Computer Graphics Zusammenfassung

Lucien Zürcher

January 6, 2019

Contents

1 Farbe

1.1 Was ist Farbe?

- **Physikalisch**, Lichtzusammensetzung, Elektromagnetischestrahlen
- **Physologisch**, Warnehmung und Interpretation

Farbe besteht aus:

- Farbton/Farbe
- Farbstich/Sättigung
- Helligkeit

1.2 Farbe eines Objektes

Ein Objekt nimmt Farbe auf und strahlt Farbe ab. Die Farbe des Objektes ist definiert durch die abgestrahlte Farbe.

- Beleuchtung (Illumination)
- Reflektion (Reflection)
- Farbsignal (Color Signal)

1.3 Licht besteht aus?

Licht besitzt verschiedene Wellenlängen, Kombinationen dieser Frequenzen ergeben eine Farbe.

- Sichtbares Licht (380mn - 780mn)
- Infrarot (780mn+)
- Ultraviolet (-380mn)

1nm = 10Å(Ångström)
1Å= øAtom

1.4 Das Auge

*Das Auge besteht aus; **Iris** (Muskel und Lichteinschränken), **Linse**, **Pupille** (Kontrolliert Iris) und **Retina** (Farb- und Lichtaufnahme am Rand des Auges)*

Die Retina besteht aus 75-100 10^6 Stäbchen (Lichtintensität) und 6-7 10^6 Zäpfchen (Farbe). Die Forea ist der dichteste Platz.

1.5 Wie sehen wir Farbe?

Durch die 3 Arten von Zäpfchen:

Kurz (S)		Mittel (M)		Lang (L)
Blau		Grün		Rot
440mn		530mn		560mn
1	:	5	:	10

1.6 Wahrnehmung

Grün 530mn wird am intensivsten wargenommen
Die Helligkeitswahrnehmung zwischen Stäbchen und Zäpfchen ist unterschiedlich

1.7 Farbsysteme

- **RGB** (Monitor, Spotligths,Pointilismus), additiv, C = (Rot, Grün, Blau)
- **CMY** (Drucken), subtraktiv, C = (Cyan, Magenta, Yellow)
- **CMYK**, CMY Mit Schwarz erweitert, K = min(Cyan, Magenta, Yellow) $C = C - K, M = M - K, Y = Y - K$
- **HSV**, Farbton (Hue) / Reinheit,Sättigung (Saturation) / Intensität (Value)
- **YUV** (Alte Fernseher, UV = 1/4 Auflösung Farbkorrektur)
  Y = $0.229 * R + 0.587G + 0.114 * B$,
  U = $0.436(B - Y)/(1 - 0.114)$,
  V = $0.615(R - Y)/(1 - 0.299)$
- **CIE-Lab**, absolutes Farbsystem
  Achsensystem mit Helligkeit als Y-Achse und X/Z-Achse definieren Farbunterschiede

1.8 Additives Farbsystem

Farben additeren (1,1,1) = Weiss, (0,0,0) = Schwarz

1.9 Subtraktives Farbsystem

Farben absorbieren (0,0,0) = Weiss, (1,1,1) = Schwarz

1.10 Farben Konvertieren

Zu Grau: $I = 0.229 * R + 0.587G + 0.114 * B$

RGB <> CMY: $\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$

HSV <> RGB:

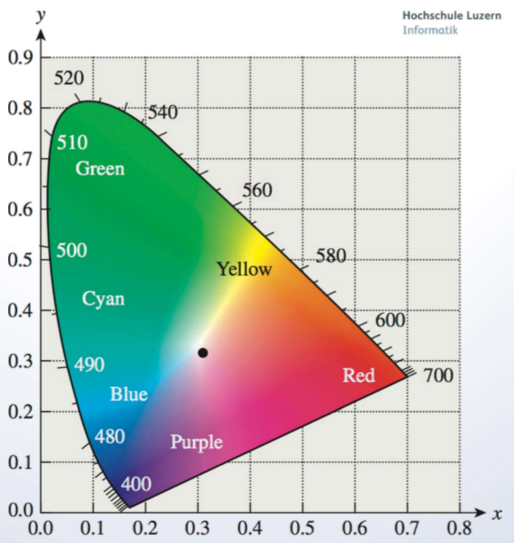
Farbe	H	S	V	R	G	B
Schwarz	–	–	0 %	0 %	0 %	0 %
Rot	0°	100 %	100 %	100 %	0 %	0 %
Gelb	60°	100 %	100 %	100 %	100 %	0 %
Braun	24,3°	75 %	36,1 %	36 %	20 %	9 %
Weiß	–	0 %	100 %	100 %	100 %	100 %
Grün	120°	100 %	100 %	0 %	100 %	0 %
Dunkelgrün	120°	100 %	50 %	0 %	50 %	0 %
Cyan	180°	100 %	100 %	0 %	100 %	100 %
Blau	240°	100 %	100 %	0 %	0 %	100 %
Magenta	300°	100 %	100 %	100 %	0 %	100 %
Orange	30°	100 %	100 %	100 %	50 %	0 %
Violett	270°	100 %	100 %	50 %	0 %	100 %

1.11 Gamma Korrektur

Erreichen von gleichmässiger Verteilung der Helligkeit / Kontrast. Das Empfinden der Helligkeit ist nicht linear.

