

Computer Graphics Zusammenfassung

Lucien Zürcher

January 7, 2019

Contents

1 Farbe	3	5 Vektoren	8
1.1 Was ist Farbe?	3	5.1 Addition	8
1.2 Farbe eines Objektes	3	5.2 Multiplikation mit Skalar	8
1.3 Licht besteht aus?	3	5.3 Nullvektor	8
1.4 Das Auge	3	5.4 Vektorinverses	8
1.5 Wie sehen wir Farbe?	3	5.5 Vektoren Gleichheit	8
1.6 Wahrnehmung	3	5.6 Skalarprodukt	8
1.7 Farbsysteme	3	5.7 Skalarprodukt im beliebigem Koordinatensystem	8
1.8 Additives Farbsystem	4	5.8 Orthogonal	8
1.9 Subtraktives Farbsystem	4	5.9 Länge des Vektors	8
1.10 Farben Konvertieren	4	5.10 Einheitsvektor	8
1.11 Gamma Korrektur	4	5.11 Euklidische Distanz	8
1.12 Normfarbtafel / CIE Farbsystem	4	5.12 Gerade im 2/3D	8
1.13 Helligkeitswahrnehmung	4	5.13 Hessische Normalform	8
1.14 Nibs (Lichtdichte)	4	5.14 Hessische Normalform Ebene	9
1.15 Mach bending	4	5.15 Achsenabschnitt	9
1.16 Farbtäuschung	4	5.16 Projektion eines Vektors	9
1.17 HD,UHD,UK	4	5.17 Vektorprodukt	9
1.18 Was ist HDR?	5	5.18 Vektorprodukt Anwendung	9
1.19 Begriffe	5	5.19 Spatprodukt	9
2 Halbtontechnik	5	5.20 Translation 2D	9
2.1 Verfahren der Halbtontechnik	5	5.21 Skalierung 2D	9
2.2 Quantisierung	5	5.22 Rotation 2D	9
2.3 Dithering	5	5.23 Vektor Rechenregeln	9
2.3.1 Dithermatrizen	5	5.24 Rechenregel Skalarprodukt	10
2.3.2 Dithering bei gleich bleibender Auflösung	5	5.25 Vektorprodukt Rechenregeln	10
2.3.3 Dispersed Dot Dithering	5	5.26 Spatprodukt Rechenregeln	10
2.3.4 Error Diffusion	5	5.27 Begriffe	10
3 Viewing	6	6 Projektive Geometrie	10
3.1 Planare geometrische Projektionen	6	6.1 Homogener Vektor	10
3.1.1 parallele Projektionen	6	6.2 Punkt auf Gerade	10
3.1.2 perspektivische Projektionen	6	6.3 Schnittpunkt Geraden	10
4 WebGL	6	6.4 Parallele Geraden	10
4.1 OpenGL Merkmale	6	6.5 Unendlicher homogener Vektor	10
4.2 Grafikpipeline	6	6.6 Projektive Ebene (homogener Vektor)	10
4.3 Programmierbare Shaders	6	6.7 Projektive Transformation	10
4.3.1 Vertex Processing / Vertex Shader	7	6.8 Transformationen kombinieren	11
4.3.2 Fragment Processing / Fragment Shader	7	6.9 Translation 2D	11
4.4 Datenfluss	7	6.10 Nullpunkt Rotation 2D	11
4.5 Attribute und Uniform Variablen mit Shaders verbinden	7	6.11 Rotation um Punkt A	11
4.6 Attribut Variablen und Buffer definieren	7	6.12 Spiegelung mit Gerade durch Ursprung	11
		6.13 Spiegelung mit Gerade g	11
		6.14 Transformation des Koordinatensystems	11
		6.15 Abstand Punkt zur Gerade	11
		6.16 Transformationen 2D	11

7 Transformation	11
7.1 homogene Koordinaten	11
7.2 Ebene im Raum	11
7.3 Prokektive Transformation	12
7.4 Transformationen	12
7.5 Translation	12
7.6 Rotation	12
7.7 Rotation um beliebige Achse	12
7.8 Rotation um eine Achse durch den Ursprung	13
7.9 Parallele Projektion	13
7.10 Parallele Projektionsmatrix	13
7.11 Perspektivische Projektion	13
7.12 Perspektivische Projektionsmatrix	13
7.13 Sichtvolumen Clipping	13
8 Scan Konvertierung	14
8.1 Linie Rastern	14
8.2 Mittelpunktschema	14
8.3 Kreis Rastern	14
8.4 Mittelpunktschema Kreis	14
8.5 Regionen füllen	14
8.6 FloodFill	14
9 Curves	14
9.1 Kurvie in der Ebene	14
9.2 Kurve im Raum	14
9.3 Spirale entlang des Zylinders	14
9.4 Methode unbestimmte Koeffizienten	14
9.5 Lagrange Methode	15
9.6 Lineare Bézier spline	15
9.7 Quadric Bézier spline	15
9.8 Cubic Bézier Spline	15
9.9 Bernsteinpolynome	15
10 Appendix	15
10.1 Radians	15

1 Farbe

1.1 Was ist Farbe?

- **Physikalisch**, Lichtzusammensetzung, Elektromagnetischestrahlen
- **Physiologisch**, Wahrnehmung und Interpretation

Farbe besteht aus:

- Farbton/Farbe
- Farbstich/Sättigung
- Helligkeit

1.2 Farbe eines Objektes

Ein Objekt nimmt Farbe auf und strahlt Farbe ab. Die Farbe des Objektes ist definiert durch die abgestrahlte Farbe.

- Beleuchtung (Illumination)
- Reflektion (Reflection)
- Farbsignal (Color Signal)

1.3 Licht besteht aus?

Licht besitzt verschiedene Wellenlängen, Kombinationen dieser Frequenzen ergeben eine Farbe.

- Sichtbares Licht (380mn - 780mn)
- Infrarot (780mn+)
- Ultraviolet (-380mn)

$Inm = 10\text{Å}(\text{\AAngström})$

$1\text{\AA} = \phi\text{Atom}$

1.4 Das Auge

Das Auge besteht aus; **Iris** (Kreisring mit radialen Muskel und Lichteinschränken), **Linse** (Fokussieren), **Pupille** (Öffnung, durch Iris kontrolliert), **Photorezeptoren** (Nehmen das Licht wahr) und **Retina** (Farb- und Lichtaufnahme am Rand des Auges)

Die Retina besteht aus $75-100 \cdot 10^6$ Stäbchen/rods (Lichtintensität) und $6-7 \cdot 10^6$ Zäpfchen/cones (Farbe). Die Fovea ist der dichteste Platz.

