

概率机器人笔记

概率机器人笔记

第一章 数学基础

一、概率论

【1.1 条件概率公式】

【1.2 贝叶斯】

【1.3方差、协方差、协方差矩阵】

【1.4其他】

二、线性代数

第二章 递归状态估计

一、基本概念

二、贝叶斯滤波

第三章 高斯滤波

一、卡尔曼滤波

二、扩展卡尔曼滤波

三、无迹卡尔曼滤波

四、信息滤波

五、扩展信息滤波

第四章 非参数滤波

一、直方图滤波

4.1.1 离散贝叶斯滤波

4.1.2 连续空间的直方图滤波

4.1.3 空间分解

二、静态二值贝叶斯滤波

三、粒子滤波

4.3.1重要性抽样

第一章 数学基础

一、概率论

【1.1 条件概率公式】

1. 定义

$$p(A|B) = \frac{p(AB)}{P(B)} \rightarrow p(AB) = p(A|B) \cdot p(B) \quad (1)$$

2. 如果将两件事看作一件事

$$\begin{aligned}
p(B|A, C) &= \frac{p(A, B, C)}{p(A, C)} \\
&= \frac{p(A|B, C) \cdot p(B, C)}{p(A, C)} \\
&= \frac{p(A|B, C) \cdot p(B|C) \cdot p(C)}{p(A|C) \cdot p(C)} \\
&= \frac{p(A|B, C) \cdot p(B|C)}{p(A|C)} \tag{2}
\end{aligned}$$

$$p(A|B, C) = \frac{p(B|A, C) \cdot p(A|C)}{p(B|C)} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
p(A|B, C) &= \frac{p(A, B, C)}{p(B, C)} \\
&= \frac{p(A, B, C)p(C)}{p(C)p(B, C)} \\
&= \frac{p(A, B|C)}{p(B|C)} \tag{4}
\end{aligned}$$

3. **条件独立**: $p(x, y|z) = p(x|z)p(y|z)$, 表达以 z 为条件的两个独立随机变量的联合概率, 并且, 条件独立定律一般不能和独立时间公式 $p(x, y) = p(x)p(y)$ 互推。

【1.2 贝叶斯】

1. 贝叶斯 (Bayes) 的先验概率: 如果 x 是希望从 y 中推测出来的数值, 则 $p(x)$ 称为**先验概率**, 先验概率不包含任何关于从 y 到 x 的推测, 仅仅是人们对 x 的经验认识, y 称为**数据**, 在机器人中就是传感器测量值。 $p(x)$ 总结了在综合数据 y 之前已经有的关于 x 的信息。
2. 贝叶斯的后验概率: 从传感器数据 y 推断 x 的值得到的关于 x 的概率分布 $p(x|y)$, 称为**在 X 上的后验概率分布**。由条件概率公式 (贝叶斯定理), 后验概率分布 $p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)}$, 由于分母 $p(y)$ 不依赖任何 x , 因此对于任何 x , $p(y)$ 总是常数, 称为**归一化常数**。所以, 贝叶斯定理的简洁表达式为: $p(x|y) = \eta p(y|x)p(x)$ 。
3. 贝叶斯公式:

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)} \tag{5}$$

$$p(B_i|A) = \frac{p(B_i)p(A|B_i)}{\sum_j p(B_j)p(A|B_j)}$$

【1.3方差、协方差、协方差矩阵】

1. 方差: 一个随机变量 X 分布的离散度

$$\sigma^2 = D(X) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&= E\{[X - E(X)]^2\} \\
&= \overline{(X - \bar{X})^2} \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{7}
\end{aligned}$$

$$= \overline{X^2} - \bar{X}^2 \tag{8}$$

2. 协方差: 两个随机变量 X 和 Y 之间的线性相关性 (协方差为零也有可能存在非线性相关性)

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \tag{9}$$

(线性) 相关系数:

$$\rho_{xy} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \tag{10}$$

3. 协方差矩阵: 若干个随机变量 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 之间的线性相关性

$$C = \begin{pmatrix} \text{Cov}(x_1, x_1), \text{Cov}(x_1, x_2), \dots, \text{Cov}(x_1, x_n) \\ \text{Cov}(x_2, x_1), \text{Cov}(x_2, x_2), \dots, \text{Cov}(x_2, x_n) \\ \vdots, \vdots, \ddots, \vdots \\ \text{Cov}(x_n, x_1), \text{Cov}(x_n, x_2), \dots, \text{Cov}(x_n, x_n) \end{pmatrix} \quad (11)$$

【1.4其他】

1. 多元高斯分布: $p(\mathbf{x}) = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\}$

2. 一个概率分布 $p(x)$ 的熵:

$$H_p(x) = E(-\log_2 p(x)) \quad (12)$$

$$H_p(x) = - \int p(x) \log_2 p(x) dx \quad (\text{连续}) \quad (13)$$

$$H_p(x) = - \sum_x p(x) \log_2 p(x) \quad (\text{离散}) \quad (14)$$

3. 正则参数: 一个概率密度函数(分布)可以用**矩参数**(一阶矩: 期望, 二阶矩: 协方差矩阵, 高阶矩.....)表示, 也可以用**正则参数**(矩参数的对偶参数)表示。多元高斯分布的正则参数由**信息矩阵**(精度矩阵) Ω 和**信息向量** ξ 表示

$$\Omega = \Sigma^{-1} \quad (15)$$

$$\xi = \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (16)$$

高斯分布的正则形式

$$p(\mathbf{x}) = \eta \exp -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Omega \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \xi \quad (17)$$

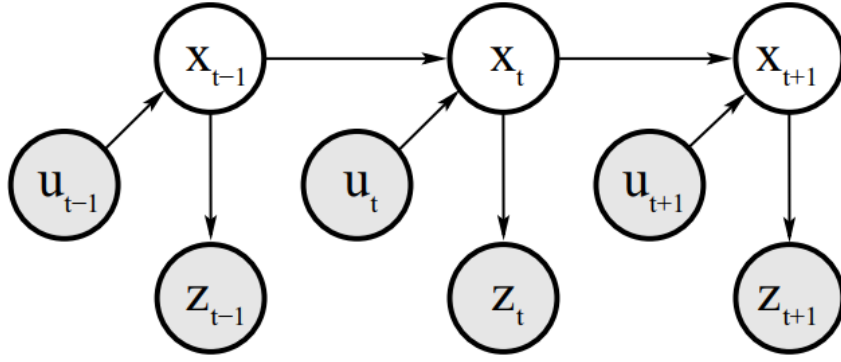
二、线性代数

1. 二次型: 关于向量 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 中各个元素的二次函数, 可以用矩阵表达。

