Computer Graphics

Lucien Zürcher

December 2, 2018

Contents

1 Vektoren

• *Skalarprodukt*
· *Matrixprodukt*

1.1 Länge des Vektors

$||v|| = \sqrt{v \cdot v}$

1.2 Einheitsvektor

$e_v = \frac{1}{||v||} \bullet v$
$(i = e_1, j = e_2, k = e_3)$

1.3 Euklidische Distanz

$\bar{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$

1.4 Achsenabschnitt

Gegeben sind 3 Punkte $p_x = x$,$p_y = y$,$p_z = z$ *ergibt Ebenegleichung:*

$\frac{x}{p_x} + \frac{y}{p_y} + \frac{z}{1} = 1$, HNF =

1.5 Hessische Normalform

TODO

2 Transformation

2.1 Transformation des Koordinatenystems

TODO

2.2 homogene Koordinaten

jeder Punkt P(x,y,z) des Raumes $\mathbb{R}^{\nvDash}$ *besitzt eine 4-komponenten Vektor* $\vec{r}$

$\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, x = \frac{x_1}{x_4}, y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_3}{x_4}$

$(x, y, z) = (\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4})$

2.3 Ebene im Raum

Ebene ϵ *im Raum* $\mathbb{R}^3$
$\epsilon : ax + by + cz + d = 0$ *Hessische Normalform*

$\vec{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$, Punkt: $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$

Ebenengleichung:
$\vec{w} \bullet \vec{r} = w^T \cdot r = ax + by + cz + d = 0$

2.4 Prokektive Transformation

Die homogene Matrix $\mathbf{H}$ *ist nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, heisst, alle Vielfachen von* $\mathbf{H}$ *sind auch gültig*

$\eta : \mathbb{P}^3 \mapsto \mathbb{P}^3$ stellt eine **projektiven Transformation** dar

$$\eta(r) = \mathbf{H} \cdot r = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Euklidisch (starre Bewegung)
$D = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$
Abstand zwischen zwei Punkten, alle Winkel
($R^{-1} = R^T$*)*

Ähnlichkeit
$S = \begin{bmatrix} k \cdot \mathbf{M} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$
Winkel zwischen zwei Punkten, alle Winkel

Affin
$A = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$
Parallelität, Verhältnis zwischen Volumeninhalt

Allgemein
$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}$
Geraden bleiben Geraden

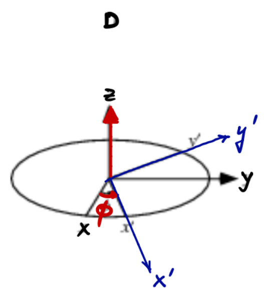
2.5 Euklidische Transformationen

TODO Translation, Spiegelung an einer Ebene, Rotation, Zusammensetzen von

2.6 Rotation um beliebige Achse

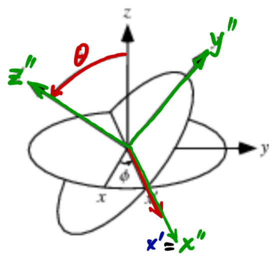
1) Rotation um ϕ um z-Achse (Matrix D)
2) Rotation um den Winkel $\theta \in [0, \pi]$ (um frühere X-Achse) (Matrix C)
3) Eigentlich Rotation um den gegeben Winkel ψ (Matrix B)

$c_\alpha = \cos\alpha$, $s_\alpha = \cos\alpha$, $\alpha \in \phi, \theta, \psi$



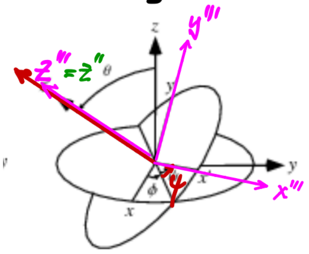
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} c_\phi & s_\phi & 0 \\ -s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C



$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & s_\theta \\ 0 & -s_\theta & c_\theta \end{bmatrix}$$

B



$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Danach wieder zurück rotieren um ϕ und θ

2.7 Rotation um eine Achse durch den Ursprung

TODO insert T / $R_{y,x,z}$

Todo rotation around any axis

Todo altertative, rotation around origin

2.8 Parallele Projektion

Projektion auf Ebene $\epsilon : ax + by + cz + d = 0$

Die ebene ist definiert durch Normalvektor $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Normalenvektor erhalten: $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$

Projektionsrichtung definiert durch $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$
Normalisieren von Projektionsrichtung: $|\vec{v}|$

Ist $|\vec{n}|$ *(Ebenen Normalenvektor) und* $|\vec{v}|$ *(Projektionsrichtung) gegeben*

$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{v}$, komponentenweise $\begin{bmatrix} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \\ y = y_0 + tv_y \end{bmatrix}$
Wobei x_0 *Punkt wo auf* x *auf Ebene Projeziert wird*