Korrektur der Helligkeit des Bildes mit Gamme Wert. Wichtig für Bildschirme einstellen. Beim einstellen der Monitore Grauwerte mit echten Werten vergleichen (Gamma Test Pattern).

1.12 Normfarbtafel



1.13 Helligkeitswahrnehmung

Helligkeit wird logarithmisch wahrgenommen, Webers Law
$\frac{\Delta I}{I} = C$
$\log(I + \Delta I) - \log(I) = Const$

1.14 Nibs (Lichtdichte)

Gibt Helligkeitsdichte für Auge an. 10nits werden stärker wargenommen denn 100nits. Heisst, weniger Licht wird stärker wargenommen.

1.15 Mach bending

Optische Illusion, bei zwei verschiedenen Grauwerten nebeneinander unterschieden sich diese vermeitlich stärker.

1.16 Farbtäschung

Farbe wird abhängig durch Umgebung anderst wargenommen (Dunkler, Heller). Optische Illusionen

1.17 HD,UHD,UK

Unterscheiden sich durch Pixelauflösung.

1.18 Was ist HDR?

***High Dynamic Range**, speichert zusätzlichen Wert um Helligkeitsunterschiede besser unterschieden zu können (RGB-Pixelwerte propertianal zum Licht). Detailreichere dunkel und helle Spots, weniger Verlust durch Farben mit weniger Helligkeitsunterschiede.*

1.19 Begriffe

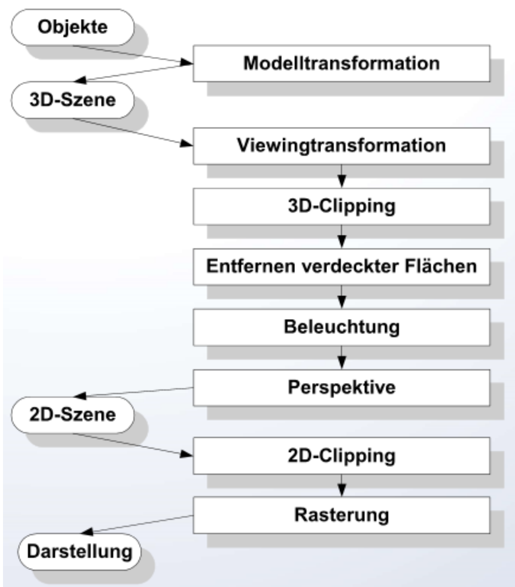
Natürliches Licht	Gemisch aus verschiedenen Lichtwellen / Frequenzen
Spektralfarben	reine Farbfrequenz; Alle Farben am Rand des CIE-Farbsystems
Spektrum	Alle Frequenzen und deren Verteilung
Spektralverteilung	Charakterisiert die Farbe, definiert durch Frequenzen (Bsp. Verschiedenes Weiss)
Komplementärfarben	Addieren ergeben Grau, gegenüberligende Farben im CIE-Farbsystem

2 WebGL

2.1 OpenGL Merkmale

- Low Level Graphics API
- Verschiedene Platformen
- 1.0/2.0 Fixe Funktionspipeline
- Vorlage für WebGL

2.2 Grafikpipeline



2.3 Programmierbare Shaders

Shaders werden für die Berechnung der zu zeichnenden Objekte verwendet. Das Programm wird direkt auf der Grafikkarte ausgeführt.

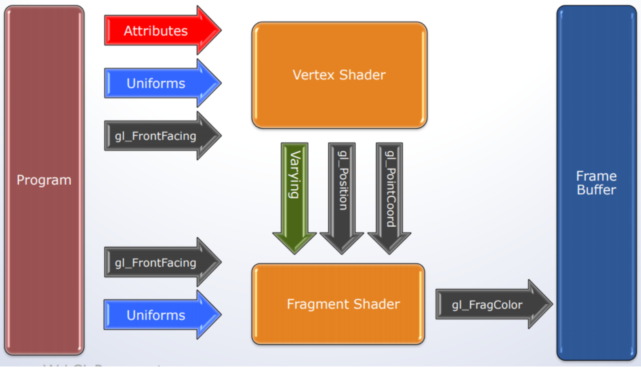
2.4 Vertex Processing

Berechnen der Positionen der Vertexe (Punkte) und Werte für den folgenden Fragmentshader.

2.5 Fragment Processing

Berechnet die Farbe der einzelnen Pixel.

2.6 Datenfluss



2.7 Attribut Variablen und Buffer definieren

Erzeugen

1. Buffer erzeugen (gl.createBuffer())
2. Array Buffer auf Buffer setzen (gl.bindBuffer(...))
3. Daten füllen (gl.BufferData(..))

Zeichnen

1. Buffer binden
2. Attribut und/oder uniform setzen (gl.vertexAttribPointer(..))
3. Attribut als Array setzen (gl.enableVertexAttribArray(..))
4. Zeichnen (gl.drawArrays(..))

