

# Система доведення теорем з однією аксіомою

Максим Сохацький

<sup>1</sup> Національний технічний університет України  
ім. Ігоря Сікорського  
9 квітня 2022 р.

## Анотація

Ця стаття презентує диалект мови програмування  $\mathbf{PTS}^\infty$ , імплементації її типового верифікатора, а також екстрактор байткоду для віртуальної машини Erlang від Ericsson.  $\mathbf{PTS}^\infty$  — це мова проміжного рівня заснована на так званій чистій системі типів, або системі типів з однією аксіомою та зліченною кількістю всесвітів (консистента теорія залежних типів). Ця мова програмування дає зручну мову проміжного рівня для застосунку у додадках з підвищеними вимогами до математичної верифікації. Типовий верифікатор побудований за базі MLTT принципів та конфігурується правилами для предикативної та імпредикативної ієрархії всесвітів. Синтаксис цієї мови програмування сумісний з базовим синтаксистом мови Morte, та підтримує її базову бібліотеку, а також додає поняття нескінченної кількості всесвітів. Дуже базова бібліотека прилюдії з рекурсивним та корекурсивним вводом-виводом додаються як частина цієї роботи. Це дає змогу застосовувати основи математичної верифікації до нескінченних або довгоживучих процесів.

Ми коротко опишемо мову верхнього рівня, та мову проміжного ядра для описаного в статті типового верифікатора, та покажемо місце цієї мови у концептуальній системі доведення теорем, яка передбачає поєднання: 1) оптимального лямбда обчислювача; 2) мову з однією аксіомою; 3) MLTT мову; 4) мову з гомотопічними типами та інтервалом.

Зміст

# 1 Вступ

IEEE<sup>1</sup> стандарт та регуляторні документи ESA<sup>2</sup> визначають набір інструментів та підходів для процесу валідації та верифікації програмного забезпечення. Найбільш розширені техніки передбачають застосування математичної логіки та теорії доведення теорем для формулювання виробничих задач у математичній формі для формальної перевірки коректності таких програм на всій області визначення функції з доведення властивостей цих функцій.

Ера верифікованих теорем, типових верифікатори та систем доведення теорем бере свій початок з доводжувача теорем AUTOMATH та теорії типів Мартіна-Льофа. Станом на сьогодні ми маємо такі потужні системи як Coq, Agda, Lean, F\* які базуються на CoC (Calculus of Constructions, Террі Кокан) та CiC (Calculus of Inductive Constructions, Поулін-Морін). Подальший розвиток систематизації призвів до лямбда кубу та чистим системам з однією аксіомою, як узагальнюючому визначенню ситсем типу CoC, AUT-68, ECC, Henk, Morte, PTS<sup>∞</sup>. Головна мотивація систем з однією аксіомою — це простота імплементації та простота формальної імплементації нормалізатора термів, як термінального обчислення. За допомогою формальної мови та типового верифікатора ми можемо передавати програми по відкритих каналах які задовільняють формальним типовим специфікаціям та складним теоремам як властивостями цих об'єктів. У якості областей застосування тут можна виділити наступні сфери: 1) мови смарт-контрактів; 2) сертифіковані DSL; 3) платіжні системи, тощо.

## 1.1 Екстракція математично-доведених програм

Завдяки ізоморфізму Каррі-Ламбека-Ховарда — відповідності всередині теорії типів Мартіна-Льофа [?] між доведеннями, моделями та програмами, де типи, сигнатури та категорії є просторами (мовами) які містять у собі точки (програми), можемо трактувати терми як програми для обчислення певного результату, і природа цього обчислення може буде повністю позбавлена типізації, що дає змогу виконувати такі доведення на практично довільному інтерпретаторі, так як майже всі так чи інакше реалізують модель лямбда-числення, тут маються на увазі мови JavaScript, Erlang, PyPy, LuaJIT, K. Також можна будувати екстрактори з інтераналізацією в C++, Rust. Ця робота головним чином презентує екстрактор в байт-код віртуальної машини Erlang, як модель простого нетипизованого лямбда числення, на кшталт LISP або Smalltalk.

## 1.2 Системна архітектура

PTS<sup>∞</sup> як мова програмування реалізує чисту систему типів, але зі зліченою кількістю всесвітів. Ця система типів формує основне мовне ядро си-

<sup>1</sup>IEEE Std 1012-2016 — V&V Software verification and validation

<sup>2</sup>ESA PSS-05-10 1-1 1995 — Guide to software verification and validation

стеми доведення теорем, усі інші системи типів містять чисту систему типів як підкатегорію у своєму спектрі, та є її нащадками. З точки зору наслідкових зв'язків чиста система типів є основою усіх системах типів побудованих на розшаруваннях, П-типах, а також систем здатних до доведення теорем.

Поверх цієї базової системи типів виділяються інші системи типів які можна звести теж до одно-аксіоматичних систем з чітко-вираженим кодуваннями ізоморфізмів. До концептуальної моделі системи доведення теорем включатимемо наступні мовні ядра: 1) Мова з індуктивними типами для доведення у стилі математичної індукції; 2) Гомотопічне ядро з відкритим інтервалом для доведення у кубічному стилі; 3) Числення отоків як базис для тензорного числення (Futhark); 4) Числення процесів як базис для лінійних типів, коіндуктивного моделювання та середовища виконання. Незважаючи на те, що з усіх цих мовних рівней існують функтори в систему з однією аксіомою, ці мовні розширення програмуються як окремі плагіни функтори які погружаються у головний цикл типового верифікатора разом зі своїми правилами. Це дозволяє пришвидшити виконання нормалізації термів у процесі типової верифікації.

