离散数学(1): 数理逻辑

Discrete Mathematics (1): Mathematical Logic

第一章 命题逻辑

赵永望

zhaoyw@buaa.edu.cn

北京航空航天大学 计算机学院

命题逻辑

- 命题逻辑研究的是<u>命题的推理演算</u>

- 先看个命题逻辑谜题：
  - 一个岛上居住着两类人：骑士和无赖。骑士说的都是真话，无赖只会说假话。你碰到两个人A和B，如果A说“B是骑士”，而B说“我们两个是两类人”，判断A和B是什么人？
  - 设p = “A是骑士”，q= “B是骑士”
  - (1)假设p为真，则q也为真，则“$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$”为真，产生矛盾！！
  - (2)假设p为假，则q也为假，则“$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$”为真，符合！！

论域举例：自然数域

- 论域：任何科学理论都有它的研究对象，这些对象构成一个不空的集合，称为论域，论域是一个数学系统。
- 对象：0, 1, 2, 3, ...
  - 自然数集合
- 运算：+, - , * , /, mod, ...
- 关系：=, >, <, ...

论域举例：自然数域

- 加法运算法则
- 乘法运算法则
- 除法运算法则

- 结合律、交换律、分配律等

1+1=2								
2+1=3	1+2=3							
3+1=4	2+2=4	1+3=4						
4+1=5	3+2=5	2+3=5	1+4=5					
5+1=6	4+2=6	3+3=6	2+4=6	1+5=6				
6+1=7	5+2=7	4+3=7	3+4=7	2+5=7	1+6=7			
7+1=8	6+2=8	5+3=8	4+4=8	3+5=8	2+6=8	1+7=8		
8+1=9	7+2=9	6+3=9	5+4=9	4+5=9	3+6=9	2+7=9	1+8=9	
9+1=10	8+2=10	7+3=10	6+4=10	5+5=10	4+6=10	3+7=10	2+8=10	1+9=10

1x1=1								
1x2=2	2x2=4							
1x3=3	2x3=6	3x3=9						
1x4=4	2x4=8	3x4=12	4x4=16					
1x5=5	2x5=10	3x5=15	4x5=20	5x5=25				
1x6=6	2x6=12	3x6=18	4x6=24	5x6=30	6x6=36			
1x7=7	2x7=14	3x7=21	4x7=28	5x7=35	6x7=42	7x7=49		
1x8=8	2x8=16	3x8=24	4x8=32	5x8=40	6x8=48	7x8=56	8x8=64	
1x9=9	2x9=18	3x9=27	4x9=36	5x9=45	6x9=54	7x9=63	8x9=72	9x9=81

论域举例：自然数域

- 证明: $(a + b + c) * d = a * d + b * d + c * d$
  - $(a + b + c) * d = (a + b)*d + c*d = a*d + b*d + c*d$
- 证明: $12 * 12 = 4 * 36$
  - $12 * 12 = (10+2)*12 = 10*12+2*12 =120 + 24 = 144$
  - $4*36 = 4*(30+6) = 4*30 + 4*6 = 120 + 24 = 144$

最简单的论域—逻辑域

- 定义：逻辑对象是真和假，也称为逻辑真值，简称真值，记为1和0。
- 逻辑真值集合是{0,1}。
- 在真值集合上可以定义逻辑运算和逻辑关系。
- 真值集合以及逻辑运算、逻辑关系统称为逻辑域
- 定义：表达逻辑真值的变元，称为逻辑变元，简称变元。
  - 一般用小写英文字母表示：p, q, r, t, ...

