Theorem 1. 对于一个有向无环图 G, 插入一条边 (S_u, S_v) 使得 G 中出现环, 记环中的所有节点集合为 C, 将把 C 中的节点合并为新节点 S_{new} 得到的 DAG 记为 G_{new}, 则对于 G_{new} 中的任何一个节点 S_i, 记 S_i 的入边集合为 IN_Si, 出边集合为 OUT_Si , 如果 $S_i \notin C$, 那么 $C \cap IN_Si \neq \emptyset$ 与 $C \cap OUT_Si$ 至多有一个成立。

Proof. 使用反证法,假设 $C \cap IN_Si \neq \emptyset$ 与 $C \cap OUT_Si$ 同时成立, 取 $S_j \in C \cap IN_Si$, $S_k \in C \cap OUT_Si$, 由于合并后节点 S_j 与节点 S_k 之间存在一条边, 所以在 G_{new} 中 S_j 与 S_k 属于同一个强连通分量, 则必然存在一条路径 p, 使得 $S_k \xrightarrow{p} S_j$. 此时 G_{new} 中存在环 $S_i \to S_k \xrightarrow{p} S_j \to S_i$, 与 G_{new} 为有向无环图相矛盾. 故 $C \cap IN_Si \neq \emptyset$ 与 $C \cap OUT_Si$ 至多有一个成立。 □