

基于磁荷模型的永磁体空间磁场的有限元分析与计算

汤双清¹ 沈 洁¹ 陈习坤¹ 蔡敢为²

(1. 三峡大学 机械与材料学院, 湖北 宜昌 443002; 2. 华中科技大学 机械科学与工程学院, 武汉 430072)

摘要: 基于等效磁荷模型对永磁体空间磁场进行分析, 并利用泛函理论建立了与该模型对应的变分形式, 再利用变分原理详细地讨论了有限元计算方法. 由于等效磁荷模型使用仅有一个自由度的标量磁位, 因而计算起来比具有3个自由度的矢量磁位的等效电流法更简便. 从永磁磁力轴承磁场的算例中可以看出, 用等效磁荷模型的有限元法计算永磁体空间磁场是非常简便和有效的.

关键词: 永磁体; 磁场; 标量磁位; 矢量磁位; 有限元

中图分类号: TM271.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-7081(2003)05-0452-04

Finite-Element Analysis and Calculation on Spatial Magnetic Field Emanated from Permanent Magnet Based on Magnetic-Charge Model

Tang Shuangqing¹ Shen Jie¹ Chen Xikun¹ Cai Ganwei²

(1. Mechanical and Material College, China Three Gorges Univ., Yichang 443002, China; 2. School of Mechanical Engineering and Science, HuaZhong Science and Technology Univ., Wuhan 430072, China)

Abstract Based on the magnetic-charge model of permanent magnet, this paper analyses the spatial magnetic field emanated from the permanent magnet, employs the fontionelle theory to derive the variation forms corresponding to the magnetic-charge model, and in detail discusses the finite element method of the model on the basis of the variation theory. Because the model employs the scalar magnetic potential with one degree of freedom (DOF), its calculation is simpler than the electric-current pattern employing the vector magnetic potential with three DOF's. It is seen from the example of permanent magnetic bearing that, the finite element method of the magnetic-charge model is very simple and effective in calculating the magnetic field emanated from the permanent magnet.

Keywords permanent magnet; magnetic field; scalar magnetic potential; vector magnetic potential; finite element

永磁材料作为当今各行各业非常重要的功能材料之一, 已广泛应用于计算机、扬声器、家用电器、仪器仪表、磁力机械、电机、医疗器械等仪器设备中. 一般来说, 在上述应用领域当中所使用的永磁体主要是用来提供设备仪器所需的磁场. 不同的应用领域所要求的永磁体的形状不同, 对磁场的空间分布和磁场强度的要求也不同. 目前应用最多的是圆柱形、长方形、扇形和圆环形等具有较高对称性的永磁体.

随着稀土永磁材料的不断涌现和应用领域的不断扩大, 人们对永磁体磁场的计算更加关注. 关于永磁体磁场的数值计算, 国内外已有多篇文献报道, 主要方法有等效磁荷法^[1,2]、等效电流法^[3]和有限元法^[3]等. 对于简单形体的永磁体, 如立方体, 使用等效磁荷法^[1]或等效电流法可以得到磁场的解析表达式, 但对于复杂的形体, 想求出磁场的解析式是非常困难的, 此时只有借助于数值方法来求解微分方程或

收稿日期: 2003-08-01

基金项目: 国家自然科学基金(50175031)和湖北省教育厅自然科学基金(2003A001)资助

作者简介: 汤双清(1962-), 男, 副教授, 博士研究生.

积分方程的近似解. 在电磁场数值计算方法中, 有限元法适用性最强, 几乎能处理所有电磁场问题, 当然包括永磁磁场计算问题.

电磁场有限元法首先是依照 Maxwell 微分方程组^[4]和边界条件, 建立与之等价的变分形式, 并利用变分原理建立求解域内的单元特征式, 再将求解域的所有单元进行组装得到装配方程, 然后加入边界条件, 就可利用求解方程组的方法求出标量磁位或矢量磁位. 最后再根据标量磁位或矢量磁位求出场域内的磁场强度或磁场分布.

本文先根据 Maxwell 方程组, 利用等效磁荷模型导出用于永磁体空间磁场计算的积分式, 再根据泛函理论建立与这两种模型对应的变分形式, 然后利用变分原理建立永磁体空间磁场计算的有限元模型, 并将它用于永磁磁力轴承的设计计算之中.

1 永磁体空间磁场计算的等效磁荷模型

对于磁化磁体, 除可采用电磁场基本理论计算其周围空间磁场外, 还有两种完全等效的物理模型来处理相同的问题, 即等效磁荷模型和等效电流模型. 等效磁荷模型认为磁化磁体内部存在着密度为 ρ_m 的体磁荷分布和在磁体边界存在着密度为 ρ_{ms} 的面磁荷分布; 而等效电流模型则认为在磁化磁体的内部存在着密度为 J_m 的体电流分布和在磁体边界存在着密度为 J_{ms} 的面电流分布.

