模糊集

chenyangbu@hfut.edu.cn

主要参考教材

- **Andries P. Engelbrecht. Computational Intelligence: An Introduction (2 Edition). Wiley Publishing, Inc, 2009.**
  - 谭营等译。计算智能导论（第**2**版）。清华大学出版社，**2010**年。

- 王立新著，王迎军译。模糊系统与模糊控制教程。清华大学出版社，**2005**

本章内容

- 模糊系统概述
- 正式定义
- 隶属函数
- 模糊算子
- 模糊集的特性
- 模糊和概率
- 模糊关系与扩展原理

模糊系统概述

- 为什么研究模糊系统
- 什么是模糊系统
- 模糊系统的应用领域及方式
- 模糊理论的主要研究领域
- 模糊理论及其应用的简史

模糊系统

- 人的思维或推理有精确的一面，更有不确定的一面。

- 人类习惯于用自然语言进行思维，思维的结果往往是可能如何、大概如何的定性结论。

中青年

若衣服较多，则多放些洗衣粉

模糊系统

- 传统集合论：元素属于集合或者不属于集合。
- 二值逻辑：参数的值是0或1，其推理结果也是0或1。

- 人的推理往往不是这样精确的。
  - 例如，“某些计算机专业的学生能够用多种语言编程序”
  - 又如，“小明是身高比较高”。
  - 如何描述这些事实？如何进行推理？

- 模糊集合和模糊逻辑允许进行近似推理。

模糊系统

- 在模糊集中，一个元素以一定程度属于与一个集合。
- 模糊逻辑允许用这些不确定事实进行推理以推出新的事实，并给每个事实赋予一定程度。
- 模糊系统中的不确定性称作“非统计不确定性”，不应与“统计不确定性”相混淆。
  - 统计不确定性是基于概率论的，而非统计不确定性却是基于含糊的、不精确的和不明确的。

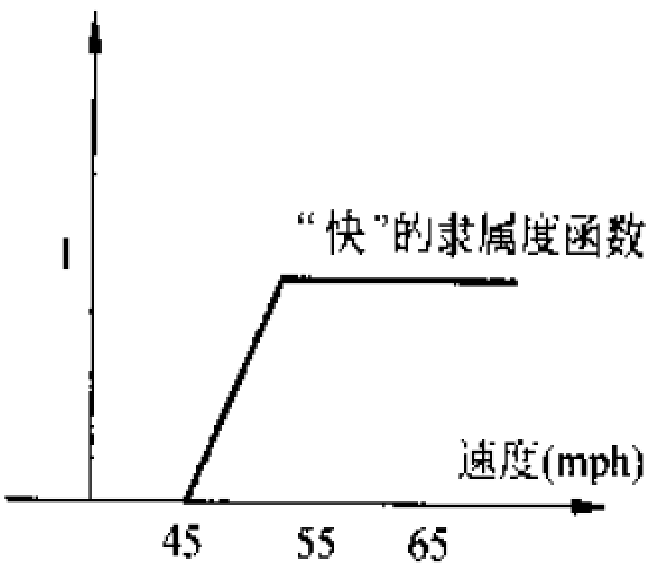
为什么研究模糊系统

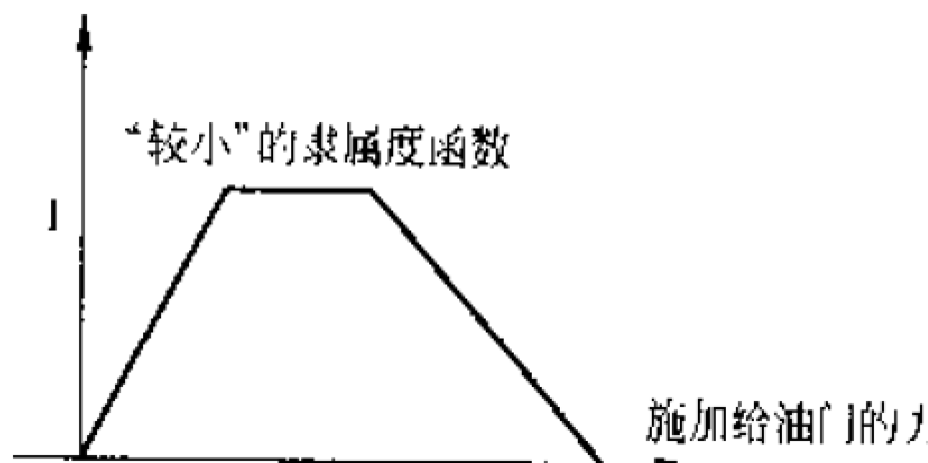
- 模糊系统是一个精确定义的系统，模糊控制也一种精确定义的特殊的非线性控制。
  - 尽管模糊系统理论描述的现象可能是模糊的，但理论本身确实精确的。

- 在文献中，认为研究模糊系统理论的原因有两类。
  - 现实世界太复杂，无法精确描述，必须引入近似性（即模糊性）概念。
  - 需要一种理论，能系统地描述人类知识并将其同其他信息（如数学模型和感官测量）一起嵌入到工程系统中。

什么是模糊系统

- 模糊系统是一种基于知识或基于规则的系统。
  - 它的核心就是由**IF-THEN**规则所组成的知识库。
- 一个模糊的**IF-THEN**规则就是一个用连续隶属度函数所描述的某些句子所作的**IF-THEN**形式的陈述。
- 例如，如果一辆汽车的速度快，则施加给油门的力较小。
  - “快”和“较小”分别用下图所示的隶属度函数进行描述。





什么是模糊系统

- 模糊系统是通过组合模糊IF-THEN规则构造而成的。

- 例，设想设计一个可以自动控制汽车速度的控制器。从概念上讲，有两种设计控制器的方法：
  - 第一种方法是采用传统的控制理论，比如设计一个PID控制器；
  - 第二种方法是模仿人类司机，也就是把人类司机所采用的规则转换到自动化控制器中来。

什么是模糊系统

- 例，设想设计一个可以自动控制汽车速度的控制器。
  - 假定采用第二种方法。粗略地讲，司机在一般环境下采用如下三类规则来驾驶汽车。

    如果速度慢，则施加给油门较大的力。

    如果速度适中，则施加给油门正常大小的力。

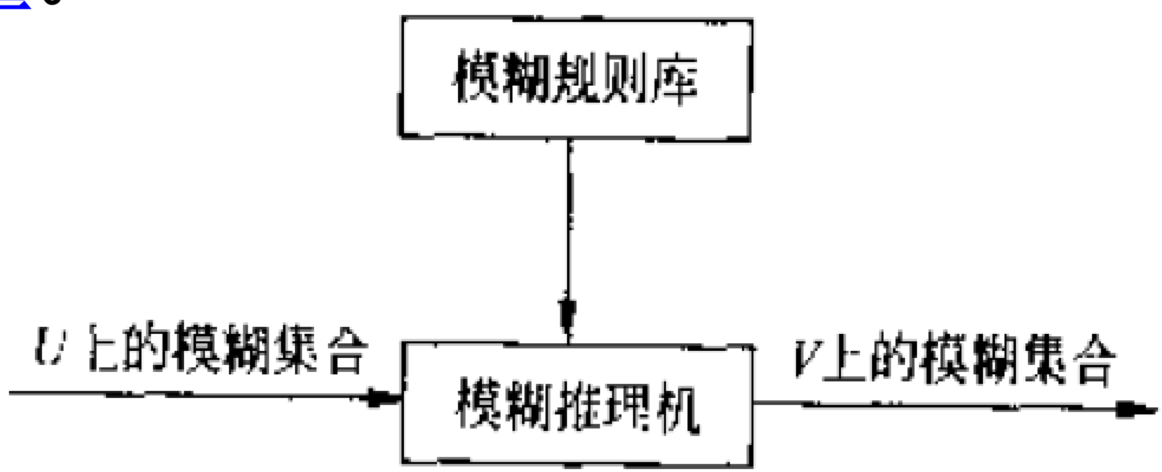
    如果速度快，则施加给油门较小的力。
- 我们可以根据这些规则来构造模糊系统。当然，实际情况需要更多的规则。
- 当把模糊系统作为控制器来使用时，这种控制器叫模糊控制器。

什么是模糊系统

- 常见的模糊系统有三类。
  - 纯模糊系统
  - **TSK（Takagi-Sugeno-Kang）**模糊系统
  - 具有模糊器和解模糊器的模糊系统

什么是模糊系统

- 纯模糊系统
  - 主要问题：其输入变量和输出变量均为模糊集合（即采用自然语言描述的词语），而在工程系统中输入变量和输出变量均为真值（**real-valued**）变量。



