

# Computer Graphics Zusammenfassung

Lucien Zürcher & Melvin Werthmüller

January 7, 2019

## Contents

<b>1 Farbe</b>	<b>3</b>	<b>5 Visibilität</b>	<b>8</b>
1.1 Was ist Farbe? . . . . .	3	5.1 Backface Culling (WebGL) . . . . .	8
1.2 Farbe eines Objektes . . . . .	3	5.2 Tiefensortierung (Painters Algorithms) . . . . .	8
1.3 Licht besteht aus? . . . . .	3	5.3 z-Buffer (WebGL) . . . . .	8
1.4 Das Auge . . . . .	3	5.4 Warnock Algorithmus . . . . .	8
1.5 Wie sehen wir Farbe? . . . . .	3		
1.6 Wahrnehmung . . . . .	3		
1.7 Farbsysteme . . . . .	3		
1.8 Additives Farbsystem . . . . .	4		
1.9 Subtraktives Farbsystem . . . . .	4		
1.10 Farben Konvertieren . . . . .	4		
1.11 Gamma Korrektur . . . . .	4		
1.12 Normfarbtafel / CIE Farbsystem . . . . .	4		
1.13 Helligkeitswahrnehmung . . . . .	4		
1.14 Nibs (Lichtdichte) . . . . .	4		
1.15 Mach bending . . . . .	4		
1.16 Farbtäuschung . . . . .	4		
1.17 HD,UHD,UK . . . . .	4		
1.18 Was ist HDR? . . . . .	5		
1.19 Begriffe . . . . .	5		
<b>2 Halbtontechnik</b>	<b>5</b>	<b>6 Clipping</b>	<b>9</b>
2.1 Verfahren der Halbtontechnik . . . . .	5	6.1 Verfahren . . . . .	9
2.2 Quantisierung . . . . .	5	6.2 Clipping von Linien . . . . .	9
2.3 Dithering . . . . .	5	6.2.1 Clipping von Linien nach Cohen-Sutherland . . . . .	9
2.3.1 Dithermatrizen . . . . .	5	6.3 Clipping von Polygonen mit dem Algorithmus von Sutherland-Hodgeman . . . . .	9
2.3.2 Dithering bei gleich bleibender Auflösung . . . . .	5		
2.3.3 Dispersed Dot Dithering . . . . .	5		
2.3.4 Error Diffusion . . . . .	5		
<b>3 Viewing</b>	<b>6</b>	<b>7 Beleuchtung &amp; Schattierung</b>	<b>9</b>
3.1 Planare geometrische Projektionen . . . . .	6	7.1 TODO . . . . .	9
3.1.1 parallele Projektionen . . . . .	6		
3.1.2 perspektivische Projektionen . . . . .	6		
<b>4 Scan Konvertierung</b>	<b>6</b>	<b>8 Raytracing</b>	<b>9</b>
4.1 Linie Rastern . . . . .	6	8.1 TODO . . . . .	9
4.2 Mittelpunktschema . . . . .	6		
4.3 Kreis Rastern . . . . .	7		
4.4 Mittelpunktschema Kreis . . . . .	7		
4.5 Regionen füllen . . . . .	7		
4.5.1 FloodFill . . . . .	7		
4.6 Zeichnen von gefüllten Polygonen . . . . .	7		
4.6.1 Scanlinien Algorithmus . . . . .	7		
4.6.2 Zeichnen von Dreiecken . . . . .	7		
4.7 Anti-Aliasing . . . . .	8		
<b>5 Visibilität</b>	<b>8</b>	<b>9 Rendering Equation(s)</b>	<b>9</b>
5.1 Backface Culling (WebGL) . . . . .	8	9.1 TODO . . . . .	9
5.2 Tiefensortierung (Painters Algorithms) . . . . .	8		
5.3 z-Buffer (WebGL) . . . . .	8		
5.4 Warnock Algorithmus . . . . .	8		
<b>6 Clipping</b>	<b>9</b>	<b>10 WebGL</b>	<b>9</b>
6.1 Verfahren . . . . .	9	10.1 OpenGL Merkmale . . . . .	9
6.2 Clipping von Linien . . . . .	9	10.2 Grafikpipeline . . . . .	10
6.2.1 Clipping von Linien nach Cohen-Sutherland . . . . .	9	10.3 Programmierbare Shaders . . . . .	10
6.3 Clipping von Polygonen mit dem Algorithmus von Sutherland-Hodgeman . . . . .	9	10.3.1 Vertex Processing / Vertex Shader . . . . .	10
		10.3.2 Fragment Processing / Fragment Shader . . . . .	10
		10.4 Datenfluss . . . . .	10
		10.5 Attribute und Uniform Variablen mit Shaders verbinden . . . . .	10
		10.6 Attribut Variablen und Buffer definieren . . . . .	10
<b>7 Beleuchtung &amp; Schattierung</b>	<b>9</b>		
7.1 TODO . . . . .	9		
<b>8 Raytracing</b>	<b>9</b>		
8.1 TODO . . . . .	9		
<b>9 Rendering Equation(s)</b>	<b>9</b>		
9.1 TODO . . . . .	9		
<b>10 WebGL</b>	<b>9</b>		
10.1 OpenGL Merkmale . . . . .	9		
10.2 Grafikpipeline . . . . .	10		
10.3 Programmierbare Shaders . . . . .	10		
10.3.1 Vertex Processing / Vertex Shader . . . . .	10		
10.3.2 Fragment Processing / Fragment Shader . . . . .	10		
10.4 Datenfluss . . . . .	10		
10.5 Attribute und Uniform Variablen mit Shaders verbinden . . . . .	10		
10.6 Attribut Variablen und Buffer definieren . . . . .	10		
<b>11 Vektoren</b>	<b>11</b>		
11.1 Addition . . . . .	11		
11.2 Multiplikation mit Skalar . . . . .	11		
11.3 Nullvektor . . . . .	11		
11.4 Vektorinverses . . . . .	11		
11.5 Vektoren Gleichheit . . . . .	11		
11.6 Skalarprodukt . . . . .	11		
11.7 Skalarprodukt im beliebigem Koordinatensystem . . . . .	11		
11.8 Orthogonal . . . . .	11		
11.9 Länge des Vektors . . . . .	11		
11.10 Einheitsvektor . . . . .	11		
11.11 Euklidische Distanz . . . . .	11		
11.12 Gerade im 2/3D . . . . .	11		
11.13 Hessische Normalform . . . . .	11		

11.14Hessische Normalform Ebene . . . . .	12	<b>15 Appendix</b>	<b>17</b>
11.15Achsenabschnitt . . . . .	12	15.1 Radians . . . . .	17
11.16Projektion eines Vektors . . . . .	12		
11.17Vektorprodukt . . . . .	12		
11.18Vektorprodukt Anwendung . . . . .	12		
11.19Spatprodukt . . . . .	12		
11.20Translation 2D . . . . .	12		
11.21Skalierung 2D . . . . .	12		
11.22Rotation 2D . . . . .	12		
11.23Vektor Rechenregeln . . . . .	12		
11.24Rechenregel Skalarprodukt . . . . .	13		
11.25Vektorprodukt Rechenregeln . . . . .	13		
11.26Spatprodukt Rechenregeln . . . . .	13		
11.27Begriffe . . . . .	13		
<b>12 Projektive Geometrie</b>	<b>13</b>		
12.1 Homogener Vektor . . . . .	13		
12.2 Punkt auf Gerade . . . . .	13		
12.3 Schnittpunkt Geraden . . . . .	13		
12.4 Parallele Geraden . . . . .	13		
12.5 Unendlicher homogener Vektor . . . . .	13		
12.6 Projektive Ebene (homogener Vektor) . .	13		
12.7 Projektive Transformation . . . . .	13		
12.8 Transformationen kombinieren . . . . .	14		
12.9 Translation 2D . . . . .	14		
12.10Nullpunkt Rotation 2D . . . . .	14		
12.11Rotation um Punkt A . . . . .	14		
12.12Spiegelung mit Gerade durch Ursprung .	14		
12.13Spiegelung mit Gerade $g$ . . . . .	14		
12.14Transformation des Koordinatensystems	14		
12.15Abstand Punkt zur Gerade . . . . .	14		
12.16Transformationen 2D . . . . .	14		
<b>13 Transformation</b>	<b>14</b>		
13.1 homogene Koordinaten . . . . .	14		
13.2 Ebene im Raum . . . . .	14		
13.3 Prokektive Transformation . . . . .	15		
13.4 Transformationen . . . . .	15		
13.5 Translation . . . . .	15		
13.6 Rotation . . . . .	15		
13.7 Rotation um beliebige Achse . . . . .	15		
13.8 Rotation um eine Achse durch den Ursprung . . . . .	16		
13.9 Parallele Projektion . . . . .	16		
13.10Parallele Projektionsmatrix . . . . .	16		
13.11Perspektivische Projektion . . . . .	16		
13.12Perspektivische Projektionsmatrix . . . .	16		
13.13Sichtvolumen Clipping . . . . .	16		
<b>14 Curves</b>	<b>17</b>		
14.1 Kurve in der Ebene . . . . .	17		
14.2 Kurve im Raum . . . . .	17		
14.3 Spirale entlang des Zylinders . . . . .	17		
14.4 Methode unbestimmte Koeffizienten . . .	17		
14.5 Lagrange Methode . . . . .	17		
14.6 Lineare Bézier spline . . . . .	17		
14.7 Quadric Bézier spline . . . . .	17		
14.8 Cubic Bézier Spline . . . . .	17		
14.9 Bernsteinpolynome . . . . .	17		