Однак не всі вищі мови можуть бути розкладені в базисі PTS. Як було показано Geuvers [?] ми не можемо побудувати принцип індукції всередині чистої PTS, ми повинні послабити до залучення оператора нерухомої точки принаймні для типової специфікації самого індуктивного рекурсивного типу. Також ми не можемо побудувати елімінатор рівності та функціональну екстенціональність. Але незважаючи на це PTS це потужна система яка відразу дає змогу генерувати сертифіковані програми з доведених теорем. Властивості можуть доводитися у інших мовах концептуальної моделі системи доведення теорем. Прошарок PTS більшим чином пов'язаний з мовою цільового інтерпретатора.

Як подальший розвиток цього проекту ми бачимо долучення індуктивної системи типів та гомотопічної системи типів.

### 1.3 Місце серед інших мов

Продукт який представлено у статті виконаний для телекомунікаційної платформи Erlang/OTP від Ericsson, що дало змогу використовувати доведені програми на цій віртуальній машині. Цей додаток експонує наступні сервіси у середовищі Erlang: 1) типова верифікація; 2) нормалізація; 3) екстракція. Усі частини системи **PTS**<sup>∞</sup> написані на мові Erlang та виключно для системи Erlang.

- Рівень 0 — сертифікований векторизований інтерпретатор
- Рівень 1 — консистентна система з однією аксіомою
- Рівень 2 — вища мова для доведення теорем та перевірки властивостей

Табл. 1: Список мов, досліджених у якості цільової платформи для екстракції

Target	Class	Intermediate	Theory
C++	компілятор/native	HNC	System F
Rust	компілятор/native	HNC	System F
JVM	інтерпретатор/native	Java	F-sub <sup>3</sup>
JVM	інтерпретатор/native	Scala	System F-omega
GHC Core	компілятор/native	Haskell	System D
GHC Core	компілятор/native	Morte	CoC
Haskell	компілятор/native	Coq	CiC
OCaml	компілятор/native	Coq	CiC
<b>BEAM</b>	<b>інтерпретатор</b>	<b>Henk</b>	<b>PTS<sup>∞</sup></b>
O	інтерпретатор	Henk	PTS <sup>∞</sup>
K	інтерпретатор	Q	Applicative
PyPy	інтерпретатор/native	N/A	ULC
LuaJIT	інтерпретатор/native	N/A	ULC
JavaScript	інтерпретатор/native	PureScript	System F

## 2 Консистентна мова проміжного рівня

Мова **PTS<sup>∞</sup>** є мовою з залежними типами, лямбда численням, розширенням CoC зі зліченною кількістю всесвітів для забезпечення консистентності. При цьому підтримуються два режими: предикативний та імпредикативний. В мові немає аксіоми нерухомої точки, що унеможливило неконтрольовану рекурсію та парадокси в системі типів, а сама система насолоджується властивостями сильної нормалізації термів. Усі терми **Axioms** в такій системі відповідають своєму рангу всередині вкладеної послідовності всесвітів **Sorts**, а складність залежного терму залежить від максимальної складності самого терму та терму від якого він залежить, ця складність визначається правилами **Rules**. Систему всесвітів можна описати за допомогою SAR нотації Барендрехта [?]:

$$\begin{cases} \text{Sorts} = \text{Type}.\{i\}, i : \text{Nat} \\ \text{Axioms} = \text{Type}.\{i\} : \text{Type}.\{\text{inc } i\} \\ \text{Rules} = \text{Type}.\{i\} \rightsquigarrow \text{Type}.\{j\} : \text{Type}.\{\text{max } i \ j\} \end{cases}$$

Синтаксис мови **PTS<sup>∞</sup>** базується на синтаксису мови Henk вперше описаний Еріком Мейером та Саймоном Пейтоном Джонсом в 1997 [?]. Пізніше, в 2015 з'явилася Haskell імплементація мови Henk — Morte, яка теж використовувала кодування Бома-Берардуччі для індуктивних та нерекурсивних лямбда термів. Ця мова базується виключно на Π-типі, його інтро та елімінатор, зліченим всесвітам, бета-редукції та ета-експансії. **PTS<sup>∞</sup>** наслідую мови Henk та Morte як з точки зору дизайну, так і з точки зору імплементації, однак у нас більш оптимізовані індекси де Брейна, які застосовуються

лише до одноіменних ідентифікаторів. Сама мова створена в дусі мінімізми, та не залежить від зовнішніх бібліотек, у тому числі не залежить від лексичних аналізаторів та генетарів парсерів.

## 2.1 БНФ та Синтаксичне Дерево

Мова **PTS**<sup>∞</sup> сумісна з системою типів CoC, яка реалізована в мовах Morte та Henk, однак містить ключове розширення — всесвіти можуть індексуватися натуральним числом **Nat**. Традиційно наводимо синтаксис мови у формі Бакуса-Наура, еквівалентне синтаксичне дерево наведено справа.

$\diamond ::= \#option$	$data\ pts = star\ (n: nat)$
$V ::= \#identifier$	$  var\ (n: name)$
$S ::= * < \#number >$	$  app\ (f\ a: pts)$
$O ::= S\  \ V\  \ ( O )$	$  lambda\ (x: name)\ (d\ c: pts)$
$  O\ O\  \ O \rightarrow O$	$  pi\ (x: name)\ (d\ c: pts)$
$  \lambda\ (I : O) \rightarrow O$	
$  \forall\ (I : O) \rightarrow O$	

## 2.2 Всесвіти

Так як **PTS**<sup>∞</sup> підтримує нескінченну зліченну кількість всесвітів, її метатеоричний індуктивний тип повинен містити натуральні числа. Самі всесвіти вбодовуються один в одного.