最简单的论域—逻辑域（续）

- 逻辑对象：{0,1}
- 逻辑关系：{=, $\models$ }
- 真值表
  - 一组逻辑自变量与一个逻辑因变量的对应表
  - n个自变量，1个因变量，n元函数
- 真值表定义逻辑运算和关系

- 逻辑运算（联结词）
  - 非 $\neg$
  - 与 $\wedge$
  - 或 $\vee$
  - 如果…,则…。 $\rightarrow$
  - 当且仅当 $\leftrightarrow$
  - 异或 $\oplus$

内 容

自然语言与命题

- 自然语言是人们思维和交际的工具，也是一种表达观念的符号系统。
- 自然语言由各种句式的语句组成，如陈述句、疑问句、感叹句、祈使句等等。

- 陈述句是表达一个事实的语句。
- 陈述句的意义就是对一个事实的判断，即确定陈述句是真，还是假。

命题与命题变元

- 命题
  - 命题逻辑的基本要素
  - 它是一个陈述句，具有确定的真假意义，不能既真又假
- 疑问句、指令句等不是命题
  - “你是谁？”，“请认真学习离散数学！”
- 真命题：陈述句为真的命题，用1或T表示
- 假命题：陈述句为假的命题，用0或F表示
- {0,1}称为真值集合，假命题的真值为0，真命题的真值为1
- 命题变元：p, q, r, s, t等
  - 例如：p = “雪是白色的”
  - 例如：p = 0

命题判断

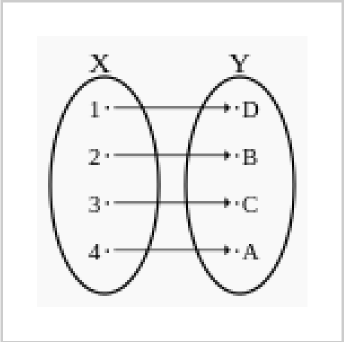
- “雪是白色的”，真命题
- 2 > 9，假命题
- 人类于21世纪在月球居住，命题（但不知道真假）
- x + y > 5，不是命题
- “我正在说谎”，不是命题
  - 说谎者悖论，命题的意义自相矛盾

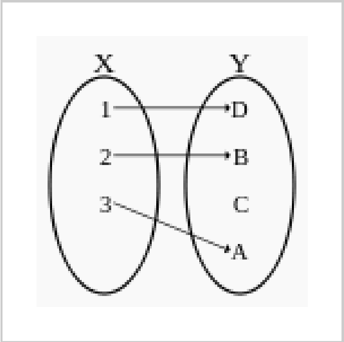
简单/复合命题

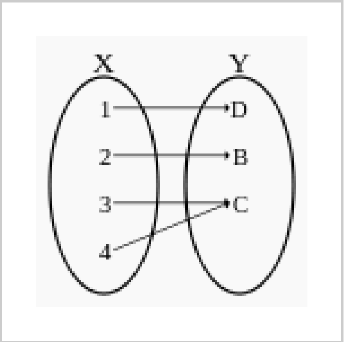
- **简单命题（原子命题）**
  - 由简单陈述句表述的命题
  - 命题逻辑不再分析简单命题的内部结构
- **复合命题**
  - 自然语言使用联结词将简单句组合成复合句
  - “北京在广州南面，而且北京航空航天大学在北京”
  - 复合句表述的命题称为“复合命题”
  - 构成复合命题的命题，称为它的“支命题”
  - 复合命题的真值，由其支命题的真值和联结词共同决定

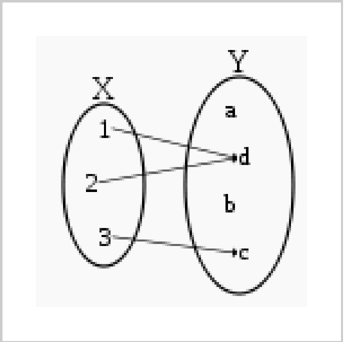
联结词

- **定义1.1：** 0和1称为0元真值函数。设$n \geq 1$，称$\{0,1\}^n$到$\{0,1\}$的函数为n元**真值函数**。真值函数也称为**联结词**
- **什么是函数？**









