

Computer Graphics Zusammenfassung

Lucien Zürcher & Melvin Werthmüller

January 7, 2019

Contents

1 Farbe	3	5 Visibilität	8
1.1 Was ist Farbe?	3	5.1 TODO	8
1.2 Farbe eines Objektes	3	6 Clipping	8
1.3 Licht besteht aus?	3	6.1 TODO	8
1.4 Das Auge	3	7 Beleuchtung & Schattierung	8
1.5 Wie sehen wir Farbe?	3	7.1 TODO	8
1.6 Wahrnehmung	3	8 Raytracing	8
1.7 Farbsysteme	3	8.1 TODO	8
1.8 Additives Farbsystem	4	9 Rendering Equation(s)	8
1.9 Subtraktives Farbsystem	4	9.1 TODO	8
1.10 Farben Konvertieren	4	10 WebGL	8
1.11 Gamma Korrektur	4	10.1 OpenGL Merkmale	8
1.12 Normfarbtafel / CIE Farbsystem	4	10.2 Grafikpipeline	8
1.13 Helligkeitswahrnehmung	4	10.3 Programmierbare Shaders	8
1.14 Nibs (Lichtdichte)	4	10.3.1 Vertex Processing / Vertex Shader	8
1.15 Mach bending	4	10.3.2 Fragment Processing / Fragment Shader	8
1.16 Farbtäuschung	4	10.4 Datenfluss	8
1.17 HD,UHD,UK	4	10.5 Attribute und Uniform Variablen mit Shaders verbinden	8
1.18 Was ist HDR?	5	10.6 Attribut Variablen und Buffer definieren	8
1.19 Begriffe	5	11 Vektoren	9
2 Halbtontechnik	5	11.1 Addition	9
2.1 Verfahren der Halbtontechnik	5	11.2 Multiplikation mit Skalar	9
2.2 Quantisierung	5	11.3 Nullvektor	9
2.3 Dithering	5	11.4 Vektorinverses	9
2.3.1 Dithermatrizen	5	11.5 Vektoren Gleichheit	9
2.3.2 Dithering bei gleich bleibender Auflösung	5	11.6 Skalarprodukt	9
2.3.3 Dispersed Dot Dithering	5	11.7 Skalarprodukt im beliebigem Koordinatensystem	9
2.3.4 Error Diffusion	5	11.8 Orthogonal	10
3 Viewing	6	11.9 Länge des Vektors	10
3.1 Planare geometrische Projektionen	6	11.10 Einheitsvektor	10
3.1.1 parallele Projektionen	6	11.11 Euklidische Distanz	10
3.1.2 perspektivische Projektionen	6	11.12 Gerade im 2/3D	10
4 Scan Konvertierung	6	11.13 Hessische Normalform	10
4.1 Linie Rastern	6	11.14 Hessische Normalform Ebene	10
4.2 Mittelpunktschema	6	11.15 Achsenabschnitt	10
4.3 Kreis Rastern	7	11.16 Projektion eines Vektors	10
4.4 Mittelpunktschema Kreis	7	11.17 Vektorprodukt	10
4.5 Regionen füllen	7	11.18 Vektorprodukt Anwendung	11
4.5.1 FloodFill	7	11.19 Spatprodukt	11
4.6 Zeichnen von gefüllten Polygonen	7	11.20 Translation 2D	11
4.6.1 Scanlinien Algorithmus	7	11.21 Skalierung 2D	11
4.6.2 Zeichnen von Dreiecken	7		
4.7 Anti-Aliasing	8		

11.22Rotation 2D	11
11.23Vektor Rechenregeln	11
11.24Rechenregel Skalarprodukt	11
11.25Vektorprodukt Rechenregeln	11
11.26Spatprodukt Rechenregeln	11
11.27Begriffe	11
12 Projektive Geometrie	11
12.1 Homogener Vektor	11
12.2 Punkt auf Gerade	11
12.3 Schnittpunkt Geraden	12
12.4 Parallele Geraden	12
12.5 Unendlicher homogener Vektor	12
12.6 Projektive Ebene (homogener Vektor) . .	12
12.7 Projektive Transformation	12
12.8 Transformationen kombinieren	12
12.9 Translation 2D	12
12.10Nullpunkt Rotation 2D	12
12.11Rotation um Punkt A	12
12.12Spiegelung mit Gerade durch Ursprung .	12
12.13Spiegelung mit Gerade g	12
12.14Transformation des Koordinatensystems	13
12.15Abstand Punkt zur Gerade	13
12.16Transformationen 2D	13
13 Transformation	13
13.1 homogene Koordinaten	13
13.2 Ebene im Raum	13
13.3 Projektive Transformation	13
13.4 Transformationen	13
13.5 Translation	13
13.6 Rotation	14
13.7 Rotation um beliebige Achse	14
13.8 Rotation um eine Achse durch den Ursprung	14
13.9 Parallele Projektion	14
13.10Parallele Projektionsmatrix	14
13.11Perspektivische Projektion	14
13.12Perspektivische Projektionmatrix	15
13.13Sichtvolumen Clipping	15
14 Curves	15
14.1 Kurvie in der Ebene	15
14.2 Kurve im Raum	15
14.3 Spirale entlang des Zylinders	15
14.4 Methode unbestimmte Koeffizienten . . .	15
14.5 Lagrange Methode	15
14.6 Lineare Bézier spline	16
14.7 Quadric Bézier spline	16
14.8 Cubic Bézier Spline	16
14.9 Bernsteinpolynome	16
15 Appendix	16
15.1 Radians	16

1 Farbe

1.1 Was ist Farbe?

- **Physikalisch**, Lichtzusammensetzung, Elektromagnetischestrahlen
- **Physiologisch**, Wahrnehmung und Interpretation

Farbe besteht aus:

- Farbton/Farbe
- Farbstich/Sättigung
- Helligkeit

1.2 Farbe eines Objektes

Ein Objekt nimmt Farbe auf und strahlt Farbe ab. Die Farbe des Objektes ist definiert durch die abgestrahlte Farbe.

- Beleuchtung (Illumination)
- Reflektion (Reflection)
- Farbsignal (Color Signal)

1.3 Licht besteht aus?

Licht besitzt verschiedene Wellenlängen, Kombinationen dieser Frequenzen ergeben eine Farbe.

- Sichtbares Licht (380mn - 780mn)
- Infrarot (780mn+)
- Ultraviolet (-380mn)

$Inm = 10\text{Å}(\text{Ångström})$

$1\text{Å} = \phi\text{Atom}$

1.4 Das Auge

Das Auge besteht aus; **Iris** (Kreisring mit radialen Muskel und Lichteinschränken), **Linse** (Fokussieren), **Pupille** (Öffnung, durch Iris kontrolliert), **Photorezeptoren** (Nehmen das Licht wahr) und **Retina** (Farb- und Lichtaufnahme am Rand des Auges)

Die Retina besteht aus $75-100 \cdot 10^6$ Stäbchen/rods (Lichtintensität) und $6-7 \cdot 10^6$ Zäpfchen/cones (Farbe). Die Fovea ist der dichteste Platz.