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 : \dots$$

Де  $U_0$  — всесвіт висловлювань,  $U_1$  — всесвіт множин,  $U_2$  — всесвіт типів,  $U_3$  — всесвіт видів, тощо.

$$\overline{Nat} \tag{I}$$

$$\frac{o : Nat}{Type_o} \tag{S}$$

Ви можете перевірити чи терм є всесвітом за допомогою наступної функції. Якщо аргумент не є всесвітом функція верне помилку  $\{error, \_ \}$ .

```
star (: star , N) → N
_ → (: error , " * ")
```

## 2.3 Предикативні всесвіти

Усі терми повинні відповідати рангу **Axioms** всередині послідовності всесвітів **Sorts**, та складність залежних термів **Rules** не повинна перевищувати складність бази та функтору, за допомогою якого породжений терм. Слід зауважити та наголосити, що предикативна ієрархія всесвітів не сумісна з

Чорч-кодуванням лямбда числення, у цьому можна переконатися спробувавши скомпілювати базову бібліотеку в режимі предикативних всесвітів.

$$\frac{i : Nat, j : Nat, i < j}{Type_i : Type_j} \quad (A_1)$$

$$\frac{i : Nat, j : Nat}{Type_i \rightarrow Type_j : Type_{max(i,j)}} \quad (R_1)$$

## 2.4 Impredicative Universes

Як відомо, всесвіт висловлювань, або простір з одним населеним типом, можливо додати лише вниз ієрархії для забезпечення консистентності. Однак відкритим залишається питання нескінченної імпредикативної ієрархії.

$$\frac{i : Nat}{Type_i : Type_{i+1}} \quad (A_2)$$

$$\frac{i : Nat, \quad j : Nat}{Type_i \rightarrow Type_j : Type_j} \quad (R_2)$$

## 2.5 Переключчєння ієрархій

Імпредикативна версія функція визначення ієрархії **h** повертає цільовий всесвіт В розшарування В над А. Предикативна функція у свою чергу повертає максимальну потужність всесвітів В та А.

```
dep A B : impredicative → B
      A B : predicative   → max A B
```

```
h A B → dep A B : impredicative
```

## 2.6 Contexts

Контексти моделюють змінні в процесі розв'язання рівнянь типової специфікації. Контексти можна моделювати списками, векторами (Воеводський), та вкладеними сігмами (Канонічний спосіб). Правило елімінації тут не надається так як контекст в нашій імплементації повністю знищується після типової верифікації.

$$\overline{\Gamma : Context} \quad (Ctx\text{-}formation)$$

$$\frac{\Gamma : Context}{Empty : \Gamma} \quad (Ctx\text{-}intro_1)$$

$$\frac{A : Type_i, \quad x : A, \quad \Gamma : Context}{(x : A) \vdash \Gamma : Context} \quad (Ctx\text{-}intro_2)$$

## 2.7 Система з однією аксіомою

Наша мова входить до класу чистих мов або мов з одним типом, так як всі правила виводу є компонентами кодування ізоморфізмом та виводяться з сигнатури самого  $\Pi$ -типу. Єдині правила обчислення — бета-редукція та обернене до нього спряжене правило ета-експансії, їх зв'язок поєднується у двох додаткових правилах рівняння лівой та правої одиничної композиції.

$$\begin{array}{c}
 \frac{x : A \vdash B : \text{Type}}{\Pi (x : A) \rightarrow B : \text{Type}} \quad (\Pi\text{-formation}) \\
 \\
 \frac{x : A \vdash b : B}{\lambda (x : A) \rightarrow b : \Pi (x : A) \rightarrow B} \quad (\lambda\text{-intro}) \\
 \\
 \frac{f : (\Pi (x : A) \rightarrow B) \quad a : A}{f a : B [a/x]} \quad (\text{App-elimination}) \\
 \\
 \frac{x : A \vdash b : B \quad a : A}{(\lambda (x : A) \rightarrow b) a = b [a/x] : B [a/x]} \quad (\beta\text{-computation}) \\
 \\
 \frac{\pi_1 : A \quad u : A \vdash \pi_2 : B}{[\pi_1/u] \pi_2 : B} \quad (\text{subst})
 \end{array}$$

Теорема про PTS можуть бути вбудовані в саму PTS як логічний фреймворк для  $\Pi$ -типів. Наведемо приклад в синтаксисі вищой мови.

```

record Pi (A: Type) :=
  (intro : (A → Type) → Type)
  (lambda : (B: A → Type) → pi A B → intro B)
  (app : (B: A → Type) → intro B → pi A B)
  (applam : (B: A → Type) (f : pi A B) → (a: A) →
    Path (B a) ((app B (lambda B f)) a) (f a))
  (lamapp : (B: A → Type) (p: intro B) →
    Path (intro B) (lambda B (λ (a:A) → app B p a)) p)

```

Терми навмисно наведені без доведень, так як можуть бути взяті з різних джерел [?]. Обчислювальна семантика бета та ета правил наведені у вищій мові як правила **Path**-типа. В реальній імплементації синтаксичне дерево мови **PTS**<sup>∞</sup> розширене спеціальною вершиною для імпорту складних термів в текст програм на етапі завантаження термів з довіреного джерела. Ми також забороняємо рекурсію по цьому виду вершин.

```

data om = star (n: nat)
  | var (n: name) (n: nat)
  | remote (n: name) (n: nat)
  | pi (x: name) (n: nat) (d c: om)
  | fn (x: name) (n: nat) (d c: om)
  | app (f a: om)

```

Наш типовий верифікатор значно відрізняється від канонічного прикладу наведеним Террі Коканом [?], та складається з наступних примітивів: **Substitution**, **variable Shifting**, **term Normalization**, **Equality** за визначенням та власне **Type Checker**.