- 0元真值函数，实际上就是常量，有两种：0和1

联结词

- 1元真值函数，有4种。为什么？

p	F1(p)	F2(p)	F3(p)	F4(p)
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

  - F1(p) = 0　　F2(p) = p　　F3(p) = $\neg$p　　F4(p) = 1

- 2元真值函数，有多少种？（$2^4 = 16$）

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

- N元真值函数，有2^{2^n}种

真值表

- **真值表由逻辑变量每种取值组合以及相对应的唯一值列表组成。**
  - 每个逻辑变量均有0、1两种取值
  - 按二进制数递增方式排列起来
  - 每个逻辑公式为一列
  - 将对应的逻辑函数值写相应位置上

真值表		
p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

真值表		
p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

逻辑联结词 ¬

- 定义1.2：设p是逻辑变量，p的否定运算记为¬p，读作非p。
- 一个陈述句的否定

真值表	
p	¬p
0	1
1	0

- 逻辑联接词¬的含义：
- 非
- $\neg 1=0$
- $\neg(\neg 0)=\neg 1=0$
- $\neg(5>3)=\neg 1=0$
- $\neg(5>3)=(5\le 3)=0$

逻辑联结词 ∧

- 定义1.3：设p和q是逻辑变量，p和q的合取运算记为p∧q，读作p且q。

真值表		
p	q	p∧q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- 逻辑联接词∧的含义：
- 并且

- $0\wedge 1=0$
- $(\neg 0)\wedge 1=1\wedge 1=1$
- $(5>3)\wedge(4>2)=1\wedge 1=1$
- $(5<3)\wedge(4>2)=0\wedge 1=1$

逻辑联结词 ∨

- 定义1.3：设p和q是逻辑变量，p和q的析取运算记为p∨q，读作p或q。

真值表		
p	q	p∨q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- 逻辑联接词∨的含义：
- 或者

- $1 \vee 0 = 1$
- $1 \wedge (\neg 1) \vee (\neg 0) = 1 \wedge 0 \vee 1 = 0 \vee 1 = 1$
- $(5<3) \vee (4>2) = 0 \vee 1 = 1$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

逻辑联结词 →

- 定义1.3：设p和q是逻辑变量，p和q的蕴涵运算记为p→q，读作如果p则q。
- p称为前件，q称为后件

真值表		
p	q	p→q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- 逻辑联接词→的含义：
- 如果…,则…。

- $((\neg 1)\wedge 1)\rightarrow(0\ \vee(\neg 1))$
- $=(0\wedge 1)\rightarrow(0\ \vee 0)$
- $=0\rightarrow 0$
- $=1$

- $(5>3)\rightarrow(5>0) = 1\rightarrow 1 = 1$
- $(3>5)\rightarrow(5>0) = 0\rightarrow 1 = 1$
- $(3>5)\rightarrow(0>5) = 0\rightarrow 0 = 0$
- 考虑：$(x>5)\rightarrow(x>0)$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

逻辑联结词 ↔

- 定义1.3：设p和q是逻辑变量，p和q的互蕴涵运算记为p↔q，读作p当且仅当q。

真值表		
p	q	p↔q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- 逻辑联接词↔的含义：
- 当且仅当

- $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- 考虑：$(x-5)=0 \leftrightarrow (x=5)$

逻辑联结词 ⊕

- 定义1.3：设p和q是逻辑变量，p和q的异或运算记为p⊕q，读作p与q异或。

真值表		
p	q	p⊕q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- 逻辑联接词⊕的含义：
- 异或
- $(1\oplus 0)\oplus(1\oplus 1)$
- $=1\oplus 0$
- $=1$
- 考虑：$(x>1)\oplus(x\leq 1)$ 和 $(x>2)\oplus(x<1)$
- $p\oplus q=(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

相等关系

- 定义：设p和q是逻辑变量，p和q的等关系记为p=q，读作p与q相等。

真值表		
p	q	p=q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- 逻辑关系词=的含义：
- 相等

推论关系

- 定义：设p和q是逻辑变量，p和q的推论关系记为p$\models$ q，读作p推出q。
- p称为前提，q称为结论

真值表		
p	q	p$\models$q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- 逻辑关系词$\models$的含义：
- 推出