ψ *entspricht Winkel zwischen* $\vec{n}$ *und* $\vec{v}$

$cos(\psi) = \vec{v} \bullet \vec{n}$
TODO - gleichung t t*

2.9 Parallele Projektionsmatrix

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} =$$
$$\frac{1}{c_\psi} \begin{bmatrix} (c_\psi - av_x) & -bv_x & -cv_x & -dv_x \\ -av_y & (c_\psi - bv_y) & -cv_y & -dv_y \\ -av_z & -bv_z & (c_\psi - cv_z) & -dv_z \\ 0 & 0 & 0 & c_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$cos(\psi) = c_\psi$

2.10 Perspektivische Projektion

Fall wenn Zentrum O im Nullpunkt

$\epsilon : ax + by + cz + d = 0$, Ebene

Beliebigen Punkt $A_0(x_0, y_0, z_0)$ *mit Projektionspunkt* $A^*(x^*, y^*, z*)$ *in Ebene* ϵ

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda y_0 \\ \lambda z_0 \end{bmatrix}$$
$\lambda = -\frac{d}{ax_0 + by_0 + cz_0}$

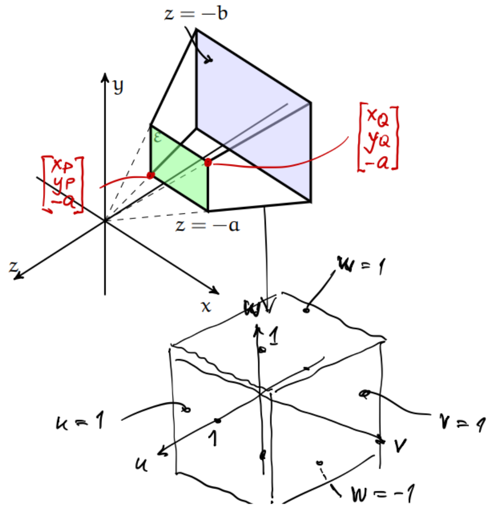
$$(ax_0 + by_0 + cz_0) \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -dx_0 \\ -dy_0 \\ -dz_0 \\ ax_0 + by_0 + cz_0 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.11 Perspektivische Projektionmatrix

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix}$$

2.12 Sichtvolumen Clipping

Das kanonische Sichtvolmen ist ein Würfel mit $P(\pm1, \pm1, \pm1)$
Defür sind vorne und hinten, sowie zwei Punkte bestimmend Grösse gegeben



P links unten, Q rechts oben
z vorne $z = -a$, z hinten $z = -b$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{2a}{x_Q - x_P} & 0 & \frac{x_Q + x_P}{x_Q - x_P} & 0 \\ 0 & \frac{2a}{y_Q - y_P} & \frac{y_Q + y_P}{y_Q - y_P} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b+a}{b-a} & -2\frac{ba}{b-a} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3 Curves

3.1 Kurvie in der Ebene

Explizite Darstellung
$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$
Kreis:
oberer Halbkreis $\sqrt{r^2 - x^2}$
unterer Halbkreis $\sqrt{r^2 - x^2}$

Implizite Darstellung
$F(x, y) = 0$
Kreis: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$

Parameterdarstellung
$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$
Punkte miteinander verbunden, einzeln angegeben
Kreis: $\begin{bmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{bmatrix}$

3.2 Kurve im Raum

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

3.3 Spirale entlang des Zylinders

$x^2 + y^2 = r^2$

$$\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} r\cos t \\ r sint \\ ht/(2\pi) \end{bmatrix}$$

Grundriss ergibt Kreis, Höhe Linear

3.4 Methode unbestimmte Koeffizienten

$P_3(x) = c_0 + c_1 x^2 + c_2 x^2 + c_3 x^3$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 1$

3.5 Lagrange Methode

$l_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots$
$L_0(x) = \frac{l_0(x)}{l_0(x_0)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots}$
$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n()$

$l_k(x) = \prod_{i=0 i\neq k}^{n} (x - x_i)$
$L_k(x) = \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)}$

3.6 Lineare Bézier spline

$P(t) = (1 - t)P_0 + P_1 (0 \leq t \leq 1)$
Gewichteter Durchschnitt der Kontrollpunkte

$P(t) = (P_1 - P_0)t + P_0$
Polynom in t

$P(t) = [P_0, P_1] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} (0 \leq t \leq 1)$
Matrizform

3.7 Quadric Bézier spline

drei Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2

$P_0^1(t) = (1 - t)P_0 + P_1$
$P_1^1(t) = (1 - t)P_0 + P_1$

$P(t) = (1 - t)^2 P_0 + 2(1 - t)tP_1 + t^2 P_2$

3.8 Qubic Bézier Spline

vier Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2, P_3

Mit P_0^1, P_1^1 *und*
$P_2^1(t) = (1 - t)P_2 + tP_3$

$P_1^2(t) = (1 - t)P_0^1(t) + tP_1^1(t)$
$P_2^2(t) = (1 - t)P_1^1(t) + tP_2^1(t)$

$P(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 tP_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3$

3.9 Bernsteinpolynome

4 Appendix

4.1 Radians

Winkel $\alpha°$	Bogenmass	Sinus	Kosinus
$0°$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$
$180°$	π	0	-1
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
$360°$	2π	0	1

$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+\tan^2(\alpha)}$, $\sin^2(\alpha) = \frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$