离散数学(1): 数理逻辑
Discrete Mathematics (1): Mathematical Logic

自然语言与逻辑命题

赵永望
zhaoyw@buaa.edu.cn
北京航空航天大学 计算机学院

特殊命题逻辑表达

- $\forall x \forall y Q(x, y)$：
  - 所有的x和所有的y有关系Q(x, y)
- $\forall x \exists y Q(x, y)$ ：
  - 所有的x，都存在(至少)一个y有关系Q(x, y)
- $\exists x \forall y Q(x, y)$ ：
  - 存在(至少)一个的x，对所有的y有关系Q(x, y)
- $\exists x \exists y Q(x, y)$ ：
  - 存在(至少)一个的x，存在(至少)一个y有关系Q(x, y)

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

特殊命题逻辑表达（续）

- 如果Q和R是命题，则命题表示形式为
  - (1). “既不Q，也不R”： $\neg Q \wedge \neg R$
  - (2). “要么Q，要么R ”： $(\neg Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R)$
  - (3). “只有Q，才能R ”： $\neg Q \rightarrow \neg R$(或$R \rightarrow Q$)
  - (4). “除非Q，否则R ”： $\neg Q \rightarrow R$
  - (5). “Q，除非R ”： $\neg R \rightarrow Q$

- “仅有一个x”
  - $\exists! x Q(x) \Leftrightarrow \exists x\, (Q(x) \wedge (\forall y\, Q(y) \rightarrow x=y))$
- “至多有一个x”
  - $\exists!! x Q(x) \Leftrightarrow \forall x \forall y (Q(x) \wedge Q(y) \rightarrow x=y)$

软件开发环境国家重点实验室
State Key Laboratory of Software Development Environment

自然语言规范表达

- **例题：每个自然数都大于0。**

- **语句规范过程：**
  - **(1).因为量词'任意'与词'每个'含义相同，所以语句改为**
    - '任意自然数都大于0'。
  - **(2). 量词'任意'是约束客体**
    - 语句'任意自然数都大于0'的含义不是'任意客体x，x大于0'，而是满足约束条件'x是自然数'的任意客体x，具有性质'x大于0 '。

- **语句应改为**
- **"任意x，如果x是自然数，那么，x大于0 "。**
- **$Q_0(x)$表示：x是自然数；R(x)表示：x>0。**
- **$\forall x(Q_0(x) \rightarrow R(x))$**

软件开发环境国家重点实验室
State Key Laboratory of Software Development Environment

自然语言表达逻辑语言

- 例题：存在自然数等于0。

- 语句规范过程：
- (2). 量词'存在'约束客体
  - 语句'存在自然数等于0'的含义是

    '存在客体x，x是自然数，并且x=0 '。
- 语句应改为
- '存在x， x是自然数，并且x=0 '。
- $Q_0(x)$表示：x是自然数；$Q_1(x,y)$表示：x=y。
- $\exists x(Q_0(x) \wedge Q_1(x,0))$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

符号化一般方法（1）

- **自然知识可以表示为命题，所有的自然律也可以表达为命题。**
- **自然语言的命题符号化方法：**
  - **(1).在复合语句中识别出陈述句，并用下划线标出**
  - **(2).陈述语句符号化**
    - 相同（不同）的客体用相同(不同)符号表示
    - 相同（不同）函数用相同（不同）符号表示
    - 相同（不同）性质或关系用相同（不同）符号表示
  - **(3).联接词及量词符号化**
    - '并且'表示为'∧'，'或'表示为'∨'，'并非'表示为'¬'，'如果…，则…。'表示为'→'，'当且仅当'表示为'↔'
    - '任意'表示为'∀'，'存在'表示为'∃'，形成符号化的命题。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

符号化一般方法（2）

- 例题：如果n是奇数，则n^2是奇数。
- (1).陈述句识别
  - 如果n是奇数，则n^2是奇数。
- (2).陈述句符号化
  - 如果$Q_0(n)$，则$Q_0(n^2)$。
- (3).联接词符号化
  - $Q_0(n) \to Q_0(n^2)$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

符号化一般方法（3）

- 例题：对于任意x，如果x是自然数，则存在y，y是自然数，并且y大于x。
- (1).陈述句识别
  - 对于任意x，如果x是自然数，则存在y，y是自然数，并且y大于x。
- (2).陈述句符号化
  - 对于任意x，如果$Q_0(x)$，则存在y，$Q_0(y)$，并且$Q_1(y,x)$。
- (3).联接词和量词符号化
  - $\forall x\,(Q_0(x)\rightarrow\exists y(Q_0(y)\wedge Q_1(y,x)))$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