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

命题符号化

- “李明是计算机系的学生，他住在312室或者313室”
  - $p \land (q \oplus r)$
- 如果我下班早且不累，就去商店看看
  - $(p \land (\neg q)) \to r$
- “燕子飞回来是春天来了的必要条件”
  - p:燕子飞回来
  - q:春天来了
  - $q \to p$
- 如果明天下雨，就不开运动会而照常上课
  - $p \to ((\neg q) \land r)$

内 容

- 1.1. 命题和联结词
- 1.2. 公式和真值赋值
- 1.3. 等值演算
- 1.4. 对偶定理
- 1.5. 联结词的完全集
- 1.6. 范式
- 1.7. 逻辑推论

什么是公式(formula)

- 数学公式：(x + sin y) × 2
- x + + y sin：是表达式，但不是公式

- 命题逻辑公式：
  - 0, 1
  - p, q, r
  - $p \wedge q$, $p \vee q$, $\neg p$, $p \rightarrow q$,
  - $p \wedge q \vee p$

- 定义1.4：命题变元称为原子公式

命题合式公式Well-formed formula

- **定义1.5：**

(1).常量0和1是合式公式；

(2).命题变元是合式公式；

(3).若Q,R是合式公式，则$(\neg Q)$、$(Q\wedge R)$、$(Q\vee R)$、$(Q\rightarrow R)$、$(Q\leftrightarrow R)$、$(Q\oplus R)$是合式公式；

(4).只有有限次应用(1)—(3)构成的公式是合式公式。

合式公式举例

- $(Q \rightarrow 0) \vee (Q \rightarrow 1)$
- $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg P$
- $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$
- $(Q \rightarrow R) \rightarrow (Q \wedge P \rightarrow R \wedge P)$

公式复杂度及合式公式序

- 公式P的复杂度表示为FC(P)
  - 常量0和1，复杂度为0。
  - 命题变元复杂度为0，如果p是命题变量，则 FC (p)=0。
  - 如果公式$P=\neg Q$，则FC (P)=FC(Q)+1。
  - 如果公式$P=Q\wedge R$，或
  - $P=Q\vee R$，或
  - $P=Q\rightarrow R$，或
  - $P=Q\leftrightarrow R$，或
  - $P=Q\oplus R$，或
  - 则FC (P)=max{FC(Q), FC(R)}+1。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

联结词的优先级

- **联结词的优先级**
  - 从高到低的顺序排列为：¬、∧、∨、 ⊕ 、→、↔
  - 同一个联结词连续多次出现且无括号，则按从左至右的顺序运算
- **在满足运算次序不变的情况下，运用联结词的优先级规则可以减少合式公式括号**

联结词的优先级

- $(((((p \wedge q) \vee r) \vee q) \rightarrow p) \oplus q) \leftrightarrow r$

  $= ((((p \wedge q \vee r) \vee q) \rightarrow p) \oplus q) \leftrightarrow r$

  $= (((p \wedge q \vee r \vee q) \rightarrow p) \oplus q) \leftrightarrow r$

  $=((p \wedge q \vee r \vee q \rightarrow p) \oplus q) \leftrightarrow r$

  $=(p \wedge q \vee r \vee q \rightarrow p) \oplus q \leftrightarrow r$

- $p \wedge q \wedge r \wedge s = ((p \wedge q) \wedge r) \wedge s$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

合式公式判断

- 判断$\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$合式公式

p， q是合式公式

$\neg p$, $\neg q$, $p\wedge q$是合式公式

$\neg(p\wedge q)$, $(\neg p\vee\neg q)$是合式公式

$\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$是合式公式

合式公式判断（续）

- 判断$(p \rightarrow 0) \wedge (q \rightarrow 1)$是合式公式

- 0, 1合式公式
- p， q是合式公式
- $(p \rightarrow 0)$， $(q \rightarrow 1)$是合式公式
- $(p \rightarrow 0) \wedge (q \rightarrow 1)$是合式公式

