

Computer Graphics Zusammenfassung

Lucien Zürcher & Melvin Werthmüller

January 11, 2019

Contents

1 Farbe	3
1.1 Was ist Farbe?	3
1.2 Farbe eines Objektes	3
1.3 Licht besteht aus?	3
1.4 Das Auge	3
1.5 Wie sehen wir Farbe?	3
1.6 Wahrnehmung	3
1.7 Farbsysteme	3
1.8 Additives Farbsystem	4
1.9 Subtraktives Farbsystem	4
1.10 Farben Konvertieren	4
1.10.1 RGB -> CMYK	4
1.10.2 CMYK -> RGB	4
1.10.3 RGB -> HSV	4
1.10.4 HSV -> RGB	4
1.11 Gamma Korrektur	4
1.12 Normfarbtafel / CIE Farbsystem	5
1.13 Helligkeitswahrnehmung	5
1.14 Nibs (Lichtdichte)	5
1.15 Mach bending	5
1.16 Farbtäuschung	5
1.17 HD,UHD,UK	5
1.18 Was ist HDR?	5
1.19 Begriffe	5
2 Halbtontechnik	5
2.1 Verfahren der Halbtontechnik	5
2.2 Quantisierung	5
2.3 Dithering	5
2.3.1 Dithermatrizen	5
2.3.2 Dithering bei gleich bleibender Auflösung	6
2.3.3 Dispersed Dot Dithering	6
2.3.4 Error Diffusion	6
3 Viewing	6
3.1 Planare geometrische Projektionen	6
3.1.1 paralelle Projektionen	6
3.1.2 perspektivische Projektionen	7
3.1.3 perspektivische Projektion berechnen	7
3.2 Vertex Transformationen	7
4 Scan Konvertierung	7
4.1 Linie Rastern	7
4.2 Mittelpunktschema	7
4.3 Kreis Rastern	8
4.4 Mittelpunktschema Kreis	8
4.5 Regionen füllen	8
4.5.1 FloodFill	8
4.6 Zeichnen von gefüllten Polygonen	8
4.6.1 Scanlinien Algorithmus	8
4.6.2 Zeichnen von Dreiecken	9
4.7 Anti-Aliasing	9
5 Visibilität	9
5.1 Backface Culling (WebGL)	9
5.2 Tiefensortierung (Painters Algorithms)	9
5.3 z-Buffer (WebGL)	10
5.4 Warnock Algorithmus	10
5.5 Objektraum & Bildraum	10
6 Clipping	10
6.1 Verfahren	10
6.2 Clipping von Linien	10
6.2.1 Clipping von Linien nach Cohen-Sutherland	10
6.3 Clipping von Polygonen mit dem Algorithmus von Sutherland-Hodgeman	11
7 Beleuchtung & Schattierung	11
7.1 Energy	11
7.2 Beleuchtungsmodelle	11
7.2.1 Diffuse Reflektion (Lambert Modell)	11
7.2.2 Spiegelnde Reflektion (Phong Modell)	12
7.3 Scattering	12
7.4 Farbe	12
7.5 Lichtabschwächung	12
7.6 Lichtquellen	12
7.7 Schattierung	12
8 Raytracing	12
8.1 Raytracing Ordnung	13
8.2 Schnittpunkt Berechnen	13
9 Rendering Equation(s)	13
9.1 BRDF (Bidirectional Reflectance Distribution Function)	13
9.2 Direct & Indirect Illumination	13
9.3 Radiosity	13
9.4 Radiosity Gleichungen	13
9.5 Progressive Radiosity	13
9.6 Hirarchical Radiosity	13
10 WebGL	13
10.1 OpenGL Merkmale	13

10.2 Grafikpipeline	14	13 Transformation	19
10.3 Programmierbare Shaders	14	13.1 homogene Koordinaten	19
10.3.1 Vertex Processing / Vertex Shader	14	13.2 Ebene im Raum	19
10.3.2 Fragment Processing / Fragment		13.3 Prokreative Transformation	19
Shader	14	13.4 Transformationen	19
10.4 Datenfluss	14	13.5 Translation	19
10.5 Attribute und Uniform Variablen mit		13.6 Rotation	19
Shaders verbinden	14	13.7 Rotation um beliebige Achse	20
10.6 Attribut Variablen und Buffer definieren .	14	13.8 Rotation um eine Achse durch den Ur-	
		prung	20
11 Vektoren	15	13.9 Parallele Projektion	20
11.1 Addition	15	13.10 Parallele Projektionsmatrix	20
11.2 Multiplikation mit Skalar	15	13.11 Perspektivische Projektion	20
11.3 Nullvektor	15	13.12 Perspektivische Projektionmatrix	21
11.4 Vektorinverses	15	13.13 Sichtvolumen Clipping	21
11.5 Vektoren Gleichheit	15		
11.6 Skalarprodukt	15		
11.7 Skalarprodukt im beliebigem Koordi-			
natensystem	15		
11.8 Orthogonal	15		
11.9 Länge des Vektors	15		
11.10 Einheitsvektor	15		
11.11 Euklidische Distanz	15		
11.12 Gerade im 2/3D	15		
11.13 Hessische Normalform	15		
11.14 Hessische Normalform Ebene	16		
11.14.1 Achsenabschnitt	16		
11.15 Projektion eines Vektors	16		
11.16 Vektorprodukt / Kreuzprodukt	16		
11.17 Vektorprodukt Anwendung	16		
11.18 Matrixprodukt	16		
11.19 Spatprodukt	17		
11.20 Translation 2D	17		
11.21 Skalierung 2D	17		
11.22 Rotation 2D	17		
11.23 Vektor Rechenregeln	17		
11.24 Rechenregel Skalarprodukt	17		
11.25 Vektorprodukt Rechenregeln	17		
11.26 Spatprodukt Rechenregeln	17		
11.27 Begriffe	17		
12 Projektive Geometrie	17		
12.1 Homogener Vektor	17		
12.2 Punkt auf Gerade	17		
12.3 Schnittpunkt Geraden	17		
12.4 Parallelle Geraden	18		
12.5 Unendlicher homogener Vektor	18		
12.6 Projektive Ebene (homogener Vektor) . .	18		
12.7 Projektive Transformation	18		
12.8 Transformationen kombinieren	18		
12.9 Translation 2D	18		
12.10 Nullpunkt Rotation 2D	18		
12.11 Rotation um Punkt A	18		
12.12 Spiegelung mit Gerade durch Ursprung .	18		
12.13 Spiegelung mit Gerade g	18		
12.14 Transformation des Koordinatensystems .	18		
12.15 Abstand Punkt zur Gerade	19		
12.16 Transformationen 2D	19		
13 Transformation	19		
13.1 homogene Koordinaten	19		
13.2 Ebene im Raum	19		
13.3 Prokreative Transformation	19		
13.4 Transformationen	19		
13.5 Translation	19		
13.6 Rotation	19		
13.7 Rotation um beliebige Achse	20		
13.8 Rotation um eine Achse durch den Ur-			
prung	20		
13.9 Parallele Projektion	20		
13.10 Parallele Projektionsmatrix	20		
13.11 Perspektivische Projektion	20		
13.12 Perspektivische Projektionmatrix	21		
13.13 Sichtvolumen Clipping	21		
14 Curves	21		
14.1 Kurve in der Ebene	21		
14.2 Kurve im Raum	21		
14.3 Spirale entlang des Zylinders	21		
14.4 Splines Übersicht (Interpolation versus			
Approximation)	22		
14.5 Methode unbestimmte Koeffizienten (In-			
terpolation)	22		
14.6 Lagrange Methode (Interpolation)	22		
14.7 Lineare Bézier spline (Approximation) . .	22		
14.8 Quadric Bézier spline (Approximation) .	22		
14.9 Cubic Bézier Spline (Approximation) . .	22		
14.10 Bernsteinpolynome	23		
14.11 Eigenschaft Bernsteinpolynome	23		
14.12 Rekursiveigenschaft Bézier-Kurven . . .	23		
14.13 Bézier-Kurven	23		
14.14 B-Spline-Kurven	23		
14.15 B-Splines	23		
14.16 NURBS (Non Uniform Rational Basic			
Splines)	24		
15 Flächen in Kartesische Koordinaten	24		
15.1 Freiformflächen	24		
16 Appendix	24		
16.1 Radians	24		

1 Farbe

1.1 Was ist Farbe?

- **Physikalisch**, Lichtzusammensetzung, Elektromagnetische Strahlen
- **Physiologisch**, Wahrnehmung und Interpretation

Farbe besteht aus:

- Farbton/Farbe
- Farbstich/Sättigung
- Helligkeit

1.2 Farbe eines Objektes

Ein Objekt nimmt Farbe auf und strahlt Farbe ab. Die Farbe des Objektes ist definiert durch die abgestrahlte Farbe.

- Beleuchtung (Illumination)
- Reflektion (Reflection)
- Farbsignal (Color Signal)

1.3 Licht besteht aus?

Licht besitzt verschiedene Wellenlängen, Kombinationen dieser Frequenzen ergeben eine Farbe.

- Sichtbares Licht (380nm - 780nm)
- Infrarot (780nm+)
- Ultraviolet (-380nm)

$Inm = 10\text{Å}(\text{Ångström})$

$1\text{Å} = \phi\text{Atom}$

1.4 Das Auge

Das Auge besteht aus; **Iris** (Kreisring mit radialen Muskeln und Lichteinschränken), **Linse** (Fokussieren), **Pupille** (Öffnung, durch Iris kontrolliert), **Photorezeptoren** (Nehmen das Licht wahr) und **Retina** (Farb- und Lichtaufnahme am Rand des Auges)

Die Retina besteht aus $75-100 \cdot 10^6$ Stäbchen/rods (Lichtintensität) und $6-7 \cdot 10^6$ Zäpfchen/cones (Farbe). Die Fovea ist der dichteste Platz.

1.5 Wie sehen wir Farbe?

Durch die 3 Arten von Zäpfchen:

Kurz (S)	Mittel (M)	Lang (L)
Blau	Grün	Rot
440nm	530nm	560nm
1	: 5	: 10

Weiss ist eine Kombination von Wellenlängen. Es gibt verschiedene Verteilung für Weiss.

1.6 Wahrnehmung

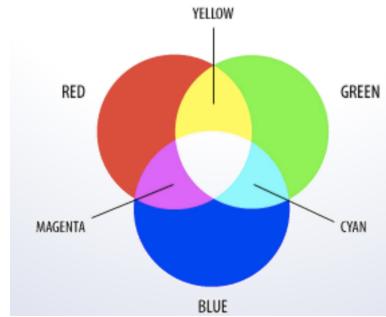
Grün 530nm wird am intensivsten wargenommen

Die Helligkeitswahrnehmung zwischen Stäbchen und Zäpfchen ist unterschiedlich

1.7 Farbsysteme

Nicht alle existierenden Farben (CIE) sind mit allen System darstellbar!