符号化一般方法（4）

- 例题：对于任意x，如果x是自然数，则存在y，y是自然数，并且y是x后继。
- (1).陈述句识别
  - 对于任意x，如果x是自然数，则存在y，y是自然数，并且y是x后继。
- (2).陈述句符号化
  - 对于任意x，如果$Q_0(x)$，则存在y，$Q_0(y)$，并且$Q_1(y,x)$。
- (3).联接词和量词符号化
  - $\forall x\,(Q_0(x) \rightarrow \exists y(Q_0(y) \wedge Q_1(y,x)))$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

符号化机械过程

- 自然语言的命题符号化方法是机械式过程，无需理解具体概念的含义，仅仅将相同的客体、函数、性质或关系分别用相同符号表示。
- 复合语句由简单语句、联接词及量词构成。
  - 首先，识别出简单语句，而后，简单语句符号化。
  - 复合语句由符号化的简单命题形式和联接词及量词构成。
  - 复合语句就可以根据联接词及量词的含义，形成符号化的命题。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

命题与论域

- 通常，对各种不同论域的命题进行逻辑分析，其结果能应用于各种不同论域。因此，客体变元不仅仅作用于某一个论域，而作用于所用的论域。

- 命题：存在自然数x是素数。
  - 存在x，x是自然数并且x是素数。
  - Q(x)：x是自然数；R(x)：x是素数；
  - $\exists x(Q(x) \wedge R(x))$
- 命题：所有自然数x，有x=x。
  - 所有x，如果x是自然数，那么x=x。
  - Q(x)：x是自然数；
  - $\forall x(Q(x) \rightarrow x=x)$

软件开发环境国家重点实验室
State Key Laboratory of Software Development Environment

- **命题： $\forall x \forall y(x<y \leftrightarrow \exists z(S(z)+x=y))$**
- **在自然数论域中**
  - $\forall x(N(x) \rightarrow 0 \le x)$是真，$\exists x (N(x) \wedge \forall y(N(y) \rightarrow x \le y))$是真，$\forall x \forall y(N(x) \wedge N(y) \rightarrow (x + y = y + x))$是真；$\forall x \forall y(N(x) \wedge N(y) \rightarrow (x + y \le y))$是假。
- **在整数论域中，**
  - $\forall x(I(x) \rightarrow 0 \le x)$是假；$\exists x(I(x) \wedge \forall y(I(y) \rightarrow x \le y))$是假，
  - $\forall x \forall y((I(x) \wedge I(y) \rightarrow (x + y = y + x))$是真
  - $\forall x \forall y(I(x) \wedge I(y) \rightarrow (x + y \le y))$是假。
- **在论域上的命题**
  - 有些命题在自然数论域和整数论域中都为真；
  - 有些命题在自然数论域中为真，而在整数论域中为假；
  - 有些命题在自然数论域和整数论域中都为假。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

数学分析概念

- 在研究过程中，首先用定义的方式给出概念，而后研究概念的性质以及概念之间的关系，形成定理。
- 概念的定义是复合语句，也能够用机械方式符号化。
- 自然语言表达序列极限、函数极限、连续、一致连续、导数等概念，人们可能有二义性理解，即人们对这些概念含义会有不同的理解。
- 如果这些概念符号化，那么，人们对这些概念的理解就会相同。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

极限的定义

- **柯西：** 当属于一个变量的相继值无限地趋近某个固定值时，如果以这样一种方式告终，变量值同固定值之差小到我们希望的任意小，那么这个固定值就称为其他所有值的极限。
- **维尔斯特拉斯：**

  对于任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得只要$0<|x-x_0|<\delta$，就有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

  《微积分的历程—从牛顿到勒贝格》
- **数学语言**

  $\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow$

  $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x(0<|x-x_0|<\delta$： $|f(x)-A|<\varepsilon)$