## 2.8 Верифікатор

В чистих системах ми повинні бути акуратними до рекурсії, тому як ми вже сказали ми забороняємо її відносно **:remote** вершин синтаксичного дерева. Йдеться мова про конструкції виду **#List/Cons** or **#List/map** де використовуються шляхи до файлів відносно сховища термів. За допомогою кеша у вигляді ETS таблиці ми убезпечуємо себе від подвійної нормалізації термів з одними і тими самими іменами.

```
(:star,N)      D → (:star,N+1)
(:var,N,I)     D → :true = proplists:is_defined N B, om:keyget N D I
(:remote,N)    D → om:cache (type N D)
(:pi,N,0,I,O) D → (:star,h(star(type I D)),star(type O [(N,norm I)|D]))
(:fn,N,0,I,O) D → let star (type I D), NI = norm I
                  in (:pi,N,0,NI,type(O,[(N,NI)|D]))
(:app,F,A)     D → let T = type(F,D),
                  (:pi,N,0,I,O) = T, :true = eq I (type A D)
                  in norm (subst O N A)
```

## 2.9 Зсув індексів де Брейна

Зсув виконує переіменування змінної N в термі B. Переіменування означає додавання одиниці до індексу де Брейна у компоненті яка індексується іменем змінної.

```
(:star,X)      N P → (:star,X)
(:var,N,I)     N P → (:var,N,I+1) when I >= P
                → (:var,N,I)
(:remote,X)    N P → (:remote,X)
(:pi,N,0,I,O)  N P → (:pi,N,0,sh I N P,sh O N P+1)
(:fn,N,0,I,O)  N P → (:fn,N,0,sh I N P,sh O N P+1)
(:app,L,R)     N P → (:app,L,R)
```

## 2.10 Підстановка

Операція підстановки рекурсивно підставляє значення певної змінної, яка знаходиться в першому термі.

```
(:star,X)      N V L → (:star,X)
(:var,N,L)     N V L → V
(:var,N,I)     N V L → (:var,N,I-1) when I > L
(:remote,X)    N V L → (:remote,X)
(:pi,N,0,I,O)  N V L → (:pi,N,0,sub I N V L,sub O N (sh V N 0) L+1)
(:pi,F,X,I,O)  N V L → (:pi,F,X,sub I N V L,sub O N (sh V F 0) L)
(:fn,N,0,I,O)  N V L → (:fn,N,0,sub I N V L,sub O N (sh V N 0) L+1)
(:fn,F,X,I,O)  N V L → (:fn,F,X,sub I N V L,sub O N (sh V F 0) L)
(:app,F,A)     N V L → (:app,sub F N V L,sub A N V L)
```

## 2.11 Нормалізація

Функція нормалізації рекурсивно виконує операцію підстановки для операції функціональної аплікації (в літературі називається бета редукція, нормалізація за допомогою обчислення та підстановки). Normalization performs substitutions on applications to functions (beta-reduction).

```

norm (: star ,X)      → (: star ,X)
    (: var ,X)        → (: var ,X)
    (: remote ,N)     → cache (norm N [])
    (: pi ,N,0 ,I ,O) → (: pi ,N,0 ,norm I ,norm O)
    (: fn ,N,0 ,I ,O) → (: fn ,N,0 ,norm I ,norm O)
    (: app ,F,A)      → case norm F of
                        (: fn ,N,0 ,I ,O) → norm (subst O N A)
                        NF → (: app ,NF ,norm A) end

```

## 2.12 Рівність

Операція рівності за визначення просто рекурсивно порівнює два терма-дереву за допомогою патерн-мачінг оператора Erlang.

```

(: star ,N)      (: star ,N)      → true
(: var ,N,I)     (: var ,(N,I))   → true
(: remote ,N)    (: remote ,N)    → true
(: pi ,N1,0 ,I1 ,O1) (: pi ,N2,0 ,I2 ,O2) →
    let :true = eq I1 I2
    in eq O1 (subst (shift O2 N1 0) N2 (: var ,N1,0) 0)
(: fn ,N1,0 ,I1 ,O1) (: fn ,N2,0 ,I2 ,O2) →
    let :true = eq I1 I2
    in eq O1 (subst (shift O2 N1 0) N2 (: var ,N1,0) 0)
(: app ,F1,A1)   (: app ,F2,A2)   → let :true = eq F1 F2 in eq A1 A2
(A,B)           → (: error ,(eq ,A,B))

```

## 3 Використання мови

Продемонструємо інтерфейс користувача та покажемо на прикладах, як використовувати мову **PTS**<sup>∞</sup>. Перший приклад, це наївне намагання імплементувати MLTT примітиви за допомогою PTS та лише Π-типу. Ми будемо використовувати для нього кодування Бона-Берардуччі [?]. Другий приклад показує як писати реальні програми з вводом-виводом в середовищі виконання Erlang. Ми покажемо формалізацію як індуктивних так і коіндуктивних процесів.

```

$ ./henk help me
[{a,[expr],"to parse. Returns {_,_} or {error,_.}."},
 {type,[term],"typechecks and returns type."},
 {erase,[term],"to untyped term. Returns {_,_}."},
 {norm,[term],"normalize term. Returns term's normal form."},

```

```

{file,[name],"load file as binary."},
{str,[binary],"lexical tokenizer."},
{parse,[tokens],"parse given tokens into {_,_} term."},
{fst,[{x,y}],"returns first element of a pair."},
{snd,[{x,y}],"returns second element of a pair."},
{debug,[bool],"enable/disable debug output."},
{mode,[name],"select metaverse folder."},
{modes,[],"list all metaverses."}]

$ ./henk print fst erase norm a "#List/Cons"
\ Head
-> \ Tail
-> \ Cons
-> \ Nil
-> Cons Head (Tail Cons Nil)
ok

```

### 3.1 Сігма тип

Хоча система PTS достатньо потужна і без сигма типа спроби його побудови потребують теж селф типа, або явна параметризації бази, що у кодуванні Бома-Берардуччі буде відповідати кодуванню, використане в мові Cedile.

```

data Sigma (A: Type) (P: A -> Type) (x: A): Type =
  (intro: P x -> Sigma A P)

