离散数学(1): 数理逻辑

Discrete Mathematics (1): Mathematical Logic

第二章 谓词逻辑

赵永望

zhaoyw@buaa.edu.cn

北京航空航天大学 计算机学院

命题逻辑的表达能力

- 自然语言：凡有理数都是实数，2/7是有理数，所以2/7是实数
- 这个逻辑命题成立，但从命题逻辑分析
  - p:凡有理数都是实数
  - q: 2/7是有理数
  - r: 2/7是实数
  - 根据命题逻辑，我们不能得出 $p, q \vDash r$
- 存在问题：自然语言表达的永真命题，表达为命题逻辑子句不是永真式。命题逻辑不能表达“任意”、“存在某个”等含义

引入谓词

- 命题逻辑中的简单命题，不再进行内部结构分析
- 考虑以下两个命题：
  - (1) $\sqrt{2}$是无理数
  - (2) $\sqrt{3}$是无理数
- 命题逻辑将它们作为独立的命题看待
- 实际上，它们有相同的谓词“是无理数”，只是主词不同
- 谓词P(x)表示x是无理数

引入量词

- 量化语句是用'任意'、'存在'等量词约束陈述句或复合语句。
  - 用“所有...”，“存在...”进一步修饰一个陈述句的主语或宾语。
  - 如果每个---是---，并且---是---，那么，---是---。
- $\forall x(inclass(x) \rightarrow student(x) \vee prof(x))$
- $\exists x(inclass(x) \wedge female(x))$

内 容

- 2.1. 谓词和量词
- 2.2. 项和公式
- 2.3. 解释和赋值
- 2.4. 永真式
- 2.5. 等值演算
- 2.6. 逻辑推论

主词和谓词

- $\sqrt{2}$是无理数
- $\sqrt{3}$是无理数
- 主词：$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$
- 谓词：是无理数，P(x)表示x是无理数
- 上述命题表示为P(a)和P(b)，a和b分别表示两个主词

个体和论域

- 数理逻辑中，一般将主词称为**个体**，它是一个命题里表示思维对象的词
- 例如$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$是研究的个体
- 研究个体时，一定有一个讨论的范围，这个范围是一个集合，称为**论域**
  - 例如所有正整数的集合
  - 所有人的集合、这个教室里在座学生的集合

谓词

- **一元谓词**
  - P(x), Q(x), …
- **二元谓词**
  - P(x,y), Q(x,y), …
- **N元谓词**
  - P(x1,x2, …, xn), Q(x1,x2, …, xn)
- **举例**
  - P(x,y):表示x大于y, “5大于3”表示为P(5,3)
  - P(x,y):表示x在y之上, “A在B之上”表示为P(A,B)
  - P(x,y,z)表示x,y和z是兄弟, “张三、李四和王五是兄弟”表示为P(张三,李四,王五)

变元x,y, …

谓词的值为1或0，表示真或假

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

量词

- 如果不研究具体的个体，而研究论域中的一般个体
- “所有正整数都大于0”
- “所有昆虫都是动物”
- “有的整数小于0”　“有的整数大于0”
- “有的动物会飞行”

- 全称量词 $\forall x$：凡是x、所有的x、每个x
- 存在量词 $\exists x$：有x、存在x、至少有一个x

量词举例

- “所有正整数都大于0”
  - $\forall x(PI(x) \to x > 0)$
- “所有昆虫都是动物”
  - $\forall x(INSECT(x) \to ANIMAL(x))$
- “有的整数小于0” “有的整数大于0”
  - $\exists x\,(INT(x) \wedge x < 0)$
  - $\exists x\,(INT(x) \wedge x > 0)$,
- “有的动物会飞行”
  - $\exists x\,(ANIMAL(x) \wedge FLY(x))$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

内 容

- 2.1. 谓词和量词
- 2.2. 项和公式
- 2.3. 解释和赋值
- 2.4. 永真式
- 2.5. 等值演算
- 2.6. 逻辑推论

回顾命题逻辑中的合式公式

- **定义1.5：**

研究的最小单元是命题(变元)/常量(0/1)；以及它们的逻辑运算

(1).常量0和1是合式公式；

(2).命题变元是合式公式；

(3).若Q,R是合式公式，则$(\neg Q)$、$(Q\wedge R)$、$(Q\vee R)$、$(Q\rightarrow R)$、$(Q\leftrightarrow R)$、$(Q\oplus R)$是合式公式；

(4).只有有限次应用(1)—(3)构成的公式是合式公式。

谓词逻辑不同在哪里?

- 命题不再是研究的最小单元
- 要进一步探讨命题中的主词(个体)以及谓词

- 个体：数、程序、微信朋友......
- 个体的研究，可以包括：
  - 个体的性质
  - 个体的运算
  - 个体间的关系
  - ...

什么是项、什么是公式？

- 项Term、公式Formula
  - 项：指代数学对象，包括个体
  - 公式：指代数学事实，其值为真/假
  - 项是公式的组成部分
- 项的例子 公式的例子
  - 20 x > 20
  - (x + 5) / 10 (x+5)/10 = 5
  - add(myflist, “Zhao”) isfriend(“Zhao”, me)

谓词逻辑的语言构成

- **逻辑符号**，包括变元、联接词、量词、逗号以及括号等：
  - 变　元：$x_1, x_2, \ldots$
  - 联接词：$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus$
  - 量　词：$\forall, \exists$
  - 逗　号：,
  - 括　号：(,)
- **非逻辑符号**，包括常元、函数、谓词等：
  - 常　元：$c_1, c_2, \ldots$
  - 函　数：$f_1^1, f_2^1, \ldots\ldots;\quad f_1^2, f_2^2, \ldots\ldots$
  - 谓　词：$P_1^1, P_2^1, \ldots\ldots;\quad P_1^2, P_2^2, \ldots.$

一阶谓词逻辑

- 一阶谓词逻辑是只有一种变元，即个体变元的谓词逻辑，也称为“狭义谓词逻辑”
  - $\forall x\,(inclass(x) \rightarrow student(x) \vee prof(x))$
- 如果有函数变元和谓词变元，并且允许对它们进行量化，称“二阶谓词逻辑”
  - $\forall f \forall Q \forall x\,(f(x) > 0 \rightarrow Q(x))$

项的定义

- **定义2.1: 项是按以下规则构成的有穷符号串**
  - (1) 个体常元是项；
  - (2) 个体变元是项；
  - (3) 若是$t_1, \ldots, t_n$项，f 是n元函数，则$f(t_1,\ldots,t_n)$是项。