第二章 递归状态估计

一、基本概念

- 状态: 包含环境(动态状态: 如周围人物的走动等, 静态状态: 建筑物的位置等)和机器人本身(机器人的位姿, 速度、传感器是否正常等)的会对未来产生影响的所有方面的因素, 用 \mathbf{x} 表示。一般包括
 - 机器人的位姿: 机器人相对于全局坐标系的位置和方向
 - 机器人执行机构配置(运动学状态): 各个关节的关节角度以及其它自由度
 - 机器人的运动状态: 速度、角速度
 - 机器人的环境状态: 环境中周围物体的位置和特征
- 环境交互: 包含**环境传感器测量**和**控制动作改变世界地状态**两部分。机器人连续地执行控制, 同时进行测量。
- 概率生成法则, 状态和测量的演变由概率法则支配, 状态转移概率和测量概率仪器描述机器人及其环境组成的动态随机系统。
 - 状态转移概率: $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{0:t-1}, \mathbf{z}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{1:t}) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t)$, 条件独立公式(条件独立的含义没理解), 即遵循马尔科夫假设;
 - 测量概率: $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t)$ 或者 $p(\mathbf{z} | \mathbf{x})$, 表明如果 \mathbf{x} 是完整的, 则状态 \mathbf{x}_t 足以预测(有潜在噪声的)测量 \mathbf{z}_t , 过去的测量、控制、状态等其他变量信息都与之无关。



4. 置信度（信息的状态/信息状态）-置信分布

- 置信度分布是以可获得数据（所有过去的测量 z_t 和所有过去的控制 u_t ）为条件的关于状态变量的后验概率 $\text{bel}(\mathbf{x}_t) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{u}_{1:t})$ ，注意 z 的下标是 $1:t$ 而不是 $1:t-1$ 。
- 综合 z_t 之前计算的后验概率或者置信度（有些地方叫做似然） $\bar{\text{bel}}(\mathbf{x}_t) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{u}_{1:t})$ ，是通过 t 之前历史测量数据对状态转移概率（先验）的修正。

二、贝叶斯滤波

5. 贝叶斯（Bayes）滤波

贝叶斯滤波使用上一个时刻 $t-1$ 的状态置信度，来推测当前时刻 t 的状态置信度。假设有一个系统递归方程 $\mathbf{x}_t = f(\mathbf{x}_{t-1}) + \mathbf{v}(t)$ ，其中 $\mathbf{v}(t)$ 是噪声，和一个测量方程 $z_t = g(\mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t)$ 。

首先通过系统方程可以得到当前时刻的状态转移概率，即先验概率分布（注意状态分布和噪声分布一样，再加上平移） $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{u}_{1:t}) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t)$ ，此处采用马尔科夫假设（状态完整性假设）。

另一方面，既然已经有了 $[1, t-1]$ 时刻的测量数据，可以使用历史测量数据对 t 时刻的状态概率分布进行估计 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{u}_{1:t})$ ，根据联合分布公式可得

$$\bar{\text{bel}}(\mathbf{x}_t) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{u}_{1:t}) = \int p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{u}_{1:t}) \cdot p(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{u}_{1:t}) d\mathbf{x}_{t-1} \quad (18)$$

(18)式也就是综合 z_t 之前计算的置信度，有些地方叫做似然，其中积分符号内是状态转移概率与前一个时刻的状态置信度的乘积。前者通过系统方程得到，后者为已知。**该式子也可以理解为用 $t-1$ 时刻的状态置信度对 t 时刻的状态转移概率求期望值，期望值就是在 t 时刻上结合了历史测量数据的状态分布预测，也就是 $\bar{\text{bel}}(\mathbf{x}_t)$ 。**

然后，通过测量方程得到当前时刻系统测量结果及其分布 $p(z_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{u}_{1:t}) = p(z_t | \mathbf{x}_t)$ 。

当前时刻系统状态分布的置信度 $\text{bel}(\mathbf{x}_t) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{u}_{1:t})$ ，可以根据条件概率公式（贝叶斯准则），即(3)式推导得出

$$\begin{aligned} \text{bel}(\mathbf{x}_t) &= p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{u}_{1:t}) \\ &= p(\mathbf{x}_t | z_t, \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{u}_{1:t}) \\ &= \frac{p(z_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{u}_{1:t}) \cdot \bar{\text{bel}}(\mathbf{x}_t)}{p(z_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{u}_{1:t})} \\ &= \eta p(z_t | \mathbf{x}_t) \cdot \bar{\text{bel}}(\mathbf{x}_t) \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $\eta = p(z_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{u}_{1:t})^{-1}$ 与 \mathbf{x}_t 无关，为归一化常数，可以通过归一化方法来计算，或者使用积分方法计算

$$\eta = p(z_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{u}_{1:t}) = \int p(z_t | \mathbf{x}_{t-1}) d\mathbf{x}_{t-1} \quad (20)$$

通过(19)式将当前时刻的系统状态置信度变为测量概率分布与似然的乘积，而似然又可以根据前一个时刻的置信度与状态转移概率得出，当 $t=1$ 时，需要初始置信度 $\text{bel}(\mathbf{x}_0)$ 。这就是贝叶斯滤波方法，其中(1)~(2)为预测，(4)为测量，(5)为更新。

贝叶斯滤波算法的步骤：

- (0) 初始化初始置信度 $\text{bel}(\mathbf{x}_0)$, $t = 1$;
- (1) 根据系统方程计算状态转移概率作为先验概率分布 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t)$;
- (2) 根据状态转移概率 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t)$ 和前一个时刻的状态置信度 $\text{bel}(\mathbf{x}_{t-1})$, 利用(18)式计算 $\overline{\text{bel}}(\mathbf{x}_t)$;
- (3) 根据(20)式计算 t 时刻的归一化常数 η_t ;
- (4) 根据系统测量方程得到测量概率分布 $p(z_t | \mathbf{x}_t)$;
- (5) 根据测量概率分布、似然（即综合 z_t 之前的置信度）以及归一化常数，利用(19)式计算置信度；
- (6) $t = t + 1$, 重复 (2) 到 (6), 直到满足退出条件。