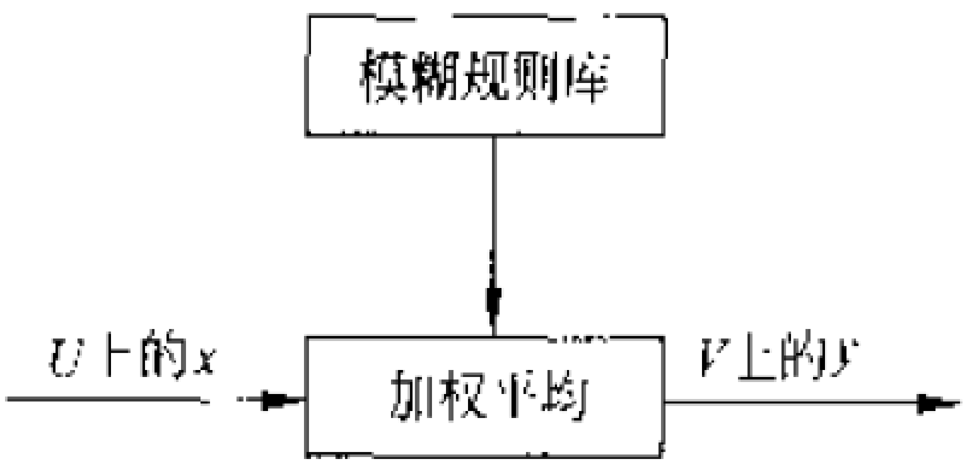
纯模糊系统的基本框图

什么是模糊系统

- **TSK模糊系统**
  - 不采用**IF-TEHN**规则，而是采用如下形式：

如果汽车速度x为快，则施加给油门的力为**y=cx**。

  - 与纯模糊系统相比，规则的**THEN**部分由自然语言描述的词语变成了一个简单的数学公式。



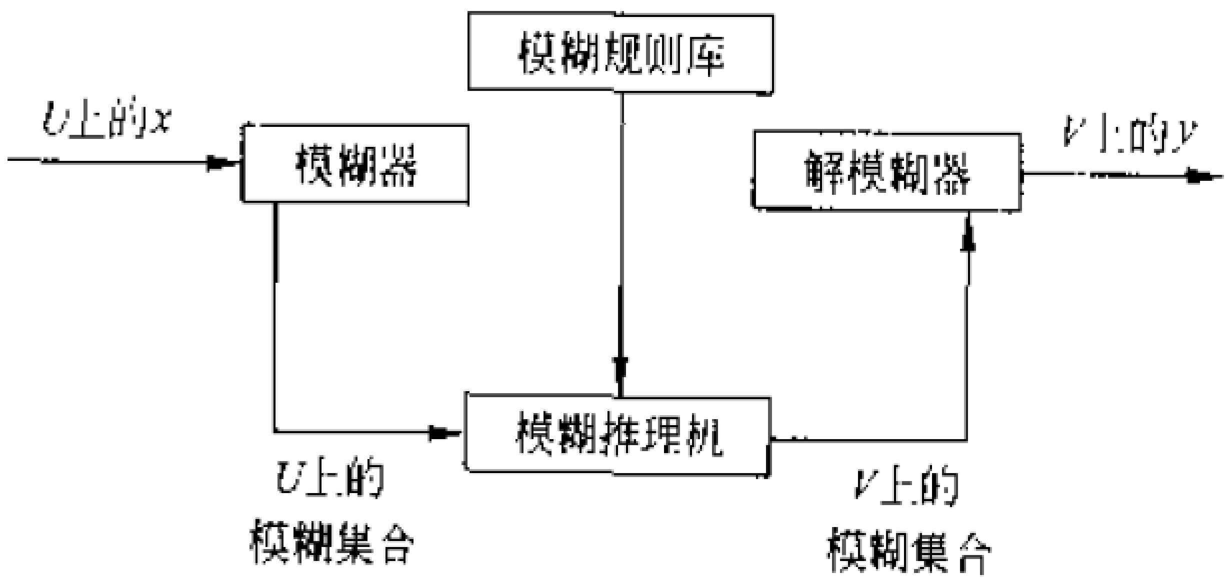
TSK 模糊系统的基本框图

什么是模糊系统

- **TSK模糊系统**的主要问题：
  1. 规则的THEN部分是一个数学公式，可能无法提供一个自然的体系来表达人类知识；
  2. 模糊逻辑的各种原理得到应用的自由度也很有限。
  – 以至于在该体系中没有很好地体现模糊系统的广泛用途。

什么是模糊系统

- 具有模糊器和解模糊器的模糊系统
  - 要想在工程系统中应用纯模糊系统，一个简单的办法就是：在纯模糊系统的输入端加上一个模糊器，在输出端加上一个解模糊器。
  - 这种模糊系统克服了纯模糊系统和TSK模糊系统的缺陷。



具有模糊器和解模糊器的模糊系统的基本框图

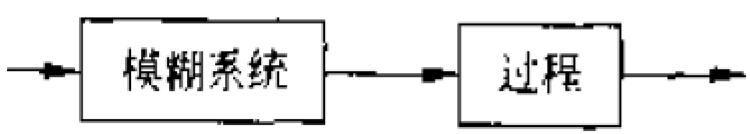
什么是模糊系统

- **模糊系统的卓越特性：**
  – 模糊系统是由一个实值向量向实值标量所作的多输入单输出映射（多输出映射可以被分解成单输入映射的集合），并且能够得到这些映射的精确的数学公式。
  – 模糊系统是由来自于以**IF-THEN**规则为形式的人类知识所组成的基于知识的系统。

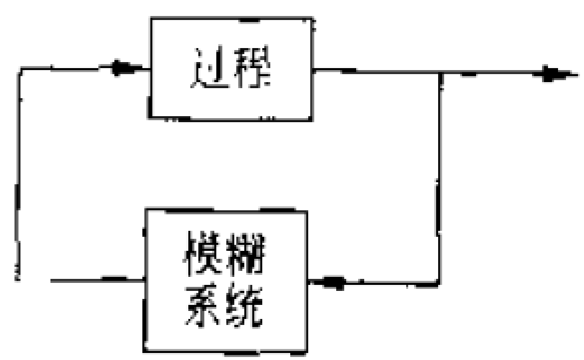
- 模糊系统理论的一个重大贡献就是它为从知识库向非线性映射的转换提供了一套系统的程序。正是由于这一转换，我们才能将基于知识的系统（模糊系统）采用同数学模型及传感器测量一样的方式，应用到工程系统中（控制、信号处理及通信系统等）。这样，最终组合而成的系统的分析和设计就会以数学这种严密方式来进行。

模糊系统的应用领域及方式

- 模糊系统一直广泛应用与各个领域，从控制、信号处理、通信、集成电路制造、商业专家系统、医药、行为科学等。
  - 模糊系统最重大的应用集中在控制问题上。
- 当模糊系统作为开环控制器时，它通常会设置一些参数然后系统根据这些控制参数来运行。许多应用于电子消费品的模糊系统就属于开环控制器。
- 当模糊系统作为闭环控制器时，它会测量过程的输出并连续地对过程进行控制。应用于工业过程的模糊控制系统就属于这类控制器。



作为开环控制器的模糊系统



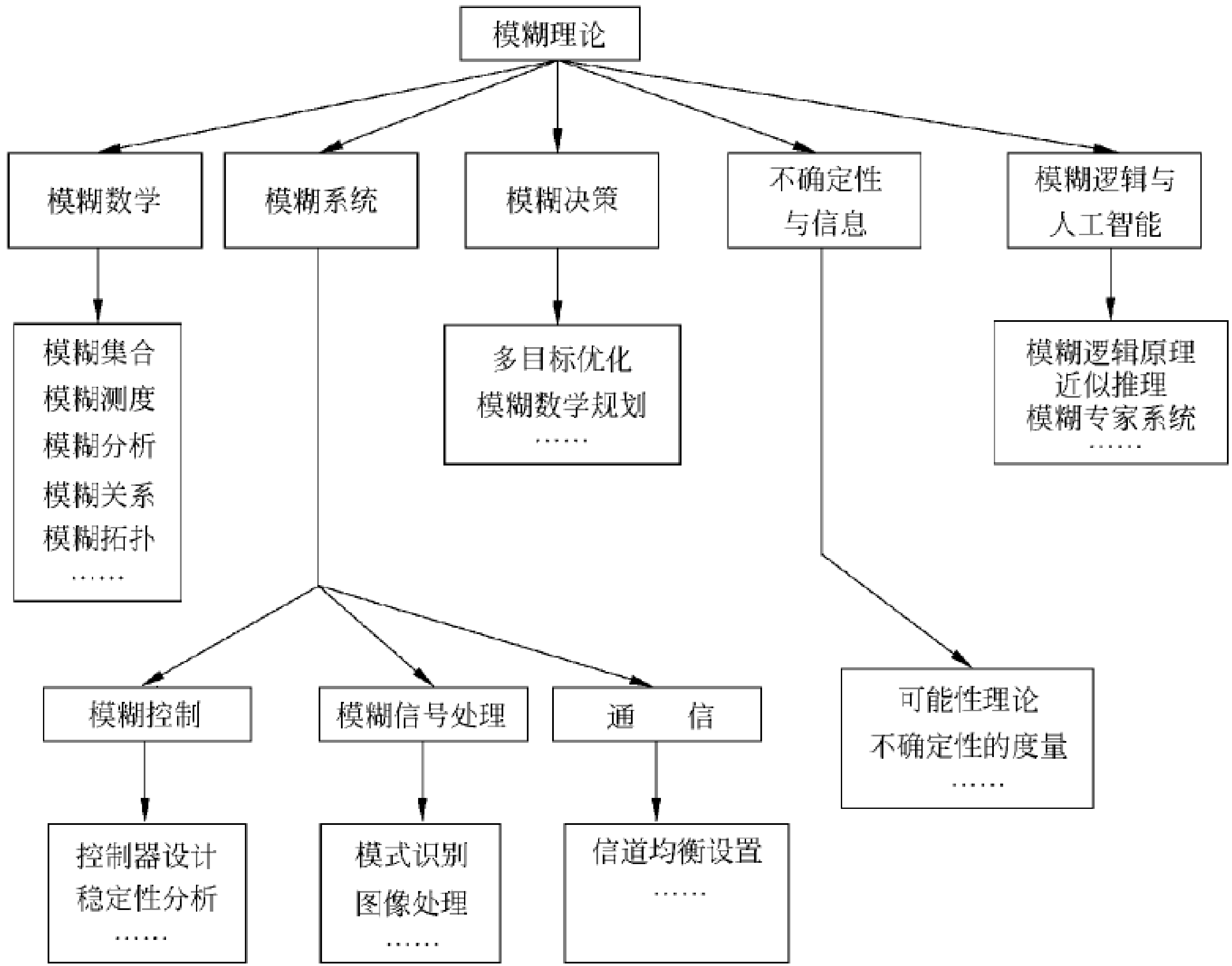
作为闭环控制器的模糊系统

模糊系统的应用领域及方式

- 模糊洗衣机
  - 模糊洗衣机是第一个应用模糊系统的消费产品。
  - 根据污物的种类、数量及机器负载量，运用模糊系统来自动设定正确的周期。
- 数字图像稳定器
  - 以模糊系统为基础，当手晃动时会让画面保持稳定。
- 汽车中的模糊系统
  - 模糊自动化传动杆、模糊反锁刹车系统
  - 模糊多用途系统（模糊传动杆、模糊离合器、模糊牵引、模糊方向盘、模糊空调）。
- 水泥窑的模糊控制
- 地铁的模糊控制

模糊理论的主要研究领域

- **5**大分支



模糊理论及其应用的简史

- 20世纪60年代：模糊理论的萌芽
  - 1965年,美国系统论专家Zadeh教授 标志性成果：《 Fuzzy Sets Theory》
- 20世纪70年代：模糊理论继续发展并出现了实际的应用
  - 1974年，英国学者Mamdani首次将模糊理论应用于工业控制 （蒸气机的压力和速度控制）
  - 1978年, 模糊水泥窑控制器
- 20世纪80年代：模糊理论的大规模应用使其产生巨大飞跃
  - 1987年, 日立公司完成地铁模糊控制系统 ———世界上最先进的地铁系统
- 20世纪90代：模糊理论仍有更多的挑战
  - 1992年2月, 首届IEEE模糊系统国际会议
  - 1993年，IEEE transaction on Fuzzy Systems创刊

