonces $K^3 = S \oplus T$

Ejercicio

Consideremos $V = K^3, W = \{(x, 0, z); x, z \in K\}$, $S = \langle (1, 0, 2) \rangle$, $T = \langle (2, 0, 1) \rangle$.

Demostremos que $W = S \oplus T$:

1. Demostremos que $W = S + T$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2(\frac{-1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{L_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero también $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ es una base de W pues los vectores son l.i. y además $(x, 0, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1)$. Luego $W = S + T$

Otra manera de demostrar que $W = S + T$ es la siguiente

Consideremos $w \in W$ y hacemos la siguiente afirmación:

$$(x, 0, z) = \alpha(1, 0, 2) + \beta(2, 0, 1), \text{ ciertos } \alpha, \beta \in K$$

$$\text{Luego } (x, 0, z) = (\alpha + 2\beta, 0, 2\alpha + \beta)$$

De donde se concluye que $x = \alpha + 2\beta, z = 2\alpha + \beta$

Entonces

$$\alpha = \frac{2z - x}{3} \text{ y } \beta = \frac{2x - z}{3}$$

Luego tenemos:

$$(x, 0, z) = \left(\frac{2z - x}{3}\right)(1, 0, 2) + \left(\frac{2x - z}{3}\right)(2, 0, 1) \in S + T$$

Es decir $w = s + t$, ciertos $s \in S, t \in T$. Luego $W = S + T$

2. Ahora debemos demostrar que $S \cap T = \{\vec{0}\}$

$$v \in S \cap T \Rightarrow v \in S \text{ y } v \in T \Rightarrow v = \alpha(1, 0, 2) \text{ y } v = \beta(2, 0, 1)$$

$$\Rightarrow v = (\alpha, 0, 2\alpha) \text{ y } v = (2\beta, 0, \beta) \Rightarrow ((\alpha, 0, 2\alpha) = (2\beta, 0, \beta))$$

$$\Rightarrow \alpha = 2\beta, \quad 2\alpha = \beta, \Rightarrow v = (0, 0, 0), \text{ es decir } W = S \oplus T.$$

Definición 2.8.4 Dos sub-espacios S y T de un sub-espacio vectorial V se dicen **linealmente independientes** ssi:

$$S \cap T = \{\vec{0}\}$$

Nota: Si $S \oplus T$ es directa entonces S y T son l.i. . .

Definición 2.8.5 Si $S \oplus T = W$ entonces S y T son llamados **sub-espacios suplementarios** entre sí en W .

Ejemplo

$$K^2 = \langle (1, 1) \rangle \oplus \langle (1, 3) \rangle,$$

$\langle (1, 1) \rangle$ es suplementario de $\langle (1, 3) \rangle$ en K^2 y $\langle (1, 3) \rangle$ es suplementario de $\langle (1, 1) \rangle$ en K^2

Observación

Sean:

$$S = \langle (1, 3, 0) \rangle, T = \langle (0, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle, U = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

Tenemos entonces que $K^3 = \langle (1, 3, 0) \rangle \oplus \langle (0, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$

También:

$$K^3 = \langle (1, 3, 0) \rangle \oplus \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

Se tiene $K^3 = S \oplus T$ y $K^3 = S \oplus U$ y $T \neq U$

Ejemplo

$$M_{2 \times 2}(K) = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}; x, y, z \in K \right\}$$

$$M_{2 \times 2}(K) = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle \oplus \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Observación

Sea $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$. Observamos que:

$$f_2(-x) = x^2 = f_2(x); f_3(-x) = -x^3 = -f_3(x)$$

$$f_{2n}(-x) = x^{2n} = f_{2n}(x); f_{2n+1}(-x) = -x^{2n+1} = -f_{2n+1}(x)$$

De manera natural se define

Definición 2.8.6 Diremos que una función g es **par** ssi $g(-x) = g(x)$ y diremos ue una función g es **impar** ssi $g(-x) = -g(x)$

Ejercicio

Sea $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$. Demostremos que

$$V = \{\text{funciones pares}\} \oplus \{\text{funciones impares}\}$$

Solución

1. Demostremos que $V = \{\text{funciones pares}\} + \{\text{funciones impares}\}$

Afirmación: $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

Sea $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$. Demostremos que g es par.

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x), \text{ luego } g \text{ es par.}$$

Demostremos que h es impar

$$h(-x) = \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\left(\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right) = -h(x)$$

Luego h es impar.

Luego $V = \{\text{funciones pares}\} + \{\text{funciones impares}\}$

2. Demostremos que $\{\text{funciones pares}\} \cap \{\text{funciones impares}\} = \{\vec{0}\}$

Sea f par e impar a la vez: Es decir, $f(-x) = f(x) \forall x \in K$ y $f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Luego } f(x) = f(-x) = -f(x)$$

luego $2f(x) = 0 \forall x \in K$, luego $f(x) = 0 \forall x \in K$ luego $f = \vec{0}$,
luego $\{\text{funciones pares}\} \cap \{\text{funciones impares}\} = \{\vec{0}\}$

Proposición 2.8.5 Sea V un K -espacio vectorial; $S, T, W \leq V$. Entonces son equivalentes:

1. $W = S \oplus T$

2. $W = S + T$ y $\vec{0} = s + t, s \in S, t \in T \implies s = t = \vec{0}$

La afirmación 2 nos dice que $W = S + T$ y el $\vec{0}$ se escribe de manera única.

Demostración

(1) \implies (2)

Sea $W = S \oplus T$ y $s + t = \vec{0}$, ciertos $s \in S$ y $t \in T$. Luego $s + t \in S \cap T$, pues $\{\vec{0}\} = S \cap T$, luego $s + t = s'$ y $s + t = t'$. Luego $t = s' - s$ y $s = t' - t$. Luego $t, s \in S \cap T = \{\vec{0}\}$. Luego $s = t = \vec{0}$

(2) \implies (1)

Tenemos que demostrar que $S \cap T = \{\vec{0}\}$

Sea $v \in S \cap T$, luego $v \in S$ y $v \in T$. Además $-v \in S$ y $-v \in T$.

El chispazo genial es escribir el $\vec{0}$ de la manera siguiente: $\vec{0} = v + (-v)$ y pensar que $v \in S$ y $-v \in T$. Entonces por (2.) tenemos que $v = \vec{0}$ y $-v = \vec{0}$. Luego $S \cap T = \{\vec{0}\}$

Proposición 2.8.6 Sea $W = S + T$. Entonces son equivalentes:

1. $\vec{0} = s + t \implies s = t = \vec{0}$ (El vector $\vec{0}$ se escribe de manera única)
2. $s + t = s' + t' \implies s = s'$ y $t = t'$ (Todo vector de la forma $s + t$ se escribe de manera única)

Demostración

(1) \implies (2)

Sea $s + t = s' + t'$. Luego $(s - s') + (t - t') = \vec{0}$

Por (1), tenemos que $s - s' = \vec{0}$ y $t - t' = \vec{0}$.

Luego $s = s'$ y $t = t'$

(2) \implies (1)

Sea $s + t = \vec{0}$. Pensemos el $\vec{0}$ como $\vec{0} + \vec{0}$, el primer $\vec{0}$ lo pensamos en S y el segundo en T .

Luego $s + t = \vec{0} + \vec{0}$. De (2.) tenemos $s = \vec{0}$ y $t = \vec{0}$.

Definición 2.8.7 Sean $V_1, V_2, \dots, V_n \leq V$. Entonces la **suma de estos sub-espacios** está definida por:

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = \{v_1 + v_2 + \dots + v_n; v_i \in V_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Proposición 2.8.7 Sean $V_1, V_2, \dots, V_n \leq V$. Entonces

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n \leq V$$

Demostración

Se deja como ejercicio.

Definición 2.8.8 Decimos que W es suma directa de los subespacios V_1, V_2, \dots, V_n si:

1. $W = V_1 + V_2 + \dots + V_n$
2. $\vec{0} = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, $v_i \in V_i$, $i = 1, 2, \dots, n$
 $\implies v_1 = v_2 = \dots = v_n = \vec{0}$. (El cero se escribe de una sola manera).

Cuando esto ocurra, escribiremos:

$$W = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$$

Proposición 2.8.8 Sean $V_1, V_2, \dots, V_n \leq V$. Sea $W \leq V$ y $W = V_1 + V_2 + \dots + V_n$, entonces son equivalentes:

1. $\sum_{i=1}^n v_i = \vec{0}$, $v_i \in V_i, \forall i = 1, \dots, n \implies v_i = 0$
2. $\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n w_i$, $v_i, w_i \in V_i \forall i = 1, \dots, n \implies v_i = w_i$
3. $V_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n V_j = \{\vec{0}\}, \forall i = 1, \dots, n$

En palabras el punto tercero se puede expresar como:

Cada sub-espacio intersectado con la suma de todos los otros subespacios es el $\{\vec{0}\}$.

Ejemplo

Sea $V = K^3$, $V_1 = \{(x, 2x, 0), x \in K\}$, $V_2 = \{(2x, x, 0), x \in K\}$,
 $V_3 = \{(x, 2x, 3x), x \in \mathbb{R}\}$

Es fácil ver que $V_1 + V_2 + V_3 = K^3$. Veamos ahora si esta suma es directa.

1. ¿ $V_1 \cap (V_2 + V_3)$?. Primero conozcamos $S = V_2 + V_3$

$V_2 = \langle (2, 1, 0) \rangle$ y $V_3 = \langle (1, 2, 3) \rangle$. Luego:

$$V_2 + V_3 = \langle (2, 1, 0), (1, 2, 3) \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{21}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{L_2(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego

$$V_2 + V_3 = \langle (1, 0, -1), (0, 1, 2) \rangle$$

luego

$$S = \langle (1, 0, -1), (0, 1, 2) \rangle$$

consideremos $u = \alpha(1, 2, 0) = \beta(1, 0, -1) + \gamma(0, 1, 2) \in V_1 \cap (V_2 + V_3)$ Entonces $(\alpha, 2\alpha, 0) = (\beta, \gamma, -\beta + 2\gamma)$, luego $\alpha = \beta$, $2\alpha = \gamma$, $0 = -\beta + 2\gamma$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Luego $V_1 \cap (V_2 + V_3) = \{\vec{0}\}$

De la misma manera debemos probar que $V_2 \cap (V_1 + V_3) = \{\vec{0}\}$ y $V_3 \cap (V_1 + V_2) = \{\vec{0}\}$

2. O bien, podríamos demostrar que el $\vec{0}$ se escribe de manera única.

$$\vec{0} = (0, 0, 0) = v_1 + v_2 + v_3 = \alpha(1, 2, 0) + \beta(2, 1, 0) + \gamma(1, 2, 3).$$

Luego

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 0, 2\alpha + \beta + 2\gamma = 0, 3\gamma = 0, \text{ luego } \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Por (1) o por (2) tenemos que $K^3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$

2.9 Ejercicios propuestos

1. En \mathbb{R}^2 se define las siguientes operaciones:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$$

$$\alpha * (a, b) = (\alpha a, -\alpha b)$$

Estudie cuales de axiomas de espacio vectorial cumplen estas operaciones.

2. Considere el conjunto $\mathbb{R}_1[X]$. En él se define las siguientes operaciones:

$$(a + bX) + (c + dX) = (a + c) + (b + d)X$$

$$\alpha \Delta(a + bX) = (\alpha a) + bX$$

¿Es $\mathbb{R}_1[X]$ un \mathbb{R} espacio vectorial con estas operaciones?

3. Estudie si los siguientes conjuntos son sub-espacios de los espacios vectoriales respectivos:

(a) $S = \{a + bX + cX^2 + dX^3 \in K_3[X]; 2cd = b, b + a = 0\}$ de $K_3[X]$

(b) $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K); a + d = 0, c^2 + d^2 = -1 \right\}$ de $M_2(K)$

(c) $S = \{(x, y, z); 2x + xy = 0\}$ de K^3

4. Estudie si el vector $u = (5 + 5i, -1 + 3i)$ está en el \mathbb{C} -espacio vectorial generado por el vector $v = (3 - i, 1 + i)$
5. Estudie si es posible encontrar dos sub-espacios de \mathbb{R}^4 , de dimensión 2 cada uno, cuya intersección sea $\vec{0}$
6. Sea V un K -espacio vectorial y sea $\{u, v, w, t\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes.
- (a) Demuestre que $A = \{u + v, v + w, w + u\}$ es linealmente independiente.

- (b) Estudie la dependencia lineal de $B = \{u + v, v + w, w + t, t + u\}$.
- (c) Estudie si el sub-espacio $\langle A \rangle$ es igual al sub-espacio $\langle B \rangle$. Justifique su respuesta.
7. Estudie la dependencia lineal del conjunto de vectores siguiente:
 $\{(1, 1, 2), (2, \alpha^2 - 2, \alpha + 2), (3, \alpha^2 + \alpha - 3, \alpha^2 + 3\alpha - 4)\}$ según los diferentes valores de α
8. En K^n , indique en cada uno de los casos, las condiciones que debe cumplir n , para tener $u, v, w \in K^n$, tal que
- (a) $\{u, v\}$ l.i.
- (b) $\{u, v\}$ l.i. y w no pertenece a $\langle u, v \rangle$
- (c) $\{u, v, w\}$ es un conjunto minimal de generadores de K^n
9. Sea V el \mathbb{R} -espacio vectorial definido por $V = \{f; f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$. Sean $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \sin(2x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Estudie la dependencia lineal de $\{f_1, f_2\}$.
10. Sea V un K -espacio vectorial. Si $\dim_k(V)$ es n y e_1, e_2, \dots, e_n es una base de V , muestre que existen sub-espacios H_0, H_1, \dots, H_n de V tales que $H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n$ y $\dim_k(H_i) = i$
11. En K^4 , considere los sub-espacios:

$$S = \{(x, 2x + y, x + 2y, 2y); x, y \in K\}$$

$$T = \langle (3, 4, 1, 7), (5, 0, -5, 3), (0, 0, 0, 4) \rangle$$

Encuentre la base escalonada de $S, T, S \cap T, S + T$. Encuentre una base de K^4 que contenga los vectores que generan el sub-espacio T .

Capítulo 3

Aplicaciones Lineales

3.1 Introducción, definición y ejemplos

Nosotros vimos que lo más importante de un espacio vectorial es la existencia de una base en él. Uno diría que la esencia de un espacio vectorial es la existencia de una base en él.

Entonces, si queremos definir una aplicación entre dos espacios vectoriales, debemos tener en cuenta esta consideración. ¡Obvio! Si no lo hacemos, entonces cerremos los libros y terminemos aquí el curso. ¿No te parece? Bueno, pero ¿Que quiere decir tener en cuenta la existencia de una base?. Creo que será mejor que lo veamos en un ejemplo.

Consideremos \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 como \mathbb{R} -espacios vectoriales y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Además consideremos la base $B = \{(2, 1), (3, 2)\}$ en el dominio de f .

Supongamos que sólo sabemos como se comporta f en los elementos de esta base.

Supongamos, por ejemplo, que

$$f(2, 1) = (3, 2, 1) \text{ y } f(3, 2) = (5, 1, 1)$$

La pregunta que nos hacemos, es si es posible obtener la imagen de cualquier vector de \mathbb{R}^2 , o en qué condiciones lo podríamos obtener.

Para esto, comencemos por usar el concepto de base, es decir, que todo elemento de \mathbb{R}^2 se escribe de una manera única como combinación lineal de la base.

Veamos, por ejemplo, si es posible conocer la imagen del vector $v = (1, 0)$

Sabemos que $(1, 0) = 2(2, 1) + (-1)(3, 2)$, luego $f(1, 0) = f[2(2, 1) + (-1)(3, 2)]$.

¿Qué exigencias deberíamos hacer a f para que la información dada a los vectores de B , pueda ser extendida a todo \mathbb{R}^2 ?

... un chispazo genial y hacemos las operaciones siguientes:

$$\begin{aligned} f[2(2, 1) + (-1)(3, 2)] &= f(2(2, 1)) + f(-1(3, 2)) = \\ &= 2f(2, 1) + (-1)f(3, 2) = \\ &= 2(3, 2, 1) + (-1)(5, 1, 1) = \\ &= (1, 3, 1) \end{aligned}$$

Es decir hicimos las exigencias siguientes:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Las exigencias (1.) y (2.) hechas a una aplicación, se entrelazan con la noción de espacio vectorial y así la información con respecto a los elementos de una base, se extiende a todos los vectores del espacio. Además, sólo para las aplicaciones que cumplan estas dos exigencias podremos utilizar el hecho que el Dominio y el Codominio sean espacios vectoriales. Estas consideraciones nos llevan a la siguiente definición:

Definición 3.1.1 Sean U y V dos K -espacios vectoriales. Diremos que $f : U \longrightarrow V$ es una **aplicación lineal** si se cumplen simultáneamente:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Es muy agradable conocer una larga cantidad de ejemplos, antes de comenzar a estudiar sus propiedades.

Veremos muchos ejemplos, pero también de aplicaciones que no son lineales. Esperamos que los estudies todos. ¿De acuerdo?...Tenemos que seguir ilusionados con el Álgebra Lineal...

Ejemplo

Sea V un K -espacio vectorial. Sea $f : V \longrightarrow V ; f(v) = v$. Esta aplicación es llamada **identidad** y se denota $f = id_V$.

Tenemos

$$f(u + v) = u + v = f(u) + f(v) \text{ y } f(\alpha u) = \alpha u = \alpha f(u)$$

Luego id_V es una aplicación lineal. ¡Trivial! ¿Cierto?

Ejemplo

Sea V un K -espacio vectorial. Sea $f : V \longrightarrow V ; f(v) = 0$, llamada la **aplicación nula**. Denotada por $f = 0$.

$$\begin{aligned} f(u + v) &= 0 = 0 + 0 = f(u) + f(v) \\ f(\alpha u) &= 0 = \alpha 0 = \alpha f(u) \end{aligned}$$

Luego f es lineal.

Ejemplo

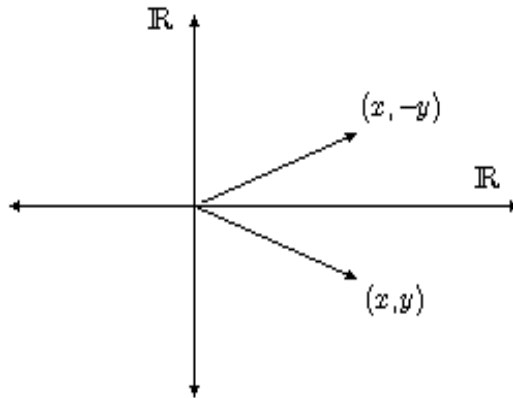
Sea V un K -espacio vectorial. Sea $T : V \longrightarrow V ; T(v) = \lambda v$. Esta aplicación es llamada **homotecia de razón λ** . Tenemos

$$\begin{aligned} T(u + v) &= \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v = T(u) + T(v) \\ T(\alpha u) &= \lambda(\alpha u) = \alpha(\lambda u) = \alpha T(u) \end{aligned}$$

Luego T es una aplicación lineal.

Ejemplo: Reflexión en torno al eje X

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (x, -y)$



$$\begin{aligned}
 T[(x, y) + (x', y')] &= T[(x + x', y + y')] \\
 &= (x + x', -(y + y')) \\
 &= (x, -y) + (x', -y') \\
 &= T((x, y)) + T((x', y')) \\
 T[\alpha(x, y)] &= T((\alpha x, \alpha y)) \\
 &= (\alpha x, -(\alpha y)) \\
 &= \alpha(x, -y) \\
 &= \alpha T((x, y))
 \end{aligned}$$

Luego T es lineal.

Antiejemplo

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \cos x$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Si fuese una aplicación lineal tendríamos que tener :

$$\cos(x + y) = \cos x + \cos y$$

Luego coseno no es una aplicación lineal.

De la misma manera

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad g(x) = \sin x$$

no es una aplicación lineal, pues

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

lo cual es distinto de $\sin x + \sin y$

Antiejempro: Translación en el plano

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (x + a, y + b)$. Esta aplicación llamada translación, no es lineal si $a \neq 0$ o $b \neq 0$, pues

$$\begin{aligned} T[(x, y) + (x', y')] &= T[(x + x', y + y')] \\ &= (x + x' + a, y + y' + b) \\ &= (x + a, y + b) + (x', y') \\ &= T(x, y) + (x', y') \\ &\neq T(x, y) + T(x', y') \end{aligned}$$

También podríamos haber dicho:

La aplicación no es lineal. Contraejemplo:

Sea

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; \quad T(x, y) = (x + 1, y + 2)$$

Observemos que tenemos

$$T(1, 0) + T(1, 1) = (2, 2) + (2, 3) = (4, 5)$$

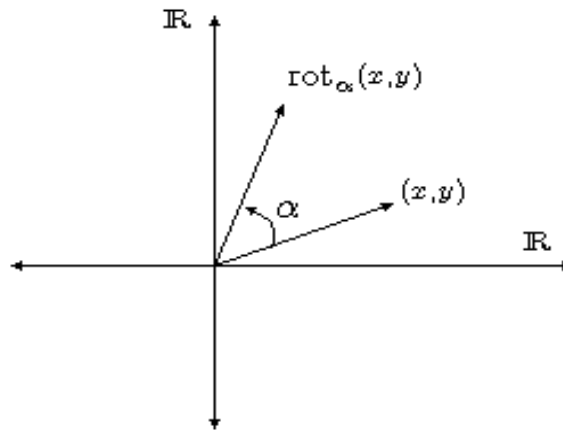
Por otra parte

$$T[(1, 0) + (1, 1)] = T(2, 1) = (3, 3) \neq (4, 5)$$

Ejemplo: Rotación en un ángulo α

La rotación en un ángulo α , R_α , está definida por

$$R_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; R_\alpha(x, y) = (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha).$$



Demostremos que R_α es lineal.

$$\begin{aligned} (1) \quad R_\alpha((x, y) + (x', y')) &= R_\alpha(x + x', y + y') \\ &= ((x + x') \cos \alpha - (y + y') \sin \alpha, \\ &\quad (x + x') \sin \alpha + (y + y') \cos \alpha) \\ &= (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha) + \\ &\quad (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) \\ &= R_\alpha(x, y) + R_\alpha(x', y') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad R_\alpha(\lambda(x, y)) &= R_\alpha(\lambda x, \lambda y) \\ &= (\lambda x \cos \alpha - \lambda y \sin \alpha, \lambda x \sin \alpha + \lambda y \cos \alpha) \\ &= \lambda(x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha) \\ &= \lambda R_\alpha(x, y) \end{aligned}$$

Por (1) y (2), tenemos que R_α es una aplicación lineal.

Ejemplo

La aplicación $f : K^2 \longrightarrow K^2$; $f(x, y) = (2x + y, 3y)$ es lineal.

Veamos la demostración:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f((x, y) + (x', y')) &= f((x + x', y + y')) \\
 &= (2(x + x') + (y + y'), 3(y + y')) \\
 &= (2x + y, 3y) + (2x' + y', 3y') \\
 &= f(x, y) + f(x', y')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad f(\alpha(x, y)) &= f((\alpha x, \alpha y)) \\
 &= (2(\alpha x) + (\alpha y), 3(\alpha y)) \\
 &= \alpha(2x + y, 3y) \\
 &= \alpha f(x, y)
 \end{aligned}$$

Por (1) y (2) f es una aplicación lineal.

Ejemplo

La aplicación $f : K^3 \longrightarrow K^2$; $f(x, y, z) = (x + 2z, x - y)$ es una aplicación lineal.

La prueba queda como ejercicio.

Ejemplo

Sea $f : K_2[X] \longrightarrow K_1[X]$; $f(a + bX + cX^2) = (a + 2c) + (b - a)X$ es una aplicación lineal.

La demostración es igual a las anteriores, pero veámosla pues a muchos alumnos les complica los polinomios... para que veas que es ¡ ¡ trivial!!

$$\begin{aligned}
 f(a + bX + cX^2) + f(a' + b'X + c'X^2) &= f((a + a') + (b + b')X + (c + c')X^2) \\
 &= ((a + a') + 2(c + c')) + ((b + b') - (a + a'))X \\
 &= a + a' + 2c + 2c' + (b + b' - a - a')X
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a+2c+(b-a)X) + (a'+2c'+(b'-a')X) \\
&= f(a+bX+cX^2) + f(a'+b'X+c'X^2) \\
f(\alpha(a+bX+cX^2)) &= f(\alpha a + \alpha bX + \alpha cX^2) \\
&= (\alpha a) + 2(\alpha c) + ((\alpha b) - (\alpha a))X \\
&= \alpha a + \alpha 2c + (\alpha b - \alpha a)X \\
&= \alpha(a + 2c + (b-a)X) = \alpha f(a+bX+cX^2)
\end{aligned}$$

Luego f es lineal.

Ejemplo

Sea $f : M_2(K) \longrightarrow M_{3 \times 2}(K)$, definida por $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b+c \\ d & 2a \end{pmatrix}$

es una aplicación lineal.

Nota

Sea $f : V \longrightarrow W$ lineal. Entonces $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

En efecto $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Nota

Es interesante observar que hemos visto aplicaciones lineales entre espacios diferentes, pero con la exigencia que tengan sus escalares en el mismo cuerpo.

3.2 Determinación de una aplicación lineal

Tenemos resuelto el problema filosófico sobre la existencia de aplicaciones lineales. Existen aplicaciones lineales. Ahí tienes muchos ejem-

plos en la sección anterior. Pero aún tenemos un problema filosófico pendiente.

Es el siguiente: Dados dos K -espacios vectoriales cualquiera... Mejor te lo explicamos en un ejemplo. ¿Bueno? Es mejor comprender primero en un ejemplo y luego uno mismo hacer la generalización o abstracción.

Tomemos K^2 en el Dominio y K^3 en el Codominio. Dados los vectores $(1, 1)$ y $(1, 0)$ en el Dominio y los vectores $(1, 3, 2)$ y $(1, 0, 3)$ en el Codominio, quisiéramos saber si existe una aplicación lineal que cumpla : $f(1, 1) = (1, 3, 2)$ y $f(1, 0) = (1, 0, 3)$ y además saber si hay otras aplicaciones lineales que cumplen estas mismas condiciones.

Tomemos un vector $(x, y) \in K^2$ cualquiera.

Tenemos $(x, y) = y(1, 1) + (x - y)(1, 0)$. Puesto que estamos exigiendo que f sea lineal, tenemos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= yf(1, 1) + (x - y)f(1, 0) = y(1, 3, 2) + (x - y)(1, 0, 3) = \\ &= (x, 3y, 3x - y) \end{aligned}$$

Luego $f(x, y) = (x, 3y, 3x - y)$ cumple con las condiciones pedidas. Luego existe una tal aplicación. Ahora nos queda una pregunta: ¿Habría otra?

Supongamos $g : K^2 \longrightarrow K^3$ lineal tal que $g(1, 1) = (1, 3, 2)$ y $g(1, 0) = (1, 0, 3)$

Hacemos el mismo procedimiento y tenemos que $g(x, y) = (x, 3y, 3x - y)$, la cual tiene la misma expresión analítica de f . Luego existe una aplicación lineal que cumple las condiciones dadas y ésta es única.

Bueno, esta explicación es sólo un ejemplo. Espero que te sirva para comprender el problema en forma general.

Es emocionante observar un problema tan importante y sin embargo de demostración tan fácil. Es, digamos un relámpago de genialidad... Aquí está:

Teorema 3.2.1 (Teorema fundamental del Algebra Lineal)

Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de un espacio vectorial V , de dimensión n sobre K y $C = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ una familia de n vectores de un espacio vectorial W sobre K .

Entonces existe una aplicación lineal f y solamente una, $f : V \longrightarrow W$, tal que

$$f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2, \dots, f(v_n) = w_n$$

Demostración

Comencemos por ver la existencia de una tal aplicación. Para esto, te mostraré una aplicación lineal que cumple las condiciones, luego existe una. ¿De acuerdo?

Sea $v \in V$. Luego $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, ciertos $\alpha_i \in K$. Nótese que los α_i son únicos.

Ahora, al vector v le hacemos corresponder un vector w , definido por,

$$w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n$$

Tenemos que $\text{Dom}(f) = V$, $\text{Im}(f) \leq W$

Demostremos que f es lineal.

1. Sea $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, $v' = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$. Entonces

$$\begin{aligned} f(v + v') &= f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^n \beta_i v_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) v_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) w_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^n \beta_i w_i = f(v) + f(v'). \end{aligned}$$

2. Sea $\alpha \in K$. Tenemos

$$\begin{aligned} f(\alpha v) &= f\left(\alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i) v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha \alpha_i w_i = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = \\ &= \alpha f(v). \end{aligned}$$

Por (1) y (2) f es lineal.

Veamos ahora el problema de la unicidad de f .

Sea $g : V \longrightarrow W$ lineal tal que

$$g(v_1) = w_1, g(v_2) = w_2, \dots, g(v_n) = w_n$$

Sea $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ un vector cualquiera de V . Entonces

$$\begin{aligned} g(v) &= g(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 g(v_1) + \alpha_2 g(v_2) + \dots + \alpha_n g(v_n) \\ &= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n \\ &= \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_n f(v_n) \\ &= f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= f(v) \end{aligned}$$

Luego $f(v) = g(v)$, $\forall v \in V$. De donde se concluye $f = g$.

Comentario

Este Teorema nos dice que una aplicación lineal está totalmente determinada cuando conocemos su comportamiento en los elementos de una base y esta información se extiende por linealidad a todos los vectores del Dominio de la aplicación lineal. Es decir, si uno conoce el comportamiento de una aplicación lineal en una base, entonces se da por conocida la aplicación. Uno dice : "Está bien, sé de qué aplicación se trata".

Observación

Geométricamente podemos observar que la rotación en un ángulo α , en el plano, es una aplicación lineal.

Es lo mismo sumar dos vectores y luego rotarlos, que rotarlos y luego sumarlos. Por otra parte, es lo mismo, ponderar un vector y luego rotarlo, que rotarlo y luego ponderarlo.

Bueno, el problema ahora es obtener una expresión analítica de esta aplicación.

Sea $r_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal aplicación. Por la definición de seno y coseno, fácilmente vemos que $r_\alpha(1,0) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$; $r_\alpha(0,1) = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$.

Sea (x,y) un vector cualquiera de \mathbb{R}^2 . Tenemos $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$ y aplicando r_α , tenemos

$$\begin{aligned} r_\alpha(x,y) &= xr_\alpha(1,0) + yr_\alpha(0,1) = x(\cos\alpha, \sin\alpha) + y(-\sin\alpha, \cos\alpha) = \\ &= (x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha) \end{aligned}$$

Es decir, basta conocer el comportamiento de r_α en una base de \mathbb{R}^2 , para saber su comportamiento en todo el plano.

Ejercicio

Queremos saber si habrá una aplicación lineal $f : K^2 \longrightarrow K^3$ tal que

$$f(1,1) = (1,5,1), f(1,2) = (1,0,1), f(3,4) = (3,10,7)$$

Solución

Bueno, $\{(1,1), (1,2)\}$ forman una base de K^2 . Luego el vector $(3,4)$ lo podemos escribir como combinación lineal de esta base y nótese de manera única. A saber:

$$(3,4) = 2(1,1) + 1(1,2)$$

Si f fuese lineal, tendríamos:

$$f(3,4) = 2f(1,1) + 1f(1,2) = 2(1,5,1) + 1(1,0,1) = (3,10,3) \text{ que es distinto a } (3,10,7)$$

Luego no existe una aplicación lineal que cumpla tales condiciones.

Ejercicio

¿Existirá una aplicación lineal $f : K^3 \longrightarrow K^3$, tal que:

$$f(1,1,1) = (1,0,0), f(1,1,0) = (2,1,1)?$$

¿ Habrá una, o más de una ?

Solución

Sabemos que existe una y sólo una aplicación lineal si está definida en una base, pero $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ no forma una base de K^3 . Entonces cada vez que definamos f en una base, por ejemplo en $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, tendremos una aplicación lineal.