由于磁荷密度是标量, 而电流密度是矢量(存在3个分量), 所以在相同的磁体形状和尺寸以及相同求解域的条件下, 使用磁荷模型计算永磁体空间磁场要容易得多. 以下仅讨论磁荷模型.

等效磁荷模型认为, 永磁体(或软磁体)内存在的体磁荷密度 ρ_m (Wb/m^3) 为

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (1)$$

式中, μ_0 为真空磁导率, \mathbf{M} 为磁化强度.

在均匀磁化磁体内部, 由于 $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$, 因而由式(6)可知体磁荷密度 $\rho_m = 0$. 但是在边界上由于 \mathbf{M} 并不连续, 因而在磁体边界上仍然存在面磁荷密度 ρ_{ms} (Wb/m^2)

$$\rho_{ms} = \mu_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \quad (2)$$

式中, \mathbf{n} 为磁体边界的外法向单位矢量.

根据 Maxwell 方程组中的高斯定律, 可得由永磁体产生的空间任意点上标量磁位为

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi\mu_0} \iiint_{\Omega_1} \frac{\rho_m}{R} dV + \frac{1}{4\pi\mu_0} \oint_{\Gamma_2} \frac{\rho_{ms}}{R} ds$$

$$\text{或 } \varphi_m = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_1} \frac{\nabla \cdot \mathbf{M}}{R} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \frac{\rho_{ms}}{R} ds \quad (3)$$

应用散度定理, 式(3)可改写为

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_1} \mathbf{M} \cdot \nabla \frac{1}{R} dV \quad (4)$$

根据标量磁位 φ 与磁场强度的关系 $\mathbf{H}_m = -\nabla \varphi_m$, 可以求出永磁体周围的空间磁场强度

$$\mathbf{H}_m = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left(\iiint_{\Omega_1} \frac{\rho_m \mathbf{R}}{R^3} dV + \oint_{\Gamma_2} \frac{\rho_{ms} \mathbf{R}}{R^3} ds \right) \quad (5)$$

式中, \mathbf{R} 是源点(永磁体内)到场点(求解点)的矢径; R 是源点到场点的距离; Ω_1 是永磁体积分区域, Γ_2 是永磁体的边界.

在目前所使用的永磁体形状中, 仅长方体才可以利用公式(5)得到永磁体空间磁场的解析式, 其它形状的永磁体则只有采用数值方法才能得到其空间磁场的分布.

2 永磁体空间磁场计算的有限元法

目前电磁场的数值计算方法最流行的要数有限元法.

2.1 等效磁荷模型对应的变分形式

使用等效磁荷模型, 在场域中引入标量磁位, 满足磁场方程

$$\mu \nabla^2 \varphi = \rho_m \quad (6)$$

在永磁体(或软磁体)表面, 存在面磁荷密度 ρ_{ms} (均匀充磁时体磁荷密度为零), 则在磁体边界满足边界条件(第二类边界条件).

$$B_{1n} - B_{2n} = (-\mu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}) - (-\mu_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}) = \rho_{ms} \quad (7)$$

则对应方程(6)和(7)的泛函为

$$\begin{cases} T(\varphi) = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \mu \nabla^2 \varphi d\Omega - \iiint_{\Omega_1} \rho_m \varphi d\Omega_1 \\ - \oint_{\Gamma_2} \rho_{ms} \varphi ds = \min \end{cases} \quad (8)$$

再加上第一类边界条件

$$\Gamma_1: \varphi = 0$$

就构成了完整的变分形式.

其中, Ω 为求解域; Ω_1 为永磁体积分区域; Γ_2 为永磁体的边界区域.

2.2 变分问题的有限元方法

从以上计算永磁体空间磁场的变分形式可以看出, 等效电流模型由于使用了矢量磁位, 而矢量磁位又有3个自由度, 计算起来将比只有一个自由度的标量磁位方法要复杂得多. 方程(8)是计算稳恒电磁场

的一般变分形式,既可以使用矢量磁位方式,又可以采用标量磁位方法,当采用标量磁位法时只要将已知条件代入就可以得到与方程(8)完全相同的形式.因此,采用等效磁荷模型的变分形式计算永磁体空间磁场将是最简便的.