命题逻辑公式的含义：真值

- 对于一个命题逻辑合式公式，其逻辑真值是什么？
  - 什么情况下为真？
  - 什么情况下为假？
- 一个合式公式与逻辑真值之间的对应关系。

真值表

- 真值表由逻辑变量每种取值组合以及相对应的唯一值列表组成。
  - 每个逻辑变量均有0、1两种取值
  - 按二进制数递增方式排列起来
  - 每个逻辑公式为一列
  - 将对应的逻辑函数值写相应位置上

- 真值表用来定义联结词
- 真值表用来计算合式公式
- 真值表用来验证运算性质

真值表		
p	q	$p\wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

真值表		
p	q	$p\vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

真值表

- 计算合式公式

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1

真值赋值函数

- 定义1.6：从全体命题变元集合P到逻辑集合{0,1}的函数，称为真值赋值函数，记为v 。
  - $v: \boldsymbol{P} \Rightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$
- 设v是真值赋值函数，命题变元$\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}$，用$\boldsymbol{p}^{v}$表示$v$赋给p的真值, $\boldsymbol{p}^{v} \in \{0, 1\}$。

合式公式的真值：公式的语义

- 设S是联结词的集合是{¬，∧，∨，⊕，→，↔}。
- 由S生成的合式公式Q在真值赋值v下的**真值指派**$v(Q)$：
- (1) $v(0)=0, v(1)=1$
- (2) 若Q是命题变元p，则$v(Q)=p^v$
- (3) 若Q_1,Q_2是合式公式
  - 若Q=¬Q_1，则$v(Q)=\neg v(Q_1)$
  - 若Q=$Q_1 \wedge Q_2$，则$v(Q)=v(Q_1)\wedge v(Q_2)$
  - 若Q=$Q_1 \vee Q_2$，则$v(Q)=v(Q_1)\vee v(Q_2)$
  - 若Q=$Q_1 \rightarrow Q_2$，则$v(Q)=v(Q_1)\rightarrow v(Q_2)$
  - 若Q=$Q_1 \leftrightarrow Q_2$，则$v(Q)=v(Q_1)\leftrightarrow v(Q_2)$
  - 若Q=$Q_1 \oplus Q_2$，则$v(Q)=v(Q_1)\oplus v(Q_2)$

举例

- 求公式$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$真值
- 首先将公式$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$按公式产生结构逐次分解成$p \wedge q, \neg(p \wedge q), \neg p, \neg q, \neg p \vee \neg q$等子公式，而后分别求其值，最后求得公式$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$真值。

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1

- 真值表求合式公式逻辑值有容易、直观的优点。
- 当命题变量较多时，命题变量真值有组合数大，公式复杂，难以计算等缺点。

真值赋值定理

- **定理1.1：设Q是公式，v_1和v_2是真值赋值，对于Q中出现的任何命题变元p，都有$p^{v_1} = p^{v_2}$，则有$v_1(Q) = v_2(Q)$**

- **证明：对公式Q进行归纳**
  - Q=0
  - Q=1
  - Q=p （命题变元）
  - Q是合式公式
    - 若Q=$\neg$Q$_1$，由$v_1(Q_1) = v_2(Q_1)$得$v_1(Q) = v_2(Q)$
    - 若Q=Q$_1 \wedge$ Q$_2$，由$v_1(Q_1) = v_2(Q_1)$和$v_1(Q_2) = v_2(Q_2)$得。。。
    - 若Q=Q$_1 \vee$ Q$_2$，由$v_1(Q_1) = v_2(Q_1)$和$v_1(Q_2) = v_2(Q_2)$得。。。
    - 若Q=Q$_1 \to$ Q$_2$，由$v_1(Q_1) = v_2(Q_1)$和$v_1(Q_2) = v_2(Q_2)$得。。。
    - 若Q=Q$_1 \leftrightarrow$ Q$_2$，由$v_1(Q_1) = v_2(Q_1)$和$v_1(Q_2) = v_2(Q_2)$得。。。
    - 若Q=Q$_1 \oplus$Q$_2$，由$v_1(Q_1) = v_2(Q_1)$和$v_1(Q_2) = v_2(Q_2)$得。。。