本章内容

- 模糊系统概述
- 正式定义
- 隶属函数
- 模糊算子
- 模糊集的特性
- 模糊和概率
- 模糊关系与扩展原理

概述

- 例，设合肥的所有汽车的集合为论域U。考虑两类特征：（1)气缸数量。（2）国产汽车。
  - 定义U上所有具有四个气缸的汽车集合A，则

$$A=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{U}|\boldsymbol{x}\text{具有四个气缸}\}$$

  - 定义U上所有的国产汽车集合B，将有一定的困难。
    - 由于经济全球化，国产汽车的很多零部件不一定是国产的。
    - 经典集合无法定义“国产汽车”这样的集合。怎么办？

概述

- 问题：设计一个由所有身高高的人组成的集合，并将所有您所知道的身高高的人划归到该集合中。
- 经典集合论：一个元素或者是该集合的一个成员，或者不是该集合的一个成员。
- 假定“所有身高高的人”被描述为“那些身高高于**1.75m**的人”
  - 一个身高为**1.78m**的人将是该集合**tall**的一个元素。
  - 一个身高为**1.5m**的人不属于该集合**tall**。
- 但是，这一规则对一个身高**1.73m**的人也同样适用。
  - 这表明，仅比**1.75m**的**0.02m**的人将不被认为是高的。
- 类似地，使用二值集合论，该身高高的人组成的集合中成员之间也没有区别。
  - 例如，身高**1.78m**的某个人和身高**2.1m**的某个人同等地属于该集合。
  - 因此，在隶属描述上没有包括语义。

概述

- 模糊集：你所知道的所有人都将是集合tall的成员，只是具有不同的程度。
- 例如，身高2.1m的人可能是该集合成员的程度为0.95，而身高1.7m的人可能属于该集合的程度为0.4。
- 模糊集合是普通（二值）集合的一个扩展，用于处理“部分为真”的概念，使得可对自然语言的不确定性建模。

概述

- 自然语言中的模糊性是通过语言学术语来进一步加强的，这些语言学术语用于描述对象或境况。
- 例如，“当天气非常阴沉的时候，就极有可能下雨”。
  - 包含了语言学术语“非常”和“极有可能”——它们都能被人类大脑所理解。
- 模糊集连同模糊推理系统，也作为了编写软件的工具，它使得计算系统能够理解这种模糊术语，并且用这些术语进行推理。

思考：

- 模糊集合如何表示？

正式定义

- 模糊集的元素对该集合具有隶属度。
  - 对一个模糊集的隶属度代表该元素属于该集合的确定性（或不确定性）。

- 定义：假定*X*是域，或论域，$x \in X$是域*X*的一个特定元素，则模糊集A由一个隶属度映射函数刻画：

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

对于所有的$x \in X$，$\mu_A(x)$表示x属于模糊集的确定性。

对于二值集合，$\mu_A(x)$或者为0，或者为1。

正式定义

- 可以对离散（有限）域或者连续（无限）域定义模糊集。
  – 域的类型不同，用于表示模糊集的符号有所不同。

- **离散域X：** 模糊集既可以用一个n_x维向量表示，也可以用求和符号表示。

如果$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_{n_x}\}$，则使用集合符号有

$$A=\{\mu_A(x_i)/x_i \mid x_i \in X, i=1,\cdots,n_x\}$$

使用求和符号有

$$A=\mu_A(x_1)/x_1+\mu_A(x_2)/x_2+\cdots\mu_A(x_{n_x})/x_{n_x}=\sum_{i=1}^{n_x}\mu_A(x_i)/x_i$$

- **注意：** 上述的和不应当与代数求和相混淆。

正式定义

- 一个连续的模糊集A可表示为：

$$A = \int_X \mu_A(x_i)/x$$

- 注意：积分符号不应当作为代数学方式解释。

本章内容

- 模糊系统概述
- 正式定义
- 隶属函数
- 模糊算子
- 模糊集的特性
- 模糊和概率
- 模糊关系与扩展原理

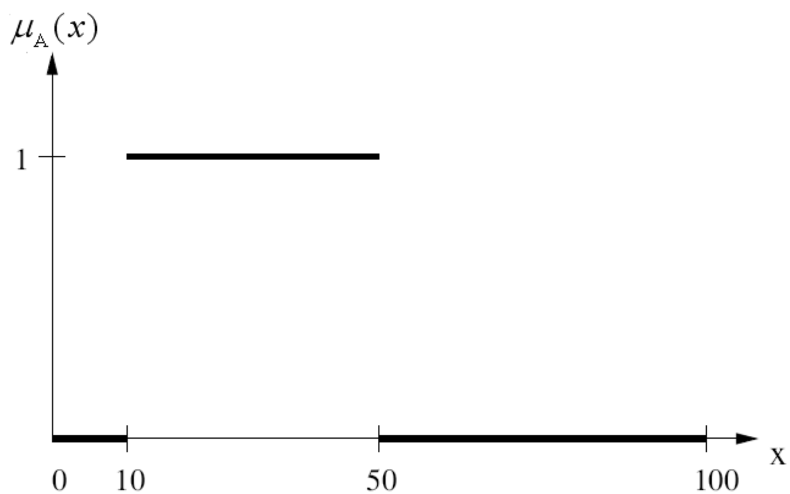
隶属函数

- 隶属函数是模糊集的实质。
- 一个隶属函数，也被称为模糊集的特征函数，定义了该模糊集。
- 该函数用于将域中的每一个元素的隶属度关联到一个对应的模糊集。

二值集合隶属函数

- 二值集合也可通过一个隶属函数来描述。

- 例如，考虑范围[0, 100]内所有浮点数构成的域X。
  - 将普通集合*A*⊂*X*定义为范围[10, 50]内的所有浮点数，则普通集合*A*的隶属函数如下图。



对于所有$x \in [10, 50]$，有$\mu_A(x) = 1$；对于其他的浮点数则有$\mu_A(x) = 0$。

隶属函数必须满足的约束

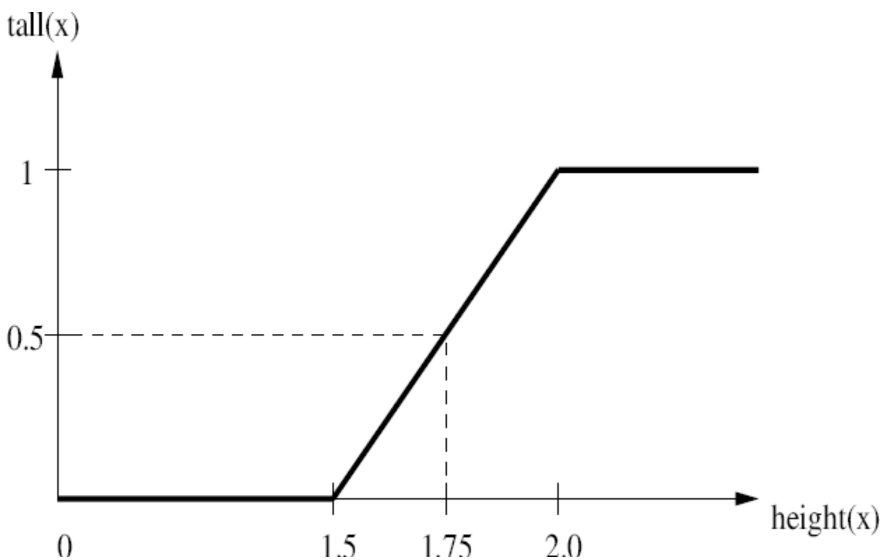
- 模糊集的隶属函数可以是任何形状和类型，它由定义模糊集的领域专家确定。

- 虽然模糊集的设计者在选择恰当的隶属函数上有很大的自由，但是这些函数必须满足如下约束：
  - 一个隶属函数必须分别被0和1限制下上界。因此一个隶属函数的范围必须在[0, 1]。
  - 对于每一个$x \in X$，$\mu_A(x)$必须是唯一的。即，对同一个模糊集而言，同一个元素不能同时映射到不同的隶属度。

tall模糊集

- 对于**tall**模糊集，一个可能的隶属函数可以定义为：

$$tall(x)=\begin{cases}0 & \text{如果}heiht(x)<1.5m\\ [height(x)-1.5]\times 2.0 & \text{如果}1.5m\le heiht(x)\le 2.0m\\ 1 & \text{如果}heiht(x)>2.0m\end{cases}$$

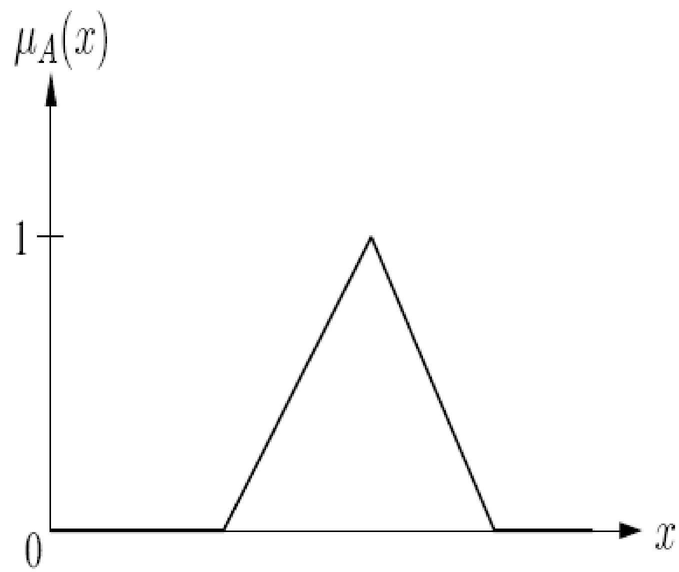


- 假定一个人的身高为**1.75m**，则$\mu_A(x)=0.5$。
- 还可以其它很多隶属函数来描述**tall**模糊集。

常见的隶属函数举例

- 三角函数，**Triangular functions**

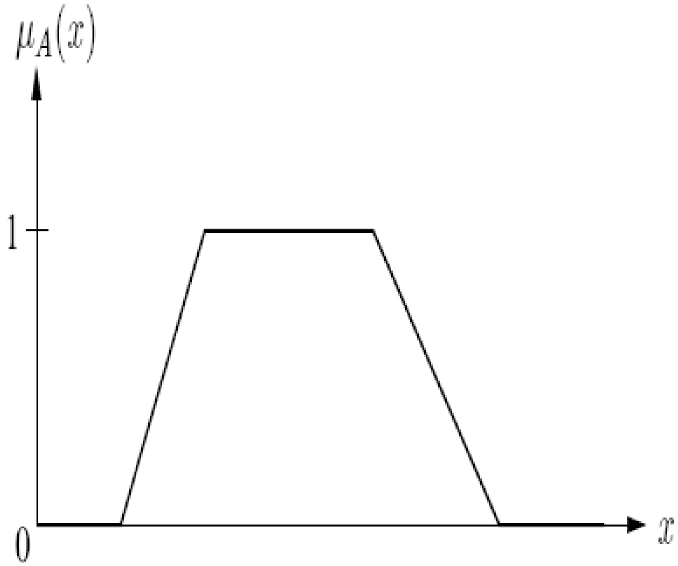
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \le \alpha_{min} \\ \frac{x-\alpha_{min}}{\beta-\alpha_{min}} & \text{if } x \in (\alpha_{min}, \beta] \\ \frac{\alpha_{max}-x}{\alpha_{max}-\beta} & \text{if } x \in (\beta, \alpha_{max}) \\ 0 & \text{if } x \ge \alpha_{max} \end{cases}$$