- **注：个体常元、个体变元和函数都是不表示任何意义的抽象符号－区别于语法。**
  - a, b, c是个体常元；
  - x, y是个体变元,；
  - f_1^1是1元函数，f_1^2是2元函数
  - $f_1^2(a, f_1^1(x))$是项；而$f_1^2(a, b, c)$不是项，f_1^2不是3元函数

原子公式

- **定义2.2：** 若P是n元谓词符合，且$t_1, \ldots, t_n$项，则称$P(t_1, \ldots, t_n)$是原子公式

- 举例：若P是三元谓词符合，f是一元函数符合，则P(x,f(a),b)是原子公式，而P(f(b),x)不是原子公式

谓词逻辑合式公式

- **定义2.3：**合式公式是按如下规则构成的有穷长符号串
- (1) 每个原子公式是公式;
- (2) 若Q是公式，则$(\neg Q)$是公式；
- (3) 若Q和R是公式，则 $(Q \rightarrow R)$ 是公式；
- (4) 若Q是公式，x是变元，则$(\forall xQ)$ 是公式。

$$\exists xQ = \neg(\forall x(\neg Q))$$

$\{\neg, \rightarrow\}$是极小完全集

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

合式公式举例

- $\left(Q(f(a),b) \rightarrow \forall x\left(P(x) \rightarrow Q\left(f(x),g\left(f(x)\right)\right)\right)\right)$
- 其中，f,g是一元函数符号，P是一元谓词符号，Q是二元谓词符号

软件开发环境国家重点实验室
State Key Laboratory of Software Development Environment

合式公式

- 在逻辑语法研究中
  - 合式公式是由构成规则确定的有穷长符号串序列，仅仅是抽象符号串。
  - 合式公式不指称任何对象，也不表示任何意思。
  - 合式公式不表示任何语句的内容，也不表示公式的意义，具有高度的抽象性。
  - 人们对于同一个合式公式的理解都相同，不会产生二义性。

谓词和函数

- 函数的一般形式
  - $f: X \Rightarrow Y$
- 谓词是一类特殊的函数
  - $P: X \Rightarrow \{1, 0\}$，称P是X上的谓词

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

谓词和函数

- 一般说来，就研究数学语言和数学证明来说，在谓词逻辑语言中通常需要包括函数。
- 对于研究一般推理形式和规律来说，谓词逻辑也可以完全不涉及函数。
- 由谓词和常元组成命题，由谓词和个体变元组成的公式是命题形式。
- 由函数和个体构成的项指称个体，而不是命题。函数和个体变元组成的表达式是项形式而不是公式（命题形式）。
- 在分析命题的形式时，可以自由选择是否使用函数。虽然函数不是必不可少，但毕竟是不同于谓词的一种命题成份，有时表达命题比较方便。

子公式

- **定义2.5：** 若公式R在公式Q中出现，称R为Q的子公式。
- 例如公式$Q(f(a), b) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), g(x, c)))$的子公式有:
  - $Q(f(a), b)$,
  - $P(x)$,
  - $Q(f(x), g(x, c))$,
  - $\forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), g(x, c)))$
  - $Q(f(a), b) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), g(x, c)))$
  - …

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

约束和自由

- **定义2.6：**若(∀xQ)(或∃xQ)是公式，则称变元x在公式(∀xQ) (或∃xQ)中为约束出现，并称∀x出现的辖域为Q。
- 如果变元x在公式Q中的某次出现是在Q的一个子公式中的约束出现，则称x的该次出现为在Q中的约束出现。
- 如果变元x在公式Q中的某次出现不是约束出现，则称该出现为在Q中的自由出现。
- 在公式Q中自由出现的变元，称为A的自由变元，约束出现的变元称称为Q的约束变元。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

例2.10

- $\exists xQ = \neg(\forall x(\neg Q))$，所以定义2.6同样适用于量词$\exists x$
- 在公式$\forall x(Q(x) \rightarrow \exists yR(x, y))$中：
  - 变元x的3次和变元y的2次出现都是约束出现
  - 变元x, y都是约束出现；
  - 变元x出现的辖域为$Q(x) \rightarrow \exists yR(x, y)$；
  - 变元y出现的辖域为$R(x, y)$。
- 变元z在公式$\forall x (Q(x,z) \rightarrow \exists x\exists yR(x, y))$中是自由出现。

相同变元的多次出现

- 例2.11：$\forall xP(x) \rightarrow (\forall xQ(x) \rightarrow R(x))$
  $= (\forall xP(x)) \rightarrow ((\forall xQ(x)) \rightarrow R(x))$
- x的第1、2次出现是约束出现
- x的第3、4次出现是约束出现
- x的第5次出现是自由出现
- 辖域分别是P(x) 和 Q(x)

- 自由变元/约束变元是相对于某个公式的
  - x是公式$\forall xP(x)$ 的约束变元，却是它子公式P(x)的自由变元

基项、语句和开公式

- 定义2.7：不出现变元的项称为基项。没有自由变元的公式称为闭公式或语句。没有约束变元的公式称为开公式。
- 项a, f(a), g(a,f(b))都是基项，f(x)不是基项
- 公式P(a) →Q(b,f(a))既是语句，又是开公式
- 公式∀xP(x) 是语句，不是开公式
- 公式P(x)是开公式，不是语句
- 公式∀xP(x) →P(x)不是语句，也不是开公式

代换

- 定义2.8：若$x_1,\ldots,x_n$是不同的变元，$t_1,\ldots,t_n$是项，则称$\{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$为代换。
- 若t是项，$\{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$是代换，则t$\{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$是用$t_1,\ldots,t_n$分别代替t中$x_1,\ldots,x_n$的所有出现得到的项，简记为$t_{t_1,\ldots,t_n}^{x_1,\ldots,x_n}$
- 若A是公式，$\{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$是代换，则A$\{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$是用$t_1,\ldots,t_n$分别代替A中$x_1,\ldots,x_n$的所有自由出现得到的公式，简记为$A_{t_1,\ldots,t_n}^{x_1,\ldots,x_n}$

代换的例子

- 设t是$f(x,y)$，A是$\forall xP(x,y)\to P(x,y)$
- 则$t^{x,y,z}_{g(y),x,x}$是$f(g(y),x)$
- $A^{x,y,z}_{a,z,x}$是$\forall xP(x,z)\to P(a,z)$

