Analyse 2

20241011

14 septembre 2021

Chapitre 1 Notion de dérivabilité

Proposition 1

Lorsque a n'est pas une borne de I, la fonction f est dérivable en a si ei seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Proposition 2

Si f est coïncide au voisinage de a avec une fonction g dérivable en a ; alors f est dérivable en a et $f'(a) = g;(a)$.

Proposition 3

Si f est dérivable en a ; alors elle est continue en a.

Proposition 4

Soient f et g deux fonction définies sur I ainsi que λ et μ deux réels. Si f et g sont dérivables en a, alors les fonction $\lambda f + \mu g$ et $f\,g$ sont dérivables en a et l'on a :

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a) \quad \textit{et} \quad (f\,g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a).$$

Proposition 5

Si f est une fonction dérivable en a et ne sannulant pas sur I, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est dérivable en a et :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$$

Proposition 6

Soient I et J deux intervalles, f une application de I dans J et g une application définie sur J. Si f est dérivable en $a \in I$ et g dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)\,f'(a)$$

Proposition 7

Soit f une application continue et strictement monotone de lintervalle I sur lintervalle $J = f\,(I)$, dérivable en $a \in I$. La fonction f^{-1} est dérivable en $b = f\,(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$, et l'on a alors :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Proposition 8

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I qui nen est pas une borne. Si la fonction f présente un extremum local en a et si elle est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.

Proposition 9

Soit f une fonction dérivable sur lintervalle I. Étant donnés deux réels x et h tels que x et $x + h$ appartiennent à I, il existe un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h).$$

Proposition 10

Soient I un intervalle et f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$.

La fonction f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$ (resp. $\forall x \in I, f'(x) \leqslant 0$).

Chapitre 2 Approximation locale des fonctions

Chapitre 3 Intégration

Définition 1

- *On appelle subdivision de $[a, b]$, toute famille $u = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ telle que $n \in \mathbb{N}^*$ et :*

$$a = x_o < x_1 < \cdots < x_n < b.$$

- *On appelle pas ou module de la subdivision $u = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, le réel :*

$$\delta(u) = \max_{i \in [\![0,n]\!]} (x_i - x_{i-1}).$$

Définition 2

Si u et v sont deux subdivisions de $[a, b]$, on dit que u est plus fine que v si tout élément de v est élément de u.

Proposition 11

Si u et v sont deux subdivisions de $[a, b]$, il existe une subdivision plus fine que u et v.

Définition 3

Une fonction ϕ de $[a, b]$ dans R est en escalier si lon peut trouver une subdivision $u = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ telle que ϕ soit constante sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Une telle subdivision u est appelée subdivision adaptée à la fonction en escalier ϕ.

Proposition 12

Soient ϕ et ψ dans $\mathcal{E}[a, b]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lambda\phi + \mu\psi$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.

Proposition 13

Soit $\phi \in \mathcal{E}[a, b]$ et $u = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une subdivision adaptée à ϕ. Si, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note c_i la valeur de ϕ sur $]x_{i-1}, x_i[$, alors la quantité :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) c_i$$

ne dépend pas de la subdivision u choisie.

On l'appelle intégrale de ϕ sur $[a, b]$ et on la note :

$$\int_{[a,b]} \phi.$$