常见的隶属函数举例

- 梯形函数，**Trapezoidal functions**

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \le \alpha_{min} \\ \frac{x-\alpha_{min}}{\beta_1-\alpha_{min}} & \text{if } x \in [\alpha_{min}, \beta_1) \\ \frac{\alpha_{max}-x}{\alpha_{max}-\beta_2} & \text{if } x \in (\beta_2, \alpha_{max}) \\ 0 & \text{if } x \ge \alpha_{max} \end{cases}$$



常见的隶属函数举例

- **Γ隶属函数，Γ-membership functions**

$$\mu_A x = \begin{cases} 0 & \text{if } x \le \alpha \\ 1 - e^{-\gamma(x-\alpha)^2} & \text{if } x > \alpha \end{cases}$$

- **S隶属函数，S-membership functions**

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \le \alpha_{min} \\ 2\left(\frac{x-\alpha_{min}}{\alpha_{max}-\alpha_{min}}\right)^2 & \text{if } x \in (\alpha_{min}, \beta] \\ 1 - 2\left(\frac{x-\alpha_{max}}{\alpha_{max}-\alpha_{min}}\right)^2 & \text{if } x \in (\beta, \alpha_{max}) \\ 1 & \text{if } x \ge \alpha_{max} \end{cases}$$

常见的隶属函数举例

- **Logistic函数，Logistic function**

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+e^{-\gamma x}}$$

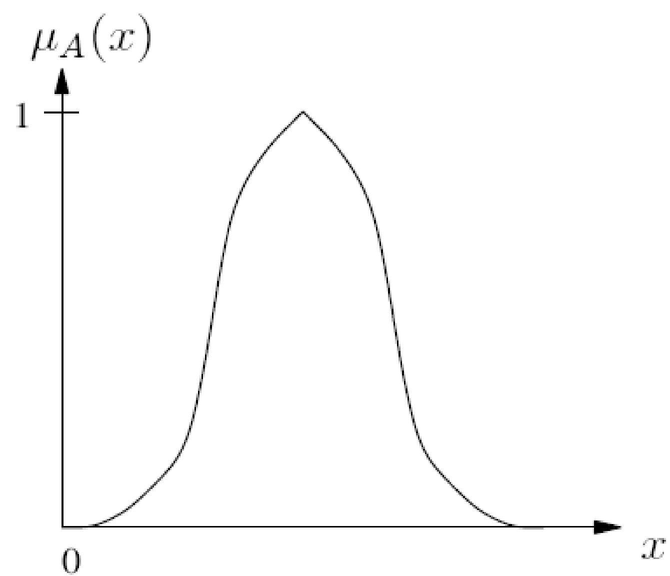
- **指数类函数，Exponential-like function**

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+\gamma(x-\beta)^2}$$

常见的隶属函数举例

- 高斯函数，**Gaussian function**

$$\mu_A(x) = e^{-\gamma(x-\beta)^2}$$



模糊集合的三条重要结论

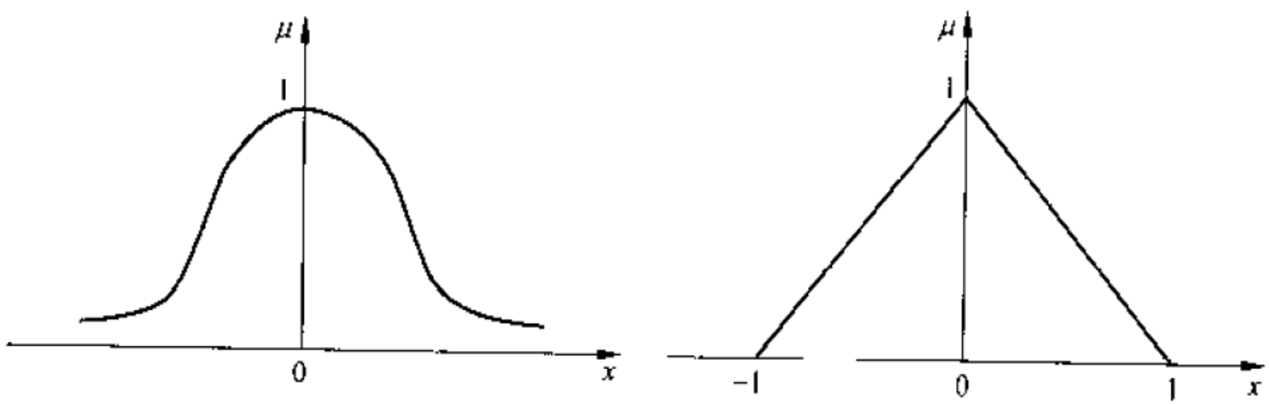
- 第一，用模糊集合描述的现象的特征通常是模糊的，但隶属度函数本身不是模糊的——它们是精确的数学函数。 一旦隶属度函数表征了模糊的性质，则一切都将不再模糊了。
  - 如“接近于 0 的数”就是一个不精确的描述。因此，可以用不同的隶属度函数来描 述同一对象。
  - 用隶属度函 数表征一个模糊描述后，实质上就将模糊描述的模糊消除了。
  - 一种常 见的对模糊集合理论误解就是，认为模糊集合理论试图使世界模糊化。 实际上恰恰相反，我们看到的是，模糊集合消除了世界的模糊。

模糊集合的三条重要结论

- 第二，隶属度函数有各种各样的选择，怎样确定隶属度函数？
  - 从概念上讲，有 两种确定隶属度函数的方法。
  - 第一种方法是利用人类专家的知识，请该领域的专家来指定隶属度函数。由于模糊集合通常用于描 述人类知识，所以，隶属度函数也就代表了部分人类知识。通常，这 种方法仅能够给出隶属度函数的一个粗略公式，还须对其进行“微 调”；
  - 第二种方法是从各种传感器中收集数据来确定隶属度函数。具体 地讲，首先要指定隶属度函数的结构，然后根据数据对隶属度函数的 参数进行“微调”。

模糊集合的三条重要结论

- 第三，应该强调的是，尽管可以用不同隶属函数来描述“接近于 0 的数”，但它们是不同的模糊集合。
  - 一个模糊集合与其隶属度函数应具有一 一对应的关系。当给出一个模糊集合时，必须有一个与之 对应的独一无二的隶属度函数；反过来，当给出一个隶属度函数时， 它也仅能表达一个模糊集合。在此意义上，模糊集合与其隶属度函数是等价的。
  - 因此，严格地讲，应采用不同的说明性短语表达模糊集合。例如，$\mu_1(x)$表示左图，用$\mu_1(x)$表示右图。



“接近于 0 的数”的隶属度函数的可能形式

思考：

- 模糊集合如何运算？

本章内容

- 模糊系统概述
- 正式定义
- 隶属函数
- 模糊算子
- 模糊集的特性
- 模糊和概率
- 模糊关系与扩展原理

模糊算子

- 与普通集合相似，对模糊集也定义关系和算子。
- 设域或论域为**X**，**A**和**B**是在域**X**上定义的模糊集。
  - 模糊集的相等
  - 模糊集的包含
  - 模糊集的补（**NOT**）
  - 模糊集的交（**AND**）
    - 最小算子
    - 乘积算子
  - 模糊集的并（**OR**）
    - 最大算子
    - 和算子
  - 平均算子

模糊集的相等

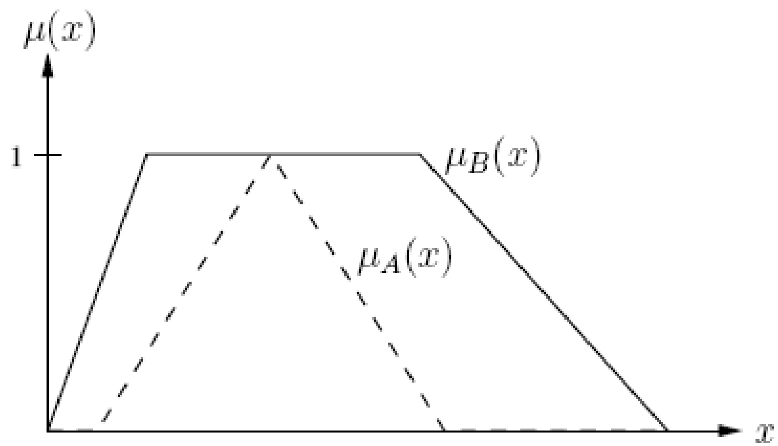
- 对于二值集合，如果它们具有相同的元素，则两个集合相等。
- 对于模糊集，不能由两个集合具有相同的元素而推断出它们相等。
  - 元素对于集合的隶属度也必须相等。即，两个集合的隶属函数必须相同。
- 两个模糊集A和B相等，当且仅当集合具有相同的域，且对所有的$x \in X$，$\mu_A(x)=\mu_B(x)$。记做A=B。