1.5 Wie sehen wir Farbe?

Durch die 3 Arten von Zäpfchen:

Kurz (S)	Mittel (M)	Lang (L)
Blau	Grün	Rot
440mn	530mn	560mn
1	: 5	: 10

Weiss ist eine Kombination von Wellenlängen. Es gibt verschiedene Verteilung für Weiss.

1.6 Wahrnehmung

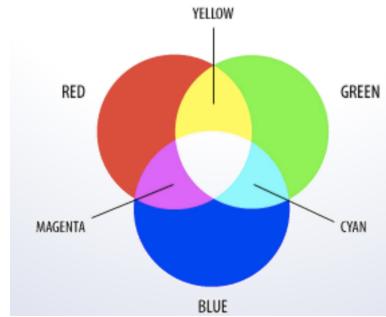
Grün 530mn wird am intensivsten wargenommen

Die Helligkeitswahrnehmung zwischen Stäbchen und Zäpfchen ist unterschiedlich

1.7 Farbsysteme

Nicht alle existierenden Farben (CIE) sind mit allen System darstellbar!

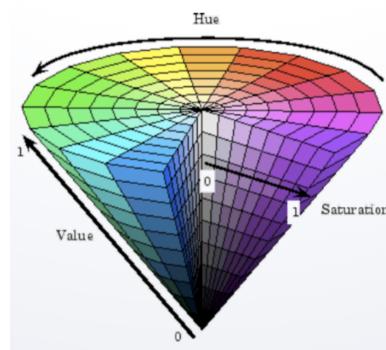
- **RGB** (Monitor, Spotlights, Pointilismus), additiv, $C = (\text{Rot}, \text{Grün}, \text{Blau})$



- **CMY** (Drucken), subtraktiv, $C = (\text{Cyan}, \text{Magenta}, \text{Yellow})$ Komplementärfarbe von RGB $(C, M, Y) = (1, 1, 1) - (R, G, B)$

- **CMYK**, CMY Mit Schwarz erweitert, $K = \min(\text{Cyan}, \text{Magenta}, \text{Yellow})$ $C = C - K, M = M - K, Y = Y - K$

- **HSV**, Farbton (Hue) / Reinheit, Sättigung (Saturation) / Intensität (Value)



- **YUV** (Alte Fernseher, Y= Helligkeit, UV = 1/4 Auflösung Farbkorrektur) $Y = 0.229 * R + 0.587G + 0.114 * B$, $U = 0.436(B - Y)/(1 - 0.114)$, $V = 0.615(R - Y)/(1 - 0.299)$

- **CIE-Lab**, absolutes Farbsystem Achsen system mit Helligkeit (L) als Y-Achse und X/Z-Achse definieren Farbunterschiede
 - a: rot – grün Achse
 - b: gelb – blau Achse

1.8 Additives Farbsystem

Farben addieren

$(1,1,1) = \text{Weiss}, (0,0,0) = \text{Schwarz}$

1.9 Subtraktives Farbsystem

Farben absorbieren / filtern

$(0,0,0) = \text{Weiss}, (1,1,1) = \text{Schwarz}$

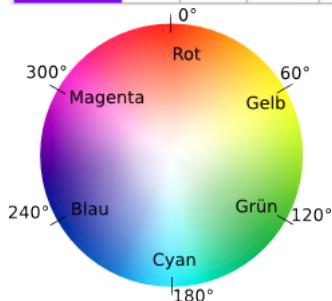
1.10 Farben Konvertieren

Zu Grau: $I = 0.229 * R + 0.587G + 0.114 * B$

$$RGB <> CMY: \begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

HSV <> RGB:

Farbe	H	S	V	R	G	B
Schwarz	–	–	0 %	0 %	0 %	0 %
Rot	0°	100 %	100 %	100 %	0 %	0 %
Gelb	60°	100 %	100 %	100 %	100 %	0 %
Braun	24,3°	75 %	36,1 %	36 %	20 %	9 %
Weiß	–	0 %	100 %	100 %	100 %	100 %
Grün	120°	100 %	100 %	0 %	100 %	0 %
Dunkelgrün	120°	100 %	50 %	0 %	50 %	0 %
Cyan	180°	100 %	100 %	0 %	100 %	100 %
Blau	240°	100 %	100 %	0 %	0 %	100 %
Magenta	300°	100 %	100 %	100 %	0 %	100 %
Orange	30°	100 %	100 %	100 %	50 %	0 %
Violett	270°	100 %	100 %	50 %	0 %	100 %



1.11 Gamma Korrektur

Erreichen von gleichmässiger Verteilung der Helligkeit / Kontrast. Das Empfinden der Helligkeit ist nicht linear.

Korrektur der Helligkeit des Bildes mit Gamma Wert. Wichtig für Bildschirme einstellen. Beim einstellen der Monitore Grauwerte mit echten Werten vergleichen (Gamma Test Pattern). 50% schwarz und 50% weiss einer Fläche (z.B. Punkte) sollte gleich sein wie 50% grau

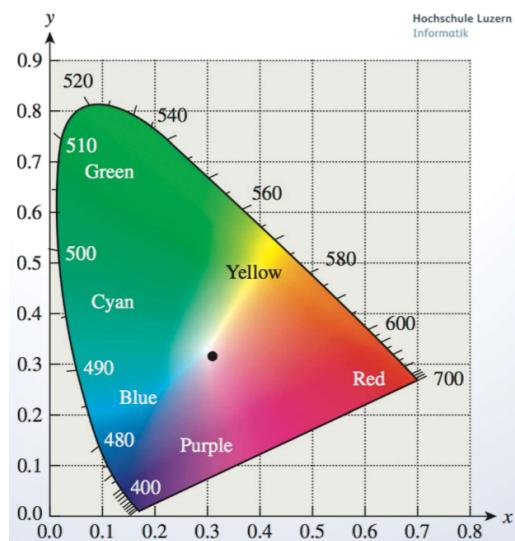
1.12 Normfarbtafel / CIE Farbsystem

- kann alle Farben darstellen
- Spektralfarben = Farbe am Rand mit Wellenlänge

- Farben zwischen zweie Farben mischbar

- Komplementärfarben gehen durch Weiss

- Achtung: Keine Spektralfarbe am Rande zwischen UV und Infrarot



1.13 Helligkeitswahrnehmung

Helligkeit wird logarithmisch wahrgenommen, Webers Law

$$\frac{\Delta I}{I} = C$$

$$\log(I + \Delta I) - \log(I) = \text{Const}$$

Helligkeitsunterschied im dunkeln nehmen wir stärker wahr

1.14 Nibs (Lichtdichte)

Gibt Helligkeitsdichte für Auge an. 10nits werden stärker wargenommen denn 100nits. Heisst, weniger Licht wird stärker wargenommen.

1.15 Mach bending

Optische Illusion, bei zwei verschiedenen Grauwerten nebeneinander unterschieden sich diese vermeidlich stärker.