第三章 高斯滤波

高斯滤波家族是实现贝叶斯滤波的一类方式，具体的还分为不同的方法，如卡尔曼滤波、扩展卡尔曼滤波、信息滤波等。所有高斯滤波都用多元高斯分布表示置信度

$$p(\mathbf{x}) = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}\right\} \quad (21)$$

一、卡尔曼滤波

1. 卡尔曼滤波 (Kalman Filter, KF)

- 卡尔曼滤波用矩参数，即概率分布的一阶矩（期望）、二阶矩（协方差矩阵）、高阶矩，表示置信度。
- 高斯后验，贝叶斯滤波中，如果除马尔科夫假设之外还有如下三个特性，则后验就是高斯的：
 - 状态转移概率必须是带有随机高斯噪声的参数的线性函数，其系统方程可以表示为(22)式，其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 是一个高斯随机变量，表示状态转移的不确定性，其维数和状态向量维数相同，期望为 $\mathbf{0}$ ，协方差矩阵为 \mathbf{R}_t 。这样的系统称为线性高斯系统，反映了它带有附加高斯噪声的自变量呈线性。

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (22)$$

- 测量概率也与带有高斯噪声的自变量呈线性关系，其测量方程可以表示为(23)式，其中 δ_t 为测量噪声，为高斯分布，期望式 $\mathbf{0}$ ，协方差矩阵为（后都称作协方差） \mathbf{Q}_t 。

$$z_t = \mathbf{C}_t \mathbf{x}_t + \delta_t \quad (23)$$

- 初始置信度必须是高斯分布，期望为 $\boldsymbol{\mu}_0$ ，协方差为 $\boldsymbol{\Sigma}_t$ 。

这三个假设保证了置信度在任何时刻都是高斯的。

○ 数学原理

卡尔曼滤波也从贝叶斯滤波出发，其流程和贝叶斯滤波相同，经过了预测和测量更新两步。其中预测部分求出了 $\overline{\text{bel}}(\mathbf{x}_t)$ ，更新部分求出 $\text{bel}(\mathbf{x}_t)$ 。由于两者都呈高斯分布，因此，对于分布的计算只需求出其期望 $\boldsymbol{\mu}$ 和协方差 $\boldsymbol{\Sigma}$ 。这里说明一下多元高斯分布的含义，多元高斯分布(21)其指数是关于 \mathbf{x} 的二次型，即指数部分如果能表示呈关于某一个向量的二次型，则该函数就是高斯分布。形如 $p(\mathbf{x}) = \eta \exp[-\mathcal{L}(\mathbf{x})]$ ，其中 $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ 是二次型的归一化函数就是高斯分布。高斯分布有两个性质：1. $\boldsymbol{\mu} = \arg[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = 0]$, 2. $\boldsymbol{\Sigma} = [\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^2}]^{-1}$ 。

- 预测：根据(18)式以及线性高斯假设，

$$\overline{\text{bel}}(\mathbf{x}_t) = \int \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\mu}_{t-1 \rightarrow t}, \boldsymbol{\Sigma}_{t-1 \rightarrow t}) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t-1}; \boldsymbol{\mu}_{t-1}, \boldsymbol{\Sigma}_{t-1}) d\mathbf{x}_{t-1} \quad (24)$$

$$= \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \bar{\boldsymbol{\mu}}_t, \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_t) \quad (25)$$

其中 $\mathcal{N}(x; \mu, \sigma^2)$ 表示高斯分布， $\mu_{t-1 \rightarrow t}$ 表示状态转移概率的期望， $\Sigma_{t-1 \rightarrow t}$ 表示状态转移概率的协方差， μ_{t-1} 表示 $t-1$ 时刻的置信度期望， Σ_{t-1} 表示 $t-1$ 时刻置信度的协方差。(24)式是两个高斯分布乘积的积分，其结果仍然是高斯分布。由于两个高斯分布的乘积，其各自的指数部分都是关于各自随机变量的二次型，指数函数相乘即指数相加，二次型相加仍然为各自随机变量的新二次型，新二次型记为 $\mathcal{L}(x_t)$ 。积分积掉 x_{t-1} ，对 x_t 仍然为高斯分布，对 $\mathcal{L}(x_t)$ 求一阶导数和二阶导数即可求出 $\bar{\mu}$ 和 $\bar{\Sigma}_t$ 。

$$\bar{\mu} = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \quad (26)$$

$$\bar{\Sigma}_t = (A_t \Sigma_{t-1}^{-1} A_t^T + R_t)^{-1} \quad (27)$$

- 更新：根据(19)式以及线性高斯假设，

$$\begin{aligned} \text{bel}(x_t) &= \eta \mathcal{N}(z_t; \mu_t^z, Q_t) \cdot \mathcal{N}(x_t; \bar{\mu}_t, \bar{\Sigma}_t) \\ &= \mathcal{N}(x_t; \mu_t, \Sigma_t) \end{aligned} \quad (28)$$

其中， $\mu_t^z = C_t x_t$ 为测量期望， Q_t 为测量协方差， μ_t 为 t 时刻置信度期望， Σ_t 为 t 时刻置信度协方差。两个高斯分布相乘同样是高斯分布。

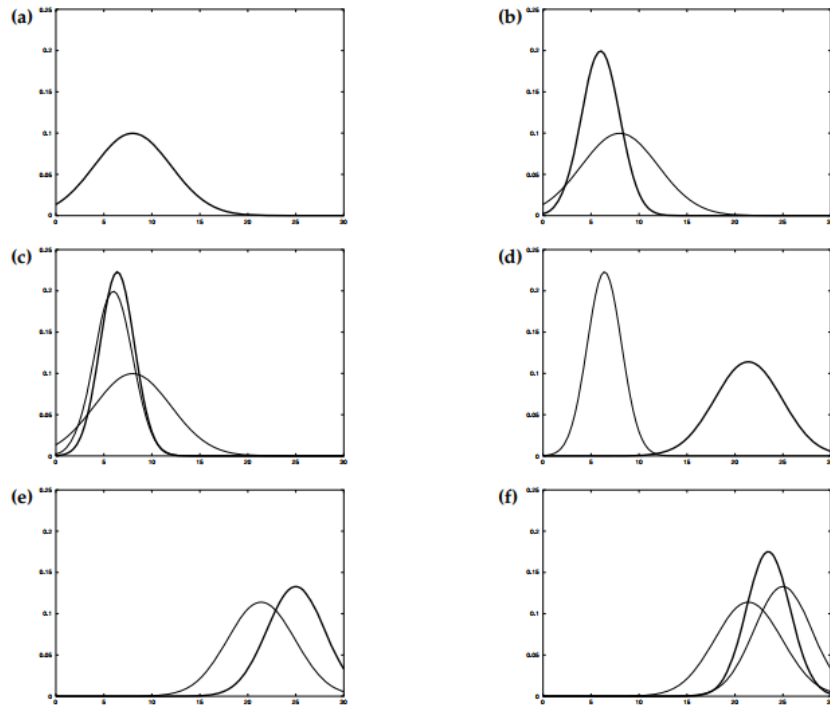
$$\begin{aligned} K_t &= \Sigma_t C_t^T Q_t^{-1} \\ &= \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t) \quad (30)$$

$$\Sigma_t = (I - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t \quad (31)$$