## 1 Farbe

### 1.1 Was ist Farbe?

- **Physikalisch**, Lichtzusammensetzung, Elektromagnetischestrahlen
- **Physiologisch**, Wahrnehmung und Interpretation

Farbe besteht aus:

- Farbton/Farbe
- Farbstich/Sättigung
- Helligkeit

### 1.2 Farbe eines Objektes

Ein Objekt nimmt Farbe auf und strahlt Farbe ab. Die Farbe des Objektes ist definiert durch die abgestrahlte Farbe.

- Beleuchtung (Illumination)
- Reflektion (Reflection)
- Farbsignal (Color Signal)

### 1.3 Licht besteht aus?

Licht besitzt verschiedene Wellenlängen, Kombinationen dieser Frequenzen ergeben eine Farbe.

- Sichtbares Licht (380mn - 780mn)
- Infrarot (780mn+)
- Ultraviolet (-380mn)

$Inm = 10\text{Å}(\text{Ångström})$

$1\text{Å} = \phi\text{Atom}$

### 1.4 Das Auge

Das Auge besteht aus; **Iris** (Kreisring mit radialen Muskel und Lichteinschränken), **Linse** (Fokussieren), **Pupille** (Öffnung, durch Iris kontrolliert), **Photorezeptoren** (Nehmen das Licht wahr) und **Retina** (Farb- und Lichtaufnahme am Rand des Auges)

Die Retina besteht aus  $75-100 \cdot 10^6$  Stäbchen/rods (Lichtintensität) und  $6-7 \cdot 10^6$  Zäpfchen/cones (Farbe). Die Fovea ist der dichteste Platz.

### 1.5 Wie sehen wir Farbe?

Durch die 3 Arten von Zäpfchen:

Kurz (S)	Mittel (M)	Lang (L)
Blau	Grün	Rot
440mn	530mn	560mn
1	: 5	: 10

Weiss ist eine Kombination von Wellenlängen. Es gibt verschiedene Verteilung für Weiss.

## 1.6 Wahrnehmung

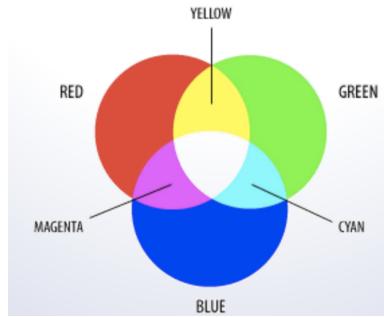
Grün 530mn wird am intensivsten wargenommen

Die Helligkeitswahrnehmung zwischen Stäbchen und Zäpfchen ist unterschiedlich

## 1.7 Farbsysteme

Nicht alle existierenden Farben (CIE) sind mit allen System darstellbar!

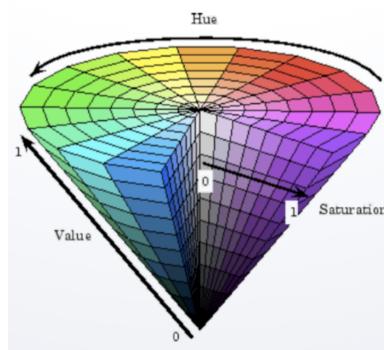
- **RGB** (Monitor, Spotlights, Pointilismus), additiv,  $C = (\text{Rot}, \text{Grün}, \text{Blau})$



- **CMY** (Drucken), subtraktiv,  $C = (\text{Cyan}, \text{Magenta}, \text{Yellow})$  Komplementärfarbe von RGB  $(C, M, Y) = (1, 1, 1) - (R, G, B)$

- **CMYK**, CMY Mit Schwarz erweitert,  $K = \min(\text{Cyan}, \text{Magenta}, \text{Yellow})$   $C = C - K, M = M - K, Y = Y - K$

- **HSV**, Farbton (Hue) / Reinheit, Sättigung (Saturation) / Intensität (Value)



- **YUV** (Alte Fernseher, Y= Helligkeit, UV = 1/4 Auflösung Farbkorrektur)

$$Y = 0.229 * R + 0.587 * G + 0.114 * B, \\ U = 0.436(B - Y)/(1 - 0.114), \\ V = 0.615(R - Y)/(1 - 0.299)$$

- **CIE-Lab**, absolutes Farbsystem

Achsenystem mit Helligkeit (L) als Y-Achse und X/Z-Achse definieren Farbunterschiede

a: rot – grün Achse

b: gelb – blau Achse

## 1.8 Additives Farbsystem

*Farben addieren*

$(1,1,1) = \text{Weiss}, (0,0,0) = \text{Schwarz}$

## 1.9 Subtraktives Farbsystem

*Farben absorbieren / filtern*

$(0,0,0) = \text{Weiss}, (1,1,1) = \text{Schwarz}$

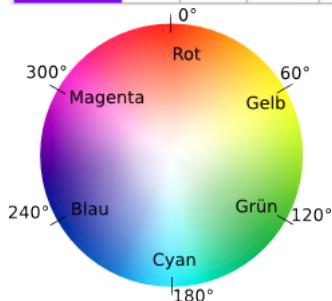
## 1.10 Farben Konvertieren

Zu Grau:  $I = 0.229 * R + 0.587G + 0.114 * B$

$$RGB <> CMY: \begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

HSV <> RGB:

Farbe	H	S	V	R	G	B
Schwarz	–	–	0 %	0 %	0 %	0 %
Rot	0°	100 %	100 %	100 %	0 %	0 %
Gelb	60°	100 %	100 %	100 %	100 %	0 %
Braun	24,3°	75 %	36,1 %	36 %	20 %	9 %
Weiß	–	0 %	100 %	100 %	100 %	100 %
Grün	120°	100 %	100 %	0 %	100 %	0 %
Dunkelgrün	120°	100 %	50 %	0 %	50 %	0 %
Cyan	180°	100 %	100 %	0 %	100 %	100 %
Blau	240°	100 %	100 %	0 %	0 %	100 %
Magenta	300°	100 %	100 %	100 %	0 %	100 %
Orange	30°	100 %	100 %	100 %	50 %	0 %
Violett	270°	100 %	100 %	50 %	0 %	100 %



## 1.11 Gamma Korrektur

Erreichen von gleichmässiger Verteilung der Helligkeit / Kontrast. Das Empfinden der Helligkeit ist nicht linear.

Korrektur der Helligkeit des Bildes mit Gamma Wert. Wichtig für Bildschirme einstellen. Beim einstellen der Monitore Grauwerte mit echten Werten vergleichen (Gamma Test Pattern). 50% schwarz und 50% weiss einer Fläche (z.B. Punkte) sollte gleich sein wie 50% grau

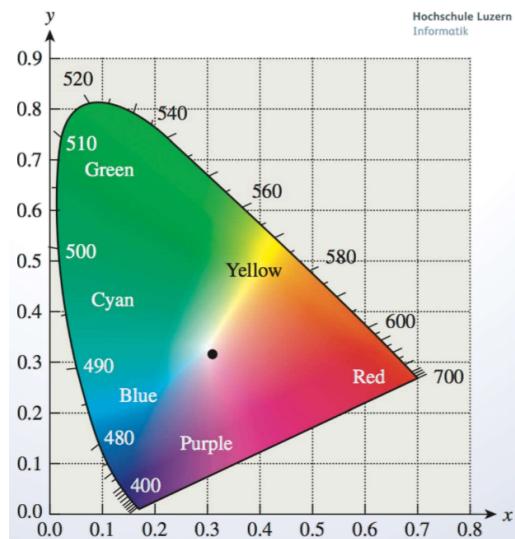
## 1.12 Normfarbtafel / CIE Farbsystem

- kann alle Farben darstellen
- Spektralfarben = Farbe am Rand mit Wellenlänge

- Farben zwischen zweie Farben mischbar

- Komplementärfarben gehen durch Weiss

- Achtung: Keine Spektralfarbe am Rande zwischen UV und Infrarot



## 1.13 Helligkeitswahrnehmung

Helligkeit wird logarithmisch wahrgenommen, Webers Law

$$\frac{\Delta I}{I} = C$$

$$\log(I + \Delta I) - \log(I) = \text{Const}$$

Helligkeitsunterschied im dunkeln nehmen wir stärker wahr

## 1.14 Nibs (Lichtdichte)

Gibt Helligkeitsdichte für Auge an. 10nits werden stärker wargenommen denn 100nits. Heisst, weniger Licht wird stärker wargenommen.