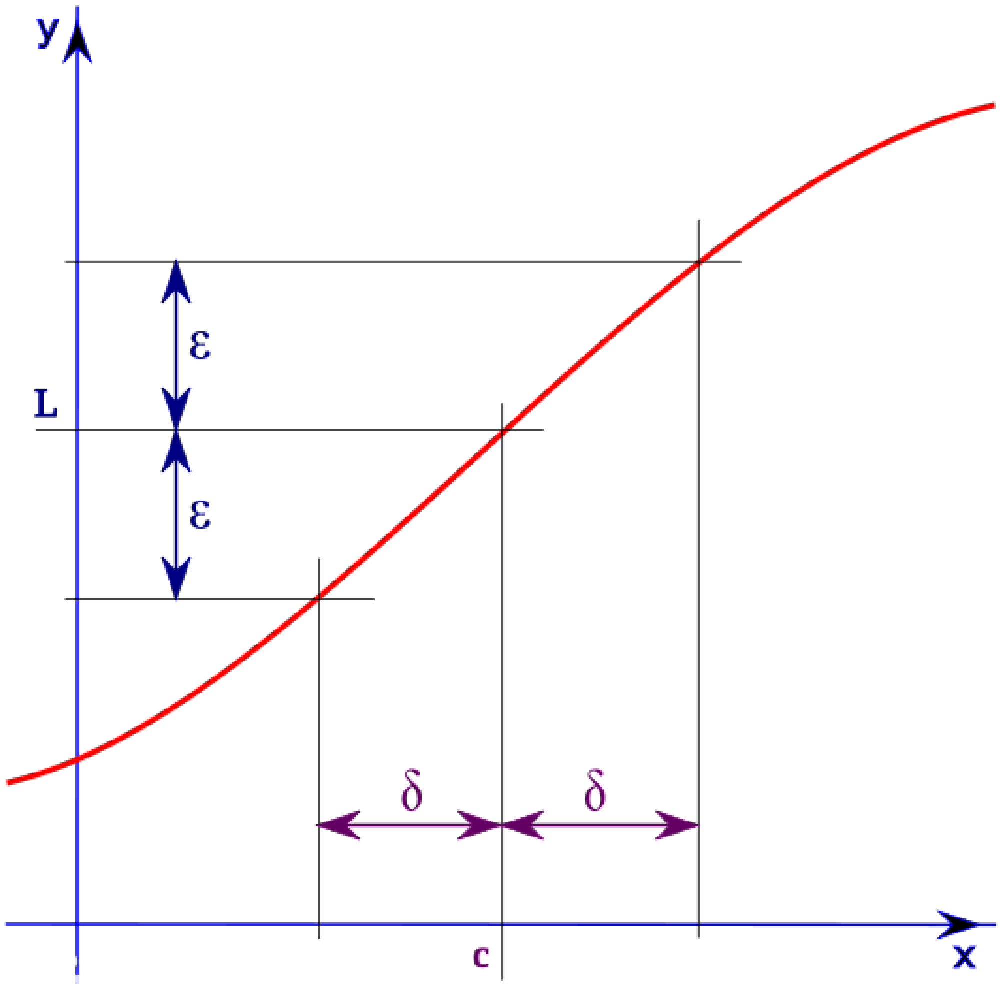
软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

序列的极限

- 定义：设$\{x_n\}$是序列，对于任意$\varepsilon>0$，存在$N>0$，对于任何n，当$n>N$时，都有$|x_n-b|<\varepsilon$，则称序列$\{x_n\}$的极限是b，记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$。
  - (1) 陈述句识别：
    - 对于任意ε，ε>0，存在N，N>0，对于任何n，当n>N时，都有$|x_n-b|<\varepsilon$。
  - (2).陈述句符号化：
    - 任意ε，ε>0，存在N，N>0，对于任意n，当n>N时，都有$|x_n-b|<\varepsilon$。
  - (3).联接词和量词符号化
    - $\forall\varepsilon(\varepsilon>0\rightarrow\exists N(N>0\wedge\forall n(n>N\rightarrow|x_n-b|<\varepsilon)))$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

函数极限



软件开发环境国家重点实验室
State Key Laboratory of Software Development Environment

函数极限

- 定义：设$f(x)$是函数，对于任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对于任何x，当$|x-x_0|<\delta$时，都有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称x趋于x_0时，函数$f(x)$的极限为A。
- (1). 陈述句识别：
  - 对于任意ε，<u>ε>0</u>，存在δ，<u>δ>0</u>，对于任何x，当<u>$|x-x_0|<\delta$</u>时，都有<u>$|f(x)-A|<\varepsilon$</u>。
- (2).陈述句符号化：
  - 任意ε，<u>ε>0</u>，存在δ，<u>δ>0</u>，对于任意x，当<u>$|x-x_0|<\delta$</u>时，都有<u>$|f(x)-A|<\varepsilon$</u>。
- (3).联接词和量词符号化
  - $\forall\varepsilon(\varepsilon>0\rightarrow\exists\delta(\delta>0\wedge\forall x(|x-x_0|<\delta\rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon)))$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