可代入

- **定义2.9**：设$x_1,\ldots,x_n$是不同的变元，$t_1,\ldots,t_n$是项，A是公式。如果在公式$A_{t_1,\ldots,t_n}^{x_1,\ldots,x_n}$和A中变元的约束出现次数相同，则称$t_1,\ldots,t_n$对于A中的$x_1,\ldots,x_n$是可代入的
- 例：A为$\forall yP(x,y,z)$，则$A_{f(y),x,x}^{x,y,z}$为$\forall yP(f(y),y,x)$。
  - $\forall yP(x,y,z)$中约束变元出现次数为2
  - $\forall yP(f(y),y,x)$中约束变元出现次数为3
  - $f(y),x,x$对于A中的x,y,z不是可代入的

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

公式的闭包

- **定义2.10：**设A是公式，A的自由变元集合为$\{x_1,\ldots,x_n\}$，称公式$\forall x_1 \ldots \forall x_n A$为A的闭包

- 例：公式$P(x,y) \vee \exists z Q(z)$的闭包是$\forall x \forall y (P(x,y) \vee \exists z Q(z))$

- 每个语句的闭包是它自身

命题和命题形式

- 没有自由变元的合式公式是命题
- 含有自由变元的合式公式是命题形式

- 用量词把命题形式中的自由变元全部约束之后，就得一个命题。
- 关于量词的推理规律是与变元的自由出现和约束出现相联系的。
- 谓词逻辑主要研究量词的逻辑性质，因此称为做量词理论。

内 容

- 2.1. 谓词和量词
- 2.2. 项和公式
- **2.3. 解释和赋值**
- 2.4. 永真式
- 2.5. 等值演算
- 2.6. 逻辑推论

谓词逻辑公式的直观说明

- 合式公式：$\forall x(Q(x) \rightarrow R(x, x))$ (1)
  - 只是一个抽象的公式，没有明确的意义
  - 当确定论域，把谓词Q、R指定为论域中的一个一元关系及二元关系后，就具有确定的意义。
  - 选择有多种可能性
- 例如，论域是自然数集N，Q(x)表示 x自然数，
  - 若把谓词符号R指定为N中的二元关系≤，那么(1)就表示下面的真命题
    - $\forall x(Q(x) \rightarrow x \leq x)$
  - 若把谓词符号R指定为N中的二元关系<，那么(1)就表示下面的假命题
    - $\forall x(Q(x) \rightarrow x < x)$

谓词逻辑公式的直观说明

- 当公式中含有函数时，那么对公式的指定除了确定一个论域和谓词，还必需把n元函数指定为论域中的n元函数，例如，考虑公式
  - $\forall x(Q(x) \rightarrow f(x,\ a) = x)$　　　　（2）
- 以实数集R为个体域， 谓词Q(x)表示 x实数，
  - 若把f指定为加法运算+，常元a指定为个体0，(2)就表示真命题
    - $\forall x(Q(x) \rightarrow (x + 0 = x))$
  - 若把f指定为乘法运算×，常元a指定为个体0，(2)就表示假命题
  - $\forall x(Q(x) \rightarrow (x \times 0 = x))$

谓词逻辑公式的直观说明

- 闭公式经指定论域、谓词和函数后成为命题。
  - 不含有自由 (个体)变元的公式称为闭公式。
- 当一个公式中包含有自由变元时，在经指定 论域、谓词和函数后，得到的还不是命题，而是命题形式。
- 对公式$\forall y(Q(y) \rightarrow R(x, y))$，若以自然数集N为论域，指定谓词Q(x)表示x是自然数，R是关系≤，结果是命题形式:
  - $\forall y(Q(y) \rightarrow x \leq y)$ — x是自由变元
- 只有在对个体变元指定确定的值（个体域中的个体）后，才得到一个命题
  - 对x指定为0， $\forall y(Q(y) \rightarrow 0 \leq y)$；
  - 对x指定为1， $\forall y(Q(y) \rightarrow 1 \leq y)$；

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

论域

- 研究个体时，一定有一个讨论的范围，这个范围是一个集合，称为**论域**
  - 正整数、自然数、矩阵、图
  - 所有人的集合、这个教室里在座学生的集合

解释

- 定义2.11：一个解释I包括以下四个部分：
  - (1) 指定非空集合D_I，称为I的论域。
  - (2) 对于每个常元a，指派D_I中一个元素a^I 。
  - (3) 对于每个n元函数f，指派一个D_I上的一个n元运算f^I。
  - (4) 对于每个n元谓词Q，指派一个D_I上的一个n元谓词Q^I。
- 解释作用
  - 常元a，指派一个论域上的常量；
  - n元函数，指派一个论域上的n元函数；
  - n元谓词，指派一个论域上的n元谓词；
  - 解释规定了常元、函数和谓词的具体意义。

解释

- 本书讨论单类化谓词逻辑
  - 指定一个非空集合D_I：我们只有一个论域
  - one sorted: $\forall x \forall y (P(x, y) \vee \exists z Q(z))$，x/y/z的论域都是同一个
- 多类化谓词逻辑：x/y/z的论域可以不同
  - $(\forall x :: int)\ (\forall y :: human)(P(x, y) \vee (\exists z :: string) Q(z, y))$
  - P(x,y)：表示y的年龄大于x
  - Q(z,y)：表示y的姓名为z

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

赋值

- 解释规定了常元、函数和谓词的具体意义，但没有为变元规定具体的值
- **定义2.12：**设I是一个解释，从所有变元组成的集合到论域D_I的函数称为I中的赋值。
- 赋值的更新：设v是解释I中的赋值，$x_1,\ldots,x_n$是不同的变元，$d_1,\ldots,d_n$是D_I中的元素
  - $v[x_1/d_1,\ldots,x_n/d_n] = \begin{cases} d_1, \text{若y是}x_1 \\ \cdots \\ d_n, \text{若y是}x_n \\ v(y), \text{否则} \end{cases}$

项和公式的语义

- 解释和赋值共同确定项和公式的语义
- 给定一个解释I后，还不能确定项t指哪个个体，因为t中变元的值还未指定；对于公式来说，同样的情况，公式A中的自由变元的值还未指定
- 将I(t)看做从所有赋值的集合到论域的函数。
- 将I(A)看做从所有赋值的集合到真值集合的函数

项的语义

- **定义2.13：设v是解释I中的赋值，项t在解释I和赋值v下的意义I(t)(v)定义如下：**
  - (1) 若t是常元a，则$I(t)(v) = a^I$。
  - (2) 若t是变元x，则$I(t)(v) = v(x)$。
  - (3) 若t是f (t1, t2, …, tn)，则$I(t)(v) = f^I(I(t1)(v),\ldots, I(tn)(v))$。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