## 1.15 Mach bending

Optische Illusion, bei zwei verschiedenen Grauwerten nebeneinander unterschieden sich diese vermeidlich stärker.

## 1.16 Farbtäuschung

Farbe wird abhängig durch Umgebung anders wahrgenommen (Dunkler, Heller). Optische Illusionen

## 1.17 HD,UHD,UK

Unterscheiden sich durch Pixelauflösung.

## 1.18 Was ist HDR?

**High Dynamic Range**, speichert zusätzlichen Wert um Helligkeitsunterschiede besser unterscheiden zu können (RGB-Pixelwerte proportional zum Licht). Detailreichere dunkel und helle Spots, weniger Verlust durch Farben mit weniger Helligkeitsunterschieden.

## 1.19 Begriffe

<b>Natürliches Licht</b>	Gemisch aus verschiedenen Lichtwellen / Frequenzen
<b>Spektralfarben</b>	reine Farbfrequenz; Alle Farben am Rand des CIE-Farbsystems
<b>Spektrum</b>	Alle Frequenzen und deren Verteilung
<b>Spektralverteilung</b>	Charakterisiert die Farbe, definiert durch Frequenzen (Bsp. Verschiedenes Weiss)
<b>Komplementärfarben</b>	Addieren ergeben Grau, gegenüberliegende Farben im CIE-Farbsystem durch Weiss

## 2 Halbtontechnik

### 2.1 Verfahren der Halbtontechnik

Da nur Schwarz und Weiss gedruckt werden kann, werden die verschiedenen Stufen durch Intensitätsstufen dargestellt. Dafür gibt es drei Verfahren:

- Quantisierung
- Dithering
- Error Diffusion

### 2.2 Quantisierung

Höhere Auflösung auf tiefere Auflösung durch Runden der Pixelfarbwerte auf verfügbare Farben.

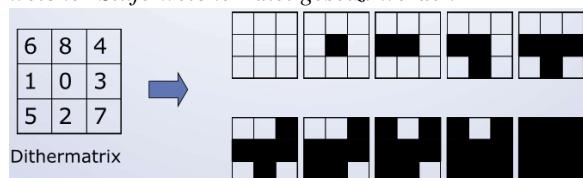
Bsp. 16Bit -> 8Bit (Runden der Werte)

### 2.3 Dithering

Wenn der Drucker eine grössere Auflösung besitzt, jedoch weniger Farbstufen kann Dithering verfahren verwendet werden. -> Farben mit höherer Auflösung durch kleinere Punkte simulieren.

#### 2.3.1 Dithermatrizen

Kann als Matrix dargestellt werden. Matrix gibt an, auf welcher Stufe welche Pixel gesetzt werden



Es gibt zwei Regeln; Gesetzter **Pixel bleibt gesetzt** und **Strukturen** in der Ditheringmatrix vermeiden. Es soll möglichst ein Kreis approximiert werden.

#### 2.3.2 Dithering bei gleich bleibender Auflösung

Handhabung, wenn die Bildgrösse/Auflösung gleich bleibt

- Clustered dot dithering: Mittelwert von n x n Region mit Ditheringmatrix ersetzen.
- Dispersed Dot Dithering

#### 2.3.3 Dispersed Dot Dithering

Bayer Matrizen können hierfür verwendet werden, wodurch die Methode Bayer Dithering genannt wird.

2 x 2 Bayer Matrix

0	2
3	1

4 x 4 Bayer Matrix

0	8	2	10
12	4	14	6
3	11	1	9
15	7	13	5

$$k = \frac{W_{max}}{n*n+1}$$

$W_{max}$ : Anzahl Werte des Pixels (256 bei 8Bit)

$n$ : Grösse der Matrix (2 x 2 =>  $n = 2$ )

$k$ : Faktor für Umrechnung

$$I_{new} = \frac{I_{old}}{k}$$

Für jeden Pixel den neuen Wert ausrechnen, danach mit Bayermatrix den Wert vergleichen. Pixel setzen wenn  $I(x, y)_{new} > D_{ij}$

$$i = x \text{ modulo } n$$

$$j = y \text{ modulo } n$$

#### 2.3.4 Error Diffusion

Anstatt Kreise, Punkte verschiedener Dichte anordnen. Das Bild wird dabei sequenziell durchlaufen; links -> rechts, oben -> unten

Error Diffusion verteilt den Fehler auf die umliegenden Pixel (zu hell -> dunkler machen / zu dunkel -> heller machen)

X	7/16
1/16	5/16
3/16	

Gewichtungsmatrix

Beispiel:

X	191	140	113
244	221	105	100

$$191 - 255 = -64, \text{ da Pixel Schwarz (255), Fehler: } -64$$

X	X	140 + (7/16 * -64)	113
244 + (1/16 * -64)	221 + (5/16 * -64)	105 + (3/16 * -64)	100

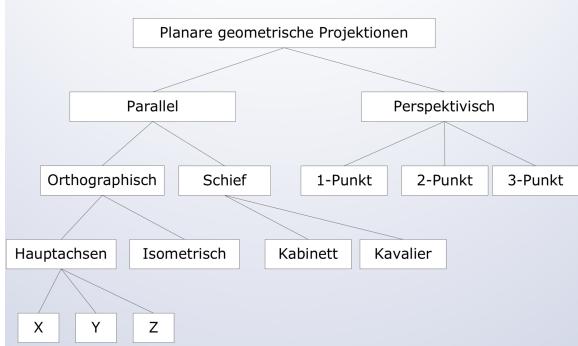
Wenn Wert > 128 = 255, ansonsten Wert <= 128 = 0

### 3 Viewing

von 3D in 2D abbilden

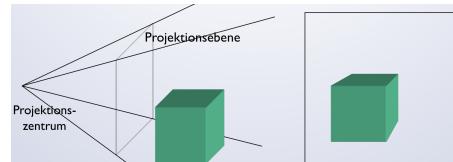
#### 3.1 Planare geometrische Projektionen

Bild auf eine Ebene projizieren



#### 3.1.2 perspektivische Projektionen

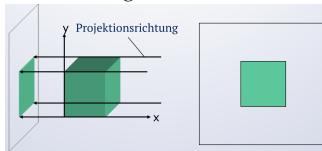
- Simuliert Kamera oder Auge
- Spezifiziert durch Projektionszentrum und Projektionsebene
- Geraden bleiben erhalten
- Parallelen schneiden sich in einem Punkt (Fluchtpunkt)
- Objektgröße nimmt proportional zum Abstand vom Projektionszentrum ab



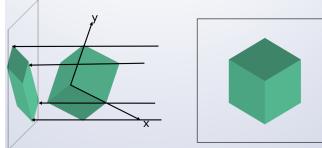
##### 3.1.1 parallele Projektionen

- Geraden und Parallelen bleiben erhalten
- konstante Verkürzung in eine Richtung
- keine Winkeltreue

**Orthographische Projektion** von einer Seite / rechtwinklig



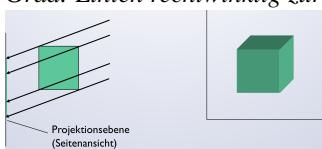
**Isometrische Projektion** Orthographische auf die Ebene



**Kavaliereprojektion** Parallelprojektion mit 45 Grad. Linien rechtwinklig zur Ebene haben natürliche Länge



**Kabinettsprojektion** Parallelprojektion mit 63.4 Grad. Linien rechtwinklig zur Ebene haben halbe Länge



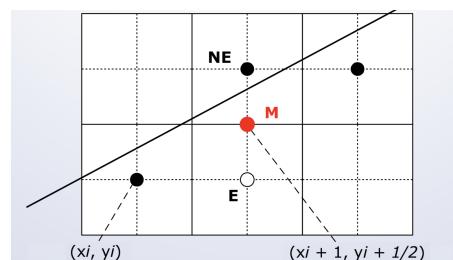
#### 4 Scan Konvertierung

##### 4.1 Linie Rastern

Eine Linie von  $(x_0, y_0)$  nach  $(x_1, y_1)$  rastern. Da in Pixel konvertiert werden muss. Methoden:

- Brute Force; über jeden Pixel und runden
- Brute Force inkrementell (DDA = Digital Differential Analyzer);  $y_{i+1} = m * x_{i+1} + B = y_i + m$ , Nachteil Gleitkommazahlen und Runden (aufwändig)
- Mittelpunktschema; Nächsten Punkt wird Kalkuliert durch if/ else

##### 4.2 Mittelpunktschema



Ist eine inkrementelle methode zum Rastern. Mittelpunkt wird betrachtet um nächsten Punkt zu finden.  $(M = (x_i + 1, y_i + \frac{1}{2}))$ ,  $E = (x_i + 1, y_i)$ ,  $NE = (x_i + 1, y_i + 1)$

Initialisierung:

$$\begin{aligned} D_x &= x_1 - x_0; \\ D_y &= y_1 - y_0; \\ D_E &= 2 * D_y; \\ D_{NE} &= 2 * (D_y - D_x); \\ d &= 2 * D_y - D_x; \\ y &= y_0 \end{aligned}$$

Wegen 1/2 alles mal 2, damit gerade Zahlen

Für jeden nächsten d Wert, wenn  $d \leq 0$ , dann  $d = d + D_{NE}$  ansonsten  $d = d + D_{NE}$  und y inkrementieren. Jeweils den Punkt  $P(x, y)$  zeichnen. x jedesmal inkrementieren.

Berechnung:

```
WritePixel(x0, y0)
for x = x0+1 to x1 do
    if d <= 0 then
        d = d + DE;
    else
        d = d + DNE;
        y = y + 1;
    end
    WritePixel(x, y);
end
```

### 4.3 Kreis Rastern

Selbe Methode wie bei den Linien kann für Kreise angewendet werden.

### 4.4 Mittelpunktschema Kreis

Funktion für Kreis:  $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$

```
x = 0
y = R
d = 1 - R
DE = 2 * x + 3
DNE = 2 * (x - y)d + 5
```

Für jeden nächsten d Wert wiederholen bis  $y > x$ , wenn  $d < 0$ , dann  $d = d + D_E$  ansonsten  $d = d + D_{NE}$  und y dekrementieren. Jeweils den Punkt  $P(x, y)$  zeichnen. x jedesmal inkrementieren.

```
WritePixel(x, y);
while y > x do
    if d < 0 then
        d = d + 2*x + 3;
    else
        d = d + 2*(x-y) + 5;
        y = y - 1;
    end
    x = x + 1;
    WritePixel(x, y);
end
```

### 4.5 Regionen füllen

Entweder durch 4-er oder 8-er Zusammenhang definiert



4-er Zusammenhang



8-er Zusammenhang

### 4.5.1 FloodFill

Füllen durch selben abfrage ob selbe Farbe (Photoshop Zauberstab)

```
proc FloodFill( int x, int y,
Color oldColor, Color newColor)
    if ReadPixel(x,y) == oldColor then
        WritePixel(x,y,newColor);
        FloodFill(x, y-1, oldColor, newColor);
        FloodFill(x-1,y, oldColor, newColor);
        FloodFill(x, y+1, oldColor, newColor);
        FloodFill(x+1, y, oldColor, newColor);
    end
end
```

### 4.6 Zeichnen von gefüllten Polygonen

#### 4.6.1 Scanlinien Algorithmus

- Zeilenweise färben (Spans entlang der y Koordinate  
-> Scanlinien)
- Kantentabelle (edgetable ET)  
sortierte Kanten (Linien) des Polygon nach min y  
(innerhalb davon nach x)
- Tabelle aktiver Kanten (AET)  
Momentane Kanten für Scanlinie (sortiert nach x  
asc) zum Zeichnen vom einer Kante zur nächsten  
(immer zwei)

Erzeuge ET

```
Initialisiere AET = empty
y=0
repeat
    Addiere alle Kanten ET(y) zu AET
    Sortiere AET nach x
    Zeichne Spans
    y=y+1
    Entferne Kanten mit ymax = y aus AET
    Aktualisiere den x Wert aller Kanten in AET
until AET == empty and ET == empty
```

#### 4.6.2 Zeichnen von Dreiecken

Brute Force: Alle Pixel probieren, ob im Dreieck

- Baryzentrische Koordinaten  
 $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$   
 $\alpha + \beta + \gamma = 1$   
Wenn Werte zwischen 0 und 1, dann ist Punkt P innerhalb von ABC. Wert einer Koordinate entspricht dem Verhältnis der Fläche eines Teildreiecks mit Ecke P zur Fläche von ABC
- Unterteilung in 3 Geraden und dann auf der richtigen Seite aller Geraden

## 4.7 Anti-Aliasing

*Treppenmuster vermeiden*

- Prefiltering -> Farbintensität proportional zur Fläche
- Supersampling -> Bild mit höherer Auflösung berechnen und Farbmittelwerte als Übergänge zeichnen

## 5 Visibilität

*Algorithmen für verdeckte Linien und Flächen*

### 5.1 Backface Culling (WebGL)

- Rückseiten nicht zeichnen
- Test durch Normalvektor (Normalvektor gegen hinten und nicht nach vorne)

### 5.2 Tiefensortierung (Painters Algorithms)

*Zeichnen der Polygone in einer Reihenfolge zuletzt gezeichnete überdecken die ersten Sortierung*

Sortierung:

1. Sortierung nach minimaler x-Koordinate (in Kamera Koordinaten)
2. wenn in z-überlagern -> weitere Bedingungen beachten
3. Falls keine Bedingung erfüllt -> Polygone vertauschen und nochmals Prüfen

Bedingungen:

1. Überlagern sich die x-Ausdehnungen nicht? (vollständig nebeneinander)
2. Überlagern sich die y-Ausdehnungen nicht? (vollständig hintereinander)
3. Wird das hintere Objekt vom Vorderen komplett überdeckt?
4. Liegt Q ganz auf der Betrachterseite von P? (Polygon P ist in der Sortierung vor Q)
5. Überlappen sich die Polygone nicht auf der Projektion in die xy Ebene?

TODO Beispiel

Eigenschaften:

- + auch für transparente Objekte möglich
- + einfach für Spezialfälle (2.5D)
- - ineffizient für viele Objekte O(n<sup>2</sup>)
- - nicht Hardware unterstützt

### 5.3 z-Buffer (WebGL)

- Pro Pixel Tiefe zusätzlich zur Farbe speichern
- Beim Zeichnen prüfen, ob näher liegt

```
// Initialisierung
for y = 0 to YMAX do
    for x = 0 to XMAX do
        color[x,y] = Background
        depth[x,y] = MAXDEPTH
    end
end
```

```
// Polygone zeichnen
for alle Polygone q do
    for alle pixel p(x,y) in q do
        z = CalculateDepth(q,x,y);
        if z > depth[x,y] then
            depth[x,y] = z;
            color[x,y] = Color of q
        end
    end
end
```

Berechnung aus Ebenengleichung:

$$z = \frac{-D - Ax - By}{C} / C$$

Inkrementelle Berechnung entlang einer Scanlinie:

$$Z_{\text{neu}} = \frac{-D - A(X_{\text{alt}}+1) - By}{C} = Z_{\text{alt}} - \frac{A}{C}$$

Eigenschaften:

- + Hardware unterstützt
- + Polygone können in beliebiger Reihenfolge gezeichnet werden
- + Berechenzeit O(n), häufig konstant ab einer gewissen Anzahl Polygone
- - Rundungsprobleme
- - Gleiche z-Werte problematisch
- - (grosser Speicherbedarf)

### 5.4 Warnock Algorithmus

*Rekursive Unterteilung des Bildbereichs. Falls "einfach" zu zeichnen -> Zeichnen, sonst unterteilt in 4*

Einfach falls:

1. Der Bereich kein Polygon enthält
2. Der Bereich nur ein Polygon enthält
3. Der Bereich ein Polygon enthält, das am nächsten liegt und den Bereich vollständig ausfüllt
4. Der Bereich nur aus einem Pixel besteht

## 6 Clipping

Objekte ausserhalb des Viewingbereichs nicht darstellen

- Vermeiden von unnötiger Rasterisierung
- Ressourcen schonen

### 6.1 Verfahren

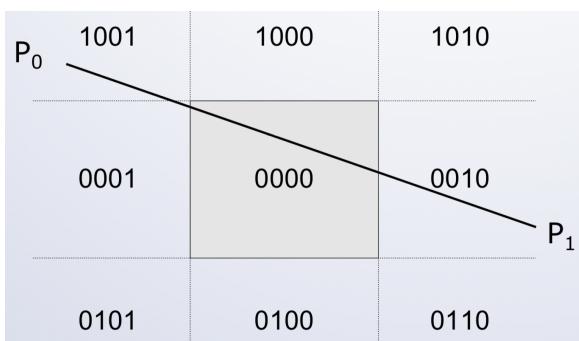
- Scissoring  
alle Pixel berechnen & darstellen wenn im Fenster
- Temporärer Buffer  
zeichnen in einem temporären Buffer, welcher dann Kopiert wird
- Analytische Berechnung derjenigen Teile, die im Innen des Fensters liegen