公式的可满足性和有效性

- 定义1.7： 设Q是公式。
- (1)如果真值赋值 v 使得 $v(Q) = 1$，则称 v 满足Q。
- (2)如果每个真值赋值都满足Q，则称Q为有效式，或称为永真式，也称为重言式。
- (3)如果每个真值赋值都不满足Q，则称Q为永假式，也称为矛盾式，不可满足式。
- (4)如果至少有一个真值赋值满足Q，则称Q为可满足式。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

举例

•

真值赋值	p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow p \wedge q$
v_1	0	0	0	1	1	0
v_2	0	1	0	1	1	0
v_3	1	0	0	1	1	0
v_4	1	1	1	0	1	0

可满足式　　永真式　　永假式

公式的可满足性和有效性

- 永真式都是可满足式
- 公式Q是可满足式，当且仅当它不是永假式
- 公式Q是永真式，当且仅当$\neg Q$是永假式
- 公式Q是永假式，当且仅当$\neg Q$是永真式

代换/替换

- **定义1.8**：用$B_1,\ldots,B_n$公式分别代换公式Q中的不同命题变元$p_1,\ldots,p_n$得到的公式记为

$$Q[p_1/B_1,\ldots,p_n/B_n] \text{ 或 } Q^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n},$$

称为Q的代换实例。

- **代换产生新的公式**

$$(p\wedge\neg p\rightarrow q)^{p,q}_{r\rightarrow p,r}$$

  - $=(r\rightarrow p)\wedge\neg(r\rightarrow p)\rightarrow r$　　　　$(p/r\rightarrow p,\ q/r)$

State Key Laboratory of Software Development Environment 软件开发环境国家重点实验室

代换定理

- **定理1.2：设$p_1, \ldots, p_n$是不同命题变元，Q, $B_1, \ldots, B_n$是公式。则对于每个真值赋值v，**

$$v(Q^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}) = v[p_1 / v(B_1), \ldots, p_n / v(B_n)](Q)$$

  - 其中真值赋值$v' = v[p_1 / v(B_1), \ldots, p_n / v(B_n)]$定义如下：

$$p^{v'} = \begin{cases} v(B_1) & 若p是p_1 \\ & \cdots \\ v(B_n) & 若p是p_n \\ p^{v} & 否则 \end{cases}$$

证明

- **证明：对Q进行归纳。**
- **(1)若Q是p_i，其中1≤i≤n，则**

$$v(Q^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}) = v(B_i) = v'(Q)$$

- **(2)若Q是除$p_1,\ldots,p_n$之外的命题变元p，则**

$$v(Q^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}) = v(p) = v'(Q)$$

- **(3)若Q是0元联结词c，则**

$$v(Q^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}) = v(c) = v'(Q)$$

- **(4)设$Q_1,\ldots,Q_k$是复杂度小于m的公式，并且**

$$v(Q_i{}^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}) = v'(Q_i)$$

- **若Q是F $Q_1,\ldots,Q_k$，其中F是k元联结词，是长度等于m的公式,则是**

$$v(Q^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}) = F(v((Q_1)^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}),\ldots,v((Q_{k1})^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}))$$

$$= F(v'(Q_1),\ldots,v'(Q_k)) = v'(F(Q_1,\ldots,Q_k) = v'(Q)$$

定理1.3

- **定理1.3：设Q是公式**
  - （1）若Q是永真式，则A的每个代换实例都是永真式
  - （2）若Q是永假式，则A的每个代换实例都是永假式

- **证明**
  - (1)任取永真式Q的代换实例$Q_{B_1,\ldots,B_n}^{p_1,\ldots,p_n}$，对于每个真值赋值v，

$$\mathrm{v}(Q_{B_1,\ldots,B_n}^{p_1,\ldots,p_n}) = \mathrm{v}[p_1 / \mathrm{v}(B_1),\ldots p_n / \mathrm{v}(B_n)](Q) = 1$$