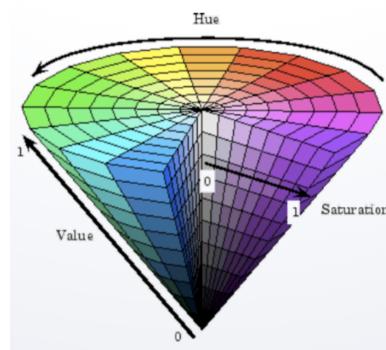
- **RGB** (Monitor, Spotlights, Pointilismus), additiv, $C = (\text{Rot}, \text{Grün}, \text{Blau})$



- **CMY** (Drucken), subtraktiv, $C = (\text{Cyan}, \text{Magenta}, \text{Yellow})$ Komplementärfarbe von RGB $(C, M, Y) = (1, 1, 1) - (R, G, B)$

- **CMYK**, CMY Mit Schwarz erweitert, $K = \min(\text{Cyan}, \text{Magenta}, \text{Yellow})$ $C = C - K, M = M - K, Y = Y - K$

- **HSV**, Farbton (Hue) / Reinheit, Sättigung (Saturation) / Intensität (Value)



- **YUV** (Alte Fernseher, Y= Helligkeit, UV = 1/4 Auflösung Farbkorrektur)

$$Y = 0.229 * R + 0.587 * G + 0.114 * B, \\ U = 0.436 * (B - Y) / (1 - 0.114), \\ V = 0.615 * (R - Y) / (1 - 0.299)$$

- **CIE-Lab**, absolutes Farbsystem

Achsen system mit Helligkeit (L) als Y-Achse und X/Z-Achse definieren Farbunterschiede

a: rot – grün Achse

b: gelb – blau Achse

1.8 Additives Farbsystem

Farben addieren

$(1,1,1) = \text{Weiss}, (0,0,0) = \text{Schwarz}$

1.9 Subtraktives Farbsystem

Farben absorbieren / filtern

$(0,0,0) = \text{Weiss}, (1,1,1) = \text{Schwarz}$

1.10 Farben Konvertieren

Zu Grau: $I = 0.229 * R + 0.587G + 0.114 * B$

$$\text{RGB} \Leftrightarrow \text{CMY}: x \begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

1.10.1 RGB -> CMYK

divide by 255 to get range from 0-1

$$R' = R/255$$

$$G' = G/255$$

$$B' = B/255$$

$$K = 1 - \max(R', G', B')$$

$$C = (1 - R' - K)/(1 - K)$$

$$M = (1 - G' - K)/(1 - K)$$

$$Y = (1 - B' - K)/(1 - K)$$

1.10.2 CMYK -> RGB

$$R = 255 \cdot (1 - C) \cdot (1 - K)$$

$$G = 255 \cdot (1 - M) \cdot (1 - K)$$

$$B = 255 \cdot (1 - Y) \cdot (1 - K)$$

1.10.3 RGB -> HSV

divide by 255 to get range from 0-1

$$R' = R/255$$

$$G' = G/255$$

$$B' = B/255$$

$$C_{\max} = \max(R', G', B')$$

$$C_{\min} = \min(R', G', B')$$

$$\Delta = C_{\max} - C_{\min}$$

Hue calculation

$$H = \begin{cases} 0^\circ & \text{falls } \Delta = 0 \\ 60^\circ \cdot (\frac{G' - B'}{\Delta} \bmod 6) & \text{falls } C_{\max} = R' \\ 60^\circ \cdot (\frac{B' - R'}{\Delta} + 2) & \text{falls } C_{\max} = G' \\ 60^\circ \cdot (\frac{R' - G'}{\Delta} + 4) & \text{falls } C_{\max} = B' \end{cases}$$

Saturation calculation

$$S = \begin{cases} 0 & \text{falls } C_{\max} = 0 \\ \frac{\Delta}{C_{\max}} & C_{\max} \neq 0 \end{cases}$$

Value calculation

$$V = C_{\max}$$

1.10.4 HSV -> RGB

$$0 \leq H \leq 360, 0 \leq S \leq 1, 0 \leq V \leq 1$$

$$C = V \cdot S$$

$$X = C \cdot (1 - |(H/60^\circ) \bmod 2 - 1|)$$

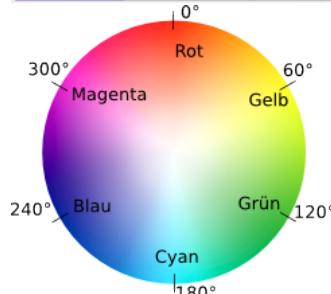
$$m = V - C$$

$$(R', G', B') = \begin{cases} (C, X, 0) & \text{falls } 0^\circ \leq H \leq 60^\circ \\ (X, C, 0) & \text{falls } 60^\circ \leq H \leq 120^\circ \\ (0, C, X) & \text{falls } 120^\circ \leq H \leq 180^\circ \\ (0, X, C) & \text{falls } 180^\circ \leq H \leq 240^\circ \\ (X, 0, C) & \text{falls } 240^\circ \leq H \leq 300^\circ \\ (C, 0, X) & \text{falls } 300^\circ \leq H \leq 360^\circ \end{cases}$$

$$(R, G, B) = ((R' + m) \cdot 255, (G' + m) \cdot 255, (B' + m) \cdot 255)$$

HSV <> RGB:

Farbe	H	S	V	R	G	B
Schwarz	-	-	0 %	0 %	0 %	0 %
Rot	0°	100 %	100 %	100 %	0 %	0 %
Gelb	60°	100 %	100 %	100 %	100 %	0 %
Braun	24,3°	75 %	36,1 %	36 %	20 %	9 %
Weiß	-	0 %	100 %	100 %	100 %	100 %
Grün	120°	100 %	100 %	0 %	100 %	0 %
Dunkelgrün	120°	100 %	50 %	0 %	50 %	0 %
Cyan	180°	100 %	100 %	0 %	100 %	100 %
Blau	240°	100 %	100 %	0 %	0 %	100 %
Magenta	300°	100 %	100 %	100 %	0 %	100 %
Orange	30°	100 %	100 %	100 %	50 %	0 %
Violett	270°	100 %	100 %	50 %	0 %	100 %



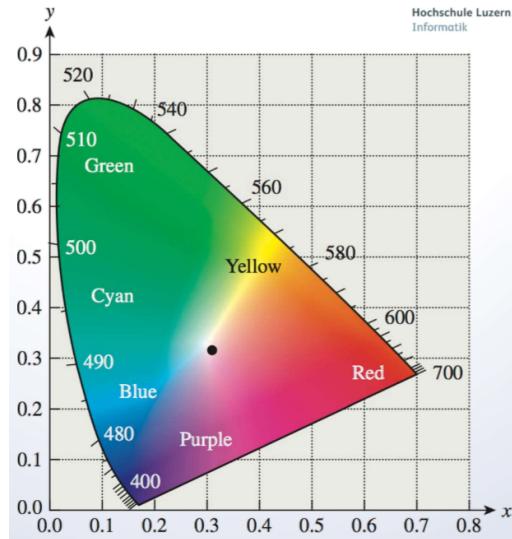
1.11 Gamma Korrektur

Erreichen von gleichmässiger Verteilung der Helligkeit / Kontrast. Das Empfinden der Helligkeit ist nicht linear.

Korrektur der Helligkeit des Bildes mit Gamma Wert. Wichtig für Bildschirme einstellen. Beim einstellen der Monitore Grauwerte mit echten Werten vergleichen (Gamma Test Pattern). 50% schwarz und 50% weiss einer Fläche (z.B. Punkte) sollte gleich sein wie 50% grau

1.12 Normfarbtafel / CIE Farbsystem

- kann alle Farben darstellen
- Spektralfarben = Farbe am Rand mit Wellenlänge
- Farben zwischen zweie Farben mischbar
- Komplementärfarben gehen durch Weiss
- Achtung: Keine Spektralfarbe am Rande zwischen UV und Infrarot



1.13 Helligkeitswahrnehmung

Helligkeit wird logarithmisch wahrgenommen, Webers Law

$$\frac{\Delta I}{I} = C$$

$$\log(I + \Delta I) - \log(I) = Const$$

Helligkeitsunterschied im dunkeln nehmen wir stärker wahr

1.14 Nibs (Lichtdichte)

Gibt Helligkeitsdichte für Auge an. 10nits werden stärker wargenommen denn 100nits. Heisst, weniger Licht wird stärker wargenommen.

1.15 Mach bending

Optische Illusion, bei zwei verschiedenen Grauwerten nebeneinander unterschieden sich diese vermeidlich stärker.

1.16 Farbtäuschung

Farbe wird abhängig durch Umgebung anders wahrgenommen (Dunkler, Heller). Optische Illusionen

1.17 HD,UHD,UK

Unterscheiden sich durch Pixelauflösung.

1.18 Was ist HDR?

High Dynamic Range, speichert zusätzlichen Wert um Helligkeitsunterschiede besser unterscheiden zu können (RGB-Pixelwerte proportional zum Licht). Detailreichere dunkel und helle Spots, weniger Verlust durch Farben mit weniger Helligkeitsunterschiede.

1.19 Begriffe

Natürliches Licht	Gemisch aus verschiedenen Lichtwellen / Frequenzen
Spektralfarben	reine Farbfrequenz; Alle Farben am Rand des CIE-Farbsystems
Spektrum	Alle Frequenzen und deren Verteilung
Spektralverteilung	Charakterisiert die Farbe, definiert durch Frequenzen (Bsp. Verschiedenes Weiss)
Komplementärfarben	Addieren ergeben Grau, gegenüberliegende Farben im CIE-Farbsystem durch Weiss

2 Halbtontechnik

2.1 Verfahren der Halbtontechnik

Da nur Schwarz und Weiss gedruckt werden kann, werden die verschiedenen Stufen durch Intensitätsstufen dargestellt. Dafür gibt es drei Verfahren:

- Quantisierung
- Dithering
- Error Diffusion

2.2 Quantisierung

Höhere Auflösung auf niedrige Auflösung durch Runden der Pixelfarbwerte auf verfügbare Farben.

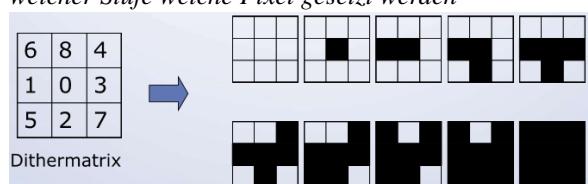
Bsp. 16Bit -> 8Bit (Runden der Werte)

2.3 Dithering

Wenn der Drucker eine grössere Auflösung besitzt, jedoch weniger Farbstufen kann Dithering verfahren verwendet werden. -> Farben mit höherer Auflösung durch kleinere Punkte simulieren.

2.3.1 Dithermatrizen

Kann als Matrix dargestellt werden. Matrix gibt an, auf welcher Stufe welche Pixel gesetzt werden



Es gibt zwei Regeln; **Gesetzter Pixel bleibt gesetzt und Strukturen in der Ditheringmatrix vermeiden.** Es soll möglichst ein Kreis approximiert werden.

2.3.2 Dithering bei gleich bleibender Auflösung

Handhabung, wenn die Bildgröße/Auflösung gleich bleibt

- Clustered dot dithering: Mittelwert von $n \times n$ Region mit Ditheringmatrix ersetzen.
- Dispersed Dot Dithering

2.3.3 Dispersed Dot Dithering

Bayer Matrizen können hierfür verwendet werden, wodurch die Methode Bayer Dithering genannt wird.