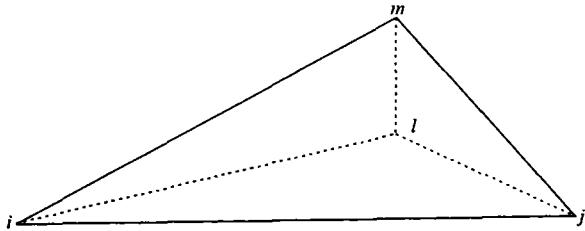


图1 空间四面体单元

对于空间连续场问题,现在以如图1所示的四面体单元对连续场进行离散,用有限个四面体单元的集合来代替原来的连续场.标量磁位函数可表示为

$$\varphi = [N_i \quad N_j \quad N_l \quad N_m] \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_l \\ \varphi_m \end{Bmatrix} \quad (9)$$

其中

$$N_k = \frac{1}{6V}(a_k + b_k x + c_k y + d_k z) \quad (k = i, j, l, m)$$

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_l & y_l & z_l \\ x_m & y_m & z_m \end{vmatrix}, b_i = - \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_l & z_l \\ 1 & y_m & z_m \end{vmatrix}$$

$$c_i = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_l & 1 & z_l \\ x_m & 1 & z_m \end{vmatrix}, d_i = - \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_l & y_l & 1 \\ x_m & y_m & 1 \end{vmatrix}$$

V 为四面体的体积.下标分别按 i, j, l, m, i 的顺序轮换,可得到其他3组数据.

简写成一般形式为

$$\varphi(x, y, z) = [N]\{\varphi\}^e \quad (10)$$

式中, $[N]$ 为插值函数或形函数.

根据泛函求极值原理,现将方程(8)对 φ_i 求偏导数得

$$\frac{\partial T^e}{\partial \varphi_i} = \iiint_{\Omega} \mu \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] d\Omega - \iiint_{\Omega_1} \rho_m \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i} d\Omega_1 - \iint_{\Gamma_2} \rho_{ms} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i} ds$$

将式(10)代入上式得

$$\frac{\partial T^e}{\partial \varphi_i} = \iiint_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [N] \{\varphi\}^e \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} [N] \{\varphi\}^e \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} [N] \{\varphi\}^e \frac{\partial N_i}{\partial z} \right\} d\Omega - \iiint_{\Omega_1} \rho_m N_i d\Omega_1 - \iint_{\Gamma_2} \rho_{ms} N_i ds$$

$$= [k_{ii} \quad k_{ij} \quad k_{il} \quad k_{im}] \{\varphi\}^e - P_i^e$$

其中

$$P_i^e = P_{iv}^e + P_{is}^e = \iiint_{\Omega_1} \rho_m N_i d\Omega_1 + \iint_{\Gamma_2} \rho_{ms} N_i ds \quad (11)$$

同理可得对单元 e 的其他3个节点的标量磁位的偏导数,连同上式写成如下形式:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T^e}{\partial \varphi_i} \\ \frac{\partial T^e}{\partial \varphi_j} \\ \frac{\partial T^e}{\partial \varphi_l} \\ \frac{\partial T^e}{\partial \varphi_m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{il} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jl} & k_{jm} \\ k_{li} & k_{lj} & k_{ll} & k_{lm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{ml} & k_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_l \\ \varphi_m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \\ P_l \\ P_m \end{Bmatrix} \quad (12)$$

上式简写成

$$\left\{ \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right\}^e = [K]^e \{\varphi\}^e - \{P\}^e \quad (13)$$

根据泛函求极值原理,由式(13)可得

$$[K]^e \{\varphi\}^e = \{P\}^e \quad (14)$$

将所有四面单元组装后可得

$$[K]\{\varphi\} = \{P\} \quad (15)$$

$$\text{式中, } [K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}, \{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{Bmatrix}, \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix}, n \text{ 为节点数.}$$

到此为止,还没有考虑第一类边界条件.由于在边界处 $\varphi=0$,可在系数矩阵 $[K]$ 中将与零磁位相对应的行列中,将主对角元素改为1,其它元素改为0;而在列矩阵 $\{P\}$ 中将与零磁位相对应的元素改为0即可.

至此,可利用解线性方程组的方法求解已考虑边界条件后的方程组(15),即可解得所有节点的标量磁位.求出标量磁位后,再将式(10)代入 $H = -\nabla \varphi$ 中即可求出各单元的磁场强度.

2.3 单元等效节点磁荷列阵

由式(14)得到的单元等效节点磁荷是

$$\{P\}^e = \{P\}_v^e + \{P\}_s^e$$

$$\{P\}_v^e = \iiint_{\Omega_1} \rho_m [N]^t dx dy dz$$

$$\{P\}_s^e = \iint_{\Gamma_2} \rho_{ms} [N]^t ds$$

在每个离散的单元内,即使整块磁体是非均匀充磁(或磁化)的,我们均认为体磁荷密度或面磁荷密度为常数.这样,以上两式中的磁荷密度均可以从积分

号中提出来,从而使积分更加简化.