模糊集的包含

- 二值集合：如果A的所有元素也是B的元素，则A⊂B。

- 模糊集：模糊集A是模糊集B的一个子集，当且仅当对所有的x∈X，$\mu_A(x) \le \mu_B(x)$。记做A⊆B。

- 模糊集包含的示例图



模糊集的补（NOT）

- 一个二值集合的补，即为包含除该集合元素外的整个域中其他元素的集合。

- 对于模糊集，一个集合A的补包含集合A的所有元素，但隶属度不同。

设$\overline{\mathrm{A}}$表示集合A的补，则对于所有的$x \in X$，

$$\mu_{\overline{\mathrm{A}}}(x) = 1 - \mu_{\mathrm{A}}(x)，且 \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \neq \phi，\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \neq X。$$

模糊集的补（NOT）

- 令映射c: [0,1]→[0,1]表示由模糊集A的隶属度函数向其补集的隶属度函数转换的映射，即

$$c[\mu_A(x)] = \mu_{\bar{A}}(x)$$

- 任意满足如下公理c1和c2的函数，都叫模糊补集。

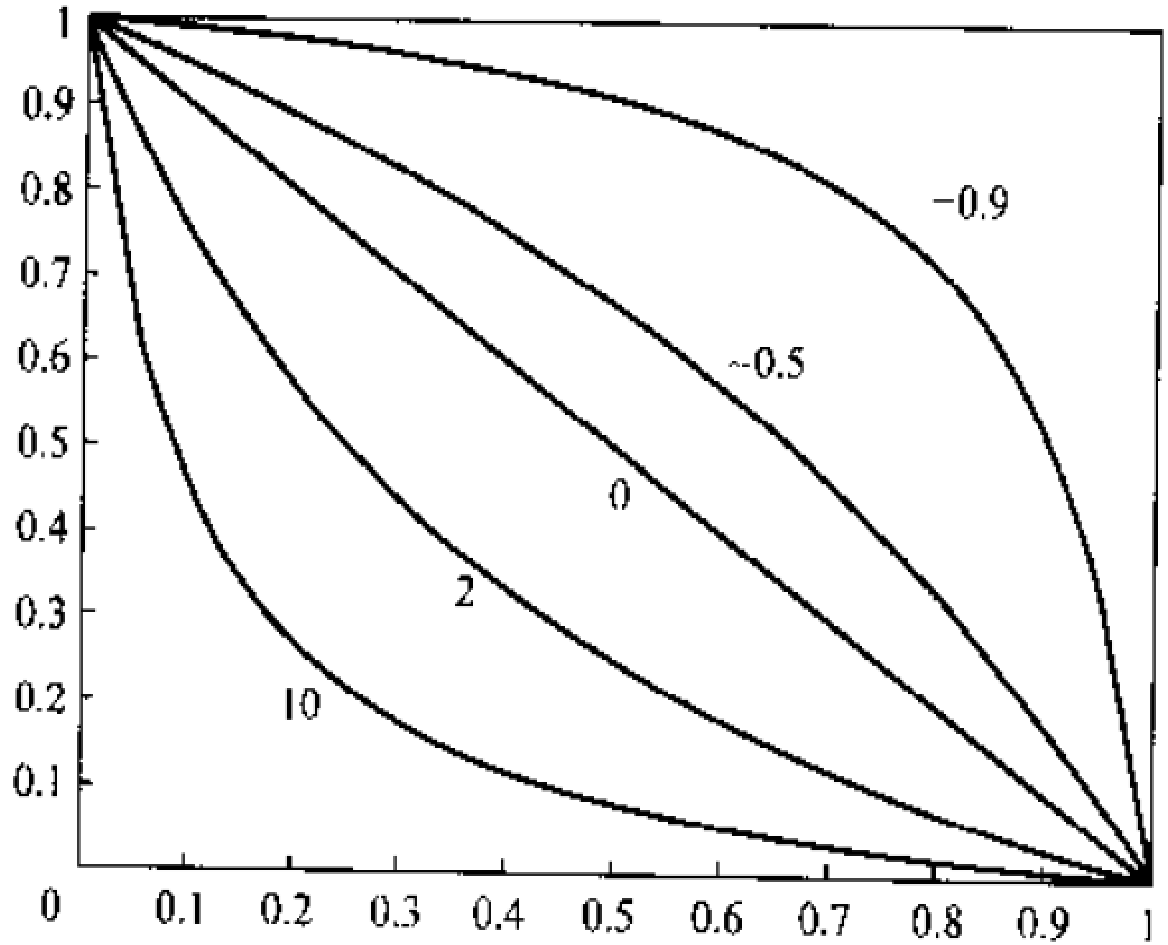
  公理c1：c(0)=1, c(1)=0（有界性）。

  公理c2：当a, b$\in[0,1]$时，如果a<b，则有$c(a) \geq c(b)$（非增性）。

- 例，Sugeno模糊补可定义为$c_\lambda(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a}$，其中$\lambda \in (-1, \infty)$。

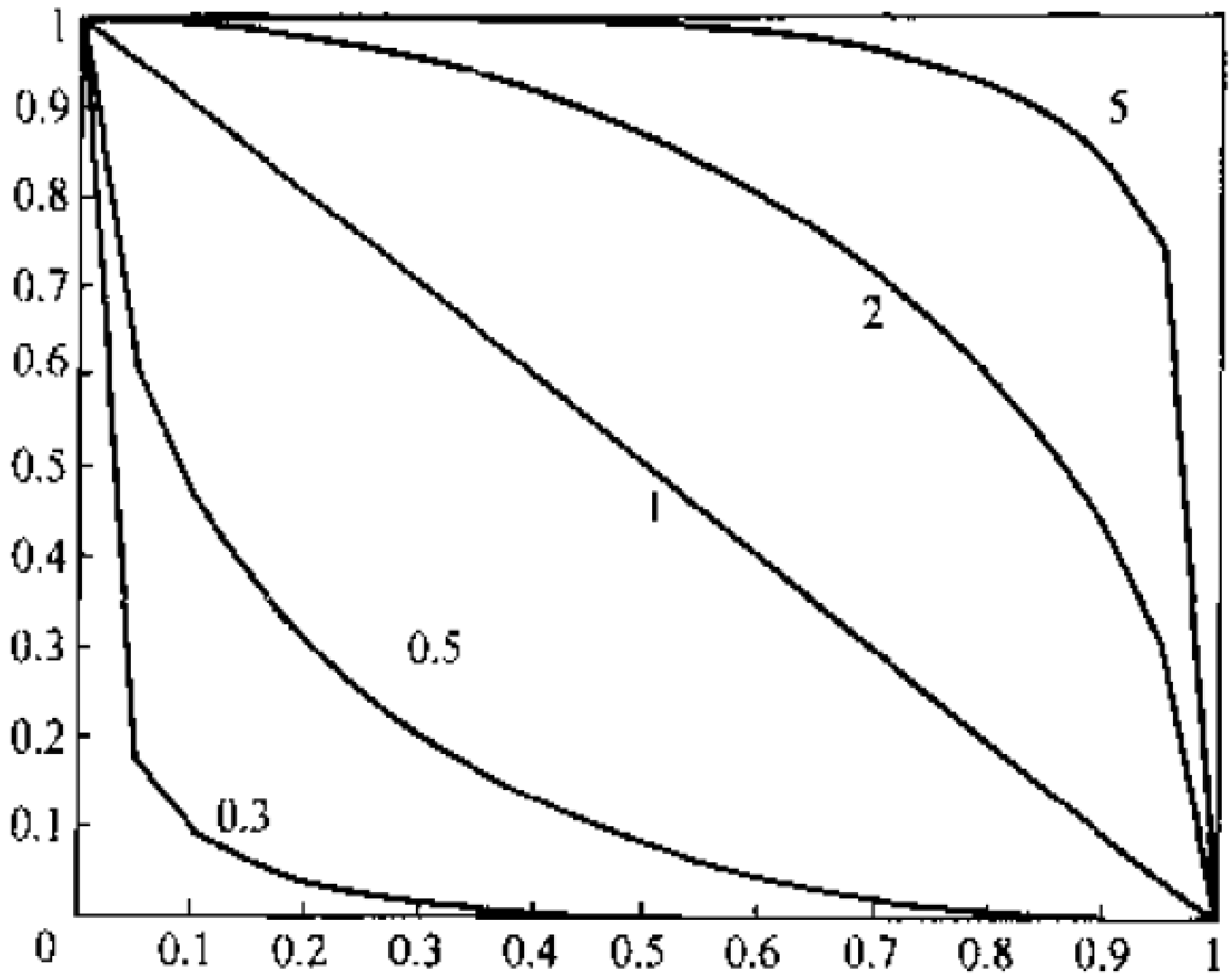
模糊集的补（NOT）

- 不同λ值下的Sugeno模糊补$\frac{1-a}{1+\lambda a}$。



模糊集的补（NOT）

- **Yager模糊补**$\boldsymbol{c_{\omega}(a)=(1-a^{\omega})^{\frac{1}{\omega}}}$**，其中**$\boldsymbol{\omega\in(0,\infty)}$**。**



模糊集的交（AND）

- 二值集合的交是在两个集合中都出现的元素的集合。

- 实现交的算子被称为**t-范数**。**t-**范数的结构是包含两个模糊集所有元素的集合，但其隶属度取决于特定的**t-**范数。

- 有很多**t-**范数。最为流行的是最小（**min**）算子和乘积算子。
  - 如果**A**和**B**是两个模糊集，则：

    最小算子：$\mu_{A\cap B}(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\forall x\in X$

    乘积算子：$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\mu_B(x),\forall x\in X$

- 注意**1**：对于交（**product**）而言，取隶属度的乘积比取最小值是一个强得多的算子，这将导致更低的隶属度。
- 注意**2**：即使某一元素对于原始集合的隶属度很高，一系列交的最终结果将趋于**0**。

模糊集的交（AND）

- 其他的一些代表性**t-范数**：
  - $\mu_{A\cap B}(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt[p]{\left(\frac{1-\mu_A(x)}{p}\right)^p+\left(\frac{1-\mu_B(x)}{p}\right)^p}}$, for $p>0$.
  - $\mu_{A\cap B}(x) = \max\{0,(1+p)(\mu_A(x)+\mu_B(x)-1)-p\mu_A(x)\mu_B(x)\}$, for $p\geq -1$.
  - $\mu_{A\cap B}(x) = \dfrac{\mu_A(x)\mu_B(x)}{p+(1-p)(\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x))}$, for $p>0$.
  - $\mu_{A\cap B}(x) = \dfrac{1}{\sqrt[p]{\frac{1}{(\mu_A(x))^p}+\frac{1}{(\mu_B(x))^p}-1}}$
  - $\mu_{A\cap B}(x) = \dfrac{\mu_A(x)\mu_B(x)}{\max\{\mu_A(x)\mu_B(x),p\}}$, for $p\in[0,1]$.
  - $\mu_{A\cap B}(x) = p\times\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}+(1-p)\times\frac{1}{2}(\mu_A(x)+\mu_B(x))$, where $p\in[0,1]$.