2×2 Bayer Matrix

0	2
3	1

4×4 Bayer Matrix

0	8	2	10
12	4	14	6
3	11	1	9
15	7	13	5

$$k = \frac{W_{max}}{n \times n + 1}$$

W_{max} : Anzahl Werte des Pixels (256 bei 8Bit)

n : Größe der Matrix ($2 \times 2 \Rightarrow n = 2$)

k : Faktor für Umrechnung

$$I_{new} = \frac{I_{old}}{k}$$

Für jeden Pixel den neuen Wert ausrechnen, danach mit Bayermatrix den Wert vergleichen. Pixel setzen wenn $I(x,y)_{new} > D_{ij}$

$$i = x \text{ modulo } n$$

$$j = y \text{ modulo } n$$

2.3.4 Error Diffusion

Anstatt Kreise, Punkte verschiedener Dichte anordnen. Das Bild wird dabei sequenziell durchlaufen; links -> rechts, oben -> unten

Error Diffusion verteilt den Fehler auf die umliegenden Pixel (zu hell -> dunkler machen / zu dunkel -> heller machen)

	X	7/16
1/16	5/16	3/16

Gewichtungsmatrix

Beispiel:

X	191	140	113
244	221	105	100

$$191 - 255 = -64, \text{ da Pixel Schwarz (255), Fehler: } -64$$

X	X	$140 + (7/16 * -64)$	113
$244 + (1/16 * -64)$	$221 + (5/16 * -64)$	$105 + (3/16 * -64)$	100

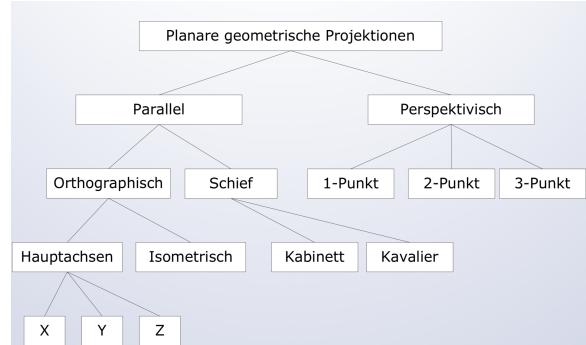
Wenn Wert > 128 = 255, ansonsten Wert <= 128 = 0

3 Viewing

von 3D in 2D abbilden

3.1 Planare geometrische Projektionen

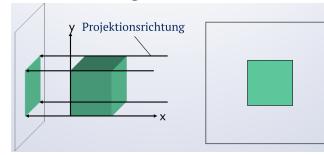
Bild auf eine Ebene projizieren



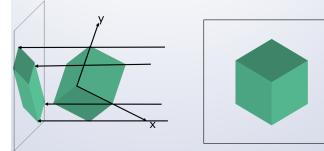
3.1.1 parallele Projektionen

- Geraden und Parallelen bleiben erhalten
- konstante Verkürzung in eine Richtung
- keine Winkeltreue

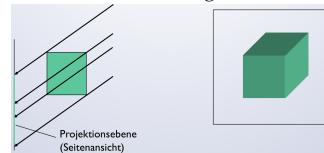
Orthographische Projektion von einer Seite / rechtwinklig



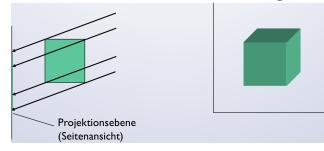
Isometrische Projektion Orthographische auf die Ebene (1,1,1)



Kavaliersprojektion Parallelprojektion mit 45 Grad. Linien rechtwinklig zur Ebene haben natürliche Länge

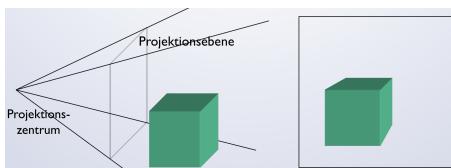


Kabinetsprojektion Parallelprojektion mit 63.4 Grad. Linien rechtwinklig zur Ebene haben halbe Länge



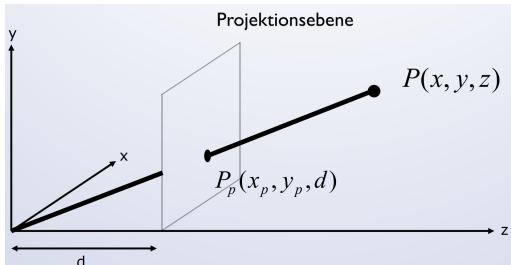
3.1.2 perspektivische Projektionen

- Simuliert Kamera oder Auge
- Spezifiziert durch Projektionszentrum und Projektionsebene
- Geraden bleiben erhalten
- Parallelen schneiden sich in einem Punkt (Fluchtpunkt)
- Objektgrösse nimmt proportional zum Abstand vom Projektionszentrum ab

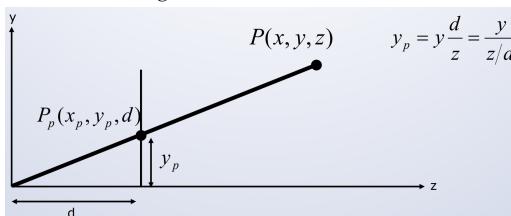


3.1.3 perspektivische Projektion berechnen

Projektionsebene parallel zur x-y Ebene bei $z=d$ wenn
Projektionszentrum = $(0, 0, 0)$



Ansicht entlang x-Achse



Projektionsmatrix in homogene Koordinaten

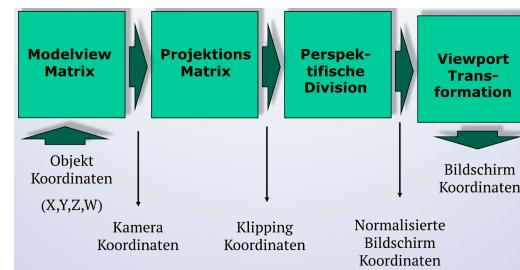
$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 1 \end{bmatrix}$$

Für $d \leftarrow \infty$ entsteht eine Parallelprojektionsmatrix

$$M'_{orth} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Vertex Transformationen

Matrix im Vertexshader benötigt:



```
attribute vec3 aVertexPosition;
uniform mat4 uModelViewMatrix;
uniform mat4 uProjectionMatrix;
void main() {
    vec4 position = vec4(aVertexPosition, 1.0);
    gl_Position =
        uProjectionMatrix *
        uModelViewMatrix *
        position ;
}
```

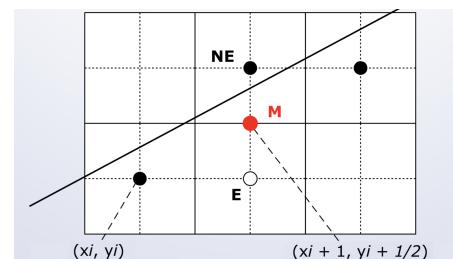
4 Scan Konvertierung

4.1 Linie Rastern

Eine Linie von (x_0, y_0) nach (x_1, y_1) rastern. Da in Pixel konvertiert werden muss. Methoden:

- Brute Force; über jeden Pixel und runden
- Brute Force inkrementell (DDA = Digital Differential Analyzer); $y_{i+1} = m * x_{i+1} + B = y_i + m$, Nachteil Gleitkommazahlen und Runden (aufwändig)
- Mittelpunktschema; Nächsten Punkt wird Kalkuliert durch if / else

4.2 Mittelpunktschema



Ist eine inkrementelle methode zum Rastern. Mittelpunkt wird betrachtet um nächsten Punkt zu finden. ($M = (x_i + 1, y_i + \frac{1}{2})$, $E = (x_i + 1, y_i)$, $NE = (x_i + 1, y_i + 1)$)

Initialisierung:

$$\begin{aligned} D_x &= x_1 - x_0; \\ D_y &= y_1 - y_0; \\ D_E &= 2 * D_y; \\ D_{NE} &= 2 * (D_y - D_x); \\ d &= 2 * D_y - D_x; \\ y &= y_0 \end{aligned}$$

Wegen 1/2 alles mal 2, damit gerade Zahlen

Für jeden nächsten d Wert, wenn $d \leq 0$, dann $d = d + D_{NE}$ ansonsten $d = d + D_{NE}$ und y inkrementieren. Jeweils den Punkt $P(x, y)$ zeichnen. x jedesmal inkrementieren.

Berechnung:

```
WritePixel(x0, y0)
for x = x0+1 to x1 do
    if d <= 0 then
        d = d + DE;
    else
        d = d + DNE;
        y = y + 1;
    end
    WritePixel(x, y);
end
```

4.3 Kreis Rastern

Selbe Methode wie bei den Linien kann für Kreise angewendet werden.

4.4 Mittelpunktschema Kreis

Funktion für Kreis: $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$

```
x = 0
y = R
d = 1 - R
DE = 2 * x + 3
DNE = 2 * (x - y)d + 5
```

Für jeden nächsten d Wert wiederholen bis $y > x$, wenn $d < 0$, dann $d = d + D_E$ ansonsten $d = d + D_{NE}$ und y dekrementieren. Jeweils den Punkt $P(x, y)$ zeichnen. x jedesmal inkrementieren.

```
WritePixel(x, y);
while y > x do
    if d < 0 then
        d = d + 2*x + 3;
    else
        d = d + 2*(x-y) + 5;
        y = y - 1;
    end
    x = x + 1;
    WritePixel(x, y);
end
```

4.5 Regionen füllen

Entweder durch 4-er oder 8-er Zusammenhang definiert



4-er Zusammenhang



8-er Zusammenhang

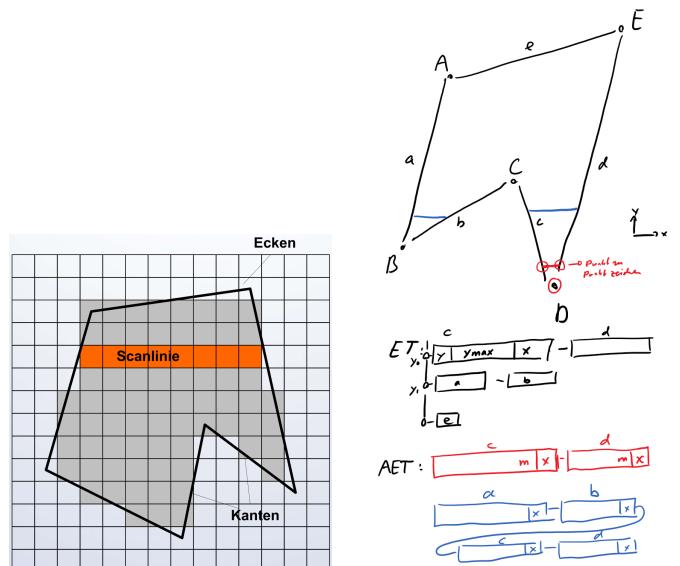
4.5.1 FloodFill

Füllen durch selben abfrage ob selbe Farbe (Photoshop Zauberstab)

```
proc FloodFill(int x, int y,
Color oldColor, Color newColor)
    if ReadPixel(x,y) == oldColor then
        WritePixel(x,y,newColor);
        FloodFill(x, y-1, oldColor, newColor);
        FloodFill(x-1,y, oldColor, newColor);
        FloodFill(x, y+1, oldColor, newColor);
        FloodFill(x+1, y, oldColor, newColor);
    end
end
```

4.6 Zeichnen von gefüllten Polygonen

4.6.1 Scanlinien Algorithmus



- Zeilenweise färben (Spans entlang der y Koordinate → Scanlinien)
- Kantentabelle (edgetable ET)
sortierte Kanten (Linien) des Polygon nach min y (innerhalb davon nach max x)
- Einträge werden gespeichert durch $[x|1/m|y_{min}|y_{max}]$
- Tabelle aktiver Kanten (AET)
Momentane Kanten für Scanlinie (sortiert nach x asc) zum Zeichnen vom einer Kante zur nächsten (immer zwei)

Erzeuge ET (Kantentabelle)

Initialisiere AET = empty
(Aktive Kanten)

$y=0$

repeat

Addiere und entferne alle Kanten

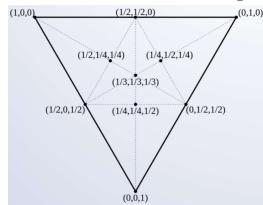
```

ET(y) zu AET
Sortiere AET nach x
Zeichne Spans
y=y+1
Entferne Kanten mit ymax = y aus AET
Aktualisiere den x Wert aller
Kanten in AET
until AET == empty and ET == empty

```

4.6.2 Zeichnen von Dreiecken

Brute Force: Alle Pixel probieren, ob im Dreieck

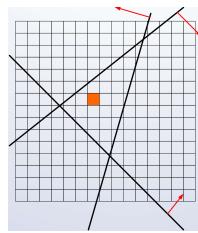


Baryzentrische Koordinaten

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

Wenn Werte zwischen 0 und 1, dann ist Punkt P innerhalb von ABC. Wert einer Koordinate entspricht dem Verhältnis der Fläche eines Teildreiecks mit Ecke P zur Fläche von ABC



2. Bruteforce Option

Unterteilung in 3 Geraden.
Zeichnen wenn auf der richtigen Seite aller Geraden

4.7 Anti-Aliasing

Treppenmuster vermeiden

- Prefiltering -> Farbintensität proportional zur Fläche oder Linie
- Supersampling -> Bild mit höherer Auflösung berechnen und Farbmittelwerte als Übergänge zeichnen (4x Sample Patter, Quincunx AA Sample Pattern)