函数在某点连续

- 定义：对于任意ε>0，存在δ>0，对于任何x，当$|x-x_0|<\delta$时，都有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称x趋于$x_0$时，函数$f(x)$在$x_0$点连续，$x_0$点为连续点。
- (1).陈述句识别：
  - 对于任意ε，ε>0，存在δ，δ>0，对于任何x，当$|x-x_0|<\delta$时，都有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。
- (2).陈述句符号化：
  - 任意ε，ε>0，存在δ，δ>0，对于任何x，当$|x-x_0|<\delta$时，都有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。
- (3).联接词和量词符号化
  - $\forall\varepsilon(\varepsilon>0\rightarrow\exists\delta(\delta>0\wedge\forall x(|x-x_0|<\delta\rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)))$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

函数在某点连续和极限的关系

- 设函数f(x)在点x_0的某个邻域内有定义，如果有 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数在点 x_0 处连续，且称x_0为函数的的连续点。

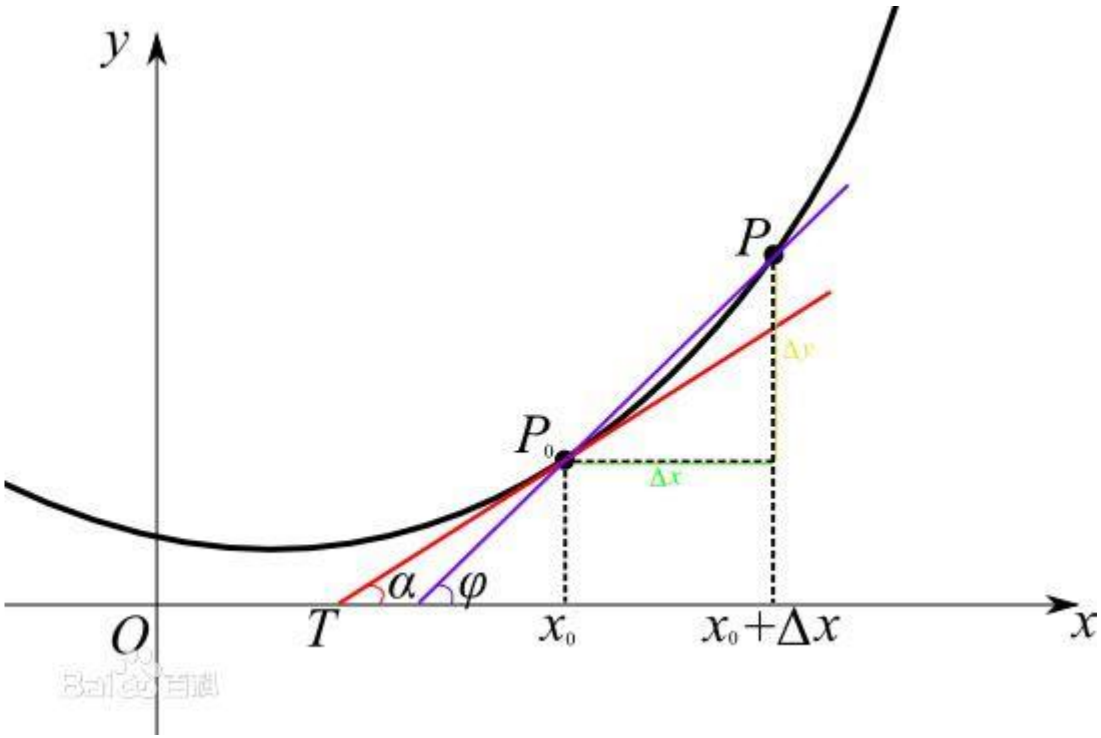
软件开发环境国家重点实验室
State Key Laboratory of Software Development Environment