1.16 Farbtäuschung

Farbe wird abhängig durch Umgebung anders wahrgenommen (Dunkler, Heller). Optische Illusionen

1.17 HD,UHD,UK

Unterscheiden sich durch Pixelauflösung.

1.18 Was ist HDR?

High Dynamic Range, speichert zusätzlichen Wert um Helligkeitsunterschiede besser unterscheiden zu können (RGB-Pixelwerte proportional zum Licht). Detailreichere dunkel und helle Spots, weniger Verlust durch Farben mit weniger Helligkeitsunterschieden.

1.19 Begriffe

Natürliches Licht	Gemisch aus verschiedenen Lichtwellen / Frequenzen
Spektralfarben	reine Farbfrequenz; Alle Farben am Rand des CIE-Farbsystems
Spektrum	Alle Frequenzen und deren Verteilung
Spektralverteilung	Charakterisiert die Farbe, definiert durch Frequenzen (Bsp. Verschiedenes Weiss)
Komplementärfarben	Addieren ergeben Grau, gegenüberliegende Farben im CIE-Farbsystem durch Weiss

2 Halbtontechnik

2.1 Verfahren der Halbtontechnik

Da nur Schwarz und Weiss gedruckt werden kann, werden die verschiedenen Stufen durch Intensitätsstufen dargestellt. Dafür gibt es drei Verfahren:

- Quantisierung
- Dithering
- Error Diffusion

2.2 Quantisierung

Höhere Auflösung auf tiefere Auflösung durch Runden der Pixelfarbwerte auf verfügbare Farben.

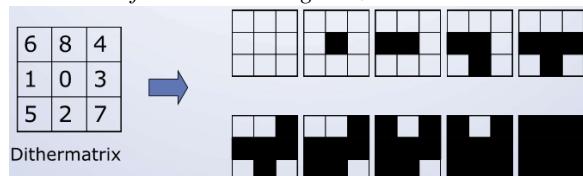
Bsp. 16Bit -> 8Bit (Runden der Werte)

2.3 Dithering

Wenn der Drucker eine grössere Auflösung besitzt, jedoch weniger Farbstufen kann Dithering verfahren verwendet werden. -> Farben mit höherer Auflösung durch kleinere Punkte simulieren.

2.3.1 Dithermatrizen

Kann als Matrix dargestellt werden. Matrix gibt an, auf welcher Stufe welche Pixel gesetzt werden



Es gibt zwei Regeln; Gesetzter **Pixel bleibt gesetzt** und **Strukturen** in der Ditheringmatrix vermeiden. Es soll möglichst ein Kreis approximiert werden.

2.3.2 Dithering bei gleich bleibender Auflösung

Handhabung, wenn die Bildgrösse/Auflösung gleich bleibt

- Clustered dot dithering: Mittelwert von n x n Region mit Ditheringmatrix ersetzen.
- Dispersed Dot Dithering

2.3.3 Dispersed Dot Dithering

Bayer Matrizen können hierfür verwendet werden, wodurch die Methode Bayer Dithering genannt wird.

2 x 2 Bayer Matrix

0	2
3	1

4 x 4 Bayer Matrix

0	8	2	10
12	4	14	6
3	11	1	9
15	7	13	5

$$k = \frac{W_{max}}{n*n+1}$$

W_{max} : Anzahl Werte des Pixels (256 bei 8Bit)

n : Grösse der Matrix (2 x 2 => $n = 2$)

k : Faktor für Umrechnung

$$I_{new} = \frac{I_{old}}{k}$$

Für jeden Pixel den neuen Wert ausrechnen, danach mit Bayermatrix den Wert vergleichen. Pixel setzen wenn $I(x, y)_{new} > D_{ij}$

$$i = x \text{ modulo } n$$

$$j = y \text{ modulo } n$$

2.3.4 Error Diffusion

Anstatt Kreise, Punkte verschiedener Dichte anordnen. Das Bild wird dabei sequenziell durchlaufen; links -> rechts, oben -> unten

Error Diffusion verteilt den Fehler auf die umliegenden Pixel (zu hell -> dunkler machen / zu dunkel -> heller machen)

X	7/16
1/16	5/16
3/16	

Gewichtungsmatrix

Beispiel:

X	191	140	113
244	221	105	100

$$191 - 255 = -64, \text{ da Pixel Schwarz (255), Fehler: } -64$$

X	X	140 + (7/16 * -64)	113
244 + (1/16 * -64)	221 + (5/16 * -64)	105 + (3/16 * -64)	100

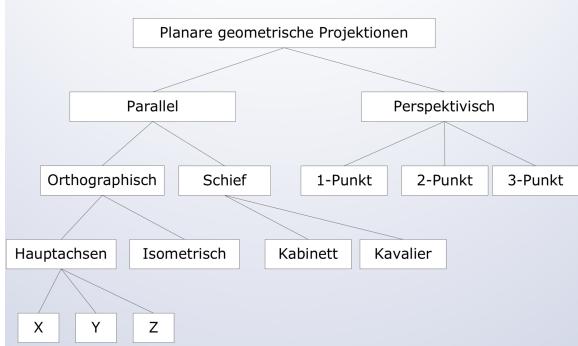
Wenn Wert > 128 = 255, ansonsten Wert <= 128 = 0

3 Viewing

von 3D in 2D abbilden

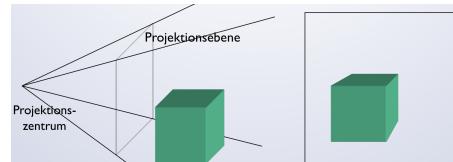
3.1 Planare geometrische Projektionen

Bild auf eine Ebene projizieren



3.1.2 perspektivische Projektionen

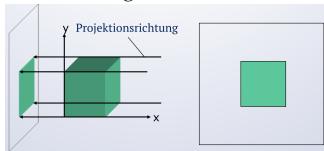
- Simuliert Kamera oder Auge
- Spezifiziert durch Projektionszentrum und Projektionsebene
- Geraden bleiben erhalten
- Parallelen schneiden sich in einem Punkt (Fluchtpunkt)
- Objektgröße nimmt proportional zum Abstand vom Projektionszentrum ab



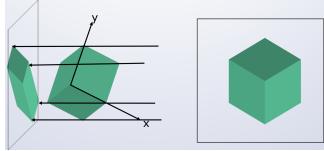
3.1.1 parallele Projektionen

- Geraden und Parallelen bleiben erhalten
- konstante Verkürzung in eine Richtung
- keine Winkeltreue

Orthographische Projektion von einer Seite / rechtwinklig



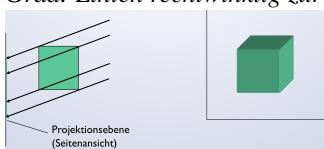
Isometrische Projektion Orthographische auf die Ebene



Kavaliereprojektion Parallelprojektion mit 45 Grad. Linien rechtwinklig zur Ebene haben natürliche Länge



Kabinettsprojektion Parallelprojektion mit 63.4 Grad. Linien rechtwinklig zur Ebene haben halbe Länge