5 Visibilität

Algorithmen für verdeckte Linien und Flächen

- Backface Culling
- Tiefensortierung
- Z-Buffer
- Warnock Algorithmus
- Raycasting / Raytracing

5.1 Backface Culling (WebGL)

- Rückseiten nicht zeichnen
- Test durch Normalvektor (Normalvektor der Fläche Richtung Kamera, dann zeichnen)

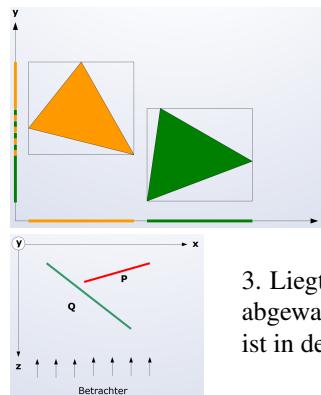
5.2 Tiefensortierung (Painters Algorithms)

Zeichnen der Polygone in einer Reihenfolge zuletzt gezeichnete überdecken die ersten Sortierung

Sortierung:

1. Sortierung nach minmaler y-Koordinate (in Kamera Koordinaten)
2. wenn in z-überlagern -> weitere Bedingungen beachten
3. Falls keine Bedingung erfüllt -> Polygone vertauschen und nochmals Prüfen

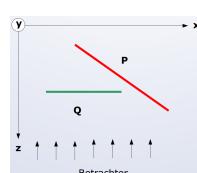
Wenn [P,Q] Reihenfolge, austauschen wenn KEINE der folgenden Bedingungen zutrifft:



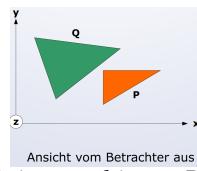
1. Überlagern sich die x-Ausdehnungen nicht?
(vollständig nebeneinander)

2. Überlagern sich die y-Ausdehnungen nicht?
(vollständig hintereinander)

3. Liegt P ganz auf der vom Betrachter abgewandten Seite von Q? (Polygon P ist in der Sortierung vor Q)



4. Liegt Q ganz auf der Betrachterseite von P? (Polygon P ist in der Sortierung vor Q)



5. Überlappen sich die Polygone nicht auf der Projektion in die xy Ebene?

Bei ungültiger Reihenfolge müssen die Polygone geschnitten werden

Eigenschaften:

- + auch für transparente Objekte möglich
- + einfach für Spezialfälle (2.5D)
- ineffizient für viele Objekte O(n²)
- nicht Hardware unterstützt

5.3 z-Buffer (WebGL)

- Pro Pixel Tiefe zusätzlich zur Farbe speichern
- Beim Zeichnen prüfen, ob näher liegt

```
// Initialisierung
for y = 0 to YMAX do
    for x = 0 to XMAX do
        color[x,y] = Background
        depth[x,y] = MAXDEPTH
    end
end
```

```
// Polygone zeichnen
for alle Polygone q do
    for alle pixel p(x,y) in q do
        z = CalculateDepth(q,x,y);
        if z > depth[x,y] then
            depth[x,y] = z;
            color[x,y] = Color of q
        end
    end
end
```

Tiefe berechnung aus Ebenegleichung:

$$z = \frac{-D - Ax - By}{C}$$

Inkrementelle Berechnung entlang einer Scanlinie:

$$Z_{neu} = \frac{-D - A(X_{alt} + 1) - By}{C} = Z_{alt} - \frac{A}{C}$$

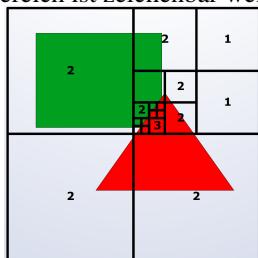
Eigenschaften:

- + Hardware unterstützt
- + Polygone können in beliebiger Reihenfolge gezeichnet werden
- + Berechenzeit $O(n)$, häufig konstant ab einer gewissen Anzahl Polygone
- Rundungsprobleme
- Gleiche z-Werte problematisch (Überlagerungsfehler)
- grosser Speicherbedarf

5.4 Warnock Algorithmus

Rekursive Unterteilung des Bildbereichs. Falls "einfach" zu zeichnen -> Zeichnen, sonst unterteilt in 4

Bereich ist zeichenbar wenn:



- Der Bereich kein Polygon enthält
- Der Bereich nur ein Polygon enthält
- Der Bereich ein Polygon enthält, das am nächsten liegt und den Bereich vollständig ausfüllt
- Der Bereich nur aus einem Pixel besteht

5.5 Objektraum & Bildraum

Objektraum definiert Raum aller Objekte (für alle Objekte)

Bildraum definiert Raum aller Pixel (für alle Pixel in Bild)

6 Clipping

Objekte ausserhalb des Viewingbereichs nicht darstellen

- Vermeiden von unnötiger Rasterisierung
- Ressourcen schonen

6.1 Verfahren

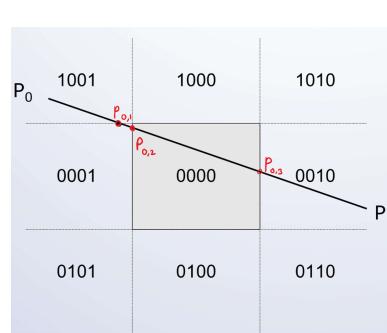
- Scissoring
alle Pixel berechnen & darstellen wenn im Fenster
- Temporärer Buffer
zeichnen in einem temporären Buffer, welcher dann Kopiert wird
- Analytische Berechnung derjenigen Teile, die im Innern des Fensters liegen

6.2 Clipping von Linien

Brute Force Algorithmus: Alle Schnittpunkte berechnen, falls mind. ein Endpunkt ausserhalb Kappungsrechteck

6.2.1 Clipping von Linien nach Cohen-Sutherland

1. Die ganze Ebene wird in Bereiche unterteilt
2. Durch Vergleichen der Bereiche in denen die Endpunkte liegen, wird entschieden ob die Linie einfach akzeptiert oder abgelehnt werden kann
3. Ist dies nicht der Fall, wird die Linie in zwei Teile geteilt, wovon eines abgelehnt wird, mit dem anderen wird zu Schritt 2 zurückgekehrt



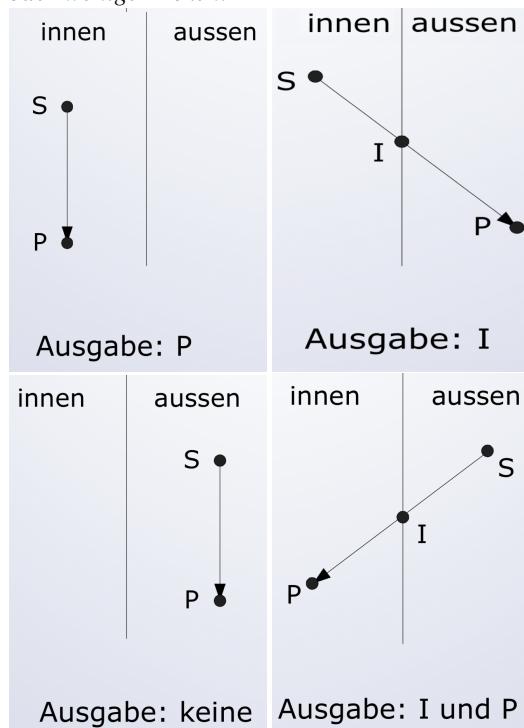
Resultat Linie:	
code($P_{0,2}$)	0000
code($P_{0,3}$)	0000

Bitweise AND

- Alles 0 -> Schnittpunkte berechnen gemäss Bit, dann neue Teillinie bis beide Punkte innerhalb (0000)
- falls eine 1 -> ablehnen

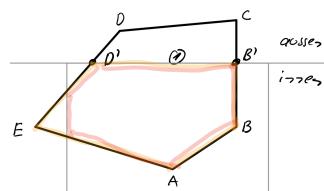
6.3 Clipping von Polygonen mit dem Algorithmus von Sutherland-Hodgeman

durch das Clipping entstehen evt. neue Formen mit mehr oder weniger Ecken!



Vorgehensweise: Verbindung zwischen zwei Punkten wird gemäss Regeln untersucht. 0-2 Eckpunkte des "neuen" Polygon als Ausgabe
Beispiel nur an einer Kante:

Polygon 1:
ABCDE
AB → B
BC → B'
CD → -
DE → D'E
EA → A



Polygon 2:
BB'D'EA

7 Beleuchtung & Schattierung

Eigenschaften eines Objektes:

- Spiegelung
- Glanz / Matt
- Transparenz
- Glatt / Rau (Oberflächenstruktur)
- Farbe
- Struktur / Textur
- Brechnung des Lichts
- Anisotrop (Richtungsabhängig)

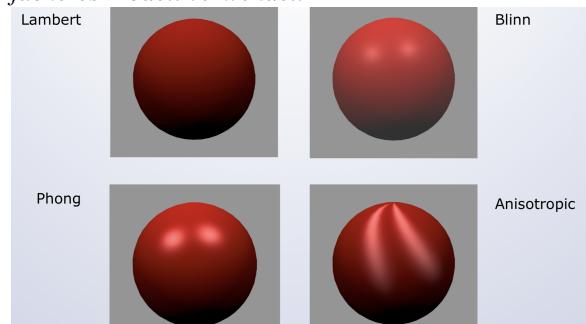
7.1 Energy

Die Energy einer beleuchteten Fläche ist proportional zum Cosinus zwischen Lichtrichtung und Flächennormale

Fällt das Licht schräg auf die Fläche, muss eine grössere Fläche mit Licht beleuchtet werden -> Fläche erscheint dünker

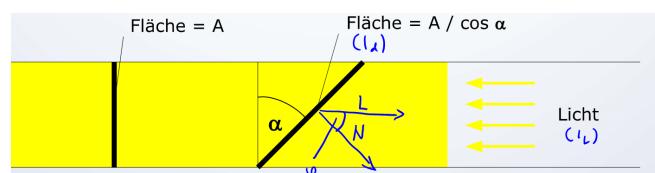
7.2 Beleuchtungsmodelle

Reale Beleuchtung ist sehr aufwändig, daher wird einfacheres Modell verwendet.