1.5 Wie sehen wir Farbe?

Durch die 3 Arten von Zäpfchen:

Kurz (S)	Mittel (M)	Lang (L)
Blau	Grün	Rot
440mn	530mn	560mn
1	: 5	: 10

Weiss ist eine Kombination von Wellenlängen. Es gibt verschiedene Verteilung für Weiss.

1.6 Wahrnehmung

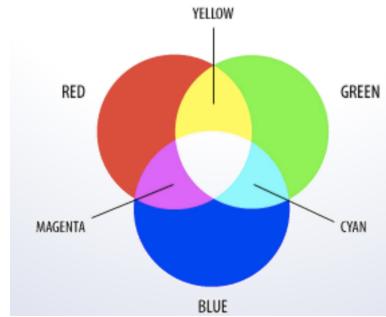
Grün 530mn wird am intensivsten wargenommen

Die Helligkeitswahrnehmung zwischen Stäbchen und Zäpfchen ist unterschiedlich

1.7 Farbsysteme

Nicht alle existierenden Farben (CIE) sind mit allen System darstellbar!

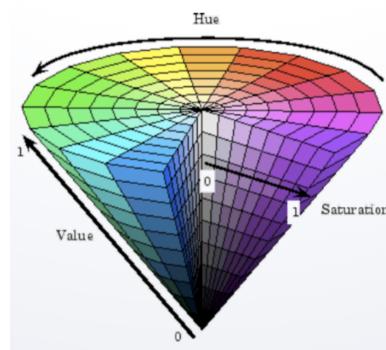
- **RGB** (Monitor, Spotlights, Pointilismus), additiv, $C = (\text{Rot}, \text{Grün}, \text{Blau})$



- **CMY** (Drucken), subtraktiv, $C = (\text{Cyan}, \text{Magenta}, \text{Yellow})$ Komplementärfarbe von RGB $(C, M, Y) = (1, 1, 1) - (R, G, B)$

- **CMYK**, CMY Mit Schwarz erweitert, $K = \min(\text{Cyan}, \text{Magenta}, \text{Yellow})$ $C = C - K, M = M - K, Y = Y - K$

- **HSV**, Farbton (Hue) / Reinheit, Sättigung (Saturation) / Intensität (Value)



- **YUV** (Alte Fernseher, Y= Helligkeit, UV = 1/4 Auflösung Farbkorrektur)

$$Y = 0.229 * R + 0.587 * G + 0.114 * B, \\ U = 0.436(B - Y)/(1 - 0.114), \\ V = 0.615(R - Y)/(1 - 0.299)$$

- **CIE-Lab**, absolutes Farbsystem

Achsenystem mit Helligkeit (L) als Y-Achse und X/Z-Achse definieren Farbunterschiede

a: rot – grün Achse

b: gelb – blau Achse

1.8 Additives Farbsystem

Farben addieren

$(1,1,1) = \text{Weiss}, (0,0,0) = \text{Schwarz}$

1.9 Subtraktives Farbsystem

Farben absorbieren / filtern

$(0,0,0) = \text{Weiss}, (1,1,1) = \text{Schwarz}$

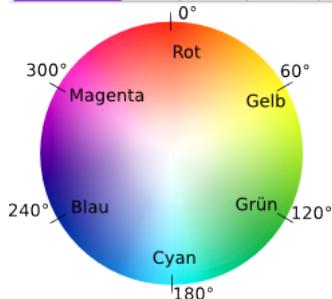
1.10 Farben Konvertieren

Zu Grau: $I = 0.229 * R + 0.587G + 0.114 * B$

$$RGB <> CMY: \begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

HSV <> RGB:

Farbe	H	S	V	R	G	B
Schwarz	–	–	0 %	0 %	0 %	0 %
Rot	0°	100 %	100 %	100 %	0 %	0 %
Gelb	60°	100 %	100 %	100 %	100 %	0 %
Braun	24,3°	75 %	36,1 %	36 %	20 %	9 %
Weiß	–	0 %	100 %	100 %	100 %	100 %
Grün	120°	100 %	100 %	0 %	100 %	0 %
Dunkelgrün	120°	100 %	50 %	0 %	50 %	0 %
Cyan	180°	100 %	100 %	0 %	100 %	100 %
Blau	240°	100 %	100 %	0 %	0 %	100 %
Magenta	300°	100 %	100 %	100 %	0 %	100 %
Orange	30°	100 %	100 %	100 %	50 %	0 %
Violett	270°	100 %	100 %	50 %	0 %	100 %



1.11 Gamma Korrektur

Erreichen von gleichmässiger Verteilung der Helligkeit / Kontrast. Das Empfinden der Helligkeit ist nicht linear.

Korrektur der Helligkeit des Bildes mit Gamma Wert. Wichtig für Bildschirme einstellen. Beim einstellen der Monitore Grauwerte mit echten Werten vergleichen (Gamma Test Pattern). 50% schwarz und 50% weiss einer Fläche (z.B. Punkte) sollte gleich sein wie 50% grau

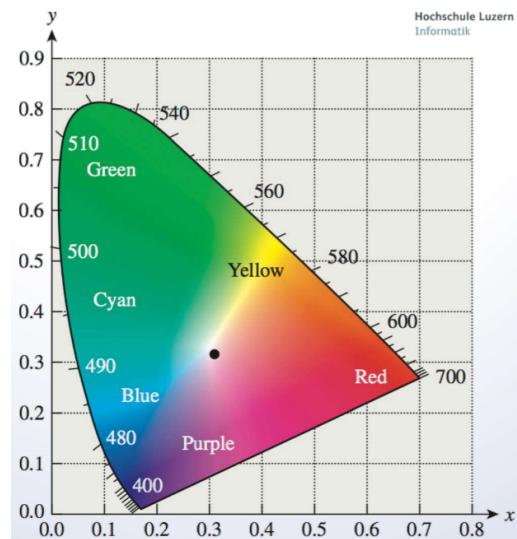
1.12 Normfarbtafel / CIE Farbsystem

- kann alle Farben darstellen
- Spektralfarben = Farbe am Rand mit Wellenlänge

- Farben zwischen zweie Farben mischbar

- Komplementärfarben gehen durch Weiss

- Achtung: Keine Spektralfarbe am Rande zwischen UV und Infrarot



1.13 Helligkeitswahrnehmung

Helligkeit wird logarithmisch wahrgenommen, Webers Law

$$\frac{\Delta I}{I} = C$$

$$\log(I + \Delta I) - \log(I) = \text{Const}$$

Helligkeitsunterschied im dunkeln nehmen wir stärker wahr

1.14 Nibs (Lichtdichte)

Gibt Helligkeitsdichte für Auge an. 10nits werden stärker wargenommen denn 100nits. Heisst, weniger Licht wird stärker wargenommen.