举例

- **例2.12：** 设f,g是二元函数符号，给定解释I如下：D_I为自然数集合，f^I为自然数乘法，g^I为自然数加法，$a^I=2$，I中赋值v是v(x)=1。项f(g(a,x),a)在I和v下的语义：

$$I(f(g(a,x),a))(v)$$
$$= f^I(I(g(a,x))(v),I(a)(v))$$
$$= f^I(g^I(I(a)(v),I(x)(v)),I(a)(v))$$
$$= f^I(g^I(a^I,v(x)), a^I)$$
$$= (2+1)*2 = 6$$

公式的语义

- **定义2.14：设v是解释I中的赋值，公式A在解释I和赋值v下的意义I(A)(v)定义如下：**
  - 若A是P(t1,…,tn)，其中P是n元谓词符号，t1,…,tn是项则

    $I(A)(v) = P^I(I(t1)(v), \ldots, I(tn)(v))$
  - 若A是¬ B，其中B是公式，则I(A)(v)= ¬I(B)(v)
  - 若A是B → C，其中B,C是公式，则

    I(A)(v)= I(B)(v) → I(C)(v)
  - 若A是∀xB，其中B是公式，x是变元，则
  - $I(A)(v) = \begin{cases} 1，对任何 d \in D_I, I(B)(v[x/d]) = 1 \\ 0，否则 \end{cases}$

软件开发环境国家重点实验室
State Key Laboratory of Software Development Environment

例2.13

- 设f是一元函数符号，Q,P分别是一元谓词符号和二元谓词符号，给定解释I如下：
  - $D_I=\{d,e\}$, $f^I(d)=e$, $f^I(e)=d$, $Q^I(d)=1$, $Q^I(e)=0$
  - $P^I(d,d)=1$, $P^I(d,e)=0$, $P^I(e,d)=0$, $P^I(e,e)=1$
  - I中的赋值v是$v(y)=e$
- 确定 $I(\forall x(P(f(x),y) \rightarrow Q(x)))(v)$ 的值

例2.13

- 根据定义2.14，确定 $I(P(f(x),y) \to Q(x))(v[x/d])$ 和 $I(P(f(x),y) \to Q(x))(v[x/e])$

自由变元的值由赋值指定，赋值并不为约束变元指定值；

- $I(P(f(x),y) \to Q(x))(v[x/d])$
$= I(P(f(x),y))(v[x/d]) \to I(Q(x))(v[x/d])$
$= P^I(f^I(d),v(y)) \to Q^I(d) = P^I(e,e) \to Q^I(d)$
$= 1 \to 1 = 1$
- $I(P(f(x),y) \to Q(x))(v[x/e])$
$= I(P(f(x),y))(v[x/e]) \to I(Q(x))(v[x/e])$
$= P^I(f^I(e),v(y)) \to Q^I(e) = P^I(d,e) \to Q^I(e)$
$= 0 \to 0 = 1$
- 所以，$I(\forall x(P(f(x),y) \to Q(x)))(v) = 1$

公式解释定理

- **定理2.1：设v是解释I中的赋值，A和B是公式**
  - $I(A \vee B)(v) = I(A)(v) \vee I(B)(v)$
  - $I(A \wedge B)(v) = I(A)(v) \wedge I(B)(v)$
  - $I(A \leftrightarrow B)(v) = I(A)(v) \leftrightarrow I(B)(v)$
  - $I(A \oplus B)(v) = I(A)(v) \oplus I(B)(v)$
  - $I(\exists xA)(v) = \begin{cases} 1\text{，若有} d \in D_I, I(A)(v[x/d]) = 1 \\ 0\text{，否则} \end{cases}$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

全称量词和存在量词

- 若解释I的论域有n个元素a1,…,an，v是I中赋值，A是公式，则
  - $I(\forall xA)(v)=I(A)(v[x/a1]) \wedge \ldots \wedge I(A)(v[x/an])$
  - $I(\exists xA)(v)=I(A)(v[x/a1]) \vee \ldots \vee I(A)(v[x/an])$
- 全称量词是合取的推广
- 存在量词是析取的推广

例2.14

- 设P是二元谓词符号，给定解释I如下
  - $D_I = \{a,b\}$, $P^I(a,a)=0$, $P^I(a,b)=1$, $P^I(b,a)=1$, $P^I(b,b)=0$
- 确定公式 $\forall x\exists y P(x,y)$和$\exists y\forall x P(x,y)$的在赋值v下的真值

$I(\forall x\exists y P(x,y))(v)$

$= I(\exists y P(x,y))(v[x/a]) \wedge I(\exists y P(x,y))(v[x/b])$

$= (I(P(x,y))(v[x/a][y/a]) \vee I(P(x,y))(v[x/a][y/b]))$

$\wedge (I(P(x,y))(v[x/b][y/a]) \vee I(P(x,y))(v[x/b][y/b]))$

$=(P^I(a,a) \vee P^I(a,b)) \wedge (P^I(b,a) \vee P^I(b,b))$

$=(0 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) = 1$

例2.14

$I(\exists y \forall x P(x,y))(v)$

$= I(\forall x P(x,y))(v[y/a]) \lor I(\forall x P(x,y))(v[y/b])$

$= I(P(x,y))(v[y/a][x/a]) \land I(P(x,y))(v[y/a][x/b])$

$\lor I(P(x,y))(v[y/b][x/a]) \land I(P(x,y))(v[y/b][x/b])$

$=P^I(a,a) \land P^I(b,a) \lor (P^I(a,b) \lor P^I(b,b))$

$=(0 \land 1) \land (1 \land 0) = 0$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

真值赋值定理

- **定理2.2**：设I_1和I_2是有同样论域的解释，v_1是I_1中的赋值，v_2是I_2中的赋值，t是项，A是公式
  - (1) 如果对于t中出现的每个常元、函数符号c，$c^{I_1}=c^{I_2}$，并且对于t中出现的每个变元x，$v_1(x)=v_2(x)$，则$I_1(t)(v_1)=I_2(t)(v_2)$
  - (2)如果对于A中出现的每个常元、函数符号、谓词符号c，$c^{I_1}=c^{I_2}$，并且对于A中出现的每个变元x，$v_1(x)=v_2(x)$，则$I_1(A)(v_1)=I_2(A)(v_2)$