其中， K_t 为卡尔曼增益。这就计算出了当前时刻的系统状态置信度，只需要按照顺序计算五个红色公式即可。

- 书上的例子



(a)先验和初始置信度；(b)测量；(c)置信度；(d)状态转移（机器人移动），先验和上一步置信度结合 $\text{bel}(x_t)$ ；(e)测量；(f)置信度。

二、扩展卡尔曼滤波

2. 扩展卡尔曼滤波（Extend Kalman Filter, EKF）

卡尔曼滤波的重要假设是线性高斯系统，其中线性的含义是，①观测是状态的线性函数，并且②下一个状态是前一个状态的线性函数。高斯线性系统的特性是，高斯随机变量的任何线性变换都将导致另一个高斯随机变量。不幸的是，实际中状态转移和测量很少是线性的，这使得卡尔曼滤波算法不适用于除了最平凡的机器人问题以外的其他所有问题（好象很严峻的样子）。

扩展卡尔曼滤波假设状态转移概率和测量概率分别由非线性函数 g 和 h 控制。即

$$\mathbf{x}_t = g(\mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (32)$$

$$\mathbf{z}_t = h(\mathbf{x}_t) + \delta_t \quad (33)$$

准确地实现对置信度地更新对非线性函数是不可能的，因此扩展卡尔曼滤波计算真实置信度的高斯近似，其期望和协方差仍然为 $\boldsymbol{\mu}_t$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_t$ ，不同的是，扩展卡尔曼滤波的目标就从计算精确的后验概率转变为有效地估计其期望和协方差。

扩展卡尔曼滤波通过一个与非线性函数 g 在高斯均值处相切地线性函数取近似非线性函数 g 。

○ 通过泰勒展开线性化

- 将函数 $g(\mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1})$ 在 $\mathbf{x}_{t-1} = \boldsymbol{\mu}_{t-1}$ 处（认为在 $t-1$ 时刻，机器人最有可能的状态就是 $\boldsymbol{\mu}_{t-1}$ ）做一阶泰勒展开

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1}) &= g(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\mu}_{t-1}) + \left. \frac{\partial g(\mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1})}{\partial \mathbf{x}_{t-1}} \right|_{\mathbf{x}_{t-1}=\boldsymbol{\mu}_{t-1}} + \cdots \\ &\approx g(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\mu}_{t-1}) + \mathbf{G}_t(\mathbf{x}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{t-1}) \end{aligned} \quad (34)$$

(34)式就是一个线性函数，和(22)式一样，满足了线性要求中，下一个状态是前一个状态的线性函数这一要求， $\mathbf{G}_t = \left. \frac{\partial g(\mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1})}{\partial \mathbf{x}_{t-1}} \right|_{\mathbf{x}_{t-1}=\boldsymbol{\mu}_{t-1}} = ?$ ，是雅可比矩阵。

- 同理，将函数 $h(\mathbf{x}_t)$ 在 $\mathbf{x}_t = \bar{\boldsymbol{\mu}}_t$ 处做一阶泰勒展开

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}_t) &= h(\bar{\boldsymbol{\mu}}_t) + h'(\bar{\boldsymbol{\mu}}_t)(\mathbf{x}_t - \bar{\boldsymbol{\mu}}_t) + \cdots \\ &\approx h(\bar{\boldsymbol{\mu}}_t) + \mathbf{H}_t(\mathbf{x}_t - \bar{\boldsymbol{\mu}}_t) \end{aligned} \quad (35)$$

满足了线性要求中，观测是状态的线性函数这一要求， \mathbf{H}_t 是雅可比矩阵。

- 扩展卡尔曼滤波算法：满足了系统的线性要求，只要初始置信度是高斯的，则就可以使用卡尔曼滤波数学原理，得出扩展卡尔曼滤波的算法过程，即

$$\bar{\boldsymbol{\mu}}_t = g(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\mu}_{t-1}) \quad (36)$$

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_t = \mathbf{G}_t \boldsymbol{\Sigma}_{t-1} \mathbf{G}_t^T + \mathbf{R}_t \quad (37)$$

$$\mathbf{K}_t = \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_t \mathbf{H}_t^T (\mathbf{H}_t \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_t \mathbf{H}_t^T + \mathbf{Q}_t)^{-1} \quad (38)$$

$$\boldsymbol{\mu}_t = \bar{\boldsymbol{\mu}}_t + \mathbf{K}_t(\mathbf{z}_t - h(\bar{\boldsymbol{\mu}}_t)) \quad (39)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t) \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_t \quad (40)$$

- 局限：扩展卡尔曼滤波所应用的线性近似是否有优势取决于两个因素：被近似的局部线性化程度和不确定度，较高的不确定度通常会导致结果随机变量的均值和协方差估计更不精确，而更强的 g 的局部非线性会产生更大的近似误差。

三、无迹卡尔曼滤波

3. 无迹卡尔曼滤波 (Unscented Kalman Filter, UKF)

无迹卡尔曼滤波采用另一种线性化方法，它通过使用加权统计线性回归过程实现随机线性化。

高斯滤波，先假设系统状态转移或系统测量之前为高斯分布，通过状态转移和测量，其分布经过非线性变换已经不是高斯分布，高斯滤波的目的是将变换之后的分布仍然按照高斯分布来计算（KF，EKF都是）。

首先，在高斯分布（状态转移和测量之前）上选择 $2n+1$ 个 σ 点 $\boldsymbol{\chi}^{[i=0,2n]}$ ，并对其设置统计权重，然后经过变换得到 $\boldsymbol{y}^{[i=0,2n]}$ ，并进行统计，得到其期望和方差，作为变换后的近似高斯分布本质参数。