1.15 Mach bending

Optische Illusion, bei zwei verschiedenen Grauwerten nebeneinander unterschieden sich diese vermeidlich stärker.

1.16 Farbtäuschung

Farbe wird abhängig durch Umgebung anders wahrgenommen (Dunkler, Heller). Optische Illusionen

1.17 HD,UHD,UK

Unterscheiden sich durch Pixelauflösung.

1.18 Was ist HDR?

High Dynamic Range, speichert zusätzlichen Wert um Helligkeitsunterschiede besser unterscheiden zu können (RGB-Pixelwerte proportional zum Licht). Detailreichere dunkel und helle Spots, weniger Verlust durch Farben mit weniger Helligkeitsunterschieden.

1.19 Begriffe

Natürliches Licht	Gemisch aus verschiedenen Lichtwellen / Frequenzen
Spektralfarben	reine Farbfrequenz; Alle Farben am Rand des CIE-Farbsystems
Spektrum	Alle Frequenzen und deren Verteilung
Spektralverteilung	Charakterisiert die Farbe, definiert durch Frequenzen (Bsp. Verschiedenes Weiss)
Komplementärfarben	Addieren ergeben Grau, gegenüberliegende Farben im CIE-Farbsystem durch Weiss

2 Halbtontechnik

2.1 Verfahren der Halbtontechnik

Da nur Schwarz und Weiss gedruckt werden kann, werden die verschiedenen Stufen durch Intensitätsstufen dargestellt. Dafür gibt es drei Verfahren:

- Quantisierung
- Dithering
- Error Diffusion

2.2 Quantisierung

Höhere Auflösung auf tiefere Auflösung durch Runden der Pixelfarbwerte auf verfügbare Farben.

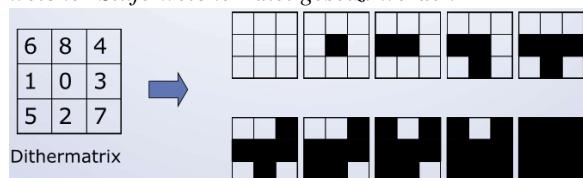
Bsp. 16Bit -> 8Bit (Runden der Werte)

2.3 Dithering

Wenn der Drucker eine grössere Auflösung besitzt, jedoch weniger Farbstufen kann Dithering verfahren verwendet werden. -> Farben mit höherer Auflösung durch kleinere Punkte simulieren.

2.3.1 Dithermatrizen

Kann als Matrix dargestellt werden. Matrix gibt an, auf welcher Stufe welche Pixel gesetzt werden



Es gibt zwei Regeln; **Gesetzter Pixel bleibt gesetzt und Strukturen in der Ditheringmatrix vermeiden**. Es soll möglichst ein Kreis approximiert werden.

2.3.2 Dithering bei gleich bleibender Auflösung

Handhabung, wenn die Bildgrösse/Auflösung gleich bleibt

- Clustered dot dithering: Mittelwert von n x n Region mit Ditheringmatrix ersetzen.
- Dispersed Dot Dithering

2.3.3 Dispersed Dot Dithering

Bayer Matrizen können hierfür verwendet werden, wodurch die Methode Bayer Dithering genannt wird.

2 x 2 Bayer Matrix

0	2
3	1

4 x 4 Bayer Matrix

0	8	2	10
12	4	14	6
3	11	1	9
15	7	13	5

$$k = \frac{W_{max}}{n*n+1}$$

W_{max} : Anzahl Werte des Pixels (256 bei 8Bit)

n : Grösse der Matrix (2 x 2 => $n = 2$)

k : Faktor für Umrechnung

$$I_{new} = \frac{I_{old}}{k}$$

Für jeden Pixel den neuen Wert ausrechnen, danach mit Bayermatrix den Wert vergleichen. Pixel setzen wenn $I(x, y)_{new} > D_{ij}$

$$i = x \text{ modulo } n$$

$$j = y \text{ modulo } n$$

2.3.4 Error Diffusion

Anstatt Kreise, Punkte verschiedener Dichte anordnen. Das Bild wird dabei sequenziell durchlaufen; links -> rechts, oben -> unten

Error Diffusion verteilt den Fehler auf die umliegenden Pixel (zu hell -> dunkler machen / zu dunkel -> heller machen)

X	7/16
1/16	5/16
3/16	

Gewichtungsmatrix

Beispiel:

X	191	140	113
244	221	105	100

$$191 - 255 = -64, \text{ da Pixel Schwarz (255), Fehler: } -64$$

X	X	140 + (7/16 * -64)	113
244 + (1/16 * -64)	221 + (5/16 * -64)	105 + (3/16 * -64)	100

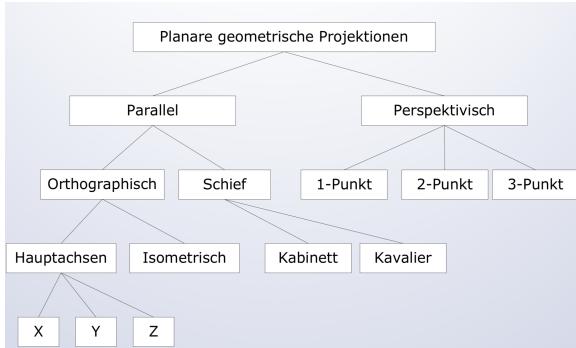
Wenn Wert > 128 = 255, ansonsten Wert <= 128 = 0

3 Viewing

von 3D in 2D abbilden

3.1 Planare geometrische Projektionen

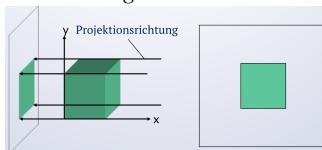
Bild auf eine Ebene projizieren



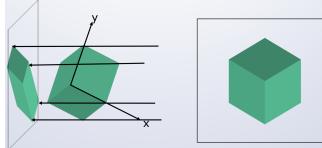
3.1.1 parallele Projektionen

- Geraden und Parallelen bleiben erhalten
- konstante Verkürzung in eine Richtung
- keine Winkeltreue

Ortographische Projektion von einer Seite / rechtwinklig



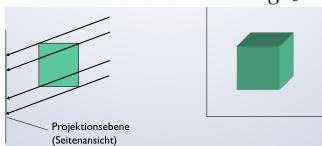
Isometrische Projektion Ortographische auf die Ebene



Kavaliersprojektion Parallelprojektion mit 45 Grad. Linien rechtwinklig zur Ebene haben natürliche Länge