### 6.2 Clipping von Linien

*Brute Force Algorithmus:* Alle Schnittpunkte berechnen, falls mind. ein Endpunkt ausserhalb Kappungsrechteck

#### 6.2.1 Clipping von Linien nach Cohen-Sutherland

1. Die ganze Ebene wird in Bereiche unterteilt
2. Durch Vergleichen der Bereiche in denen die Endpunkte liegen, wird entschieden ob die Linie einfach akzeptiert oder abgelehnt werden kann
3. Ist dies nicht der Fall, wird die Linie in zwei Teile geteilt, wovon eines abgelehnt wird, mit dem anderen wird zu Schritt 2 zurückgekehrt



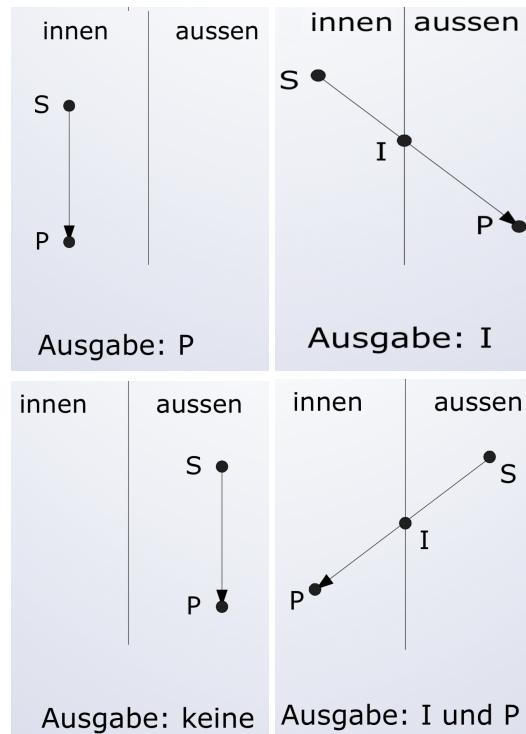
Bitweise AND

- Alles 0 -> Schnittpunkte berechnen gemäss Bit, dann neue Teillinie bis beide Punkte innerhalb (0000)
- falls eine 1 -> ablehnen

TODO Beispiel

## 6.3 Clipping von Polygonen mit dem Algorithmus von Sutherland-Hodgeman

durch das Clipping entstehen evt. neue Formen mit mehr oder weniger Ecken!



Vorgehensweise: Verbindung zwischen zwei Punkten wird gemäss Regeln untersucht. 0-2 Eckpunkte des "neuen" Polygon als Ausgabe

TODO Beispiel

## 7 Beleuchtung & Schattierung

### 7.1 TODO

### 8 Raytracing

#### 8.1 TODO

### 9 Rendering Equation(s)

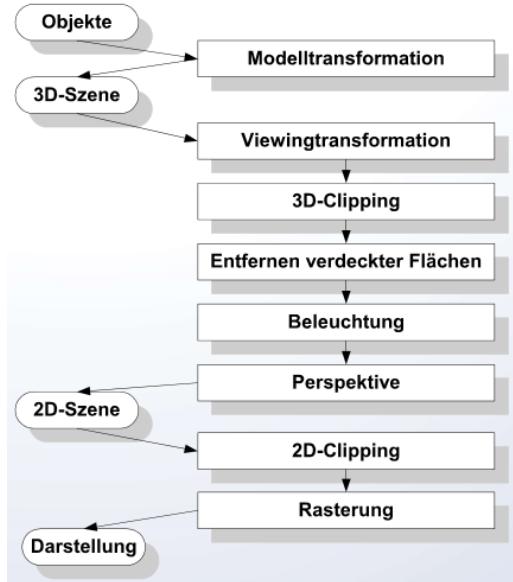
#### 9.1 TODO

### 10 WebGL

#### 10.1 OpenGL Merkmale

- Low Level Graphics API
- Verschiedene Platformen
- 1.0/2.0 Fixe Funktionspipeline
- Vorlage für WebGL

## 10.2 Grafikpipeline



## 10.3 Programmierbare Shaders

Shaders werden für die Berechnung der zu zeichnenden Objekte verwendet. Das Programm wird direkt auf der Grafikkarte ausgeführt.

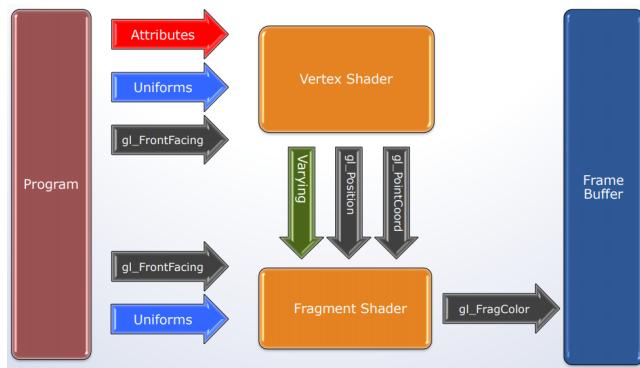
### 10.3.1 Vertex Processing / Vertex Shader

Berechnen der **Positionen** der Vertexe (Punkte) und Werte für den folgenden Fragmentshader.

### 10.3.2 Fragment Processing / Fragment Shader

Berechnet die **Farbe** der einzelnen Pixel.

## 10.4 Datenfluss



## 10.5 Attribute und Uniform Variablen mit Shaders verbinden

### 1. Attribute

```
ctx.aVertexPositionId =
gl.getAttribLocation(ctx.shaderProgram,
 "aVertexPosition")
```

### 2. Uniform

```
ctx.uColorId =
gl.getUniformLocation(ctx.shaderProgram,
 "uColor"))
```

## 10.6 Attribut Variablen und Buffer definieren

### Erzeugen

#### 1. Buffer erzeugen

```
var buffer = gl.createBuffer()
```

#### 2. Array Buffer auf Buffer setzen

```
gl.bindBuffer(gl.ARRAY_BUFFER,
buffer)
```

#### 3. Daten füllen

```
glBufferData(gl.ARRAY_BUFFER,
new Float32Array(vertices),
gl.STATIC_DRAW)
```

### Zeichnen

#### 1. Buffer binden

#### 2. Attribut und/oder uniform setzen

```
gl.vertexAttribPointer(index,
size, type, normalized, stride,
offset)
```

z.B. `gl.vertexAttribPointer(ctx.aVertexPosition, 2, gl.FLOAT, false, 0, 0)`

#### 3. Attribut als Array setzen

```
gl.enableVertexAttribArray(index)
```

#### 4. Zeichnen

```
gl.drawArrays(mode, first, count)
```

## 11 Vektoren

- Skalarprodukt
- Matrixprodukt

### 11.1 Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

### 11.2 Multiplikation mit Skalar

$$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

$\lambda \in \text{Skalar}$

### 11.3 Nullvektor

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 11.4 Vektorinverses

$$-\vec{a} = -\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix}$$

Vektor mit negativen Komponenten

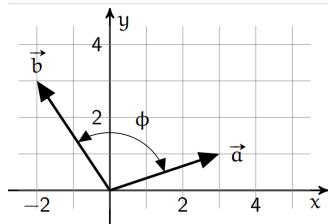
### 11.5 Vektoren Gleichheit

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{b}$$

Vektoren sind gleich, wenn Komponenten gleich

### 11.6 Skalarprodukt

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \phi$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$$

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

### 11.7 Skalarprodukt im beliebigem Koordinatensystem

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = [a_1 a_2 a_3]^T$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 = [b_1 b_2 b_3]^T$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = [a_1 a_2 a_3] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{a}^T \mathbf{G} \mathbf{b}$$

Matrix  $\mathbf{G}$  wird **metrisch Tensor** genannt

### 11.8 Orthogonal

$$\vec{e}_x \bullet \vec{e}_y = 0$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Senkrecht zueinander, wenn Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren 0 ergibt.