7.2.1 Diffuse Reflektion (Lambert Modell)

- Gleichmässige Abstrahlung des Lichts in alle Richtungen
- Eigenschaften eines matten, nicht glänzenden Materials
- Schiefe Fläche = senkrechte Fläche / cos(a)
- reflektierte Intensität = Intensität der Lichtquelle * Reflektionsfaktor * cosj
- cosj = Flächennormale(vektor) * Richtung zur Lichtquelle(vektor)
- Reflektionsfaktor = Farbe des Materials



$$I_d = I_L \cdot k_d \cdot \cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \vec{N} \cdot \vec{L}$$

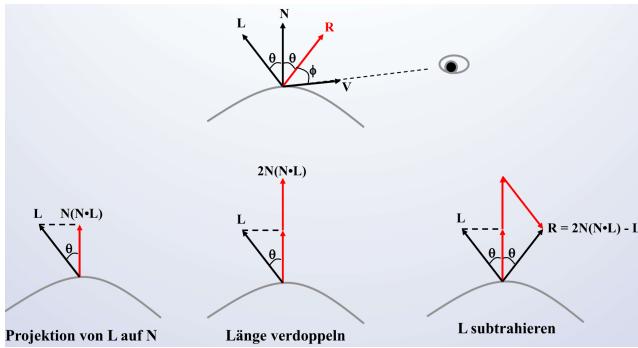
\vec{N} : normalisiert Flächennormale
 \vec{L} : Richtung zur Lichtquelle
 I_d : reflektierte Intensität
 I_L : Intensität der Lichtquelle
 k_d : Reflektionsfaktor

7.2.2 Spiegelnde Reflektion (Phong Modell)

Intensität Spiegelung = Intensität der Lichtquelle * Reflektierungsfaktor * $\cos^n(\text{Winkel zwischen Betrachtung & Reflektionsrichtung})$

n = Streuung des Lichts (hohes $n \rightarrow$ Streuung nimmt schnell ab)

Reflektierungsfaktor = Farbe der Reflektion



$$I_d = I_L \cdot k_d \cdot \cos(\phi)^{n_s}$$

$$\cos(\phi) = \vec{V} \cdot \vec{L}$$

$$R = 2\vec{N}(\vec{N} \cdot \vec{L}) - \vec{L}$$

\vec{N} : normalisiert Flächennormale

\vec{L} : Richtung zur Lichtquelle normalisiert

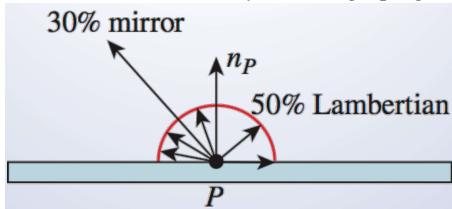
I_d : reflektierte Intensität

I_L : Intensität der Lichtquelle

k_d : Reflektionsfaktor

7.3 Scattering

Licht wird teils auch reflektiert (gespiegelt)



7.4 Farbe

Reflektionskonstanten (k_d, k_s) hängen von der Wellenlänge ab. Diese werden beim einfachen Beleuchtungsmodell mit Konstanten für jeweils Rot Grün Blau definiert. Bsp: $k_s = (0.35, 0.35, 0.35)$, $k_d = (0.6, 0, 0)$.

k_d : definiert die Farbe des Objektes

k_s : definiert die Farbe der Lichtquelle

7.5 Lichtabschwächung

Lichtabschwächung nimmt mit dem Quadrat des Abstandes ab. Jedoch zu schnell zu dunkel, daher beliebtes

Modell:

$$f_{Att} = \frac{1}{(c_1 + c_2 d + c_3 d^2)}$$

d : Distanz c_n : Konstanten

7.6 Lichtquellen

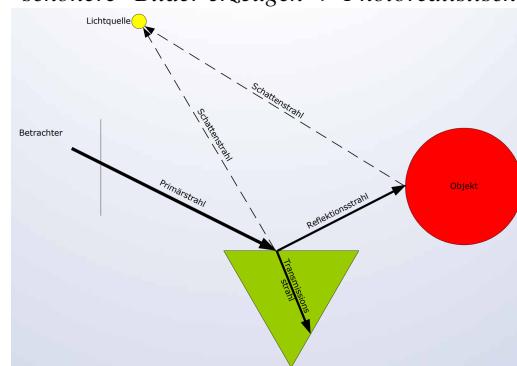
- Ambiente Lichtquelle (Licht von überall)
- Direktionale Lichtquelle
- Punkt Lichtquelle
- Spot Lichtquelle (alles außerhalb schwarz)
- Verteilte Lichtquelle (Licht mit Ausdehnung)

7.7 Schattierung

- Konstanter Schattierung pro Fläche eine Beleuchtung (Farbe) berechnen
- Gouraud Schattierung Beleuchtung an den Ecken berechnen dazwischen interpolieren VertexShader
- Phong Schattierung Beleuchtungsberechnung pro Pixel FragmentShader

8 Raytracing

"schönere" Bilder erzeugen -> Photorealistisch



Strahl durch Pixel -> Schnitt mit nächsten Objekt aus Betrachtung

Rekursives Raytracing für zusätzliche Effekte

Strahl wird in mehrere Stäbe aufgeteilt; Spiegelung, Transparenz mit Reflexion, Schatten, (Sampling Umgebungslicht)

Beleuchtung

Wird dadurch errechnet, ob ein aufgetroffener Punkt von einer Lichtquelle beleuchtet ist

Ordnung

definiert die Strahlentfernung / Anzahl Reflektionsstrahlen

Aliasing (Adaptives Supersampling) wird viel verwendet

Bild wirkt verpixelt, wenn für jeden Pixel nur einen Strahl verwendet wird

Aufwendige Technik

Um sinnlose Schnitte zu vermeiden -> Objekte zusammenfassen (Bounding Box) und damit den Schnittpunkt berechnen

Schnittpunkt mit "Grid" (auf dem Bild) und dann mit Objekten in dieser Zelle

8.1 Raytracing Ordnung

Höhere Ordnung bewirkt mehr Spiegelung und dadurch mehr Detail:

1. Einfach Ordnung, keine Spiegelung
2. Einfache Rückspiegelung von der Kugel
3. Ordnung - Boden wird auch gespiegelt
4. Ordnung noch weitere Spiegelungen und mehr Detail

8.2 Schnittpunkt Berechnen

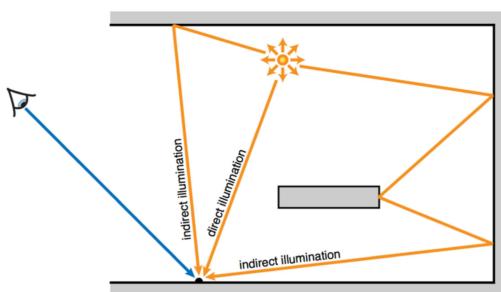
Die x und y Position mit Nullstellen entsprechen Schnittpunkten

9 Rendering Equation(s)

9.1 BRDF (Bidirectional Reflectance Distribution Function)

Anstatt Diffuse (Gleichmässig) oder Specular (Abnehmend) Reflektion an einem Punkt

9.2 Direct & Indirect Illumination



9.3 Radiosity

Die Beleuchtung der Szene wird vorberechnet ohne die Position der Kamera. Die Objektoberflächen werden in Patches unterteilt, die Licht reflektieren können. Beleuchtete Fläche als neue Lichtquelle (indirekt)

- Oberflächen unterteilt in "Patches"

- "Patch" ist ein Polygon mit konstanter Farbe / Lichtintensität
- "Patches" als neue Lichtquelle für andere "Patches"
- Das Lichtsystem ist durch lineare Gleichungen zwischen "Patches" modelliert, das auflösen dieser ermöglicht die Berechnung der Farbe.

Radiositygleichung:

$$B_i \cdot A_i = E_i \cdot A_i + \rho_i \sum (B_j \cdot A_j \cdot F_{ij})$$

B_i : Radiosity

A_i : Flächeninhalt des Patches i

E_i : Emission des Patches i

ρ_i : Reflektion des Patches i

F_{ij} : Formfaktor

Formfaktorgleichung:

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \phi \cdot \cos \varphi}{\pi r_{ij}^2} dA_i \cdot dA_j$$

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$$

9.4 Radiosity Gleichungen

Das Lösen der Gleichungen ist aufwendig. Folgende Methoden gibt es:

- Jacobi Iteration
- Gauss Seidel Relaxion
- Southwell Iteration

9.5 Progressive Radiosity

Berechnung von frühe Darstellung einer approximativer Lösung durch Patch j auswählen, Radiosity von diesem Patch j, nächster Patch.

9.6 Hirarchical Radiosity

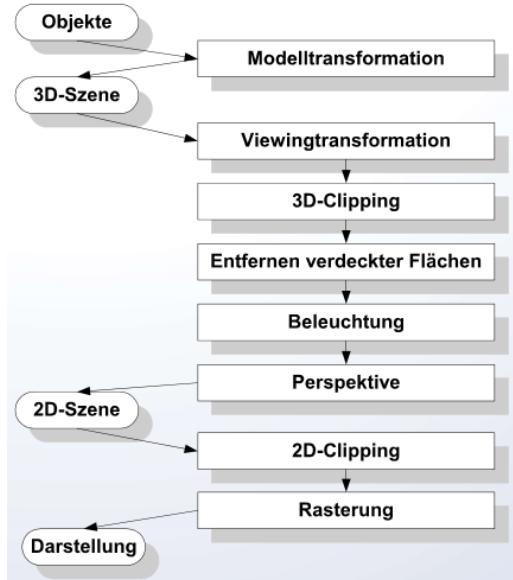
Selbe System, doch durch unterschiedliche Patch Grösse. Kleine Patches nahe dem Licht, grosse Patches weiter entfernt.

10 WebGL

10.1 OpenGL Merkmale

- Low Level Graphics API
- Verschiedene Platformen
- 1.0/2.0 Fixe Funktionspipeline
- Vorlage für WebGL

10.2 Grafikpipeline



10.3 Programmierbare Shaders

Shaders werden für die Berechnung der zu zeichnenden Objekte verwendet. Das Programm wird direkt auf der Grafikkarte ausgeführt.

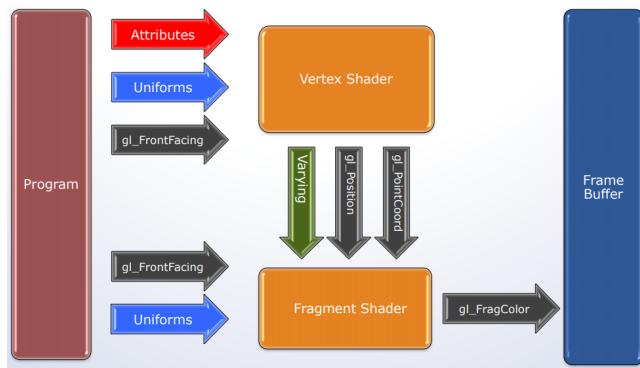
10.3.1 Vertex Processing / Vertex Shader

Berechnen der **Positionen** der Vertexe (Punkte) und Werte für den folgenden Fragmentshader.

10.3.2 Fragment Processing / Fragment Shader

Berechnet die **Farbe** der einzelnen Pixel.

10.4 Datenfluss



10.5 Attribute und Uniform Variablen mit Shaders verbinden

1. Attribute

```
ctx.aVertexPositionId =
gl.getAttribLocation(ctx.shaderProgram,
 "aVertexPosition")
```

2. Uniform

```
ctx.uColorId =
gl.getUniformLocation(ctx.shaderProgram,
 "uColor"))
```

10.6 Attribut Variablen und Buffer definieren

Erzeugen

1. Buffer erzeugen

```
var buffer = gl.createBuffer()
```

2. Array Buffer auf Buffer setzen

```
gl.bindBuffer(gl.ARRAY_BUFFER,
buffer)
```

3. Daten füllen

```
glBufferData(gl.ARRAY_BUFFER,
new Float32Array(vertices),
gl.STATIC_DRAW)
```

Zeichnen

1. Buffer binden

2. Attribut und/oder uniform setzen

```
gl.vertexAttribPointer(index,
size, type, normalized, stride,
offset)
```

z.B. `gl.vertexAttribPointer(ctx.aVertexPosition, 2, gl.FLOAT, false, 0, 0)`

3. Attribut als Array setzen

```
gl.enableVertexAttribArray(index)
```

4. Zeichnen

```
gl.drawArrays(mode, first, count)
```

11 Vektoren

- Skalarprodukt
- Matrixprodukt
- ✗ Kreuzprodukt

11.1 Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

11.2 Multiplikation mit Skalar

$$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

$\lambda \in \text{Skalar}$

11.3 Nullvektor

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

11.4 Vektorinverses

$$-\vec{a} = -\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix}$$

Vektor mit negativen Komponenten

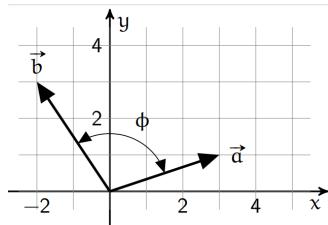
11.5 Vektoren Gleichheit

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{b}$$

Vektoren sind gleich, wenn Komponenten gleich

11.6 Skalarprodukt

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$



$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

11.8 Orthogonal

$$\vec{e}_x \bullet \vec{e}_y = 0$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Senkrecht zueinander, wenn Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren 0 ergibt.