3 Halbtontechnik

3.1 Verfahren der Halbtontechnik

Da nur Schwarz und Weiss gedruckt werden kann, werden die verschiedenen Stufen durch Intänsitätsstufen dargestellt. Dafür gibt es drei Verfahren:

- Quantisierung
- Dithering
- Error Diffusion

3.2 Quantisierung

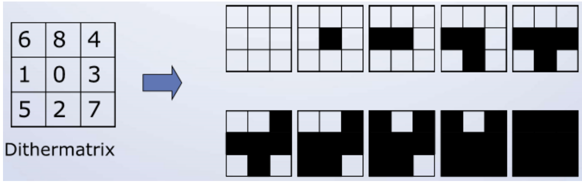
Höhere Auflösung auf tiefere Auflösung durch Runden der Pixelfarbwerte. Bsp. 16Bit -> 8Bit (Runden der Werte)

3.3 Dithering

Wenn der Drucker eine grössere Auflösung besitzt, jedoch weniger Farbstufen kann Dithering verfahren verwendet werden.

3.4 Dithermatrizen

Kann als Matrix dargestellt werden. Matrix gibt an, auf welcher stufe welche Pixel gesetzt werden



*Es gibt zwei Regeln; Gesetzter **Pixel bleibt gesetzt** und **Strukturen** in der Ditheringmatrix **vermeiden**. Es soll möglichst ein Kreis approximiert werden.*

3.5 Dithering bei gleich bleibender Auflösung

Handhabung, wenn die Auflösung gleichbleibt

- Mittelwert von n x n Region mit Ditheringmatrix ersetzen.
- Dispersed Dot Dithering

3.6 Dispersed Dot Dithering

Bayer Matrizen können hierfür verwendet werden, wodurch die Methode Bayer Dithering genannt wird.

2 x 2 Bayer Matrix

0	2
3	1

4 x 4 Bayer Matrix

0	8	2	10
12	4	14	6
3	11	1	9
15	7	13	5

$k = \frac{W_{max}}{n*n+1}$

W_{max}*: Maximalwert des Pixels (255 bei 8Bit)*
n*: Grösse der Matrix (2 x 2 => $n = 2$)*
k*: Faktor für Umrechnung*

$I_{new} = \frac{I_{old}}{k}$
Für jeden Pixel den neuen Wert ausrechnen, danach mit Bayermatrix den Wert vergleichen. Pixel setzen wenn $I(x, y)_{new} > D_{ij}$*)*

$i = x$ modulo n
$j = y$ modulo n

3.7 Error Diffusion

Anstatt Kreise, Punkte verschiedener Dichte anordnen. Das Bild wird dabei sequenziell durchlaufen; links -> rechts, oben -> unten

Error Diffusion verteilt den Fehler auf die umliegenden Pixel

		7/16
1/16	5/16	3/16

Gewichtungsmatrix
Beispiel:

X	191	140	113
244	221	105	100

$191 - 255 = -64$, *da Pixel Schwarz (255), Fehler:* -64

X	X	140 + (7/16 * -64)	113
244 + (1/16 * -64)	221 + (5/16 * -64)	105 + (3/16 * -64)	100

Wenn Wert > 128 = 255, ansonten Wert <= 128 = 0

4 Vektoren

• *Skalarprodukt*
· *Matrixprodukt*

4.1 Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

4.2 Multiplikation mit Skalar

$$\lambda\vec{a} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

$\lambda \in$ *Skalar*

4.3 Nullvektor

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.4 Vektorinverses

$$-\vec{a} = - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_n \end{bmatrix}$$

Vektor mit negativen Komponenten

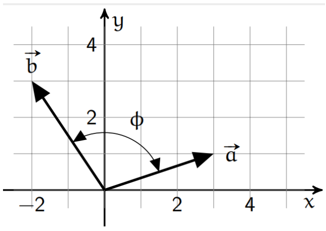
4.5 Vektoren Gleichheit

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{b}$$

Vektoren sind gleich, wenn Komponenten gleich

4.6 Skalarprodukt

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$$

$$\cos\phi = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

4.7 Skalarprodukt im beliebigem Koordinatensystem

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = [a_1 a_2 a_3]^T$
$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 = [b_1 b_2 b_3]^T$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = [a_1 a_2 a_3] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{a}^T \mathbf{G} \mathbf{b}$$

Matrix $\mathbf{G}$ *wird* ***metrisch Tensor*** *genannt*

4.8 Orthogonal

$\vec{e}_x \bullet \vec{e}_y = 0$
$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
Senkrecht zueinander, wenn Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren 0 ergibt.

4.9 Länge des Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

4.10 Einheitsvektor

$e_v = \frac{1}{||v||} \bullet v = \frac{1}{\sqrt{v \cdot v}} \bullet v$
$(i = e_1, j = e_2, k = e_3)$

$\vec{e}_x = [1, 0, 0]^T$
$\vec{e}_y = [0, 1, 0]^T$
$\vec{e}_z = [0, 0, 1]^T$

4.11 Euklidische Distanz

$$\bar{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

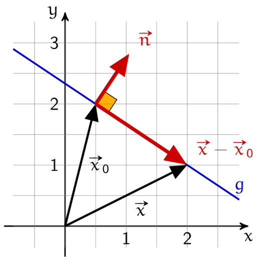
4.12 Gerade im 2/3D

- **Punkt-Punktform mit Vektoren 2/3D**
  $\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_1 - \vec{r}_0), t \in \mathbb{R}$
  $\vec{r}_1$: Punkt, $\vec{r}_2$: Punkt
- **Punkt-Richtungsform mit Vektoren 2/3D**
  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{r}_1, t \in \mathbb{R}$
  $\vec{r}_0$: Punkt, $\vec{r}_1$: Richtungsvektor
- **Achsenabschnitt-Steigungsform**
  $y = mx + b$
  b: Achsenabschnitt, m: Steigung
- **Punkt-Richtungsform**
  $(y - y_0) = m(x - x_0)$
  (x_0,y_0): Punkt, m: Steigung