La respuesta es : Hay infinitas aplicaciones lineales que cumplen las condiciones dadas.

Ejemplos:

$$\text{Ej 1: } f(1, 1, 1) = (1, 0, 0), f(1, 1, 0) = (2, 1, 1), f(1, 0, 0) = (2, 1, 3)$$

$$\text{Ej 2: } f(1, 1, 1) = (1, 0, 0), f(1, 1, 0) = (2, 1, 1), f(1, 0, 0) = (4, 2, 6)$$

$$\text{Ej 3: } f(1, 1, 1) = (1, 0, 0), f(1, 1, 0) = (2, 1, 1), f(1, 0, 0) = (2, 1, 1)$$

Para cada $a, b, c \in K$, se tiene $f(1, 1, 1) = (1, 0, 0)$, $f(1, 1, 0) = (2, 1, 1)$, $f(1, 0, 0) = (a, b, c)$, una aplicación que cumple las exigencias pedidas.

Luego hay infinitas aplicaciones lineales que cumplen las propiedades exigidas.

Bueno, ahora que hemos resuelto el problema filosófico sobre la existencia de una aplicación lineal, comencemos por ver sus propiedades.

3.3 Imagen y Núcleo de una aplicación lineal

Dada una aplicación lineal queremos saber la estructura de la imagen de un sub-espacio vectorial.

Definición 3.3.1 Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal y S un sub-espacio de V , entonces se define la imagen de S bajo f por: $f(S) = \{f(s); s \in S\}$.

Proposición 3.3.1 Sean V y W dos K -espacios vectoriales. Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal y sea S un sub-espacio de V , entonces $f(S)$ es un sub-espacio de W .

Demostración

1. $f(S) \neq \emptyset$ pues como $\vec{0} \in S$ entonces $f(\vec{0}) \in f(S)$.
2. Por demostrar que $f(S)$ es cerrado para la suma.
Sean $t, t' \in f(S)$, luego t y t' tienen la forma: $t = f(s), t' = f(s')$, ciertos $s, s' \in S$.
 $t + t' = f(s) + f(s') = f(s + s') = f(s'')$, $s'' = s + s'$, el cual es un vector de S . Luego $t + t' \in f(S)$.
3. Demostremos que $\alpha \cdot f(s) \in f(S), \forall \alpha \in K, \forall s \in S$.
 $\alpha \cdot f(s) = f(\alpha s) = f(s') \in f(S), s' = \alpha s \in S$.

Por (1), (2) y (3) $f(S)$ es un sub-espacio de W .

Corolario 3.3.2 Sean V y W dos K -espacios vectoriales. Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Entonces $\text{Im}(f)$ es un sub-espacio vectorial de W .

Demostración

Basta tomar $S = V$ en la proposición anterior ya que $f(V) = \text{Im}(f)$

Observación

Consideremos

$$f : K^2 \longrightarrow K^3; \quad f(x, y) = (x + y, 3x, 2y)$$

Tenemos que

$$\text{Im}(f) = \{(x + y, 3x, 2y); x, y \in K\} \leq K^3$$

Luego

$$\text{Im}(f) = \langle (1, 3, 0), (1, 0, 2) \rangle$$

Una base de $\text{Im}(f)$ es $\{(1, 3, 0), (1, 0, 2)\}$, luego

$$\dim_K \text{Im}(f) = 2 \neq 3 = \dim_K \text{Codom}(f)$$

Podemos concluir que f no es epiyectiva, pues $\text{Im}(f)$ está estrictamente contenida en K^3 . Luego, para estudiar si una aplicación lineal es epiyectiva, basta saber cual es la dimensión de $\text{Im}(f)$. Tenemos la proposición siguiente:

Teorema 3.3.3 (Primera caracterización de las aplicaciones lineales epiyectivas)

Sean V y W dos K -espacios vectoriales. Sea $f : V \longrightarrow W$ lineal. Entonces

f es epiyectiva si y sólo si $\dim_K \text{Im}(f) = \dim_K W$

Demostración

Por una parte, si f es epiyectiva entonces se tiene que $\text{Im}(f) = W$, luego $\dim_K \text{Im}(f) = \dim_K W$.

Recíprocamente: Tenemos que $\text{Im}(f) \subset W$. Ahora si $\dim_K \text{Im}(f) = \dim_K W$, entonces $\text{Im}(f) = W$, luego f es epiyectiva.

Nota

Sea $f : V \longrightarrow W$ lineal. Entonces $f(\vec{0}) = \vec{0}$. En efecto se tiene: $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot f(\vec{0}) = \vec{0}$

Observación

Dada una aplicación lineal, queremos estudiar el conjunto formado por todos los vectores que tienen el $\vec{0}$ por imagen.

Como vimos anteriormente, $f(\vec{0}) = \vec{0}$, luego hay al menos un vector que tiene por imagen al $\vec{0}$. Tiene entonces sentido, preguntarse por el conjunto formado por todos los vectores que tienen al $\vec{0}$ por imagen. Observemos un caso particular, para ver si esto nos inspira a encontrar la estructura de este conjunto.

Observación

Sea

$$f : K^2 \longrightarrow K^3; \quad f(x, y) = (x, 3x, 5x)$$

$$\begin{aligned} N &= \{(x, y); f(x, y) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y); (x, 3x, 5x) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(0, y); y \in K\} \end{aligned}$$

Nosotros sabemos que este conjunto N es un sub-espacio vectorial de K^2 ¿Ocurrirá esto siempre ?

Observación

Sea

$$f : K^3 \longrightarrow K^3; \quad f(x, y, z) = (x + y, x, 3z)$$

$$\begin{aligned} N &= \{(x, y, z); f(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z); (x + y, x, 3z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(0, 0, 0)\} \end{aligned}$$

el cual es también un sub-espacio vectorial de $K^3 = \text{Dom}(f)$.

Nuestra intuición estaba en lo cierto. He aquí la proposición que esperábamos:

Proposición 3.3.4 Sean V y W dos espacios vectoriales sobre K . Sea $f : V \longrightarrow W$ lineal, entonces $N(f) = \{v \in V; f(v) = \vec{0}\}$ es un sub-espacio de V .

Demostración

1. $N(f) \neq \emptyset$ pues $\vec{0} \in N(f)$.
2. Sean $v, w \in N(f)$, entonces $f(v) = f(w) = \vec{0}$, luego $f(v + w) = f(v) + f(w) = \vec{0}$, es decir $v + w \in N(f)$.
3. Sea $v \in N(f)$. Tenemos $f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \vec{0} = \vec{0}$. Luego $\alpha v \in N(f)$.

Por (1), (2) y (3) $N(f)$ es un sub-espacio de V .

Observación

Sabemos que $N(f) \neq \emptyset$ pues $\vec{0} \in N(f)$, es decir $N(f)$ nunca es vacío. Además hemos visto que $N(f)$ tiene una estructura interesante, es un conjunto importante. ¿Qué hace entonces un matemático? Obvio, le pone nombre a este conjunto. Tenemos entonces:

Definición 3.3.2 Sea $f : V \longrightarrow W$ lineal. El conjunto formado por todos los vectores de V que tienen por imagen el vector $\vec{0}$ en W , es llamado el **núcleo de f** , denotado $N(f)$ o $Ker(f)$.

$$N(f) = \{v \in V; f(v) = \vec{0}\}$$

Comentario

La abreviación $Ker(f)$ viene del alemán, Kernel, que significa hueso o hueso de una fruta. Esto porque el Núcleo de una aplicación lineal está como al centro del Dominio de f .

Ejercicio

Sea $f : K^4 \longrightarrow K^2$; $f(x, y, z, u) = (x + y + z, 2y - 3z)$. Queremos encontrar $N(f)$.

Solución

Recordemos que describir un espacio vectorial se reduce a exhibir una base de él. $N(f) = \{(x, y, z, u) \in K^4; (x + y + z, 2y - 3z) = (0, 0)\}$

Escribamos este sistema en su forma más simple:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{array} \right\} \text{ssi} \left. \begin{array}{l} z + y + x = 0 \\ 3z - 2y = 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{L_{21}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_2(\frac{-1}{5})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_{12}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Es decir, el sistema inicial es equivalente al sistema siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} z + \frac{2}{5}x = 0 \\ y + \frac{3}{5}x = 0 \end{array} \right\} \text{ Luego } \left. \begin{array}{l} z = \frac{-2}{5}x \\ y = \frac{-3}{5}x \end{array} \right\}$$

$$(x, \frac{-3}{5}x, \frac{-2}{5}x, u) = x(1, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, 0) + u(0, 0, 0, 1)$$

La base escalonada de $N(f)$ es $\{(1, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. Se tiene entonces que $\dim_K N(f) = 2$

Utilizando este resultado observamos: como $\dim_K N(f) \neq 0$, hay más de un vector que tiene por imagen al $\vec{0}$, luego f no es inyectiva.

¿ Qué ocurre si $N(f) = \{\vec{0}\}$? ¿ Es f inyectiva ?

La respuesta a esta pregunta la tenemos en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.5 (Primera caracterización de las aplicaciones lineales inyectivas)

Sea $f : V \longrightarrow W$ lineal. Entonces

$$f \text{ es inyectiva si y sólo si } N(f) = \{\vec{0}\}$$

Demostración

Sea f inyectiva, entonces demostremos que $N(f) = \{\vec{0}\}$

Sea $v \in N(f)$, luego $f(v) = \vec{0}$. Además $f(\vec{0}) = \vec{0}$. Puesto que f es inyectiva $v = \vec{0}$. Luego $N(f) = \{\vec{0}\}$.

Ahora supongamos $N(f) = \{\vec{0}\}$ y demostremos que f es inyectiva.

Sea $f(u) = f(v)$, luego $f(u) - f(v) = \vec{0}$, es decir, $f(u - v) = \vec{0}$. Puesto que $N(f) = \{\vec{0}\}$, tenemos que $u - v = \vec{0}$, luego $u = v$ con lo que concluimos que f es inyectiva.

Ejercicio

Estudiemos si es inyectiva la aplicación lineal

$$f : K^2 \longrightarrow K^3; \quad f(x, y) = (x + y, 3x - y, 2y)$$

Solución

Debemos conocer el núcleo de f .

$$N(f) = \{(x, y) \in K^2; f(x, y) = (0, 0, 0)\}$$

Tenemos: $(x + y, 3x - y, 2y) = (0, 0, 0)$. Luego $x = y = 0$, de donde $N(f) = \{(0, 0)\}$. Así f es inyectiva.

Nota

El Teorema anterior nos dice que para estudiar si una aplicación lineal es inyectiva, no es necesario usar su definición, sino estudiar su núcleo y entonces este es $\{\vec{0}\}$ si y sólo si f es inyectiva.

(Es decir, el $\vec{0}$ es 1-1, si y sólo si todo vector es 1-1)

Nota

Ahora que conocemos el Núcleo y la Imagen de una aplicación lineal y algunas propiedades de ellos, queremos saber si habrá alguna relación entre sus dimensiones y tal vez con algún otro espacio, por ejemplo su Dominio o su Codominio.

Dejémosnos inspirar por algunos ejemplos.

Observación

Sea $f : K \longrightarrow K^5$ $f(x) = (3x, 2x, x, 5x, 7x)$. Tenemos que $N(f) = \{\vec{0}\}$, luego $\dim_K N(f) = 0$. Es decir no tiene base.

Veamos su Imagen

$$(3x, 2x, x, 5x, 7x) = x(3, 2, 1, 5, 7)$$

Luego una base de $\text{Im}(f)$ es $\{(3, 2, 1, 5, 7)\}$. Luego $\dim_K \text{Im}(f) = 1$.

Observamos que $\dim_K \text{Dom}(f) = \dim_K K = 1$ y $1 = 0 + 1$. El 1 de la izquierda corresponde a la $\dim_K \text{Dom}(f)$, es decir lo que tenemos a la partida.

$$\dim_K \text{Dom}(f) = \dim_K N(f) + \dim_K \text{Im}(f)$$

Observación

Sea $f : K^5 \longrightarrow K$; $f(x, y, z, t, u) = x + y + z$.

Conozcamos el Núcleo de f : Tenemos $x + y + z = 0 \implies y = -x - z$.

Entonces

$$\begin{aligned} (x, y, z, t, u) &= (x, -x - z, z, t, u) \\ &= x(1, -1, 0, 0, 0) + z(0, -1, 1, 0, 0) + \\ &\quad t(0, 0, 0, 1, 0) + u(0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Luego una base de $N(f)$ es

$$\{(1, -1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$$

puesto que estos vectores son l.i. Luego $\dim_K N(f) = 4$

Por otra parte $Im(f) = K$. Luego $\dim_K Im(f) = 1$. Si quieres, busquemos una base de $Im(f)$.

Tenemos: $x + y + z = x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1$.

Luego $Im(f) = \langle 1, 1, 1 \rangle = \langle 1 \rangle$. Luego una base de $Im(f) = \{1\}$.

Además observamos que $\dim_K Dom(f) = 5$. Tenemos $5 = 4 + 1$. Es decir:

$$\dim_K Dom(f) = \dim_K N(f) + \dim_K Im(f)$$

Ocurre que esta hipótesis es verdadera. Tenemos entonces el siguiente Teorema:

Teorema 3.3.6 Sea $f : V \longrightarrow W$ lineal. Entonces

$$\dim_K Dom(f) = \dim_K N(f) + \dim_K Im(f)$$

Demostración

Sea $B = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ una base de $N(f) \leq V$.

Sea $C = \{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ una base de $Im(f) \leq W$.

Tenemos que $\dim_K N(f) = p$ y $\dim_K Im(f) = q$.

Recordemos que $Im(f) = \{f(v); v \in V\}$

$$\begin{array}{lll} z_1 \in Im(f) & \implies & z_1 = f(u_{p+1}), \text{ cierto } u_{p+1} \in V \\ z_2 \in Im(f) & \implies & z_2 = f(u_{p+2}), \text{ cierto } u_{p+2} \in V \\ \dots & \dots & \dots \\ z_q \in Im(f) & \implies & z_q = f(u_{p+q}), \text{ cierto } u_{p+q} \in V \end{array}$$

Sea $B' = \{u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{p+q}\}$.

Afirmamos que $B \cup B' = \{u_1, u_2, \dots, u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{p+q}\}$ es una base de V .

Luego debemos demostrar que $B \cup B'$ genera V y es un conjunto l.i.

1. Demostremos que $B \cup B'$ genera V .

Sea $v \in V$, luego $f(v) \in \text{Im}(f)$ entonces

$$\begin{aligned} f(v) &= \alpha_{p+1}z_1 + \alpha_{p+2}z_2 + \dots + \alpha_{p+q}z_q \\ &= \alpha_{p+1}f(u_{p+1}) + \alpha_{p+2}f(u_{p+2}) + \dots + \alpha_{p+q}f(u_{p+q}) \\ &= f(\alpha_{p+1}u_{p+1} + \alpha_{p+2}u_{p+2} + \dots + \alpha_{p+q}u_{p+q}) \\ &= f(v') \end{aligned}$$

con $v' = \alpha_{p+1}u_{p+1} + \alpha_{p+2}u_{p+2} + \dots + \alpha_{p+q}u_{p+q}$

Luego $f(v) = f(v')$, es decir, $f(v - v') = \vec{0}$, luego $v - v' \in N(f)$ y se puede escribir como una combinación lineal de la base de $N(f)$. Entonces $v - v' = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \dots + \alpha_pu_p$, luego

$$v = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \dots + \alpha_pu_p + \alpha_{p+1}u_{p+1} + \alpha_{p+2}u_{p+2} + \dots + \alpha_{p+q}u_{p+q}$$

Así hemos demostrado que $B \cup B'$ genera V .

2. Demostremos que $B \cup B'$ es l.i.

Sea $\alpha_1u_1 + \dots + \alpha_pu_p + \alpha_{p+1}u_{p+1} + \dots + \alpha_{p+q}u_{p+q} = \vec{0} (*)$

Luego

$$f(\alpha_1u_1 + \dots + \alpha_pu_p + \alpha_{p+1}u_{p+1} + \dots + \alpha_{p+q}u_{p+q}) = \vec{0}$$

Entonces

$$\alpha_1f(u_1) + \dots + \alpha_pf(u_p) + \alpha_{p+1}f(u_{p+1}) + \dots + \alpha_{p+q}f(u_{p+q}) = \vec{0}$$

Como $f(u_1) = f(u_2) = \dots = f(u_p) = 0$, tenemos

$$\alpha_{p+1}f(u_{p+1}) + \dots + \alpha_{p+q}f(u_{p+q}) = \vec{0}.$$

Puesto que C es una base de $\text{Im}(f)$, C es l.i., luego

$$\alpha_{p+1} = \alpha_{p+2} = \dots = \alpha_{p+q} = 0 \quad (3.1)$$

Reemplazando este resultado en (*), tenemos

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p = \vec{0}$$

Puesto que B es una base de $N(f)$, B es l.i., luego

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0 \quad (3.2)$$

Por (3.1) y (3.2), tenemos que $B \cup B'$ es l.i.

Por (1) y (2), $B \cup B'$ es una base de V .

Luego $\dim_k V = p + q = \dim_k N(f) + \dim_k \text{Im}(f)$

Es una demostración muy sencilla, que esperamos hayas podido seguir. Si no es así, inténtalo nuevamente. ¡Verás que puedes entenderla !

3.4 Morfismos y dimensiones

En el curso anterior uno comprendió que no puede haber una función inyectiva cuando el Dominio de la función tiene más elementos que el Codominio. Además, uno comprendió que no puede haber una función epiyectiva cuando el Dominio de la función tiene menos elementos que el Codominio.

Entonces uno se inspira en esta situación y se pregunta ¿Qué ocurrirá con las aplicaciones lineales inyectivas o epiyectivas?

¡Los espacios vectoriales pueden tener una cantidad infinita de vectores!

Las preguntas interesantes son las siguientes:

¿Podrá haber una aplicación lineal inyectiva entre dos espacios cuando la dimensión del Dominio es mayor que la dimensión del Codominio?
¿Y el recíproco?

¿Podrá haber una aplicación lineal epiyectiva entre dos espacios vectoriales cuando la dimensión del Dominio es menor que la dimensión del Codominio? ¿Y el recíproco?

¿Qué condiciones deben cumplir dos espacios vectoriales de dimensión finita, para que pueda haber una aplicación biyectiva entre ellos?

En fin todas estas preguntas analizaremos a continuación. ¿Comenzamos?

Antes de hablar de dimensiones comencemos por la proposición siguiente:

Proposición 3.4.1 Sea $f : V \longrightarrow W$ lineal

1. Sea $S \leq V$ y $A = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ un conjunto de generadores de S . Entonces

$f(A) = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_r)\}$ es un conjunto de generadores de $f(S)$.

2. Si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ es l.i. y f inyectiva entonces

$f(B) = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_t)\}$ es l.i.

Demostración (1)

Sea $S = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$. Sea $w \in f(S)$ luego $w = f(s)$, cierto $s \in S$. Pero $s \in S$, significa que $s = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r$, ciertos $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$. Luego $w = f(s) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_r f(v_r)$. Esto nos dice que w se puede escribir como una combinación lineal de $f(v_1), \dots, f(v_r)$, luego $f(S) = \langle f(v_1), \dots, f(v_r) \rangle$.

Demostración(2)

Sea $\alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_t f(v_t) = \vec{0}$, luego $f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t) = \vec{0}$. Puesto que f es inyectiva y que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t \in N(f)$. Entonces $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t = \vec{0}$. Luego $\alpha_1 = \dots = \alpha_t = 0$ pues $\{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ es l.i.

La segunda parte de la proposición anterior nos dice, en palabras, que toda aplicación lineal inyectiva, lleva un conjunto l.i., en otro conjunto l.i.

Teorema 3.4.2 (Segunda caracterización de las aplicaciones lineales inyectivas y epiyectivas)

Sea $f : V \longrightarrow W$ lineal. Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V . Entonces

1. f inyectiva ssi $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ es l.i.
2. f epiyectiva ssi $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ genera W
3. f biyectiva ssi $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ es una base de W

Demostración (1.)

Sea $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ l.i. Demostremos que f es inyectiva, es decir, que $N(f) = \{\vec{0}\}$. Sea $v \in N(f)$, luego $f(v) = \vec{0}$. Si $v \in N(f)$, en particular $v \in V$, luego $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, ciertos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ y $f(v) = \vec{0}$. Luego $\vec{0} = f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n)$. Luego $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, luego $v = \vec{0}$.

Demostración (2.)

Sea f epiyectiva, demostremos que $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ genera W . Tenemos que para todo $w \in W$, existe $v \in V$ tal que $w = f(v)$. Pero $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, ciertos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Luego $w = f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n)$. Luego w es combinación lineal de los vectores $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$, luego $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ genera W .

Ahora, recíprocamente, sea $W = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle$. Sea $w \in W$, luego $w = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = f(v)$, con $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Luego f es epiyectiva.

Nota

Esta proposición nos dice que si queremos averiguar si una aplicación lineal es inyectiva, basta estudiar si lleva una base en un conjunto l.i.

Nótese que una aplicación lineal puede llevar un conjunto l.i. en otro l.i. y no ser inyectiva. Por ejemplo consideremos $f : K^4 \longrightarrow K^4$ lineal tal que $f(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1, 1)$, $f(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 1, 2)$, $f(0, 0, 1, 0) = (1, 2, 3, 4)$, $f(0, 0, 0, 1) = (1, 2, 3, 4)$.

Esta aplicación lleva el conjunto l.i. $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ en el conjunto l.i. $\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2)\}$ y no es inyectiva.

Nota

Esta proposición también nos dice que una aplicación lineal epiyectiva se reconoce por llevar una base del Dominio de la aplicación en un conjunto de generadores del Codominio de ella.

Nota

Veamos algunas definiciones antes de seguir. Y Además veremso por qué llevan tales nombres.

Recuerda algo trivial, pero tú que eres joven a veces olvidas y es que todo lo que te enseñamos en la Universidad ha sido creado por personas, al igual que ti, sólo que vinieron antes al mundo y todas estas definiciones las dieron por "algo". ¿Estamos de acuerdo? Bueno aquí las tienes:

Definiciones

Para decir que f es una aplicación lineal, podemos decir simplemente que f es un **morfismo**. Esta palabra viene de la palabra griega "morfo" ($\mu\rho\varphi\eta$) que significa forma.

Un **endomorfismo** es un morfismo que va de un espacio vectorial dentro del mismo espacio, es decir $f : V \longrightarrow V$ es un endomorfismo. "Endo" ($\epsilon\nu\delta\omicron\nu$) es una palabra griega que significa "dentro".

Un **monomorfismo** es un morfismo inyectivo. Mono es un prefijo griego ($\mu\acute{o}\nu\omicron\varsigma$) que significa único o uno sólo (es decir que a vectores distintos del dominio le corresponden imágenes distintas).

Un **epimorfismo** es un morfismo epiyectivo. Epi es una preposición griega ($\acute{\epsilon}\pi\acute{\iota}$) que significa sobre.

Un **isomorfismo** es un morfismo biyectivo. Iso es una palabra griega ($\acute{\iota}\sigma\omicron\zeta$) que significa igual.

Veremos que si $f : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo, entonces V y W tienen "igual forma" (queda pendiente una explicación más completa, ver más adelante en esta misma sección).

Un endomorfismo biyectivo es llamado un **automorfismo**, es decir, $f : V \longrightarrow V$ isomorfismo. Auto palabra griega ($\alpha\acute{\upsilon}\tau\acute{o}\zeta$) que significa mismo, propio. Es decir que es un isomorfismo dentro del mismo espacio o propio al espacio.

Proposición 3.4.3 Sea $f : V \longrightarrow W$ un monomorfismo. Entonces

$$\dim_K V \leq \dim_K W$$

Demostración

Sea $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V . Luego $f(A) = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ es un conjunto l.i. (segunda caracterización de una aplicación lineal inyectiva).

Tenemos n vectores l.i. en W . Esto nos dice que $\dim_K W \geq n$.

Proposición 3.4.4 Sea $f : V \longrightarrow W$ un epimorfismo. Entonces

$$\dim_K V \geq \dim_K W$$

Demostración

Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V . Luego

$$f(B) = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$$

genera W . Luego $\dim_K W \leq n$ y $n = \dim_K V$.

Proposición 3.4.5 (Todo ó nada) Sea $f : V \longrightarrow W$ lineal tal que $\dim_K V = \dim_K W$. Entonces son equivalentes:

1. f es inyectiva
2. f es epiyectiva

Demostración

Sea $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ una base de $\text{Im}(f)$.

Tenemos $z_1 = f(u_1), z_2 = f(u_2), \dots, z_q = f(u_q)$, ciertos $u_i \in V$.

Sea $B = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$.

Demostremos que (1) \implies (2)

Sea $N(f) = \{\vec{0}\}$. Veamos que B es una base de V .

(a) Afirmamos: B genera V . En efecto

Sea $v \in V$, entonces $f(v) \in \text{Im}(f)$, luego

$$f(v) = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_q z_q, \quad \text{ciertos } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \in K$$

Tenemos

$$\begin{aligned} f(v) &= \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \dots + \alpha_q f(u_q) \\ &= f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_q u_q) \\ &= f(v') \end{aligned}$$

con $v' = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_q u_q$.

Como $f(v) = f(v')$, se tiene $f(v - v') = \vec{0}$, es decir $v - v' \in N(f) = \{\vec{0}\}$, luego $v - v' = \vec{0}$, es decir

$$v = v' = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_q u_q$$

(b) Afirmamos: B es l.i. En efecto, sea

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_q u_q = \vec{0},$$

luego

$$f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_q u_q) = \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_q f(u_q) = \vec{0}$$

luego $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_q = 0$, pues $\{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_q)\}$ son l.i.
Luego B es l.i.

Por (a) y (b) tenemos que B es una base de V .

Luego $\dim_K V = q = \dim_K \text{Im}(f)$

Además $\dim_K V = \dim_K W$

Se obtiene que $\dim_K W = \dim_K \text{Im}(f)$, es decir que f es epiyectiva.

Demostremos que (2) \implies (1)

Sea f epiyectiva, luego $\dim_K \text{Im}(f) = \dim_K W = \dim_K V$

Primero veamos que B es l.i.

Sea $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_q u_q = \vec{0}$. Luego

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_q u_q) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \cdots + \alpha_q f(u_q) = \vec{0}.$$

Luego $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_q = 0$

Puesto que la dimensión de V es q , entonces q vectores l.i. forman una base de V . Luego B es una base de V .

Sea $u \in N(f)$, entonces $u = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_q u_q$ y $f(u) = \vec{0}$, entonces

$$\vec{0} = f(u) = f(\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_q u_q) = \beta_1 f(u_1) + \cdots + \beta_q f(u_q)$$

Luego $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_q = 0$, es decir $u = \vec{0}$. Entonces $N(f) = \{\vec{0}\}$ y f es inyectiva.

Nota

Esta proposición nos dice que si la dimensión del Dominio de una aplicación lineal, es igual a la dimensión del Codominio, entonces, o es inyectiva y epiyectiva a la vez, o no es ninguna de las dos, es por esto que la titulamos de esta manera "Todo o nada", o excluyente.

Proposición 3.4.6 Sea $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow U$ morfismos tal que $\text{Im}(f) \subset \text{Dom}(g)$. Entonces:

1. $g \circ f$ es lineal
2. Si f y g son monomorfismos, entonces $g \circ f$ es un monomorfismo
3. Si f y g son epimorfismos, entonces $g \circ f$ es un epimorfismo

Demostración 1

$$(g \circ f)(v + w) = g(f(v + w)) = g(f(v) + f(w)) = g(f(v)) + g(f(w)) = (g \circ f)(v) + (g \circ f)(w)$$

$$(g \circ f)(\alpha v) = g(f(\alpha v)) = g(\alpha f(v)) = \alpha g(f(v)) = \alpha (g \circ f)(v)$$

Luego $(g \circ f)$ es lineal.

Demostración 2

Sea $(g \circ f)(v) = \vec{0}$, luego $g(f(v)) = \vec{0}$. Entonces $f(v) = \vec{0}$ pues $N(g) = \{\vec{0}\}$. Además $v = \vec{0}$ ya que $v \in N(f)$. Luego $N(g \circ f) = \{\vec{0}\}$, es decir $g \circ f$ es inyectiva, dicho más elegantemente $g \circ f$ es un monomorfismo.

Demostración 3

Sea $u \in U$, luego existe $w \in W$ tal que $g(w) = u$. Pero f también es epiyectiva, luego existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$. Tenemos que: $u = g(w) = g(f(v)) = (g \circ f)(v)$. Entonces $g \circ f$ es un epimorfismo.

De esta proposición se deduce trivialmente el resultado siguiente:

Corolario 3.4.7 Sean $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow U$ isomorfismos. Entonces $g \circ f : V \longrightarrow U$ es un isomorfismo.

Con respecto a los isomorfismos tenemos la siguiente definición.

Definición 3.4.1 Diremos que V y W , dos K -espacios, son **isomorfos** si nosotros podemos establecer un isomorfismo entre ellos, es decir, si podemos construir un isomorfismo $f : V \longrightarrow W$. Lo denotaremos $V \cong W$.

Ejemplos de isomorfismos

Ejemplo

$$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$$

Sabemos que un morfismo es biyectivo si y sólo si lleva una base en otra base.

Consideremos la aplicación

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal, tal que $f(1, 0) = 1$, $f(0, 1) = i$. Esta aplicación es un isomorfismo de \mathbb{R}^2 en \mathbb{C} . Su expresión analítica es $f(a, b) = a + bi$.

Ejemplo

$$K_2[X] \cong K^3$$

Construyamos la aplicación lineal $f : K_2[X] \longrightarrow K^3$, tal que $f(1) = (1, 0, 0)$, $f(X) = (0, 1, 0)$, $f(X^2) = (0, 0, 1)$. Este morfismo lleva la base $\{1, X, X^2\}$ de $K_2[X]$ en la base canónica de K^3 , es decir, $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Se tiene entonces que f es un isomorfismo y de esto se concluye que los espacios vectoriales son isomorfos.

Ejemplo

$$M_2(K) \cong K^4$$

Basta con construir la aplicación lineal $f : M_2(K) \longrightarrow K^4$ definida por (la más simple posible):

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1, 0, 0, 0); \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (0, 1, 0, 0)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = (0, 0, 1, 0); \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (0, 0, 0, 1)$$

es evidente que es un isomorfismo, pues lleva una base en otra base.

Antiejemplo

No podemos construir un isomorfismo de K^2 en K^3 , pues toda base de K^2 tiene dos elementos y toda base de K^3 tiene tres elementos. No podemos llevar dos elementos en tres elementos de manera biunívoca.

Teorema 3.4.8 (Isomorfismo Fundamental) *Sea V un K -espacio vectorial. Entonces $\dim_K V = n$ si y sólo si $V \cong K^n$.*

Demostración

Comencemos por demostrar que si $\dim_K V = n$ entonces $V \cong K^n$.

Sea $\dim_K V = n$, entonces consideremos $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V .

Sea $f : V \longrightarrow K^n$ lineal tal que $f(v_1) = e_1, f(v_2) = e_2, \dots, f(v_n) = e_n$ que es un isomorfismo.

Luego $V \cong K^n$.

Demostremos que si $V \cong K^n$, entonces $\dim_K V = n$.

Sea $V \cong K^n$, luego existe $f : K^n \longrightarrow V$ isomorfismo tal que

$$f(e_1) = u_1, f(e_2) = u_2, \dots, f(e_n) = u_n,$$

con $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, una base de V . Luego $\dim_K V = n$.

Ejercicio

Establezcamos un isomorfismo entre

$$V = \{(x, y, z, u); x + y + z = 0, x + 2u = 0\} \quad \text{y algún } K^n$$

Solución

Primero observamos que $z = -x - y$ y $u = -\frac{1}{2}x$. Luego

$$(x, y, z, u) = (x, y, -x - y, -\frac{1}{2}x) = x(1, 0, -1, -\frac{1}{2}) + y(0, 1, -1, 0)$$

Entonces tenemos que una base de V es

$$B = \{(1, 0, -1, -\frac{1}{2}), (0, 1, -1, 0)\}$$

De donde $\dim_K V = 2$ y $V \cong K^2$.