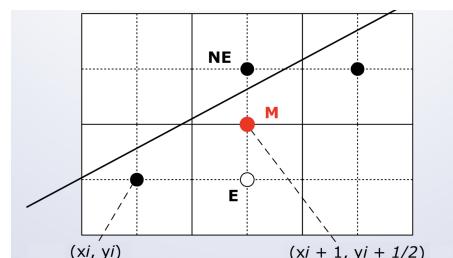
4 Scan Konvertierung

4.1 Linie Rastern

Eine Linie von (x_0, y_0) nach (x_1, y_1) rastern. Da in Pixel konvertiert werden muss. Methoden:

- Brute Force; über jeden Pixel und runden
- Brute Force inkrementell (DDA = Digital Differential Analyzer); $y_{i+1} = m * x_{i+1} + B = y_i + m$, Nachteil Gleitkommazahlen und Runden (aufwändig)
- Mittelpunktschema; Nächsten Punkt wird Kalkuliert durch if/ else

4.2 Mittelpunktschema



Ist eine inkrementelle methode zum Rastern. Mittelpunkt wird betrachtet um nächsten Punkt zu finden. $(M = (x_i + 1, y_i + \frac{1}{2}))$, $E = (x_i + 1, y_i)$, $NE = (x_i + 1, y_i + 1)$

Initialisierung:

$$\begin{aligned} D_x &= x_1 - x_0; \\ D_y &= y_1 - y_0; \\ D_E &= 2 * D_y; \\ D_{NE} &= 2 * (D_y - D_x); \\ d &= 2 * D_y - D_x; \\ y &= y_0 \end{aligned}$$

Wegen 1/2 alles mal 2, damit gerade Zahlen

Für jeden nächsten d Wert, wenn $d \leq 0$, dann $d = d + D_{NE}$ ansonsten $d = d + D_{NE}$ und y inkrementieren. Jeweils den Punkt $P(x, y)$ zeichnen. x jedesmal inkrementieren.

Berechnung:

```
WritePixel(x0, y0)
for x = x0+1 to x1 do
    if d <= 0 then
        d = d + DE;
    else
        d = d + DNE;
        y = y + 1;
    end
    WritePixel(x, y);
end
```

4.3 Kreis Rastern

Selbe Methode wie bei den Linien kann für Kreise angewendet werden.

4.4 Mittelpunktschema Kreis

Funktion für Kreis: $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$

```
x = 0
y = R
d = 1 - R
DE = 2 * x + 3
DNE = 2 * (x - y)d + 5
```

Für jeden nächsten d Wert wiederholen bis $y > x$, wenn $d < 0$, dann $d = d + D_E$ ansonsten $d = d + D_{NE}$ und y dekrementieren. Jeweils den Punkt $P(x, y)$ zeichnen. x jedesmal inkrementieren.

```
WritePixel(x, y);
while y > x do
    if d < 0 then
        d = d + 2*x + 3;
    else
        d = d + 2*(x-y) + 5;
        y = y - 1;
    end
    x = x + 1;
    WritePixel(x, y);
end
```

4.5 Regionen füllen

Entweder durch 4-er oder 8-er Zusammenhang definiert



4-er Zusammenhang



8-er Zusammenhang

4.5.1 FloodFill

Füllen durch selben abfrage ob selbe Farbe (Photoshop Zauberstab)

```
proc FloodFill( int x, int y,
Color oldColor, Color newColor)
    if ReadPixel(x,y) == oldColor then
        WritePixel(x,y,newColor);
        FloodFill(x, y-1, oldColor, newColor);
        FloodFill(x-1,y, oldColor, newColor);
        FloodFill(x, y+1, oldColor, newColor);
        FloodFill(x+1, y, oldColor, newColor);
    end
end
```

4.6 Zeichnen von gefüllten Polygonen

4.6.1 Scanlinien Algorithmus

- Zeilenweise färben (Spans entlang der y Koordinate
-> Scanlinien)
- Kantentabelle (edgetable ET)
sortierte Kanten (Linien) des Polygon nach min y
(innerhalb davon nach x)
- Tabelle aktiver Kanten (AET)
Momentane Kanten für Scanlinie (sortiert nach x
asc) zum Zeichnen vom einer Kante zur nächsten
(immer zwei)

Erzeuge ET

```
Initialisiere AET = empty
y=0
repeat
    Addiere alle Kanten ET(y) zu AET
    Sortiere AET nach x
    Zeichne Spans
    y=y+1
    Entferne Kanten mit ymax = y aus AET
    Aktualisiere den x Wert aller Kanten in AET
until AET == empty and ET == empty
```

4.6.2 Zeichnen von Dreiecken

Brute Force: Alle Pixel probieren, ob im Dreieck

- Baryzentrische Koordinaten
 $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$
 $\alpha + \beta + \gamma = 1$
Wenn Werte zwischen 0 und 1, dann ist Punkt P innerhalb von ABC. Wert einer Koordinate entspricht dem Verhältnis der Fläche eines Teildreiecks mit Ecke P zur Fläche von ABC
- Unterteilung in 3 Geraden und dann auf der richtigen Seite aller Geraden

4.7 Anti-Aliasing

Treppenmuster vermeiden

- Prefiltering -> Farbintensität proportional zur Fläche
- Supersampling -> Bild mit höherer Auflösung berechnen und Farbmittelwerte als Übergänge zeichnen

5 Visibilität

5.1 TODO

6 Clipping

6.1 TODO

7 Beleuchtung & Schattierung

7.1 TODO

8 Raytracing

8.1 TODO

9 Rendering Equation(s)

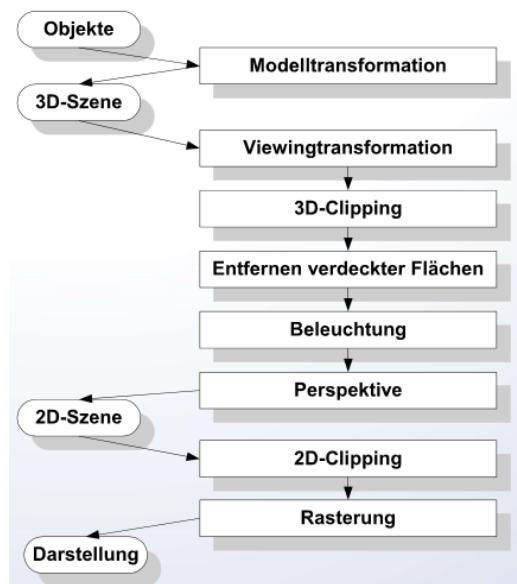
9.1 TODO

10 WebGL

10.1 OpenGL Merkmale

- Low Level Graphics API
- Verschiedene Plattformen
- 1.0/2.0 Fixe Funktionspipeline
- Vorlage für WebGL

10.2 Grafikpipeline



10.3 Programmierbare Shaders

Shaders werden für die Berechnung der zu zeichnenden Objekte verwendet. Das Programm wird direkt auf der Grafikkarte ausgeführt.