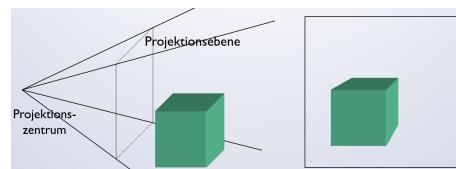


Kabinetsprojektion Parallelprojektion mit 63.4 Grad. Linien rechtwinklig zur Ebene haben halbe Länge



3.1.2 perspektivische Projektionen

- Simuliert Kamera oder Auge
- Spezifiziert durch Projektionszentrum und Projektionsebene
- Geraden bleiben erhalten
- Parallelen schneiden sich in einem Punkt (Fluchtpunkt)
- Objektgröße nimmt proportional zum Abstand vom Projektionszentrum ab

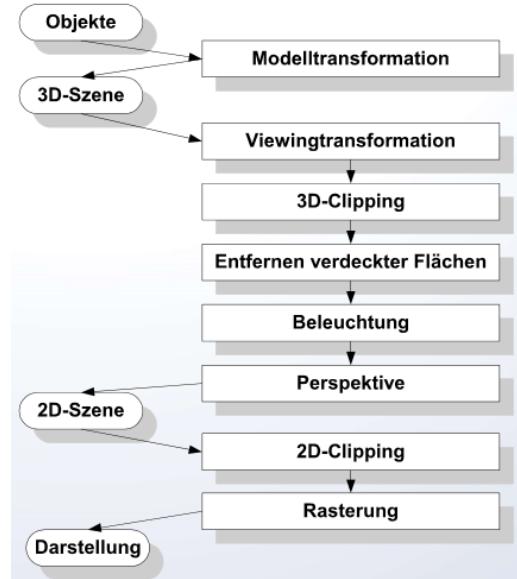


4 WebGL

4.1 OpenGL Merkmale

- Low Level Graphics API
- Verschiedene Plattformen
- 1.0/2.0 Fixe Funktionspipeline
- Vorlage für WebGL

4.2 Grafikpipeline



4.3 Programmierbare Shaders

Shaders werden für die Berechnung der zu zeichnenden Objekte verwendet. Das Programm wird direkt auf der Grafikkarte ausgeführt.

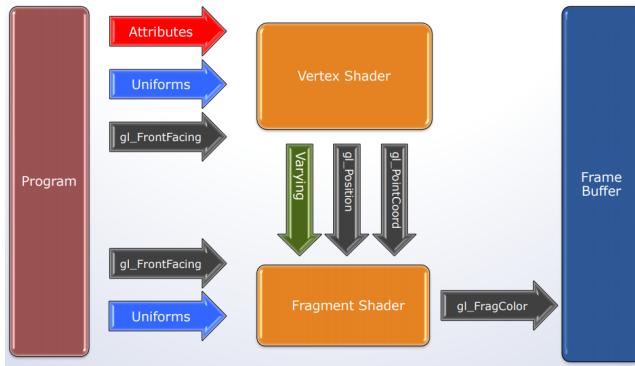
4.3.1 Vertex Processing / Vertex Shader

Berechnen der **Positionen** der Vertexe (Punkte) und Werte für den folgenden Fragments shader.

4.3.2 Fragment Processing / Fragment Shader

Berechnet die **Farbe** der einzelnen Pixel.

4.4 Datenfluss



4.5 Attribute und Uniform Variablen mit Shaders verbinden

1. Attribute


```
ctx.aVertexPositionId =
gl.getAttribLocation(ctx.shaderProgram,
 "aVertexPosition")
```
2. Uniform


```
ctx.uColorId =
gl.getUniformLocation(ctx.shaderProgram,
 "uColor"))
```

4.6 Attribut Variablen und Buffer definieren

Erzeugen

1. Buffer erzeugen


```
var buffer = gl.createBuffer()
```
2. Array Buffer auf Buffer setzen


```
gl.bindBuffer(gl.ARRAY_BUFFER,
buffer)
```
3. Daten füllen


```
glBufferData(gl.ARRAY_BUFFER,
new Float32Array(vertices),
gl.STATIC_DRAW)
```

Zeichnen

1. Buffer binden
2. Attribut und/oder uniform setzen


```
gl.vertexAttribPointer(index,
size, type, normalized, stride,
offset)
z.B. gl.vertexAttribPointer(ctx.aVertexPositionId,
2, gl.FLOAT, false, 0, 0)
```

3. Attribut als Array setzen


```
gl.enableVertexAttribArray(index)
```
4. Zeichnen


```
gl.drawArrays(mode, first, count)
```

5 Vektoren

- Skalarprodukt
- Matrixprodukt

5.1 Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

5.2 Multiplikation mit Skalar

$$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

$\lambda \in \text{Skalar}$

5.3 Nullvektor

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.4 Vektorinverses

$$-\vec{a} = -\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix}$$

Vektor mit negativen Komponenten

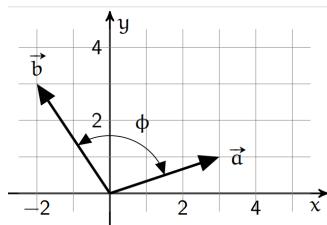
5.5 Vektoren Gleichheit

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{b}$$

Vektoren sind gleich, wenn Komponenten gleich

5.6 Skalarprodukt

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \phi$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

5.7 Skalarprodukt im beliebigem Koordinatensystem

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = [a_1 a_2 a_3]^T$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 = [b_1 b_2 b_3]^T$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = [a_1 a_2 a_3] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{a}^T \mathbf{G} \mathbf{b}$$

Matrix \mathbf{G} wird **metrisch Tensor** genannt

5.8 Orthogonal

$$\vec{e}_x \bullet \vec{e}_y = 0$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Senkrecht zueinander, wenn Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren 0 ergibt.

5.9 Länge des Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

5.10 Einheitsvektor

$$e_v = \frac{1}{\|v\|} \bullet v = \frac{1}{\sqrt{v \cdot v}} \bullet v$$

($i = e_1, j = e_2, k = e_3$)

$$\vec{e}_x = [1, 0, 0]^T$$

$$\vec{e}_y = [0, 1, 0]^T$$

$$\vec{e}_z = [0, 0, 1]^T$$

5.11 Euklidische Distanz

$$\bar{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

5.12 Gerade im 2/3D

• Punkt-Punktform mit Vektoren 2/3D

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_1 - \vec{r}_0), t \in \mathbb{R}$$