- **Allgemeine Geradengleichung**
  $ax + by + c = 0$
  $a, b, c \in \mathbb{R}$

4.13 Hessische Normalform

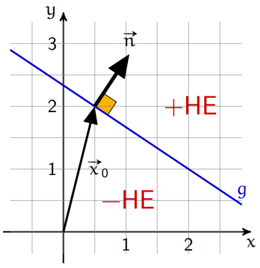
Viktorielle Schreibweise der Hessischen Normalform



$\vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$
da $\vec{n} \perp (\vec{x} - \vec{x}_0)$
$\Rightarrow n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) =$
$n_x x + n_y y - (n_x x_0 + n_y y_0)$

Abstand vom Uhrsprung: d
$d = (n_x x_0 + n_y y_0) = \vec{n} \bullet \vec{x}_0$

$\vec{n}$ muss normalisiert sein:
$|\vec{n}| = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \bullet \vec{n}$



$\mathbf{n_x x + n_y y - d = 0}$
$d = (n_x x_0 + n_y y_0) = \vec{n} \bullet \vec{x}_0$

$d > 0 \Leftrightarrow (0, 0) \in -HE$
$d < 0 \Leftrightarrow (0, 0) \in +HE$

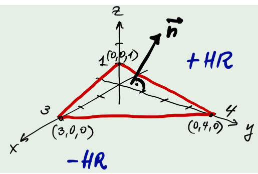
g: $ax + by + c = 0$
$\vec{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
$d = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

4.14 Hessische Normalform Ebene

$\epsilon : ax + by + cz + d = 0$

$n_x x + n_y y + n_z z - D = 0$; *HNF der Ebene* $\epsilon \in \mathbb{R}^3$
$\vec{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
$D = -\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

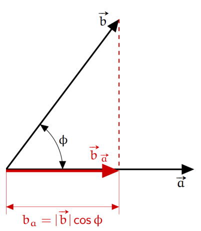
4.15 Achsenabschnitt



Gegeben sind 3 Punkte $p_x = x$, $p_y = y$, $p_z = z$ die ergeben eine Ebenegleichung:

$\mathbf{\frac{x}{p_x} + \frac{y}{p_y} + \frac{z}{p_z} - 1 = 0}$

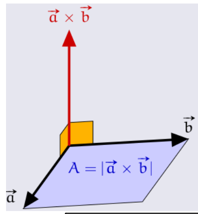
4.16 Projektion eines Vektors



$\vec{b}$ Richtung $\vec{a}$:
$\vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$

b_a mal Einheitsvektor $\vec{a}$
$\vec{b}_{\vec{a}} = b_a \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \phi \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$
$= \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$

4.17 Vektorprodukt

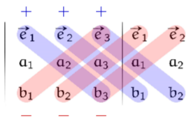


$\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf beiden Vektoren

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ sind ein Rechtssystem

$\vec{a} \times \vec{b}$ entspricht der Fläche des aufgespannten Parallelogramms (A):

$A = \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$



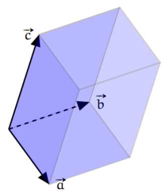
Regel von Sarrus

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$
$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_1 +$
$(a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3$

4.18 Vektorprodukt Anwendung

- **Lorentz-Karft** $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$
  $\vec{v}$: Geschwindigkeit, B: Magnetfeld, q: Landung
- **Geschwindigkeit** $\vec{v} = q(\vec{w} \times \vec{x})$
  $\vec{x}$: Punkt, w: Winkelgeschwindigkeit, $\vec{w}$: Drehachse
- **Drehmoment** $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
  $\vec{F}$: Kraft, $\vec{r}$: Punkt / Koordinatenursprung
- **Normalvektor** $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$
  $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegen auf der Ebene.
- **Kollinearität** kollinear (d.h. linear abhängig) wenn Vektorprodukt verschwinded

4.19 Spatprodukt



Spatprodukt $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$
Ist der Skalar der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c})$
Spatprodukt entsprich Volumen wenn in einem Rechtssystem, dann: $V_{Spat} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$

$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| =$
$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$
Komplanar (linear abhängig) wenn $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

4.20 Translation 2D

$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{t} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + t_1 \\ x_2 + t_2 \end{bmatrix}$

4.21 Skalierung 2D

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} \vec{s}_x x \\ \vec{s}_y y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

4.22 Rotation 2D

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{R}\vec{x}$

Inverse Matrix: $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$

4.23 Vektor Rechenregeln

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	Kommutativgesetz
$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$	Assoziativgesetz
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	Existenz Neutralelement $\vec{0}$
$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$	Existenz Inverses -$\vec{a}$
$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$	
$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$	
$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$	
$1\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \vec{a} = \vec{a}$	

4.24 Rechenregel Skalarprodukt

$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$
$\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$
$\lambda(\vec{a} \bullet \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (\lambda\vec{b})$

4.25 Vektorprodukt Rechenregeln

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$	Anti-Kommutativgesetz
$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$	Distributivgesetz
$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$	