以下是无迹卡尔曼滤波的数学表达。

- 预测：通过系统方程 g 和前一个时刻 $t - 1$ 的状态置信度预测前置信度 $\overline{\text{bel}}(\mathbf{x}_t)$

- 选取点，通常情况下，选取期望以及对称分布主轴的协方差处（每维两个）

$$\mathbf{x}^{[0]} = \boldsymbol{\mu} \quad (41)$$

$$\mathbf{x}^{[i]} = \boldsymbol{\mu} + (\sqrt{(n + \lambda)\boldsymbol{\Sigma}})_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (42)$$

$$\mathbf{x}^{[i]} = \boldsymbol{\mu} - (\sqrt{(n + \lambda)\boldsymbol{\Sigma}})_{i-n}, \quad i = n + 1, \dots, 2n \quad (43)$$

n 为状态向量维度， $\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n$ ， α 和 κ 为确定 σ 点分布在期望多元范围内的比例参数。在程序中可以将(42)和(43)式中的参数吸收到 γ 里面在迭代之前事先计算，写成如下形式

$$\mathbf{x}_{t-1}^{[0]} = \boldsymbol{\mu}_{t-1} \quad (44)$$

$$\mathbf{x}_{t-1}^{[i]} = \boldsymbol{\mu}_{t-1}^{[i]} + (\gamma\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{t-1}})^{[i]}, \quad i = 1, \dots, n \quad (45)$$

$$\mathbf{x}_{t-1}^{[i]} = \boldsymbol{\mu}_{t-1}^{[i-n]} - (\gamma\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{t-1}})^{[i-n]}, \quad i = n + 1, \dots, 2n \quad (46)$$

- 计算权重（权重跟时间 t 没有关系，可以事先计算），有两个权重，一个是计算期望的权重 $w_m^{[i]}$ ，一个是计算协方差的权重 $w_c^{[i]}$

$$w_m^{[0]} = \frac{\lambda}{n + \lambda} \quad (47)$$

$$w_c^{[0]} = \frac{\lambda}{n + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) \quad (48)$$

$$w_m^{[i]} = w_c^{[i]} = \frac{1}{2(n + \lambda)}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (49)$$

β 是对高斯表示的附加的（较高阶）分布信息进行编码，对于精确的高斯分布， $\beta = 2$ 。

- 变换

$$\bar{\mathbf{x}}_t = g(\mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1}) \quad (50)$$

- 计算前置信度（高斯）

$$\bar{\boldsymbol{\mu}}_t = \sum_{i=1}^{2n} w_m^{[i]} \bar{\mathbf{x}}_t^{[i]} \quad (51)$$

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_t = \sum_{i=1}^{2n} w_c^{[i]} (\bar{\mathbf{x}}_t^{[i]} - \bar{\boldsymbol{\mu}}_t)(\bar{\mathbf{x}}_t^{[i]} - \bar{\boldsymbol{\mu}}_t)^T + \mathbf{R}_t \quad (52)$$

- 测量：测量过程是在 \mathbf{x}_t 上进行测量，而此时 \mathbf{x}_t 由 $\overline{\text{bel}}(\mathbf{x}_t)$ 给定，

- 选取点，在分布 $\overline{\text{bel}}(\mathbf{x}_t)$ 上选取 σ 点

$$\mathbf{x}_t^{[0]} = \bar{\boldsymbol{\mu}}_t \quad (53)$$

$$\mathbf{x}_t^{[i]} = \bar{\boldsymbol{\mu}}_t^{[i]} + (\gamma\sqrt{\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_t})^{[i]}, \quad i = 1, \dots, n \quad (54)$$

$$\mathbf{x}_t^{[i]} = \bar{\boldsymbol{\mu}}_t^{[i-n]} - (\gamma\sqrt{\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_t})^{[i-n]}, \quad i = n + 1, \dots, 2n \quad (55)$$

- 变换

$$\mathbf{z}_t = h(\mathbf{x}_t) \quad (56)$$

- 计算测量分布 $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t)$,

$$\hat{\mathbf{z}}_t = \sum_{i=1}^{2n} w_m^{[i]} \mathbf{z}_t^{[i]} \quad (57)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_t = \sum_{i=1}^{2n} w_c^{[i]} (\mathbf{z}_t^{[i]} - \hat{\mathbf{z}}_t)(\mathbf{z}_t^{[i]} - \hat{\mathbf{z}}_t)^T + \mathbf{Q}_t \quad (58)$$

- 更新，首先计算卡尔曼增益，然后计算置信度，其中 $\boldsymbol{\Sigma}_t^{x,y}$ 是互协方差，

$$\Sigma_t^{x,z} = \sum_{i=0}^{2n} w_c^{[i]} (\bar{\mathbf{x}}_t^{[i]} - \bar{\boldsymbol{\mu}}_t)(\bar{\mathbf{z}}_t^{[i]} - \mathbf{z}_t)^T \quad (59)$$

$$\mathbf{K}_t = \bar{\Sigma}_t^{x,y} \mathbf{S}_t^{-1} \quad (60)$$

$$\boldsymbol{\mu}_t = \bar{\boldsymbol{\mu}}_t + \mathbf{K}_t(\mathbf{z}_t - \hat{\mathbf{z}}_t) \quad (61)$$

$$\Sigma_t = \bar{\Sigma}_t - \mathbf{K}_t \mathbf{S}_t \mathbf{K}_t^T \quad (62)$$

无迹卡尔曼滤波通过分别对系统函数（前一个状态为高斯分布，高斯分布经过系统函数的非线性变换）和测量函数的（系统状态为高斯分布，高斯分布经过测量函数的非线性变换）结果的统计，计算出各自期望和方差，并以此人为制造高斯分布作为结果分布，该过程称为**无迹变换**。需要注意的是，对 g 的统计参数和对 h 的变换参数 α 和 β 是同一组（为什么是同一组呢？）。

四、信息滤波

4. 信息滤波 (Information Filter, IF)

信息滤波是卡尔曼滤波 (KF) 的对偶算法。在线性高斯系统（假设）下，系统的状态方程和测量方程均为线性，并且具有高斯随机噪声，如(22)和(23)式所示。

信息滤波将高斯分布表示为信息矩阵和信息向量，以下式数学形式

- 预测：计算前置信度 $\overline{\text{bel}}(\mathbf{x}_t)$

根据信息矩阵(15)式和信息向量(16)的定义，将其带入卡尔曼滤波方程(26)式和(27)式，得到

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}_t = (\mathbf{A}_t \boldsymbol{\Omega}_{t-1}^{-1} \mathbf{A}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1} \quad (63)$$