\vec{r}_1 : Punkt, \vec{r}_2 : Punkt

• Punkt-Richtungsform mit Vektoren 2/3D

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{r}_1, t \in \mathbb{R}$$

\vec{r}_0 : Punkt, \vec{r}_1 : Richtungsvektor

• Achsenabschnitt-Steigungsform

$$y = mx + b$$

b : Achsenabschnitt, m : Steigung

• Punkt-Richtungsform

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

(x_0, y_0) : Punkt, m : Steigung

• Allgemeine Geradengleichung

$$ax + by + c = 0$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

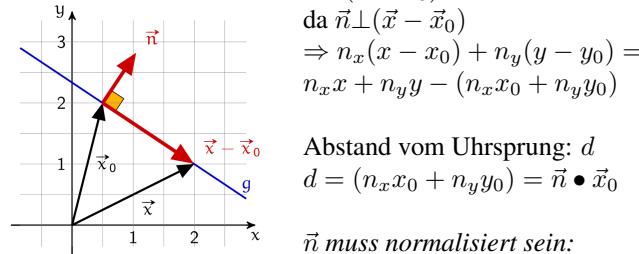
5.13 Hessische Normalform

Vektorielle Schreibweise der Hessischen Normalform

$$\vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$$

da $\vec{n} \perp (\vec{x} - \vec{x}_0)$

$$\Rightarrow n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = n_x x + n_y y - (n_x x_0 + n_y y_0)$$

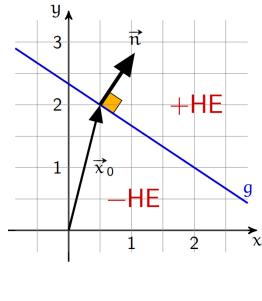


Abstand vom Ursprung: d

$$d = (n_x x_0 + n_y y_0) = \vec{n} \bullet \vec{x}_0$$

\vec{n} muss normalisiert sein:

$$|\vec{n}| = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \bullet \vec{n}$$



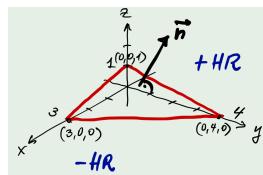
$$\begin{aligned} \mathbf{n}_x \mathbf{x} + \mathbf{n}_y \mathbf{y} - d &= 0 \\ d &= (n_x x_0 + n_y y_0) = \vec{n} \bullet \vec{x}_0 \\ d > 0 &\Leftrightarrow (0, 0) \in -HE \\ d < 0 &\Leftrightarrow (0, 0) \in +HE \\ g: ax + by + c &= 0 \\ \vec{n} &= \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ d &= -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

5.14 Hessische Normalform Ebene

$$\epsilon : ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{aligned} n_x x + n_y y + n_z z - D &= 0; \text{ HNF der Ebene } \epsilon \in \mathbb{R}^3 \\ \vec{n} &= \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ D &= -\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned}$$

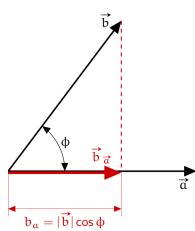
5.15 Achsenabschnitt



Gegeben sind 3 Punkte $p_x = x$, $p_y = y$, $p_z = z$ die ergeben eine Ebenegleichung:

$$\frac{x}{p_x} + \frac{y}{p_y} + \frac{z}{p_z} - 1 = 0$$

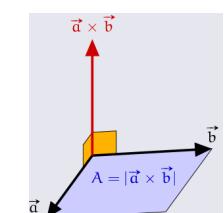
5.16 Projektion eines Vektors



\vec{b} Richtung \vec{a} :
 $\vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$

$$\begin{aligned} b_a \text{ mal Einheitsvektor } \vec{a} \\ \vec{b}_{\vec{a}} &= b_a \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \\ &= \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \end{aligned}$$

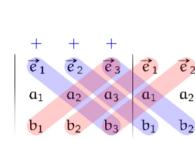
5.17 Vektorprodukt



$\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf beiden Vektoren
 \vec{a}, \vec{b} und $\vec{a} \times \vec{b}$ sind ein Rechtssystem

$\vec{a} \times \vec{b}$ entspricht der Fläche des aufgespannten Parallelogramms (A):

$$A = \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$$



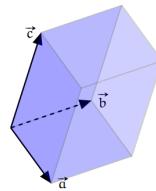
Regel von Sarrus

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

5.18 Vektorprodukt Anwendung

- Lorentz-Kraft** $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$
 \vec{v} : Geschwindigkeit, B : Magnetfeld, q : Ladung
- Geschwindigkeit** $\vec{v} = q(\vec{w} \times \vec{x})$
 \vec{x} : Punkt, w : Winkelgeschwindigkeit, \vec{w} : Drehachse
- Drehmoment** $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
 \vec{F} : Kraft, \vec{r} : Punkt / Koordinatenursprung
- Normalvektor** $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.
 \vec{a} und \vec{b} liegen auf der Ebene.
- Kollinearität** kollinear (d.h. linear abhängig) wenn Vektorprodukt verschwindet

5.19 Spatprodukt



$$\begin{aligned} \text{Spatprodukt } [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \\ \text{Ist der Skalar der Vektoren } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \\ [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= \vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) \\ \text{Spatprodukt entspricht Volumen wenn in einem Rechtssystem, dann: } V_{Spat} &= |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| \\ \text{Komplanar (linear abhängig) wenn } [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= 0 \end{aligned}$$

5.20 Translation 2D

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{t} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + t_1 \\ x_2 + t_2 \end{bmatrix}$$

5.21 Skalierung 2D

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} \vec{s}_x x \\ \vec{s}_y y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

5.22 Rotation 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{R} \vec{x}$$

Inverse Matrix: $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$

5.23 Vektor Rechenregeln

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	Kommutativgesetz
$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$	Assoziativgesetz
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	Existenz Neutralelement $\vec{0}$
$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$	Existenz Inverses $-\vec{a}$
$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$	
$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$	
$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$	
$1\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \vec{a} = \vec{a}$	

5.24 Rechenregel Skalarprodukt

$$\begin{aligned}\vec{a} \bullet \vec{b} &= \vec{b} \bullet \vec{a} \\ \vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c} \\ \lambda(\vec{a} \bullet \vec{b}) &= (\lambda\vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (\lambda\vec{b})\end{aligned}$$

5.25 Vektorprodukt Rechenregeln

$$\begin{array}{l|l} \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} & \text{Anti-Kommutativgesetz} \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} & \text{Distributivgesetz} \\ \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) & \end{array}$$

5.26 Spatprodukt Rechenregeln

$$\begin{array}{l|l} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] & \text{zwei Vektoren vertauschen entspricht Vorzeichenwechsel} \\ [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] & \text{Zyklisches Vertauschen} \\ [\lambda\vec{a}, \mu\vec{b}, \nu\vec{c}] = \lambda\mu\nu[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] & \text{keine Änderung} \\ [\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] = & \text{Multiplikation} \\ [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] & \text{Addition} \end{array}$$