11.9 Länge des Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

11.10 Einheitsvektor

$$e_v = \frac{1}{\|v\|} \bullet v = \frac{1}{\sqrt{v \cdot v}} \bullet v$$

($i = e_1, j = e_2, k = e_3$)

$$\vec{e}_x = [1, 0, 0]^T$$

$$\vec{e}_y = [0, 1, 0]^T$$

$$\vec{e}_z = [0, 0, 1]^T$$

11.11 Euklidische Distanz

$$\bar{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

11.12 Gerade im 2/3D

• Punkt-Punktform mit Vektoren 2/3D

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), t \in \mathbb{R}$$

\vec{r}_1 : Punkt, \vec{r}_2 : Punkt

• Punkt-Richtungsform mit Vektoren 2/3D

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{r}_1, t \in \mathbb{R}$$

\vec{r}_0 : Punkt, \vec{r}_1 : Richtungsvektor

• Achsenabschnitt-Steigungsform

$$y = mx + b$$

b : Achsenabschnitt, m : Steigung

• Punkt-Richtungsform

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

(x_0, y_0) : Punkt, m : Steigung

• Allgemeine Geradengleichung

$$ax + by + c = 0$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

Aus Punkten A(x1, y1) und B(x2, y2)

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

11.13 Hessische Normalform

Vektorielle Schreibweise der Hessischen Normalform

$$\vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$$

da $\vec{n} \perp (\vec{x} - \vec{x}_0)$

$$\Rightarrow n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = n_x x + n_y y - (n_x x_0 + n_y y_0)$$

Abstand vom Ursprung: d

$$d = (n_x x_0 + n_y y_0) = \vec{n} \bullet \vec{x}_0$$

\vec{n} muss normalisiert sein:

$$|\vec{n}| = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \bullet \vec{n}$$

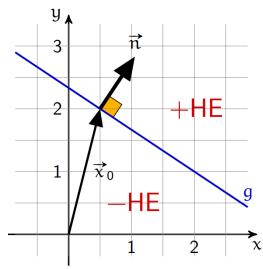
11.7 Skalarprodukt im beliebigem Koordinatensystem

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = [a_1 a_2 a_3]^T$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 = [b_1 b_2 b_3]^T$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = [a_1 a_2 a_3] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{a}^T \mathbf{G} \mathbf{b}$$

Matrix \mathbf{G} wird **metrisch Tensor** genannt



$$\begin{aligned} \mathbf{n}_x \mathbf{x} + \mathbf{n}_y \mathbf{y} - d &= 0 \\ d &= (n_x x_0 + n_y y_0) = \vec{n} \bullet \vec{x}_0 \\ d > 0 &\Leftrightarrow (0, 0) \in -HE \\ d < 0 &\Leftrightarrow (0, 0) \in +HE \\ g: ax + by + c = 0 & \\ \vec{n} &= \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ d &= -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

Abstand eines Punktes zur Geraden berechnen

Punkt $P(x,y)$ einsetzen $\frac{ax+by-d=0}{\sqrt{a^2+b^2}} = \text{Abstand}$

11.14 Hessische Normalform Ebene

$$\epsilon : ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{aligned} n_x x + n_y y + n_z z - D &= 0; \text{ HNF der Ebene } \epsilon \in \mathbb{R}^3 \\ \vec{n} &= \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ D &= -\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned}$$

11.14.1 Achsenabschnitt

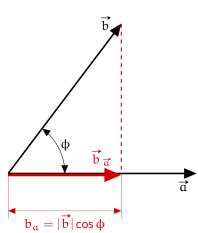
Gegeben sind 3 Punkte $p_x = x, p_y = y, p_z = z$ die ergeben eine Ebenengleichung:

$$\frac{x}{p_x} + \frac{y}{p_y} + \frac{z}{p_z} - 1 = 0$$

Für die HNF multiplizieren mit: $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

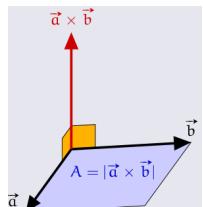
$$\begin{aligned} D > 0 &\Leftrightarrow (0, 0) \in -HR \\ D < 0 &\Leftrightarrow (0, 0) \in +HR \end{aligned}$$

11.15 Projektion eines Vektors



$$\begin{aligned} \vec{b} \text{ Richtung } \vec{a}: & \\ \vec{b}_{\vec{a}} &= \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \\ \vec{b}_a \text{ mal Einheitsvektor } \vec{a}: & \\ \vec{b}_{\vec{a}} &= b_a \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \\ &= \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \end{aligned}$$

11.16 Vektorprodukt / Kreuzprodukt



$\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf beiden Vektoren

\vec{a}, \vec{b} und $\vec{a} \times \vec{b}$ sind ein Rechtssystem

$\vec{a} \times \vec{b}$ entspricht der Fläche des aufgespannten Parallelogramms (A):

$$A = \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Regel von Sarrus

11.17 Vektorprodukt Anwendung

- Lorentz-Kraft $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$
 \vec{v} : Geschwindigkeit, B : Magnetfeld, q : Ladung
- Geschwindigkeit $\vec{v} = q(\vec{w} \times \vec{x})$
 \vec{x} : Punkt, w : Winkelgeschwindigkeit, \vec{w} : Drehachse
- Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
 \vec{F} : Kraft, \vec{r} : Punkt / Koordinatenursprung
- Normalvektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$
 \vec{a} und \vec{b} liegen auf der Ebene.
- Kollinearität kollinear (d.h. linear abhängig) wenn Vektorprodukt verschwindet

11.18 Matrixprodukt

falsches Schema

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 + a_3 b_2 & a_1 b_3 + a_3 b_4 \\ a_2 b_1 + a_4 b_2 & a_2 b_3 + a_4 b_4 \end{bmatrix}$$

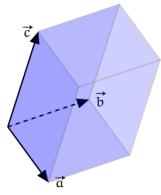
In Worten für die erste Zeile: a_1 mal die erste Zeile + a_3 mal die zweite Zeile etc.. Wobei die Spalten unabhängig bleiben.

$B : n \text{ Zeilen } p \text{ Spalten}$

$A : m \text{ Zeilen } n \text{ Spalten}$

$C = A \times B : m \text{ Zeilen } p \text{ Spalten}$

11.19 Spatprodukt



Spatprodukt $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$

Ist der Skalar der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c})$$

Spatprodukt entspricht Volumen des Würfel, aufgespannt durch die drei Vektoren, wenn in einem Rechtssystem, dann:

$$V_{Spat} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

$$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Komplanar (linear abhängig) wenn $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

11.20 Translation 2D

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{t} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + t_1 \\ x_2 + t_2 \end{bmatrix}$$

11.21 Skalierung 2D

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} \vec{s}_x x \\ \vec{s}_y y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

11.22 Rotation 2D

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{R}\vec{x}$$

Inverse Matrix: $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$

11.23 Vektor Rechenregeln

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} && \text{Kommutativgesetz} \\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} && \text{Assoziativgesetz} \\ \vec{a} + \vec{0} &= \vec{a} && \text{Existenz Neutralelement } \vec{0} \\ \vec{a} + (-\vec{a}) &= \vec{0} && \text{Existenz Inverses } -\vec{a} \\ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) &= \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \\ (\lambda + \mu)\vec{a} &= \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \\ (\lambda\mu)\vec{a} &= \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) \\ 1\vec{a} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \vec{a} = \vec{a} \end{aligned}$$

11.24 Rechenregel Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{a} \bullet \vec{b} &= \vec{b} \bullet \vec{a} \\ \vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c} \\ \lambda(\vec{a} \bullet \vec{b}) &= (\lambda\vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (\lambda\vec{b}) \end{aligned}$$

11.25 Vektorprodukt Rechenregeln

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} && \text{Anti-Kommutativgesetz} \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} && \text{Distributivgesetz} \\ \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) &= (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) \end{aligned}$$

11.26 Spatprodukt Rechenregeln

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] && \text{zwei Vekoren vertauschen entspricht Vorzeichenwechsel} \\ [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] && \text{Zyklisches Vertauschen} \\ [\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] &= && \text{keine Änderung} \\ [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] &= && \text{Multiplikation} \\ & & & \text{Addition} \end{aligned}$$

11.27 Begriffe

Ortsvektor

Richtungsvektor

Einheitsvektor

Linearkombination

kollinear

Linear Unabhängig

komplanar

Skalar

Rechtssystem

Vom Ursprung zum Punkt

Eine Richtung im Raum

Eine Einheit in eine beliebige Richtung

Ein Vektor, der ein Vielfaches eines Einheitvektors ist.

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

Vektoren sind unabhängig wenn

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Ist eine reelle oder komplexe Zahl Koordinatensystem aufgebaut wie die rechte Hand wobei; der Zeigfinger X-Achse (\vec{e}_x), Mittelfinger Y-Achse (\vec{e}_y) und Daumen Z-Achse (\vec{e}_z)

12 Projektive Geometrie

12.1 Homogener Vektor

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ Homogener 2D Vektor}$$

$$(x, y) = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right)$$

12.2 Punkt auf Gerade

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \vec{g} \bullet \vec{r} = 0$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{g} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$A(x, y)$ (homogenisiert \vec{r}) liegt dann auf Gerade \vec{g}

12.3 Schnittpunkt Geraden

$$\vec{r} = \vec{g}_1 \times \vec{g}_2$$

$$\vec{g}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \vec{g}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

\vec{r} ist der homogene Schnittpunkt $[x_1, x_2, x_3]$

$x_3 = 0$, dann sind die Geraden parallel, und kein Schnittpunkt möglich (division durch 0)

12.4 Parallele Geraden

$$\vec{r} = \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 = (c_1 + c_2) \begin{bmatrix} b_1 \\ -a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$, dann sind die Geraden parallel

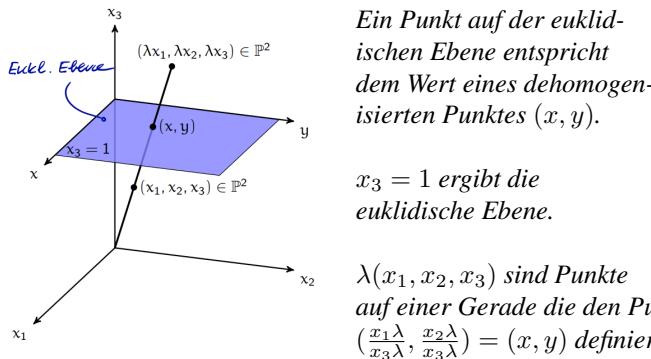
12.5 Unendlicher homogener Vektor

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{g}_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$$

alle idealen, uneigentlichen oder unendlich fernen Punkte \vec{r} liegen auf der Gerade \vec{g}_∞

$$\vec{g}_\infty \bullet \vec{r} = \vec{g}_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

12.6 Projektive Ebene (homogener Vektor)



12.7 Projektive Transformation

Abbildungen $h : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$ mit Eigenschaften:

- h ist eindeutig (bijektiv) und daher umkehrbar
- h Transformationen sind geradentreu (geraden auf geraden abbilden)
- **Homogene Matrix** ist bis auf eine Konstante bestimmt ($k\mathbf{H} = \mathbf{H}$; $k > 0$)

$$\vec{r}' = h(\vec{r}) = \mathbf{H}\vec{r}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

12.8 Transformationen kombinieren

$$\vec{r}' = h(\vec{r}) = (h_2 \circ h_1)(\vec{r}) = h_2(h_1(\vec{r}))$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1, \vec{r}' = \mathbf{H}\vec{r} = \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_1 \vec{r}$$

$$h_1 : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2, h_2 : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$$

$h = h_2 \circ h_1$ entspricht erst h_1 dann h_2

12.9 Translation 2D

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{r} = \mathbf{T}\vec{r}$$

Verschiebung durch $\vec{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$, \mathbf{T}^{-1} entspricht $-\vec{t}$ in \mathbf{T}