Establezcamos el isomorfismo siguiente:

$$f : V \longrightarrow K^2; f(1, 0, -1, -\frac{1}{2}) = (1, 0), f(0, 1, -1, 0) = (0, 1)$$

La forma típica de los elementos de V , es, $(x, y, -x - y, -\frac{1}{2}x)$ y la escritura de f es $f(x, y, -x - y, -\frac{1}{2}x) = (x, y)$.

Nota

Este teorema nos dice que todos los espacios vectoriales de dimensión finita están clasificados.

Todos los espacios vectoriales de una misma dimensión tienen las mismas propiedades, sólo que tienen una escritura diferente.

3.5 Estructura de un conjunto de morfismos

Sean U y V dos K -espacios vectoriales. El conjunto de todas las aplicaciones lineales de U en V , será denotado por $\mathcal{L}_K(U, V)$ o cuando no haya confusión, denotaremos simplemente $\mathcal{L}(U, V)$, o bien $\text{Hom}(U, V)$.

Comencemos por estudiar la suma de dos morfismos.

Lema

Sean $f, g \in \mathcal{L}_K(U, V)$. Entonces la aplicación $h : U \longrightarrow V$ definida por:

$$h(u) = f(u) + g(u), \forall u \in U$$

es lineal.

Demostración

1. $h(u + v) = f(u + v) + g(u + v) = f(u) + f(v) + g(u) + g(v) = (f(u) + g(u)) + (f(v) + g(v)) = h(u) + h(v)$.
2. $h(\alpha u) = f(\alpha u) + g(\alpha u) = \alpha f(u) + \alpha g(u) = \alpha(f(u) + g(u)) = \alpha h(u)$.

Por (1) y (2) tenemos que h es lineal.

Es interesante que esta aplicación h , obtenida de dos aplicaciones lineales es lineal. Este lema nos induce entonces a la siguiente definición

Definición 3.5.1 Dadas $f, g \in \mathcal{L}_K(U, V)$, se define una nueva aplicación en $\mathcal{L}_K(U, V)$, denotada por $f + g$ y definida por

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u), \forall u \in U$$

llamada la suma de f y g .

Entonces el siguiente problema es estudiar qué estructura algebraica tiene $\mathcal{L}_K(U, V)$ con la suma.

¡Es el típico pensamiento algebrista!

Teorema 3.5.1 $(\mathcal{L}_K(U, V), +)$ es un grupo abeliano.

Demostración

1. La suma es asociativa.

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(u) &= (f + g)(u) + h(u) = f(u) + g(u) + h(u) = \\ &= f(u) + (g(u) + h(u)) = f(u) + (g + h)(u) = (f + (g + h))(u). \end{aligned}$$

2. $\mathcal{L}_K(U, V)$ posee elemento neutro, a saber, la aplicación nula $\mathcal{O} : U \longrightarrow V$; $\mathcal{O}(u) = 0, \forall u \in U$.

3. Todo morfismo tiene inverso aditivo $-f$, definido por $(-f)(u) = -f(u), \forall u \in U$.

4. La suma es conmutativa.

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u) = g(u) + f(u) = (g + f)(u).$$

Pregunta

¿Qué ocurre con la ponderación de un morfismo?

La respuesta la tenemos en el siguiente lema.

Lema

Sea f un morfismo de $\mathcal{L}_K(U, V)$ y $\alpha \in K$ un escalar. Entonces la aplicación de U en V , definida por

$$h(u) = \alpha \cdot f(u)$$

es lineal.

Demostración

1. $h(u_1 + u_2) = \alpha \cdot f(u_1 + u_2) = \alpha \cdot (f(u_1) + f(u_2)) = \alpha \cdot f(u_1) + \alpha \cdot f(u_2) = h(u_1) + h(u_2).$
2. $h(\beta u) = \alpha \cdot f(\beta u) = \alpha \cdot (\beta f(u)) = (\alpha \cdot \beta) \cdot f(u) = \beta \cdot (\alpha \cdot f(u)) = \beta h(u).$

Por (1) y (2) tenemos que h es lineal.

Esta propiedad nos induce la siguiente definición.

Definición 3.5.2 *A todo escalar $\alpha \in K$ y a todo morfismo f de $\mathcal{L}_K(U, V)$, le asociamos un morfismo de $\mathcal{L}_K(U, V)$ llamado **producto escalar de α por f** , denotado $\alpha \cdot f$ y definido por*

$$(\alpha \cdot f)(u) = \alpha \cdot f(u), \forall u \in U$$

Proposición 3.5.2 *Dados $f, g \in \mathcal{L}_K(U, V)$ y $\alpha, \beta \in K$, se tiene que se cumplen los axiomas de espacio vectorial siguientes: E.V.5. $1 \cdot f = f$*

$$E.V.6. (\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$$

$$E.V.7. \alpha \cdot (f + g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g$$

$$E.V.8. (\alpha \cdot \beta)f = \alpha \cdot (\beta \cdot f)$$

La demostración se deja al lector. ¿Bueno?

Teorema 3.5.3 $\mathcal{L}_K(U, V)$ es un espacio vectorial sobre K .

Demostración

Es obtenida de las proposiciones anteriores.

3.6 Ejercicios resueltos

Ejercicio

Sea $f : K^2 \longrightarrow K^2$; $f(x, y) = (2x+y, 3x)$ una aplicación. Demostremos que f es lineal.

Solución

Sean $u, v \in K^2$, luego tienen la forma $u = (x, y), v = (x', y')$, ciertos $x, y, x', y' \in K$.

1. $f(u + v) = f((x, y) + (x', y')) = f(x + x', y + y') =$
 $= (2(x + x') + (y + y'), 3(x + x')) = (2x + y + 2x' + y', 3x + 3x') =$
 $= (2x + y, 3x) + (2x' + y', 3x') = f(x, y) + f(x', y') = f(u) + f(v).$
2. $f(\alpha u) = f(\alpha(x, y)) = f(\alpha x, \alpha y) = (2\alpha x + \alpha y, 3\alpha x) =$
 $= \alpha(2x + y, 3x) = \alpha f(x, y) = \alpha f(u), \alpha \in K.$

Ejercicio

Sea $f : K^3 \longrightarrow K^3$; $f(x, y, z) = (2x + y, x + y, 2x)$ una aplicación. Demostremos que f es lineal.

Solución

Sean $u, v \in K^3$, luego tienen la forma $u = (x, y, z), v = (x', y', z')$, ciertos $x, y, x', y', z, z' \in K$.

1. $f(u + v) = f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x + x', y + y', z + z') =$
 $= (2(x + x') + (y + y'), (x + x') + (y + y'), 2(x + x')) =$
 $= ((2x + y) + (2x' + y'), (x + y) + (x' + y'), 2x + 2x') =$
 $= (2x + y, x + y, 2x) + (2x' + y', x' + y', 2x') =$

$$= f(x, y, z) + f(x', y', z') = f(u) + f(v).$$

La penúltima igualdad se cumple $\forall z, z' \in K$, en particular para z y z' de u y v .

$$\begin{aligned} 2. \quad f(\alpha u) &= f(\alpha(x, y, z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \\ &= (2(\alpha x) + \alpha y, \alpha x + \alpha y, 2\alpha x) = \alpha(2x + y, x + y, 2x) = \\ &= \alpha f(x, y, z) = \alpha f(u). \end{aligned}$$

Ejercicio

Sea $f : K^5 \longrightarrow K^5$ definida por:

$$f(x, y, z, u, v) = (x + y + z + u, 2x + 2y + z + v, x + y + z + u, 2x - y + z + v, y - z - 2u + v)$$

1. Busquemos una base y la dimensión de $N(f)$.
2. Busquemos una base y la dimensión de $Im(f)$.
3. Estudiemos la inyectividad y epiyectividad de f .

Solución

$$(x, y, z, u, v) \in N(f) \text{ ssi } \left. \begin{array}{l} x + y + z + u = 0 \\ 2x + 2y + z + v = 0 \\ x + y + z + u = 0 \\ 2x - y + z + v = 0 \\ y - z - 2u + v = 0 \end{array} \right\}$$

Este sistema lo escribiremos en su forma más simple, es decir, lo escalonaremos.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_{21}(-2) \\ L_{31}(-1) \\ L_{41}(-2)}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{ccc}
L_{45}(-1) & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{L_4(-\frac{1}{4})} \begin{array}{c} L_{14}(-1) \\ L_{54}(-1) \end{array} \\
\\
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{\begin{array}{c} L_{15}(1) \\ L_{25}(-1) \\ L_5(-1) \end{array}} & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

Luego

$$\left. \begin{array}{l} x - u + v = 0 \\ y = 0 \\ z + 2u - v = 0 \end{array} \right\}$$

Es decir

$$\left. \begin{array}{l} x = u - v \\ y = 0 \\ z = -2u + v \end{array} \right\} ; u, v \in K$$

Luego los elementos del núcleo tienen la forma $(u - v, 0, -2u + v, u, v)$, luego

$$N(f) = \{(u - v, 0, -2u + v, u, v); u, v \in K\}$$

Una base de $N(f)$ es

$$\{(1, 0, -2, 1, 0), (1, 0, -1, 0, -1)\}$$

Puesto que $N(f) \neq \{\vec{0}\}$, la aplicación no es inyectiva.

b) $w \in \text{Im}(f)$ ssi $w = x(1, 2, 1, 2, 0) + y(1, 2, 1, -1, 1) + z(1, 1, 1, 1, -1) + u(1, 0, 1, 0, -2) + v(0, 1, 0, 1, 1)$. Luego tenemos un conjunto de generadores de $\text{Im}(f)$. Puede que existan vectores que dependen linealmente de los otros. Para tener la cantidad mínima de generadores, podemos escalar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_{21}(-1) \\ L_{31}(-1) \\ L_{41}(-1) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} L_{15}(-2) \\ L_{35}(1) \\ L_{45}(2) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La base escalonada de $\text{Im}(f)$ es

$$\{(1, 0, 1, 0, -2), (0, 1, 0, 0, \frac{4}{3}), (0, 0, 0, 1, \frac{-1}{3})\}$$

Pero sólo se pedía una base, luego podría haber dado la base

$\{(1, 0, 1, 0, -2), (0, 0, 0, 3, -1), (0, 1, 0, 1, 1)\}$ y habríamos evitado dos pasos de escalonamiento.

Puesto que $\dim_k \text{Im}(f) = 3$, f no es epiyectiva, pues $\dim_k \text{Codom}(f) = 5$.

Ejercicio

Sea $f_\alpha : K^3 \longrightarrow K^3$ tal que

$$f_\alpha(x, y, z) = (x - y + z, 2x - y + 3z, (\alpha - 1)x + (2\alpha - 2)y + (2 - 2\alpha)z)$$

con $\alpha \in K$; una familia de aplicaciones lineales.

1. Estudiemos el Núcleo y la Imagen de f_α , según los diferentes valores de α . Estudiemos sus dimensiones respectivas.
2. Estudiemos la inyectividad y epiyectividad de f_α , según los diferentes valores de α .

Solución

Busquemos un conjunto de generadores de $Im(f)$.

Sea $w \in Im(f)$, luego

$$w = x(1, 2, (\alpha - 1)) + y(-1, -1, 2\alpha - 2) + z(1, 3, 2 - 2\alpha)$$

Luego un conjunto de generadores de $Im(f)$ es

$$\{(1, 2, (\alpha - 1)), (-1, -1, 2\alpha - 2), (1, 3, 2 - 2\alpha)\}$$

Para saber su dimensión, necesitamos encontrar una base.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha - 1 \\ -1 & -1 & 2\alpha - 2 \\ 1 & 3 & 2 - 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_{21}(1) \\ L_{31}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha - 1 \\ 0 & 1 & 3\alpha - 3 \\ 0 & 1 & 3 - 3\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_{12}(-2) \\ L_{32}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5\alpha + 5 \\ 0 & 1 & 3\alpha - 3 \\ 0 & 0 & 6 - 6\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3(\frac{1}{6})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5\alpha + 5 \\ 0 & 1 & 3\alpha - 3 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_{13}(-5) \\ L_{23}(3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

Caso (1) $1 - \alpha = 0$ ssi $\alpha = 1$

La base escalonada de $Im(f_1)$ es $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$.

$$\dim_K Im(f_1) = 2 \neq 3 = \dim_K Codom(f)$$

luego f_1 no es epiyectiva.

Sabemos que

$$\dim_K \text{Dom}(f_1) = \dim_K N(f_1) + \dim_K \text{Im}(f_1)$$

Luego $\dim_K N(f_1) = 1$. Conclusión: f_1 no es inyectiva.

O bien, podemos hacer el razonamiento siguiente: Puesto que

$$\dim_K \text{Dom}(f_1) = \dim_K \text{Codom}(f_1)$$

por la proposición "Todo o nada", como no es epiyectiva, entonces no es inyectiva.

Busquemos ahora una base para $N(f_1)$.

Tenemos $(x, y, z) \in N(f_1)$ ssi $(x - y + z, 2x - y + 3z, 0x + 0y + 0z) = (0, 0, 0)$ ssi

$$\left. \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 0 \\ 2x - y + 3z & = & 0 \end{array} \right\}$$

Busquemos la representación más simple de este sistema

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{L_{21}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_{12}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Luego este sistema queda

$$\left. \begin{array}{rcl} x + 2z & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{array} \right\} \text{ es decir } \left. \begin{array}{rcl} x & = & -2z \\ y & = & -z \end{array} \right\}$$

Luego $N(f_1) = \{(x, y, z); x = -2z, y = -z\} = \{(-2z, -z, z); z \in K\}$

$N(f_1) = \langle (-2, -1, 1) \rangle$. Luego una base de $N(f_1)$ es $\{(2, 1, -1)\}$.

Luego f_1 no es inyectiva, ya que el núcleo de f_1 no es $\{\vec{0}\}$

Por la proposición "Todo o nada", tampoco es epiyectiva.

Caso (2) $1 - \alpha \neq 0$ ssi $\alpha \neq 1$

Seguimos escalonando:

$$L_3\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La base escalonada de $Im(f_\alpha) = \{1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Luego $\dim_K Im(f_\alpha) = 3$, con $\alpha \neq 1$.

Tenemos, entonces que $\dim_K(N(f_\alpha)) = 0$, luego $N(f_\alpha) = \{\vec{0}\}$.

Luego la aplicación lineal f_α , es epiyectiva e inyectiva.

Ejercicio

Sea $f : K^3 \longrightarrow K^3$ tal que

$$f(x, y, z) = (4x + 2y, x + y, 7x + 5y)$$

Busquemos el núcleo y la imagen de f .

Estudiemos si f es inyectiva o epiyectiva.

Solución

Tenemos que

$$Im(f) = \{(4x + 2y, x + y, 7x + 5y); x, y \in K\}$$

Busquemos un conjunto de generadores de $Im(f)$.

$$(4x + 2y, x + y, 7x + 5y) = x(4, 1, 7) + y(2, 1, 5)$$

Luego $\{(4, 1, 7), (2, 1, 5)\}$ es un conjunto de generadores de $Im(f)$.

Puesto que

$$\dim_K \text{Dom}(f) = \dim_K N(f) + \dim_K \text{Im}(f)$$

y $\dim_K \text{Im}(f) = 2$, entonces $\dim_K N(f) = 1$ y f no es epiyectiva.

Como $\dim_K N(f) = 1$, $N(f) \neq \{\vec{0}\}$ y f no es inyectiva. Sabemos que toda base de $N(f)$ tiene un sólo elemento. Busquemos una base del núcleo.

$$\left. \begin{array}{rcl} 4x + 2y & = & 0 \\ x + y & = & 0 \\ 7x + 5y & = & 0 \end{array} \right\} \text{ssi} \quad \left. \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right\}$$

Observamos que no hay condiciones sobre z , luego

$N(f) = \{(x, y, z); x = y = 0\} = \langle (0, 0, 1) \rangle$. Luego una base de $N(f)$ es $\{(0, 0, 1)\}$.

Ejercicio

Sea $f : K^3 \longrightarrow K^3$ lineal tal que una base de

$$N(f) = \{(1, 2, 3), (1, 0, 2)\}$$

y $f(0, 1, 1) = (2, 1, 1)$. Busquemos la escritura de f , es decir, su expresión analítica.

Solución

Observemos que $\{(1, 2, 3), (1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$ es una base de $\text{Dom}(f) = K^3$. Luego

$$(x, y, z) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(1, 0, 2) + \gamma(0, 1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & x \\ 2\alpha + \gamma & = & y \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma & = & z \end{array} \right\}$$

Escalonando, tenemos

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 2 & 0 & 1 & y \\ 3 & 2 & 1 & z \end{array} \right) & \xrightarrow[L_{31}(2)]{L_{21}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -2 & 1 & y-2x \\ 0 & -1 & 1 & z-3x \end{array} \right) \xrightarrow[L_3(-1)]{L_{13}(1)} \\
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & z-2x \\ 0 & -2 & 1 & y-2x \\ 0 & 1 & -1 & 3x-z \end{array} \right) & \xrightarrow{L_{23}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & z-2x \\ 0 & 0 & -1 & 4x+y-2z \\ 0 & 1 & -1 & 3x-z \end{array} \right) \\
 \xrightarrow[L_{32}(-1)]{L_{12}(1)} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2x+y-z \\ 0 & 0 & 1 & -4x-y+2z \\ 0 & 1 & 0 & -x-y+z \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Luego

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2x + y - z \\ \gamma &= -4x - y + 2z \\ \beta &= -x - y + z \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \alpha f(1, 2, 3) + \beta f(1, 0, 2) + (-4x - y + 2z) f(0, 1, 1) \\ &= (-4x - y + 2z)(2, 1, 1) \end{aligned}$$

(Recuerde que los dos primeros vectores están en el núcleo de f)

Luego

$$f(x, y, z) = (-8x - 2y + 4z, -4x - y + 2z, -4x - y + 2z)$$

Ejercicio

Sean $f, g, h : K^3 \longrightarrow K^2$

1. $f(x, y, z) = (x + y, x + y)$
 2. $g(x, y, z) = ((x - 1)y, z - y)$
 3. $h(1, 0, 0) = (1, 1), h(0, 1, 0) = (a^2, -1), h(0, 0, 1) = (a, 0)$, donde a es un real fijo.
- i.* Determinemos aquellas aplicaciones que no son lineales. Argumentemos la respuesta.

- ii. De las aplicaciones lineales, indiquemos cuáles son inyectivas, epiyectivas, biyectivas. Argumentemos la respuesta.

Solución (1)

Afirmación: La aplicación f es lineal.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad f((x, y, z) + (x', y', z')) &= f(x + x', y + y', z + z') \\
 &= (x + x' + y + y', x + x' + y + y') \\
 &= (x + y, x + y) + (x' + y', x' + y') \\
 &= f(x, y, z) + f(x', y', z')
 \end{aligned}$$

En la última igualdad podíamos tomar cualquier z , cualquier z' , pero en particular podíamos tomar z y z' que teníamos al comienzo (estábamos autorizados a tomar cualquiera).

$$\begin{aligned}
 (b) \quad f(\alpha(x, y, z)) &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\
 &= (\alpha x + \alpha y, \alpha x + \alpha y) \\
 &= \alpha(x + y, x + y) = \alpha f(x, y, z)
 \end{aligned}$$

Por (a) y (b) tenemos que f es lineal.

Contestemos ahora la parte (ii.).

$(x, y, z) \in N(f)$ ssi $f(x, y, z) = (0, 0)$ ssi $(x+y, x+y) = (0, 0)$ ssi $x+y = 0$ ssi $x = -y$. Luego no hay exigencias sobre z . Tenemos entonces que $N(f) = \{(x, -x, z); x, z \in K\} \neq \{\vec{0}\}$. Luego f no es inyectiva. Una base de $N(f)$ es $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ (luego de dimensión dos).

Por otra parte sabemos que:

$$\dim_K \text{Dom}(f) = \dim_K N(f) + \dim_K \text{Im}(f)$$

luego $\dim_K \text{Im}(f) = 1$.

Conclusión: f no es epiyectiva.

Solución (2)

Tenemos que

$$g(x, y, z) = ((x - 1)y, z - y)$$

Afirmación: g no es lineal.

Contraejemplo: $g(1, 1, 0) = ((1 - 1)1, 0 - 1) = (0, -1)$;

$$\begin{aligned} g(0, 1, 1) &= ((0 - 1)1, 1 - 1) = (-1, 0); \\ g(1, 2, 1) &= ((1 - 1)2, 1 - 2) = (0, -1) \end{aligned}$$

Calculemos, ahora $g(1, 2, 1)$, suponiendo que g es lineal. El cálculo es el siguiente: $g(1, 2, 1) = g((1, 1, 0) + (0, 1, 1)) = g(1, 1, 0) + g(0, 1, 1) = (0, -1) + (-1, 0) = (-1, -1)$, que es diferente al obtenido anteriormente.

Solución (3)

El Teorema de existencia y unicidad de una aplicación lineal, dice que dada una base en el Dominio y dado 3 vectores cualesquiera en el Codominio, existe una aplicación lineal que lleva los vectores de la base en esos tres vectores y ésta aplicación es única. Luego h existe y es única pues $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es una base de $Dom(h)$

Para la pregunta (ii.), tenemos lo siguiente:

Una aplicación lineal es inyectiva si lleva una base en un conjunto l.i.

Vemos que el conjunto $\{(1, 1), (a^2, -1), (a, 0)\}$ es l.d., pues no puede haber más de dos vectores l.i. en K^2 . Luego h no es inyectiva, cualquiera que sea $a \in K$.

Por otra parte, $a^2 \neq -1, \forall a \in K$, luego el vector $(a^2, -1)$ nunca es un múltiplo del vector $(1, 1)$.

Entonces $K^2 = \langle (1, 1), (a^2, -1) \rangle = \langle (1, 1), (a^2, -1), (a, 0) \rangle, \forall a \in K$.

Luego $Im(h) = K^2$ y h es epiyectiva.

Ejercicio

Sea $f_\alpha : K^3 \longrightarrow K^3$ una aplicación lineal tal que

$$f_\alpha(x, y, z) = (x + z, y + 2z, (\alpha - 3)z)$$

Encontremos el núcleo y la imagen de f_α para los distintos valores de $\alpha \in K$ y luego estudiemos la inyectividad y epiyectividad de f_α .

Solución

Busquemos el núcleo de f_α

$$\left. \begin{array}{rcl} x + z & = & 0 \\ y + 2z & = & 0 \\ (\alpha - 3)z & = & 0 \end{array} \right\}$$

es decir tenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 & 0 \end{array} \right)$$

Caso (1) $\alpha - 3 = 0$ ssi $\alpha = 3$

$$\left. \begin{array}{rcl} x + z & = & 0 \\ y + 2z & = & 0 \end{array} \right\} \text{ Luego, } x = -z, y = -2z$$

De donde $(-z, -2z, z) = z(-1, -2, 1)$, luego $N(f_3) = \langle (1, 2, -1) \rangle$; y por lo tanto f_α no es inyectiva en el caso $\alpha = 3$ y en tal caso la dimensión del núcleo es uno, luego por el teorema de las dimensiones se tiene que $\dim \text{Im}(f_3) = 2$. Busquemos $\text{Im}(f_3)$

Tenemos $(x + z, y + 2z, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(1, 2, 0)$ y como $(1, 2, 0)$ es combinación lineal de $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$, entonces

$\text{Im}(f_3) = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$, luego f_3 no es epiyectiva.

Caso (2) $\alpha - 3 \neq 0$ ssi $\alpha \neq 3$

Seguimos escalonando

$$\xrightarrow{L_3(\frac{1}{\alpha-3})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{c} L_{13}(-1) \\ L_{23}(-2) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Luego $x = y = z = 0$, es decir $N(f_\alpha) = \{(0, 0, 0)\}$ y usando nuevamente el teorema de las dimensiones tenemos que $\dim f_\alpha = 3$, es decir $\text{Im}(f_\alpha) = K^3$. Luego en este caso ($\alpha \neq 3$), se tiene que f_α es inyectiva y epiyectiva. Además recordemos que f_α es un endomorfismo, luego es inyectivo ssi es epiyectivo.

Ejercicio

Observando las imágenes de los elementos de la base, estudiemos si la aplicación lineal $f : K^3 \rightarrow K^3$, dada por:

$f(1, 0, 0) = (1, 1, 0)$; $f(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$; $f(0, 0, 1) = (2, 2, -1)$ es un

1. monomorfismo;
2. epimorfismo;
3. automorfismo.

Solución

1. Una aplicación lineal es un monomorfismo si lleva una base en un conjunto l.i.

Tenemos que $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es una base. Ahora necesitamos estudiar la dependencia lineal de

$$B = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 2, -1)\}$$

Sea $\alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 0, 1) + \gamma(2, 2, -1) = (0, 0, 0)$. Es equivalente a

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{array} \right\} \text{ equivalente a } \left. \begin{array}{l} \alpha = -2\gamma \\ \beta = \gamma \end{array} \right\}$$

Quiere decir que el $\vec{0}$ se puede obtener de infinitas maneras:

$-2\gamma(1, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) + \gamma(2, 2, -1) = (0, 0, 0)$, $\forall \gamma \in K$, luego el conjunto es l.d. Entonces la aplicación lineal no es inyectiva. [monomorfismo=lineal inyectiva].

2. Una aplicación lineal es un epimorfismo si lleva una base en un conjunto de generadores.

El vector $(2, 2, -1) = 2(1, 1, 0) + -1(0, 0, 1)$

Luego $\langle (1, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 2, -1) \rangle = \langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$,

Luego $\dim_K \text{Im}(f) = 2$. es decir, B no es un conjunto de generadores del $\text{Codom}(f)$.

Luego f no es un epimorfismo.

3. Por (1) y (2) f no es un automorfismo (lineal biyectiva).

Ejercicio

Sea $f : K_2[X] \longrightarrow M_2(K)$ y $B = \{1 + X^2, 2X^2, 1 + X + X^2\}$ una base de $K_2[X]$, definamos f en ésta base de la siguiente manera:

$$f(1 + X^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad f(2X^2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$f(1 + X + X^2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Extendamos f por linealidad a todo el espacio.

Solución

Sea $a + bX + cX^2 = \alpha(1 + X^2) + \beta(2X^2) + \gamma(1 + X + X^2)$. Lo primero que observamos es que γ debe valer b , $\gamma = b$, pues el único término que tiene X es γ .

α debe ser igual a $a - b$, para que el término constante sea a .

Igualando los coeficientes de X^2 , tenemos: $c = \alpha + 2\beta + \gamma$, luego

$2\beta = c - (a - b) - b$, luego $\beta = \frac{c-a}{2}$.

Ahora estamos en condiciones de extender f por linealidad.

$$\begin{aligned} f(a + bX + cX^2) &= \\ &= f[(a - b)(1 + X^2) + \frac{(c-a)}{2}(2X^2) + b(1 + X + X^2)] \\ &= (a - b)f(1 + X^2) + \frac{(c-a)}{2}f(2X^2) + bf(1 + X + X^2) \\ &= (a - b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(c-a)}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a + 2b + 2c & c \\ a - 2b & a - 2b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

luego

$$f(a + bX + cX^2) = \begin{pmatrix} -a + 2b + 2c & c \\ a - 2b & a - 2b \end{pmatrix}$$

Ejercicio

Sea $T : K^3 \rightarrow K^3$ tal que $T(1, 1, 1) = (1, 3, 5)$, $T(1, 0, 1) = (0, 1, 3)$.

Estudiemos en cada uno de los casos la existencia y unicidad de T si agregamos la condición

1. $T(2, 1, 2) = (1, 4, 8)$

2. $T(2, 1, 2) = (0, 4, 8)$

3. $T(1, 0, 0) = (1, 3, 5)$

Solución (1)

Se tiene $(2, 1, 2) = 1(1, 1, 1) + 1(1, 0, 1)$. Si T fuese lineal $T(2, 1, 2) = 1T(1, 1, 1) + 1T(1, 0, 1) = 1(1, 3, 5) + 1(0, 1, 3) = (1, 4, 8)$. Luego existe T que cumple (1), pero T no es única, faltaría definirla en un tercer vector tal que los tres vectores formen una base de K^3

Solución (2)

No existe T que cumpla (2), pues vimos que si T es lineal $T(2, 1, 2) = (1, 4, 8)$

Solución (3)

Ocurre que $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$ es una base de K^3 , luego existe una aplicación lineal definida en esta base y es única.

Busquemos su escritura.

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= y(1, 1, 1) + (z - y)(1, 0, 1) + (x - z)(1, 0, 0) \\ T(x, y, z) &= yT(1, 1, 1) + (z - y)T(1, 0, 1) + (x - z)T(1, 0, 0) = \\ &= y(1, 3, 5) + (z - y)(0, 1, 3) + (x - z)(1, 3, 5) \\ \text{Luego } T(x, y, z) &= (x + y - z, 3x + 2y - 2z, 5x + 2y - 2z)\end{aligned}$$

3.7 Ejercicios propuestos

- Determine cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

- $T : K^2 \longrightarrow K^3; T(x, y) = (2x - y, x + y, -x + 3y)$
- $g : M_{2 \times 1}(K) \longrightarrow M_2(K); g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y & y \\ x & x - y \end{pmatrix}$
- $D : K_n[x] \longrightarrow K_n[x]; D(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$

- Determine si existe una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

- $f(2, 1) = (1, 0), f(0, 1) = (0, 1)$ y $f(1, 1) = (3, 2)$
- $f(2, 1) = (1, 0), f(0, 1) = (0, 1)$ y $f(1, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

- Sea f la aplicación lineal definida por $f : M_{2 \times 2}(K) \longrightarrow M_{2 \times 2}(K); f(X) = BX$ donde $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

- (a) Encuentre la base escalonada y la dimensión de $N(f)$ y de $Im(f)$
- (b) Estudie la inyectividad y la epiyectividad de f

Capítulo 4

Matrices

4.1 Matriz asociada a una aplicación lineal

¡Al fin nos vamos a dedicar a las matrices!. Seguramente, tu sabías que en el curso de Algebra Lineal se estudian las matrices. Desde el comienzo del curso hemos utilizado las matrices, pero no hemos puesto la atención en ellas.

Este capítulo trata lo siguiente: sabemos que una aplicación lineal está determinada si conocemos su comportamiento en una base. Luego toda aplicación lineal está determinada por un conjunto de vectores

... ahora seremos más exigentes ...

Queremos determinar una aplicación lineal por un conjunto de números, los cuales serán ordenados en una matriz. Luego veremos operaciones entre aplicaciones lineales y propiedades y sus respectivas operaciones y propiedades entre matrices.

Observación

Consideremos a modo de ejemplo, K^3 y en él la base

$$B = \{(1, 2, 5), (2, 3, 1), (1, 1, -1)\}$$

y una aplicación lineal $f : K^3 \longrightarrow K^2$, definida por

$$f(1, 2, 5) = (5, 12); f(2, 3, 1) = (8, 5); f(1, 1, -1) = (3, -1)$$

Entonces estos seis vectores determinan f .

En K^2 , consideremos la base $C = \{(1, 1), (1, 0)\}$.

Observemos que:

$$\begin{aligned} (5, 12) &= 12(1, 1) + (-7)(1, 0) \\ (8, 5) &= 5(1, 1) + 3(1, 0) \\ (3, -1) &= (-1)(1, 1) + 4(1, 0) \end{aligned}$$

Luego, si fijamos las bases B y C y respetamos el orden de los elementos de la bases, entonces f está definida por los números: 12,-7,5,3,-1,4.

Para que estos números sean más fáciles de leer y por otras consideraciones que haremos más adelante, escribiremos

$$(f; B, C) = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -1 \\ -7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

y diremos que es la matriz de f con respecto a las bases B y C .

