UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIENCIAS Y ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Solución Taller N°3
Álgebra (IME006)

Profesores: M. T. Alcalde, R. Benavides, C. Burgueño,
M. Carrillo, F. Salazar, A. Sepúlveda.

13 de Mayo 2008.

Problema.

En $\mathbb{Z}$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la siguiente forma

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2k, \text{para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

1. Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
2. Determine las clases de equivalencias del 0 y 1
3. Determine el conjunto cuociente $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

Solución.

1. Debemos mostrar que $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva. En efecto,

    a) **Reflexiva.** $a\mathcal{R}a \Leftrightarrow a^2 + a^2 = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ es verdadera para $k = a^2$. Por tanto, $\mathcal{R}$ es reflexiva.

    b) **Simetría.** Si $a\mathcal{R}b$ entonces $a^2 + b^2 = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, es decir, $b^2 + a^2 = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, por tanto, $b\mathcal{R}a$. Concluimos que $\mathcal{R}$ es simétrica.

    c) **Transitividad.** Si $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$ tenemos $a^2 + b^2 = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ y $b^2 + c^2 = 2t$, $t \in \mathbb{Z}$. De donde, $a^2 + c^2 = 2\left(k + t - b^2\right)$, con $\left(k + t - b^2\right) \in \mathbb{Z}$. Es decir, $\mathcal{R}$ es transitiva.

    Por todo lo anterior, concluimos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

2. Para las clases de equivalencias tenemos,

    a) **Clase del** 0**.**
    $a\mathcal{R}0 \Leftrightarrow a^2 = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$, es decir, a^2 es un número par, lo que implica que a es par. Luego,

    $$cl\,(0) = \{a \in \mathbb{Z} \mid \ a \text{ es par}\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 2t, t \in \mathbb{Z}\}$$

b) **Clase del** 1**.**
$a\mathcal{R}1 \Leftrightarrow a^2 = 2k - 1$ con $k \in \mathbb{Z}$, es decir, a^2 es un número impar, lo que implica que a es impar. Luego,

$$cl\left(1\right) = \{a \in \mathbb{Z} \mid \ a \text{ es impar}\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 2t - 1, t \in \mathbb{Z}\}$$

3. Del punto anterior no es difícil ver que sólo hay dos clases de equivalencia, por tanto, el conjunto cuociente es,

$$\mathbb{Z}/\mathcal{R} = cl\left(0\right) \cup cl\left(1\right).$$