12.10 Nullpunkt Rotation 2D

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{r} = \mathbf{R}\vec{r}$$

Rotation mit ϕ , \mathbf{R}^{-1} entspricht sin vertauschen

12.11 Rotation um Punkt A

Punkt: $A(t_x, t_y)$

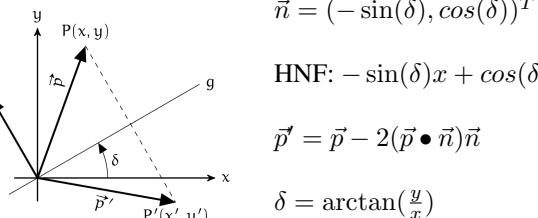
1. Translation A zum Nullpunkt verschiebt (\mathbf{T})

2. Nullpunkt Rotation 2D mit Winkel Φ

3. Translation A zurück (\mathbf{T}^{-1})

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Phi) & -\sin(\Phi) & 0 \\ \sin(\Phi) & \cos(\Phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}_0 \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12.12 Spiegelung mit Gerade durch Ursprung



12.13 Spiegelung mit Gerade g

1. gerade ins Zentrum Transformieren (\mathbf{T} errechnen)

2. Spiegelung mit Gerade durch Ursprung (\mathbf{S})

3. zurück Transformieren (\mathbf{T}^{-1})

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{T}$$

12.14 Transformation des Koordinatensystems

$$\begin{bmatrix} \cos(-\Phi) & -\sin(-\Phi) & 0 \\ \sin(-\Phi) & \cos(-\Phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation des Koordinatensystems um Φ

Bei einer Transformation des Koordinatensystems handelt es sich um eine Inverse Matrix der normalen Transformation

12.15 Abstand Punkt zur Gerade

$$d = ax + by + c$$

d : Distanz, $P(x, y)$: Punkt, $g : ax + by + c = 0$:

12.16 Transformationen 2D

$$t = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, 0^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{RMC} = 2 \times 2 \text{ Matrix}$$

Euklidisch (starre Bewegung)

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Abstand zwischen zwei Punkten, alle Winkel
($R^{-1} = R^T$)

Ähnlichkeit

$$S = \begin{bmatrix} k \cdot \mathbf{M} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Winkel zwischen zwei Punkten, alle Winkel

Affin

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Parallelität, Verhältnis zwischen Flächeninhalten

Allgemein

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

Geraden bleiben Geraden

13 Transformation

13.1 homogene Koordinaten

jeder Punkt $P(x, y, z)$ des Raumes \mathbb{R}^3 besitzt eine 4-komponenten Vektor \vec{r}

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, x = \frac{x_1}{x_4}, y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_3}{x_4}$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4} \right)$$

13.2 Ebene im Raum

Ebene ϵ im Raum \mathbb{R}^3

$\epsilon : ax + by + cz + d = 0$ Hessische Normalform

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \text{Punkt: } \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ebenengleichung:

$$\vec{w} \bullet \vec{r} = \vec{w}^T \cdot \vec{r} = ax + by + cz + d = 0$$

13.3 Proektive Transformation

Die homogene Matrix \mathbf{H} ist nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, heisst, alle Vielfachen von \mathbf{H} sind auch gültig

$\eta : \mathbb{P}^3 \mapsto \mathbb{P}^3$ stellt eine **projektiven Transformation** dar

$$\eta(r) = \mathbf{H} \cdot r = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

13.4 Transformationen

$$t = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, 0^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{RMC} = 3 \times 3 \text{ Matrix}$$

Euklidisch (starre Bewegung)

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Abstand zwischen zwei Punkten, alle Winkel
($R^{-1} = R^T$)

Ähnlichkeit

$$S = \begin{bmatrix} k \cdot \mathbf{M} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Winkel zwischen zwei Punkten, alle Winkel

Affin

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Parallelität, Verhältnis zwischen Volumeninhalt

Allgemein

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}$$

Geraden bleiben Geraden

13.5 Translation

$$\mathbf{T}(\vec{t}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13.6 Rotation

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos(\Phi_z) & -\sin(\Phi_z) & 0 & 0 \\ \sin(\Phi_z) & \cos(\Phi_z) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos(\Phi_y) & 0 & \sin(\Phi_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\Phi_y) & 1 & \cos(\Phi_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Phi_x) & -\sin(\Phi_x) \\ 0 & \sin(\Phi_x) & \cos(\Phi_x) \end{bmatrix} \quad \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right|$$

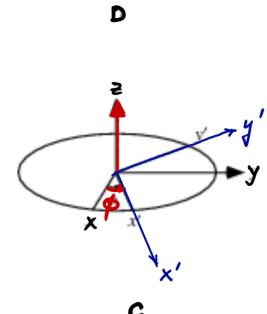
Bei Rotation um selbe Achse gilt Kommutativgesetz $(\mathbf{R}_z(\Phi_{z,1}) + \Phi_{z,2}) = \mathbf{R}_z(\Phi_{z,1})\mathbf{R}_z(\Phi_{z,2}) = \mathbf{R}_z(\Phi_{z,2})\mathbf{R}_z(\Phi_{z,1})$

Inverse entspricht $\mathbf{R}^{-1}(\Phi) = \mathbf{R}(-\Phi)$, wobei $\cos(-\Phi) = \cos(\Phi)$

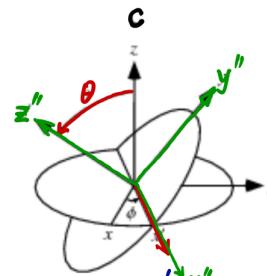
13.7 Rotation um beliebige Achse

- 1) Rotation um ϕ um z-Achse (Matrix D)
- 2) Rotation um den Winkel $\theta \in [0, \pi]$ (um frühere X-Achse) (Matrix C)
- 3) Rotation um den gegebenen Winkel ψ (Matrix B)

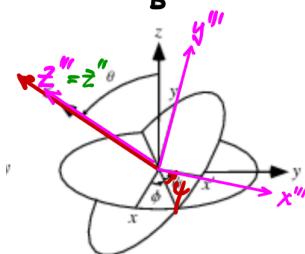
$$c_\alpha = \cos \alpha, s_\alpha = \sin \alpha, \alpha \in \phi, \theta, \psi$$



$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} c_\phi & s_\phi & 0 \\ -s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & s_\theta \\ 0 & -s_\theta & c_\theta \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}$$

Bei Rotation um eine Gerade, 1. Transformation \mathbf{D} & \mathbf{C} Matrix (mit Winkel der Gerade), dann eigentliche Transformation mit gegebenem Winkel, dann zurücktransformiere \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{D}^{-1}

13.8 Rotation um eine Achse durch den Ursprung

$$\text{Rotation um einen Einheitsvektor } \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

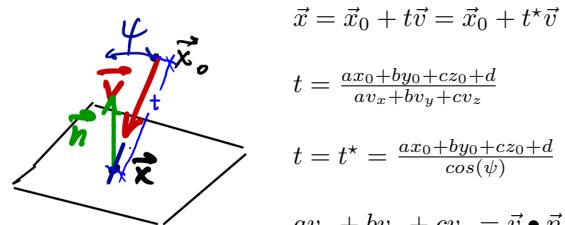
$$\mathbf{Q} = (\cos \theta)I + (1 - \cos \theta) \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{bmatrix} - \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

13.9 Parallele Projektion

Projektion auf Ebene $\epsilon : ax + by + cz + d = 0$

Die Ebene ist definiert durch Normalvektor $\vec{n} = [a, b, c]^T$ (Ebenen Normalenvektor)

Projektionsrichtung definiert durch Normalenvektor $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$ (Projektionsrichtung)



$$av_x + bv_y + cv_z = \vec{v} \bullet \vec{n} = |\vec{v}| |\vec{n}| \cos(\psi) = \cos(\psi)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + tv_x \\ y_0 + tv_y \\ z_0 + tv_z \end{bmatrix}$$

Wobei x_0 Punkt dem projizierten \vec{x} Punkt auf Ebene entspricht. ψ ist der Winkel zwischen \vec{n} und \vec{v}

13.10 Parallelprojektionsmatrix

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{c_\psi} \begin{bmatrix} (c_\psi - av_x) & -bv_x & -cv_x & -dv_x \\ -av_y & (c_\psi - bv_y) & -cv_y & -dv_y \\ -av_z & -bv_z & (c_\psi - cv_z) & -dv_z \\ 0 & 0 & 0 & c_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos(\psi) = c_\psi$$

13.11 Perspektivische Projektion

Fall wenn Zentrum O im Nullpunkt

$$\epsilon : ax + by + cz + d = 0, \text{ Ebene}$$

Beliebigen Punkt $A_0(x_0, y_0, z_0)$ mit Projektionspunkt $A^*(x^*, y^*, z^*)$ in Ebene ϵ

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda y_0 \\ \lambda z_0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -\frac{d}{ax_0 + by_0 + cz_0}$$

$$(ax_0 + by_0 + cz_0) \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -dx_0 \\ -dy_0 \\ -dz_0 \\ ax_0 + by_0 + cz_0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

13.12 Perspektivische Projektionmatrix

$$H = \begin{bmatrix} -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix}$$

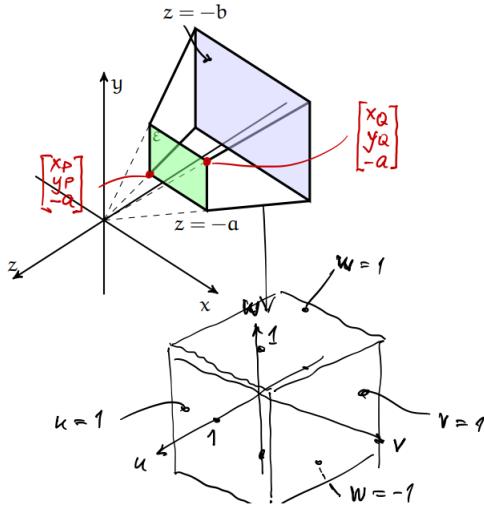
Projektionszentrum muss dann im Zentrum liegen.

Wenn Ebene nicht mit Nullpunkt im Zentrum, dann zum Zentrum transferieren. Wichtig, die perspektivische Ebene muss transferiert werden. Bsp: x-y-Ebene ($0x + 0y + 1z + d = 0$) hat $\epsilon : z = 0$ dies mit der Transformation multiplizieren. Bei Zentrum der x-y-Ebene $Z(2, 4, -3)$ entspricht $\epsilon^* : z = 3$, somit $d = 3$

wenn verschoben: $[-2, -4, 3, 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ d \end{bmatrix} = 0$

13.13 Sichtvolumen Clipping

Das kanonische Sichtvolumen ist ein Würfel mit $P(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$
Defür sind vorne und hinten, sowie zwei Punkte bestimmd Grösse gegeben



P links unten, Q rechts oben
 z vorne $z = -a$, z hinten $z = -b$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{2a}{x_Q - x_P} & 0 & \frac{x_Q + x_P}{x_Q - x_P} & 0 \\ 0 & \frac{2a}{y_Q - y_P} & \frac{y_Q + y_P}{y_Q - y_P} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b+a}{b-a} & -2\frac{ba}{b-a} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

14 Curves

14.1 Kurve in der Ebene

Explizite Darstellung

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$$

Kreis:

$$\text{oberer Halbkreis } \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{unterer Halbkreis } \sqrt{r^2 - x^2}$$

(Implizite Darstellung nach y auflösen -> Explizite Darstellung)

Implizite Darstellung

$$F(x, y) = 0$$

Kreis mir radius r und Zentrum $(0, 0)$:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

Parameterdarstellung

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Punkte miteinander verbunden, einzeln angegeben

$$\text{Kreis: } \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{bmatrix}$$

-> einzelne Funktionen für x & y

Beachte, Parameterdarstellung ist nicht eindeutig;

$$\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} r \cos(2t) \\ r \cos(2t) \end{bmatrix}, \text{ Kreis doppelt so schnell durchlaufen (2t)}$$