4.26 Spatprodukt Rechenregeln

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$	zwei Vekoren vertauschen entspricht Vorzeichenwechsel
$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$	Zyklisches Vertauschen keine Änderung
$[\lambda\vec{a}, \mu\vec{b}, \nu\vec{c}] = \lambda\mu\nu[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$	Multiplikation
$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}]$	Addition

4.27 Begriffe

Ortsvektor	Vom Ursprung zum Punkt
Richtungsvektor	Eine Richtung im Raum
Einheitsvektor	Eine Einheit in eine beliebige Richtung
Linearkombination *kollinear*	Ein Vektor, der ein vielfaches eines Einheitvektors ist. $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$
Linear Unabhängig *komplanar*	Vektoren sind unabhängig wenn $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$
Skalar	Ist ein reelle oder komplexe Zahl
Rechtssystem	Koordinatensystem aufgebaut wie die rechte Hand wobei; der Zeigfinger X-Achse ($\vec{e}_x$), Mittelfinger Y-Achse ($\vec{e}_y$) und Daumen Z-Achse ($\vec{e}_z$)

5 Projektive Geometrie

5.1 Homogener Vektor

$\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ *Homogener 2D Vektor*

$(x, y) = (\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$

5.2 Punkt auf Gerade

$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \vec{g} \bullet \vec{r} = 0$

$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{g} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$A(x, y)$ (homogenisiert $\vec{r}$) liegt dann auf gerade $\vec{g}$

5.3 Schnittpunkt Geraden

$\vec{r} = \vec{g}_1 \times \vec{g}_2$

$\vec{g}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \vec{g}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$\vec{r}$ ist der homogene Schnittpunkt $[x_1, x_2, x_3]$
$x_3 = 0$, dann sind die Geraden parallel, und kein Schnittpunkt möglich (division durch 0)

5.4 Parallele Geraden

$\vec{r} = \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 = (c_1 + c_2) \begin{bmatrix} b_1 \\ -a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$*, dann sind die Geraden parallel*

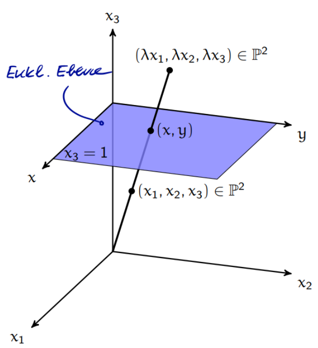
5.5 Unendlicher homogener Vektor

$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{g}_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$

alle idealen, uneigentlichen oder unendlich fernen Punkte $\vec{r}$ liegen auf der Gerade $\vec{g}_\infty$

$\vec{g}_\infty \bullet \vec{r} = \vec{g}_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

5.6 Projektive Ebene (homogener Vektor)



Ein Punkt auf der euklidischen Ebene entspricht dem Wert eines dehomogenisierten Punktes (x, y).

$x_3 = 1$ ergibt die euklidische Ebene.

$\lambda(x_1, x_2, x_3)$ sind Punkte auf einer Gerade die den Punkt $(\frac{x_1\lambda}{x_3\lambda}, \frac{x_2\lambda}{x_3\lambda}) = (x, y)$ definieren.

5.7 Projektive Transformation

Abbildungen $h : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$ mit Eigenschaften:

- h ist eindeutig (bijektiv) und daher umkehrbar
- h Transformationen sind geradentreu (geraden auf geraden abbilden)
- **Homogene Matrix** ist bis auf eine Konstante bestimmt ($k\mathbf{H} = \mathbf{H}$; $k > 0$)

$$\vec{r'} = h(\vec{r}) = \mathbf{H}\vec{r}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

5.8 Transformationen kombinieren

$\vec{r'} = h(\vec{r}) = (h_2 \circ h_1)(\vec{r}) = h_2(h_1(\vec{r}))$

$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1$, $\vec{r'} = \mathbf{H}\vec{r} = \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_1\vec{r}$

$h_1 : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$, $h_2 : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$
$h = h_2 \circ h_1$ *entspricht erst* h_2 *dann* h_1

5.9 Translation 2D

$$\vec{r'} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \vec{r} = \mathbf{T}\vec{r}$$

Verschiebung durch $\vec{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$, $\mathbf{T}^{-1}$ *entspricht* $-\vec{t}$ *in* $\mathbf{T}$

5.10 Nullpunkt Rotation 2D

$$\vec{r'} = \left[\begin{array}{cc|c} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \mathbf{R}\vec{r}$$

Rotation mit ϕ, $\mathbf{R}^{-1}$ *entspricht* sin *vertauschen*

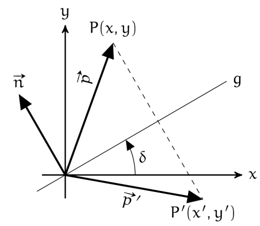
5.11 Rotation um Punkt A

Punkt: $A(t_x, t_y)$

1. Translation A zum Nullpunkt verschiebt ($\mathbf{T}$)
2. Nullpunkt Rotation 2D mit Winkel Φ
3. Translation A zurück ($\mathbf{T}^{-1}$)

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}_0\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\Phi) & -\sin(\Phi) & 0 \\ \sin(\Phi) & \cos(\Phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.12 Spiegelung mit Gerade durch Ursprung