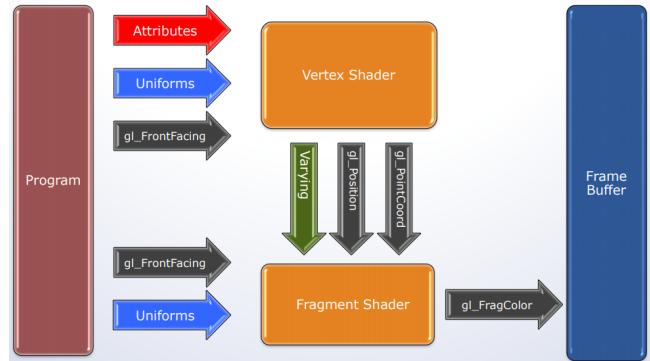
10.3.1 Vertex Processing / Vertex Shader

Berechnen der **Positionen** der Vertexe (Punkte) und Werte für den folgenden Fragmentshader.

10.3.2 Fragment Processing / Fragment Shader

Berechnet die **Farbe** der einzelnen Pixel.

10.4 Datenfluss



10.5 Attribute und Uniform Variablen mit Shaders verbinden

1. Attribute

```
ctx.aVertexPositionId =
gl.getAttribLocation(ctx.shaderProgram,
"aVertexPosition")
```

2. Uniform

```
ctx.uColorId =
gl.getUniformLocation(ctx.shaderProgram,
"uColor"))
```

10.6 Attribut Variablen und Buffer definieren

Erzeugen

1. Buffer erzeugen

```
var buffer = gl.createBuffer()
```

2. Array Buffer auf Buffer setzen

```
gl.bindBuffer(gl.ARRAY_BUFFER,
buffer)
```

3. Daten füllen

```
glBufferData(gl.ARRAY_BUFFER,
new Float32Array(vertices),
gl.STATIC_DRAW)
```

Zeichnen

1. Buffer binden

2. Attribut und/oder uniform setzen

```
gl.vertexAttribPointer(index,
    size, type, normalized, stride,
    offset)
z.B. gl.vertexAttribPointer(ctx.aVertexPositionId,
    2, gl.FLOAT, false, 0, 0)
```

3. Attribut als Array setzen

```
gl.enableVertexAttribArray(index)
```

4. Zeichnen

```
gl.drawArrays(mode, first, count)
```

11 Vektoren

- Skalarprodukt
- Matrixprodukt

11.1 Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

11.2 Multiplikation mit Skalar

$$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

$\lambda \in \text{Skalar}$

11.3 Nullvektor

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

11.4 Vektorinverses

$$-\vec{a} = - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix}$$

Vektor mit negativen Komponenten

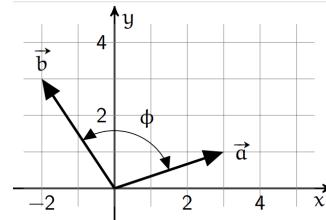
11.5 Vektoren Gleichheit

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{b}$$

Vektoren sind gleich, wenn Komponenten gleich

11.6 Skalarprodukt

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \phi$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$$

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

11.7 Skalarprodukt im beliebigem Koordinatensystem

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = [a_1 a_2 a_3]^T$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 = [b_1 b_2 b_3]^T$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = [a_1 a_2 a_3] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{a}^T \mathbf{G} \mathbf{b}$$

Matrix **G** wird **metrisch Tensor** genannt

11.8 Orthogonal

$$\vec{e}_x \bullet \vec{e}_y = 0$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Senkrecht zueinander, wenn Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren 0 ergibt.

11.9 Länge des Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

11.10 Einheitsvektor

$$e_v = \frac{1}{\|v\|} \bullet v = \frac{1}{\sqrt{v \cdot v}} \bullet v$$

$$(i = e_1, j = e_2, k = e_3)$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_x &= [1, 0, 0]^T \\ \vec{e}_y &= [0, 1, 0]^T \\ \vec{e}_z &= [0, 0, 1]^T\end{aligned}$$

11.11 Euklidische Distanz

$$\bar{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$

11.12 Gerade im 2/3D

- Punkt-Punktform mit Vektoren 2/3D

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_1 - \vec{r}_0), t \in \mathbb{R}$$

\vec{r}_1 : Punkt, \vec{r}_2 : Punkt

- Punkt-Richtungsform mit Vektoren 2/3D

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{r}_1, t \in \mathbb{R}$$

\vec{r}_0 : Punkt, \vec{r}_1 : Richtungsvektor

- Achsenabschnitt-Steigungsform

$$y = mx + b$$

b: Achsenabschnitt, m: Steigung

- Punkt-Richtungsform

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

(x_0, y_0): Punkt, m: Steigung

- Allgemeine Geradengleichung

$$ax + by + c = 0$$

a, b, c $\in \mathbb{R}$

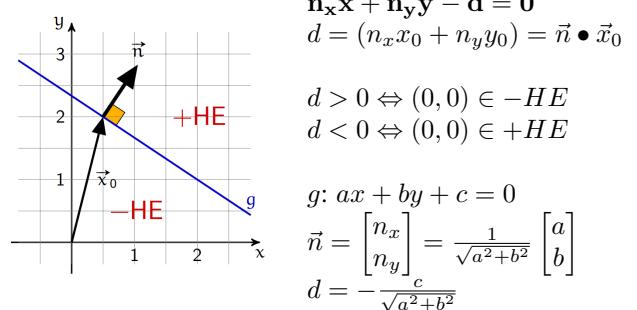
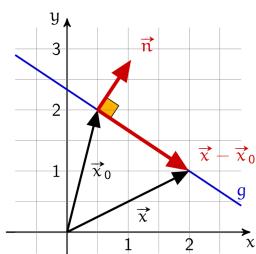
11.13 Hessische Normalform

Vektorielle Schreibweise der Hessischen Normalform

$$\begin{aligned}\vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{x}_0) &= 0 \\ \text{da } \vec{n} \perp (\vec{x} - \vec{x}_0) \\ \Rightarrow n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) &= 0 \\ n_x x + n_y y - (n_x x_0 + n_y y_0) &= 0\end{aligned}$$

Abstand vom Ursprung: d
 $d = (n_x x_0 + n_y y_0) = \vec{n} \bullet \vec{x}_0$

\vec{n} muss normalisiert sein:
 $|\vec{n}| = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \bullet \vec{n}$

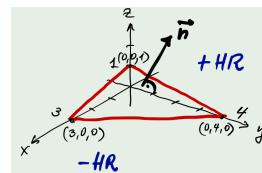


11.14 Hessische Normalform Ebene

$$\epsilon : ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{aligned}n_x x + n_y y + n_z z - D &= 0; \text{ HNF der Ebene } \epsilon \in \mathbb{R}^3 \\ \vec{n} &= \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ D &= -\frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\end{aligned}$$