### 11.9 Länge des Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

### 11.10 Einheitsvektor

$$e_v = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \bullet v = \frac{1}{\sqrt{v \cdot v}} \bullet v$$

$$(i = e_1, j = e_2, k = e_3)$$

$$\vec{e}_x = [1, 0, 0]^T$$

$$\vec{e}_y = [0, 1, 0]^T$$

$$\vec{e}_z = [0, 0, 1]^T$$

### 11.11 Euklidische Distanz

$$\bar{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

### 11.12 Gerade im 2/3D

- Punkt-Punktform mit Vektoren 2/3D

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_1 - \vec{r}_0), t \in \mathbb{R}$$

$\vec{r}_1$ : Punkt,  $\vec{r}_2$ : Punkt

- Punkt-Richtungsform mit Vektoren 2/3D

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{r}_1, t \in \mathbb{R}$$

$\vec{r}_0$ : Punkt,  $\vec{r}_1$ : Richtungsvektor

- Achsenabschnitt-Steigungsform

$$y = mx + b$$

$b$ : Achsenabschnitt,  $m$ : Steigung

- Punkt-Richtungsform

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

$(x_0, y_0)$ : Punkt,  $m$ : Steigung

- Allgemeine Geradengleichung

$$ax + by + c = 0$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

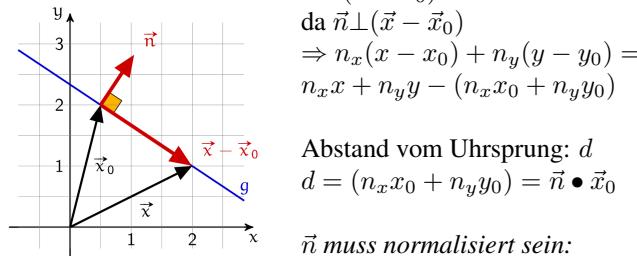
### 11.13 Hessische Normalform

Vektorielle Schreibweise der Hessischen Normalform

$$\vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$$

da  $\vec{n} \perp (\vec{x} - \vec{x}_0)$

$$\Rightarrow n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = n_x x + n_y y - (n_x x_0 + n_y y_0)$$

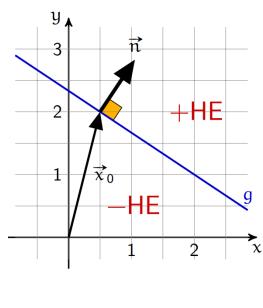


Abstand vom Ursprung:  $d$

$$d = (n_x x_0 + n_y y_0) = \vec{n} \bullet \vec{x}_0$$

$\vec{n}$  muss normalisiert sein:

$$|\vec{n}| = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \bullet \vec{n}$$



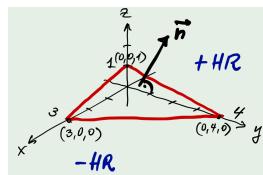
$$\begin{aligned} \mathbf{n}_x \mathbf{x} + \mathbf{n}_y \mathbf{y} - d = 0 \\ d = (n_x x_0 + n_y y_0) = \vec{n} \bullet \vec{x}_0 \\ d > 0 \Leftrightarrow (0, 0) \in -HE \\ d < 0 \Leftrightarrow (0, 0) \in +HE \\ g: ax + by + c = 0 \\ \vec{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ d = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

## 11.14 Hessische Normalform Ebene

$$\epsilon : ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{aligned} n_x x + n_y y + n_z z - D = 0; \text{ HNF der Ebene } \epsilon \in \mathbb{R}^3 \\ \vec{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ D = -\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned}$$

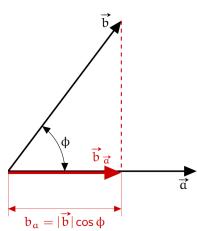
## 11.15 Achsenabschnitt



Gegeben sind 3 Punkte  $p_x = x$ ,  $p_y = y$ ,  $p_z = z$  die ergeben eine Ebenegleichung:

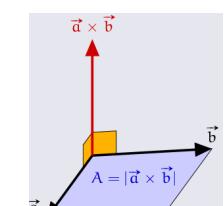
$$\frac{x}{p_x} + \frac{y}{p_y} + \frac{z}{p_z} - 1 = 0$$

## 11.16 Projektion eines Vektors



$$\begin{aligned} \vec{b} \text{ Richtung } \vec{a}: \\ \vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \\ b_a \text{ mal Einheitsvektor } \vec{a} \\ \vec{b}_{\vec{a}} = b_a \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \\ = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \end{aligned}$$

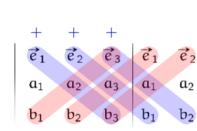
## 11.17 Vektorprodukt



$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} \text{ steht senkrecht auf beiden Vektoren} \\ \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{a} \times \vec{b} \text{ sind ein Rechtssystem} \end{aligned}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$  entspricht der Fläche des aufgespannten Parallelogramms ( $A$ ):

$$A = \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$$



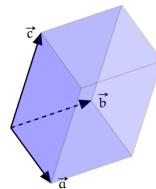
Regel von Sarrus

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

## 11.18 Vektorprodukt Anwendung

- **Lorentz-Kraft**  $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$   
 $\vec{v}$ : Geschwindigkeit,  $B$ : Magnetfeld,  $q$ : Ladung
- **Geschwindigkeit**  $\vec{v} = q(\vec{w} \times \vec{x})$   
 $\vec{x}$ : Punkt,  $w$ : Winkelgeschwindigkeit,  $\vec{w}$ : Drehachse
- **Drehmoment**  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$   
 $\vec{F}$ : Kraft,  $\vec{r}$ : Punkt / Koordinatenursprung
- **Normalvektor**  $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ .  
 $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  liegen auf der Ebene.
- **Kollinearität** kollinear (d.h. linear abhängig) wenn Vektorprodukt verschwindet

## 11.19 Spatprodukt



$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= \\ a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 & \\ \text{Spatprodukt entspricht Volumen wenn in einem Rechtssystem, dann: } V_{Spat} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| & \\ \text{Komplanar (linear abhängig) wenn } [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 & \end{aligned}$$

## 11.20 Translation 2D

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{t} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + t_1 \\ x_2 + t_2 \end{bmatrix}$$

## 11.21 Skalierung 2D

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} \vec{s}_x x \\ \vec{s}_y y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

## 11.22 Rotation 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{R} \vec{x}$$

Inverse Matrix:  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$

## 11.23 Vektor Rechenregeln

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	Kommutativgesetz
$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$	Assoziativgesetz
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	Existenz Neutralelement $\vec{0}$
$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$	Existenz Inverses $-\vec{a}$
$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$	
$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$	
$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$	
$1\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \vec{a} = \vec{a}$	

### 11.24 Rechenregel Skalarprodukt

$$\begin{aligned}\vec{a} \bullet \vec{b} &= \vec{b} \bullet \vec{a} \\ \vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c} \\ \lambda(\vec{a} \bullet \vec{b}) &= (\lambda\vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (\lambda\vec{b})\end{aligned}$$

### 11.25 Vektorprodukt Rechenregeln

$$\begin{array}{l|l} \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} & \text{Anti-Kommutativgesetz} \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} & \text{Distributivgesetz} \\ \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) & \end{array}$$

### 11.26 Spatprodukt Rechenregeln

$$\begin{array}{l|l} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] & \text{zwei Vektoren vertauschen entspricht Vorzeichenwechsel} \\ [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] & \text{Zyklisches Vertauschen} \\ [\lambda\vec{a}, \mu\vec{b}, \nu\vec{c}] = \lambda\mu\nu[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] & \text{keine Änderung} \\ [\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] = & \text{Multiplikation} \\ [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] & \text{Addition} \end{array}$$

### 11.27 Begriffe

<b>Ortsvektor</b>	Vom Ursprung zum Punkt
<b>Richtungsvektor</b>	Eine Richtung im Raum
<b>Einheitsvektor</b>	Eine Einheit in eine beliebige Richtung
<b>Linearkombination</b> <i>kollinear</i>	Ein Vektor, der ein Vielfaches eines Einheitsvektors ist.
<b>Linear Unabhängig</b> <i>komplanar</i>	$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ Vektoren sind unabhängig wenn $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$
<b>Skalar</b> <b>Rechtssystem</b>	Ist eine reelle oder komplexe Zahl Koordinatensystem aufgebaut wie die rechte Hand wobei; der Zeigfinger X-Achse ( $\vec{e}_x$ ), Mittelfinger Y-Achse ( $\vec{e}_y$ ) und Daumen Z-Achse ( $\vec{e}_z$ )

## 12 Projektive Geometrie

### 12.1 Homogener Vektor

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ Homogener 2D Vektor}$$

$$(x, y) = \left( \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right)$$

### 12.2 Punkt auf Gerade

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \vec{g} \bullet \vec{r} = 0$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{g} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$A(x, y)$  (homogenisiert  $\vec{r}$ ) liegt dann auf Geraden  $\vec{g}$

### 12.3 Schnittpunkt Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 \\ \vec{g}_1 &= \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \vec{g}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$\vec{r}$  ist der homogene Schnittpunkt  $[x_1, x_2, x_3]$

$x_3 = 0$ , dann sind die Geraden parallel, und kein Schnittpunkt möglich (division durch 0)

### 12.4 Parallelle Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 = (c_1 + c_2) \begin{bmatrix} b_1 \\ -a_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ (a_1, b_1) &= (a_2, b_2), \text{ dann sind die Geraden parallel}\end{aligned}$$

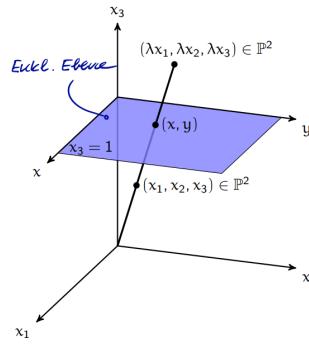
### 12.5 Unendlicher homogener Vektor

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{g}_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$$

alle idealen, uneigentlichen oder unendlich fernen Punkte  $\vec{r}$  liegen auf der Geraden  $\vec{g}_\infty$

$$\vec{g}_\infty \bullet \vec{r} = \vec{g}_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

### 12.6 Projektive Ebene (homogener Vektor)



Ein Punkt auf der euklidischen Ebene entspricht dem Wert eines dehomogenisierten Punktes  $(x, y)$ .