代换定理

- **定理2.3：设v是解释I中的赋值。**
  - (1) 若t, t'是项，则$I\left(t_{t'}^{x}\right)(v)=I(t)(v[x/I(t')(v)])$
  - (2) 若项t对于公式A中的x是可代入的，则$I(A_{t}^{x})(v)=I(A)(v[x/I(t)(v)])$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

代换定理的证明

- (1) 对t进行归纳
  - 若t是x，则$I(t^x_{t'})(v) = I(t')(v) = I(t)(v[x/I(t')(v)])$
  - 若t是不同于x的变元y，则$I(t^x_{t'})(v) = I(y)(v) = v(y) = I(t)(v[x/I(t')(v)])$
  - 若t是常元a，则$I(t^x_{t'})(v) = I(a)(v) = a^I = I(t)(v[x/I(t')(v)])$
  - 若t是f$(t_1,\dots,t_n)$，其中f是n元函数符号，$t_1,\dots,t_n$是项，则$I(t^x_{t'})(v) = I\left(f\left({t_1}^x_{t'},\dots,{t_n}^x_{t'}\right)\right)(v) = f^I\left(I({t_1}^x_{t'})(v),\dots,I({t_n}^x_{t'})(v)\right) = f^I(I(t_1)(v[x/I(t')(v)]),\dots,I(t_n)(v[x/I(t')(v)])) = I(t)(v[x/I(t')(v)])$

代换定理的证明

- (2) 对A进行归纳
  - 若A是$P(t_1,\ldots,t_n)$，其中P是n元谓词符号，$t_1,\ldots,t_n$是项，则

$$I(A_t^x)(v)=I\left(P({t_1}_t^x,\ldots,{t_n}_t^x)\right)(v)$$

$$=P^I\left(I({t_1}_t^x)(v),\ldots,I({t_n}_t^x)(v)\right)$$

$$=P^I(I(t_1)(v[x/I(t)(v)]),\ldots,I(t_n)(v[x/I(t)(v)]))$$

$$=I(A)(v[x/I(t)(v)])$$

代换定理的证明

- (2) 对A进行归纳
  - 若A是¬ B， 则

$$I(A_t^x)(v) = I(\neg B_t^x)(v) = \neg I(B_t^x)(v)$$

$$= \neg I(B)(v[x/I(t)(v)]) = I(A)(v[x/I(t)(v)])$$

  - 若A是B → C， 则

$$I(A_t^x)(v) = I(B_t^x \to C_t^x)(v) =$$

$$= I(B_t^x)(v) \to I(C_t^x)(v)$$

$$= I(B)(v[x/I(t)(v)]) \to I(C)(v[x/I(t)(v)])$$

$$= I(A)(v[x/I(t)(v)])$$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

代换定理的证明

- (2) 对A进行归纳
  - 设A是∀yB，若x不是A的自由变元，则$A_t^x = A$，由定理2.2可知$I(A_t^x)(v)$ = $I(A)(v[x/I(t)(v)])$
  - 若$x \in Var(A)$, 则x和y是不同变元, $A_t^x = \forall y B_t^x$，因为t对于A中的x是可代入的，所有y不在t中出现。对每个d $\in D_I$, $I(t)(v) = I(t)(v[y/d])$

$$I(A_t^x)(v) = 1$$

当且仅当(iff) 对每个d $\in D_I$, $I(B_t^x)(v[y/d]) = 1$

iff 对每个d $\in D_I$, $I(B)(v[y/d, x/I(t)(v[y/d])]) = 1$

iff 对每个d $\in D_I$, $I(B)(v[x/I(t)(v), y/d]) = 1$

iff $I(A)(v[x/I(t)(v)]) = 1$

代换定理的推论

- 设$x_1,\ldots,x_n$是不同的变元，项$t_1,\ldots,t_n$对于公式A中的$x_1,\ldots,x_n$是可代入的，v是I中的赋值，则

$$I(A^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n})(v)$$
$$= I(A)(v[x_1/I(t_1)(v),\ldots,x_n/I(t_n)(v)])$$

- 证明方法同定理2.3

公式的满足性

- **定义2.15：设I是解释，A是公式**
  - 如果对于I中的每个赋值v，I(A)(v)=1，则称A在I中为真，也称I满足A，I是A的模型，记为 $I \vDash A$
  - 如果对于I中的每个赋值v， I(A)(v)=0，则称A在I中为假。

- **例2.15：考虑公式P(a,y)，给定解释如下：**
  - D_I 为自然数集合, $a^I=1$，对任意自然数m,n，$P^I(m,n)=1$当且仅当$m\le n$
  - 给定I中两个赋值v1和v2，使v1(y)=2, v2(y)=0，则I(P(a,y))(v1) = 1，I(P(a,y))(v2)=0。
  - 所以， P(a,y)在I中既不为真也不为假

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

- 例2.16：考虑公式∀yP(a,y)，解释I如下：
  - D_I 为自然数集合, $a^I=1$，对任意自然数m,n，$P^I(m,n)=1$当且仅当m≤n
  - 则它在I中为假
- 如取I_1如下$D_{I_1}=D_I, P^{I_1}=P^I, a^{I_1}=0$
- 则∀yP(a,y)在I_1中为真

结构和模型

- **定义**：给定一阶语言L以及论域D和解释I，偶对$\langle D, I\rangle$称为L的结构，记为$S = \langle D, I\rangle$。
- **定义**：给定一阶语言L以及它的结构S和赋值v，偶对$\langle S, v\rangle$称为L的模型，记为$\mathrm{M} = \langle S, v\rangle$。
- 模型规定了项和公式的意义，即给定一个语言L，模型规定了项和公式的意义。
  - 命题：结构也是模型；
  - 命题形式：结构及赋值是模型