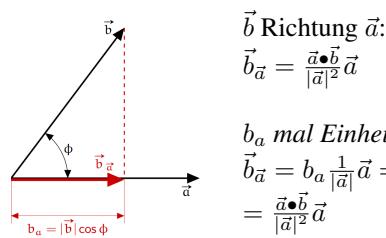
11.15 Achsenabschnitt



Gegeben sind 3 Punkte $p_x = x$, $p_y = y$, $p_z = z$ die ergeben eine Ebenegleichung:

$$\frac{x}{p_x} + \frac{y}{p_y} + \frac{z}{p_z} - 1 = 0$$

11.16 Projektion eines Vektors



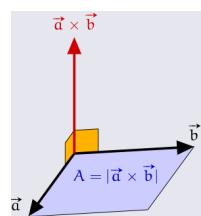
\vec{b} Richtung \vec{a} :

$$\vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

\vec{b}_a mal Einheitsvektor \vec{a}

$$\begin{aligned}\vec{b}_{\vec{a}} &= b_a \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \\ &= \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}\end{aligned}$$

11.17 Vektorprodukt



$\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf beiden Vektoren

\vec{a}, \vec{b} und $\vec{a} \times \vec{b}$ sind ein Rechtssystem

$\vec{a} \times \vec{b}$ entspricht der Fläche des aufgespannten Parallelogramms (A):

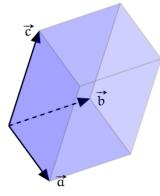
$$\begin{aligned}A &= \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3\end{aligned}$$

Regel von Sarrus

11.18 Vektorprodukt Anwendung

- **Lorentz-Kraft** $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$
 \vec{v} : Geschwindigkeit, B : Magnetfeld, q : Ladung
- **Geschwindigkeit** $\vec{v} = q(\vec{w} \times \vec{x})$
 \vec{x} : Punkt, w : Winkelgeschwindigkeit, \vec{w} : Drehachse
- **Drehmoment** $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
 \vec{F} : Kraft, \vec{r} : Punkt / Koordinatenursprung
- **Normalvektor** $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$
 \vec{a} und \vec{b} liegen auf der Ebene.
- **Kollinearität** kollinear (d.h. linear abhängig) wenn Vektorprodukt verschwindet

11.19 Spatprodukt



Spatprodukt $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$

Ist der Skalar der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c})$$

Spatprodukt entspricht Volumen wenn in einem Rechtsystem, dann: $V_{Spat} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$

$$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Komplanar (linear abhängig) wenn $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

11.20 Translation 2D

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{t} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + t_1 \\ x_2 + t_2 \end{bmatrix}$$

11.21 Skalierung 2D

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} \vec{s}_x x \\ \vec{s}_y y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

11.22 Rotation 2D

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{R} \vec{x}$$

Inverse Matrix: $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$

11.23 Vektor Rechenregeln

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	Kommutativgesetz
$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$	Assoziativgesetz
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	Existenz Neutralelement $\vec{0}$
$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$	Existenz Inverses $-\vec{a}$
$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$	
$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$	
$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$	
$1\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \vec{a} = \vec{a}$	

11.24 Rechenregel Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{a} \bullet \vec{b} &= \vec{b} \bullet \vec{a} \\ \vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c} \\ \lambda(\vec{a} \bullet \vec{b}) &= (\lambda\vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (\lambda\vec{b}) \end{aligned}$$

11.25 Vektorprodukt Rechenregeln

$$\begin{array}{l|l} \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} & \text{Anti-Kommutativgesetz} \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} & \text{Distributivgesetz} \\ \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) & \end{array}$$

11.26 Spatprodukt Rechenregeln

$$\begin{array}{l|l} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] & \text{zwei Vekoren vertauschen entspricht Vorzeichenwechsel} \\ [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] & \text{Zyklisches Vertauschen keine Änderung} \\ [\lambda\vec{a}, \mu\vec{b}, \nu\vec{c}] = \lambda\mu\nu[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] & \text{Multiplikation} \\ [\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] & \text{Addition} \end{array}$$

11.27 Begriffe

Ortsvektor	Vom Ursprung zum Punkt
Richtungsvektor	Eine Richtung im Raum
Einheitsvektor	Eine Einheit in eine beliebige Richtung
Linearkombination	Ein Vektor, der ein Vielfaches eines Einheitsvektors ist.
<i>kollinear</i>	
Linear Unabhängig	Vektoren sind unabhängig wenn
<i>komplanar</i>	$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$
Skalar	Ist ein reelle oder komplexe Zahl
Rechtssystem	Koordinatensystem aufgebaut wie die rechte Hand wobei; der Zeigfinger X-Achse (\vec{e}_x), Mittelfinger Y-Achse (\vec{e}_y) und Daumen Z-Achse (\vec{e}_z)

12 Projektive Geometrie

12.1 Homogener Vektor

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ Homogener 2D Vektor}$$

$$(x, y) = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right)$$

12.2 Punkt auf Gerade

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \vec{g} \bullet \vec{r} = 0$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{g} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$A(x, y)$ (homogenisiert \vec{r}) liegt dann auf Gerade \vec{g}

12.3 Schnittpunkt Geraden

$$\vec{r} = \vec{g}_1 \times \vec{g}_2$$

$$\vec{g}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \vec{g}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

\vec{r} ist der homogene Schnittpunkt $[x_1, x_2, x_3]$

$x_3 = 0$, dann sind die Geraden parallel, und kein Schnittpunkt möglich (division durch 0)

12.4 Parallelle Geraden

$$\vec{r} = \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 = (c_1 + c_2) \begin{bmatrix} b_1 \\ -a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$, dann sind die Geraden parallel

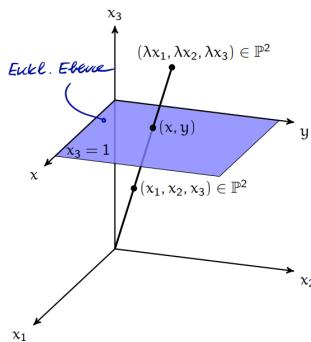
12.5 Unendlicher homogener Vektor

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{g}_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$$

alle idealen, uneigentlichen oder unendlich fernen Punkte \vec{r} liegen auf der Gerade \vec{g}_∞

$$\vec{g}_\infty \bullet \vec{r} = \vec{g}_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

12.6 Projektive Ebene (homogener Vektor)



Ein Punkt auf der euklidischen Ebene entspricht dem Wert eines dehomogenisierten Punktes (x, y) .

$x_3 = 1$ ergibt die euklidische Ebene.

$\lambda(x_1, x_2, x_3)$ sind Punkte auf einer Geraden die den Punkt $(\frac{x_1\lambda}{x_3\lambda}, \frac{x_2\lambda}{x_3\lambda}) = (x, y)$ definieren.