Construcción de la matriz asociada a una aplicación lineal

Sean V y W dos K -espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente. Tomemos una base B de V , $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y una base C en W , $C = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$.

Todo vector v de V y todo vector w de W , lo expresaremos por sus coordenadas respectivas en B y C .

Vamos a respetar el orden en que nos han sido dados los elementos de las bases.

Sea $f(v) = w$. Sea $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = \sum_{j=1}^n x_jv_j$

$$w = y_1w_1 + y_2w_2 + \cdots + y_mw_m = \sum_{i=1}^m y_iw_i$$

Tomemos una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$. Por el Teorema Fundamental del Álgebra Lineal, tenemos que f está determinada y de una manera única cuando se fijan las imágenes de los elementos de la base de V :

$$f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$$

Estos vectores los descomponemos en la base C de W de la manera siguiente:

$$f(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m = \sum_{i=1}^m a_{ij}w_i$$

Todo vector v de V , $v = \sum_{j=1}^n x_jv_j$, es enviado, por la aplicación lineal f , en el vector de W siguiente:

$$w = f(v) = x_1f(v_1) + x_2f(v_2) + \cdots + x_nf(v_n) = \sum_{j=1}^n x_jf(v_j)$$

Reemplazando los $f(v_j)$, tenemos

$$w = f(v) = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}w_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right) w_i$$

Obtenemos entonces, las componentes y_1, y_2, \dots, y_m de w , es decir, de $f(v)$ en la base C de W , $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, $1 \leq i \leq m$, es decir,

$$\left. \begin{array}{lcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ y_m & = & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array} \right\}$$

se utilizó la unicidad de las componentes al descomponerlo en una base.

Estas m ecuaciones son caracterizadas por el arreglo rectangular (es decir, por la matriz) siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

llamada la **matriz asociada a f con respecto a la base B de V y a la base C de W** y se denota $(f; B, C)$.

Se dice que esta matriz tiene m filas y n columnas y cada escalar a_{ij} es llamado **término** de la matriz.

Recíprocamente, si nos damos una matriz de m filas y n columnas, las fórmulas

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

definen una aplicación lineal de V en W .

En efecto, para todo $v \in V$, de coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n en la base B , los $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ hacen corresponder un vector único de W de coordenadas y_1, y_2, \dots, y_m en la base C .

Este vector w está dado por la relación

$$w = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) w_i = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \right) = \sum_{j=1}^n x_j f(v_j) = f \left(\sum_{j=1}^n x_j v_j \right) = f(v)$$

Tenemos que f es lineal (Te lo dejamos gentilmente de ejercicio ¿bueno?)

Para $v = v_j$, se tiene $f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i$, se sabe que existe una aplicación lineal que cumple esta condición y se sabe que es única.

Ejemplo

Sea $f : K^3 \longrightarrow K^2$; definida por: $f(x, y, z) = (3x, x + y)$.

Consideremos $B = \{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 0)\}$ una base ordenada (no podemos cambiar el orden dado) de K^3 y $C = \{(1, 0), (1, -1)\}$ una base ordenada de K^2 . Busquemos $(f; B, C)$ ¿de acuerdo?

Solución

Sabiendo que $f(x, y, z) = (3x, x + y)$, tenemos

$$\begin{aligned} f(1, 1, 1) &= (3, 2) = 5(1, 0) + -2(1, -1) \\ f(1, -1, 0) &= (3, 0) = 3(1, 0) + 0(1, -1) \\ f(1, 0, 0) &= (3, 1) = 4(1, 0) + -1(1, -1) \end{aligned}$$

$$\text{Luego } (f; B, C) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Sea $f : K^3 \longrightarrow K^2$; $f(x, y, z) = (x + y + z, 3z)$.

Consideremos $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ una base de K^3 y

$C = \{(0, 1), (1, 1)\}$ una base de K^2 .

Busquemos $(f; B, C)$.

A partir de $f(x, y, z) = (x + y + z, 3z)$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(1, 1, 1) &= (3, 3) = 0(0, 1) + 3(1, 1) \\ f(1, 1, 0) &= (2, 0) = -2(0, 1) + 2(1, 1) \\ f(1, 0, 0) &= (1, 0) = -1(0, 1) + 1(1, 1) \end{aligned}$$

$$\text{Entonces } (f; B, C) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

Sea $f : K_2[t] \longrightarrow K_2[t]$; $f(g(t)) = (1-t)g'(t)$. Determinemos $(f; B, C)$,

donde $B = \{1 + t + t^2, 1 + t, 1\}$ y $C = \{t + t^2, 1 + t + t^2, t^2\}$.

Solución

Tal vez debemos explicarte mejor el comportamiento de f . Bueno es así:

$f(a + bt + ct^2) = (1 - t)(b + 2ct)$, pues $g'(t)$ es la derivada formal de $g(t)$ (es decir que tiene la misma forma de la derivada. ¿de acuerdo?)

$$\begin{aligned} f(1 + t + t^2) &= (1 - t)(1 + 2t) = 1 + t - 2t^2 \\ f(1 + t) &= (1 - t) \cdot 1 = 1 - t \\ f(1) &= (1 - t) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Busquemos las coordenadas de estos vectores en la base C .

$$\begin{aligned} 1 + t - 2t^2 &= 0(t + t^2) + 1(1 + t + t^2) - 3t^2 \\ 1 - t &= -2(t + t^2) + 1(1 + t + t^2) + 1t^2 \\ 0 &= 0 \cdot (t + t^2) + 0 \cdot (1 + t + t^2) + 0 \cdot t^2 \end{aligned}$$

Luego

$$(f; B, C) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

Sea $f : K^2 \longrightarrow K_2[X]$ lineal cuya matriz según las bases

$B = \{(1, 1), (1, 0)\}$ y $C = \{1 + X + X^2, 1 + X, 1\}$ es

$$(f; B, C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Busquemos la expresión analítica de f .

Solución

Sabemos que:

$$\begin{aligned} f(1, 1) &= 1(1 + X + X^2) + 3(1 + X) + 5(1) \\ f(1, 0) &= 2(1 + X + X^2) + 7(1 + X) + 4(1) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} f(1, 1) &= 9 + 4X + X^2 \\ f(1, 0) &= 13 + 9X + 2X^2 \end{aligned}$$

Ahora escribamos $(z, t) \in K^2$, según la base B

$$(z, t) = t(1, 1) + (z - t)(1, 0)$$

Luego

$$f(z, t) = tf(1, 1) + (z - t)f(1, 0) = t(9 + 4X + X^2) + (z - t)(13 + 9X + 2X^2)$$

es decir,

$$f(z, t) = (13z - 4t) + (9z - 5t)X + (2z - t)X^2$$

4.2 Suma de morfismos y suma de matrices

Observación

Sean $f, g : K^2 \longrightarrow K^3$ definidas por:

$$f(x, y) = (2x + y, 3y - 3x, 2y - 3x) \text{ y } g(x, y) = (4x - 2y, 2x - y, x)$$

Escojamos las bases ordenadas

$$B = \{(1, 2), (1, 1)\} \text{ en } K^2 \text{ y } C = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\} \text{ en } K^3$$

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y) = (6x - y, 2y - x, 2y - 2x)$$

luego,

$$\begin{aligned}
 f(1,2) &= (4,3,1) = 1(1,1,1) + 2(1,1,0) + 1(1,0,0) \\
 f(1,1) &= (3,0,-1) = -1(1,1,1) + 1(1,1,0) + 3(1,0,0) \\
 g(1,2) &= (0,0,1) = 1(1,1,1) - 1(1,1,0) + 0(1,0,0) \\
 g(1,1) &= (2,1,1) = 1(1,1,1) + 0(1,1,0) + 1(1,0,0) \\
 (f+g)(1,2) &= (4,3,2) = 2(1,1,1) + 1(1,1,0) + 1(1,0,0) \\
 (f+g)(1,1) &= (5,1,0) = 0(1,1,1) + 1(1,1,0) + 4(1,0,0)
 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
 (f; B, C) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad (g; B, C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 (f+g; B, C) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Es obvio como uno sumaría las dos primeras matrices de manera de obtener la tercera como resultado de esta suma. ¡Todos somos un poco matemáticos en nuestro ser! ¿Cierto?

En general si consideramos espacios vectoriales cualesquiera, se tiene:

Sean V y W dos K -espacios vectoriales. Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base ordenada de B y $C = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ una base ordenada de W . Sean $f, g : V \longrightarrow W$ dos morfismos

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i, \quad g(v_j) = \sum_{i=1}^m b_{ij} w_i. \text{ Luego}$$

$$(f+g)(v_j) = f(v_j) + g(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i + \sum_{i=1}^m b_{ij} w_i = \sum_{i=1}^m (a_{ij} + b_{ij}) w_i$$

Luego

$$(f; B, C) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(g; B, C) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(f + g; B, C) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + b_{i1} & \dots & a_{ij} + b_{ij} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mj} + b_{mj} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Esto motiva la siguiente definición

Definición 4.2.1 *A todo par de matrices (a_{ij}) y (b_{ij}) pertenecientes a $M_{m \times n}(K)$, le asociamos una matriz de $M_{m \times n}(K)$, llamada **suma de (a_{ij}) y (b_{ij})** , denotada $(a_{ij}) + (b_{ij})$ y definida por*

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) =: (a_{ij} + b_{ij})$$

es decir,

$$(f; B, C) + (g; B, C) = (f + g; B, C)$$

En palabras, la suma de las matrices de dos morfismos es la matriz de la suma de esos dos morfismos.

4.3 Producto de un escalar por un morfismo y producto de un escalar por una matriz

Recordemos que en el capítulo anterior definimos el producto por escalar $\alpha \cdot f$ donde f es un morfismo.

Observación

Considerando el morfismo $f : K^2 \longrightarrow K^3$ y las bases de la observación anterior, tenemos

$$(\alpha f)(x, y) = \alpha \cdot f(x, y) = (2\alpha x + \alpha y, 3\alpha y - 3\alpha x, 2\alpha y - 3\alpha x)$$

Luego

$$(\alpha f)(1, 2) = (4\alpha, 3\alpha, \alpha) = \alpha(1, 1, 1) + 2\alpha(1, 1, 0) + \alpha(1, 0, 0)$$

$$(\alpha f)(1, 1) = (3\alpha, 0, -\alpha) = -\alpha(1, 1, 1) + \alpha(1, 1, 0) + 3\alpha(1, 0, 0)$$

$$(f; B, C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } (\alpha f; B, C) = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ 2\alpha & \alpha \\ \alpha & 3\alpha \end{pmatrix}$$

Nuevamente uno tiene de inmediato el chispazo para multiplicar una matriz por un escalar

En general si consideramos espacios vectoriales cualesquiera, se tiene:

Consideremos la misma aplicación lineal f y las mismas bases que consideramos para el caso de la suma. Sea $\alpha \in K$. Por la definición de la aplicación lineal $\alpha \cdot f$, tenemos

$$(\alpha f)(v_j) = \alpha \cdot f(v_j) = \alpha \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^m (\alpha a_{ij}) w_i$$

Luego

$$(\alpha f; B, C) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1j} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{i1} & \dots & \alpha a_{ij} & \dots & \alpha a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mj} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

es decir, $(\alpha f; B, C) = (\alpha a_{ij})$. Esto nos motiva a la siguiente definición

Definición 4.3.1 A toda matriz (a_{ij}) perteneciente a $M_{m \times n}(K)$ y a todo escalar $\alpha \in K$, le asociamos una matriz de $M_{m \times n}(K)$, llamada **producto de α por (a_{ij})** , denotada $\alpha \cdot (a_{ij})$ y definida por

$$\alpha \cdot (a_{ij}) = (\alpha \cdot a_{ij})$$

es decir,

$$\alpha \cdot (f; B, C) = (\alpha \cdot f; B, C)$$

En palabras, el producto escalar por una matriz de un morfismo es la matriz del producto escalar por el morfismo.

4.4 Composición de morfismos y producto de matrices

Sean U , V y W tres K -espacios vectoriales de dimensiones n , p y q respectivamente. Sean $f : U \longrightarrow V$ y $g : V \longrightarrow W$. Escojamos las bases B , C y D respectivamente en U , V y W .

$$B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, C = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}, D = \{w_1, w_2, \dots, w_q\}.$$

Sean

$$(f; B, C) = (a_{ij}), 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq p; (g; C, D) = (b_{ki}), 1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq q$$

Busquemos la matriz de $g \circ f$.

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} v_i, \quad g(v_i) = \sum_{k=1}^q b_{ki} w_k$$

Luego

$$(g \circ f)(u_j) = g(f(u_j)) = g\left(\sum_{i=1}^p a_{ij} v_i\right) = \sum_{i=1}^p a_{ij} g(v_i) = \sum_{i=1}^p a_{ij} \left(\sum_{k=1}^q b_{ki} w_k\right)$$

De donde

$$(g \circ f)(u_j) = \sum_{k=1}^q \left(\sum_{i=1}^p b_{ki} a_{ij} \right) w_k, \quad 1 \leq j \leq n$$

Sea

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^p b_{ki} a_{ij} = b_{k1} a_{1j} + b_{k2} a_{2j} + \cdots + b_{kp} a_{pj}$$

Obtenemos entonces

$$(g \circ f)(u_j) = \sum_{k=1}^q c_{kj} w_k$$

La matriz asociada a $g \circ f$ es entonces (c_{kj}) .

Tenemos entonces la siguiente definición

Definición 4.4.1 A una matriz (a_{ij}) en $M_{p \times n}(K)$ y una matriz (b_{ki}) en $M_{q \times p}(K)$, le asociamos una matriz de $M_{q \times n}(K)$, llamada **producto de las matrices** (b_{ki}) y (a_{ij}) , denotada $(b_{ki}) \cdot (a_{ij})$ y definida por

$$(b_{ki}) \cdot (a_{ij}) = \left(\sum_{i=1}^p b_{ki} a_{ij} \right)$$

El orden inverso $(a_{ij}) \cdot (b_{ki})$ en general no tiene sentido.

Esquema de la definición:

$$\begin{pmatrix} & & & \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & c_{kj} & \cdots \end{pmatrix}$$

Representa la multiplicación de la fila k por la columna j y se obtiene el lugar (k, j) de la matriz producto.

$$(g; C, D) \cdot (f; B, C) = (g \circ f; B, D)$$

Es decir, el producto de las matrices de dos morfismos es la matriz de la composición de los morfismos.

Ejemplo

Consideremos nuevamente la aplicación lineal

$$f : K^2 \longrightarrow K^3; \quad f(x, y) = (2x + y, 3y - 3x, 2y - 3x)$$

y las mismas bases ordenadas de las observaciones anteriores.

Además consideremos la aplicación lineal

$$g : K^3 \longrightarrow K^2; \quad g(x, y, z) = (x - y + 2z, -x + 2y)$$

Consideremos $D = \{(1, 1), (1, 0)\}$ una base ordenada del Codominio de g y busquemos las matrices: $(g; C, D)$ y $(g \circ f; B, D)$

Tenemos:

$$\begin{array}{llll} g(1, 1, 1) & = & (2, 1) & = & 1(1, 1) + 1(1, 0) \\ g(1, 1, 0) & = & (0, 1) & = & 1(1, 1) + -1(1, 0) \\ g(1, 0, 0) & = & (1, -1) & = & -1(1, 1) + 2(1, 0) \\ (g \circ f)(x, y) & = & g(f(x, y)) & = & (-x + 2y, -8x + 5y) \\ (g \circ f)(1, 2) & = & (3, 2) & = & 2(1, 1) + 1(1, 0) \\ (g \circ f)(1, 1) & = & (1, -3) & = & -3(1, 1) + 4(1, 0) \end{array}$$

Luego tenemos

$$(g; C, D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (f; B, C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f; B, D) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

El número 2 de la tercera matriz se obtiene de $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1$, es decir la primera fila de $(g; C, D)$, por la primera columna de $(f; B, C)$.

Además

$$\begin{array}{ll} -3 & = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \\ 1 & = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 4 & = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{array}$$

4.5 Algunos tipos especiales de matrices

Proposición 4.5.1 $(M_{m \times n}(K), +)$ es un grupo abeliano.

Demostración

La suma es una ley de composición interna. Esta suma es asociativa y conmutativa.

El neutro para la suma es la matriz nula, es decir $0 = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 0$; $\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n$. Toda matriz $A = (a_{ij})$ tiene inversa aditiva $-A = (-a_{ij})$.

Proposición 4.5.2 $(M_n(K), +, \cdot)$ es un anillo con unidad.

Demostración

En efecto, el producto es asociativo y se distribuye con respecto a la suma.

La unidad es la matriz identidad $I_n = (a_{ij})$, donde $a_{ii} = 1$ y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Observación

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota

Se tiene entonces que el producto de matrices no es conmutativo.

Observación

Consideremos las mismas dos matrices del ejemplo anterior y observamos lo siguiente.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 24 & 33 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2A \cdot B + B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 22 \\ 6 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 24 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 14 \\ 30 & 22 \end{pmatrix}$$

Por otra parte:

$$(A + B)^2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ 48 & 31 \end{pmatrix}$$

Luego $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

Esto ocurre pues $(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$,
y como vimos anteriormente: $AB + BA \neq 2AB$

Definición 4.5.1 Diremos que una matriz $A \in M_n(K)$ es **invertible** o **regular**, si existe una matriz $B \in M_n(K)$, tal que $AB = BA = I_n$.

Diremos que es **singular**, en caso que no sea invertible.

Ejercicio

En el espacio de las matrices $M_2(\mathbb{R})$, determine el conjunto de todas las matrices que conmutan con la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $a = b + d$ y $c = 0$. Luego $\left\{ \begin{pmatrix} b+d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}; b, d \in \mathbb{R} \right\}$, es el conjunto de todas las matrices que conmutan con la matriz A .

Ejercicio

Estudie para qué valores de a , $a \in \mathbb{R}$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, es invertible.

Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{21}(-a)} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{23}(a)} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{12}(-a)} \xrightarrow{L_{32}(-a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz A es invertible ssi $a \neq 1, -1$

Definición 4.5.2 Sea $A \in M_n(K)$, $A \neq 0$. Diremos que A es un **divisor de cero**, si existe $B \in M_n(K)$, $B \neq 0$, tal que $A \cdot B = 0$

Ejemplo

Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Su producto es: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Luego las matrices A y B , son divisores de cero.

Observación

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se tiene que $A^2 = 0$. Diremos que A es una "matriz nilpotente de grado 2"

Definición 4.5.3 Sea $A \in M_n(K)$. Diremos que A es una **matriz nilpotente de grado m** , si $A^m = 0$ y $A^t \neq 0 \forall t < m$

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^3 = 0$.

Luego A es una matriz nilpotente de grado 3.

Definición 4.5.4 Sea $A \in M_n(K)$. Diremos que A es **idempotente** si $A^2 = A$

Ejemplo

Consideremos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se tiene que $A^2 = A$

Definición 4.5.5 Sea $A \in M_n(K)$. Diremos que A es **involutiva** si $A^2 = I_n$

Ejemplo

Consideremos $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Se tiene que $A^2 = I_3$

Luego A es involutiva.

Ejercicio

Demuestre que si la matriz A es involutiva, entonces $B = \frac{1}{2}(I_n + A)$ y $C = \frac{1}{2}(I_n - A)$, son idempotentes y $B \cdot C = 0$

Proposición 4.5.3 *Para el producto de matrices no se cumple la ley de cancelación.*

Contraejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Se tiene $A \cdot B = A \cdot C$ y $B \neq C$

Definición 4.5.6 Sea $A \in M_{m \times n}(K)$, $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$. Diremos que $B \in M_{n \times m}$ es la matriz **transpuesta** A si $B = (a_{ji})$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$. Notación: $B = A^t$

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Proposición 4.5.4 Sean A, B matrices. Entonces:

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$
2. $(\alpha A)^t = \alpha \cdot A^t$
3. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Ejercicio

Sea $A \in M_{m \times n}(K)$ y $G \in M_n(K)$. Sea $G = A^t \cdot A$, entonces $G^t = G$

Solución

$$G^t = (A^t \cdot A)^t = A^t \cdot (A^t)^t = A^t \cdot A = G$$

Definición 4.5.7 Sea $A \in M_n(K)$. Diremos que:

1. A es una matriz **simétrica** si $A^t = A$
2. A es una matriz **antisimétrica** si $A^t = -A$
3. A es una matriz **ortogonal** si $A^t = (A)^{-1}$

Ejemplos

Son simétricas las matrices: $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

Son antisimétricas las matrices: $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

Son ortogonales las matrices: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Lema

Sea $A \in M_n(K)$, entonces $A + A^t$, es una matriz simétrica y $A - A^t$, es una matriz antisimétrica.

Demostración

En efecto, $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A$. Luego $A + A^t$ es simétrica.

Por otra parte: $(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$. Luego $A - A^t$ es antisimétrica.

Lema

Sea $A \in M_n(K)$, entonces $A = B + C$, donde B es una matriz simétrica y C es una matriz antisimétrica.

Demostración

Sea $B = \frac{1}{2}(A + A^t)$ y $C = \frac{1}{2}(A - A^t)$. Entonces B y C cumplen lo pedido.

Definición 4.5.8 Sea $A \in M_n(K)$. Entonces $B = \frac{1}{2}(A + A^t)$ y $C = \frac{1}{2}(A - A^t)$, serán llamadas la **parte simétrica** y la **parte antisimétrica** de A respectivamente.

Ejercicio

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Busquemos su parte simétrica y su parte antisimétrica.

Solución

Su parte simétrica S es: $S = \frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$

Su parte antisimétrica T es: $T = \frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Se tiene que $A = S + T$

Definición 4.5.9 Sea $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$. Llamaremos **traza de** A , denotada por $Tr(A)$, al número $\sum_{i=1}^n a_{ii}$, es decir, a la suma de los elementos de la diagonal principal.

Proposición 4.5.5 Sea $A, B \in M_n(K)$. Entonces se tiene:

1. $Tr(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot Tr(A)$
2. $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$
3. $Tr(A \cdot B) = Tr(B \cdot A)$

4.6 Forma matricial de $f(v) = w$

Sean V y W dos K -espacios vectoriales.

Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V y $C = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ una base de W , ambas bases ordenadas.

Si $v \in V$, entonces

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$$

y

$$f(v) = y_1 w_1 + y_2 w_2 + \cdots + y_m w_m$$

Sea $(f; B, C) = (a_{ij})$, es decir

$$\left. \begin{array}{lcl} f(v_1) & = & a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ f(v_2) & = & a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ f(v_n) & = & a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{array} \right\}$$

Luego

$$\begin{aligned} f(v) &= f(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) \\ &= x_1 f(v_1) + \cdots + x_n f(v_n) \\ &= x_1 (a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m) + \cdots + x_n (a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m) \\ &= (x_1 a_{11} + \cdots + x_n a_{1n})w_1 + \cdots + (x_1 a_{m1} + \cdots + x_n a_{mn})w_m \end{aligned}$$

Luego por la unicidad de las componentes de la base:

$$\left. \begin{array}{lcl} y_1 & = & x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_n a_{1n} \\ y_2 & = & x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_n a_{2n} \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ y_m & = & x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \cdots + x_n a_{mn} \end{array} \right\}$$

De donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$(f; B, C) \cdot \begin{pmatrix} v \\ \text{según} \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(v) \\ \text{según} \\ C \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Sea $f : K_2[X] \longrightarrow K^2$; $f(a+bX+cX^2) = (a+5b, 4b+c)$. Consideremos las bases $B = \{1, 1+X, 1+X+X^2\}$ y $C = \{(1, 1), (1, 0)\}$ de $K_2[X]$ y K^2 , respectivamente.

Veamos cual es la imagen del vector $v = 9 + 2X + 5X^2$. Comencemos por buscar $(f; B, C)$

$$\begin{aligned} f(1) &= (1, 0) = 0(1, 1) + 1(1, 0) \\ f(1+X) &= (6, 4) = 4(1, 1) + 2(1, 0) \\ f(1+X+X^2) &= (6, 5) = 5(1, 1) + 1(1, 0) \end{aligned}$$

Escribamos v según la base B

$$9 + 2X + 5X^2 = 7 \cdot 1 + -3(1+X) + 5(1+X+X^2)$$

Multiplicando las dos matrices asociadas tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$f(9 + 2X + 5X^2) = 13(1, 1) + 6(1, 0) = (19, 13)$$

Resultado que se puede comprobar aplicando directamente la definición de f .

Dados $w_1, w_2 \in W$, existen v_1, v_2 únicos tales que $f(v_1) = w_1$ y

$$f(v_2) = w_2$$

Tenemos que

$$f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2) = v_1 + v_2 \quad (1)$$

Pero $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = w_1 + w_2$, luego

$$f^{-1}(w_1 + w_2) = v_1 + v_2 \quad (2)$$

De (1) y (2), obtenemos que $f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$

Además $f(\alpha v_1) = \alpha f(v_1) = \alpha w_1$, luego

$$f^{-1}(\alpha w_1) = \alpha v_1 = \alpha \cdot f^{-1}(w_1)$$

Proposición 4.8.1 *Sea $f : V \longrightarrow W$ un isomorfismo. Sean B y C bases ordenadas de V y W respectivamente. Entonces*

$$(f; B, C)^{-1} = (f^{-1}; C, B)$$

En palabras: la inversa de la matriz de una aplicación lineal invertible, es la matriz de la aplicación lineal inversa.

Demostración

Tenemos que $f^{-1} \circ f = Id_V$.

$$\text{Luego } I = (Id_V; B, B) = (f^{-1} \circ f; B, B) = (f^{-1}; C, B)(f; B, C)$$

$$\text{Luego } (f; B, C)^{-1} = (f^{-1}; C, B)$$

Proceso para encontrar la matriz inversa

Hay un método genial para encontrar la matriz inversa de una matriz. Es tan interesante, pues sólo utiliza las operaciones elementales.

Comenzaremos por observar que a cada operación elemental efectuada en las líneas de una matriz, le corresponde una multiplicación por una matriz especial.

Veamos cada uno de estos tipos de operaciones en un ejemplo.

Observación

Multipliquemos por 3 la primera fila de la matriz A siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1(3)} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz la obtenemos del producto:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lema

Multiplicar por α la fila i de una matriz A , corresponde a multiplicar a la izquierda de A , por la matriz obtenida de la matriz identidad, cambiando el 1 de la i -ésima fila por α .

Observación

Permutemos la primera y la tercera fila de la matriz A siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{13}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz la obtenemos del producto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lema

Permutar la i -ésima fila de una matriz A , por la j -ésima fila de la misma matriz, corresponde a multiplicar a la izquierda de A por la matriz obtenida de la matriz identidad permutando la i -ésima fila por la j -ésima fila.

Observación

A la tercera fila de la matriz A , le vamos a sumar (-2) veces la primera fila.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz la obtenemos del producto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Lema

A la i -ésima fila de la matriz A , sumarle α veces la j -ésima fila de la misma matriz, corresponde multiplicar a la izquierda de A , por la matriz obtenida de la matriz identidad, cambiando el elemento del lugar (i, j) por α

Definición 4.8.1 Diremos que una matriz es una **matriz elemental**, si es obtenida de la matriz identidad, a través de una y sólo una

operación elemental.

Teorema 4.8.2 *Una matriz A puede ser reducida a la matriz identidad, por una sucesión finita de operaciones elementales en las líneas, si y sólo si A es invertible. Se tiene que la matriz inversa de A , es obtenida a partir de la matriz identidad, a la cual se le aplica la misma sucesión de operaciones en las líneas.*

Demostración

Es una sucesión de aplicaciones de los lemas anteriores.

Conclusión

En la práctica operamos simultáneamente con la matriz dada y la matriz identidad, a través de operaciones elementales, hasta llegar a la identidad en el lugar que estaba A . La matriz obtenida en el lugar correspondiente a la matriz identidad, es la matriz inversa de A .

Esquemáticamente tenemos:

$$(A|I) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdots \longrightarrow (I|A^{-1})$$

Ejemplo

Busquemos la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{L_{21}(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{L_{12}(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Luego

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4.9 Automorfismo y matriz de cambio de base

Introducción

Consideremos el espacio vectorial K^2 sobre K y dos bases ordenadas $B = \{(1, 1), (1, 0)\}$ y $C = \{(1, -1), (0, 1)\}$. Supongamos que tenemos una gran cantidad de vectores descompuestos según la base B y necesitamos sus componentes según la base C .

Por ejemplo, el vector $u = (1, 2)$ se descompone según la base B en $(1, 2) = 2(1, 1) + (-1)(1, 0)$ y su descomposición en la base C es $(1, 2) = 1(1, -1) + 3(0, 1)$.

Otro ejemplo sería $v = (7, 2)$ que tiene componentes 2 y 5 según la base B y 7 y 9 según la base C .

Buscamos un método práctico para obtener las componentes de los vectores con respecto a la base C , conociendo las componentes según la base B .

El enunciado de este problema en forma general es el siguiente

Problema

Sea V un K -espacio vectorial. Consideremos dos bases de V , $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $C = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Conociendo las componentes $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ del vector $v \in V$ en una base C , determinar las componentes $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de este mismo vector v en una base B .

Solución

Existe un único endomorfismo f de V que envía la base B en la base C , es decir, tal que $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2, \dots, f(v_n) = u_n$. Puesto que lleva una base en otra, f es biyectiva, es decir, f es un automorfismo.

En lenguaje de matrices: toda representación matricial de f es invertible, sea cual sea la base elegida en el dominio o en el codominio.

Sea

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= f(v_1) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i1} v_i \\ u_2 &= f(v_2) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i2} v_i \\ &\dots\dots\dots \\ u_n &= f(v_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_{in} v_i \end{aligned} \right\}$$

La matriz $P = (\alpha_{ij})$ es la matriz de f con respecto a la base B en el dominio y en el co-dominio, es decir, $P = (\alpha_{ij}) = (f; B, B)$, pero esta matriz a su vez exhibe la descomposición de cada elemento de la base C con respecto a la base B .

Sigamos resolviendo este problema.

Sea $v \in V$, $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$.

Por otra parte:

$$\begin{aligned} v &= y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \\ &= y_1 \sum_{i=1}^n \alpha_{i1} v_i + y_2 \sum_{i=1}^n \alpha_{i2} v_i + \dots + y_n \sum_{i=1}^n \alpha_{in} v_i \\ &= (y_1 \alpha_{11} + \dots + y_n \alpha_{n1}) v_1 + \dots + (y_1 \alpha_{1n} + \dots + y_n \alpha_{nn}) v_n \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \dots + \alpha_{1n}y_n \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \dots + \alpha_{2n}y_n \\ &\vdots \\ x_n &= \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \dots + \alpha_{nn}y_n \end{aligned} \right\}$$
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad X = PY; \quad Y = P^{-1}X$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$(v \text{ según } B) = (C \text{ según } B) \circ (v \text{ según } C)$$

Nota

Ejemplo

$$\begin{aligned}(1, 2) &= 1(1, 1) + 1(0, 1) \\ (1, 0) &= 1(1, 1) + (-1)(0, 1)\end{aligned}$$

Luego $(B \text{ según } B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Esta matriz nos permite efectuar el cambio de base de B a B' . Por ejemplo si consideramos el vector $v = (-2, 6)$, con respecto a la base B tenemos que sus componentes con respecto a dicha base son 3 y -5 pues $v = 3(1, 2) + (-5)(1, 0)$. Para obtener las componentes de v con respecto a la base B' basta realizar la siguiente multiplicación de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

4.10 Un morfismo cualquiera y matrices equivalentes

Problema

Tenemos un morfismo $f : V \longrightarrow W$ expresado por una matriz M , con respecto a las bases B y C . Queremos expresarlo con respecto a otras bases B' y C' .

También nos interesa estudiar la relación que hay entre estas dos matrices y en general, entre todas las matrices asociadas a este morfismo.

Cambio de base de un morfismo

Sea $f : V \longrightarrow W$ un morfismo. Sean B y B' dos bases de V y C y C' dos bases de W .