```

$\Sigma$ -типа разом зі своїми елімінаторами, згідно Aaron Stump [?]. Тут ми показуємо додаткову параметризацію бази.

```

— Sigma/@
  \ (A: *)
-> \ (P: A -> *)
-> \ (n: A)
-> \ (Exists: *)
-> \ (Intro: A -> P n -> Exists)
-> Exists

— Sigma/Intro
  \ (A: *)
-> \ (P: A -> *)
-> \ (x: A)
-> \ (y: P x)
-> \ (Exists: *)
-> \ (Intro: \ (x:A) -> P x -> Exists)
-> Intro x y

— Sigma/fst
  \ (A: *)
-> \ (B: A -> *)
-> \ (n: A)

```

```

→ \ (S: #Sigma/@ A B n)
→ S A ( \ (x: A) → \ (y: B n) → x)

— Sigma/snd
  \ (A: *)
→ \ (B: A → *)
→ \ (n: A)
→ \ (S: #Sigma/@ A B n)
→ S (B n) ( \ (_: A) → \ (y: B n) → y )

> om: fst (om: erase (om: norm (om: a("#Sigma/test.fst")))).
  {{λ,{ 'Succ',0}},
   {any,{{λ,{ 'Zero',0}},{any,{var,{ 'Zero',0}}}}}}

```

Для використання  $\Sigma$ -типу для потреб логіки ми повинні змінити родинний всесвіт на всесвіт висловлювань **Prop**:

```

data Sigma (A: Prop) (P: A → Prop): Prop =
  (intro: (x:A) (y:P x) → Sigma A P)

```

### 3.2 Тип рівності

Другий приклад потужності мови з однією аксіомою це кодування типа рівності системи типів Мартіна-Льюфа.

```

data Equ (A: Type): A → A → Type :=
  (refl (a: A): Equ A a a)

```

```

— Equ/@
  \ (A: *)
→ \ (x: A)
→ \ (y: A)
→ \/ (Equ: A → A → *)
→ \/ (Refl: \/ (z: A) → Equ z z)
→ Equ x y

— Equ/Refl
  \ (A: *)
→ \ (x: A)
→ \ (Equ: A → A → *)
→ \ (Refl: \/ (z: A) → Equ z z)
→ Refl x

```

Ми не можемо зконструювати та зберегти лямбда функцію для порівняння довільних значень типу A, однак ми можемо вбудувати тип рівності в типовий верифікатор, а саме використати його вміння порівнювати довільні терми мови:

```

> om: print (om: type (
  om: a ("(\ \ (z: #Equ/@ #Nat/@ #Nat/One #Nat/One) → #Prop/True)++
    " (#Equ/Refl #Nat/@ (#Nat/Succ #Nat/Zero))")))).

```

```

    \ / (True: *0)
  -> \ / (Intro: True)
  -> True
ok

> om: print (om: type (
  om: a ("(\ \ (z: #Equ/@ #Nat/@ #Nat/One #Nat/One) -> #Prop/True)" ++
    " (#Equ/Refl #Nat/@ #Nat/Zero)"))).
** exception error: no match of right hand side value
   {error, {"=",
    {app, {{var, {'Succ', 0}}, {var, {'Zero', 0}}}},
    {var, {'Zero', 0}}}}

```

Таким чином, ми можемо порівнювати довільні значення на етапі компіляції.

### 3.3 Система ефектів

Ця робота передбачає компіляцію на обмежений клас цільових платформ. Зараз підтримується лише Erlang, Haskell. Erlang версія призначення для використання у віртуальних машинах Erlang/OTP — BEAM (Ericsson, Швеція) та LING (Cloudozer, Україна). Для виконуючих програм достатньо використовувати кодування типових систем System F або System F<sub>ω</sub>. Властивості коду доводили у вищих мовах, а ядро обчислень та самі програми передбачається розповсюджувати у мові проміжного рівня **PTS**<sup>∞</sup>, і вже з неї, за допомогою запропонованої безкоштовної технології, екстракт в мову Erlang. Для забезпечення виконання таких формальних моделей на інтерпретаторі Erlang ми повинні запропонувати технологію формального моделювання та екстракту формального вводу-виводу. Для цього ми використаємо технологію вбудовування інтерпретаторів визначених синтаксичними деревами в контексті виконання вільних монад (процеси з термінованою рекурсією) **IO**-тип та вільних комонад (потенційно нескінченний процеси) **IOI**-тип. Самі функції `getLine` та `putLine` передаються зовні як функції в монадичний евалуатор інтерпретатор команд вводу-виводу.

```

String: Type = List Nat
data IO: Type =
  (getLine: (String -> IO) -> IO)
  (putLine: String -> IO)
  (pure: () -> IO)

```

#### 3.3.1 Нескінченний ввід-вивід

Типова специфікація на тип Infinity I/O для нескінченного вводу-виводу.

```

— IOI/@: (r: U) [x: U] [[s: U] -> s -> [s -> #IOI/F r s] -> x] x
  \ (r : *)
-> \ / (x : *)
-> (\ / (s : *))

```

```

-> s
-> (s -> #IOI/F r s)
-> x)
-> x

— IOI/F
  \ (a : *)
-> \ (State : *)
-> \ (IOF : *)
-> \ (PutLine_ : #IOI/data -> State -> IOF)
-> \ (GetLine_ : (#IOI/data -> State) -> IOF)
-> \ (Pure_ : a -> IOF)
-> IOF

— IOI/MkIO
  \ (r : *)
-> \ (s : *)
-> \ (seed : s)
-> \ (step : s -> #IOI/F r s)
-> \ (x : *)
-> \ (k : forall (s : *) -> s -> (s -> #IOI/F r s) -> x)
-> k s seed step

— IOI/data
#List/@ #Nat/@