3 永磁磁力轴承计算实例

众所周知,永磁体之间同性相斥、异性相吸. 因此一对永磁体可按照极性的不同布置分别构成斥力或吸力磁轴承,如图 2 所示就是一种斥力型永磁斥力轴承的结构简图.

在图 2 所示的结构中,永磁体材料选用各向同性的钕铁硼(NdFeB),均匀充磁后其相对回复磁导率为 1.18、矫顽力为 400kA/m. 一对永磁体的大小尺寸完全相同,内径为 $d1=40\text{ mm}$,外径为 $d2=80\text{ mm}$,厚度为 $h=20\text{ mm}$. 两永磁体同轴布置,其轴向距离为

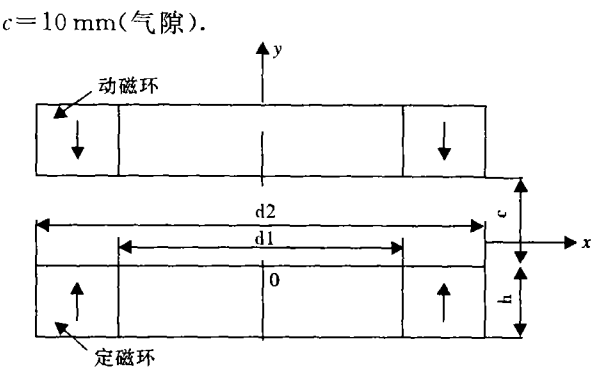


图 2 永磁斥力磁轴承

经过几何建模,网格划分,建立单元场表达式,并进行组装和边界条件处理后,最后求解线性方程组,可得到表 1 所列场强数据.

表 1 在半径为 30 mm 处沿轴向不同点处的磁场强度分析

Dist/m	0.000	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
HX/KA·m ⁻¹	36 076	37 201	38 331	39 464	39 848	39 849	39 851	39 467	38 334	37 202	36 071
HY/KA·m ⁻¹	-0.127 E+06	-0.809 E+05	-0.347 E+05	11 496	16 274	-2.939	-0.163 E+05	-0.113 E+05	34 825	80 996	0.127 E+06
HSUM/KA·m ⁻¹	0.132 E+06	89 082	51 718	41 104	43 042	39 849	43 045	41 065	51 791	89 131	0.132 E+06

为了直观起见,将表 1 所列数据绘制图 3 所示曲线图.

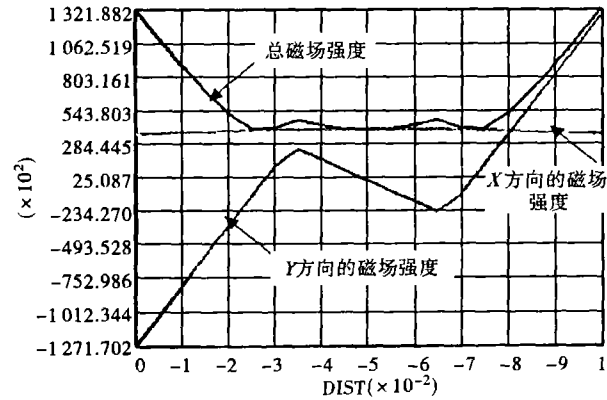


图 3 在半径为 30 mm 处沿轴向不同点处的磁场强度分布

4 结 论

永磁体空间磁场的计算除可以利用经典的电磁场理论(麦克斯韦方程组)外,还可以使用等效磁荷模型或等效电流模型使其计算更加简化. 由于等效电流模型必须使用矢量磁位,矢量磁位有 3 个自由度,

所以计算起来比使用标量磁位(仅一个自由度)的等效磁荷模型要复杂. 对于象长方体之类简单形状的永磁体,还可利用方程(5)继续推导出永磁体空间磁场的解析表达式.

本文依据等效磁荷模型推导的永磁体空间磁场计算的有限元法,可以用于解任意复杂形体的均匀充磁或非均匀磁的永磁体空间磁场问题. 它在永磁磁力轴承上的应用证实这种方法是简单有效的.

参考文献:

[1] 李景天,宋一得,郑勤红,等. 用等效磁荷法计算永磁体磁场[J]. 云南师范大学学报,1999,19(2):33~36.
[2] 屠关镇. 非均匀充磁永磁体磁场的数值计算[J]. 上海工业大学学报,1989,10(4):317~324.
[3] 朱红妹. 静态永磁路的非线性数值计算方法[J]. 应用科学学报,1998,16(3):300~304.
[4] 冯慈璋. 电磁场(第二版)[M]. 北京:高等教育出版社,1983.
[5] 曾余庚,徐国华,宋国乡. 电磁场有限单元法[M]. 北京:科学出版社,1982.

[责任编辑 周文凯]