模糊集的交（AND）

- 令映射t: [0,1]×[0,1]→[0,1]表示由模糊集A和B的隶属度函数向其并集的隶属度函数转换的映射，即

$$\mathbf{t}[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A\cap B}(x)$$

- 任意满足如下公理t1~t4的函数t，都叫模糊交集。

  公理t1： t(0,0)=0, t(a,1)=t(1,a)=a（有界性）。

  公理t2： t(a, b)= t(b, a)（可交换性）

  公理t3： 当$a \le a'$，$b \le b'$时，$\mathbf{t}(a,b) \le t(a',b')$（非减性）。

  公理t4： t(t(a, b), c)= t(a, t(b, a))（结合性）。

模糊集的并（OR）

- 二值集合的并包含所有集合的元素。
- 模糊集的并也包含所有的元素，但隶属度取决于所使用的特定的并算子。这些算子被称做s-范数。
- 最频繁使用的s-范数是最大（max）算子与和算子。

最大算子：$\mu_{A\cup B}(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\forall x\in X$

和算子：$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x),\forall x\in X$

- 在极限情况下，即使元素对于初始集合的隶属度很低，一系列并的结果将会逼近1.0。

模糊集的并（OR）

- 其他的一些代表性**s-范数**：

- $\mu_{A\cup B}(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt[p]{\left(\frac{\mu_A(x)}{1-\mu_A(x)}\right)^p+\left(\frac{\mu_B(x)}{1-\mu_B(x)}\right)^p}}$, for $p > 0$.
- $\mu_{A\cup B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x) + p\mu_A(x)\mu_B(x)\}$, for $p \geq 0$.
- $\mu_{A\cup B}(x) = \frac{\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x)-(1-p)\mu_A(x)\mu_B(x)}{1-(1-p)\mu_A(x)\mu_B(x)}$, for $p \geq 0$.
- $\mu_{A\cup B}(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[p]{\frac{1}{(1-\mu_A(x))^p}+\frac{1}{(1-\mu_B(x))^p}-1}}$
- $1 - \frac{(1-\mu_A(x))(1-\mu_B(x))}{\max\{(1-\mu_A(x)),(1-\mu_B(x)),p\}}$ for $p \in [0, 1]$.
- $\mu_{A\cup B}(x) = p \times \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} + (1-p) \times \frac{1}{2}(\mu_A(x) + \mu_B(x))$, where $p \in [0, 1]$.

模糊集的并（OR）

- 令映射s: [0,1]×[0,1]→[0,1]表示由模糊集A和B的隶属度函数向其并集的隶属度函数转换的映射，即

$$\mathrm{s}[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A\,\cup\,B}(x)$$

- 任意满足如下公理s1~s4的函数s，都叫模糊并集。

  公理s1：s(1,1)=1, s(0,a)=s(a,0)=a（有界性）。

  公理s2：s(a, b)= s(b, a)（可交换性）

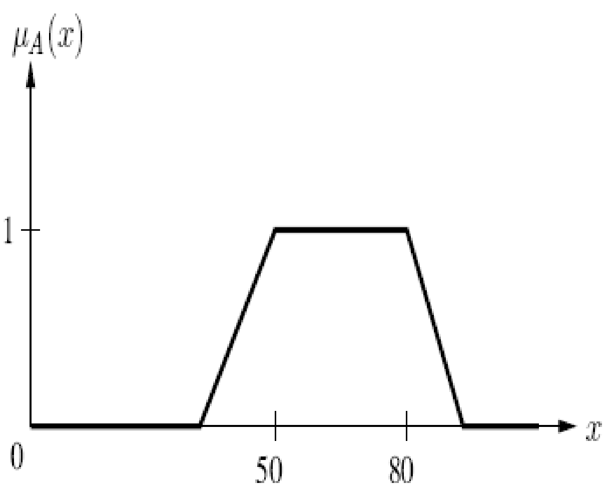
  公理s3：当$a \le a'$，$b \le b'$时，$c(a,b) \le c(a',b')$（非减性）。

  公理s4： s(s(a, b), c)= s(a, s(b, a))（结合性）。

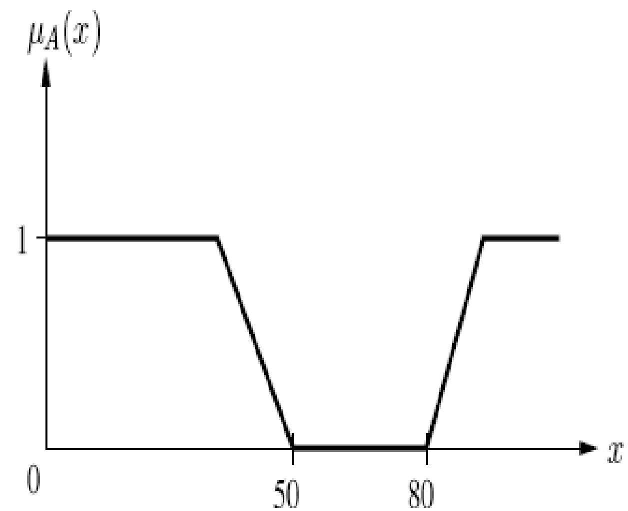
操作结果的隶属函数图表示

- 二值集合上的操作可以通过使用文氏图来表示。
- 对于模糊集，操作效果可以通过画出最终的隶属函数图表示出来。

- 例，假定模糊集A是定义在[50, 80]之间的浮点数。



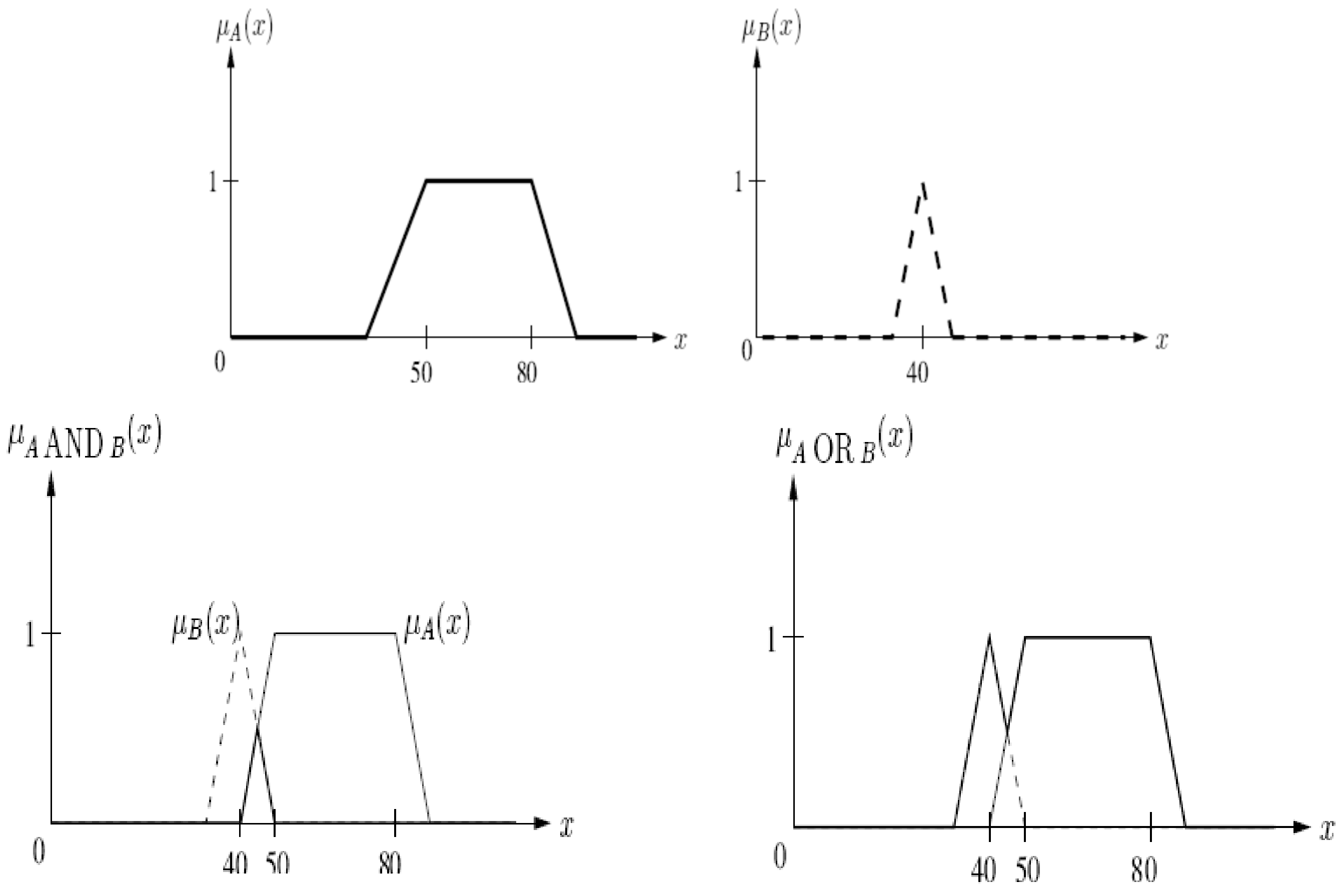
模糊集A



模糊集A的补

操作结果的隶属函数图表示

- 例，假定模糊集A是定义在[50, 80]之间的浮点数，B是定义在40附近的数字。



平均算子

- 令v表示 [0,1]×[0,1]→[0,1]的映射，平均算子可以为以下形式（但不限于）：
  - 最大、最小平均

    $$v_\lambda(a,b)=\lambda\max(a,b)+(1-\lambda)\min(a,b)$$ 其中，$\lambda\in[0,1]$。
  - 广义均值

    $$v_\alpha(a,b)=\left(\frac{a^\alpha+b^\alpha}{2}\right)^{1/\alpha}$$ 其中，$\alpha\in R(\alpha\neq0)$。
  - “模糊”与

    $$v_p(a,b)=p\min(a,b)+\frac{(1-p)(a+b)}{2}$$ 其中，$p\in[0,1]$。
  - “模糊”或

    $$v_\gamma(a,b)=\gamma\max(a,b)+\frac{(1-\gamma)(a+b)}{2}$$ 其中，$\gamma\in[0,1]$。
- **注意：** 平均算子的取值在min(a, b)和max(a, b)之间。