Se tiene $M = (f; B, C)$ y se necesita $M' = (f; B', C')$

Sean $P: B' \text{ según } B$; $Q: C' \text{ según } C$; $Q^{-1}: C \text{ según } C'$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad v \text{ según } B; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \quad f(v) \text{ según } C;$$

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad v \text{ según } B'; \quad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \dots \\ y'_m \end{pmatrix} \quad f(v) \text{ según } C'$$

Se tiene (1): $Y = MX$; (2): $Y' = M'X'$ (3): $X = PX'$ (4): $Y = QY'$

Reemplazando (3) y (4) en (1) se tiene: $QY' = MPX'$ de donde, multiplicando por Q^{-1} se obtiene (5): $Y' = Q^{-1}MPX'$. Comparando (5) y (2) tenemos:

$$M' = Q^{-1}MP$$

Es decir,

$$(f; B' \rightarrow C') = (C \text{ según } C')(f; B \rightarrow C)(B' \text{ según } B)$$

Entonces, de una matriz se puede llegar a la otra a través de la multiplicación por las matrices de cambio de base respectivas. Nótese que estas matrices son invertibles.

Ejemplo

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$; talque $f(x, y) = (x + y, 2x, 3y)$. Consideremos las bases $B = \{(1, 2), (1, 0)\}$ y $B' = \{(1, 1), (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 y las bases $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ y $C' = \{(0, 10), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^3

Primero encontraremos la matriz que exhibe las componentes de la base B' según la base B . En efecto tenemos:

$$(1, 1) = \frac{1}{2}(1, 2) + \frac{1}{2}(1, 0)$$

$$(0, 1) = \frac{1}{2}(1, 2) - \frac{1}{2}(1, 0)$$

$$\text{Es decir, } (B' \text{ según } B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora busquemos la matriz de f con respecto a las bases B y C :

$$f(1, 2) = (3, 2, 6) = -3(1, 0, 0) - 4(0, 1, 0) + 6(1, 1, 1)$$

$$f(1, 0) = (1, 2, 0) = 1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 0(1, 1, 1)$$

Luego tenemos la matriz $(f; B, C) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

Nos falta por encontrar la matriz de cambio de base de C a C' :

$$(1, 0, 0) = -1(0, 1, 0) + 1(1, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$$

$$(0, 1, 0) = 1(0, 1, 0) + 0(1, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$$

$$(1, 1, 1) = 0(0, 1, 0) + 1(1, 1, 0) + 1(0, 0, 1)$$

Luego $(C \text{ según } C') = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por otra parte, debemos determinar la matriz $(f; B', C')$. En efecto

$$f(1, 1) = (2, 2, 3) = 0(0, 1, 0) + 2(1, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$$

$$f(0, 1) = (1, 0, 3) = -1(0, 1, 0) + 1(1, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$$

Por lo tanto la matriz $(f; B', C') = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Luego se tiene la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(f; B' \rightarrow C') = (C \text{ según } C')(f; B \rightarrow C)(B' \text{ según } B)$$

Lo anterior nos lleva a dar una nueva definición en el espacio de las matrices. Diremos que estas matrices son equivalentes, pero, daremos una definición más general que esta.

Definición 4.10.1 Se dice que **una matriz** $M \in M_{m \times n}(K)$ es **equivalente a una matriz** $M' \in M_{m \times n}(K)$, si existe una matriz invertible $P \in M_n(K)$ y una matriz invertible $Q \in M_m(K)$, tales que:

$$M' = Q^{-1}MP$$

En el caso particular $M \in M_n(K)$, diremos que M es **semejante a una matriz** $M' \in M_n(K)$, si existe una matriz invertible $P \in M_n(K)$ tal que:

$$M' = P^{-1}MP$$

Esto ocurre, si tomamos $V = W$, $B = C$ y $B' = C'$.

Observación

”Ser equivalente a” y ”ser semejante a” son relaciones de equivalencia.

Observación

Sea f un endomorfismo en V , es decir $f : V \longrightarrow V$ lineal. Entonces todas las matrices asociadas a f son semejantes entre ellas, es decir, cada vez que cambiamos las bases, obtenemos una matriz semejante a la anterior.

4.11 Ejercicios resueltos

Ejercicio

Sean V y W dos K -espacios vectoriales. Sea $f_\alpha : V \longrightarrow W$ con $\dim V = \dim W = 3$. Estudiemos los valores de α para los cuales f_α es un isomorfismo, donde

$$(f_\alpha; B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2\alpha - 8 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 2\alpha - 8 \end{pmatrix}; \text{ con } B \text{ una base dada}$$

Solución

f_α es un isomorfismo si y sólo si $(f_\alpha; B)$ es una matriz invertible si y sólo si su matriz escalonada es la identidad. Tenemos:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2\alpha - 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2\alpha - 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_{31}(-1)} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2\alpha - 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3(\frac{1}{4})} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2\alpha - 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \longrightarrow \dots \longrightarrow \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\alpha + 4 & \frac{7}{8} & 1 & -\frac{11}{8} \end{array} \right) (*)
\end{aligned}$$

Caso $\alpha - 4 = 0$ ssi $\alpha = 4$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & 1 & -\frac{11}{8} \end{array} \right)$$

Luego la matriz A_4 no es invertible y el monomorfismo f_4 no es un isomorfismo.

Caso $\alpha - 4 \neq 0$ ssi $\alpha \neq 4$

Reemplazando en (*)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{8(-\alpha+4)} & \frac{1}{-\alpha+4} & -\frac{11}{8(-\alpha+4)} \end{array} \right)$$

En este caso:

$$A_\alpha = \left(\begin{array}{ccc} \frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{8(-\alpha+4)} & \frac{1}{-\alpha+4} & -\frac{11}{8(-\alpha+4)} \end{array} \right)$$

Esta matriz A_α es invertible, luego f_α es un isomorfismo, para $\alpha \neq 4$

Ejercicio

Sea $f : K^2 \longrightarrow K^2$. Dada la matriz $(f; B, C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; Determinemos $f(x, y)$ y $f^{-1}(x, y)$, donde $B = \{(1, 2), (2, 0)\}$ y $C = \{(1, 1), (0, 3)\}$

Solución

Comencemos por escribir (x, y) en función de B . Tenemos:

$$(x, y) = \frac{y}{2}(1, 2) + \frac{2x-y}{4}(2, 0)$$

$$\begin{aligned} f(1, 2) &= 1(1, 1) + 2(0, 3) = (1, 7) \\ f(2, 0) &= 1(1, 1) + -1(0, 3) = (1, -2) \end{aligned}$$

De donde

$$f(x, y) = \frac{y}{2}f(1, 2) + (\frac{2x-y}{4})f(2, 0) = \frac{y}{2}(1, 7) + (\frac{2x-y}{4})(1, -2)$$

Luego

$$f(x, y) = (\frac{x}{2} + \frac{y}{4}, -x + 4y)$$

Busquemos $(f^{-1}; C, B) = (f; B, C)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(1, 1) &= \frac{1}{3}(1, 2) + \frac{2}{3}(2, 0) = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}) \\ f^{-1}(0, 3) &= \frac{1}{3}(1, 2) - \frac{1}{3}(2, 0) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \end{aligned}$$

$$f^{-1}(x, y) = xf^{-1}(1, 1) + (\frac{-x+y}{3})f^{-1}(0, 3) = x(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}) + (\frac{-x+y}{3})(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

Luego

$$f^{-1}(x, y) = (\frac{16}{9}x - \frac{1}{9}y, \frac{4}{9}x + \frac{2}{9}y)$$

Ejercicio

Determinemos, si existen, las matrices en $M_n(K)$ que son simétricas y antisimétricas a la vez.

Solución

Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Recordemos que A es simétrica ssi $a_{ij} = a_{ji}$ y que A es antisimétrica ssi $a_{ij} = -a_{ji}$. Como A es simétrica y antisimétrica a la vez, entonces se tiene que $a_{ii} = -a_{ii}$, luego la diagonal consta de ceros.

Además $a_{ji} = -a_{ji}$, luego $a_{ji} = 0, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Luego la matriz nula es la única matriz que es simétrica y antisimétrica a la vez.

Ejercicio

En $M_2(K)$, determinemos las matrices $A^2, A^3, A^4, \dots, A^n, n \in \mathbb{N}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

(a) Caso n par

$$\text{Sea } n = 2; A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Hipótesis de inducción: $A^{2n} = I$. Por demostrar $A^{2n+2} = I$

En efecto, $A^{2n+2} = A^{2n} A^2 = I \cdot I = I$. Luego $A^{2n} = I, \forall n \in \mathbb{N}$

(b) Caso n impar $n = 1 : A^1 = A$,

Hipótesis de inducción $A^{2n+1} = A$. Por demostrar $A^{2n+3} = A$

$A^{2n+3} = A^{2n+1} \cdot A^2 = A \cdot I = A$. Luego $A^{2n+1} = A, \forall n \in \mathbb{N}$

Ejercicio

Determinemos $A^2, A^3, A^4, \dots, A^n$, $n \in \mathbb{N}$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix}$$

Luego "pienso"

Hipótesis de inducción

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Por demostrar $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}$

En efecto:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^{n-1} & 2 \cdot 2^{n-1} \\ 2 \cdot 2^{n-1} & 2 \cdot 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

Luego

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio

Sea V un K -espacio vectorial. Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V .
Sea f un endomorfismo de V definido por

Encontremos $A = (f; B)$, A^2, A^3, A^4 y hagamos una hipótesis sobre el menor número m tal que $A^m = 0$

Tenemos que

$$\text{Luego} \quad (f; B, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para $n = 3$, tenemos $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^3 = 0$

Demuestre, por inducción, tal afirmación

Ejercicio

Sean $A, B \in M_n(K)$. Recordando que B es idempotente ssi $B^2 = B$. Demuestre

1. B es idempotente ssi $I - B$ es idempotente.
2. Si $B^2 - B + I = 0$ entonces B es invertible.
3. Si $BA = AB$, entonces $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Solución

1. Supongamos que B es idempotente. Entonces

$$(I - B)^2 = (I - B)(I - B) = I^2 - IB - BI + B^2 = I^2 - 2B + B^2 = I^2 - 2B + B = I - B, \text{ luego } I - B \text{ es idempotente.}$$

Supongamos que $I - B$ es idempotente. Entonces:

$$\begin{aligned} (I - B)^2 = I - B &\implies I^2 - IB - BI + B^2 = I - B \\ &\implies I - 2B + B^2 = I - B \\ &\implies B^2 - B = 0 \\ &\implies B^2 = B \end{aligned}$$

Es decir B es idempotente.

2. $B^2 - B + I = 0 \implies B - B^2 = I \implies B(I - B) = I$. Luego B^{-1} existe y $B^{-1} = I - B$
3. Supongamos que $BA = AB$. Luego

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Ejercicio

En $M_2(K)$, consideremos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Busquemos A^{-1} y escribamos esta última como el producto de matrices elementales.

Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{21}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2(\frac{-1}{2})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2 & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Luego

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Escribámosla como producto de matrices elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

A^{-1} quedó escrita como producto de 3 matrices elementales.

Ejercicio

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Descompongamos A en una suma conveniente de matrices y utilicemos el binomio de Newton para encontrar A^{50}

Solución

Observemos que A puede escribirse como:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I + B, \text{ donde } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Recordemos que A es nilpotente de grado n ssi n es el menor entero tal que $A^n = 0$

Luego $B^3 = 0$. Además todas las potencias de B conmutan con las potencias de I , es decir, con I , luego es aplicable a esta situación el Teorema del Binomio de Newton

$$\begin{aligned} A^{50} &= (I + B)^{50} \\ &= \binom{50}{0} I^{50-0} B^0 + \binom{50}{1} I^{50-1} B^1 + \dots + \binom{50}{50} I^{50-50} B^{50} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} A^{50} &= \binom{50}{0} B^0 + \binom{50}{1} B^1 + \binom{50}{2} B^2 \\ &= I + 50 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 1.225 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego

$$A^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 100 & 5.000 \\ 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

Sea $r_\alpha : K^2 \longrightarrow K^2$ la rotación en un ángulo α , tal que cuya matriz asociada es

$$A = (r_\alpha; C, C) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

donde C es la base canónica de K^2 .

Busquemos A^{63} y A^{-1}

Solución

$$\begin{aligned} A^{63} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{63} = \begin{pmatrix} \cos \frac{5\pi}{4} & -\sin \frac{5\pi}{4} \\ \sin \frac{5\pi}{4} & \cos \frac{5\pi}{4} \end{pmatrix}^{63} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{63 \cdot 5\pi}{4} & -\sin \frac{63 \cdot 5\pi}{4} \\ \sin \frac{63 \cdot 5\pi}{4} & \cos \frac{63 \cdot 5\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Utilizamos que $\cos \frac{63 \cdot 5\pi}{4} = \cos \frac{315\pi}{4} = \cos \frac{(39 \cdot 8 + 3)\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Idem para $\sin \frac{63 \cdot 5\pi}{4}$

4.12 Ejercicios propuestos

1. Sea $f : K^3 \longrightarrow K^2$. Encuentre la matriz asociada a f según las bases $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ de K^3 y $C = \{(1, 0), (1, 1)\}$ de K^2 , en los siguientes casos:

(a) $f(x, y, z) = (x + 2y, x)$

(b) $f(x, y, z) = (3z, x - y)$

2. Sea f un endomorfismo de K^2 , cuya matriz con respecto a la base $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ es $(f; B, B) = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determine la matriz de f con respecto a la base canónica de K^2 .

3. Sean $f, g : K^2 \longrightarrow K^3$. Sabiendo que $f(x, y) = (3x, x + y, y)$ y que la matriz de $f + g$ con respecto a las bases canónicas de K^2 y K^3 es $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Determine $g(x, y)$ y la matriz de g con respecto a esas bases.

4. Sea $f : K^2 \longrightarrow K^2$ y $g : K^2 \longrightarrow K^2$ dos aplicaciones lineales tal que $g(x, y) = (x + 2y, 3y)$ y tal que $(f; B, C) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ donde $C = \{(1, 1), (0, -1)\}$ y $D = \{(-1, -1), (1, 0)\}$

- (a) Encuentre $(g; C, D)$ y $(g \circ f; B, D)$
 (b) Sabiendo que las componentes de $v \in \mathbb{R}^3$, según la base B , son -1 y 2, encuentre las componentes de $f(v)$ según la base C

5. Si $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $AB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determine B^2

6. Determine todas las matrices cuadradas de orden 3 que conmutan con la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

7. Para cada número real α , considere la matriz

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

- (a) Demuestre que $M_\alpha M_\beta = M_{\alpha+\beta}$
 (b) Calcule $M_{-\alpha}$

8. Estudie para qué valores de α la siguiente familia de matrices, M_α ,

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 + \alpha & 2\alpha - 3 \\ 1 & \alpha & 2\alpha - 3 \end{pmatrix}$$

es invertible. En caso que sea invertible busque su inversa.

9. Sea $A \in M_n(K)$ tal que $A^2 - 2A - 3I = 0$. Busque A^{-1}

10. Busque todas las matrices $A \in M_2(K)$ tal que $A^2 = I$

-
11. Determine si es posible $x, y \in \mathbb{R}$, de manera que la matriz $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ sea ortogonal.
12. Demuestre que el producto de dos matrices ortogonales es ortogonal.
13. Sea $V = M_n(K)$. Estudie cuáles de los siguientes subconjuntos de V , son subespacios vectoriales de V .
- (a) $S = \{A \in V; A \text{ es invertible}\}$
 - (b) $T = \{A \in V; AB = BA, B \text{ una matriz fija}\}$
 - (c) $U = \{A \in V; A \text{ es idempotente}\}$
 - (d) $W = \{A \in V; A \text{ es simétrica}\}$
 - (e) $X = \{A \in V; A \text{ es antisimétrica}\}$
 - (f) $Y = \{A \in V; A \text{ es ortogonal}\}$

Capítulo 5

Determinantes

5.1 Determinantes de matrices de $M_2(K)$

Nos interesa que comiences por saber que la palabra determinante se refiere a un número que determina cuándo un sistema de ecuaciones lineales tiene solución.

Comencemos por un sistema de ecuaciones lineales de 2 ecuaciones linealmente independientes y 2 incógnitas.

Motivación

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales l.i. siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} (1) : \quad ax + by = \alpha \\ (2) : \quad cx + dy = \beta \end{array} \right\}$$

Hagamos las operaciones siguientes: $d \cdot (1) - b \cdot (2)$: $adx - bcx = \alpha d - \beta b$

Luego: $(ad - bc)x = \alpha d - \beta b$

Si $ad - bc = 0$ y $\alpha d - \beta b = 0$, entonces el sistema es l.d.

Si $ad - bc = 0$ y $\alpha d - \beta b \neq 0$, entonces no existe solución para el sistema.

Si $(ad - bc) \neq 0$, entonces $x = \frac{\alpha d - \beta b}{ad - bc}$.

Hagamos ahora las operaciones siguientes $c \cdot (1) - a \cdot (2)$: $(bc - ad)y = \alpha c - \beta a$ O bien $(ad - bc)y = \beta a - \alpha c$

Si $ad - bc \neq 0$, tenemos $y = \frac{\beta a - \alpha c}{ad - bc}$

Tenemos entonces que el sistema tiene solución si y sólo si $ad - bc \neq 0$. Luego la cantidad $ad - bc$ determina si el sistema tiene solución.

El sistema puede ser escrito en la forma matricial siguiente:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Con respecto a la matriz de los coeficientes tenemos la notación siguiente:

$$\text{Notación} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =: ad - bc$$

$$\text{Entonces } x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}; y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Definición 5.1.1 Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz con sus elementos en un cuerpo K . El **determinante** de A , denotado $|A|$, es el número de K ,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =: ad - bc$$

Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4$$

Nota

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A_1 = (a \ b)$, $A_2 = (c \ d)$. Podemos escribir $D(A)$, $\det(A)$ o bien $D \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$. Es decir, podemos considerar el determinante como función de la matriz A o como una función de las filas de la matriz A .

Propiedades(1) y (2)

$$1. \quad \begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$2. \quad \begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Las mismas propiedades para la segunda fila.

La demostración es trivial. Sigue de la definición.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (5 - 6) = -4$$

Ejercicio

Calculemos el valor de $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$

Solución

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (3 - 3) = 0$$

Observación

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}$$

Propiedad (3)

Si dos filas son iguales, entonces el determinante de la matriz es nulo.

Demostración

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

Propiedad (4)

El determinante de la matriz identidad es 1, es decir,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Propiedad (5)

Si se suma un múltiplo de una fila a la otra fila, el valor del determinante no cambia, es decir,

$$\begin{vmatrix} a+tc & b+td \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Lo mismo ocurre para la segunda fila.

Ejercicio

$$\begin{vmatrix} 71 & 72 \\ 74 & 75 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_{21}(-1)} \begin{vmatrix} 71 & 72 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = \\ = 3 \cdot \begin{vmatrix} 71 & 72 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(71 - 72) = -3$$

Propiedad(6)

Si se intercambian las dos filas, entonces el determinante cambia de signo, es decir,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

Propiedad(7)

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Demostración

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Propiedad(8)

Los vectores $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes si y sólo si el $\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es nulo.

Demostración

Sea $(a \ b) = (\alpha c \ \alpha d)$. Luego

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha c & \alpha d \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha \cdot 0 = 0$$

Recíprocamente tenemos

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, entonces $ad - bc = 0$, es decir, $ad = bc$.

Supongamos $c \neq 0$ y $d \neq 0$, luego $a = \frac{b}{d} \cdot c$. Luego

$$(a \ b) = \left(\frac{b}{d} \cdot c \ \ b \cdot \frac{d}{d}\right) = \left(\frac{b}{d} \cdot c \ \ \frac{b}{d} \cdot d\right) = \frac{b}{d}(c \ d)$$

Luego son linealmente dependientes.

Supongamos $d = 0$. Luego $b = 0$ o $c = 0$.

i) Si $b = 0$ y $c \neq 0$, entonces $(a \ b) = (a \ 0) = \frac{a}{c}(c \ 0) = \frac{a}{c}(c \ d)$. Luego el vector $(a \ b)$ es linealmente dependiente con el vector $(c \ d)$

ii) Si $b \neq 0$ y $c = 0$, entonces

$$\{(a \ b), (c \ d)\} = \{(a \ b), (0 \ 0)\}$$

el cual es un conjunto l.d. por tener el $\vec{0}$.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

Propiedad(9)

Todas las propiedades anteriores son válidas para las columnas.

Propiedad(10)

$$\text{Det}(A \cdot B) = (\text{Det}A) \cdot (\text{Det}B)$$

Demostración

La demostración de esta proposición es un simple cálculo.

5.2 Determinantes de matrices de $M_3(K)$ **Motivación**

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left. \begin{array}{lcl} (1) : & ax + by + cz & = \alpha \\ (2) : & dx + ey + fz & = \beta \\ (3) : & gx + hy + iz & = \gamma \end{array} \right\}$$

Hagamos las operaciones siguientes:

$(ei-hf)(1)+(ch-ib)(2)+(bf-ec)(3)$:

$$\left. \begin{array}{lcl} (aei - ahf)x + (bei - bhf)y + (cei - chf)z & = & \alpha ei - \alpha hf \\ (dch - dib)x + (ech - eib)y + (fch - fib)z & = & \beta ch - \beta ib \\ (gbf - gec)x + (hbf - hec)y + (ibf - iec)z & = & \gamma bf - \gamma ec \end{array} \right\}$$

Sumando las tres ecuaciones, tenemos:

$$[a(ei-hf)+d(ch-ib)+g(bf-ec)]x = \alpha(ei-hf)+\beta(ch-ib)+\gamma(bf-ec)$$

Observemos que el número que multiplica a x se puede escribir como sigue:

$$a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

Este tiene solución ssi el coeficiente que acompaña a x es distinto de 0. Luego determina si el sistema tiene o no solución, de ahí su nombre.

En forma matricial el sistema se escribe como sigue:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

diremos que el determinante de la matriz de los coeficientes, denotado:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

desarrollado por subdeterminante por la primera columna es:

$$a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

Los determinantes que acompañan a las letras a , d y g son llamados subdeterminantes de a , d y g . Estos determinantes se obtienen de la matriz inicial quitando la fila y la columna del elemento respectivo.

Definición 5.2.1 Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se define su determinante de acuerdo con la fórmula conocida como **desarrollo por la primera fila**.

$$\text{Det}(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Definición 5.2.2 Llamamos **subdeterminante** de a_{ij} , denotado $S(a_{ij})$ al determinante obtenido de A al eliminar la fila i y la columna j .

Utilizando esta notación, tenemos:

$$\text{Det}(A) = a_{11}S(a_{11}) - a_{12}S(a_{12}) + a_{13}S(a_{13})$$

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Calculemos el determinante de A .

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -8$$

Nota

El determinante de una matriz de 3×3 se puede escribir como

$$D(A) = \text{Det}(A) = \text{Det} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

que para mayor comodidad lo denotaremos $D(A_1, A_2, A_3)$, es decir, el determinante en función de las filas.

Este mismo número puede ser obtenido a partir de la segunda fila, llamado desarrollo del determinante por la segunda fila y éste es:

$$\text{Det}(A) = -a_{21}S(a_{21}) + a_{22}S(a_{22}) - a_{23}S(a_{23})$$

También se puede obtener este mismo número, haciendo el desarrollo por la tercera fila de la manera siguiente:

$$\text{Det}(A) = a_{31}S(a_{31}) - a_{32}S(a_{32}) + a_{33}S(a_{33})$$

También por la primera columna:

$$\text{Det}(A) = a_{11}S(a_{11}) - a_{21}S(a_{21}) + a_{31}S(a_{31})$$

Idem para la segunda y tercera columna.

La segunda columna comienza con signo negativo y la tercera columna con signo positivo.

Con respecto a la propiedad 6, quiero que quede claro que cada vez que se intercambian dos filas de una matriz, el determinante cambia de signo.

(SOLAMENTE matrices de 3×3) Se copian las dos primeras columnas a la derecha o bien las dos primeras filas abajo de la matriz dada:

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right|$$

Cantidad que corresponde al determinante de la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se define el subdeterminante de a_{ij} , denotado $S(a_{ij})$, como el determinante obtenido de A al eliminar la fila i y la columna j .

El determinante de una matriz A de $M_n(K)$, se define en términos de determinantes de matrices de $M_{n-1}(K)$.

Se define:

$$\text{Det}(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}S(a_{i1}) + (-1)^{i+2}a_{i2}S(a_{i2}) + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}S(a_{in})$$

Esta definición es conocida como **el desarrollo del determinante por la fila i** , $i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq n$.

Este determinante se puede escribir como

$$\det(A) = \det(A_1, A_2, \dots, A_n),$$

donde A_i es la i -ésima fila. $(-1)^{i+j}S(a_{ij})$ se llama el **cofactor** de a_{ij} .

Propiedad (1)

Si la fila A_j es igual a la suma de dos vectores fila, $A_j = C + C'$, entonces

$$\det(A_1, \dots, C+C', \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, C, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, C', \dots, A_n)$$

Propiedad (2)

$$\det(A_1, \dots, tA_j, \dots, A_n) = t \cdot \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_n), \quad \forall t \in K$$

Propiedad (3)

Si hay dos filas iguales, entonces el determinante es nulo.

Propiedad (4)

El determinante de la matriz identidad es 1.

Si se suma un múltiplo de una fila a otra fila, el valor del determinante no cambia.

Si se intercambian dos filas, el determinante cambia de signo.

$$Det(A^t) = Det(A)$$

Dos filas son linealmente dependientes si y sólo si el determinante de la matriz es nulo.

Todas las propiedades anteriores son válidas para las columnas.

Sean $A, B \in M_n(K)$. Entonces

$$Det(A \cdot B) = Det(A) \cdot Det(B)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\text{Det}(A) = (-1)^{1+j}a_{1j}S(a_{1j}) + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}S(a_{nj})$$

(llamado desarrollo del determinante por la j -ésima columna).

Teorema 5.3.2 Sea $A \in M_n(K)$ una matriz invertible. Entonces

$$\text{Det}(A^{-1}) = (\text{Det}A)^{-1}$$

Demostración

$$1 = \text{Det}(I_n) = \text{Det}(A \cdot A^{-1}) = \text{Det}A \cdot \text{Det}(A^{-1})$$

$$\text{Luego } (\text{Det}A)^{-1} = \text{Det}(A^{-1})$$

5.4 Interpretación geométrica del determinante

Si en el plano cartesiano consideramos los vectores u y v , entonces el área del paralelogramo que tiene por lados estos vectores corresponde a $|\text{Det}(u, v)|$, es decir, el valor absoluto de $\text{Det}(u, v)$, donde u y v son considerados como vectores filas.

Ejemplo

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = |0 - 6| = |-6| = 6$$

Si en un sistema cartesiano de 3 coordenadas, consideramos los vectores u, v y w , el volumen del paralelepípedo rectangular de lados u, v y w es

$$\text{Vol}(u, v, w) = |\text{Det}(u, v, w)|$$

donde u, v y w son considerados como vectores filas.

5.5 Matriz adjunta

En el capítulo anterior observaste que no toda matriz tiene matriz inversa.

Lo interesante es, que toda matriz A , tiene una matriz asociada a ella, que siempre existe, es decir, que siempre "va junto a A ", es por esto llamada **la matriz adjunta de A** .

Comencemos por el Lema siguiente:

Lema

Sea $A \in M_n(K)$

Si A es invertible, entonces $\text{Det}(A) \neq 0$

Demostración

$$1 = \text{Det}(I_n) = \text{Det}(A \cdot A^{-1}) = \text{Det}A \cdot \text{Det}A^{-1}.$$

Luego $\text{Det}A \neq 0$.

Nota

Ahora quisiéramos saber si el recíproco es verdadero, es decir, si $\text{Det}A \neq 0$, entonces A es invertible. Para esto debemos construir la inversa, en caso que exista.

Veamos qué ocurre en $M_2(K)$.

Lema

Sea $A \in M_2(K)$. Entonces siempre existe $B \in M_2(K)$ tal que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}$$

Demostración

En efecto, sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, consideremos $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ y se tiene,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}$$

Lema

Sea $A \in M_3(K)$. Entonces, siempre existe $B \in M_3(K)$ tal que

$$A \cdot B = (\det A) \cdot I_3$$

Demostración

En efecto, sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

Tomando $B = \begin{pmatrix} S(a_{11}) & -S(a_{21}) & S(a_{31}) \\ -S(a_{12}) & S(a_{22}) & -S(a_{32}) \\ S(a_{13}) & -S(a_{23}) & S(a_{33}) \end{pmatrix}$

Tenemos

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S(a_{11}) & -S(a_{21}) & S(a_{31}) \\ -S(a_{12}) & S(a_{22}) & -S(a_{32}) \\ S(a_{13}) & -S(a_{23}) & S(a_{33}) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Teorema 5.5.1 Si $A \in M_n(K)$, entonces siempre existe $B \in M_n(K)$ tal que $A \cdot B = |A| \cdot I_n$

Demostración

La demostración consiste en probar que si $A = (a_{i,j})$ entonces

$$B = ((-1)^{i+j} S(a_{ji}))$$

cumple las condiciones del teorema.

Esta demostración no la haremos pues, escapa a los objetivos del curso.

Definición 5.5.1 Esta matriz B es llamada, **la matriz adjunta de A** , denotada \tilde{A} .

Es decir la adjunta de una matriz A es la matriz transpuesta de la matriz de los cofactores de la matriz A .

Corolario 5.5.2 Si $A \in M_n(K)$ tal que $\text{Det}A \neq 0$, entonces A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}A} \cdot \tilde{A}$$

Nota

Ahora tenemos dos maneras de encontrar la matriz inversa, cuando ésta existe. Obviamente que el método más seguro es el escalonamiento, pues en este nuevo método hay muchos determinantes en juego y hay que estar pensando en A y en A^t al mismo tiempo.

5.6 Determinante de un endomorfismo

Una propiedad genial que cumplen los determinantes, la tienes en el siguiente lema:

Lema

Sea V un K -espacio vectorial, sea $f \in \text{End}(V)$. Sea $M = (f; B, B)$ y $M' = (f; C, C)$ con B y C ciertas bases de V . Entonces

$$\text{Det}M = \text{Det}M'$$

Demostración

Sea P la matriz de cambio de base que exhibe la base C según la base B . Entonces

$$(f; C, C) = P^{-1} \cdot (f; B, B) \cdot P$$

Luego

$$M' = P^{-1} \cdot M \cdot P$$

Tenemos

$$\text{Det}M' = \text{Det}(P^{-1}) \cdot \text{Det}M \cdot \text{Det}P = (\text{Det}P)^{-1} \cdot \text{Det}M \cdot \text{Det}P = \text{Det}M$$

Observación

¿Te das cuenta, que nuevamente hemos encontrado un invariante?

Si, pues, si cambiamos una base en la representación matricial de un endomorfismo, entonces, seguimos teniendo el mismo determinante.

Es obvia la siguiente definición:

Definición 5.6.1 Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita. Para todo endomorfismo $f \in \text{End}(V)$, se llama **determinante de f** , denotado $\text{Det}(f)$, el determinante de la matriz de f en una base cualquiera de V .

Observación

El valor del determinante de un endomorfismo nos indica si éste es o no un automorfismo.