内 容

- 2.1. 谓词和量词
- 2.2. 项和公式
- 2.3. 解释和赋值
- 2.4. 永真式
- 2.5. 等值演算
- 2.6. 逻辑推论

主要问题

- 有些公式在一些模型下为真，而在另一些模型下为假。
  - 例如：公式$\exists x\forall y R(x,y)$和$\forall y\exists x R(x,y)$，
  - 在自然数论域中
    - 谓词$R(x,y)$解释为关系≤，有公式$\exists x\forall y(x\le y)$和$\forall y\exists x(x\le y)$
    - 最小数为0
    - 在结构$<U_N, I>$上，$\sigma(\exists x\forall y(x\le y))=1$和$\sigma\forall y\exists x(x\le y))=1$。
  - 在整数论域中
    - 谓词$R(x,y)$解释为关系≤，有公式$\exists x\forall y(x\le y)$和$\forall y\exists x(x\le y)$
    - 在结构$<U_I, I>$上，$\sigma(\forall y\exists x(x\le y))=1$，而$\sigma(\exists x\forall y(x\le y))=0$。
- 有些合式公式在任意模型下都为真，如$\forall x Q(x)\vee\neg\forall x Q(x)$。有些合式公式在任意模型下都为假，如$\forall x Q(x)\wedge\neg\forall x Q(x)$。
- 主要工作
  - 求证一个公式在什么模型下为真或为假；
  - 或者求证一个公式在所有的模型下是为真还是为假。

永真式/永假式/可满足式

- **定义2.16：** 设A是公式。
- (1) 如果A在每个解释中为真，则称A**永真式**，也称A为逻辑有效的公式。
- (2) 如果A在每个解释中为假，则称A**永假式**，也称A为矛盾式，不可满足式。
- (3) 如果有解释I和I中的赋值v使I(A)(v)=1，则称A为**可满足式**，并称解释I和赋值v满足A。

一些结论

- 永真式都是可满足式
- 公式A是可满足式，当且仅当它不是永假式
- 公式A是永假式，当且仅当A不是可满足式
- 公式A是永真式，当且仅当$\neg$A是永假式
- 公式A是永假式，当且仅当$\neg$A是永真式

重言式

- **公式永真式有两类**
  - 一类公式的永真性是由联结词的性质决定的，它与量词的意义无关，这类永真式也称为**重言式**
    - 如$\forall xQ(x) \rightarrow (\exists xR(x) \rightarrow \forall xQ(x))$为真，它与谓词意义无关，仅由联结词的性质决定，$Q \rightarrow (R \rightarrow Q)$是永真式；
  - 一类永真式的永真性是由量词的意义决定的
    - 如$\forall xQ(x) \rightarrow Q(x)$，$Q \rightarrow R$不是永真式，$\forall xQ(x) \rightarrow Q(x)$的用真值性是由谓词意义决定的，这类永真式不是重言式。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

重言式

- **定义2.17：** 用谓词逻辑公式$B_1,\ldots,B_n$分别替换命题逻辑公式A中的命题变元$p_1,\ldots,p_n$得到谓词逻辑公式$A^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}$，称为A的替换实例。
- 命题逻辑永真式的替换实例称为**重言式**
- **定理2.4：** 重言式必是永真式

- 初等公式：原子公式和形式为∀xA的公式
- 如果把初等公式看作命题变元，不同的初等公式看作不同的命题变元，该公式称为命题逻辑的永真式，则该公式是谓词逻辑的重言式

举例

- $(\forall xA \to \forall x(A \lor B)) \to ((\forall xB \to \forall x(A \lor B)) \to (\forall xA \lor \forall xB \to \forall x(A \lor B)))$
- $(p \to r) \to ((q \to \mathrm{r}) \to (p \lor q \to r))$
- **这是一个命题逻辑的永真式，因此原公式是重言式**

举例

- 若A,B,C都是谓词逻辑公式，则
  - $A \to (\mathrm{B} \to \mathrm{A})$
  - $(A \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C})) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
  - $(\neg A \to \neg B) \to (\mathrm{B} \to \mathrm{A})$
  - 都是重言式，因而也是永真式
- 并非所有的永真式都是重言式

- **例2.17：考察公式 $\forall xA \rightarrow A_t^x$，是否为永真式？其中A是任意公式，项t对于A中的x是可代入的**

- **若解释I和I中的赋值v使$I(A_t^x)(v)=0$，因为$I(A_t^x)(v)=I(A)(v[x/I(t)(v)])$，所以有$d \in D_I$使$I(A)(v[x/d])=0$，I$(\forall xA)(v)=0$。因此$\forall xA \rightarrow A_t^x$是永真式**

- **例2.18：** 判断以下公式是否为永真式/永假式/可满足式：
  - (1) $\exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$
  - (2) $\forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$
  - (3) $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$

- **例2.19：** 设n是正整数，$x_1,\ldots,x_n$是不同的变元，项$t_1,\ldots,t_n$对于公式A中的$x_1,\ldots,x_n$是可代入的，则$\forall x_1 \ldots \forall x_n A \to A^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$是永真式
- 设v是解释I中的赋值，若$\mathrm{I}(\forall x_1 \ldots \forall x_n A)(v) = 1$，则对于任意$d_1,\ldots,d_n \in D_I$，$I(A)(v[x_1/d_1, \ldots, x_n/d_n]) = 1$
- 所以，$\mathrm{I}\left(A^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}\right)(v) = 1$
- 所以，是永真式

内 容

- 2.1. 谓词和量词
- 2.2. 项和公式
- 2.3. 解释和赋值
- 2.4. 永真式
- 2.5. 等值演算
- 2.6. 逻辑推论

公式等值的定义

- **定义2.18**：设A和B是公式，如果对于每个解释I和I中每个赋值v，都有$I(A)(v) = I(B)(v)$，则称"**A和B等值**"，也称"**A与B逻辑等价**"，记为$A \Leftrightarrow B$
- 显然$A \Leftrightarrow B$，当且仅当$A \leftrightarrow B$是永真式
- 例2.20：$P(x)$和$P(y)$是否等值？
  - 若x和y是不同的变元，则不等值
  - 若x和y是相同的变元，则等值

等值定理

- 定理2.5：设A,B,C,D是任意公式，x是任意变元
  - (1) 若$A \Leftrightarrow B$，则$\neg A \Leftrightarrow \neg B$
  - (2) 若$A \Leftrightarrow B, C \Leftrightarrow D$，则
    - $A \rightarrow C \Leftrightarrow B \rightarrow D$，$A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge D$，$A \vee C \Leftrightarrow B \vee D$
    - $A \leftrightarrow C \Leftrightarrow B \leftrightarrow D$，$A \oplus C \Leftrightarrow B \oplus D$
  - (3) 若$A \Leftrightarrow B$，则$\forall xA \Leftrightarrow \forall xB$，$\exists xA \Leftrightarrow \exists xB$