本章内容

- 模糊系统概述
- 正式定义
- 隶属函数
- 模糊算子
- 模糊集的特性
- 模糊和概率
- 模糊关系与扩展原理

模糊集的特性

- 模糊集由隶属函数描述，隶属函数的特性包括：
  - 正规化
  - 高度
  - 支持
  - 核
  - 中心
  - 交叉点
  - α截集
  - 单峰性
  - 基数
  - 归一化

模糊集的特性

- **正规化（标准模糊集）**：一个模糊集是正规的，如果该集合具有一个隶属度为1的元素。

$$\exists x \in A,\quad \mu_A(x) = 1$$

否则，A是次正规的。

– 正规化也可以定义为：

$$\sup_x \mu_A(x) = 1$$

- **高度**：一个模糊集的高度被定义为隶属函数的上确界，即

$$\text{height}(A) = \sup_x \mu_A(x)$$

模糊集的特性

- **支持（或支撑集）：** 模糊集A的支持是论域X中所有以非零隶属度属于A的元素的集合。即：

$$\text{support}(A) = \{x \in X \mid \mu_{\text{A}}(x) > 0\}$$

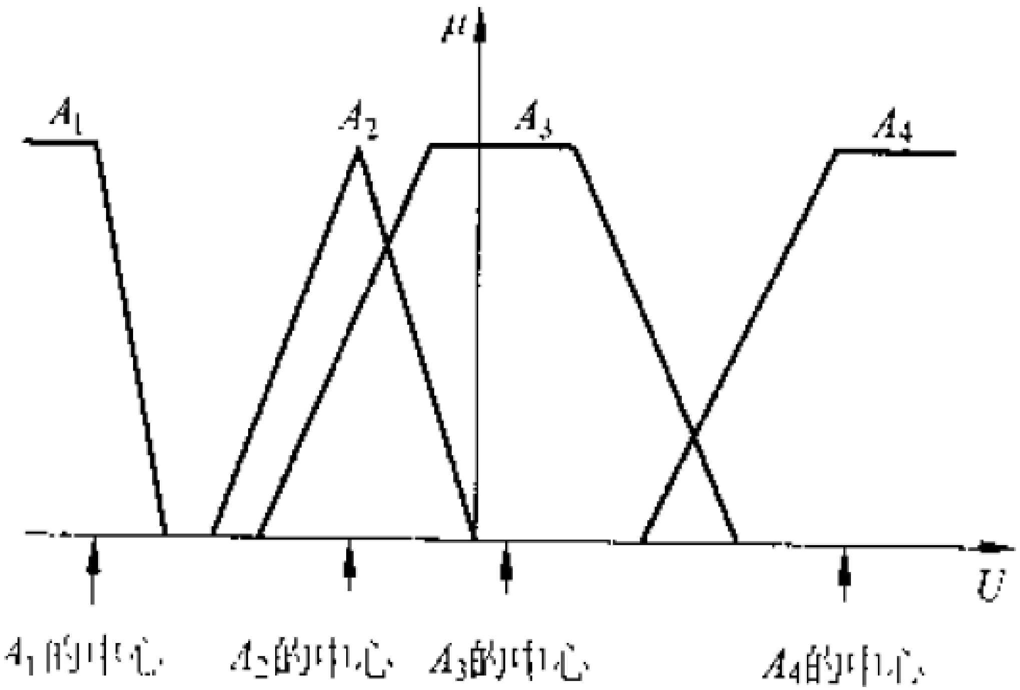
  – 如果模糊集合的支持集仅包含论域X中的一个点，则称该模糊集为模糊单值。

- **核：** 模糊集A的核是域中所有以隶属度1属于A的元素的集合。即：

$$\text{core}(A) = \{x \in X \mid \mu_{\text{A}}(x) = 1\}$$

模糊集的特性

- 模糊集的中心：
  - 如果一个模糊集的隶属度函数达到最大值的所有点的均值是一个有限值，则该均值就是模 糊集的中心；
  - 如果均值是正（负） 无穷大，则将中心定义无穷大，则将中心定义 为所有最大隶属度值的点中最小（最大） 点。



模糊集的特性

- **交叉点：** 一个模糊集的交叉点就是论域X中隶属度值等于 0.5的点。

$$\text{交叉点}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 0.5\}$$

- **α截集：** 由对A的隶属度大于等于α的元素所构成的集合被称为A的α截集。

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

- **单峰性：** 一个模糊集是单峰的，如果它的隶属函数是单峰函数，即函数仅有一个最大值。

模糊集的特性

- 凸模糊集：当论域 X为n维欧氏空间R^n 时，对于任意的α，当且仅当模糊集A在区间（0，1]上的α截集 截集A_α为凸集时，模糊集合A是凸模糊集。

- 投影：令A是R^n上的一个模糊集，H为R^n上的一个超平面。
  - 定义$H = \{x \in Rn | x_1 = 0\}$，（为简化起见，这里只考虑了这个特殊的超平面，由它可以直接推广到一般的超平面）。
  - 定义A在H上的投影为R^{n-1}上模糊集合A_H，其隶属度函数为

$$\mu_{A_H}(x_2, \ldots, xn) = \sup_{x_1 \in R} \mu_A(x_1, x_2, \ldots, xn)$$

其中，$\sup_{x_1 \in R} \mu_A(x_1, x_2, \ldots, xn)$表示$x_1$在R中取值时，$\mu_A(x_1, x_2, \ldots, xn)$取得最大值。

模糊集的特性

- 二值集合的基数即为集合中元素的个数。
- 模糊集A的基数，对于一个有限域，定义为

$$\mathrm{card}(A) = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

- 模糊集A的基数，对于一个无限域，定义为

$$\mathrm{card}(A) = \int_{x \in X} \mu_A(x)\mathrm{d}x$$

- 例，若X={a, b, c, d}，A=0.3/a+0.9/b+0.1/c+0.7/d
  - 则card(A)=0.3+0.9+0.1+0.7=2.0

模糊集的特性

- 归一化：利用模糊集的高度除隶属函数，可以对模糊集进行归一化。即：

$$\text{normalized}(A)=\frac{\mu_A(x)}{\text{height}(A)}$$

- 模糊集合的属性和二值集合的特性非常相似，但是也有一些不同。模糊集服从和二值集合相似的交换律、结合律、分配律、传递律和幂等律。
- 主要的一个区别是模糊集基数的特性。

$$\text{card}(A)+\text{card}(B)=\text{card}(A\bigcap B)+\text{card}(A\bigcup B)$$

$$\text{card}(A)+\text{card}(\overline{A})=\text{card}(X)$$

本章内容

- 模糊系统概述
- 正式定义
- 隶属函数
- 模糊算子
- 模糊集的特性
- 模糊和概率
- 模糊关系与扩展原理

模糊和概率

- 模糊和概率都是指事件发生的确定性（或不确定性）的程度。

- 概率：由统计概率给出的确定性程度仅在相关事件发生前是有意义的。在事件过后，概率将不在实用，因为事件的结果已知。

- 例如，当掷一枚均匀硬币时，正面朝上的概率是50％，背面朝上的概率也是50％。
  - 在掷硬币事件发生后，就正面朝上还是背面朝上而言，不再存在不确定性，并且对该事件而言确定程度不再适用。

模糊和概率

- **模糊：** 在一个事件发生后，模糊集的隶属度仍然是有意义的。

- 例如，考虑身高高的人组成的模糊集，且Peter以0.9的程度属于该集合。
  - 假定要进行的事件是决定Peter是否是一个优秀的篮球运动员。给定一些隶属函数，事件的结果是对于优秀的篮球运动员集合的隶属度。
  - 在事件发生后，Peter仍然以0.9的隶属度属于身高高的人群的集合。

模糊和概率

- 概率假定事件之间独立，而模糊并不基于该假设。

- 概率：假定任何事情均可知的一个封闭世界模型，且基于事件发生的频度的度量。即概率的估计是基于静态环境中所做的有限次实验的重复。
  - 因此，一个事件A的概率被估计为：

$$\mathrm{Prob}(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}$$

其中n_A是事件A在实验中发生的次数，n是实验的总次数。

模糊和概率

- 模糊并不假定所有的事情都已知，并且基于域的描述性度量（按照隶属度函数），而不是主观的概率度量。
- 模糊并不是概率，概率也不是模糊。
- 然而，概率和模糊集可以共同来表达模糊事件的概率。

本章内容

- 模糊系统概述
- 正式定义
- 隶属函数
- 模糊算子
- 模糊集的特性
- 模糊和概率
- 模糊关系与扩展原理

模糊关系

- 模糊关系的定义
- 投影
- 柱状扩展
- 模糊关系的合成
- 扩展原理

模糊关系的定义

- 例，令U={旧金山，香港，北京}，V={波士顿，香港}，先打算确定这两个城市集合间“非常远”这一关系。
  - 经典关系无法用于该问题。
  - 如果用区间[0, 1]上的值来表达“非常远”的程度，则概念“非常远”可用下面的（模糊）关系阵来表述。

		V	
		波士顿	香港
	旧金山	0.3	0.9
U	香港	1	0
	东京	0.95	0.1

模糊关系的定义

- 模糊关系是一个定义在清晰集U_1，U_2，…，U_n的笛卡尔积上的模糊集。
- 根据模糊集的表示方法，可以$U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$上的模糊关系Q定义为如下模糊集合：

$$\boldsymbol{Q} = \{((\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{un}), \mu_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{un})) | (\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{un}) \in U_1 \times \ldots \times U_n\}$$

其中，μ_Q：$U_1 \times \ldots \times U_n \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$。

- 作为一个特例，二元模糊关系是一个定义在两个清晰集的笛卡尔积上的模糊集。通常用模糊关系阵来表示有限笛卡尔积上的二元关系。该矩阵中的元素为相应“有序对”属于该模糊关系的隶属度值。