12.7 Projektive Transformation

Abbildungen $h : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$ mit Eigenschaften:

- h ist eindeutig (bijektiv) und daher umkehrbar
- h Transformationen sind geradentreu (geraden auf geraden abbilden)
- **Homogene Matrix** ist bis auf eine Konstante bestimmt ($k\mathbf{H} = \mathbf{H}; k > 0$)

$$\vec{r}' = h(\vec{r}) = \mathbf{H}\vec{r}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

12.8 Transformationen kombinieren

$$\vec{r}' = h(\vec{r}) = (h_2 \circ h_1)(\vec{r}) = h_2(h_1(\vec{r}))$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1, \vec{r}' = \mathbf{H}\vec{r} = \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_1 \vec{r}$$

$$h_1 : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2, h_2 : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$$

$h = h_2 \circ h_1$ entspricht erst h_2 dann h_1

12.9 Translation 2D

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{r} = \mathbf{T}\vec{r}$$

Verschiebung durch $\vec{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$, \mathbf{T}^{-1} entspricht $-\vec{t}$ in \mathbf{T}

12.10 Nullpunkt Rotation 2D

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{r} = \mathbf{R}\vec{r}$$

Rotation mit ϕ , \mathbf{R}^{-1} entspricht \sin vertauschen

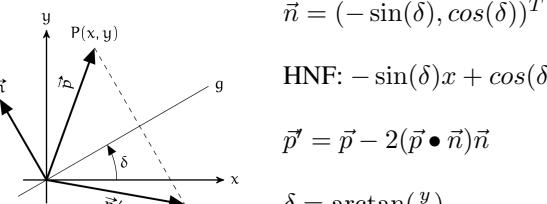
12.11 Rotation um Punkt A

Punkt: $A(t_x, t_y)$

1. Translation A zum Nullpunkt verschiebt (\mathbf{T})
2. Nullpunkt Rotation 2D mit Winkel Φ
3. Translation A zurück (\mathbf{T}^{-1})

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}_0 \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\Phi) & -\sin(\Phi) & 0 \\ \sin(\Phi) & \cos(\Phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

12.12 Spiegelung mit Gerade durch Ursprung



$$\vec{n} = (-\sin(\delta), \cos(\delta))^T$$

$$\text{HNF: } -\sin(\delta)x + \cos(\delta)y = 0$$

$$\vec{p}' = \vec{p} - 2(\vec{p} \bullet \vec{n})\vec{n}$$

$$\delta = \arctan(\frac{y}{x})$$

Wenn g geht durch Nullpunkt

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} \cos(2\delta) & \sin(2\delta) & 0 \\ \sin(2\delta) & -\cos(2\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{r}$$

12.13 Spiegelung mit Gerade g

1. gerade ins Zentrum Transformieren (\mathbf{T} errechnen)
2. Spiegelung mit Gerade durch Ursprung (\mathbf{S})
3. zurück Transformieren (\mathbf{T}^{-1})

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{T}$$

12.14 Transformation des Koordinatensystems

$$\begin{bmatrix} \cos(-\Phi) & -\sin(-\Phi) & 0 \\ \sin(-\Phi) & \cos(-\Phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation des Koordinatensystems um Φ

Bei einer Transformation des Koordinatensystems handelt es sich um eine Inverse Matrix der normalen Transformation

12.15 Abstand Punkt zur Gerade

$$d = ax + by + c$$

d : Distanz, $P(x, y)$: Punkt, g : $ax + by + c = 0$:

12.16 Transformationen 2D

$$t = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, 0^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{RMC} = 2 \times 2 \text{ Matrix}$$

Euklidisch (starre Bewegung)

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Abstand zwischen zwei Punkten, alle Winkel
($R^{-1} = R^T$)

Ähnlichkeit

$$S = \begin{bmatrix} k \cdot \mathbf{M} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Winkel zwischen zwei Punkten, alle Winkel

Affin

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Parallelität, Verhältnis zwischen Flächeninhalten

Allgemein

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

Geraden bleiben Geraden

13 Transformation

13.1 homogene Koordinaten

jeder Punkt $P(x, y, z)$ des Raumes \mathbb{R}^3 besitzt eine 4-komponenten Vektor \vec{r}

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, x = \frac{x_1}{x_4}, y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_3}{x_4}$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4} \right)$$

13.2 Ebene im Raum

Ebene ϵ im Raum \mathbb{R}^3

$\epsilon : ax + by + cz + d = 0$ Hessische Normalform

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \text{Punkt: } \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ebenengleichung:

$$\vec{w} \bullet \vec{r} = w^T \cdot r = ax + by + cz + d = 0$$

13.3 Proektive Transformation

Die homogene Matrix \mathbf{H} ist nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, heisst, alle Vielfachen von \mathbf{H} sind auch gültig

$\eta : \mathbb{P}^3 \mapsto \mathbb{P}^3$ stellt eine **projektiven Transformation** dar

$$\eta(r) = \mathbf{H} \cdot r = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

13.4 Transformationen

$$t = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, 0^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{RMC} = 3 \times 3 \text{ Matrix}$$

Euklidisch (starre Bewegung)

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Abstand zwischen zwei Punkten, alle Winkel
($R^{-1} = R^T$)

Ähnlichkeit

$$S = \begin{bmatrix} k \cdot \mathbf{M} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Winkel zwischen zwei Punkten, alle Winkel

Affin

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Parallelität, Verhältnis zwischen Volumeninhalt

Allgemein

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}$$

Geraden bleiben Geraden

13.5 Translation

$$\mathbf{T}(\vec{t}) = \begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 1 & 0 & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

13.6 Rotation

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos(\Phi_z) & -\sin(\Phi_z) & 0 & 0 \\ \sin(\Phi_z) & \cos(\Phi_z) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos(\Phi_y) & 0 & \sin(\Phi_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\Phi_y) & 1 & \cos(\Phi_y) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Phi_x) & -\sin(\Phi_x) & 0 \\ 0 & \sin(\Phi_x) & \cos(\Phi_x) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

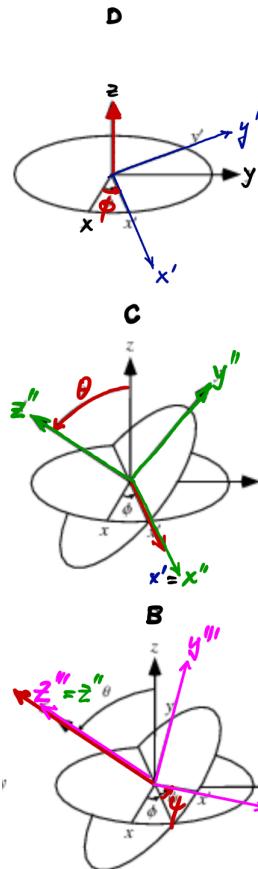
Bei Rotation um selbe Achse gilt Kommutativgesetz ($\mathbf{R}_z(\Phi_{z,1} + \Phi_{z,2}) = \mathbf{R}_z(\Phi_{z,1})\mathbf{R}_z(\Phi_{z,2}) = \mathbf{R}_z(\Phi_{z,2})\mathbf{R}_z(\Phi_{z,1})$)

Inverse entspricht $\mathbf{R}^{-1}(\Phi) = \mathbf{R}(-\Phi)$, wobei $\cos(-\Phi) = \cos(\Phi)$