5.27 Begriffe

Ortsvektor	Vom Ursprung zum Punkt
Richtungsvektor	Eine Richtung im Raum
Einheitsvektor	Eine Einheit in eine beliebige Richtung
Linearkombination <i>kollinear</i>	Ein Vektor, der ein Vielfaches eines Einheitsvektors ist.
Linear Unabhängig <i>komplanar</i>	$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ Vektoren sind unabhängig wenn $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$
Skalar Rechtssystem	Ist eine reelle oder komplexe Zahl Koordinatensystem aufgebaut wie die rechte Hand wobei; der Zeigfinger X-Achse (\vec{e}_x), Mittelfinger Y-Achse (\vec{e}_y) und Daumen Z-Achse (\vec{e}_z)

6 Projektive Geometrie

6.1 Homogener Vektor

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ Homogener 2D Vektor}$$

$$(x, y) = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right)$$

6.2 Punkt auf Gerade

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \vec{g} \bullet \vec{r} = 0$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{g} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$A(x, y)$ (homogenisiert \vec{r}) liegt dann auf Geraden \vec{g}

6.3 Schnittpunkt Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 \\ \vec{g}_1 &= \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \vec{g}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

\vec{r} ist der homogene Schnittpunkt $[x_1, x_2, x_3]$

$x_3 = 0$, dann sind die Geraden parallel, und kein Schnittpunkt möglich (division durch 0)

6.4 Parallele Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 = (c_1 + c_2) \begin{bmatrix} b_1 \\ -a_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ (a_1, b_1) &= (a_2, b_2), \text{ dann sind die Geraden parallel}\end{aligned}$$

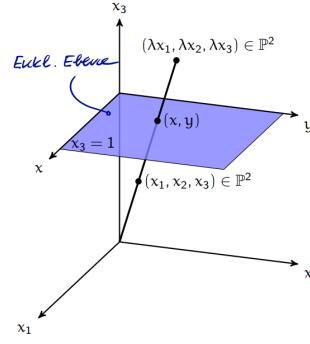
6.5 Unendlicher homogener Vektor

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{g}_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$$

alle idealen, uneigentlichen oder unendlich fernen Punkte \vec{r} liegen auf der Geraden \vec{g}_∞

$$\vec{g}_\infty \bullet \vec{r} = \vec{g}_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

6.6 Projektive Ebene (homogener Vektor)



Ein Punkt auf der euklidischen Ebene entspricht dem Wert eines dehomogenisierten Punktes (x, y) .

$x_3 = 1$ ergibt die euklidische Ebene.

(x_1, x_2, x_3) sind Punkte auf einer Geraden die den Punkt $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$ definieren.

6.7 Projektive Transformation

Abbildungen $h : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$ mit Eigenschaften:

- h ist eindeutig (bijektiv) und daher umkehrbar
- h Transformationen sind geradentreu (geraden auf geraden abbilden)
- **Homogene Matrix** ist bis auf eine Konstante bestimmt ($k\mathbf{H} = \mathbf{H}; k > 0$)

$$\vec{r}' = h(\vec{r}) = \mathbf{H}\vec{r}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

6.8 Transformationen kombinieren

$$\vec{r}' = h(\vec{r}) = (h_2 \circ h_1)(\vec{r}) = h_2(h_1(\vec{r}))$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1, \vec{r}' = \mathbf{H}\vec{r} = \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_1 \vec{r}$$

$$h_1 : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2, h_2 : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$$

$h = h_2 \circ h_1$ entspricht erst h_2 dann h_1

6.9 Translation 2D

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{r} = \mathbf{T}\vec{r}$$

Verschiebung durch $\vec{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$, \mathbf{T}^{-1} entspricht $-\vec{t}$ in \mathbf{T}

6.10 Nullpunkt Rotation 2D

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}\vec{r}$$

Rotation mit ϕ , \mathbf{R}^{-1} entspricht sin vertauschen

6.11 Rotation um Punkt A

Punkt: $A(t_x, t_y)$

1. Translation A zum Nullpunkt verschiebt (\mathbf{T})
2. Nullpunkt Rotation 2D mit Winkel Φ
3. Translation A zurück (\mathbf{T}^{-1})

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{=} {\begin{bmatrix} \cos(\Phi) & -\sin(\Phi) & 0 \\ \sin(\Phi) & \cos(\Phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}_0 \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.12 Spiegelung mit Gerade durch Ursprung

$\vec{n} = (-\sin(\delta), \cos(\delta))^T$
 HNF: $-\sin(\delta)x + \cos(\delta)y = 0$
 $\vec{p}' = \vec{p} - 2(\vec{p} \bullet \vec{n})\vec{n}$
 $\delta = \arctan(\frac{y}{x})$
 Wenn g geht durch Nullpunkt
 $\vec{r}' = \begin{bmatrix} \cos(2\delta) & \sin(2\delta) & 0 \\ \sin(2\delta) & -\cos(2\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{r}$

6.13 Spiegelung mit Gerade g

1. gerade ins Zentrum Transformieren (\mathbf{T} errechnen)
2. Spiegelung mit Gerade durch Ursprung (\mathbf{S})
3. zurück Transformieren (\mathbf{T}^{-1})

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{T}$$

6.14 Transformation des Koordinatensystems

$$\begin{bmatrix} \cos(-\Phi) & -\sin(-\Phi) & 0 \\ \sin(-\Phi) & \cos(-\Phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation des Koordinatensystems um Φ

Bei einer Transformation des Koordinatensystems handelt es sich um eine Inverse Matrix der normalen Transformation

6.15 Abstand Punkt zur Gerade

$$d = ax + by + c$$

d : Distanz, $P(x, y)$: Punkt, $g : ax + by + c = 0$:

6.16 Transformationen 2D

$$t = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, 0^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{RMC} = 2 \times 2 \text{ Matrix}$$

Euklidisch (starre Bewegung)

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Abstand zwischen zwei Punkten, alle Winkel ($R^{-1} = R^T$)

Ähnlichkeit

$$S = \begin{bmatrix} k \cdot \mathbf{M} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Winkel zwischen zwei Punkten, alle Winkel

Affin

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Parallelität, Verhältnis zwischen Flächeninhalten

Allgemein

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

Geraden bleiben Geraden

7 Transformation

7.1 homogene Koordinaten

jeder Punkt $P(x, y, z)$ des Raumes \mathbb{R}^3 besitzt eine 4-komponenten Vektor \vec{r}

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, x = \frac{x_1}{x_4}, y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_3}{x_4}$$

$$(x, y, z) = (\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4})$$

7.2 Ebene im Raum

Ebene ϵ im Raum \mathbb{R}^3

$\epsilon : ax + by + cz + d = 0$ Hessische Normalform

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \text{ Punkt: } \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ebenengleichung:

$$\vec{w} \bullet \vec{r} = w^T \cdot r = ax + by + cz + d = 0$$

7.3 Prokreative Transformation

Die homogene Matrix \mathbf{H} ist nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, heisst, alle Vielfachen von \mathbf{H} sind auch gültig