```

Приклад нескінченного вводу-виводу.

```

— Morte/corecursive
( \ (r : *1)
-> ( (((#IOI/MkIO r) (#Maybe/@ #IOI/data)) (#Maybe/Nothing #IOI/data))
  ( \ (m: (#Maybe/@ #IOI/data))
    -> (((((#Maybe/maybe #IOI/data) m) ((#IOI/F r) (#Maybe/@ #IOI/data)))
      ( \ (str: #IOI/data)
        -> ((((#IOI/putLine r) (#Maybe/@ #IOI/data)) str)
          (#Maybe/Nothing #IOI/data))))
      (((#IOI/getLine r) (#Maybe/@ #IOI/data))
        (#Maybe/Just #IOI/data))))))

```

Коіндуктивні біндинги в Erlang.

```

copure() ->
  fun (_) -> fun (IO) -> IO end end.

cogetLine() ->
  fun (IO) -> fun(_) ->
    L = ch:list(io:get_line("> ")),
    ch:ap(IO,[L]) end end.

coputLine() ->
  fun (S) -> fun (IO) ->
    X = ch:unlist(S),

```

```

        io:put_chars(" ++X),
        case X of "0\n" => list ([]);
                _ => corec() end end end.

corec() =>
    ap('Morte':corecursive(),
        [copure(),cogetLine(),coputLine(),copure(),list([])]).

> om_extract:extract("priv/normal/IOI").
ok
> Active: module loaded: {reloaded,'IOI'}

> om:corec().
> 1
: 1
> 0
: 0
#Fun<List.3.113171260>

```

### 3.3.2 Скінченний ввід-вивід

Типова специфікація індуктивного типу I/O для скінченного вводу-виводу.

```

— IO/@
  \ (a : *)
=> \ (IO : *)
=> \ (GetLine_ : (#IO/data -> IO) -> IO)
=> \ (PutLine_ : #IO/data -> IO -> IO)
=> \ (Pure_ : a -> IO)
=> IO

— IO/replicateM
  \ (n: #Nat/@)
=> \ (io: #IO/@ #Unit/@)
=> #Nat/fold n (#IO/@ #Unit/@)
              (#IO/[>>] io)
              (#IO/pure #Unit/@ #Unit/Make)

```

Приклад скінченної рекурсивної програми.

```

— Morte/recursive
((#IO/replicateM #Nat/Five)
  (((#IO/[>>=] #IO/data) #Unit/@) #IO/getLine) #IO/putLine))

```

Індуктивні біндинги в Erlang.

```

pure() =>
    fun(IO) => IO end.

```

```

getLine() =>

```

```

fun (IO) -> fun (_) ->
    L = ch: list (io: get_line("> ")),
    ch: ap (IO, [L]) end end.

putLine () ->
    fun (S) -> fun (IO) ->
        io: put_chars (": "++ch: unlist (S)),
        ch: ap (IO, [S]) end end.

rec () ->
    ap ('Morte': recursive (),
        [getLine (), putLine (), pure (), list ([[]])]).

```

Приклад виконання рекурсивної програми всередині обчислювального середовища Erlang.

```

> om: rec ().
> 1
: 1
> 2
: 2
> 3
: 3
> 4
: 4
> 5
: 5
#Fun<List.28.113171260>

```

## 4 Вища мова з індуктивними типами

Як було показано Герман Геверс [?] принцип математичної індукції неможливо конструктивно побудувати в залежній теорії другого порядку. Однак існує багато способів зробити це. Наприклад, ми можемо вбудувати це правило в ядро типового верифікатора, як це зроблено у більшості пруверів які підтримують індуктивні типи. Також як показали Аарон Стамп та Пенг Фу [?], можна також дозволити рекурсивне визначення для правила формації, таким чином ввівши послаблену версію оператора нерухокої точки, це трохи видозмінює лямбда кодування, однак може бути застосовано до теорії з залежними типами, як це показано Віктор Майя у мові Formality <sup>4</sup>. Іншими словами, для забезпечення принципу індукції ми так чи інакше мати певну форму оператора нерухокої точки в ядрі типової ситсеми.

Так зване Числення Індуктивних Конструкцій (Calculus of Inductive Constructions [?]) використовується як мова верхнього рівня поверх PTS, для судження про програми індуктивними та коіндуктивними методами. Тут ми

---

<sup>4</sup><https://github.com/moonad>



покажемо скетч (БНФ-нотацію) такої мови верхнього рівня, яка передбачається кінцевою мовою користування, яка буде розгортатися за допомогою макросів до мови **PTS**<sup>∞</sup>. В СіС оператор нерухомої точки дозволений для усіх термів, тому перевірка база вбудована в типовий верифікатор.

Our future top language is a general-purpose functional language with  $\Pi$  and  $\Sigma$  types, recursive algebraic types, higher order functions, corecursion, and a free monad to encode effects. It compiles to a small MLTT core of dependent type system with inductive types and equality. It also has an Id-type (with its recursor) for equality reasoning, Case analysis over inductive types.

#### 4.1 БНФ

```

<> ::= #option
[]  ::= #list
|   ::= #sum
1   ::= #unit
I   ::= #identifier
U   ::= Type < #nat >
T   ::= 1 | ( I : O ) T
F   ::= 1 | I : O = O , F
B   ::= 1 | [ | I [ I ] → O ]
O   ::= I | ( O ) |
      U | O → O | O O
      | fun ( I : O ) → O | fst O
      | snd O | id O O O
      | J O O O O O | let F in O
      | ( I : O ) * O | ( I : O ) → O
      | data I T : O := T | record I T : O := T
      | case O B

```

#### 4.2 Синтаксичне дерево

Синтаксичне дерево мови вищого рівня визначене на самій мові вищого рівня. Тут ви можете бачити метатеоретичне кодування телескопів (контекстів), розгалужень та патерн мацінгу, та дефініцій індуктивних типів за допомогою оператора **data**.

```

data tele (A: U) = emp | tel (n: name) (b: A) (t: tele A)
data branch (A: U) = br (n: name) (args: list name) (term: A)
data label (A: U) = lab (n: name) (t: tele A)
data ind
= star (n: nat)
| var (n: name) (i: nat)
| app (f a: ind)
| lambda (x: name) (d c: ind)
| pi (x: name) (d c: ind)
| sigma (n: name) (a b: ind)
| arrow (d c: ind)