等值定理的证明

- (3) 若$A \Leftrightarrow B$，则$\forall xA \Leftrightarrow \forall xB$，$\exists xA \Leftrightarrow \exists xB$
  - 证明思路：证明两个公式A和B等值，只需证明对任意解释I和I中的任意赋值v，I(A)(v)=1当且仅当I(B)(v)=1，或者I(A)(v)=0当且仅当I(B)(v)=0
- 任取解释I和I中赋值v，因为$A \Leftrightarrow B$，因此对每个$d \in D_I$，$I(A)(v[x/d]) = I(B)(v[x/d])$
- 因此，对每个$d \in D_I, I(A)(v[x/d]) = 1$，当且仅当对每个$d \in D_I, I(B)(v[x/d]) = 1$
- 所以$\forall xA \Leftrightarrow \forall xB$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

等值式：存在和全称量词

- 命题逻辑1.3节中的等值式中，将A,B,C理解为任意的**谓词逻辑公式**，仍然正确

- A,B是任意公式，x,y是任意变元
- (1) $\neg\forall xA \Leftrightarrow \exists x\neg A$　　$\neg\exists xA \Leftrightarrow \forall x\neg A$
- (2) $\forall xA \Leftrightarrow \forall yA_y^x$　　$\neg xA \Leftrightarrow \neg yA_y^x$
  - (y不是A的自由变元且对于A中的x可代入)

等值式：存在和全称量词

- (3) x不是B的自由变元
  - $\forall x(A \vee B) \Leftrightarrow \forall xA \vee B$ $\forall x(A \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA \wedge B$
  - $\forall x(A \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA \rightarrow B$ $\forall x(B \rightarrow A) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall xA$
  - $\exists x(A \vee B) \Leftrightarrow \exists xA \vee B$ $\exists x(A \wedge B) \Leftrightarrow \exists xA \wedge B$
  - $\exists x(A \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA \rightarrow B$ $\exists x(B \rightarrow A) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists xA$
- (4)
  - $\exists x(A \vee B) \Leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$
  - $\forall x(A \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$
- (5)
  - $\exists x \exists y A \Leftrightarrow \exists y \exists x A$ $\forall x \forall y A \Leftrightarrow \forall y \forall x A$
  - 注意：$\forall x \exists y A \not\Leftrightarrow \exists y \forall x A$

等值式证明

- **证明：** $\neg\forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A$

对于任意解释I和I中的任意赋值v

$I(\neg\forall x A)(v) = 0$，当且仅当$I(\forall x A)(v) = 1$，

当且仅当对每个$d \in D_I$，$I(A)(v[x/d]) = 1$，

当且仅当对每个$d \in D_I$，$I(\neg A)(v[x/d]) = 0$，

根据定理2.1： $I(\exists x A)(v) = \begin{cases} 1，若有 d \in D_I, I(A)(v[x/d]) = 1 \\ 0，否则 \end{cases}$

当且仅当$I(\exists x \neg A)(v) = 0$

等值式证明

- **证明：** $\neg\exists xA \Leftrightarrow \forall x\neg A$

  对于任意解释I和I中的任意赋值v

  $I(\neg\exists xA)(v) = 1$，当且仅当$I(\exists xA)(v) = 0$，

  根据定理2.1： $I(\exists xA)(v) = \begin{cases} 1，若有 d \in D_I, I(A)(v[x/d]) = 1 \\ 0，否则 \end{cases}$

  当且仅当对每个$d \in D_I$，$I(A)(v[x/d]) = 0$，

  当且仅当对每个$d \in D_I$，$I(\neg A)(v[x/d]) = 1$，

  根据定义2.14： $I(\forall xB)(v) = \begin{cases} 1，对任何 d \in D_I, I(B)(v[x/d]) = 1 \\ 0，否则 \end{cases}$

  当且仅当$I(\forall x\neg A)(v) = 1$

等值式证明

- **证明：$\forall xA \Leftrightarrow \forall yA_y^x$。其中，y不是A的自由变元且对于A中的x可代入**

若y与x相同，等值式显然成立。下面考虑x与y不同的情况

任取$d \in D_I$，$I(A_y^x)(v[y/d]) =$
$I(A)(v[y/d, x/I(y)(v[y/d])]) = I(A)(v[y/d, x/d])$
因为y不是A的自由变元，有$I(A)(v[y/d, x/d]) =$
$I(A)(v[x/d])$，因此$I(A_y^x)(v[y/d]) = I(A)(v[x/d])$

$$I(\forall xA)(v) = 1$$

当且仅当对每个$d \in D_I$，$I(A)(v[x/d]) = 1$

当且仅当对每个$d \in D_I$，$I(A_y^x)(v[y/d]) = 1$

当且仅当$I(A_y^x)(v) = 1$

等值式证明

- **证明：** $\forall x(A \vee B) \Leftrightarrow \forall xA \vee B$ 。其中， x不是B的自由变元

任取$d \in D_I$，因为x不是B的自由变元，所以

$I(B)(v) = I(B)(v[x/d])$

$$I(\forall x(A \vee B))(v) = 0$$

当且仅当有$d \in D_I$，$I(A \vee B)(v[x/d]) = 0$

当且仅当有$d \in D_I$，$I(A)(v[x/d]) = I(B)(v[x/d]) = 0$

当且仅当有$d \in D_I$，$I(A)(v[x/d]) = I(B)(v) = 0$

当且仅当$I(\forall xA))(v) = I(B)(v) = 0$

当且仅当$I(\forall xA \vee B))(v) = 0$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

等值式证明

- **证明：** $\forall x(A \to B) \Leftrightarrow \exists xA \to B$ 。其中，x 不是B的自由变元

$$I(\forall x(A \to B))(v) = 0$$

当且仅当有$d \in D_I$，$I(A \to B)(v[x/d]) = 0$

当且仅当有$d \in D_I$，$I(A)(v[x/d]) = 1$且$I(B)(v[x/d]) = 0$，而$I(B)(v[x/d]) = I(B)(v)$

当且仅当$I(\exists xA)(v) = 1$且$I(B)(v) = 0$

当且仅当$I(\exists xA \to B)(v) = 0$

等值式证明

- **证明：** $\exists x(A \to B) \Leftrightarrow \forall xA \to B$ 。其中， x不是B的自由变元

$$I(\exists x(A \to B))(v) = 0$$

当且仅当对每个$d \in D_I$，$I(A \to B)(v[x/d]) = 0$

当且仅当对每个$d \in D_I$，$I(A)(v[x/d]) = 1$且$I(B)(v[x/d]) = 0$，而$I(B)(v[x/d]) = I(B)(v)$

当且仅当$I(\forall xA)(v) = 1$且$I(B)(v) = 0$

当且仅当$I(\forall xA \to B)(v) = 0$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