$x_3 = 1$  ergibt die euklidische Ebene.

$\lambda(x_1, x_2, x_3)$  sind Punkte auf einer Geraden die den Punkt  $(\frac{x_1\lambda}{x_3\lambda}, \frac{x_2\lambda}{x_3\lambda}) = (x, y)$  definieren.

### 12.7 Projektive Transformation

Abbildungen  $h : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$  mit Eigenschaften:

- $h$  ist eindeutig (bijektiv) und daher umkehrbar
- $h$  Transformationen sind geradentreu (geraden auf geraden abbilden)
- **Homogene Matrix** ist bis auf eine Konstante bestimmt ( $k\mathbf{H} = \mathbf{H}; k > 0$ )

$$\vec{r}' = h(\vec{r}) = \mathbf{H}\vec{r}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

## 12.8 Transformationen kombinieren

$$\vec{r}' = h(\vec{r}) = (h_2 \circ h_1)(\vec{r}) = h_2(h_1(\vec{r}))$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1, \vec{r}' = \mathbf{H}\vec{r} = \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_1 \vec{r}$$

$$h_1 : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2, h_2 : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$$

$h = h_2 \circ h_1$  entspricht erst  $h_2$  dann  $h_1$

## 12.9 Translation 2D

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{r} = \mathbf{T}\vec{r}$$

Verschiebung durch  $\vec{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{T}^{-1}$  entspricht  $-\vec{t}$  in  $\mathbf{T}$

## 12.10 Nullpunkt Rotation 2D

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}\vec{r}$$

Rotation mit  $\phi$ ,  $\mathbf{R}^{-1}$  entspricht sin vertauschen

## 12.11 Rotation um Punkt A

Punkt:  $A(t_x, t_y)$

1. Translation A zum Nullpunkt verschiebt ( $\mathbf{T}$ )
2. Nullpunkt Rotation 2D mit Winkel  $\Phi$
3. Translation A zurück ( $\mathbf{T}^{-1}$ )

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}_0 \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\Phi) & -\sin(\Phi) & 0 \\ \sin(\Phi) & \cos(\Phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 12.12 Spiegelung mit Gerade durch Ursprung

$$\vec{n} = (-\sin(\delta), \cos(\delta))^T$$

$$\text{HNF: } -\sin(\delta)x + \cos(\delta)y = 0$$

$$\vec{p}' = \vec{p} - 2(\vec{p} \bullet \vec{n})\vec{n}$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Wenn  $g$  geht durch Nullpunkt

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} \cos(2\delta) & \sin(2\delta) & 0 \\ \sin(2\delta) & -\cos(2\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{r}$$

## 12.13 Spiegelung mit Gerade $g$

1. gerade ins Zentrum Transformieren ( $\mathbf{T}$  errechnen)
2. Spiegelung mit Gerade durch Ursprung ( $\mathbf{S}$ )
3. zurück Transformieren ( $\mathbf{T}^{-1}$ )

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{T}$$

## 12.14 Transformation des Koordinatensystems

$$\begin{bmatrix} \cos(-\Phi) & -\sin(-\Phi) & 0 \\ \sin(-\Phi) & \cos(-\Phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation des Koordinatensystems um  $\Phi$

Bei einer Transformation des Koordinatensystems handelt es sich um eine Inverse Matrix der normalen Transformation

## 12.15 Abstand Punkt zur Gerade

$$d = ax + by + c$$

$d$ : Distanz,  $P(x, y)$ : Punkt,  $g: ax + by + c = 0$ :

## 12.16 Transformationen 2D

$$t = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, 0^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{RMC} = 2 \times 2 \text{ Matrix}$$

Euklidisch (starre Bewegung)

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Abstand zwischen zwei Punkten, alle Winkel ( $R^{-1} = R^T$ )

Ähnlichkeit

$$S = \begin{bmatrix} k \cdot \mathbf{M} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Winkel zwischen zwei Punkten, alle Winkel

Affin

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Parallelität, Verhältnis zwischen Flächeninhalt

Allgemein

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

Geraden bleiben Geraden

## 13 Transformation

### 13.1 homogene Koordinaten

jeder Punkt  $P(x, y, z)$  des Raumes  $\mathbb{R}^3$  besitzt eine 4-komponenten Vektor  $\vec{r}$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, x = \frac{x_1}{x_4}, y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_3}{x_4}$$

$$(x, y, z) = \left( \frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4} \right)$$

### 13.2 Ebene im Raum

Ebene  $\epsilon$  im Raum  $\mathbb{R}^3$

$\epsilon: ax + by + cz + d = 0$  Hessesche Normalform

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \text{ Punkt: } \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ebenengleichung:

$$\vec{w} \bullet \vec{r} = w^T \cdot r = ax + by + cz + d = 0$$

### 13.3 Prokektive Transformation

Die homogene Matrix  $\mathbf{H}$  ist nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, heisst, alle Vielfachen von  $\mathbf{H}$  sind auch gültig

$\eta : \mathbb{P}^3 \mapsto \mathbb{P}^3$  stellt eine **projektiven Transformation** dar

$$\eta(r) = \mathbf{H} \cdot r = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

### 13.4 Transformationen

$$t = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, 0^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{RMC} = 3 \times 3 \text{ Matrix}$$

**Euklidisch** (starre Bewegung)

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Abstand zwischen zwei Punkten, alle Winkel ( $R^{-1} = R^T$ )

**Ähnlichkeit**

$$S = \begin{bmatrix} k \cdot \mathbf{M} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Winkel zwischen zwei Punkten, alle Winkel

**Affin**

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Parallelität, Verhältnis zwischen Volumeninhalt

**Allgemein**

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}$$

Geraden bleiben Geraden

### 13.5 Translation

$$\mathbf{T}(\vec{t}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 13.6 Rotation

$$\mathbf{R}_z = \begin{array}{c|ccccc} \cos(\Phi_z) & -\sin(\Phi_z) & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\Phi_z) & \cos(\Phi_z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cos(\Phi_y) & 0 & \sin(\Phi_y) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\Phi_y) & 1 & \cos(\Phi_y) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Phi_x) & -\sin(\Phi_x) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\Phi_x) & \cos(\Phi_x) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

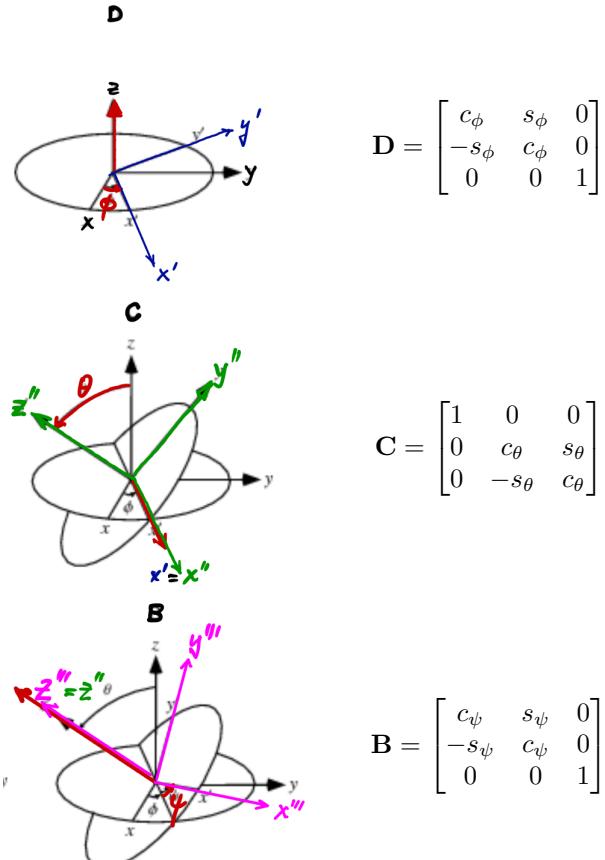
Bei Rotation um selbe Achse gilt Kommutativgesetz ( $\mathbf{R}_z(\Phi_{z,1} + \Phi_{z,2}) = \mathbf{R}_z(\Phi_{z,1})\mathbf{R}_z(\Phi_{z,2}) = \mathbf{R}_z(\Phi_{z,2})\mathbf{R}_z(\Phi_{z,1})$ )