```

pair		(a b: ind)	
fst		(p: ind)	
snd		(p: ind)	
id		(a b: ind)	
idpair		(a b: ind)	
idelim		(a b c d e: ind)	
data_	(n: name)	(t: tele ind)	(labels: list (label ind))
case	(n: name)	(t: ind)	(branches: list (branch ind))
ctor	(n: name)		(args: list ind)

Erlang версія парсера вищої мови реалізована за допомогою **yacc** бібліотеки генератора LALR-1 парсерів, що постачається з платформою Erlang/OTP. Ця версія синтаксису є походження кубічного синтаксису типового верифікатора Андерса Мортберга [?] та доступна за адресою <sup>5</sup>.

### 4.3 Кодування індуктивних типів

Існує багато способів кодувань та моделювання теорії індуктивних типів: 1) Математична нотація комутативних діаграм F-алгебр (Гінзе, Бу [?]); 2) Індуктивно-рекурсивне кодування, алгебраїчний тип алгебраїчний типів, кодування індуктивних сімейств (Даган [?]); 3) Індуктивно-індуктивне кодування, для моделювання фактор-типів (Альтенкірх, Капозі [?]); 4) Кодування Генрі Форда або кодування лівими та правими розширеннями Кана (Камана, Фіоре [?]); 5) Чорч-сумісне кодування Бома-Берардуччі (Бом, Берардуччі [?]).

Система доведення теорем **PTS**<sup>∞</sup> поставляється з базовою бібліотекою у Чорч кодуванні з прикладами формального рекурсивного та корекурсивного вводу-виводу.

### 4.4 Поліноміальні функтори

Рекурсори дерев, які визначаються оператором найменшої нерухомої точки називаються рекурсією з базою. Вони кодують алгоритми обходження абстрактних дерев, які є поліноміальними функторами.

Natural Numbers:  $\mu X \rightarrow 1 + X$

List A:  $\mu X \rightarrow 1 + A \times X$

Lambda calculus:  $\mu X \rightarrow 1 + X \times X + X$

Stream:  $\nu X \rightarrow A \times X$

Potentially Infinite List A:  $\nu X \rightarrow 1 + A \times X$

Finite Tree:  $\mu X \rightarrow \mu Y \rightarrow 1 + X \times Y = \mu X = List X$

Як ми знаємо є декілька варіантів яз змінна може бути використана в рекурсивному алгебраїчному визначенні, найменша нерухома точка, це рекурсивний вираз який має базу рекурсії в нерекурсивному кодуванні Бома-Берардуччі, яке є узагальненою версією Чорч кодування. У такому кодуванні рекурсори є правими згортками.

<sup>5</sup><http://github.com/groupoid/hts>

## 4.5 Приклад кодування модуля List

Тип даних **List** параметризований типом своїх елементів **A** може бути представлений як ініціальна алгебра  $(\mu L_A, in)$  функтора  $L_A(X) = 1 + (A \times X)$ . Позначимо  $\mu L_A = List(A)$ . Функції конструктори (інтро-правила)  $nil : 1 \rightarrow List(A)$  та  $cons : A \times List(A) \rightarrow List(A)$  визначаються як  $nil = in \circ inl$  та  $cons = in \circ inr$ , таким чином  $in = [nil, cons]$ . Для довільних функції  $c : 1 \rightarrow C$  та  $h : A \times C \rightarrow C$ , катаморфізм  $f = \llbracket c, h \rrbracket : List(A) \rightarrow C$  є унікальним розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} f \circ nil = c \\ f \circ cons = h \circ (id \times f) \end{cases}$$

де  $f = foldr(c, h)$ . Маючи це, ініціальна алгебра представлена функтором  $\mu(1 + A \times X)$  та морфізмом-сумою  $[1 \rightarrow List(A), A \times List(A) \rightarrow List(A)]$  як катаморфізмом. Далі, закодуємо усі компоненти використовуючи мову **PTS**<sup>∞</sup>:

$$\begin{cases} list = \lambda ctor \rightarrow \lambda cons \rightarrow \lambda nil \rightarrow ctor \\ cons = \lambda x \rightarrow \lambda xs \rightarrow \lambda list \rightarrow \lambda cons \rightarrow \lambda nil \rightarrow cons\ x\ (xs\ list\ cons\ nil) \\ nil = \lambda list \rightarrow \lambda cons \rightarrow \lambda nil \rightarrow nil \end{cases}$$

Тут ми традиційно показуємо, як **List** визначається у мові вищого рівня, та як він розгортається у мову проміжного рівня, чисте лямбда числення:

```
data List: (A: *) → * :=
  (Cons: A → list A → list A)
  (Nil: list A)

— List/@
  \ (A : *)
→ \ (List: *)
→ \ (Cons: \ (Head: A) → \ (Tail: List) → List)
→ \ (Nil: List)
→ List

— List/Cons
  \ (A: *)
→ \ (Head: A)
→ \ (Tail:
  \ (List: *)
  → \ (Cons: \ (Head: A) → \ (Tail: List) → List)
  → \ (Nil: List)
  → List)
→ \ (List: *)
→ \ (Cons:
  \ (Head: A)
  → \ (Tail: List)
```

```

    -> List)
  -> \ (Nil: List)
  -> Cons Head (Tail List Cons Nil)

— List/Nil
  \ (A: *)
  -> \ (List: *)
  -> \ (Cons:
      \ (Head: A)
      -> \ (Tail: List)
      -> List)
  -> \ (Nil: List)
  -> Nil

record lists: (A B: *) :=
  (len: list A → integer)
  ((++): list A → list A → list A)
  (map: (A → B) → (list A → list B))
  (filter: (A → bool) → (list A → list A))

