Theorem1 1. 对于一个有向无环图 G, 插入一条边 (S_u, S_v) 使得 G 中出现环, 记环中的所有节点集合为 C, 将把 C 中的节点合并为新节点 S_{new} 得到的 DAG 记为 G_{new}, 则对于 G_{new} 中的任何一个节点 S_i, 记 S_i 的入边集合为 IN_Si, 出边集合为 OUT_Si , 如果 $S_i \notin C$, 那么 $C \cap IN_Si \neq \emptyset$ 与 $C \cap OUT_Si \neq \emptyset$ 至多有一个成立。

Proof. 使用反证法，假设 $C \cap IN_Si \neq \emptyset$ 与 $C \cap OUT_Si \neq \emptyset$ 同时成立, 取 $S_j \in C \cap IN_Si$, $S_k \in C \cap OUT_Si$, 由于合并后节点 S_j 与节点 S_k 之间存在一条边, 所以在 G_{new} 中 S_j 与 S_k 属于同一个强连通分量, 则必然存在一条路径 p, 使得 $S_k \xrightarrow{p} S_j$. 此时 G_{new} 中存在环 $S_i \to S_k \xrightarrow{p} S_j \to S_i$, 与 G_{new} 为有向无环图相矛盾. 故 $C \cap IN_Si \neq \emptyset$ 与 $C \cap OUT_Si \neq \emptyset$ 至多有一个成立。 □

Theorem1 2. 对于一个已经建立完成的索引图 G_I, 若其中有根据规则 *3* 创建的边 $(< S_i, L_1 >, < S_i, L_2 >), L_2 \in L_1$, 那么 $|L_1| = 1$, 即 L_1 中只含有一个时刻.

Proof. 有问题!!!
索引图建立时，构造与 S_i 相关的出入边共有四种情况。

- S_i 作为 S_j 在 t_x 时刻的 N_1 出边, 构造边 $(< S_j, t_x >, < S_i, t_x >)$
- S_i 作为 S_j 在 $L_2(S_j, S_i)$ 时刻的 N_2 出边, 构造边 $(< S_j, L^+(S_j) >, < S_i, L_2(S_j, S_i) >)$
- S_i 在 t_x 时刻有 N_1 出边 S_k, 构造边 $(< S_i, t_x >, < S_k, t_x >)$
- S_i 在 $L_2(S_i, S_k)$ 时刻有 N_2 出边 S_k, 构造边 $(< S_i, L^+(S_i) >, < S_k, L_2(S_i, S_k) >)$

上述情况中, 第二种情况构造的边 $(< S_j, L^+(S_j) >, < S_i, L_2(S_j, S_i) >)$ 表示 S_i 在 $L_2(S_j, S_i)$ 时刻必有入边节点 S_j, 第四种情况构造的边 $(< S_i, L^+(S_i) >, < S_k, L_2(S_i, S_k) >)$ 表示 S_i 在 $L^+(S_i)$ 时刻必定没有入边。
因此必然满足 $\bigcup\limits_{S_j \in G_S, S_j \neq S_i} L_2(S_j, S_i) \quad \cap \quad L^+(S_i) = \emptyset$, 因此 L_2 只能含有有一个时刻, 即 $|L_2| = 1$. □

Theorem1 3. 对于一个有向无环图 G, 若加入一条边 $(u, v), u \in G, v \in G$ 使得 G 中产生了强连通分量, 那么必定存在至少一个环 C, 且 $u \in C, v \in C$.

Proof. 在 G 中, 节点 u 和节点 v 的关系一共有三种情况

- u 与 v 相互不可达.
- G 中存在一条路 p, 使得 $u \overset{p}{\rightsquigarrow} v$, 即 u 可达 v
- G 中存在一条路 q, 使得 $v \overset{q}{\rightsquigarrow} u$, 即 v 可达 u

$u \overset{p}{\rightsquigarrow} v$ 和 $v \overset{q}{\rightsquigarrow} u$ 不可能同时存在，因为这与 G 是有向无环图相矛盾. 在第一种情况中, 新加入 (u, v) 最多只能使得 $u \rightsquigarrow v$, 不满足 G 中产生强连通分量的条件在第二种情况中，新加入 (u, v), 由于 u, v 已经可达, 因此加入后仍无法满足 G 中产生强连通分量的条件在第三种情况中, 新加入 (u, v) 会产生环 $v \overset{q}{\rightsquigarrow} u \to v$.

综上所述, 对于一个有向无环图 G, 若加入一条边 $(u, v), u \in G, v \in G$ 使得 G 中产生了强连通分量, 那么必定存在至少一个环 C, 且 $u \in C, v \in C$. $\square$