Esta caracterización la tenemos en el siguiente lema:

Lema

Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita. Entonces

$$f \text{ es un automorfismo de } V \text{ ssi } \det(f) \neq 0$$

Demostración

f es un automorfismo ssi f es invertible ssi $(f; B, B)$ es invertible $\forall B$, base de V ssi $\det(f; B, B) \neq 0$, $\forall B$, base de V ssi $\det(f) \neq 0$

Nota

Equivalentemente:

$$f \text{ no es un automorfismo ssi } \det(f) = 0$$

5.7 Ejercicios resueltos**Ejercicio**

Resolvamos el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 6^2 & 7^2 & 8^2 & 9^2 \\ 10^2 & 11^2 & 12^2 & 13^2 \\ 14^2 & 15^2 & 16^2 & 17^2 \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 6^2 & 7^2 & 8^2 & 9^2 \\ 10^2 & 11^2 & 12^2 & 13^2 \\ 14^2 & 15^2 & 16^2 & 17^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 6^2 - 2^2 & 7^2 - 3^2 & 8^2 - 4^2 & 9^2 - 5^2 \\ 10^2 - 2^2 & 11^2 - 3^2 & 12^2 - 4^2 & 13^2 - 5^2 \\ 14^2 - 2^2 & 15^2 - 3^2 & 16^2 - 4^2 & 17^2 - 5^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 4 \cdot 8 & 4 \cdot 10 & 4 \cdot 12 & 4 \cdot 14 \\ 8 \cdot 12 & 8 \cdot 14 & 8 \cdot 16 & 8 \cdot 18 \\ 12 \cdot 16 & 12 \cdot 18 & 12 \cdot 20 & 12 \cdot 22 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 2^3 \begin{vmatrix} 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = \\
&= 2^{10} \cdot 3 \begin{vmatrix} 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Ejercicio

Calculemos el determinante de Vandermonde de 3×3 siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_{21}(-1) \\ = \\ L_{31}(-1) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} \begin{matrix} L_{21}(-1) \\ = \end{matrix} \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 0 & c-b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= (b-a)(c-a)(c-b)
\end{aligned}$$

Ejercicio

Demostremos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

Solución

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_{32}(-1) \\ = \\ C_{12}(-1) \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a-b & b & c-b \\ a^3-b^3 & b^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} = \\ & = (a-b)(c-b) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ a^2+ab+b^2 & b^3 & c^2+bc+b^2 \end{vmatrix} = \\ & = (a-b)(c-b) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ a^2-c^2+b(a-c) & b^3 & c^2+bc+b^2 \end{vmatrix} = \\ & = (a-b)(c-b)(a-c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ a+b+c & b^3 & c^2+bc+b^2 \end{vmatrix} = \\ & = (a-b)(c-b)(a-c)(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} = \\ & = (a-b)(c-b)(a-c)(a+b+c) \end{aligned}$$

Ejercicio

Si $B \in M_n(K)$ y $\det B = 5$ entonces $\det(2B) = 2^n \cdot \det B = 2^n \cdot 5$

Ejercicio

Calculemos el determinante de la matriz de rotación en un ángulo α

Solución

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Ejercicio

Busquemos los valores de $k \in K$, de manera que

$$\begin{vmatrix} k+3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ k^2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -6$$

Solución

$$\begin{vmatrix} k+3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ k^2 & 3 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_{23}(1) \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} k+3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ k^2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_{21}(-1) \\ = \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} k+3 & -1 & -2 \\ -k & 0 & 3 \\ k^2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k & 3 \\ k^2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_{12}(1) \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} k^2 - k & 0 \\ k^2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$-3(k^2 - k)$$

Luego $-3(k^2 - k) = -6$, luego $k^2 - k - 2 = 0$, luego $(k-2)(k+1) = 0$
Entonces $k = 2$ o $k = -1$

Ejercicio

Resolvamos el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 & x \\ 1 & -2 & y \\ 2 & -4 & z \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 & x \\ 1 & -2 & y \\ 2 & -4 & z \end{vmatrix} \stackrel{C_{21}(2)}{=} \begin{vmatrix} 3 & 0 & x \\ 1 & 0 & y \\ 2 & 0 & z \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio

Demostremos que:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (y-z)(z-x)(x-y)(yz+xz+xy)$$

Solución

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} \stackrel{C_{13}(-1)}{=} \begin{vmatrix} x-z & y-z & z \\ x^2-z^2 & y^2-z^2 & z^2 \\ yz-xy & xz-xy & xy \end{vmatrix} = \\ & = (x-z)(y-z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & z \\ x+z & y+z & z^2 \\ -y & -x & xy \end{vmatrix} = \\ & \stackrel{C_{21}(-1)}{=} \stackrel{C_{31}(-z)}{(x-z)(y-z)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+z & y-x & -xz \\ -y & y-x & xy+yz \end{vmatrix} = \\ & = (x-z)(y-z)(y-x) \begin{vmatrix} 1 & -xz \\ 1 & xy+yz \end{vmatrix} = \\ & = (x-z)(y-z)(y-x) \begin{vmatrix} 1 & -xz \\ 0 & xy+yz+xz \end{vmatrix} = \\ & = (y-z)(z-x)(x-y)(yz+xz+xy) \end{aligned}$$

Ejercicio

Calculemos en tres pasos el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z+t \\ 1 & y & z & x+t \\ 1 & z & t & x+y \\ 1 & t & x & y+z \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z+t \\ 1 & y & z & x+t \\ 1 & z & t & x+y \\ 1 & t & x & y+z \end{vmatrix} \begin{matrix} L_{21}(-1) \\ = \\ L_{31}(-1) \\ L_{41}(-1) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z+t \\ 0 & y-x & z-y & x-z \\ 0 & z-x & t-y & x+y-z-t \\ 0 & t-x & x-y & y-t \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y-x & z-y & x-z \\ z-x & t-y & x+y-z-t \\ t-x & x-y & y-t \end{vmatrix} \begin{matrix} C_{31}(1) \\ = \\ C_{32}(1) \end{matrix} \begin{vmatrix} y-x & z-y & 0 \\ z-x & t-y & 0 \\ t-x & x-y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

!!Trivial!!

Ejercicio

Demostremos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 2x & \cos 3x & \cos 4x \end{vmatrix} = 0$$

Solución

Recordemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta\end{aligned}$$

Reemplazando en la última identidad $\alpha + \beta = 3x$ y $\alpha - \beta = x$, es decir, $\alpha = 2x$ y $\beta = x$, tenemos:

$$1. \cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cos x$$

Análogamente se obtienen:

$$2. \cos 4x + \cos 2x = 2 \cos 3x \cos x$$

$$3. (\cos 2x) + 1 = 2 \cos^2 x$$

Entonces

$$\begin{aligned}& \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 2x & \cos 3x & \cos 4x \end{vmatrix} \begin{matrix} L_{31}(1) \\ = \\ (1)(2)(3) \end{matrix} \\&= \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ 2 \cos^2 x & 2 \cos x \cos 2x & 2 \cos x \cos 3x \end{vmatrix} = \\&= 2 \cos x \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x \end{vmatrix} = 2 \cos x \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Ejercicio

Demostremos que

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \quad \text{con } abc \neq 0$$

Solución

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1(a) \\ = \\ L_2(b) \\ L_3(c) \end{matrix} \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

Ejercicio

Calculemos el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & 1 & x & x^2 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & 1 & x & x^2 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_{21}(-x^3) \\ = \\ L_{31}(-x^2) \\ L_{41}(-x) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1-x^4 & x-x^5 & x^2-x^6 \\ 0 & 0 & 1-x^4 & x-x^5 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x^4 \end{vmatrix} = \\ = (1-x^4)^3$$

Ejercicio

Que el ejercicio anterior nos sirva de inspiración para resolver el determinante de $(n+1) \times (n+1)$ siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^n \\ x^n & 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & x^n & 1 & x & \cdots & x^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x^2 & x^3 & x^4 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Solución

Con las operaciones $L_{21}(-x^n), L_{31}(-x^{n-1}), \dots, L_{n+1,1}(-x)$ tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^n \\ 0 & 1-x^{n+1} & x-x^{n+2} & x^2-x^{n+3} & \cdots & x^{n-1}-x^{2n} \\ 0 & 0 & 1-x^{n+1} & x-x^{n+2} & \cdots & x^{n-2}-x^{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x^{n+1} \end{vmatrix} = (1-x^{n+1})^n$$

Ejercicio

Resolvamos el determinante de $n \times n$ siguiente:

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x & x+n \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{aligned} & L_{21}(-1) \\ & L_{31}(-1) \\ & = \\ & \vdots \\ & L_{n1}(-1) \end{aligned} \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x & x \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} =$$

$$* \begin{vmatrix} 1+x\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} & x & x & \cdots & x & x \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = (1+x\sum_{k=1}^n \frac{1}{k})n!$$

Donde $*$ = $C_{12}\frac{1}{2}C_{13}\frac{1}{3}\cdots C_{1n}\frac{1}{n}$

Ejercicio

Resolvamos el determinante de $n \times n$ siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} L_{21}(-1) \\ L_{31}(-1) \\ = \\ \vdots \\ L_{n-11}(-1) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ & (a) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (b) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ & = (n-1)(-1)^{n-1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ & = (n-1)(-1)^n(-1)^{n-2} = (n-1)(-1)^{2n-2} = n-1 \end{aligned}$$

(a): desarrollamos el determinante por la primera columna.

(b) A la columna 1 se le suman las demás columnas

Ejercicio

Resolvamos el determinante de $n \times n$ siguiente:

$$\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución

Observando los casos $n = 3, 4, 5$ podrás conjeturar que:

$$\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-3} = (-1)^{\frac{n^2+3n}{2}}$$

lo cual se demuestra fácilmente por inducción.

5.8 Ejercicios propuestos

1. Encuentre el valor del determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 71 & 72 & 73 \\ 74 & 75 & 76 \\ 77 & 78 & 79 \end{vmatrix}$$

2. Encuentre el valor del determinante siguiente:

Capítulo 6

Diagonalización

6.1 Introducción

Tú sabes que una aplicación lineal está determinada por su comportamiento en una base. Quisiéramos saber si existirá una base tal que la imagen de cada vector de ella, sea colineal con él mismo. Es decir, si V es un K -espacio vectorial y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo ¿Existirá $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V , tal que

$$f(v_i) = \lambda_i v_i, \quad i = 1, \dots, n \quad ?$$

Esta sería una manera más fácil, más cómoda de trabajar con un endomorfismo. Por ejemplo, sería ¡trivial! conocer el valor de

$$f^n(v_i), \forall n \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n$$

Seguramente recuerdas que una aplicación lineal tiene una familia de matrices asociadas. Buscamos, entonces, la representación matricial más simple posible. Posiblemente concordamos en decir que ésta sería una matriz diagonal.

En este capítulo veremos las condiciones para que una aplicación lineal, tenga asociada una matriz diagonal. También aprenderemos a encontrar tal matriz, en caso que ésta exista.

Las matrices diagonales tienen propiedades muy agradables. Por ejemplo, ellas conmutan entre sí. Calcular el determinante de una matriz diagonal es ¡Trivial!, pues es el producto de los elementos de la diagonal. También, es fácil conocer las potencias de una matriz diagonal. Veámoslo en la siguiente observación.

Observación

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 7^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 7^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 7^3 \end{pmatrix}$$

Hipótesis de inducción

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix}$$

Demostremos que

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 5^{n+1} & 0 \\ 0 & 7^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5^{n+1} & 0 \\ 0 & 7^{n+1} \end{pmatrix}$$

Luego para todo número natural n , tenemos

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix}$$

Lema

Para todo k , número natural, tenemos

$$\left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{array} \right)^k = \left(\begin{array}{cccccc} a_{11}^k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^k \end{array} \right)$$

La demostración se hace por inducción sobre k .

Pregunta

Dada una aplicación lineal f ¿Habrá alguna matriz diagonal asociada a f ?

Veamos algunos ejemplos

Observación

Sea $f : K^2 \longrightarrow K^2$; $f(x, y) = (3y, 3x)$

Buscamos una base $B = \{v_1, v_2\}$ tal que

$$(f; B, B) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

En este caso

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0 \cdot v_2$$

$$f(v_2) = \lambda_2 v_2 = 0 \cdot v_1 + \lambda_2 v_2$$

Buscamos los vectores $v \in K^2$ tal que

$$f(v) = \lambda v$$

Supongamos que tales vectores existen. Tenemos

$$f(x, y) = (3y, 3x) = \lambda(x, y). \text{ Luego } (3y, 3x) = (\lambda x, \lambda y)$$

De donde

$$\left. \begin{array}{l} 3y = \lambda x \\ 3x = \lambda y \end{array} \right\}$$

Si $x, y \neq 0$ entonces $9xy = \lambda^2 xy$, luego $\lambda^2 = 9$ y se obtiene dos resultados, a saber $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -3$

Caso $\lambda_1 = 3$

$f(x, y) = (3y, 3x) = 3(x, y)$. Luego $3y = 3x$. Luego $x = y$. Los vectores asociados a $\lambda = 3$, tienen la forma $v = (x, x)$.

Sea $v_1 = (1, 1)$.

Caso $\lambda_2 = -3$

$f(x, y) = (3y, 3x) = -3(x, y)$. Luego $(3y, 3x) = (-3x, -3y)$. Luego $x = -y$. Los vectores asociados a $\lambda_2 = -3$, tienen la forma $v = (x, -x)$. Sea $v_2 = (1, -1)$

Tomemos $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$.

En este caso

$$f(1, 1) = 3(1, 1) = 3(1, 1) + 0(1, -1)$$

$$f(1, -1) = -3(1, -1) = 0(1, 1) + -3(1, -1)$$

Luego

$$(f; B, B) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

En este caso es posible encontrar una matriz diagonal asociada.

Veamos otro ejemplo

Observación

Sea

$$f : K^2 \longrightarrow K^2; \quad f(x, y) = (2y, -x)$$

¿Existirá B , base de K^2 , tal que $(f; B, B)$ es una matriz diagonal?

Supongamos que existe $v = (x, y) \in K^2$ tal que $f(x, y) = \lambda(x, y)$

Tenemos

$$f(x, y) = \lambda(x, y) \quad \text{y} \quad f(x, y) = (2y, -x)$$

Luego

$$(2y, -x) = \lambda(x, y)$$

De donde

$$\left. \begin{array}{l} 2y = \lambda x \\ -x = \lambda y \end{array} \right\}$$

Luego $-2xy = \lambda^2 xy$. Suponemos $x, y \neq 0$, pues $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Ocurre que $v = (0, 0)$ no puede estar en una base. Luego $\lambda^2 = -2$, lo cual es una contradicción.

En este caso, entonces, no existe una base B tal que $(f; B, B)$ sea diagonal.

Nota

Esta forma de resolver el problema es un tanto complicada. Entonces buscaremos un método que nos diga cuándo existe una tal matriz diagonal y cómo encontrarla.

6.2 Valores propios y vectores propios

Sea V un K -espacio vectorial. Sea $f : V \longrightarrow V$, es decir, f , un endomorfismo de V . Definiremos **elementos propios a f** .

Propio, en filosofía, se aplica al accidente inseparable de la esencia y naturaleza de las cosas.

Observación

En la primera motivación teníamos: $f : K^2 \longrightarrow K^2$; $f(x, y) = (3y, 3x)$. Averiguamos que $f(1, 1) = 3(1, 1)$ y $f(1, -1) = -3(1, -1)$. Diremos que $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, -1)$ son "vectores propios" de f y diremos que $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -3$ son los "valores propios" asociados a v_1, v_2 respectivamente.

Lema

Sea $f : V \longrightarrow V$ lineal, y $f(v) = \lambda v$ y $f(v) = \lambda' v$, cierto $v \in V$. Entonces $\lambda = \lambda'$

Demostración

$$\lambda v = \lambda' v \implies \lambda v - \lambda' v = \vec{0} \implies (\lambda - \lambda')v = \vec{0} \implies \lambda - \lambda' = 0 \implies \lambda = \lambda'$$

Debido a la unicidad de λ , damos la siguiente definición:

Definición 6.2.1 Se llama **valor propio de un endomorfismo** $f \in \text{End}(V)$, a todo escalar $\lambda \in K$ que tiene la propiedad siguiente:

Si existe $v \neq \vec{0}$ tal que $f(v) = \lambda v$, entonces este vector $v \neq \vec{0}$ es llamado **vector propio** correspondiente al valor propio λ .

Observación

Sea $f : V \longrightarrow V$ tal que $f(v) = \lambda v$, cierto $v \in V$, cierto $\lambda \in K$, entonces $f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \cdot \lambda v = \lambda(\alpha v)$.

Luego αv es también un vector propio asociado al valor propio λ , para todo $\alpha \in K$, pero podría haber otros vectores linealmente independientes a v ¿por qué no los va a haber?.

Es natural, entonces definir el conjunto de vectores propios asociados a un valor propio λ . Veamos cómo caracterizarlo:

$$\begin{aligned} f(v) = \lambda v &\Leftrightarrow f(v) - \lambda v = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow f(v) - \lambda id_V(v) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (f - \lambda id_V)(v) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow v \in N(f - \lambda id_V) \end{aligned}$$

Tenemos entonces:

Para todo valor propio λ de f se tiene

$$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow v \in N(f - \lambda id_V)$$

Tenemos la definición siguiente:

Definición 6.2.2 Para todo valor propio λ , el núcleo, $N(f - \lambda id_V)$ es llamado el **sub-espacio propio** correspondiente a λ , el cual lo denotaremos por S_λ . Es decir:

$$S_\lambda := N(f - \lambda id_V)$$

Nota

El núcleo de un morfismo puede tener dimensión mayor o igual a 2, luego puede haber vectores l.i. asociados a un mismo λ .

Observación

El siguiente teorema nos dará una caracterización sobre la existencia de un valor propio.

Teorema 6.2.1 Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita y $f \in \text{End}(V)$. Entonces una condición necesaria y suficiente para que un escalar λ sea un valor propio de f , es $\det(f - \lambda id_V) = 0$.

Demostración

$$\begin{aligned} \lambda \text{ es un valor propio de } f &\Leftrightarrow \text{existe } v \neq \vec{0} \text{ tal que } f(v) = \lambda v \\ &\Leftrightarrow (f - \lambda id_V)(v) = \vec{0}, \quad v \neq \vec{0} \\ &\Leftrightarrow v \in N(f - \lambda id_V), \quad v \neq \vec{0} \\ &\Leftrightarrow N(f - \lambda id_V) \neq \{\vec{0}\} \\ &\Leftrightarrow f - \lambda id_V \text{ no es un automorfismo} \\ &\Leftrightarrow \det(f - \lambda id_V) = 0 \end{aligned}$$

Observación

Si $f \in \text{End}(V)$, entonces también se tiene $f - \lambda id_v \in \text{End}(V)$. La proposición anterior y esta observación nos introducen a la definición siguiente.

Definición 6.2.3 El $\det(f - \lambda \text{id}_V)$ es llamado el **Polinomio Característico de f** . Nótese que es un polinomio en λ .

Nota

De acuerdo a lo visto anteriormente tenemos que λ es un valor propio de f ssi λ es una raíz del polinomio característico de f .

Definición 6.2.4 Si $M \in M_n(K)$, el $\det(M - \lambda I_n)$ es llamado el **Polinomio Característico de la matriz M** .

Veamos ahora la relación que existe entre los vectores propios asociados a valores propios distintos de dos en dos.

Proposición 6.2.2 Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita y supongamos que un endomorfismo $f \in \text{End}(V)$ tiene n valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ distintos de dos en dos, con vectores propios asociados v_1, v_2, \dots, v_n , entonces $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es l.i.

Demostración

Hagamos inducción sobre n .

1. Supongamos que tenemos dos valores propios distintos λ y μ , con vectores propios distintos asociados v y w respectivamente.

Supongamos que $w = \alpha v$.

Tenemos $f(w) = f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v) = \lambda w$, luego $\lambda = \mu$ contradicción luego $\{v, w\}$ es l.i.

2. Supongamos que tenemos n valores propios distintos de dos en dos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto l.i. de vectores asociados a los valores propios, respectivamente.
3. Debemos demostrar que si tenemos $(n+1)$ valores propios distintos de dos en dos, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$, entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\}$

un conjunto de vectores propios asociados a los valores propios, son l.i..

Supongamos que

$$v_{n+1} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n,$$

luego

$$f(v_{n+1}) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n v_n$$

Pero

$$f(v_{n+1}) = \lambda_{n+1}v_{n+1} = \lambda_{n+1}\alpha_1v_1 + \lambda_{n+1}\alpha_2v_2 + \dots + \lambda_{n+1}\alpha_nv_n$$

Luego:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \lambda_1 = \lambda_{n+1} \alpha_1 \\ \alpha_2 \lambda_2 = \lambda_{n+1} \alpha_2 \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_n \lambda_n = \lambda_{n+1} \alpha_n \end{array} \right\}$$

Pero como v_{n+1} es no nulo, sabemos que al menos un α_i es no nulo, luego $\lambda_i = \lambda_{n+1}$, contradicción. Es decir $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ es l.i..

Por (1), (2) y (3) tenemos que la proposición es válida para todo $n \in N, n \leq \dim V$.

Definición 6.2.5 Sea V un K - espacio vectorial. Si $f \in \text{End}(V)$ y si existe $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V tal que:

$$(f; B; B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

entonces diremos que f es **diagonalizable** y B será llamada una **base diagonalizante** de f .

Definición 6.2.6 Si $M \in M_n(K)$ y existe $P \in M_n(K)$ invertible tal que $M' = P^{-1}MP$ con

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

entonces diremos que M es **diagonalizable**.

6.3 Valores propios simples

En esta sección, estudiaremos el caso particular de un espacio vectorial V , con $\dim V = n$, $f \in \text{End}(V)$ y n valores propios distintos de dos en dos. Comencemos por la siguiente definición.

Definición 6.3.1 Si λ es una raíz simple del polinomio característico entonces diremos que λ es un **valor propio simple**.

Nota

Obviamente que λ es un valor propio de f ssi λ es una raíz del polinomio característico de f .

Proposición 6.3.1 Sea V un K -espacio vectorial con $\dim V = n$. Supongamos que $f \in \text{End}(V)$ tiene n valores propios simples $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ con vectores propios asociados v_1, v_2, \dots, v_n entonces

$$(f; B, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Demostración

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es l.i. y puesto que son n vectores, forman una base de V . Además, $f(v_1) = \lambda_1 v_1, f(v_2) = \lambda_2 v_2, \dots, f(v_n) = \lambda_n v_n$. Luego se obtiene la matriz diagonal buscada.

Procedimiento para diagonalizar una matriz

Supongamos que $M \in M_n(K)$ es una matriz diagonalizable y supongamos que las raíces del polinomio característico de M , $\det(M - \lambda I_n)$, son raíces distintas de dos en dos.

Por el Teorema Fundamental del Algebra Lineal, existe $f \in \text{End}(K^n)$ tal que $M = (f; C, C)$ con C la base canónica de K^n .

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los valores propios de f . La ecuación :

$$(M - \lambda_i I_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

nos entrega los vectores propios asociados a λ_i . En este caso $\dim S_{\lambda_i} = 1$. Se escoge $v_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Obviamente que la ecuación $(*)$ se escalona, para obtener un v_i a elección. Tenemos que $D = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base diagonalizante de f .

Tenemos :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donde P es la matriz que exhibe las componentes de los vectores de la base D según la base canónica C . Nótese que si tenemos D , es trivial encontrar la matriz P .

$$(f; D, D) = (C \text{ según } D)(f; C, C)(D \text{ según } C)$$

Esta matriz P no es única, pues depende de la base D escogida. Además, el orden de los vectores propios fue escogido al azar, luego la matriz diagonal tampoco es única. Por lo tanto es necesario fijar un orden y luego respetarlo.

Ejercicio

Diagonalicemos

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(K)$$

Solución

$M = (f; C; C)$ cierto $f \in \text{End}(K^3)$, C la base canónica de K^3 . Comencemos por buscar los valores propios de f .

Sea $\det(M - \lambda I_3) = 0$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} &= (-5-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-5-\lambda)(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+5)(\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda+5)(\lambda-1)(\lambda+2)(-1) \end{aligned}$$

Luego los valores propios son $-5, 1, -2$.

Busquemos los vectores propios.

Sea $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vector propio. Si λ es el valor propio correspondiente

$$\text{a } v, \text{ entonces } (M - \lambda I_3)(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escribir este sistema en su forma más sencilla, equivale a escalar la matriz $M - \lambda I_3$

Caso $\lambda_1 = -5$

Al azar fue escogido -5 como primer valor propio.

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_{21}(-1) \\ \longrightarrow \\ L_{31}(-3) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir obtenemos el siguiente sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego $x = y = 0, \forall z \in K$

Nótese que tenemos $0 \cdot z = 0$. Luego es válido para todo $z \in K$.

Escojamos $v_1 = (0, 0, 1)$. Podríamos haber escogido $v_1 = (0, 0, 2)$ o $v_1 = (0, 0, 3)$ etc.

$$S_{-5} = \{(0, 0, z); z \in K\} = \langle (0, 0, 1) \rangle$$

Caso $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_{21}(-1) \\ \longrightarrow \\ L_{31}(-1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{13}(-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir obtenemos el siguiente sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego $x = z$, $y = -z$.

Luego $S_{-2} = \{(z, -z, z); z \in K\} = \langle (1, -1, 1) \rangle$

Sea $v_2 = (1, -1, 1)$

Caso $\lambda_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_{31}(1)]{L_{21}(1)} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3(-\frac{1}{6})]{L_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir obtenemos el siguiente sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego $x + 2y = 0$, $z = 0$. Luego $S_1 = \{(-2y, y, 0); y \in K\}$, o bien $S_1 = \langle (1, -\frac{1}{2}, 0) \rangle$

Sea $v_3 = (1, -\frac{1}{2}, 0)$

Sea $D = \{(0, 0, 1), (1, -1, 1), (1, -\frac{1}{2}, 0)\}$

Entonces

$$(f; D, D) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea P la matriz que exhibe la base D según la base canónica C , luego

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $(f; D; D) = P^{-1}MP$

$$(f; D, D) = (C \text{ según } D)(f; C, C)(D \text{ según } C)$$

Ejercicio

Sea $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de un endomorfismo f de K^3 con respecto a la base canónica. Busquemos:

1. El polinomio característico de f .
2. Los valores propios de f y sus subespacios asociados.
3. Una base diagonalizante D
4. La matriz diagonal $(f; D)$ y una matriz invertible P tal que $(f; D) = P^{-1}MP$

Solución

Comencemos por encontrar el polinomio característico de f ,

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$$

En efecto

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{L_{13}(1)} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 4-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ & (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{C_{31}(-1)} (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\ & (4-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) \end{aligned}$$

Luego

$$p(\lambda) = (4 - \lambda)(2 - \lambda)(1 + \lambda)(-1)$$

es el polinomio característico de f . Luego los valores propios son: $-1, 2, 4$

Caso $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3(\frac{1}{2})} \xrightarrow{L_{13}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_{21}(-1) \\ L_{31}(-3) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego tenemos el sistema siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x + z = 0$, $y = 0$ luego $x = -z$, $y = 0$

$S_{-1} = \{(-z, 0, z); z \in K\} = \langle (1, 0, -1) \rangle$ es el subespacio propio asociado a $\lambda = -1$

Caso $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde: $x + z = 0$, $y + \frac{3}{2}z = 0$, Luego $x = -z$, $y = -\frac{3}{2}z$, $z \in K$

$S_2 = \{(-z, -\frac{3}{2}z, z); z \in K\} = \langle (2, 3, -2) \rangle$, es el subespacio asociado a $\lambda = 2$

Caso $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{31}(1)} \xrightarrow{L_1(-1)} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene:

$$\left. \begin{matrix} x - 4z = 0 \\ y - \frac{5}{2}z = 0 \end{matrix} \right\} \implies \left. \begin{matrix} x = 4z \\ y = \frac{5}{2}z \end{matrix} \right\} z \in K$$

$S_4 = \{(4z, \frac{5}{2}z, z); z \in K\} = \langle (4, \frac{5}{2}, 1) \rangle$, es el subespacio asociado a $\lambda = 4$

Una base diagonalizante es $D = \{(1, 0, -1), (2, 3, -2), (8, 5, 2)\}$ Luego

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donde $P = (D \text{ según } C)$

$$(f; D, D) = (C \text{ según } D)(f; C, C)(D \text{ según } C)$$

6.4 Valores propios múltiples

Ahora estudiaremos el caso general, es decir, cuando el polinomio característico es de la forma

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\alpha_r}$$

y $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r$ corresponde a la dimensión del espacio vectorial.

Si λ es un valor propio de multiplicidad k , $k \geq 2$, quisiéramos saber cuál es la dimensión del sub-espacio propio asociado a λ . Una cota a esta dimensión, la tenemos en la siguiente proposición

Proposición 6.4.1 *Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n . Supongamos que el polinomio característico de $f \in \text{End}(V)$ tiene una raíz λ de multiplicidad k , entonces*

$$\dim_K N(f - \lambda \text{id}_V) \leq k$$

Demostración

Sea r la dimensión del sub-espacio propio asociado a λ , es decir, $r = \dim_K N(f - \lambda \text{id}_V)$.

Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ una base de sub-espacio formado por vectores propios asociados a λ , es decir

$$f(v_i) = \lambda v_i, i = 1, \dots, r$$

Extendamos esta base a una base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ de V . Entonces

$$M = (f; B, B) = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & \lambda & & \\ 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ P \\ \\ Q \end{matrix}$$

donde $P \in M_{n-r}(K)$ y $Q \in M_{n-r}(K)$.

El polinomio característico de f es

$$P(X) = \det(M - XI_n) = \begin{vmatrix} \lambda - X & \dots & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & \dots & \lambda - X & & \\ & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & & \end{vmatrix} \begin{matrix} P \\ \\ \\ Q - XI_n \end{matrix}$$

Luego, $P(X) = (\lambda - X)^r \cdot \det(Q - XI_n)$. Es decir, $(\lambda - X)^r$ divide a $P(X)$, luego $r \leq k$.

La caracterización de f diagonalizable, la tenemos en el teorema siguiente

Teorema 6.4.2 *Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n y $f \in \text{End}(V)$. Entonces son equivalentes*

1. f es diagonalizable
2. $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{\alpha_r}$ y $\dim_K S_{\lambda_i} = \alpha_i$,
 $\forall i = 1, \dots, r$

Demostración

(1) \Rightarrow (2)

Supongamos que f es diagonalizable. Entonces existe una base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ formada por vectores propios de f . Además $(f; B)$ es diagonal y el polinomio característico de f es de la forma

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_p)^{k_p}$$

con $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n = \dim V$

En la diagonal principal de $(f; B)$, hay para todo $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ exactamente k_i términos iguales a λ_i .

Puesto que cada uno de los vectores propios correspondientes a λ_i de B pertenecen a $S_{\lambda_i} = N(f - \lambda_i \text{id}_V)$, se tiene que $\dim S_{\lambda_i} \geq k_i$. Pero por la proposición anterior $k_i \leq \dim S_{\lambda_i}$, luego se tiene que $k_i = \dim S_{\lambda_i}$

(2) \Rightarrow (1)

Por hipótesis, el polinomio característico tiene la forma

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{k_p}, \text{ y } \dim S_{\lambda_i} = \alpha_i, i = 1, \dots, r$$

Tenemos que $S_{\lambda_1} \oplus S_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus S_{\lambda_r}$ es directa y

$$\begin{aligned} \dim(S_{\lambda_1} \oplus S_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus S_{\lambda_r}) &= \dim S_{\lambda_1} + \dim S_{\lambda_2} + \cdots + \dim S_{\lambda_r} \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r \\ &= n \end{aligned}$$

Para cada índice i , consideremos B_i una base de S_{λ_i} (constituída por los vectores propios v_i , correspondientes al valor propio λ_i)

Entonces $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r$ es una base de V formada por vectores propios. Luego $(f; B)$ es diagonal, es decir, f es diagonalizable.

6.5 Ejercicios resueltos

Ejercicio

Sea $f : K^3 \longrightarrow K^3$ lineal. Sabiendo que la matriz de f con respecto a la base canónica es

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Encontremos

1. El polinomio característico de f .
2. Los valores propios de f y sus subespacios propios asociados.
3. Una base diagonalizante D
4. La matriz diagonal $(f; D)$ y una matriz invertible P tal que $(f; D) = P^{-1}MP$

Solución

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{L_{13}(-1)}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2+\lambda \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\
& = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{C_{31}(1)}{=} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 4 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \\
& = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((4-\lambda)^2 - 4) = (2-\lambda)(2-\lambda)(6-\lambda)
\end{aligned}$$

Luego los valores propios son: 2 de multiplicidad 2 y 6 de multiplicidad 1.