$\vec{n} = (-\sin(\delta), cos(\delta))^T$

HNF: $-\sin(\delta)x + cos(\delta)y = 0$

$\vec{p'} = \vec{p} - 2(\vec{p} \bullet \vec{n})\vec{n}$

$\delta = \arctan(\frac{y}{x})$
Wenn g geht durch Nullpunkt

$$\vec{r'} = \left[\begin{array}{cc|c} \cos(2\delta) & \sin(2\delta) & 0 \\ \sin(2\delta) & -\cos(2\delta) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \vec{r}$$

5.13 Spiegelung mit Gerade g

1. gerade ins Zentrum Transformieren ($\mathbf{T}$ errechnen)
2. Spiegelung mit Gerade durch Ursprung ($\mathbf{S}$)
3. zurück Transformieren ($\mathbf{T}^{-1}$)

$$\mathbf{M} = \mathbf{T^{-1}ST}$$

5.14 Transformation des Koordinatensystemes

$$\begin{bmatrix} \cos(-\Phi) & -\sin(-\Phi) & 0 \\ \sin(-\Phi) & \cos(-\Phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation des Koordinatensystemes um Φ
Bei einer Transformation des Koordinatensystemes handelt es sich um eine Inverse Matrix der normalen Transformation

5.15 Abstand Punkt zur Gerade

$d = ax + by + c$
d: distanz, $P(x, y)$*: Punkt,* $g : ax + by + c = 0$*:*

5.16 Transformationen 2D

$t = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $0^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{RMC}$ = 2x2 Matrix

Euklidisch (starre Bewegung)
$D = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$
Abstand zwischen zwei Punkten, alle Winkel
($R^{-1} = R^T$)

Ähnlichkeit
$S = \begin{bmatrix} k \cdot \mathbf{M} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$
Winkel zwischen zwei Punkten, alle Winkel

Affin
$A = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$
Parallelität, Verhältnis zwischen Flächeninhalte

Allgemein

$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$

Geraden bleiben Geraden

6 Transformation

6.1 homogene Koordinaten

jeder Punkt P(x,y,z) des Raumes $\mathbb{R}^3$ *besitzt eine 4-komponenten Vektor* $\vec{r}$

$\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, x = \frac{x_1}{x_4}, y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_3}{x_4}$

$(x, y, z) = (\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4})$

6.2 Ebene im Raum

Ebene ϵ *im Raum* $\mathbb{R}^3$

$\epsilon : ax + by + cz + d = 0$ *Hessische Normalform*

$\vec{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$, Punkt: $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$

Ebenengleichung:

$\vec{w} \bullet \vec{r} = w^T \cdot r = ax + by + cz + d = 0$

6.3 Prokektive Transformation

Die homogene Matrix $\mathbf{H}$ *ist nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, heisst, alle Vielfachen von* $\mathbf{H}$ *sind auch gültig*

$\eta : \mathbb{P}^3 \mapsto \mathbb{P}^3$ stellt eine **projektiven Transformation** dar

$$\eta(r) = \mathbf{H} \cdot r = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

6.4 Transformationen

$t = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, 0^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{RMC} = $ 3x3 Matrix

Euklidisch (starre Bewegung)

$D = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$

Abstand zwischen zwei Punkten, alle Winkel $(R^{-1} = R^T)$

Ähnlichkeit

$S = \begin{bmatrix} k \cdot \mathbf{M} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$

Winkel zwischen zwei Punkten, alle Winkel

Affin

$A = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$

Parallelität, Verhältnis zwischen Volumeninhalt

Allgemein

$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}$

Geraden bleiben Geraden

6.5 Translation

$$\mathbf{T}(\vec{t}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 1 & 0 & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

6.6 Rotation

$$\mathbf{R}_z = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos(\Phi_z) & -\sin(\Phi_z) & 0 & 0 \\ \sin(\Phi_z) & \cos(\Phi_z) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{R}_y = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos(\Phi_y) & 0 & \sin(\Phi_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\Phi_y) & 1 & \cos(\Phi_y) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{R}_z = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Phi_x) & -\sin(\Phi_x) & 0 \\ 0 & \sin(\Phi_x) & \cos(\Phi_x) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Bei Rotation um selbe Achse gilt Kommutativgesetz $(\mathbf{R}_z(\Phi_{z,1} + \Phi_{z,2}) = \mathbf{R}_z(\Phi_{z,1})\mathbf{R}_z(\Phi_{z,2}) = \mathbf{R}_z(\Phi_{z,2})\mathbf{R}_z(\Phi_{z,1}))$

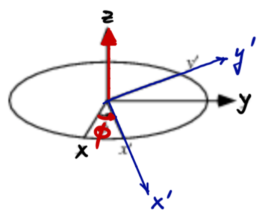
Inverse entspricht $\mathbf{R}^{-1}(\Phi) = \mathbf{R}(-\Phi)$, *wobei* $\cos(-\Phi) = \cos(\Phi)$

6.7 Rotation um beliebige Achse

1) Rotation um ϕ um z-Achse (Matrix D)
2) Rotation um den Winkel $\theta \in [0, \pi]$ (um frühere X-Achse) (Matrix C)
3) Rotation um den gegeben Winkel ψ (Matrix B)

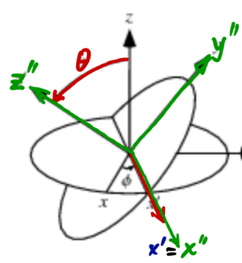
$c_\alpha = \cos\alpha$, $s_\alpha = \cos\alpha$, $\alpha \in \phi, \theta, \psi$