函数一致连续

- 定义：对于任意ε>0，存在δ>0，对于任何x_1和x_2，当 $|x_1-x_2|<\delta$时，都有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，则称函数$f(x)$一致连续。
- (1).陈述句识别：
  - 对于任意ε，ε>0，存在δ，δ>0，对于任何x_1和x_2，当 $|x_1-x_2|<\delta$时，都有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。
- (2).陈述句符号化：
  - 任意ε，ε>0，存在δ，δ>0，对于任何x_1和x_2，当$|x_1-x_2|<\delta$时，都有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。
- (3).联接词和量词符号化
  - $\forall\varepsilon(\varepsilon>0\rightarrow\exists\delta(\delta>0\land\forall x_1\forall x_2(|x_1-x_2|<\delta\rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon)))$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

导数



导数

- 定义：对于任意ε>0，存在δ>0，对于任何x，当$|x-x_0|<\delta$时，都有$|(f(x)-f(x_0))/(x-x_0)-A|<\varepsilon$，则称函数f(x)在$x_0$点可导，导数为A。
- (1)陈述句识别：
  - 对于任意ε，ε>0，存在δ，δ>0，对于任何x，当$|x-x_0|<\delta$时，都有$|(f(x)-f(x_0))/(x-x_0)-A|<\varepsilon$。
- (2).陈述句符号化：
  - 任意ε，ε>0，存在δ，δ>0，对于任何x，当$|x-x_0|<\delta$时，都有$|(f(x)-f(x_0))/(x-x_0)-A|<\varepsilon$。
- (3).联接词和量词符号化
  - $\forall\varepsilon(\varepsilon>0\rightarrow\exists\delta(\delta>0\wedge\forall x(|x-x_0|<\delta\rightarrow|(f(x)-f(x_0))/(x-x_0)-A|<\varepsilon))$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

极限唯一性

- 定理：若序列的极限存在，则极限值唯一。
- $\forall\varepsilon(\varepsilon>0\to\exists N_1(N_1>0\land\forall n(n>N_1\to|x_n-a|<\varepsilon)),$
  $\forall\varepsilon(\varepsilon>0\to\exists N_2(N_2>0\land\forall n(n>N_2\to|x_n-b|<\varepsilon))$

  $\vDash a=b$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

极限有界性

- **定理：若序列$\{x_n\}$有极限，则$\{x_n\}$有界。**
- $\forall\varepsilon(\varepsilon>0\to\exists N(N>0\land\forall n(n>N\to|x_n-a|<\varepsilon)))$

  $\vDash \exists M(M>0\land\forall n(n>0\to|x_n|<M))$

软件开发环境国家重点实验室
State Key Laboratory of Software Development Environment

符号化作用

- 理解了联接词∧,∨,¬,→,↔的含义以及量词∀,∃的含义
- 理解了符号化的原子命题含义是真值
- 准确表达定义
  - 准确地描述符号化的序列极限、函数极限、连续、一致连续、导数等概念

- 各个论域上的命题具有一般的表达方式。

软件开发环境国家重点实验室
State Key Laboratory of Software Development Environment

概念与论域

- **概念**
  - 基本概念：不加定义的概念
  - 派生概念：由基本概念运用逻辑定义方法直接或间接规定的概念。
  - 概念表示为对象集合。
- **关系与运算**
  - 概念的有序偶集合是关系。
  - 关系具有唯一映射性是运算。

软件开发环境国家重点实验室
State Key Laboratory of Software Development Environment

概念与论域（续）

- 定义：论域是一个数学系统，记为D=<S,F,R>，简记为D。它由三部分组成：
- (1)一个非空对象集合S，每个对象也称为客体；
- (2) 一个关于D的函数集合F；
- (3)一个关于D的关系集合R。
- 在论域上，研究对象性质、运算性质、关系性质以及定理。
- 自然数论域：<N,{+, ×,+1},{=, >,<,≥,≤}>
- 整数论域：<INT,{ +, -,×,+1},{=, >,<,≥,≤}>
- 定理： Q前提，R结论。即，如果Q成立，则R成立。

软件开发环境国家重点实验室
State Key Laboratory of Software Development Environment

命题的逻辑构造

- 命题：
  - 概念定义是命题。
  - 运算定义是命题。
  - 关系定义是命题。
  - 定理是命题。
- 逻辑命题能由自然语言描述机械式的变换为逻辑描述。
  - 联接词$\wedge,\vee,\neg,\rightarrow,\leftrightarrow$
  - 量词$\forall,\exists$
  - 谓词、函词和常元
- 逻辑命题是形式的。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

本　节　完！

问题与解答？

软件开发环境国家重点实验室
State Key Laboratory of Software Development Environment