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}_t = \bar{\boldsymbol{\Omega}}_t (\mathbf{A}_t \boldsymbol{\Omega}_{t-1}^{-1} \boldsymbol{\xi}_{t-1} + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t) \quad (64)$$

- 更新：计算置信度 $\text{bel}(\mathbf{x}_t)$

将卡尔曼滤波中(28)式表示成正则形式(17)，并通过合并同类项，得到

$$\boldsymbol{\xi}_t = \mathbf{C}_t^T \mathbf{Q}_t^{-1} \mathbf{z}_t + \bar{\boldsymbol{\xi}}_t \quad (65)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_t = \mathbf{C}_t^T \mathbf{Q}_t^{-1} \mathbf{C}_t + \bar{\boldsymbol{\Omega}}_t \quad (66)$$

信息滤波的预测过程需要对矩阵求逆，时间复杂度为 $O(n^{2.4})$ ，更新过程是增量的，最坏时间复杂度为 $O(n^2)$ ；而卡尔曼滤波预测是增量的，最坏时间复杂度为 $O(n^2)$ ，更新过程需要对矩阵求逆，时间复杂度为 $O(n^{2.4})$ 。

五、扩展信息滤波

5. 扩展信息滤波 (Extend Information Filter, EIF)

扩展信息滤波和扩展卡尔曼滤波一样，采用一阶泰勒展开的方法近似非线性函数 g 和 h ，利用了雅可比矩阵 \mathbf{G}_t 和 \mathbf{H}_t 。以下是其数学形式

- 预测：计算前置信度 $\overline{\text{bel}}(\mathbf{x}_t)$

首先从前一个时刻的置信度 $\text{bel}(\mathbf{x}_{t-1})$ 恢复期望

$$\boldsymbol{\mu}_{t-1} = \boldsymbol{\Omega}_{t-1}^{-1} \boldsymbol{\xi}_{t-1} \quad (67)$$

然后计算前置信度的正则参数，参考扩展卡尔曼滤波算法中(37)式，并对其求逆得到信息矩阵，然后根据正则参数定义计算信息向量，其中(69)式认为 $\boldsymbol{\mu}_{t-1}$ 处的零阶泰勒展开就是 t 时刻状态的前置信度期望 $\bar{\boldsymbol{\mu}}_t = g(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\mu}_{t-1})$ 。

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}_t = (\mathbf{G}_t \boldsymbol{\Omega}_{t-1}^{-1} \mathbf{G}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1} \quad (68)$$

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}_t = \bar{\boldsymbol{\Omega}}_t g(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\mu}_{t-1}) \quad (69)$$

- 更新：计算置信度 $\text{bel}(\mathbf{x}_t)$

$$\Omega_t = \bar{\Omega}_t + H_t^T Q_t^{-1} H_t \quad (70)$$

$$\xi_t = \bar{\xi}_t + H_t^T Q_t^{-1} [z_t - h(\bar{\mu}_t) + H_t \bar{\mu}_t] \quad (71)$$

第四章 非参数滤波

非参数滤波（直方图滤波和粒子滤波）不需要对后验概率密度进行强参数化假设，并且能够很好地表示多峰置信度。在处理全局不确定问题时，或面对会产生独立、不同假设的数据关联问题时，通常会采用直方图滤波或粒子滤波。

一、直方图滤波

直方图滤波（Histogram Filter）将状态空间分解成有限区域，并用一个单一的概率值表示每一个区域的累积后验概率密度。

- 连续空间：直方图滤波
- 离散（有限）空间：离散贝叶斯滤波

4.1.1 离散贝叶斯滤波

离散贝叶斯滤波（discrete Bayes Filter）的状态空间 X 为 K 个取值，每一个状态取值 \mathbf{x}_k 用一个概率值表示其置信度，则时刻 t 的状态置信度可以表示为 $p_{k,t}$ 。

复习一下贝叶斯滤波：1. 首先根据系统方程 $\mathbf{x}_t = g(\mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1}) + \varepsilon_t$ 计算状态转移概率 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t)$ 作为先验分布；2. 根据状态转移概率和前一个时刻的置信度 $\text{bel}(\mathbf{x}_t)$ 计算 z_t 之前的置信度 $\bar{\text{bel}}(\mathbf{x}_t)$ ；3. 根据系统测量方程 $z_t = h(\mathbf{x}_t) + \delta_t$ 得到的测量概率 $p(z_t | \mathbf{x}_t)$ 和 $\bar{\text{bel}}(\mathbf{x}_t)$ 计算置信度 $\text{bel}(\mathbf{x}_t)$ 。

离散化贝叶斯滤波就是根据有限个状态空间的取值将贝叶斯滤波离散化，如下

$$\bar{p}_{k,t} = \sum_i p(X_t = \mathbf{x}_k | \mathbf{u}_t, X_{t-1} = \mathbf{x}_i) \cdot p_{i,t-1} \quad (72)$$

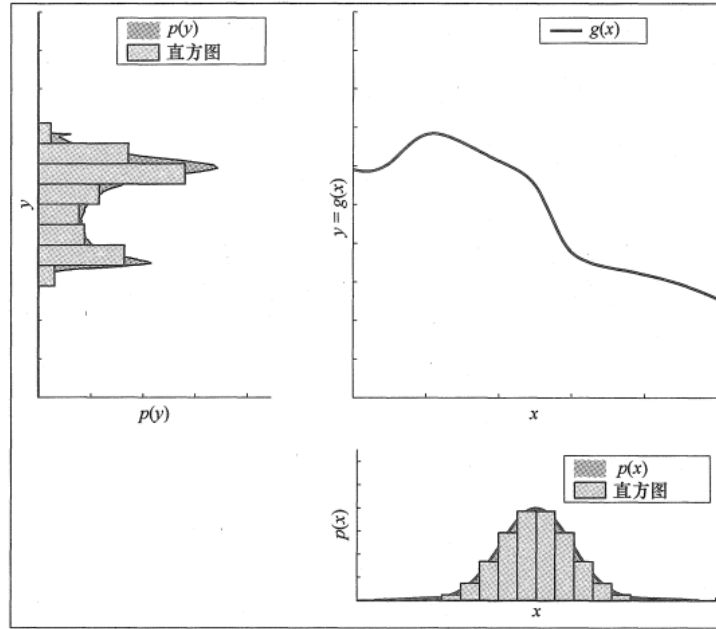
$$p_{k,t} = \eta p(z_t | X_t = \mathbf{x}_k) \bar{p}_{k,t} \quad (73)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, K)$$