D



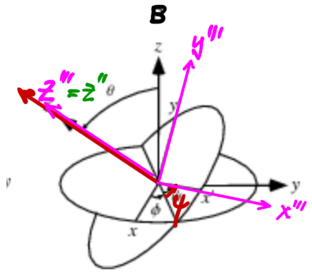
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} c_\phi & s_\phi & 0 \\ -s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C



$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & s_\theta \\ 0 & -s_\theta & c_\theta \end{bmatrix}$$

B



$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{M} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{BCD}$

Bei Rotation um eine Gerade, 1. Transformation $\mathbf{D}$ *&* $\mathbf{C}$ *Matrix (mit Winkel der Gerade), dann eigentliche Transformation mit gegebenem Winkel, dann zurücktransformiere* $\mathbf{C}^{-1}$ *&* $\mathbf{D}^{-1}$

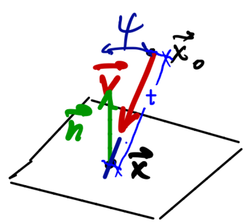
6.8 Rotation um eine Achse durch den Ursprung

Rotation um einen Einheitsvektor $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{Q} = (\cos\theta)I + (1 - \cos\theta)\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{bmatrix} - \sin\theta \begin{bmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

6.9 Parallele Projektion

Projektion auf Ebene $\epsilon : ax + by + cz + d = 0$
Die Ebene ist definiert durch Normalvektor $\vec{n} = [a, b, c]^T$ *(Ebenen Normalenvektor)*
Projektionsrichtung definiert durch Normalenvektor $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$ *(Projektionsrichtung)*



$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{v} = \vec{x}_0 + t^\star\vec{v}$$

$$t = \frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{av_x+bv_y+cv_z}$$

$$t = t^\star = \frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{cos(\psi)}$$

$$av_x + bv_y + cv_z = \vec{v} \bullet \vec{n} = |\vec{v}||\vec{n}|\cos(\psi) = \cos(\psi)$$

$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{v}$, komponentenweise $\begin{bmatrix} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \\ z = z_0 + tv_z \end{bmatrix}$

Wobei $\vec{x_0}$ *Punkt dem projezierten* $\vec{x}$ *Punkt auf Ebene entspricht.* ψ *ist der Winkel zwischen* $\vec{n}$ *und* $\vec{v}$

6.10 Parallele Projektionsmatrix

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \mathbf{H}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{c_\psi}\begin{bmatrix} (c_\psi - av_x) & -bv_x & -cv_x & -dv_x \\ -av_y & (c_\psi - bv_y) & -cv_y & -dv_y \\ -av_z & -bv_z & (c_\psi - cv_z) & -dv_z \\ 0 & 0 & 0 & c_\psi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$cos(\psi) = c_\psi$

6.11 Perspektivische Projektion

Fall wenn Zentrum O im Nullpunkt

$\epsilon : ax + by + cz + d = 0$, Ebene

Beliebigen Punkt $A_0(x_0, y_0, z_0)$ *mit Projektionspunkt* $A^*(x^*, y^*, z*)$ *in Ebene* ϵ

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda y_0 \\ \lambda z_0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -\frac{d}{ax_0+by_0+cz_0}$

$$(ax_0 + by_0 + cz_0) \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -dx_0 \\ -dy_0 \\ -dz_0 \\ ax_0 + by_0 + cz_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.12 Perspektivische Projektionmatrix

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix}$$

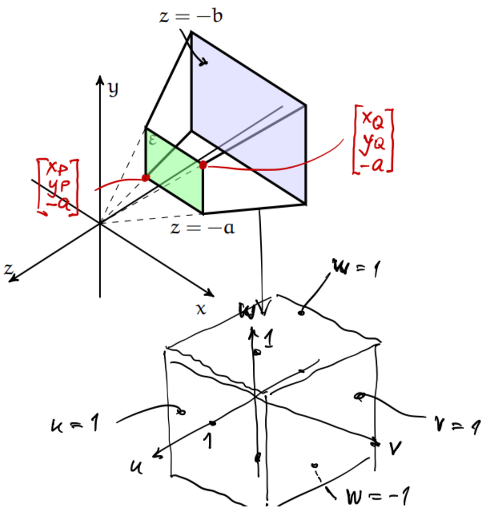
Projektionszentrum muss dann im zentrum liegen.

Wenn Ebene nicht mit Nullpunkt im Zentrum, dann zum Zentrum transferieren. Wichtig, die perspektivische Ebene muss transferiert werden. Bsp: x-y-Ebene hat $\epsilon : z = 0$ *dies mit der Transformation multiplizieren. Bei Zentrum der x-y-Ebene* $Z(2, 4, -3)$ *entspricht* $\epsilon^\star : z = 3$*, da* $d = 3$ *wenn 0 Punkt verschoben:* $[-2, -4, 3, 1]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ d \end{bmatrix} = 0$