等值式证明

- **证明：** $\exists x(B \to A) \Leftrightarrow B \to \exists xA$ 。其中， x不是B的自由变元

$\exists x(B \to A) \Leftrightarrow \exists x(\neg A \to \neg B)$

$\Leftrightarrow \exists x(\neg A \to \neg B)$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg A \to \neg B)$ (根据上一个等值式)

$\Leftrightarrow \neg\neg B \to \neg\forall x\neg A$

$\Leftrightarrow B \to \exists xA$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

等值式证明

- **证明：** $\forall x(A \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$。

$$I(\forall x(A \wedge B))(v) = 0$$

当且仅当有$d \in D_I$，$I(A \wedge B)(v[x/d]) = 0$

当且仅当有$d \in D_I$，$I(A)(v[x/d]) = 0$或$I(B)(v[x/d]) = 0$

当且仅当$I(\forall xA)(v) = 0$或$I(\forall xB)(v) = 0$

当且仅当$I(\forall xA \wedge \forall xB)(v) = 0$

$\forall$对于$\wedge$可分配，但对于$\vee$不可分配

$$\forall x(A \vee B) \not\Leftrightarrow \forall xA \vee \forall xB$$

等值式证明

- **证明：** $\exists x(A \lor B) \Leftrightarrow \exists xA \lor \exists xB$。

$\exists x(A \lor B) \Leftrightarrow \neg\forall x\neg(A \lor B)$

$\Leftrightarrow \neg\forall x(\neg A \land \neg B)$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x\neg A \land \forall x\neg B)$ (根据上一个等值式)

$\Leftrightarrow \neg\forall x\neg A \lor \neg\forall x\neg B$

$\Leftrightarrow \exists xA \lor \exists xB$

$\exists$对于$\lor$可分配，但对于$\land$不可分配

$\exists x(A \land B) \not\Leftrightarrow \exists xA \land \exists xB$

内 容

逻辑推论的定义

- **定义2.19：** 设Γ是公式集合，若解释I和I中的赋值v满足Γ中的每个公式，则称**I和v满足Γ**。若有解释I和I中的赋值v满足Γ，则称Γ是**可满足的**。否则称Γ是**不可满足的**。
- **定理2.6：** 有穷非空集$\{A_1, \ldots, A_n\}$是可满足的，当且仅当$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$是可满足式。
- **定义2.20：** 若满足公式集合Γ的每一个解释I和I中的赋值v都满足公式A，称A是 Γ 的**逻辑推论**，也称由Γ可语义推出A，记为$\Gamma \vDash A$。若A不是Γ的逻辑推论，记为$\Gamma \nvDash A$
- $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$，将$\Gamma \vDash A$简记为$A_1, \ldots, A_n \vDash A$；将$\emptyset \vDash A$简记为$\vDash A$

逻辑推论与蕴含

- **定理2.7**：设A是公式，$\vDash A$当且仅当A是永真式
- **定理2.8**：设$A_1, \dots, A_n, B$是公式，$A_1, \dots, A_n \vDash B$当且仅当$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$是永真式
  - 充分性：设$A_1, \dots, A_n \vDash B$，任取I和v，若$I(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)(v) = 1$，则$I(A_i)(v) = 1$，有$\mathrm{I}(\mathrm{B})(v) = 1$。因此$\mathrm{I}(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B)(v) = 1$
  - 必要性：设$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$是永真式，任取I和v，若$I(A_i)(v) = 1$，则$I(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)(v) = 1$，有$\mathrm{I}(\mathrm{B})(v) = 1$。因此$A_1, \dots, A_n \vDash B$

逻辑推论与等值

- **定理2.9：设A,B是公式，$A \Leftrightarrow B$当且仅当$A \vDash B$ 且 $B \vDash A$**
  - $A \Leftrightarrow B$
  - 当且仅当$A \leftrightarrow B$是永真式
  - 当且仅当$A \rightarrow B$和$B \rightarrow A$都是永真式
  - 当且仅当$A \vDash B$ 和 $B \vDash A$

举例

- 例2.21：设A,B是任意公式， $\forall xA \vee \forall xB \vDash \forall x(A \vee B)$
  - 任取I和v，若 $\mathrm{I}(\forall xA \vee \forall xB) = 1$，则 $\mathrm{I}(\forall xA) = 1$ 或 $\mathrm{I}(\forall xB) = 1$
  - 若 $\mathrm{I}(\forall xA) = 1$，则对每个 $d \in D_I$， $I(A)(v[x/d]) = 1$，有 $I(A \vee B)(v[x/d]) = 1$，有 $I(\forall x(A \vee B))(v) = 1$，因此 $\forall xA \vee \forall xB \vDash \forall x(A \vee B)$
  - 若 $\mathrm{I}(\forall xB) = 1$，同理得证
- 例2.22：A是任意公式，$\forall x \forall yA \vDash \forall xA_x^y$，其中x对于A中的y是可代入的。
  - 若x与y相同，则 $A_x^y = A$， $\forall x \forall yA \to \forall xA$ 是永真式，得证。
  - 若x与y不相同，任取I和v使得 $\mathrm{I}(\forall x \forall yA)(v) = 1$，则对于每个 $d \in D_I$， $\mathrm{I}(\forall yA)(v[x/d]) = 1$。因此 $\mathrm{I}(A_x^y)(v[x/d]) = I(A)(v[x/d, y/d]) = 1$。得证。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

举例

- **例2.23**：设Γ是公式集合，A是公式，变元x不是Γ中任何公式的自由变元。若$\Gamma \vDash A$，则$\Gamma \vDash \forall x A$
  - 设任意I和v满足Γ，对于每个$d \in D_I$和Γ中的每个公式B，因为x不是B的自由变元，有$I(B)(v[x/d\,]) = I(B)(v) = 1$。
  - 由$\Gamma \vDash A$，得$I(A)(v[x/d\,]) = 1$，因此$I(\forall x A)(v) = 1$，得证。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

- **定理2.10：公式集合Γ是不可满足的，当且仅当每个公式都是Γ的逻辑推理**
  - 设$\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$，任取公式B
  - 若Γ不可满足，则对于任意I和v，$I(A_1 \wedge \cdots \wedge$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

- **定理：Γ 是公式集合， A是公式。若 $\Gamma \vDash A$ ，当且仅当$\Gamma \cup \{\neg A\}$不可满足。**

本　节　完!

问题与解答?