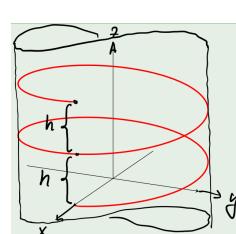
$$\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} r \cos(2\pi t) \\ r \cos(2\pi t) \end{bmatrix}, \text{ Kreis durchlaufen in einer Zeiteinheit 1 (2\pi t)}$$

14.2 Kurve im Raum

Parameterdarstellung mit 3 Komponenten

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

14.3 Spirale entlang des Zylinders

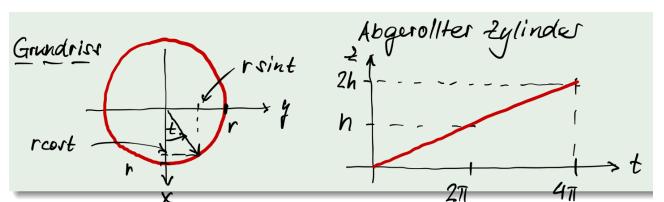


$$x^2 + y^2 = r^2$$

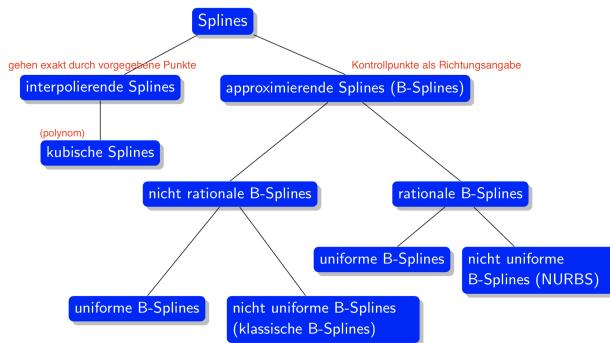
$$\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ht/(2\pi) \end{bmatrix}$$

Grundriss ergibt Kreis, Höhe Linear



14.4 Splines Übersicht (Interpolation versus Approximation)



14.5 Methode unbestimmte Koeffizienten (Interpolation)

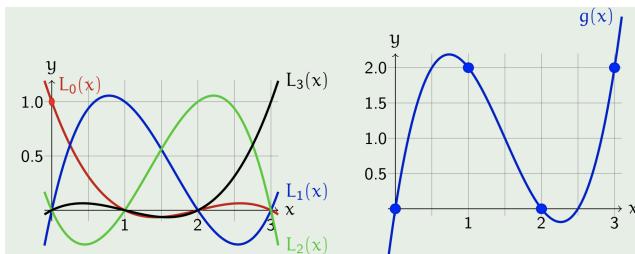
$$P_3(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$$

Auflösen durch einfügen von $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 1$$

14.6 Lagrange Methode (Interpolation)



Polynome 3. Grades, welche an allen Stützstellen Null sind außer an einer, wo der Wert Eins (1) sein soll:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$g(x) = 0 \cdot L_0(x) + 2 \cdot L_1(x) + 0 \cdot L_2(x) + 2 \cdot L_3(x)$$

Addition der einzelnen Polynome ergibt die gesuchte Kurve durch die vorgegebenen Punkte

Allgemein:

$$L_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots[ohne(x-x_n)]}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots[ohne(x_n-x_n)]}$$

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n()$$

Funktionen an den Stützstellen entweder Null oder Eins $l_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n (x - x_i)$

$$L_k(x) = \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)}$$

14.7 Lineare Bézier spline (Approximation)

$$P(0) = Anfang$$

$$P(1) = Ende$$

$$P(t) = (1-t)P_0 + P_1 (0 \leq t \leq 1)$$

Gewichteter Durchschnitt der Kontrollpunkte

$$P(t) = (P_1 - P_0)t + P_0$$

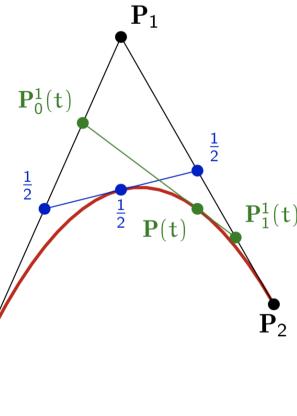
Polynom in t

$$P(t) = [P_0, P_1] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} (0 \leq t \leq 1)$$

Matrixform

14.8 Quadric Bézier spline (Approximation)

Verhältniss der Linien ist immer gleich



drei Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2

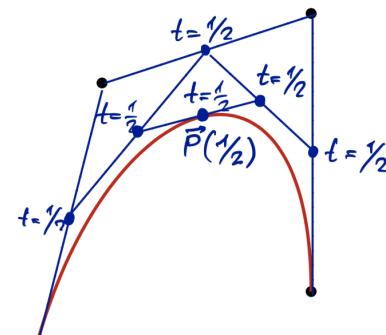
$$P_0^1(t) = (1-t)P_0 + P_1$$

$$P_1^1(t) = (1-t)P_0 + P_1$$

$$P(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2$$

14.9 Cubic Bézier Spline (Approximation)

Punkt = Punkt auf Linie zwischen zwei Hilfslinien



vier Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2, P_3

Mit P_0^1, P_1^1 und

$$P_2^1(t) = (1-t)P_2 + tP_3$$

$$P_1^2(t) = (1-t)P_0^1(t) + tP_1^1(t)$$

$$P_2^2(t) = (1-t)P_1^1(t) + tP_2^1(t)$$

$$P(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3$$

14.10 Bernsteinpolynome

Bernsteinpolynom für kubische Bézier-Spline:

$$B_i^3(t) = \binom{3}{i} (1-t)^{3-i} t^i, (0 \leq i \leq 3)$$

Dadurch folgt $P(t)$, wobei P_n Kontrollpunkte sind:

$$P(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3 = \sum_{i=0}^3 (B_i^3(t) P_i)$$

Allgemein bedeutet dies also bei n -Anzahl:

$$\sum_{i=0}^n (B_i^n(t) P_i)$$

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, (0 \leq i \leq n)$$

Die Bernoulli Pyramide verhilft beim auflösen:

$$\begin{matrix} & & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

14.11 Eigenschaft Bernsteinpolynome

- Die Gleichgewichtung addiert sich zu eins:
 $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = 1^3 = 1$
- Die Funktionswerte sind immer größer gleich Null:
 $B_i^n(t) \geq 0$ für $i = 0, 1, \dots, n$, $t \in [0, 1]$
- $B_i^n(t)$ ist maximal für $t = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$
- Sind symmetrisch:
 $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$, $i = 0, 1, \dots, n$
- Rekursiveigenschaft: $B_{i+1}^{n+1}(t) = t B_i^n(t) + (1-t) B_{i+1}^n(t)$
- Differenzieren:
 $\frac{d}{dt}(B_i^n(t)) = n[B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)]$,
 $i = 0, 1, \dots, (n-1)$
 Beachte bei: $B_{-1}^{n-1} = 0$

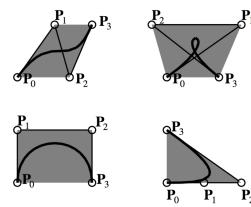
14.12 Rekursiveigenschaft Bézier-Kurven

Die Rekursiveigenschaft zeigt auf, dass die Bezierkurve in kleinere Ordnungen aufgeteilt werden kann:

$$P(t) = (1-t) \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) P_i}_{\text{Bézierkurve der } (n-1)\text{-Ordnung durch } \vec{P}_0, \vec{P}_1, \dots, \vec{P}_{n-1}} + t \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) P_{i+1}}_{\text{Bézierkurve der } (n-1)\text{-Ordnung durch } \vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n}$$

14.13 Bézier-Kurven

Eigenschaften



Die Bézier-Kurve liegt immer innerhalb der konvexen Hülle des Linienzuges (convex hull property)

- Die Anzahl der Kontrollpunkte P_0, P_1, \dots, P_n bestimmt den Grad n der Bézier-Kurve
- Änderung eines Kontrollpunktes bewirkt eine Änderung der gesamten Kurve
- Setzt man stetige Funktionswerte und Ableitungen voraus, lassen sich Bézier-Kurven höheren Grades durch Bézier-Kurven niedrigeren Grades zusammensetzen.

Stetigkeit

C^0 -Stetigkeit: Segmente haben an den Eckpunkten keine Sprünge

C^1 -Stetigkeit: Segmente haben an den Eckpunkten gemeinsame Tangente (erste Ableitung gleich)

C^2 -Stetigkeit: Segmente haben an den Eckpunkten die gleiche Krümmung (zweite Ableitung gleich)

14.14 B-Spline-Kurven

Verallgemeinerung der Bézier-Kurven (Ordnung kann kleiner als Anzahl Kontrollpunkte sein):

$$B_{n,k}(t) = \sum_{j=0}^n (N_{j,k}(t) P_j)$$

k : Ordnung der Kurve $2 \leq k \leq n+1$

t : gleich wie bei Bézier $t \in [0, n-k+2]$

$k=2$: linear

$k=3$: quadratisch

$k=4$: kubisch

14.15 B-Splines

$N_{j,k}(t)$ sind die B-Splines (Gewichtsfunktion, blending functions)

Sie sind k -Ordnung und $(k-1)$ Polynome

Dabei geht es um nichts anders als Bézier-Kurven mit Gewichtung zu verknüpfen, abhängig der Ordnung wird die Verknüpfung weicher. Sind rekursiv definiert

$$N_{j,1} =$$

- lokale Funktionen nur in der Nähe von P_j verschieden von 0
- Einfluss vom Punkt auf die gesamte Kurve ist kleiner

14.16 NURBS (Non Uniform Rational Basic Splines)

TODO

- homogenisiert
- rationale B-Spline-Kurve
- Punkte mit Gewichtung
- invariant bei den Transformationen

15 Flächen in Kartesischen Koordinaten

- Eine Fläche S ist eine **Regelfläche** falls durch jeden ihrer Punkte eine Gerade existiert, die vollständig in S liegt.
- **doppelte Regelfläche** falls durch jeden ihrer Punkte zwei unterschiedliche Geraden existieren

Explizite Darstellung

Sattel: $z = f(x, y) = x^2 - y^2$

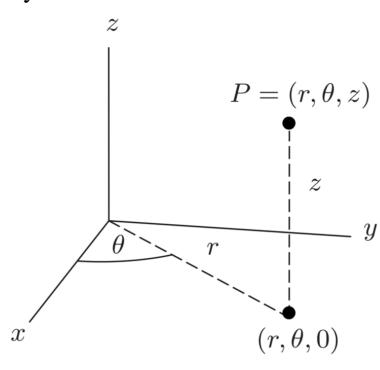
Implizite Darstellung

Kugel: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$
 x_0, y_0, z_0 = Zentrum

Parameterdarstellung

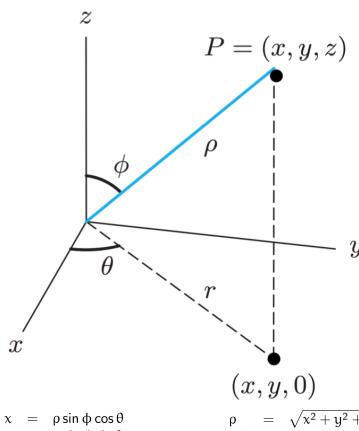
Zylinderkoordinaten:

(r, θ, z)



$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \quad \iff \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}$$

(ρ, ϕ, θ)



$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned} \quad \iff \quad \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan \theta &= y/x \\ \cos \phi &= z/\rho \end{aligned}$$

Rotationsfläche: $x = u$ $y = f(x) * \cos(v)$ $z = f(x) * \sin(v)$

15.1 Freiformflächen

TODO

- Tensorproduktfläche $S(u, v) = \text{Fläche gegeben von Kurven } F(u) \text{ & } G(v)$
Für jeden u Wert gibt es eine Kurve -> "Gitterpunkte"

16 Appendix

16.1 Radians

Winkel α°	Bogenmaß	Sinus	Kosinus
0°	0	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$
180°	π	0	-1
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
360°	2π	0	1

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+\tan^2(\alpha)}$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

Kugelkoordinaten:

(ρ, ϕ, θ)