6.13 Sichtvolumen Clipping

Das kanonische Sichtvolmen ist ein Würfel mit $P(\pm1, \pm1, \pm1)$

Defür sind vorne und hinten, sowie zwei Punkte bestimmend Grösse gegeben



P links unten, Q rechts oben
z vorne $z = -a$, z hinten $z = -b$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{2a}{x_Q - x_P} & 0 & \frac{x_Q + x_P}{x_Q - x_P} & 0 \\ 0 & \frac{2a}{y_Q - y_P} & \frac{y_Q + y_P}{y_Q - y_P} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b+a}{b-a} & -2\frac{ba}{b-a} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

7 Scan Konvertierung

7.1 Linie Rastern

Eine Linie von (x_0, y_0) nach (x_1, y_1) rastern. Da in Pixel konvertiert werden muss. Methoden:

- *Brute Force; über jeden Pixel und runden*
- *Brute Force inkrementell (DDA); $y_{i+1} = m * x_{i+1)+B=y_i+m}$, Nachteil Gleitkommazahlen und Runden (aufwändig)*
- *Mittelpunktschema; Nächsten Punkt wird Kalkuliert durch if / else*

7.2 Mittelpunktschema

Ist eine inkrementelle methode zum Rastern. Mittelpunkt wird betrachtet um nächsten Punkt zu finden. ($M = (x_i + 1, y_i + \frac{1}{2})$, $E = (x_i + 1, y_i)$, $NE = (x_i + 1, y_i + 1)$)

$D_x = x_1 - x_0$;
$D_y = y_1 - y_0$;
$D_E = 2 * D_y$;
$D_{NE} = 2 * (D_y - D_x)$;
$d = 2 * D_y - D_x$;
$y = y_0$

Für jeden nächsten d Wert, wenn $d <= 0$, dann $d = d + D_{NE}$ ansonsten $d = d + D_{NE}$ und y inkremenrieren. Jeweils den Punkt $P(x, y)$ zeichnen. x jedesmal inkrementieren.

7.3 Kreis Rastern

Selbe Methode wie bei den Linien kann für Kreise angewendet werden.

7.4 Mittelpunktschema Kreis

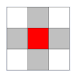
Funktion für Kreis: $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$

$x = 0$
$y = R$
$d = 1 - R$
$D_E = 2 * x + 3$
$D_{NE} = 2 * (x - y)d + 5$

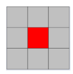
Für jeden nächsten d Wert wiederholen bis $y > x$, wenn $d < 0$, dann $d = d + D_E$ ansonsten $d = d + D_{NE}$ und y dekrementieren. Jeweils den Punkt $P(x, y)$ zeichnen. x jedesmal inkrementieren.

7.5 Regionen füllen

Entweder durch 4-er oder 8-er zusammenhang definiert



4-er Zusammenhang



8-er Zusammenhang

7.6 FloodFill

Füllen durch selben abfrage ob selbe Farbe (Photoshop Zauberstab)

8 Curves

8.1 Kurvie in der Ebene

Explizite Darstellung
$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$
Kreis:
oberer Halbkreis $\sqrt{r^2 - x^2}$
unterer Halbkreis $\sqrt{r^2 - x^2}$

Implizite Darstellung
$F(x, y) = 0$
Kreis: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$

Parameterdarstellung
$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$
Punkte miteinander verbunden, einzeln angegeben

Kreis: $\begin{bmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{bmatrix}$

8.2 Kurve im Raum

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$

8.3 Spirale entlang des Zylinders

$x^2 + y^2 = r^2$

$\gamma : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} r\cos t \\ rsint \\ ht/(2\pi) \end{bmatrix}$

Grundriss ergibt Kreis, Höhe Linear

8.4 Methode unbestimmte Koeffizienten

$P_3(x) = c_0 + c_1x^2 + c_2x^2 + c_3x^3$

$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 1$

8.5 Lagrange Methode

$l_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots$
$L_0(x) = \frac{l_0(x)}{l_0(x_0)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots}$
$P_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \dots + y_nL_n()$

$l_k(x) = \prod_{i=0 i\neq k}^{n}(x - x_i)$
$L_k(x) = \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)}$

8.6 Lineare Bézier spline

$P(t) = (1-t)P_0 + P_1 (0 \leq t \leq 1)$
Gewichteter Durchschnitt der Kontrollpunkte

$P(t) = (P_1 - P_0)t + P_0$
Polynom in t

$P(t) = [P_0, P_1] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} (0 \leq t \leq 1)$
Matrizform

8.7 Quadric Bézier spline

drei Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2

$P_0^1(t) = (1-t)P_0 + P_1$
$P_1^1(t) = (1-t)P_0 + P_1$

$P(t) = (1-t)^2P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2P_2$

8.8 Qubic Bézier Spline

vier Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2, P_3

Mit P_0^1, P_1^1 *und*
$P_2^1(t) = (1-t)P_2 + tP_3$

$P_1^2(t) = (1-t)P_0^1(t) + tP_1^1(t)$
$P_2^2(t) = (1-t)P_1^1(t) + tP_2^1(t)$

$P(t) = (1-t)^3P_0 + 3(1-t)^2tP_1 + 3(1-t)t^2P_2 + t^3P_3$

8.9 Bernsteinpolynome

9 Appendix

9.1 Radians

Winkel $\alpha°$	Bogenmass	Sinus	Kosinus
$0°$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$
$180°$	π	0	-1
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
$360°$	2π	0	1

$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+\tan^2(\alpha)}$
$\sin^2(\alpha) = \frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$
$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$