$\eta : \mathbb{P}^3 \mapsto \mathbb{P}^3$ stellt eine **projektiven Transformation** dar

$$\eta(r) = \mathbf{H} \cdot r = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

7.4 Transformationen

$$t = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, 0^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{RMC} = 3 \times 3 \text{ Matrix}$$

Euklidisch (starre Bewegung)

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Abstand zwischen zwei Punkten, alle Winkel ($R^{-1} = R^T$)

Ähnlichkeit

$$S = \begin{bmatrix} k \cdot \mathbf{M} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Winkel zwischen zwei Punkten, alle Winkel

Affin

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Parallelität, Verhältnis zwischen Volumeninhalt

Allgemein

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}$$

Geraden bleiben Geraden

7.5 Translation

$$\mathbf{T}(\vec{t}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.6 Rotation

$$\mathbf{R}_z = \begin{array}{c|ccccc} \cos(\Phi_z) & -\sin(\Phi_z) & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\Phi_z) & \cos(\Phi_z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cos(\Phi_y) & 0 & \sin(\Phi_y) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\Phi_y) & 1 & \cos(\Phi_y) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Phi_x) & -\sin(\Phi_x) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\Phi_x) & \cos(\Phi_x) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

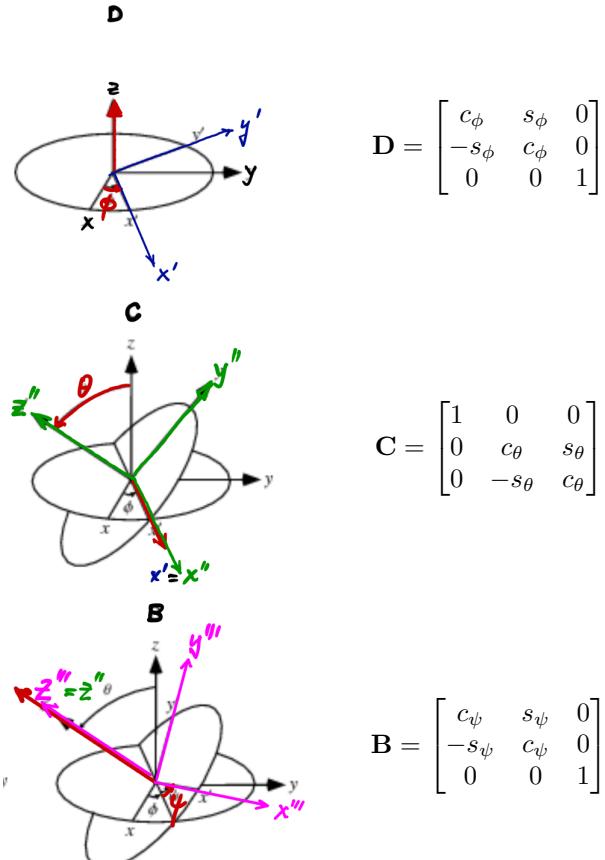
Bei Rotation um selbe Achse gilt Kommutativgesetz ($\mathbf{R}_z(\Phi_{z,1} + \Phi_{z,2}) = \mathbf{R}_z(\Phi_{z,1})\mathbf{R}_z(\Phi_{z,2}) = \mathbf{R}_z(\Phi_{z,2})\mathbf{R}_z(\Phi_{z,1})$)

Inverse entspricht $\mathbf{R}^{-1}(\Phi) = \mathbf{R}(-\Phi)$, wobei $\cos(-\Phi) = \cos(\Phi)$

7.7 Rotation um beliebige Achse

- 1) Rotation um ϕ um z-Achse (Matrix D)
- 2) Rotation um den Winkel $\theta \in [0, \pi]$ (um frühere X-Achse) (Matrix C)
- 3) Rotation um den gegebenen Winkel ψ (Matrix B)

$$c_\alpha = \cos \alpha, s_\alpha = \sin \alpha, \alpha \in \phi, \theta, \psi$$



$$\mathbf{M} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{BCD}$$

Bei Rotation um eine Gerade, 1. Transformation \mathbf{D}

& C Matrix (mit Winkel der Gerade), dann eigentliche Transformation mit gegebenem Winkel, dann zurücktransformiere C^{-1} & D^{-1}

7.8 Rotation um eine Achse durch den Ursprung

$$\text{Rotation um einen Einheitsvektor } \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = (\cos \theta)I + (1 - \cos \theta) \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{bmatrix} - \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

7.9 Parallelprojektion

Projektion auf Ebene $\epsilon : ax + by + cz + d = 0$
Die Ebene ist definiert durch Normalenvektor $\vec{n} = [a, b, c]^T$ (Ebenen Normalenvektor)

Projektionsrichtung definiert durch Normalenvektor $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$ (Projektionsrichtung)

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{v} = \vec{x}_0 + t^*\vec{v}$$

$$t = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{av_x + bv_y + cv_z}$$

$$t^* = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\cos(\psi)}$$

$$av_x + bv_y + cv_z = \vec{v} \bullet \vec{n} = |\vec{v}| |\vec{n}| \cos(\psi) = \cos(\psi)$$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{v}, \text{ komponentenweise } \begin{bmatrix} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \\ z = z_0 + tv_z \end{bmatrix}$$

Wobei \vec{x}_0 Punkt dem projizierten \vec{x} Punkt auf Ebene entspricht. ψ ist der Winkel zwischen \vec{n} und \vec{v}

7.10 Parallelprojektionsmatrix

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{c_\psi} \begin{bmatrix} (c_\psi - av_x) & -bv_x & -cv_x & -dv_x \\ -av_y & (c_\psi - bv_y) & -cv_y & -dv_y \\ -av_z & -bv_z & (c_\psi - cv_z) & -dv_z \\ 0 & 0 & 0 & c_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos(\psi) = c_\psi$$

7.11 Perspektivische Projektion

Fall wenn Zentrum O im Nullpunkt

$\epsilon : ax + by + cz + d = 0$, Ebene

Beliebigen Punkt $A_0(x_0, y_0, z_0)$ mit Projektionspunkt $A^*(x^*, y^*, z^*)$ in Ebene ϵ

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda y_0 \\ \lambda z_0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -\frac{d}{ax_0 + by_0 + cz_0}$$

$$(ax_0 + by_0 + cz_0) \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -dx_0 \\ -dy_0 \\ -dz_0 \\ ax_0 + by_0 + cz_0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7.12 Perspektivische Projektionsmatrix

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix}$$

Projektionszentrum muss dann im Zentrum liegen.