Caso $\lambda = 6$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 3-6 & 1 & 1 \\ 2 & 4-6 & 2 \\ 1 & 1 & 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2(\frac{1}{2})} \\
& \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\left. \begin{aligned} x - z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Luego $x = z, y = 2z$

Reemplazando, tenemos

$$(x, y, z) = (z, 2z, z) = z(1, 2, 1) \text{ luego } v_6 = (1, 2, 1) \text{ y } S_6 = \langle (1, 2, 1) \rangle$$

Caso $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 2 & 4-2 & 2 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $x + y + z = 0$ de donde $x = -y - z$.

Reemplazando tenemos

$$(x, y, z) = (-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

Entonces $S_2 = \langle (1, -1, 0), (1, 0, -1) \rangle$. Vemos que la dimensión de S_2 coincide con la multiplicidad del valor propio 2.

La base diagonalizante de f es $D = \{(1, 2, 1), (1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$

La matriz es diagonalizable. Tenemos

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

Sea $f : K^3 \longrightarrow K^3$ lineal. Sabiendo que la matriz de f con respecto a la base canónica es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Estudiemos si M es diagonalizable.

Solución

Comencemos por encontrar el polinomio característico de M .

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{L_{32}(-1)}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1+\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\
 & = (1+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{C_{23}(1)}{=} (1+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \\
 & = (1+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1(1+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(1-\lambda)
 \end{aligned}$$

Luego los valores propios son: -1 de multiplicidad 2 y 1 de multiplicidad 1.

Caso $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego $x + y + -z = 0$ de donde $x = -y + z; y, z \in \mathbb{R}$

Por lo tanto

$$S_{-1} = \{(-y + z, y, z); y, z \in \mathbb{R}\}$$

Es decir

$$S_{-1} = \langle (-1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$$

En este caso $\dim S_{-1} = 2 =$ a la multiplicidad de la raíz -1

Caso $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego se obtienen las condiciones siguientes: $x = z$ y $y = z$.

Entonces $S_1 = \langle (1, 1, 1) \rangle$. Por la matriz es diagonalizable y la base diagonalizante de f es $D = \{(-1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

Finalmente tenemos

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

Sea $f : K^3 \longrightarrow K^3$ lineal. Sabiendo que la matriz de f con respecto a la base canónica es

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Busquemos, si existe, la matriz diagonal D , equivalente a M .

Solución

Comencemos por encontrar el polinomio característico de f ,

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{C_{13}(-1)}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -1+\lambda & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ & (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{L_{31}(1)}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$$

Luego $p(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$ es el polinomio característico de f . Luego los valores propios son: 1 de multiplicidad 2 y 3 una raíz simple

Caso $\lambda = 1$ multiplicidad 2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{12}(-1)} \xrightarrow{L_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{32}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego tenemos el siguiente sistema de ecuaciones: $x + z = 0$, $y = 0$,
Luego $x = -z$, $y = 0$, $z \in K$

$S_1 = \{(-z, 0, z); y \in K\} = \langle (1, 0, -1) \rangle$, es el subespacio propio asociado a $\lambda = 1$

Este subespacio tiene dimensión 1, luego esta matriz no es diagonalizable pues la dimensión del subespacio no coincide con la multiplicidad de la raíz.

6.6 Ejercicios propuestos

1. Encuentre el polinomio característico descompuesto en sus factores irreducibles en \mathbb{R} , de la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Sea $f : K^3 \longrightarrow K^3$ lineal. Sabiendo que la matriz de f con

respecto a la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, encuentre

- (a) El polinomio característico de f .
- (b) Los valores propios de f y sus subespacios propios asociados.
- (c) Una base diagonalizante D
- (d) Una matriz invertible P tal que $(f; D) = P^{-1}MP$

3. Idem ejercicio anterior para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Además encuentre A^{10}

Capítulo 7

Aplicaciones Bilineales

Introducción

Nosotros hemos visto los determinantes de matrices de 2×2 ; vimos que se definen por

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Consideremos el determinante como una aplicación de las columnas de la matriz, es decir

$$\det : M_{2 \times 1}(K) \times M_{2 \times 1}(K) \rightarrow K$$

tal que

$$\det \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = ad - bc$$

Tenemos las propiedades siguientes

1.

$$\begin{vmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & c \\ b' & d \end{vmatrix}$$

en esta nueva expresión se escribe

$$\det \left(\begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) + \det \left(\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)$$

2. Análogamente en la segunda columna, se tiene

$$\det \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c+c' \\ d+d' \end{pmatrix} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) + \det \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \right)$$

3.

$$\begin{vmatrix} \alpha a & c \\ \alpha b & d \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

En esta nueva expresión se escribe

$$\det \left(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = \alpha \det \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)$$

4. Análogamente

$$\det \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha c \\ \alpha d \end{pmatrix} \right) = \alpha \det \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)$$

Sean $u, u', v, v' \in M_{2 \times 1}(K)$, $\alpha \in K$. Estas cuatro propiedades se describen de la manera siguiente

1. $\det(u + u', v) = \det(u, v) + \det(u', v)$
2. $\det(u, v + v') = \det(u, v) + \det(u, v')$
3. $\det(\alpha u, v) = \alpha \det(u, v)$
4. $\det(u, \alpha v) = \alpha \det(u, v)$

7.1 Aplicaciones bilineales

7.1.1 Ejemplos. Propiedades generales

Observación

En \mathbb{R}^2 consideremos el producto punto

$$(x_1\hat{i} + y_1\hat{j}) \cdot (x_2\hat{i} + y_2\hat{j}) = x_1x_2 + y_1y_2$$

cambiando a escritura cartesiana, se tiene

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$$

Analicemos las cuatro observaciones siguientes

1.

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \cdot (x_3, y_3) \\ &= (x_1 + x_2) \cdot x_3 + (y_1 + y_2) \cdot y_3 \\ &= x_1x_3 + x_2x_3 + y_1y_3 + y_2y_3 \\ &= (x_1x_3 + y_1y_3) + (x_2x_3 + y_2y_3) \\ &= ((x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)) + \\ &\quad + ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)) \end{aligned}$$

2. Análogamente a la observación anterior, tenemos

$$(x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)$$

3.

$$\begin{aligned} (\alpha(x_1, y_1)) \cdot (x_2, y_2) &= (\alpha x_1, \alpha y_1) \cdot (x_2, y_2) \\ &= (\alpha x_1)x_2 + (\alpha y_1)y_2 \\ &= \alpha(x_1x_2 + y_1y_2) \\ &= \alpha((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \end{aligned}$$

4. Análogamente a (3) tenemos

$$(x_1, y_1) \cdot (\alpha(x_2, y_2)) = \alpha((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2))$$

Definamos $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)$.
Describiendo nuevamente las cuatro observaciones anteriores, esta aplicación f satisface:

1. $f(u + u', v) = f(u, v) + f(u', v), \forall u, u', v \in \mathbb{R}^2$
2. $f(u, v + v') = f(u, v) + f(u, v'), \forall u, v, v' \in \mathbb{R}^2$
3. $f(\alpha u, v) = \alpha f(u, v), \forall u, v \in \mathbb{R}^2$

$$4. f(u, \alpha v) = \alpha f(u, v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2$$

En un lenguaje informal diríamos que f es dos veces lineal; también podríamos decir que es lineal a la derecha y a la izquierda. Esto nos induce al siguiente concepto.

Definición 7.1.1 Sean U, V, W tres espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Se dice que f es una **aplicación bilineal** de $U \times V$ en W si verifica los siguientes axiomas:
Para todo $u, u' \in U, \forall v, v' \in V, \forall \alpha \in K$

$$1. f(u + u', v) = f(u, v) + f(u', v)$$

$$2. f(u, v + v') = f(u, v) + f(u, v')$$

$$3. f(\alpha u, v) = \alpha f(u, v)$$

$$4. f(u, \alpha v) = \alpha f(u, v)$$

En otras palabras, f es bilineal si y sólo si las aplicaciones parciales

$$1. g : U \rightarrow W; g(u) = f(u, v) \quad \forall v \in V$$

$$2. h : V \rightarrow W; h(v) = f(u, v) \quad \forall u \in U$$

son lineales

Ejercicio

Sea $U = V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}$. Sea

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad f((x, y), (x', y')) = 3xx' - 5yy'$$

Estudiemos si f es bilineal

Solución

$$\begin{aligned}
1. \quad f((x, y) + (x', y'), (x'', y'')) &= f((x + x', y + y'), (x'', y'')) \\
&= 3(x + x')x'' - 5(y + y')y'' \\
&= 3xx'' + 3x'x'' - 5yy'' - 5y'y'' \\
&= (3xx'' - 5yy'') + (3x'x'' - 5y'y'') \\
&= f((x, y), (x'', y'')) + \\
&\quad + f((x', y'), (x'', y''))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad f((x, y), (x', y') + (x'', y'')) &= f((x, y), (x' + x'', y' + y'')) \\
&= 3x(x' + x'') - 5y(y' + y'') \\
&= 3xx' + 3xx'' - 5yy' - 5yy'' \\
&= f((x, y), (x', y')) + \\
&\quad + f((x, y), (x'', y''))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad f(\alpha(x, y), (x', y')) &= f((\alpha x, \alpha y), (x', y')) \\
&= 3(\alpha x)x' - 5(\alpha y)y' \\
&= \alpha(3xx' - 5yy') \\
&= \alpha f((x, y), (x', y'))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad f((x, y), \alpha(x', y')) &= f((x, y), (\alpha x', \alpha y')) \\
&= 3x(\alpha x') - 5y(\alpha y') \\
&= \alpha(3xx' - 5yy') \\
&= \alpha f((x, y), (x', y'))
\end{aligned}$$

Ejercicio

Sea $U = V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f((x, y), (x', y')) = 2xx' - 2xy' - 2x'y + 5yy' \quad (7.1)$$

demuestre que f es bilineal.

Teorema 7.1.1 (Teorema fundamental de las aplicaciones bilineales) Sean U , V y W tres K -espacios vectoriales. Sean $B =$

$\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $C = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ bases ordenadas de U y V respectivamente y $\{w_{ij}; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ un conjunto de vectores de W , entonces existe una única aplicación bilineal $f : U \times V \rightarrow W$ tal que

$$f(u_i, v_j) = w_{ij}$$

Demostración

1. Existencia. Sean $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$, $v = \sum_{j=1}^m \beta_j v_j$. Sea f tal que

$$f(u, v) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j w_{ij}$$

- (a) Demostramos primero la suma en la primera componente

$$\begin{aligned} f(u + u', v) &= f\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha'_i) u_i, \sum_{j=1}^m \beta_j v_j\right) \\ &= \sum_{i,j} (\alpha_i + \alpha'_i) \beta_j w_{ij} \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j w_{ij} + \sum_{i,j} \alpha'_i \beta_j w_{ij} \\ &= f(u, v) + f(u', v) \end{aligned}$$

- (b) Análogamente se prueba que

$$f(u, v + v') = f(u, v) + f(u, v')$$

- (c) Para el producto por escalar tenemos

$$\begin{aligned} f(\alpha(u, v)) &= f\left(\alpha \sum_i \alpha_i u_i, v\right) \\ &= f\left(\sum_i (\alpha \alpha_i) u_i, \sum_j \beta_j v_j\right) \\ &= \sum_{i,j} (\alpha \alpha_i) \beta_j w_{ij} \\ &= \alpha \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j w_{ij} \\ &= \alpha f(u, v) \end{aligned}$$

(d) Análogamente se prueba

$$f(u, \alpha v) = \alpha f(u, v)$$

2. Unicidad

Sea $g : U \times V \rightarrow W$ bilineal tal que $g(u_i, v_j) = w_{ij}$. Por demostrar que $f = g$

$$\begin{aligned} f(u, v) &= f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^m \beta_j v_j\right) = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j w_{ij} = \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j g(u_i v_j) = g\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^m \beta_j v_j\right) = g(u, v) \end{aligned}$$

luego $f = g$.

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $B = \{(1, 1), (1, 0)\}$ una base ordenada de \mathbb{R}^2 . Se tiene que f está determinada por:

$$\begin{aligned} f((1, 1), (1, 1)) &= 1 \\ f((1, 1), (1, 0)) &= 2 \\ f((1, 0), (1, 1)) &= 3 \\ f((1, 0), (1, 0)) &= 4 \end{aligned}$$

En efecto

$$\begin{aligned} f((x, y), (x', y')) &= \\ &= f(y(1, 1) + (x - y)(1, 0), y'(1, 1) + (x' - y')(1, 0)) \\ &= yy'f((1, 1), (1, 1)) + y(x' - y')f((1, 1), (1, 0)) + \\ &\quad + (x - y)y'f((1, 0), (1, 1)) + (x - y)(x' - y')f((1, 0), (1, 0)) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} f((x, y), (x', y')) &= \\ &= yy' \cdot 1 + y(x' - y') \cdot 2 + (x - y)y' \cdot 3 + (x - y)(x' - y') \cdot 4 \\ &= yy' + 2x'y - 2yy' + 3xy' - 3yy' + 4xx' - 4xy' - 4x'y + 4yy' \\ &= 4xx' - 2x'y - xy' \end{aligned}$$

Es decir

$$f((x, y), (x', y')) = 4xx' - 2x'y - xy'$$

Observación

Que f esté determinada por estos cuatro valores quiere decir que no puede haber una aplicación bilineal distinta de f que coincida en estos cuatro valores.

Dicho de otra manera: esos cuatro valores son una microinformación del comportamiento de f . Con esos cuatro valores se sabe exactamente el comportamiento de f en todo $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Nota: En \mathbb{R}^3 consideremos la base canónica $B = \{i, j, k\}$ y la aplicación bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} f(i, j) &= k; \quad f(j, k) = i; \quad f(k, i) = j \\ f(j, i) &= -k; \quad f(k, j) = -i; \quad f(i, k) = -j \\ f(i, i) &= f(j, j) = f(k, k) = 0 \end{aligned}$$

Puesto que conocemos su comportamiento en una base, por el teorema fundamental de las aplicaciones bilineales, podemos obtener su expresión analítica de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} f(a_1i + b_1j + c_1k, a_2i + b_2j + c_2k) &= a_1a_2 \cdot 0 + a_1b_2k + a_1c_2(-j) + \\ &\quad + b_1a_2(-k) + b_1b_2 \cdot 0 + b_1c_2i + c_1a_2j + c_1b_2(-i) + c_1c_2 \cdot 0 = \\ &= (b_1c_2 - c_1b_2)i + (c_1a_2 - a_1c_2)j + (a_1b_2 - b_1a_2)k \end{aligned}$$

Esta aplicación bilineal es muy usada en física y es llamada producto vectorial o producto cruz.

En lenguaje algebraico esta aplicación bilineal queda descrita de la manera siguiente:

Sea $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$

$$\begin{aligned} f((a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)) &= \\ &= f(a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3, a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3) = \\ &= (b_1c_2 - c_1b_2)e_1 + (c_1a_2 - a_1c_2)e_2 + (a_1b_2 - b_1a_2)e_3 = \\ &= (b_1c_2 - c_1b_2, c_1a_2 - a_1c_2, a_1b_2 - b_1a_2) \end{aligned}$$

Ejercicio

Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal definida, con respecto a la base canónica $B = \{e_1, e_2\}$, de la siguiente manera

$$f(e_1, e_1) = f(e_2, e_2) = 0; \quad f(e_1, e_2) = 1, f(e_2, e_1) = -1$$

Busquemos la expresión analítica de f .

Sea $x = x_1e_1 + x_2e_2$, $y = y_1e_1 + y_2e_2$, entonces

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \\ &= x_1y_1 \cdot 0 + x_1y_2 \cdot 1 + x_2y_1(-1) + x_2y_2 \cdot 0 \\ &= x_1y_2 - x_2y_1 \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

que es el determinante de los vectores x e y según la base canónica.

Definición 7.1.2 Sean $f, g : U \times V \rightarrow W$ dos aplicaciones bilineales. Se define la suma de f y g , denotada $f + g$, como

$$f + g : U \times V \rightarrow W; \quad (f + g)(u, v) = f(u, v) + g(u, v)$$

y se define la ponderación de una aplicación bilineal f , denotada $\alpha \cdot f$, como

$$(\alpha \cdot f) : U \times V \rightarrow W; \quad (\alpha \cdot f)(u, v) = \alpha \cdot f(u, v)$$

Proposición 7.1.2 Sean U, V, W tres K -espacios vectoriales. Sean $f, g : U \times V \rightarrow W$ dos aplicaciones bilineales. Entonces $f + g$ y $\beta \cdot f$ son bilineales.

Demostración

Demostrar que $f + g$ es bilineal, es equivalente a demostrar que $\forall u, u_1, u_2 \in U$ y $\forall v, v_1, v_2 \in V$ se tiene:

$$1. \quad (f + g)(u_1 + u_2, v) = (f + g)(u_1, v) + (f + g)(u_2, v)$$

2. $(f + g)(u, v_1 + v_2) = (f + g)(u, v_1) + (f + g)(u, v_2)$
3. $(f + g)(\alpha u, v) = \alpha((f + g)(u, v))$
4. $(f + g)(u, \alpha v) = \alpha((f + g)(u, v))$

Demostración de (1)

$$\begin{aligned}
 (f + g)(u_1 + u_2, v) &=^{(a)} f(u_1 + u_2, v) + g(u_1 + u_2, v) = \\
 &=^{(b)} (f(u_1, v) + f(u_2, v)) + (g(u_1, v) + g(u_2, v)) = \\
 &=^{(c)} (f(u_1, v) + g(u_1, v)) + (f(u_2, v) + g(u_2, v)) = \\
 &=^{(d)} (f + g)(u_1, v) + (f + g)(u_2, v)
 \end{aligned}$$

(a) y (d) definición de suma de aplicaciones, (b) bilinealidad de f y g ,
(c) asociatividad y conmutatividad de la suma en W .

Análogamente se demuestra (2).

Demostración de (3)

$$\begin{aligned}
 (f + g)(\alpha u, v) &=^{(a)} f(\alpha u, v) + g(\alpha u, v) = \\
 &=^{(b)} \alpha f(u, v) + \alpha g(u, v) = \\
 &=^{(c)} \alpha(f(u, v) + g(u, v)) =^{(d)} \alpha((f + g)(u, v))
 \end{aligned}$$

(a) y (d) definición de suma de aplicaciones, (b) bilinealidad de f y g ,
(c) axioma de distribución de espacios vectoriales.

Análogamente se demuestra (4)

Demostrar que $\beta \cdot f$ es bilineal, es equivalente a demostrar que
 $\forall u, u_1, u_2 \in U$ y $\forall v, v_1, v_2 \in V$ se tiene:

1. $(\beta \cdot f)(u_1 + u_2, v) = (\beta \cdot f)(u_1, v) + (\beta \cdot f)(u_2, v)$
2. $(\beta \cdot f)(u, v_1 + v_2) = (\beta \cdot f)(u, v_1) + (\beta \cdot f)(u, v_2)$
3. $(\beta \cdot f)(\alpha u, v) = \alpha((\beta \cdot f)(u, v))$
4. $(\beta \cdot f)(u, \alpha v) = \alpha((\beta \cdot f)(u, v))$

Demostración de (1)

$$\begin{aligned} (\beta \cdot f)(u_1 + u_2, v) &=^{(a)} \beta(f(u_1 + u_2, v)) = \\ &=^{(b)} \beta(f(u_1, v) + f(u_2, v)) =^{(c)} \beta(f(u_1, v)) + \beta(f(u_2, v)) = \\ &=^{(d)} (\beta \cdot f)(u_1, v) + (\beta \cdot f)(u_2, v) \end{aligned}$$

(a) y (d) definición de ponderación de una aplicación, (b) bilinealidad de f , (c) axioma de distribución en un espacio vectorial.

Análogamente se demuestra (2)

Demostración de (3)

$$\begin{aligned} (\beta \cdot f)(\alpha u, v) &=^{(a)} \beta(f(\alpha u, v)) =^{(b)} \beta(\alpha(f(u, v))) = \\ &=^{(c)} (\beta \alpha)(f(u, v)) =^{(d)} \alpha(\beta(f(u, v))) =^{(e)} \alpha((\beta \cdot f)(u, v)) \end{aligned}$$

(a) y (e) definición de ponderación de una aplicación, (b) bilinealidad de f , (c) axioma de espacios vectoriales E.V.8, (d) conmutatividad de la multiplicación en K y luego E.V.8.

Análogamente se demuestra (4.)

Definición 7.1.3 *El conjunto formado por todas las aplicaciones bilineales de $U \times V$ en W , se denota $B_K(U, V; W)$.*

Proposición 7.1.3 *Sean U, V, W tres K -espacios vectoriales, entonces $B_K(U, V; W)$ es un K -espacio vectorial.*

Demostración

Hay que demostrar los ocho axiomas de espacio vectorial. Solamente demostraremos E.V.2 y E.V.3

E.V.2. El neutro es la aplicación bilineal nula, denotada 0 y definida como sigue

$$0 : U \times V \rightarrow W; 0(u, v) = 0 \quad \forall (u, v) \in U \times V$$

$$(0 + f)(u, v) = 0(u, v) + f(u, v) = 0 + f(u, v) = f(u, v)$$

luego $0 + f = f$

E.V.3. Dada $f : U \times V \rightarrow W$ bilineal, su aplicación bilineal opuesta es denotada $-f$ y se define por

$$-f : U \times V \rightarrow W; \quad (-f)(u, v) = -(f(u, v))$$

$$(f + (-f))(u, v) = f(u, v) + (-f)(u, v) = f(u, v) + -(f(u, v)) = 0$$

luego $f + (-f) = 0$

Observación

En \mathbb{R}^2 , el producto punto cumple

$$(x, y) \cdot (x', y') = xx' + yy' = x'x + y'y = (x', y') \cdot (x, y)$$

Esta observación nos induce al siguiente concepto

Definición 7.1.4 Sea $f : V \times V \rightarrow W$ una aplicación bilineal. Diremos que f es **simétrica** si

$$f(u, v) = f(v, u) \quad \forall (u, v) \in V \times V$$

Ejemplo

En la aplicación bilineal del ejercicio (7.1) se tiene

$$\begin{aligned} f((x, y), (x', y')) &= 2xx' - 2xy' - 2x'y + 5yy' = \\ &= 2x'x - 2x'y - 2xy' + 5y'y = f((x', y'), (x, y)) \end{aligned}$$

es decir,

$$f(u, v) = f(v, u); \quad \forall \quad u, v \in \mathbb{R}^2$$

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - y_1y_2$$

Esta aplicación es bilineal y simétrica.

Ejemplo

Sea $V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ continua}\}$

Entonces

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad (7.2)$$

es simétrica. Es decir, el producto convolución sobre \mathbb{R} es simétrico.

7.2 Formas bilineales

Definición 7.2.1 Sea V un espacio vectorial sobre K . Una **forma bilineal** sobre V , es una aplicación bilineal

$$f : V \times V \rightarrow K$$

Ejemplo

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f((x, y), (x', y')) = 3xx' - 2xy' - 2x'y + 7yy'.$$

Es fácil ver que f es una forma bilineal.

Ejemplo

Sea $V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ continua}\}$. Entonces

$$\mu(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

es una forma bilineal.

7.2.1 Matriz asociada a una forma bilineal

Observación

Consideremos la forma bilineal de la referencia (7.1)

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad f((x, y), (x', y')) = 2xx' - 2xy' - 2x'y + 5yy'$$

En el dominio consideremos las bases $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$ y $C = \{(1, 0), (-1, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 , a la izquierda y a la derecha respectivamente. Se tiene:

$$f((1, 1), (1, 0)) = 2 - 2 = 0$$

$$f((1, 1), (-1, 1)) = 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 1 = 3$$

$$f((0, 1), (1, 0)) = 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 0 = -2$$

$$f((0, 1), (-1, 1)) = 2 \cdot 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 1 = 7$$

Naturalmente uno asociaría

$$(f; B, C) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Efectivamente a toda forma bilineal le asociaremos una matriz con respecto a dos bases dadas de la manera obtenida anteriormente.

Construcción de la matriz asociada

Sean U y V dos K -espacios vectoriales. Sean $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $C = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ bases ordenadas de U y V respectivamente.

Para todo $u \in U$ y $v \in V$ se tiene

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \quad v = \sum_{j=1}^m \beta_j v_j$$

Para toda forma bilineal $f : U \times V \rightarrow K$ a causa de la bilinealidad, se tiene

$$f(u, v) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^m \beta_j v_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j f(u_i, v_j)$$

Sea $(a_{ij}) = f(u_i, v_j)$; $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

Se obtiene la matriz $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$ de n líneas y m columnas, la cual se llama *matriz de la forma bilineal f relativa a las bases B y C* , denotada $(f; B, C)$.

Recíprocamente, a toda matriz $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$, le corresponde una única forma bilineal $f : U \times V \rightarrow K$, definida por

$$f(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j a_{ij}$$

la cual es bilineal.

Se tiene entonces el teorema siguiente:

Teorema 7.2.1 Sean U y V dos K -espacios vectoriales de dimensiones n y m respectivamente. Para todo par de bases $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de U y $C = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ de V , existe una biyección

$$\begin{aligned} \varphi : B(U, V; K) &\rightarrow M_{n \times m}(K) \\ f &\mapsto (f(e_i, u_j) = (a_{ij})) \end{aligned}$$

el cual es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Definición 7.2.2 La matriz que corresponde a f se llama **matriz de la forma bilineal f con respecto a las bases B y C** .

7.2.2 Representación matricial de $f(x, y)$

Sea $f \in B(U, V : K)$ y su correspondiente matriz $A = (a_{ij})$, tal que $A \in M_{n \times m}(K)$, en el isomorfismo anterior, relativo a las bases B y C de U y V respectivamente.

Para todo $(x, y) \in U \times V$ se tiene

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right)$$

Consideremos las matrices columnas

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

El producto AY es una matriz columna de n filas. El elemento de la fila i es $\sum_{j=1}^m a_{ij}y_j$.

El producto X^tAY de la matriz fila X^t por la matriz columna AY es una matriz de $M_{1 \times 1}(K)$ que tiene, por elemento único a

$$\sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}y_j \right)$$

Resulta, identificando toda la matriz de un solo elemento a este elemento

$$f(x, y) = X^tAY$$

Proposición 7.2.2 Sean U y V dos K -espacios vectoriales de dimensiones n y m respectivamente. Si, relativo a las bases B y C de U y V , A es la matriz de $f \in B(U, V : K)$ y si X e Y son las matrices columnas de las componentes de $u \in U$ y $v \in V$ en estas bases. Entonces se tiene

$$f(u, v) = X^tAY$$

Ejemplo

Volvamos al ejercicio de la referencia (7.1)

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f((x, y), (x', y')) = 2xx' - 2xy' - 2x'y + 5yy'$$

$$B = \{(1, 1), (0, 1)\}, C = \{(1, 0), (-1, 1)\}$$

$$\begin{aligned} (x, y) &= x(1, 1) + (y - x)(0, 1) \\ (x', y') &= (x' + y')(1, 0) + y'(-1, 1) \end{aligned}$$

Entonces

$$f((x, y), (x', y')) = (x \ y - x) \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' + y' \\ y' \end{pmatrix}$$

7.3 Espacios Euclidianos

7.3.1 Producto escalar

Introducción

En \mathbb{R}^3 , consideremos la base canónica $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$.

Sean $u = x_1i + x_2j + x_3k$ y $v = y_1i + y_2j + y_3k$ dos vectores en \mathbb{R}^3 . Entonces el producto punto de u y v se define por

$$u \cdot v = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

llamado así, pues a dos vectores se le asocia un número real y en lenguaje geométrico se le asocia un punto.

La norma se define por

$$|u| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

es decir, $|u|^2 = u \cdot u$

Este producto punto puede también ser descrito por $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos \theta$, donde θ es el menor ángulo comprendido entre u y v ; $u, v \neq 0$. Además $u \cdot v = 0$ si y sólo si θ es $\frac{\pi}{2}$.

Luego $u \cdot v = 0$ si y sólo si u y v son perpendiculares.

Los conceptos de producto punto, longitud de un vector, ortogonalidad serán generalizados a espacios vectoriales que no tienen fácil descripción geométrica como son \mathbb{R}^n , $n \geq 4$ y los espacios de funciones, y en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 se dará conceptos más amplios que el producto punto.

Nota: En esta sección consideramos solamente formas bilineales que tienen por codominio los números reales, pues en el codominio vamos a utilizar el concepto de orden.

Observación

En la forma bilineal del ejercicio de referencia (7.1) se tiene

$$\begin{aligned} f((x, y), (x, y)) &= 2x^2 - 4xy + 5y^2 = \\ &= x^2 + (x^2 - 4xy + 4y^2) + y^2 = x^2 + (x - 2y)^2 + y^2 \end{aligned}$$

que es siempre un número positivo o nulo, pues es suma de cuadrados.

Definición 7.3.1 Sea $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. Diremos que f es **positiva** si

$$f(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V$$

Ejemplo

En el ejemplo (7.2) se tiene que

$$(f, f) = \int_0^1 f(t)^2 dt$$

es cero o positivo, pues el producto convolución de f consigo misma, representa el área bajo la curva $f(t)^2$ cuyos puntos están en el eje X o sobre el eje X .

Observación

En la forma bilineal del ejercicio (7.1) se tiene que $f((x, y), (x, y)) = 0$ implica que $x^2 + (x - 2y)^2 + y^2 = 0$ luego $x = y = 0$, es decir $(x, y) = (0, 0)$.

Definición 7.3.2 Sea $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. Diremos que f es **definida** cuando el único vector de V que satisface $f(v, v) = 0$ es el vector $v = \vec{0}$, es decir $f(v, v) = 0 \Rightarrow v = \vec{0}$.

Ejemplo

En la forma bilineal del ejercicio (7.2) se tiene que si $(f, f) = 0$ entonces $\int_0^1 f(t)^2 dt = 0$ luego $f(t)^2 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ luego $f(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$

es decir $f = 0$ en $[0,1]$

Definición 7.3.3 Si $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal, entonces diremos que f es un **producto escalar** si f es simétrica, positiva y definida. **Notación:** $f(u, v) =: \langle u, v \rangle$

Ejemplos

Las formas bilineales del ejercicio (7.1) y del ejercicio (7.2) son productos escalares.

Definición 7.3.4 Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial. Diremos que V es un **Espacio Euclidiano** si sobre V se puede definir un producto escalar.