模糊关系的定义

- 例，令U和V为实数集，模糊关系“x约等于y”，记作AE，可以用下面的隶属度函数来描述。

$$\mu_{AE}(x,y)=e^{-(x-y)^2}$$

- 又，模糊关系“x远大于y”，记作ML，可以表示为：

$$\mu_{ML}(x,y)=\frac{1}{1+e^{-(x-y)}}$$

投影

- 定义：令Q为$U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$上的一个模糊关系，$\{i_1, i_2, \ldots, ik\}$为{1, 2, …, n}的一个子集，则Q在$U_{i_1} \times U_{i_2} \times \ldots \times U_{i_k}$上的投影是$U_{i_1} \times U_{i_2} \times \ldots \times U_{i_k}$上的一个模糊关系$Q_P$，其隶属度函数可定义为：

$$\mu_{Q_P}(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k}) = \max_{u_{j_1} \in U_{j_1}, \ldots, u_{j_k} \in U_{j_k}} \mu_Q(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

其中，$(u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots, u_{j_k})$是$(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k})$关于$(u_1, u_2, \ldots, un)$的补集。

投影

- 作为特例，如果Q是U×V中的一个二元模糊关系，则Q在U上的投影（记作Q_1）是U上的一个模糊集，可用下面的隶属度函数来定义：

$$\mu_{Q_1}(x) = \max_{y\in V} \mu_Q(x,y)$$

- 例，右图所示模糊关系在U和V上的投影分别为：

Q_U=0.9/旧金山+1/香港+0.95/东京

Q_V=1/波士顿+0.9/香港

		V: 波士顿	V: 香港
U	旧金山	0.3	0.9
U	香港	1	0
U	东京	0.95	0.1

柱状扩展

- 投影将模糊关系约束于一个子空间。相反，柱状扩展则把模糊关系从一个子空间扩展到了整个空间。
- 定义：令Q_P是 $U_{i_1}\times U_{i_2}\times\ldots\times U_{i_k}$ 上的一个模糊关系，$\{i_1, i_2, \ldots, ik\}$为{1, 2, …, n}的一个子集，则Q_P在$U_1\times U_2\times\ldots\times U_n$上的柱状扩展是一个模糊关系，记为$Q_{PE}$，其隶属度函数可定义为：

$$\mu_{Q_{PE}}(u_1, u_2, \ldots, un) = \mu_{Q_P}(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k})$$

- 作为特例，如果Q_1是U中的一个二元模糊关系，则Q_1在U×V上的柱状扩展（记作Q_{1E}）是U×V上的一个模糊集，其定义为：$\mu_{Q_{1E}}(x，y) = \mu_{Q1}(x, y)$。

柱状扩展

- 例，已知：

Q_U=0.9/旧金山+1/香港+0.95/东京

Q_V=1/波士顿+0.9/香港

		V	
		波士顿	香港
	旧金山	0.3	0.9
U	香港	1	0
	东京	0.95	0.1

它们扩展至U×V的柱状扩展为：

Q_{UE}=0.9/(旧金山, 波士顿)+0.9/(旧金山, 香港)+

+1/(香港, 波士顿)+ …

+0.95(东京, 波士顿)+…

Q_{VE}=1/(旧金山, 波士顿)+…

+…

柱状扩展

- **模糊集合的笛卡尔积**：令A_1，A_2，…，A_n分别为U_1，U_2，…，U_n上的模糊集，则A_1，A_2，…，A_n的笛卡尔积为$U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$上的模糊关系$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，其隶属度函数为
$$\mu_{A_1\times\cdots\times A_n}(u_1,u_2,\ldots,un)=\mu_{A_1}(u_1)\bigstar\cdots\bigstar\mu_{A_n}(u_n)$$
其中，★表示任意t-范数算子。

- **引理**：如果Q为$U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$上的一个模糊关系，$Q_1$，$Q_2$，…，$Q_n$分别为Q在$U_1$，$U_2$，…，$U_n$的投影，则$Q \subseteq Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_n$，计算笛卡尔积时采用的t-范数算子为min。

模糊关系的合成

- 模糊关系P(U, V)和Q(V, W)的合成，记作$P \circ Q$，是U×W上的一个模糊关系，其隶属度函数为：

$$\mu_{P\circ Q}(u,w) = \max_{v\in V} t[\mu_P(u,v), \mu_Q(v,w)],$$

其中t为任意的t-范数。

- 不同的t-范数，得到不同的关系合成。
- 常用的两种合成关系：
  - 最大-最小合成（MAX-MIN）
  - 最大-代数积合成（MAX-Product）

模糊关系的合成

- 模糊关系P(U, V)和Q(V, W)的最大-最小合成，记作*P* ∘*Q*，是U×W上的一个模糊关系，其隶属度函数为：

$$\mu_{P\circ Q}(u,w)=\max_{v\in V}\min[\mu_P(u,v),\mu_Q(v,w)]$$

- 模糊关系P(U, V)和Q(V, W)的最大-代数积合成，记作*P* ∘Q，是U×W上的一个模糊关系，其隶属度函数为：

$$\mu_{P\circ Q}(u,w)=\max_{v\in V}[\mu_P(u,v)*\mu_Q(v,w)]$$

模糊关系的定义

- 例，给定U={旧金山，香港，北京}，V={波士顿，香港}，W={纽约，北京}。令P(U, V)表示模糊关系“非常远”，Q(V, W)表示模糊关系“非常近”。
  - 计算P和Q的最大-最小合成。
  - 计算P和Q的最大-代数积合成。

		V	
		波士顿	香港
	旧金山	0.3	0.9
U	香港	1	0
	东京	0.95	0.1

		W	
		纽约	北京
V	波士顿	0.95	0.1
	香港	0.1	0.9

模糊关系的合成

- 例，…，计算P和Q的最大-最小合成。

$$\mu_{P\circ Q}(\text{旧金山},\text{纽约}) = \max\{\min[\mu_P(\text{旧金山},\text{波士顿}),\mu_Q(\text{波士顿},\text{纽约})],\ \min[\mu_P(\text{旧金山},\text{香港}),\mu_Q(\text{香港},\text{纽约})]\}$$
$$= \max\{\min(0.3,0.95),\min(0.9,0.1)\} = 0.3$$

  - 类似地，可得最终的$P\circ Q$为：

$$P\circ Q = 0.3/(\text{旧金山},\text{纽约}) + 0.9/(\text{旧金山},\text{北京}) + 0.95/(\text{香港},\text{纽约}) + 0.1/(\text{香港},\text{北京}) + 0.95/(\text{东京},\text{纽约}) + 0.1/(\text{东京},\text{北京})$$

  - 若计算P和Q的最大-代数积合成，其结果为：

$$P\circ Q = 0.285/(\text{旧金山},\text{纽约}) + 0.81/(\text{旧金山},\text{北京}) + 0.95/(\text{香港},\text{纽约}) + 0.1/(\text{香港},\text{北京}) + 0.9025/(\text{东京},\text{纽约}) + 0.095/(\text{东京},\text{北京})$$

模糊关系的合成

- 从该例子可以看出，一种较简便地计算*P*∘*Q*的方法是，用关系矩阵和矩阵相乘。具体地讲，用**P**和**Q**分别表示模糊关系**P(U, V)**和**Q(*V*, W)** 的关系矩阵，则模糊合成*P*∘*Q*的关系矩阵可由以下计算方法得到:
  - 最大一最小合成法: 写出矩阵乘积**PQ**中的每个元素，只不过将每个乘积运算看做一个**min** 运算，每个求和运算看做一个**max** 运算。
  - 最大代数积合成法: 写出矩阵乘积**PQ** 中的每个元素，只不过将每个求和运算看做一个**max** 运算。

模糊关系的合成

- 例，令U=V=W=R，模糊关系AE（约等于）和ML（远大于），应用最大-代数积合成法计算$AE \circ ML$。

$$\mu_{AE}(x,y)=e^{-(x-y)^2} \quad \mu_{ML}(x,y)=\frac{1}{1+e^{-(x-y)}}$$

$$\mu_{AE\circ ML}(x,z)=\max_{y\in R}\left[\frac{e^{-(x-y)^2}}{1+e^{-(y-z)}}\right]$$

  – 此时，需计算$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{e^{-(x-y)^2}}{1+e^{-(y-z)}}\right]$=0以求得y。
    - 因为不能得到y的封闭解，所有无法简化$\mu_{AE\circ ML}(x,z)$。
    - 实际使用的办法是，对于给定的x和z，先计算上式的数值解，然后再将其代入$\mu_{AE\circ ML}(x,z)$。
    - 连续区域上计算模糊关系的合成比离散区域困难。

扩展原理

- 扩展原理(The Extension Principle) 是一个基本恒等式，它允许一个函数的区域从U上的清晰点扩展至V上的模糊集合。更具体地讲，
  - 令f: U→V表示一个从清晰集U 至清晰集V的函数。
  - 假定已知U上的模糊集A，确定一个V上由f 诱导出的模糊集B =f(A) 。
  - 如果f 是个一对一的映射，则定义B 的隶属度函数为$\mu_B(y) = \mu_A[f^{-1}(y)]$，$y \in V$，其中$f^{-1}(y)$是$f$(y)的逆，即$f^{-1}(f(y))=y$。
  - 如果f 不是一一的映射，则$\mu_B(y) = \max\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x)$，$y \in V$，其中$f^{-1}(y)$为$x \in U$且满足$f(x)=y$的点的集合。

扩展原理

- 例，令U= {1, 2,…, 10 }，f(x)=x^2，令"小"为U 上的模糊集合，其定义为

  小= 1/1 + 1/2 +0. 8/3 +0.6/4 +0.4/5+…

  – 则依据扩展原理，可得

  小^2= 1/1 + 1/4 + 0.8/9 + 0.6/16 + 0.4/25+…

小结

- 正式定义
- 隶属函数
- 模糊算子
- 模糊集的特性
- 模糊和概率
- 模糊关系

习题

1. **考虑2个模糊集：**

long pencils = {*pencil*1/0.1, *pencil*2/0.2, *pencil*3/0.4, *pencil*4/0.6, *pencil*5/0.8, *pencil*6/1.0}

medium pencils = {*pencil*1/1.0, *pencil*2/0.6, *pencil*3/0.4, *pencil*4/0.3, *pencil*5/0.1, *pencil*6/0.01}

(a) 确定两个集合的并。

(b) 确定两个集合的交。