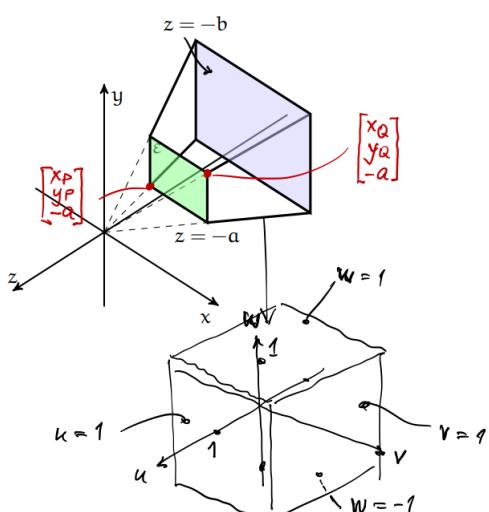
Wenn Ebene nicht mit Nullpunkt im Zentrum, dann zum Zentrum transferieren. Wichtig, die perspektivische Ebene muss transferiert werden. Bsp: x-y-Ebene hat $\epsilon : z = 0$ dies mit der Transformation multiplizieren. Bei Zentrum der x-y-Ebene $Z(2, 4, -3)$ entspricht $\epsilon^* : z = 3$, da $d = 3$ wenn 0 Punkt verschoben:

$$[-2, -4, 3, 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ d \end{bmatrix} = 0$$

7.13 Sichtvolumen Clipping

Das kanonische Sichtvolumen ist ein Würfel mit $P(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

Defür sind vorne und hinten, sowie zwei Punkte bestimmend Grösse gegebenen



P links unten, Q rechts oben
 z vorne $z = -a$, z hinten $z = -b$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{2a}{x_Q - x_P} & 0 & \frac{x_Q + x_P}{x_Q - x_P} & 0 \\ 0 & \frac{2a}{y_Q - y_P} & \frac{y_Q + y_P}{y_Q - y_P} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-b+a}{b-a} & -2\frac{ba}{b-a} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

8 Scan Konvertierung

8.1 Linie Rastern

Eine Linie von (x_0, y_0) nach (x_1, y_1) rastern. Da in Pixel konvertiert werden muss. Methoden:

- *Brute Force*; über jeden Pixel und runden
- *Brute Force inkrementell* (DDA); $y_{i+1} = m * x_{i+1} + B = y_i + m$, Nachteil Gleitkommazahlen und Runden (aufwändig)
- *Mittelpunktschema*; Nächsten Punkt wird Kalkuliert durch if/else

8.2 Mittelpunktschema

Ist eine inkrementelle Methode zum Rastern. Mittelpunkt wird betrachtet um nächsten Punkt zu finden. ($M = (x_i + 1, y_i + \frac{1}{2})$, $E = (x_i + 1, y_i)$, $NE = (x_i + 1, y_i + 1)$)

$$\begin{aligned} D_x &= x_1 - x_0; \\ D_y &= y_1 - y_0; \\ D_E &= 2 * D_y; \\ D_{NE} &= 2 * (D_y - D_x); \\ d &= 2 * D_y - D_x; \\ y &= y_0 \end{aligned}$$

Für jeden nächsten d Wert, wenn $d \leq 0$, dann $d = d + D_{NE}$ ansonsten $d = d + D_E$ und y inkrementieren. Jeweils den Punkt $P(x, y)$ zeichnen. x jedesmal inkrementieren.

8.3 Kreis Rastern

Selbe Methode wie bei den Linien kann für Kreise angewendet werden.

8.4 Mittelpunktschema Kreis

Funktion für Kreis: $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= R \\ d &= 1 - R \\ D_E &= 2 * x + 3 \\ D_{NE} &= 2 * (x - y)d + 5 \end{aligned}$$

Für jeden nächsten d Wert wiederholen bis $y > x$, wenn $d < 0$, dann $d = d + D_E$ ansonsten $d = d + D_{NE}$ und

y dekrementieren. Jeweils den Punkt $P(x, y)$ zeichnen. x jedesmal inkrementieren.

8.5 Regionen füllen

Entweder durch 4-er oder 8-er Zusammenhang definiert



4-er Zusammenhang



8-er Zusammenhang

8.6 FloodFill

Füllen durch selben abfrage ob selbe Farbe (Photoshop Zauberstab)

9 Curves

9.1 Kurve in der Ebene

Explizite Darstellung

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$$

Kreis:

$$\text{oberer Halbkreis } \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{unterer Halbkreis } \sqrt{r^2 - x^2}$$

Implizite Darstellung

$$F(x, y) = 0$$

$$\text{Kreis: } x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

Parameterdarstellung

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Punkte miteinander verbunden, einzeln angegeben

$$\text{Kreis: } \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{bmatrix}$$

9.2 Kurve im Raum

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

9.3 Spirale entlang des Zylinders

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ht/(2\pi) \end{bmatrix}$$

Grundriss ergibt Kreis, Höhe Linear

9.4 Methode unbestimmte Koeffizienten

$$P_3(x) = c_0 + c_1 x^2 + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 1$$

9.5 Lagrange Methode

$$l_0(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots$$

$$L_0(x) = \frac{l_0(x)}{l_0(x_0)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots}$$

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$$

$$l_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n (x - x_i)$$

$$L_k(x) = \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)}$$

9.6 Lineare Bézier spline

$$P(t) = (1-t)P_0 + P_1 (0 \leq t \leq 1)$$

Gewichteter Durchschnitt der Kontrollpunkte

$$P(t) = (P_1 - P_0)t + P_0$$

Polynom in t

$$P(t) = [P_0, P_1] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} (0 \leq t \leq 1)$$

Matrixform

9.7 Quadric Bézier spline

drei Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2

$$P_0^1(t) = (1-t)P_0 + P_1$$

$$P_1^1(t) = (1-t)P_0 + P_1$$

$$P(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)t P_1 + t^2 P_2$$

9.8 Cubic Bézier Spline

vier Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2, P_3

Mit P_0^1, P_1^1 und

$$P_2^1(t) = (1-t)P_2 + tP_3$$

$$P_1^2(t) = (1-t)P_0^1(t) + tP_1^1(t)$$

$$P_2^2(t) = (1-t)P_1^1(t) + tP_2^1(t)$$

$$P(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t) t^2 P_2 + t^3 P_3$$

9.9 Bernsteinpolynome

10 Appendix

10.1 Radians

Winkel α°	Bogenmass	Sinus	Kosinus
0°	0	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$
180°	π	0	-1
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
360°	2π	0	1

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+\tan^2(\alpha)}$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$