```

$$\left\{ \begin{array}{l} foldr = \llbracket [f \circ nil, h] \rrbracket, f \circ cons = h \circ (id \times f) \\ len = \llbracket [zero, \lambda a n \rightarrow succ\ n] \rrbracket \\ (++) = \lambda xs\ ys \rightarrow \llbracket [\lambda(x) \rightarrow ys, cons] \rrbracket(xs) \\ map = \lambda f \rightarrow \llbracket [nil, cons \circ (f \times id)] \rrbracket \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} len = foldr (\lambda x\ n \rightarrow succ\ n)\ 0 \\ (++) = \lambda ys \rightarrow foldr\ cons\ ys \\ map = \lambda f \rightarrow foldr (\lambda x\ xs \rightarrow cons\ (f\ x)\ xs)\ nil \\ filter = \lambda p \rightarrow foldr (\lambda x\ xs \rightarrow if\ p\ x\ then\ cons\ x\ xs\ else\ xs)\ nil \\ foldl = \lambda f\ v\ xs = foldr (\lambda x\ g \rightarrow (\lambda \rightarrow g\ (f\ a\ x)))\ id\ xs\ v \end{array} \right.$$

## 4.6 Базова бібліотека

Базова бібліотека включає основні теоретико-типові конструкції, такі як **Unit**, **Bool**, **Either**, **Maybe**, **Nat**, **List** та **IO**. Покажемо на прикладах, як це виглядає. Повна версія базової бібліотеки доступна на Github за адресою <sup>6</sup>.

```

data Nat: Type :=
  (Zero: Unit → Nat)
  (Succ: Nat → Nat)

data List (A: Type) : Type :=

```

---

<sup>6</sup><http://github.com/groupoid/pts>

```

( Nil: Unit → List A)
( Cons: A → List A → List A)

record String: List Nat := List.Nil

data IO: Type :=
  (getLine: (String → IO) → IO)
  (putLine: String → IO)
  (pure: () → IO)

record IO: Type :=
  (data: String)
  ([>=>]: ...)

record Morte: Type :=
  (recursive: IO.replicateM
    Nat.Five (IO.[>=>] IO.data Unit
              IO.getLine IO.putLine))

```

## 4.7 Вимірювання та порівняння з іншими системами

Мова типового верифікатора **PTS**<sup>∞</sup> у свою чергу є цільовою мовою для мов більш високого рівня, як то мова з індуктивними типами або мова з гомотопічним відрізком. Загальний розмір бібліотеки мови **PTS**<sup>∞</sup> складає 300 рядків.

Табл. 2: Compiler Passes

Module	LOC	Description
om_tok	54 LOC	Токенайзер
om_parse	81 LOC	Синтаксичний парсер
om_type	60 LOC	Нормалізатор та верифікатор
om_erase	36 LOC	Стирання типів
om_extract	34 LOC	Екстракція Erlang байткоду

## 5 Висновки

В роботі запропонована модифікована версія CoC, також відома як чиста система або система з однією аксіомою, разом з предикативною або імпредикативною ієрархією зліченної кількості всесвітів. Ця система відома як консистентна, підтримує сильну нормалізацію термів, та відтворює базове ядро усіх сучасних систем доведення теорем, таких як Coq, Lean, Agda, тощо.

**Результати дослідження** В результаті цього дослідження встановлені наступні відкриття: 1) Відсутність рекурсії робить неможливим кодування

принципу індукції, необхідне послаблення хоча б для сигнатур рекурсивних типів, так звані Self-типи, запропоновані у мові Cedile, авторами Peng Fu та Aaron Stump [?]. 2) Однак для забезпечення виконання програм System F цілком достатньо для забезпечення бібліотеки часу виконання; 2) Теореми які можуть бути вираженими без конструктора нерухомої точки, більше відповідають категорній семантиці; 3) Ця система може бути природнім чином транспортована у нетипизовані лямбда числення та їх евалуатори, що розширює область застосування майже на усі інтерпретатори. 4) Якщо обмежити розмір інтерпретатор та його програм розміром кеша першого рівня, то швидкість інтерпретації лямбда контекстів буде на рівні JIT або native.

**Переваги над існуючими аналогічними рішеннями.** 1) рафінована версія типового верифікатора на 300 рядків; Мінімальність ядра дає змогу швидко перекоонатися в коректності та здійснити ревью; 2) підтримка предикативної та імпредикативної ієрархій, як елемент конфігурації  $\mathbf{PTS}^\infty$ ; 3) евалуатор Erlang більш ефективний ніж вбудовування в Haskell; 4) мова  $\mathbf{PTS}^\infty$  використовується для специфікації нескінченних процесів.

**Наукове та виробниче використання.** 1) Ця мова може використовуватися як сертифікована ядро для додатків з підвищеними вимогами до якості, такі як фінансові додатки, математичні, або інші теми, які потребують перевірки тотальності функцій; 2) Ця мова може використовуватися як вбудовувана бібліотека; 3) В академії  $\mathbf{PTS}^\infty$  може використовуватися як дидактичний інструмент з логіки, систем типів, лямбда численню, функціональним мовам програмування.

**Перспективи подальших досліджень.** 1) Розширення спектру цільових мов та доведення семантики у cubicaltt; 2) Побудова екстрактор в оптиміальний лямбда евалуатор з  $\mathbf{PTS}^\infty$ ; 3) Побудова сертифікованого інтерпретатора на Rust як заміна Erlang; 4) Залучення принципу індукції в  $\mathbf{PTS}^\infty$  в майбутньому.

## 6 Подяки

Висловлюється подяка усім дописувичам Групоїд Інфініті, хто допоміг уникнути помилок в TeX та Erlang файлах. Також подяка всім рідним, хто підтримує нас.