离散化贝叶斯滤波公式(72)式和(73)式是(18)式和(19)式的离散化形式，注意式中 p 为概率而不是概率密度。

4.1.2 连续空间的直方图滤波

连续空间的直方图滤波首先将状态空间划分为有限个区域，即栅格化（离散化，离散化后和离散贝叶斯滤波相同），然后用每一个栅格中的代表状态（如平均值）来表示该栅格的状态，用该状态的置信度值表示栅格中所有状态的置信度，如下图直方图所示，再使用离散贝叶斯滤波(72)式和(73)式进行滤波计算。



1. 划分：将状态空间划分为有限个区域，用 $\text{feild}_{k,t}$ 表示 t 时刻状态空间划分的第 k 个区域，

$$\begin{aligned} \text{dom}(X_t) &= \text{feild}_{1,t} \cup \text{feild}_{2,t} \cdots \cup \text{feild}_{K,t} \\ \text{feild}_{i,t} \cap \text{feild}_{j,t} &= \emptyset \quad \text{for } i \neq j \quad (i, j \in [1, K]) \end{aligned} \quad (74)$$

2. 后验置信度概率：栅格化后区域 $\text{feild}_{k,t}$ 的置信度概率密度为该区域内的概率与区域大小比值，概率密度函数为分段常数函数， $|\text{feild}_{k,t}|$ 表示该区域的大小。

$$p(\mathbf{x}_t \in \text{feild}_{k,t}) = \frac{p_{k,t}}{|\text{feild}_{k,t}|} \quad (75)$$

3. 代表状态：在区域中选择一个代表状态作为该区域的状态，如去平均值

$$\hat{\mathbf{x}}_{k,t} = |\text{feild}_{k,t}| \int_{\text{feild}_{k,t}} \mathbf{x}_t d\mathbf{x}_t \quad (76)$$

4. 近似：当 $\mathbf{x}_t \in \text{feild}_{k,t}$ 时，取 $p(\mathbf{z}_t | \hat{\mathbf{x}}_{k,t}) \approx p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t)$ ，则

$$p(\mathbf{z}_t | \text{feild}_{k,t}) \approx p(\mathbf{z}_t | \hat{\mathbf{x}}_{k,t}) \quad (77)$$

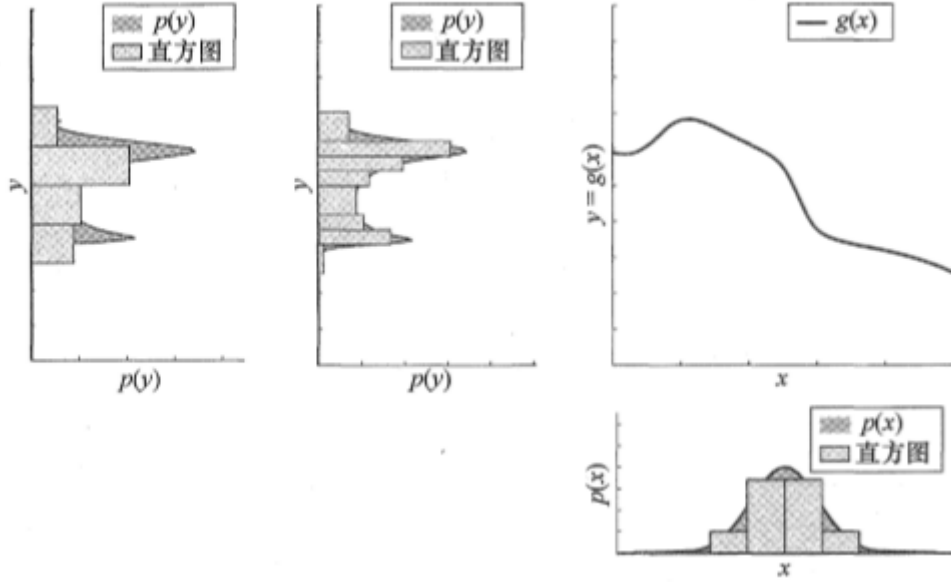
$$p(\text{feild}_{k,t} | \mathbf{u}_t, \text{feild}_{i,t-1}) \approx \eta |\text{feild}_{k,t}| p(\hat{\mathbf{x}}_{k,t} | \mathbf{u}_t, \hat{\mathbf{x}}_{i,t-1}) \quad (78)$$

经过1、2、3、4将状态空间离散化，再使用离散贝叶斯滤波计算。

4.1.3 空间分解

直方图滤波技术先将状态空间分解为离散空间，分解方法有

- **静态分解**：事先选定固定的分解形式，不依赖每一步的后验概率分布
- **动态分解**：根据后验概率密度形状调节分解分辨率——密度树家族——区域越不相关，则分解越粗糙
- **混合分解**：选择更新，只对被选择出的一小部分状态空间进行分解更新



二、静态二值贝叶斯滤波

静态二值贝叶斯滤波作为离散贝叶斯滤波的一个例子，在很多场景中得到应用，例如机器人判断前方的门是否为**开**状态。门的状态由照相机测量，其值只有**开** (\mathbf{x}) 或**关** ($\bar{\mathbf{x}}$) 两个状态。并且认为在检测期间门的状态不会发生改变。当状态静止时，置信度只是测量的函数，即 $\text{bel}_t(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|z_{1:t}, \mathbf{u}_{1:t}) = p(\mathbf{x}|z_{1:t})$ 。状态 \mathbf{x} 没有下角标 t ，说明状态不随时间改变，相当于系统方程为 $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t-1}$ 。

这类问题使用**概率比对数** $l_t(\mathbf{x})$ 来计算。定义概率的概率比对数

$$l(\mathbf{x}) = \ln\left[\frac{p(\mathbf{x})}{1 - p(\mathbf{x})}\right] = \ln\left[\frac{p(\mathbf{x})}{p(\bar{\mathbf{x}})}\right] \quad (79)$$

则置信度的概率比对数

$$l(\mathbf{x}) = \ln\left[\frac{\text{bel}(\mathbf{x})}{1 - \text{bel}(\mathbf{x})}\right] \quad (80)$$

则置信度为

$$\text{bel}(\mathbf{x}) = 1 - \frac{1}{e^{l(\mathbf{x})} + 1} \quad (81)$$

现在用置信度 $\text{bel}(\mathbf{x})$ 表达式反推 $l(\mathbf{x})$ 的数学形式。置信度定义为

$$\text{bel}(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|z_{1:t}) \quad (82)$$