Inverse entspricht  $\mathbf{R}^{-1}(\Phi) = \mathbf{R}(-\Phi)$ , wobei  $\cos(-\Phi) = \cos(\Phi)$

### 13.7 Rotation um beliebige Achse

- 1) Rotation um  $\phi$  um z-Achse (Matrix D)
- 2) Rotation um den Winkel  $\theta \in [0, \pi]$  (um frühere X-Achse) (Matrix C)
- 3) Rotation um den gegebenen Winkel  $\psi$  (Matrix B)

$$c_\alpha = \cos \alpha, s_\alpha = \sin \alpha, \alpha \in \phi, \theta, \psi$$



$$\mathbf{M} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{BCD}$$

Bei Rotation um eine Gerade, 1. Transformation  $\mathbf{D}$

& C Matrix (mit Winkel der Gerade), dann eigentliche Transformation mit gegebenem Winkel, dann zurücktransformiere  $C^{-1}$  &  $D^{-1}$

### 13.8 Rotation um eine Achse durch den Ursprung

$$\text{Rotation um einen Einheitsvektor } \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = (\cos \theta)I + (1 - \cos \theta) \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{bmatrix} - \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

### 13.9 Parallele Projektion

Projektion auf Ebene  $\epsilon : ax + by + cz + d = 0$   
Die Ebene ist definiert durch Normalenvektor  $\vec{n} = [a, b, c]^T$  (Ebenen Normalenvektor)

Projektionsrichtung definiert durch Normalenvektor  $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$  (Projektionsrichtung)

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{v} = \vec{x}_0 + t^*\vec{v}$$

$$t = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{av_x + bv_y + cv_z}$$

$$t^* = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\cos(\psi)}$$

$$av_x + bv_y + cv_z = \vec{v} \bullet \vec{n} = |\vec{v}| |\vec{n}| \cos(\psi) = \cos(\psi)$$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{v}, \text{ komponentenweise } \begin{bmatrix} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \\ z = z_0 + tv_z \end{bmatrix}$$

Wobei  $\vec{x}_0$  Punkt dem projizierten  $\vec{x}$  Punkt auf Ebene entspricht.  $\psi$  ist der Winkel zwischen  $\vec{n}$  und  $\vec{v}$

### 13.10 Parallelprojektionsmatrix

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{c_\psi} \begin{bmatrix} (c_\psi - av_x) & -bv_x & -cv_x & -dv_x \\ -av_y & (c_\psi - bv_y) & -cv_y & -dv_y \\ -av_z & -bv_z & (c_\psi - cv_z) & -dv_z \\ 0 & 0 & 0 & c_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos(\psi) = c_\psi$$

### 13.11 Perspektivische Projektion

Fall wenn Zentrum O im Nullpunkt

$\epsilon : ax + by + cz + d = 0$ , Ebene

Beliebigen Punkt  $A_0(x_0, y_0, z_0)$  mit Projektionspunkt  $A^*(x^*, y^*, z^*)$  in Ebene  $\epsilon$

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda y_0 \\ \lambda z_0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -\frac{d}{ax_0 + by_0 + cz_0}$$

$$(ax_0 + by_0 + cz_0) \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -dx_0 \\ -dy_0 \\ -dz_0 \\ ax_0 + by_0 + cz_0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### 13.12 Perspektivische Projektionsmatrix

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix}$$

Projektionszentrum muss dann im Zentrum liegen.

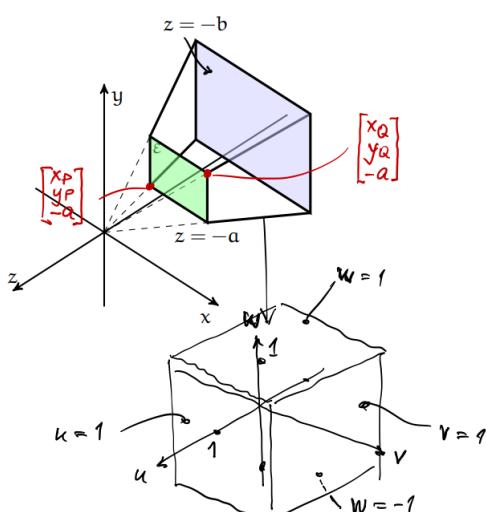
Wenn Ebene nicht mit Nullpunkt im Zentrum, dann zum Zentrum transferieren. Wichtig, die perspektivische Ebene muss transferiert werden. Bsp: x-y-Ebene hat  $\epsilon : z = 0$  dies mit der Transformation multiplizieren. Bei Zentrum der x-y-Ebene  $Z(2, 4, -3)$  entspricht  $\epsilon^* : z = 3$ , da  $d = 3$  wenn 0 Punkt verschoben:

$$[-2, -4, 3, 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ d \end{bmatrix} = 0$$

### 13.13 Sichtvolumen Clipping

Das kanonische Sichtvolumen ist ein Würfel mit  $P(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

Defür sind vorne und hinten, sowie zwei Punkte bestimmend Grösse gegebenen



$P$  links unten,  $Q$  rechts oben  
 $z$  vorne  $z = -a$ ,  $z$  hinten  $z = -b$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{2a}{x_Q - x_P} & 0 & \frac{x_Q + x_P}{x_Q - x_P} & 0 \\ 0 & \frac{2a}{y_Q - y_P} & \frac{y_Q + y_P}{y_Q - y_P} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b+a}{b-a} & -2\frac{ba}{b-a} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 14 Curves

### 14.1 Kurve in der Ebene

#### Explizite Darstellung

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$$

Kreis:

$$\text{oberer Halbkreis } \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{unterer Halbkreis } -\sqrt{r^2 - x^2}$$

#### Implizite Darstellung

$$F(x, y) = 0$$

$$\text{Kreis: } x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

#### Parameterdarstellung

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Punkte miteinander verbunden, einzeln angegeben

$$\text{Kreis: } \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{bmatrix}$$

### 14.2 Kurve im Raum

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

### 14.3 Spirale entlang des Zylinders

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ht/(2\pi) \end{bmatrix}$$

Grundriss ergibt Kreis, Höhe Linear

### 14.4 Methode unbestimmte Koeffizienten

$$P_3(x) = c_0 + c_1 x^2 + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 1$$

### 14.5 Lagrange Methode

$$l_0(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots$$

$$L_0(x) = \frac{l_0(x)}{l_0(x_0)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots}$$

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$$

$$l_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n (x - x_i)$$

$$L_k(x) = \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)}$$

### 14.6 Lineare Bézier spline

$$P(t) = (1-t)P_0 + P_1 (0 \leq t \leq 1)$$

Gewichteter Durchschnitt der Kontrollpunkte

$$P(t) = (P_1 - P_0)t + P_0$$

Polynom in  $t$

$$P(t) = [P_0, P_1] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} (0 \leq t \leq 1)$$

Matrixform

### 14.7 Quadric Bézier spline

drei Kontrollpunkte  $P_0, P_1, P_2$

$$P_0^1(t) = (1-t)P_0 + P_1$$

$$P_1^1(t) = (1-t)P_0 + P_1$$

$$P(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2$$

### 14.8 Cubic Bézier Spline

vier Kontrollpunkte  $P_0, P_1, P_2, P_3$

$$\text{Mit } P_0^1, P_1^1 \text{ und}$$

$$P_2^1(t) = (1-t)P_2 + tP_3$$

$$P_0^2(t) = (1-t)P_0^1(t) + tP_1^1(t)$$

$$P_2^2(t) = (1-t)P_1^1(t) + tP_2^1(t)$$

$$P(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 tP_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3$$

### 14.9 Bernsteinpolynome

#### 15 Appendix

##### 15.1 Radians

Winkel $\alpha^\circ$	Bogenmass	Sinus	Kosinus
0°	0	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$
180°	$\pi$	0	-1
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
360°	$2\pi$	0	1

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+\tan^2(\alpha)}$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$