7.3.2 Norma

Observación

En \mathbb{R}^2 con el producto punto, se define la longitud o norma de un vector, de la manera siguiente

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

pero $x^2 + y^2$ corresponde al producto usual de (x, y) consigo mismo, es decir

$$\|(x, y)\| = \sqrt{(x, y) \cdot (x, y)}$$

El concepto de norma se generaliza de la manera siguiente:

Definición 7.3.5 Sea V un espacio euclidiano, con un producto escalar $\langle u, v \rangle$. Dado $u \in V$, es llamado **norma del vector** u , denotado $\|u\|$, el número real positivo:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Ejemplo

En \mathbb{R}^2 , considerando el producto usual, se tiene

$$\|(1, 2)\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\|(3, 4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Ejemplo

En \mathbb{R}^2 , considerando el producto del ejercicio (7.1) se tiene:

$$\|(1, 0)\| = \sqrt{2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 + 5 \cdot 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\|(1, 2)\| = \sqrt{2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\|(3, 4)\| = \sqrt{2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2} = \sqrt{50}$$

$$\|(1, \sqrt{3})\| = \sqrt{2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} + 5 \cdot (\sqrt{3})^2} = \sqrt{17 - 4\sqrt{3}}$$

Ejemplo

$V = \{f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}$ con el producto

$$(f, g) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)dt$$

Algunos ejemplos en este caso son:

Sea $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|\text{senn}x\|^2 &= (\text{senn}x, \text{senn}x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2 nx dx = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \frac{1}{2}x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4n} \text{sen} 2nx \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Luego $\|\text{senn}x\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \forall n \in \mathbb{N}$

Sea $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|\cos mx\|^2 &= (\cos mx, \cos mx) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 mx dx = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2mx}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4m} \sin 2mx \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

luego $\|\cos mx\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \forall m \in \mathbb{N}$

Ejemplo

En \mathbb{R}^n con el producto escalar usual se tiene

$$\begin{aligned}
\|(u_1, u_2, \dots, u_n)\| &= \sqrt{\langle (u_1, u_2, \dots, u_n), (u_1, u_2, \dots, u_n) \rangle} = \\
&= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}
\end{aligned}$$

Proposición 7.3.1 Sea V un espacio euclidiano, entonces se tiene

1. $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\| \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V$
2. $\|u\| \geq 0 \forall u \in V$
3. $\|u\| = 0$ si y sólo si $u = \vec{0}$

Demostración (1)

$$\begin{aligned}
\|\alpha u\| &= \sqrt{\langle \alpha u, \alpha u \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle u, u \rangle} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{\langle u, u \rangle} = \\
&= |\alpha| \cdot \|u\|
\end{aligned}$$

Demostración (2)

$\langle u, u \rangle \geq 0 \forall u \in V \Rightarrow \sqrt{\langle u, u \rangle}$ está definida $\forall u \in V$ y $\sqrt{\langle u, u \rangle} \geq 0 \forall u \in V$ luego $\|u\| \geq 0 \forall u \in V$

Demostración (3)

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle u, u \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$$

Proposición 7.3.2 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz) Sea V un espacio euclidiano, entonces

$$| \langle u, v \rangle | \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in V$$

Demostración

Supongamos primero que $v = \vec{0}$. Entonces ambos miembros de la igualdad son cero (ejercicio).

Supongamos $v \neq 0$ luego $\langle v, v \rangle \neq 0$. Sea $\lambda = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$.

Como la forma bilineal es positiva, se tiene que

$$\langle u - \lambda v, u - \lambda v \rangle \geq 0$$

De la bilinealidad, se deduce

$$\langle u, u \rangle - \lambda \langle u, v \rangle - \lambda \langle v, u \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle \geq 0$$

Usando la propiedad simétrica y la definición de λ se tiene

$$\langle u, u \rangle - 2 \frac{\langle u, v \rangle^2}{\langle v, v \rangle} + \frac{\langle u, v \rangle^2}{\langle v, v \rangle} \geq 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle - \frac{\langle u, v \rangle^2}{\langle v, v \rangle} \geq 0$$

Multiplicando por $\langle v, v \rangle$ se tiene

$$\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2 \geq 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \geq \langle u, v \rangle^2$$

luego

$$\sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} \geq | \langle u, v \rangle | \Rightarrow | \langle u, v \rangle | \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Ejemplo

En \mathbb{R}^2 con el producto escalar usual, se tiene

$$| \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle | \leq \| (x_1, y_1) \| \cdot \| (x_2, y_2) \|$$

es decir

$$|x_1 x_2 + y_1 y_2| \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Ejemplo

En \mathbb{R}^n con el producto escalar usual, se tiene

$$\begin{aligned} | \langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle | &\leq \\ &\leq \| (x_1, x_2, \dots, x_n) \| \cdot \| (y_1, y_2, \dots, y_n) \| \end{aligned}$$

es decir

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

elevando al cuadrado, se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2$$

conocida como la desigualdad de Lagrange.

Corolario 7.3.3 (Desigualdad triangular de Minkowsky)

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Demostración

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \\ &= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Como $\|u + v\|$ y $\|u\| + \|v\|$ son positivos, entonces

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Corolario 7.3.4

$$| \|u\| - \|v\| | \leq \|u - v\|$$

Demostración

Puesto que $u = (u - v) + v$, por el corolario anterior se tiene

$$\|u\| \leq \|u - v\| + \|v\|$$

luego

$$\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\| \quad (7.3)$$

Además $v = (v - u) + u$, luego

$$\|v\| \leq \|v - u\| + \|u\|$$

luego

$$\|v\| - \|u\| \leq \|v - u\| = \|u - v\|$$

de donde

$$\|v\| - \|u\| \leq \|u - v\| \quad (7.4)$$

Por (7.3) y (7.4)

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

7.3.3 Ortogonalidad

En \mathbb{R}^2 , considerando el producto usual se tiene que el producto entre dos vectores es nulo si y sólo si el ángulo comprendido es de $\frac{\pi}{2}$ radianes, es decir, si y sólo si estos vectores son ortogonales.

Este concepto de ortogonalidad se generaliza de la manera siguiente:

Definición 7.3.6 *En un espacio euclidiano V , diremos que dos vectores u y v son **ortogonales** si el producto escalar entre ellos es nulo.*

Ejemplo

En \mathbb{R}^3 , considerando el producto usual se tiene que $u = (3, 0, 0)$ y $v = (0, 5, 0)$ son ortogonales. También $u = (3, 0, 0)$, $w = (0, 0, 7)$ son ortogonales.

Ejemplo

Volviendo al ejercicio (7.1)

$$f((1, 1), (2, 0)) = 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Entonces diremos que $u = (1, 1)$ y $v = (2, 0)$ son ortogonales con respecto a este producto.

Definición 7.3.7 Sea $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ en un espacio euclidiano V . Diremos que S es un **conjunto ortogonal** de vectores si los vectores de S son ortogonales de dos en dos. Si además todos ellos tienen norma 1, diremos que S es un **conjunto ortonormal** de vectores.

Ejemplo

En el ejercicio (7.1) el conjunto $B = \{(1, 1), (2, 0)\}$ es ortogonal.

El conjunto $C = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}$ es ortonormal con respecto al mismo producto escalar.

Ejercicio

Sea $V = \{f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ continua}\}$, con el producto escalar siguiente:

$$(f, g) = \int_{-l}^l f(x)g(x)dx$$

Demostremos que $\left\{\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right); n = 0, 1, 2, \dots\right\}$ es una familia ortogonal. Determinemos además la norma de cada vector.

Solución

1. Sea
- $m \neq n$

$$\begin{aligned} \left(\cos \left(\frac{m\pi x}{l} \right), \cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \right) &= \int_{-l}^l \cos \left(\frac{m\pi x}{l} \right) \cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx = \\ &= \int_{-l}^l \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{(m+n)\pi x}{l} \right) + \cos \left(\frac{(m-n)\pi x}{l} \right) \right] dx = 0 \end{aligned}$$

2. Sea
- $m \neq n$

$$\begin{aligned} \left(\sin \left(\frac{m\pi x}{l} \right), \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \right) &= \int_{-l}^l \sin \left(\frac{m\pi x}{l} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx = \\ &= \int_{-l}^l \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{(m-n)\pi x}{l} \right) - \cos \left(\frac{(m+n)\pi x}{l} \right) \right] dx = 0 \end{aligned}$$

- 3.
- $\forall m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left(\cos \left(\frac{m\pi x}{l} \right), \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \right) &= \int_{-l}^l \cos \left(\frac{m\pi x}{l} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx = \\ &= \int_{-l}^l \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{(m-n)\pi x}{l} \right) + \sin \left(\frac{(m+n)\pi x}{l} \right) \right] dx = 0 \end{aligned}$$

Luego la familia dada es ortogonal. Ahora busquemos la norma de estas funciones.

1. Para
- $n = 0$
- , se tiene
- $\cos 0x = 1$
- y su norma es

$$\|1\|^2 = \int_{-l}^l dx = 2l$$

es decir, $\|1\| = \sqrt{2l}$

2. Para
- $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \left\| \cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \right\|^2 &= \int_{-l}^l \cos^2 \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left(1 + \cos \left(\frac{2n\pi x}{l} \right) \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{l}{2n\pi} \sin \left(\frac{2n\pi x}{l} \right) \right) \Big|_{-l}^l = l \end{aligned}$$

es decir

$$\left\| \cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \right\| = \sqrt{l}$$

3. Para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \left\| \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \right\|^2 &= \int_{-l}^l \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left(1 - \cos \left(\frac{2n\pi x}{l} \right) \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{l}{2n\pi} \sin \left(\frac{2n\pi x}{l} \right) \right) \Big|_{-l}^l = l \end{aligned}$$

es decir

$$\left\| \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \right\| = \sqrt{l}$$

Definición 7.3.8 Sea V un espacio euclidiano de dimensión finita. Diremos que el conjunto $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es una **base ortonormal** de V , si B es una base de V y B es un conjunto ortonormal de vectores de V .

Teorema 7.3.5

(Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt)

Todo espacio euclidiano V de dimensión finita n , no nulo, admite una base ortonormal $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.

Demostración

1. Si $\dim V = 1$. Sea $\{u\}$ una base de V , entonces $g = \frac{1}{\|u\|}$. Se tiene que $\|g_1\| = 1$.
2. Si $\dim V = 2$. Sea $\{u_1, u_2\}$ una base de V , entonces $g_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1$.

Sea $v_2 = u_2 - \langle u_2, g_1 \rangle g_1$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \langle v_2, g_1 \rangle &= \langle u_2 - \langle u_2, g_1 \rangle g_1, g_1 \rangle = \\ &= \langle u_2, g_1 \rangle - \langle u_2, g_1 \rangle \langle g_1, g_1 \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Se construye } g_2 = \frac{1}{\|v_2\|} \cdot v_2$$

Entonces $\{g_1, g_2\}$ es una base ortonormal de V .

3. Si $\dim V = 3$. Sea $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base de V . Se construye v_3 de la manera siguiente

$$v_3 = u_3 - \langle u_3, g_1 \rangle g_1 - \langle u_3, g_2 \rangle g_2$$

Se tiene que $\langle v_3, g_1 \rangle = 0$ y $\langle v_3, g_2 \rangle = 0$ (se deja de ejercicio al lector). Luego se construye g_3 de la manera siguiente

$$g_3 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3$$

En general se construye v_r de la manera siguiente

$$v_r = u_r - \langle u_r, g_1 \rangle g_1 - \langle u_r, g_2 \rangle g_2 \cdots - \langle u_r, g_{r-1} \rangle g_{r-1}$$

$$g_r = \frac{1}{\|v_r\|} v_r$$

Este proceso debe terminar en algún momento pues el espacio euclidiano considerado es de dimensión finita.

Definición 7.3.9 Diremos que $\{g_1, \dots, g_n\}$ es la **base ortonormalizada** de $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

Ejercicio

Con respecto al producto escalar

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = 2xx' - 2xy' - 2x'y + 5yy'$$

ortonormalicemos la base $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$

Solución

Sea $u_1 = (1, 1)$

$$\|u_1\|^2 = \langle (1, 1), (1, 1) \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 1 = 3$$

$$g_1 = \frac{(1, 1)}{\sqrt{3}}$$

$$v_2 = u_2 - \langle u_2, g_1 \rangle g_1$$

$$v_2 = (1, -1) - \left\langle (1, -1), \frac{(1, 1)}{\sqrt{3}} \right\rangle \frac{(1, 1)}{\sqrt{3}}$$

$$v_2 = (1, -1) - \langle (1, -1), (1, 1) \rangle \frac{(1, 1)}{3}$$

$$v_2 = (1, -1) - (2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 5 \cdot (-1) \cdot 1) \cdot \frac{(1, 1)}{3}$$

$$v_2 = (1, -1) + 3 \cdot \frac{(1, 1)}{3} = (1, -1) + (1, 1) = (2, 0)$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle = \langle (2, 0), (2, 0) \rangle = 8$$

$$\|v_2\| = \sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle} = 2\sqrt{2}$$

$$g_2 = \frac{(2, 0)}{2\sqrt{2}} = \frac{(1, 0)}{\sqrt{2}}$$

La base ortonormalizada es $B = \left\{ \frac{(1, 1)}{\sqrt{3}}, \frac{(1, 0)}{\sqrt{2}} \right\}$

Ejemplo

En \mathbb{R}^n , con el producto usual, el conjunto

$$S = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$$

es un conjunto ortonormal.

Ejemplo

En $V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas}\}$ con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int f(t)g(t)dt, \text{ el conjunto}$$

$$S = \left\{ \frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)}{\sqrt{l}}, \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{\sqrt{l}}; m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

es un conjunto ortonormal de vectores.

Ejemplo

En \mathbb{R}^2 , con el producto usual $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^2 .

Proposición 7.3.6 *Sea V un espacio euclidiano. Sea U un sub-espacio de V , entonces el conjunto $S = \{v \in V; \langle u, v \rangle = 0 \ \forall u \in U\}$ es un sub-espacio vectorial de V .*

Demostración

Sean $u_1, u_2 \in U$ entonces

1. $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle = 0 + 0 = 0$, luego $u_1 + u_2 \in U$.
2. Además $\langle \alpha u_1, v \rangle = \alpha \langle u_1, v \rangle = \alpha \cdot 0 = 0$ luego $\alpha u_1 \in U$

Por (1.) y (2.) S es un sub-espacio vectorial de V .

Definición 7.3.10 *El sub-espacio S de la proposición anterior será denotado S^\perp y es llamado el subespacio ortogonal a S .*

7.3.4 Ángulo y distancia entre vectores

En \mathbb{R}^2 , considerando el producto punto, se obtiene el coseno del ángulo menor entre dos vectores de la igualdad

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta$$

Este concepto se generaliza de la manera siguiente:

Definición 7.3.11 *Sea V un espacio vectorial euclidiano con producto escalar $\langle u, v \rangle$. Se define el coseno del ángulo menor comprendido entre dos vectores no nulos como*

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Ejemplo

En \mathbb{R}^2 con el producto escalar usual, el ángulo menor entre los vectores $u = (1, 0)$ y $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ es

$$\cos \theta = \frac{\langle (1, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rangle}{\left\| (1, 0) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\|} = \frac{\frac{1}{2}}{1 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

luego $\theta = \frac{\pi}{3}$. Por supuesto que el ángulo entre $u = (1, 0)$ y $w = (1, \sqrt{3})$ es también $\theta = \frac{\pi}{3}$

Ejemplo

En \mathbb{R}^2 , considerando el producto escalar del ejemplo (7.1). El ángulo menor entre los vectores $u = (1, 0)$ y $v = (1, \sqrt{3})$ es

$$\cos \theta = \frac{\langle (1, 0), (1, \sqrt{3}) \rangle}{\|(1, 0)\| \cdot \|(1, \sqrt{3})\|} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot (\sqrt{3})}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17 - 4\sqrt{3}}} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{2} \sqrt{17 - 4\sqrt{3}}}$$

Observación

En \mathbb{R}^2 , consideremos el producto usual. La distancia entre dos puntos de \mathbb{R}^2 , $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Este número corresponde a $\|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)\|$, es decir, se puede pensar como la distancia entre dos vectores

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)\|$$

Este concepto de distancia entre dos vectores se puede generalizar de la manera siguiente:

Definición 7.3.12 Sea V un espacio euclidiano con norma $\|u\|$, entonces la aplicación $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $d(u, v) = \|u - v\|$, es llamada la **función distancia**. El número $d(u, v)$ es llamado la **distancia entre u y v** .

Proposición 7.3.7 Sea V un espacio euclidiano. Entonces

1. $d(u, v) \geq 0 \quad \forall u, v \in V$
2. $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$
3. $d(u, v) = d(v, u) \quad \forall u, v \in V$
4. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \quad \forall u, v, w \in V$

La demostración la dejamos al lector

Definición 7.3.13 Un espacio vectorial real dotado de una distancia es llamado un **espacio métrico**.

7.4 Formas bilineales simétricas

El estudio de las formas bilineales está íntimamente ligado al estudio de las formas cuadráticas.

Definición 7.4.1 Sea $f : V \times V \rightarrow K$ una forma bilineal simétrica. Consideremos una función $q_f : V \rightarrow K$ definida por

$$q_f(v) = f(v, v) \quad \forall v \in V \quad (7.5)$$

Esta función de una variable, es llamada la **forma cuadrática** sobre V asociada a la forma bilineal f .

Ejemplo

La función cuadrática asociada al producto interno usual de \mathbb{R}^n es

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ del ejercicio (7.1).

Entonces la función cuadrática asociada a f es

$$q((x, y)) = 2x^2 - 4xy + 5y^2$$

Nota: Recíprocamente, si q es la forma cuadrática asociada a una forma bilineal f , podemos recuperar f de la manera siguiente:

$$f(u, v) = \frac{1}{2}[q(u+v) - q(u) - q(v)] \quad \forall u, v \in V \quad (7.6)$$

Las fórmulas (7.5) y (7.6) son conocidas como identidades de polarización y muestran que no solamente q está unívocamente determinada por f , sino también q determina unívocamente a f .

Proposición 7.4.1 *Sea $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal simétrica, Si $f(v, v) = 0 \quad \forall v \in V$, entonces f es nula.*

Demostración

Sea $u, v \in V$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= f(u+v, u+v) = f(u, u) + 2f(u, v) + f(v, v) = \\ &= 2f(u, v) \text{ luego } f(u, v) = 0 \quad \forall u, v \in V \text{ luego } f = 0. \end{aligned}$$

7.5 Ejercicios resueltos**Ejercicio**

Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, la forma bilineal definida por:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = ae + 2bf + 3cg + dh$$

1. Demostremos que f es un producto interno en $M_2(\mathbb{R})$.

2. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos $\|A\|$, $\|B\|$, $d(A, B)$ y el ángulo comprendido entre A y B

Solución de (1)

Se ha supuesto que f es bilineal. Debemos demostrar entonces:

(a) Demostremos que f es simétrica.

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = ae + 2bf + 3cg + dh$$

$$f\left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ea + 2fb + 3gc + hd$$

ambos productos son iguales, luego f es simétrica.

(b) Demostremos que f es positiva.

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2 + 2b^2 + 3c^2 + d^2 \geq 0$$

(c) demostremos que f está bien definida.

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2 + 2b^2 + 3c^2 + d^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 0 = b = c = d$$

por (a), (b) y (c) f es un producto interno.

Solución de (2)

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle} =$$

$$= \sqrt{1 + 2 + 0 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|B\| = \sqrt{\langle B, B \rangle} = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle} =$$

$$= \sqrt{4 + 2 + 3 + 1} = \sqrt{10}$$

$$d(A, B) = \|A - B\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle} =$$

$$= \sqrt{1 + 8 + 3 + 0} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Tenemos que $\|A\| \cdot \|B\| \cos \theta = \langle A, B \rangle$, luego

$$\cos \theta = \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{2\sqrt{10}}$$

luego

$$\theta = \arccos \frac{1}{2\sqrt{10}}$$

Ejercicio

Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal definida por:

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 3x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 10y_1y_2$$

1. Demuestre que f es un producto interno.
2. Sean $u = (1, -1)$ y $v = (1, 0)$. Encuentre la norma de estos dos vectores, la distancia entre ellos y el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

Solución de (1)

Se ha dado por supuesto que es bilineal. Debemos demostrar entonces:

- (a) f es simétrica.

En efecto

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 3x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 10y_1y_2$$

$$f((x_2, y_2), (x_1, y_1)) = 3x_2x_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 + 10y_2y_1$$

Ambas imágenes coinciden, luego f es simétrica.

(b) f es positiva.

En efecto

$$\begin{aligned} f((x, y), (x, y)) &= 3x^2 + 4xy + 10y^2 = 2x^2 + (x^2 + 4xy + 4y^2) + 6y^2 = \\ &= 2x^2 + (x + 2y)^2 + 6y^2 \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

(c) f está bien definida.

En efecto

$$\begin{aligned} f((x, y), (x, y)) &= 0 \Rightarrow 2x^2 + (x + 2y)^2 + 6y^2 = 0 \\ &\Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

por (a), (b) y (c) f es un producto interno.

Solución de (2)

$$\|u\| = \|(1, -1)\| = \sqrt{f((1, -1), (1, -1))} = 3$$

$$\|v\| = \|(1, 0)\| = \sqrt{f((1, 0), (1, 0))} = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \|u - v\| = \|(1, -1) - (1, 0)\| = \|(0, -1)\| = \\ &= \sqrt{3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot (-1) + 10 \cdot (-1)^2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta$$

$$\text{luego } \cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$$\langle u, v \rangle = \langle (1, -1), (1, 0) \rangle = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 10 \cdot (-1) \cdot 0 = 1$$

$$\text{Luego } \cos \theta = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Ejercicio

Sobre $M_2(\mathbb{R})$, consideremos el producto interno siguiente:

$$f : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; f(A, B) = \text{tr}(A^t B)$$

Sea S subespacio de $M_2(\mathbb{R})$ con base

$$C = \{u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

1. Ortonormalicemos la base de C de S
2. Busquemos el subespacio ortogonal a S

Solución de (1)

$$\|u_1\| = \sqrt{\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{3}$$

$$\text{Sea } g_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $v_2 = u_2 - \langle u_2, g_1 \rangle g_1 =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - (1 + (-1) + 1) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|v_2\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$g_2 = \frac{1}{\frac{2}{3}\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que: $v_3 = u_3 - \langle u_3, g_1 \rangle g_1 - \langle u_3, g_2 \rangle g_2$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} -$$

$$\begin{aligned}
&< \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} > \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\
\|v_3\| &= \sqrt{\text{tr} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \\
g_3 &= \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego $\{g_1, g_2, g_3\}$ es la base ortonormal de S obtenida por el proceso de Gram-Schmidt.

Solución de (2)

Busquemos el subespacio ortogonal a S

Construyamos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}
&< \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} > = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0 \\
&< \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} > = 0 \Leftrightarrow x - y + z = 0 \\
&< \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > = 0 \Leftrightarrow x + t = 0
\end{aligned}$$

Si escalonamos el sistema tenemos: $x = -t$; $y = 0$; $z = t$.

Luego el subespacio ortogonal de S es $S^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Ejercicio

Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = 2x_1x_2 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 5y_1z_2 + 5y_2z_1 + 4z_1z_2$$

1. Busquemos la forma cuadrática asociada a esta forma bilineal simétrica.
2. Busquemos la matriz asociada a f con respecto a la base canónica.

Solución de (1)

$$q(x, y, z) = f((x, y, z), (x, y, z)) = 2x^2 + 3xy + 3xy + 5yz + 5yz + 4z^2.$$

$$\text{Luego } q(x, y, z) = 2x^2 + 6xy + 10yz + 4z^2$$

Solución de (2)

Tenemos que hacer los siguientes cálculos:

$$f((1, 0, 0), (1, 0, 0)) = 2; f((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = 3;$$

$$f((0, 1, 0), (1, 0, 0)) = 0; f((1, 0, 0), (0, 0, 1)) = 0$$

$$f((0, 0, 1), (1, 0, 0)) = 0; f((0, 1, 0), (0, 1, 0)) = 0$$

$$f((0, 1, 0), (0, 0, 1)) = 5; f((0, 0, 1), (0, 1, 0)) = 5$$

$$f((0, 0, 1), (0, 0, 1)) = 4$$

$$\text{Luego } (f; C, C) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

Sea $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $q(x, y, z) = 3x^2 + 2xz - 10yz + 2z^2$

1. Busquemos la matriz asociada a q con respecto a la base canónica $C = \{e_1, e_2, e_3\}$
2. Busquemos la forma bilineal asociada a q

Solución de (1)

Tenemos que

$$\begin{aligned}
 q(x, y, z) &= (x \ y \ z) \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \\
 &= (ax + by + cz \quad bx + dy + ez \quad cx + ey + fz) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \\
 &= (ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2) = \\
 &= (ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2)
 \end{aligned}$$

Luego $a = 3$; $b = 0$; $c = 1$; $d = 0$; $e = -5$; $f = 2$

Luego

$$(q; C) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución de (2)

$$\begin{aligned}
 f(e_1, e_1) &= 3; f(e_1, e_2) = f(e_2, e_1) = 0; f(e_1, e_3) = f(e_3, e_1) = 1; \\
 f(e_2, e_2) &= 0; f(e_2, e_3) = f(e_3, e_2) = -5; f(e_3, e_3) = 2
 \end{aligned}$$

Sea $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ y $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3) = \\
 &= \alpha_1 \beta_1 \cdot 3 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \cdot 0 + (\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) \cdot 1 + \alpha_2 \beta_2 \cdot 0 + \\
 &+ (\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) \cdot (-5) + \alpha_3 \beta_3 \cdot 2
 \end{aligned}$$

Luego

$$f(x, y) = 3\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 + (-5)\alpha_2\beta_3 + (-5)\alpha_3\beta_2 + 2\alpha_3\beta_3$$

O bien lo podríamos haber obtenido de la manera siguiente:

$$f((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

7.6 Ejercicios propuestos

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal definida por:

$$f((x, y, z), (a, b, c)) = xa + 4xb + kya + lyb + mzc$$

- (a) Encuentre las propiedades que deben cumplir k, l, m de manera que f sea un producto interno.
 - (b) Para $k = 4, l = 17, m = 1$, encuentre la matriz asociada a f con respecto a la base $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$
2. Sea $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $q(x, y, z) = xy$.
- (a) Encuentre la forma bilineal simétrica asociada a q .
 - (b) Encuentre la matriz asociada a q con respecto a la base $B = \{(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
3. Sea $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un producto interno. Demuestre que $f(u, v) = \frac{1}{4} \|u + v\|^2 - \frac{1}{4} \|u - v\|^2$.
4. Demuestre que $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Rightarrow u$ es ortogonal con v .
5. Considere el producto escalar $\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = 2xx' + 2xz' + 2x'z + 3zz' + yy'$$

Sea $S = \{(x, y, z); x + y + z = 0\}$. Encuentre S^\perp .

Epílogo

Antes de terminar, queremos felicitarte por llegar hasta el final de estos apuntes.

Deseamos que apruebes el curso. Feliz tú si apruebas este ramo y mejor aún si es con buena nota. ¡Felicitaciones! Esperamos que ahora entiendas mejor como se van construyendo las matemáticas.

Si debes profundizar este ramo el próximo semestre, entonces ánimo

Sabes, todos nos hemos caído en nuestras vidas y lo importante es pararse, animarse y volver a hacer todo de nuevo y mucho mejor que antes. ¿Todo de nuevo? Si ¡Todo de nuevo!, pero el próximo semestre entenderás muy bien y tal vez sea el comienzo de una nueva etapa en tu vida de estudiante. ¡De ahora en adelante te irá estupendo!

Bibliografía

- [1] **Boldrini, Costa, Figueiredo, Wetzler**, *Algebra Linear*, Harbra.
- [2] **C. A. Callioli, H. H. Domingues, R. C. F. Costa**, *Algebra Linear e aplicacoes*, Atual.
- [3] **A. Doneddu**, *Polinome et Algebre Lineaire*. Vuibert.
- [4] **J. B. Fraleigh**, *Algebra Lineal*, Addison-Wesley Iberoamericana.
- [5] **E. Gentile**, *Notas de Algebra, Algebra Lineal*, Docencia S.A. Buenos Aires.
- [6] **S. Grossman**, *Algebra Lineal*, MacGraw Hill.
- [7] **K. Hoffman y R. Kunze**, *Algebra Lineal*. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.
- [8] **B. Kolman**, *Algebra Lineal*, Addison-Wesley Iberoamericana.
- [9] **S. Lang**, *Linear Algebra*, Springer-Verlag New York Inc.
- [10] **I. Proskuriakov**, *Problemas de Algebra lineal*, Mir. Moscu.
- [11] **P. C. Shields**, *Algebra Lineal*, Interamericana.

Indice de términos

- Angulo entre vectores, 304
- Aplic. Bil. simétrica, 286
- Aplicación lineal, 119
- Aplicación nula, 121
- Aplicaciones Bilineales, 275, 276, 278
- Automorfismo, 145, 200
- Base, 81
- base canónica de $K[X]$, 84
- base canónica de K^2 , 84
- base canónica de K^n , 83
- base canónica de $K_2[X]$, 84
- base canónica de $K_m[X]$, 84
- Base Diagonalizante, 257
- Base escalonada, 86
- Base ortonormal, 301
- Base ortonormalizada, 302
- Cambio de base, 202
- Cofactor, 229
- Combinación lineal, 12, 54
- Combinación lineal de ecuaciones, 12
- Componentes, 83
- Composición de morfismos, 183
- Conjunto maximal l.i., 78
- Conjunto minimal, 69
- Conjunto ortogonal, 299
- Conjunto ortonormal, 299
- Desigualdad de Cauchy-Schwartz, 296
- Desigualdad de Lagrange, 297
- Desigualdad triangular, 297
- Determinante, 219, 220, 226, 228, 229
- Determinante de un endomorfismo, 234, 235
- Diagonalizable, 257, 258
- Diagonalización, 249
- Dimensión, 92, 96, 97
- Distancia entre vectores, 305
- divisor de cero, 188
- Ecuaciones equivalentes, 9
- Elementos propios, 253
- Endomorfismo, 144
- Epimorfismo, 145
- Esp. vec. complejos, 97
- Espacio Euclidiano, 291, 293
- Espacio métrico, 306
- Espacio vectorial, 35
- Espacio vectorial finito, 40
- Familia de sistemas, 24
- Forma Bilineal, 287
- Forma cuadrática, 306
- Forma definida, 292
- Forma matricial de $f(v) = w$, 193

-
- Forma matricial de un sistema de EC., 195
 Forma positiva, 292
 Homotecia, 121
 idempotente, 189
 Identidad, 121
 involutiva, 189
 Isomorfismo, 145
 Isomorfo, 149
 Linealmente dependiente, 70
 Linealmente independiente, 70
 Matrices equivalentes, 203, 205
 Matrices semejantes, 206
 Matriz, 21
 Matriz adjunta, 232, 234
 Matriz antisimétrica, 191
 Matriz asociada, 173, 174, 176, 288, 289
 Matriz de cambio de base, 200, 202
 Matriz elemental, 198
 Matriz idempotente, 212
 Matriz invertible, 187
 matriz nilpotente de grado m , 189
 Matriz ortogonal, 191
 Matriz simétrica, 191
 Matriz singular, 187
 Matriz transpuesta, 190
 Monomorfismo, 144
 Morfismo, 144
 Núcleo, 131, 135
 Norma, 293
 Operación elemental, 13, 66
 Operaciones elementales, 13
 Ortogonalidad, 298
 Parte antisimétrica, 192
 Parte simétrica, 192
 Polinomio característico, 256
 Polinomios truncos, 38
 Ponderación de una Aplic. Bil., 283
 Producto $\lambda \cdot f$, 181
 Producto $\lambda \cdot M$, 181
 Producto de matrices, 183, 184
 Producto escalar, 291, 293
 Producto por escalar, 35, 154
 Reflexión, 122
 Rotación, 124
 Sistema de Cramer, 17
 Sistema de Ec. l.d., 16
 Sistema de Ec. l.i., 17
 Sistema escalonado, 20
 Sistema lineal, 11
 Sub-espacio generado, 60
 Sub-espacio suma, 102
 Sub-espacio vectorial, 43, 44
 Sub-espacios l.i., 110
 Sub-espacios suplementarios, 110
 Sub-espacios vectoriales, 42
 Subdeterminante, 226
 Subespacio ortogonal, 304
 Subespacio propio, 255
 Suma de Aplic. Bilineales, 283
 Suma de matrices, 179
 Suma de morfismos, 179
 Suma de sub-espacios, 101, 113

Suma directa de sub-espacios,
108, 114

Teo. Gram-Schmidt, 301

Teorema Aplic. Bil., 279

Teorema de invariancia, 96

Teorema de Steinitz, 89

Teorema fundamental, 127

Tipos especiales de matrices, 186

Translación, 123

Traza de una matriz, 192

Valor propio, 254

Valor propio múltiple, 265

Valor propio simple, 258

Vector propio, 254

Vectores escalonados, 86

Vectores l.d., 70

Vectores l.i., 70

Vectores ortogonales, 298