13.7 Rotation um beliebige Achse

- 1) Rotation um ϕ um z-Achse (Matrix D)
- 2) Rotation um den Winkel $\theta \in [0, \pi]$ (um frühere X-Achse) (Matrix C)
- 3) Rotation um den gegebenen Winkel ψ (Matrix B)

$$c_\alpha = \cos \alpha, s_\alpha = \sin \alpha, \alpha \in \phi, \theta, \psi$$



$$\mathbf{M} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{BCD}$$

Bei Rotation um eine Gerade, 1. Transformation D

& C Matrix (mit Winkel der Gerade), dann eigentliche Transformation mit gegebenem Winkel, dann zurücktransformiere C⁻¹ & D⁻¹

13.8 Rotation um eine Achse durch den Ursprung

$$\text{Rotation um einen Einheitsvektor } \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = (\cos \theta)I + (1 - \cos \theta) \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{bmatrix} - \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

13.9 Parallelprojektion

Projektion auf Ebene $\epsilon : ax + by + cz + d = 0$

Die Ebene ist definiert durch Normalvektor $\vec{n} = [a, b, c]^T$ (Ebenen Normalenvektor)

Projektionsrichtung definiert durch Normalenvektor $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$ (Projektionsrichtung)

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{v} = \vec{x}_0 + t^*\vec{v}$$

$$t = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{av_x + bv_y + cv_z}$$

$$t^* = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\cos(\psi)}$$

$$av_x + bv_y + cv_z = \vec{v} \bullet \vec{n} = |\vec{v}| |\vec{n}| \cos(\psi) = \cos(\psi)$$

$$\begin{bmatrix} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \\ z = z_0 + tv_z \end{bmatrix}$$

Wobei \vec{x}_0 Punkt dem projizierten \vec{x} Punkt auf Ebene entspricht. ψ ist der Winkel zwischen \vec{n} und \vec{v}

13.10 Parallele Projektionsmatrix

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & s_\theta \\ 0 & -s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (c_\psi - av_x) & -bv_x & -cv_x & -dv_x \\ -av_y & (c_\psi - bv_y) & -cv_y & -dv_y \\ -av_z & -bv_z & (c_\psi - cv_z) & -dv_z \\ 0 & 0 & 0 & c_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos(\psi) = c_\psi$$

13.11 Perspektivische Projektion

Fall wenn Zentrum O im Nullpunkt

$$\epsilon : ax + by + cz + d = 0, \text{ Ebene}$$

Beliebigen Punkt $A_0(x_0, y_0, z_0)$ mit Projektionspunkt $A^*(x^*, y^*, z^*)$ in Ebene ϵ

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda y_0 \\ \lambda z_0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -\frac{d}{ax_0 + by_0 + cz_0}$$

$$(ax_0 + by_0 + cz_0) \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -dx_0 \\ -dy_0 \\ -dz_0 \\ ax_0 + by_0 + cz_0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

13.12 Perspektivische Projektionmatrix

$$H = \begin{bmatrix} -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix}$$

Projektionszentrum muss dann im zentrum liegen.

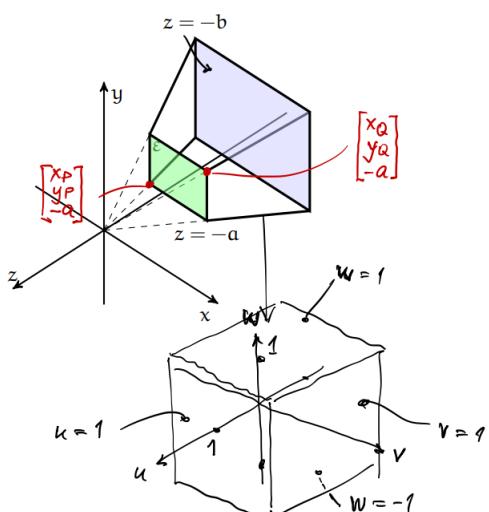
Wenn Ebene nicht mit Nullpunkt im Zentrum, dann zum Zentrum transferieren. Wichtig, die perspektivische Ebene muss transferiert werden. Bsp: x-y-Ebene hat $\epsilon : z = 0$ dies mit der Transformation multiplizieren. Bei Zentrum der x-y-Ebene $Z(2, 4, -3)$ entspricht $\epsilon^* : z = 3$, da $d = 3$ wenn 0 Punkt ver-

schoben: $[-2, -4, 3, 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ d \end{bmatrix} = 0$

13.13 Sichtvolumen Clipping

Das kanonische Sichtvolumen ist ein Würfel mit $P(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

Defür sind vorne und hinten, sowie zwei Punkte bestimmd Grösse gegeben



P links unten, Q rechts oben
z vorne $z = -a$, z hinten $z = -b$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{2a}{x_Q - x_P} & 0 & \frac{x_Q + x_P}{y_Q - y_P} & 0 \\ 0 & \frac{2a}{y_Q - y_P} & \frac{y_Q + y_P}{y_Q - y_P} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-b+a}{b-a} & -2 \frac{ba}{b-a} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

14 Curves

14.1 Kurvie in der Ebene

Explizite Darstellung

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$$

Kreis:

$$\text{oberer Halbkreis } \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{unterer Halbkreis } \sqrt{r^2 - x^2}$$

Implizite Darstellung

$$F(x, y) = 0$$

$$\text{Kreis: } x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

Parameterdarstellung

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Punkte miteinander verbunden, einzeln angegeben

$$\text{Kreis: } \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{bmatrix}$$

14.2 Kurve im Raum

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

14.3 Spirale entlang des Zylinders

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ht/(2\pi) \end{bmatrix}$$

Grundriss ergibt Kreis, Höhe Linear

14.4 Methode unbestimmte Koeffizienten

$$P_3(x) = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 1$$

14.5 Lagrange Methode

$$l_0(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots$$

$$L_0(x) = \frac{l_0(x)}{l_0(x_0)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots}$$

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n()$$

$$l_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n (x - x_i)$$

$$L_k(x) = \frac{l_k(x)}{\sum_{i=0}^n l_k(x_i)}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

14.6 Lineare Bézier spline

$$P(t) = (1-t)P_0 + P_1 (0 \leq t \leq 1)$$

Gewichteter Durchschnitt der Kontrollpunkte

$$P(t) = (P_1 - P_0)t + P_0$$

Polynom in t

$$P(t) = [P_0, P_1] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} (0 \leq t \leq 1)$$

Matrixform

14.7 Quadric Bézier spline

drei Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2

$$P_0^1(t) = (1-t)P_0 + P_1$$

$$P_1^1(t) = (1-t)P_0 + P_1$$

$$P(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2$$

14.8 Cubic Bézier Spline

vier Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2, P_3

Mit P_0^1, P_1^1 und
 $P_2^1(t) = (1-t)P_2 + tP_3$

$$P_0^2(t) = (1-t)P_0^1(t) + tP_1^1(t)$$

$$P_1^2(t) = (1-t)P_1^1(t) + tP_2^1(t)$$

$$P(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3$$

14.9 Bernsteinpolynome

15 Appendix

15.1 Radians

Winkel α°	Bogenmaß	Sinus	Kosinus
0°	0	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$
180°	π	0	-1
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
360°	2π	0	1

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+\tan^2(\alpha)}$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$$