根据条件概率公式

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}|z_{1:t}) &= \frac{p(z_t|\mathbf{x}, z_{1:t-1})p(\mathbf{x}|z_{1:t-1})}{p(z_t|z_{1:t-1})} \\ &= \frac{p(z_t|\mathbf{x})p(\mathbf{x}|z_{1:t-1})}{p(z_t|z_{1:t-1})} \end{aligned} \quad (83)$$

$$p(z_t|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|z_t)p(z_t)}{p(\mathbf{x})} \quad (84)$$

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_{1:t}) = \frac{p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_t)p(\mathbf{z}_t)p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_{1:t-1})}{p(\mathbf{x})p(\mathbf{z}_t|\mathbf{z}_{1:t-1})} \quad (85)$$

$$p(\bar{\mathbf{x}}|\mathbf{z}_{1:t}) = \frac{p(\bar{\mathbf{x}}|\mathbf{z}_t)p(\mathbf{z}_t)p(\bar{\mathbf{x}}|\mathbf{z}_{1:t-1})}{p(\bar{\mathbf{x}})p(\mathbf{z}_t|\mathbf{z}_{1:t-1})} \quad (86)$$

则

$$\frac{p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_{1:t})}{p(\bar{\mathbf{x}}|\mathbf{z}_{1:t})} = \frac{\frac{p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_t)p(\mathbf{z}_t)p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_{1:t-1})}{p(\mathbf{x})p(\mathbf{z}_t|\mathbf{z}_{1:t-1})}}{\frac{p(\bar{\mathbf{x}}|\mathbf{z}_t)p(\mathbf{z}_t)p(\bar{\mathbf{x}}|\mathbf{z}_{1:t-1})}{p(\bar{\mathbf{x}})p(\mathbf{z}_t|\mathbf{z}_{1:t-1})}} = \frac{p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_t)}{1-p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_t)} \cdot \frac{p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_{1:t-1})}{1-p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_{1:t-1})} \cdot \frac{1-p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x})} \quad (87)$$

$$l_t(\mathbf{x}) = \ln \frac{p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_t)}{1-p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_t)} + \ln \frac{p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_{1:t-1})}{1-p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_{1:t-1})} + \ln \frac{1-p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x})} \quad (88)$$

$$= \ln \frac{p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_t)}{1-p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_t)} - \ln \frac{p(\mathbf{x})}{1-p(\mathbf{x})} + l_{t-1}(\mathbf{x}) \quad (89)$$

(88)式第一项为反向测量模型，用 $p(\mathbf{x}|\mathbf{z}_t)$ 来计算置信度而不是 $p(\mathbf{z}_t|\mathbf{x})$ ；第二项可以认为是 $\ln \frac{p(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{z}_{1:t-1})}{1-p(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{z}_{1:t-1})}$ ，为前一个时刻置信度的概率比对数 $l_{t-1}(\mathbf{x}_{t-1})$ ，由于状态不改变，因此向量 \mathbf{x} 无下标；第三项为先验概率的概率比对数，由于状态不改变，则为初始状态置信度的概率比对数 $l_0(\mathbf{x})$ 。可以根据(89)式计算 $l(\mathbf{x})$ ，然后根据(81)式计算置信度。

三、粒子滤波

粒子滤波在状态空间采集若干个**粒子（样本点）**来表示后验概率密度，要这样做，这些粒子必须能够代表真实的状态置信度 $\text{bel}(\mathbf{x})$ ，也就是说，必须按照 $\text{bel}(\mathbf{x})$ 的概率分布，要么平均抽样，每个粒子（样本点）根据状态置信度 $\text{bel}(\mathbf{x})$ 具有一定的概率（权重）；要么根据置信度分布进行重要性抽样，每个粒子具有平均权值，将原本的平均抽样方法用重要性抽样代替，即蒙特卡罗思想的核心。前者的困难在于置信度本身未知而无法确定每个样本的权重，后者置信度概率分布同样未知而不能直接进行重要性抽样，因此选择重要性分布函数 $q(\mathbf{x})$ ，来代替置信度分布进行抽样，虽然两者不同，但是经过以下推到证明重要性分布函数重要性抽样可以逼近置信度分布的重要性抽样。

假设状态 x 的0置信度分布为 $p(x|y) = \frac{p(xy)}{p(y)} = \frac{p(xy)p(x)}{p(x)p(y)} = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)}$ ，选择 $q(x|y)$ 为重要性分布函数，则 x 的平均值为

$$\begin{aligned} E(x) &= \int x \cdot p(x|y) dx \\ &= \int x \cdot \frac{p(x|y)}{q(x|y)} \cdot q(x|y) dx \\ &= \int x \cdot \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)q(x|y)} \cdot q(x|y) dx \\ &= \int x \cdot \frac{\omega(x, y)}{p(y)} \cdot q(x|y) dx \\ &= \int x \cdot \frac{\omega(x, y)}{\int p(y|x)p(x) dx} \cdot q(x|y) dx \\ &= \frac{\int x \cdot \omega(x, y) \cdot q(x|y) dx}{\int p(y|x)p(x) dx} \\ &= \frac{\int x \cdot \omega(x, y) q(x|y) dx}{\int \omega(x, y) q(x|y) dx} \end{aligned} \quad (90)$$

$$= \int x \omega'(x, y) \cdot q(x|y) dx \quad (91)$$

(90)式证明了任意选取的重要性概率分布函数 $q(x|y)$ 只需乘以权重系数 $\omega(x, y) = \frac{p(y|x)p(x)}{q(x|y)}$ 来计算关于 x 的平均值与直接使用 $p(x|y)$ 计算是等价的。(91)式中, $\omega'(x, y)$ 是 $\omega(x, y)$ 对 $q(x|y)$ 的平均, (91)式证明了即使从 $q(x|y)$ 中产生粒子, 使用 $\omega'(x, y)$ 来对粒子加权也可以收敛得到 $p(x|y)$ 。对 $\omega'(x, y)$ 的计算如下

$$\omega'(x, y) = \int \omega(x, y) q(x|y) dx \quad (92)$$

$$\omega(x, y) = \frac{p(y|x)p(x)}{q(x|y)} \quad (93)$$

说明, 即使 $p(x|y)$ 是未知的, 但是如果 $p(y|x)$ 和 $p(x)$ 是可知的, 就可以通过 $q(x|y)$ 抽样去逼近 $p(x|y)$ 。

4.3.1 重要性抽样