    所以$Q_{B_1,\ldots,B_n}^{p_1,\ldots,p_n}$是永真式。
  - (2)可同样证明。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

示例

- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$是永真式
- 设Q,R是任意公式
- [p/Q, q/R]

  - $Q = \neg p \vee \neg q$, $R = \neg(p \vee r)$
  - $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg(p \vee r) \rightarrow (\neg p \vee \neg q))$是永真式

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

内 容

公式等值的定义

- 定义1.9：设A和B是公式，如果对于每个真值赋值v，都有$v(A)=v(B)$，则称“A和B等值”，也称“A与B逻辑等价”，记为$A \Leftrightarrow B$

- 显然$A \Leftrightarrow B$，当且仅当$A \leftrightarrow B$是永真式

- 两个公式是否等价，可以用真值表来判断

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1

公式等值演算的重要依据

- **重要依据：定理1.3：设Q是公式**
  - （1）若Q是永真式，则A的每个代换实例都是永真式
  - （2）若Q是永假式，则A的每个代换实例都是永假式
- **所以有：**
  - 根据$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$是永真式
  - 而$\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{B}$是上式的代换实例
  - 所以$\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{B}$也是永真式

等值式模式

交换律	$Q\vee R\Leftrightarrow Q\vee R$	$Q\wedge R\Leftrightarrow R\wedge Q$	$Q\oplus R\Leftrightarrow R\oplus Q$
结合律	$(P\vee Q)\vee R\Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$	$(P\wedge Q)\wedge R\Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$	$(P\oplus Q)\oplus R\Leftrightarrow P\oplus(Q\oplus R)$
分配律	$P\vee(Q\wedge R)$ $\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$	$P\wedge(Q\vee R)$ $\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$	$P\wedge(Q\oplus R)$ $\Leftrightarrow(P\wedge Q)\oplus(P\wedge R)$
德•摩根律	$\neg(Q\vee R)\Leftrightarrow\neg Q\wedge\neg R$	$\neg(Q\wedge R)\Leftrightarrow\neg Q\vee\neg R$	
幂等律	$Q\vee Q\Leftrightarrow Q$	$Q\wedge Q\Leftrightarrow Q$	
同一律	$Q\wedge 1\Leftrightarrow Q$	$Q\vee 0\Leftrightarrow Q$	
吸收律	$Q\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow Q$	$Q\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow Q$	
零律	$Q\vee 1\Leftrightarrow 1$	$Q\wedge 0\Leftrightarrow 0$	
排中律	$Q\vee\neg Q\Leftrightarrow 1$	双重否定律	$\neg\neg Q\Leftrightarrow Q$
矛盾律	$Q\wedge\neg Q\Leftrightarrow 0$	假言易位	$Q\rightarrow R\Leftrightarrow\neg R\rightarrow\neg Q$

其他等值式模式

- $P \oplus P \Leftrightarrow 0$
- $P \oplus 1 \Leftrightarrow \neg P$
- $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- $P \oplus Q \Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
- $P \oplus Q \Leftrightarrow \neg (P \leftrightarrow Q)$

真值表验证等值

- **结合律**

$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

$(P \oplus Q) \oplus R \Leftrightarrow P \oplus (Q \oplus R)$

p	q	r	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

真值表验证等值

- 分配律

$P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

$P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$

$P\wedge(Q\oplus R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\oplus(P\wedge R)$

p	q	r	$p\vee(q\wedge r)$	$(p\vee q)\wedge(p\vee q)$	$p\vee(q\wedge r)\leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee q)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

真值表验证等值

- 交换律

$Q \vee R \Leftrightarrow R \vee Q$

$Q \wedge R \Leftrightarrow R \wedge Q$

$Q \oplus R \Leftrightarrow R \oplus Q$

p	q	$q \vee r$	$q \vee r$	$q \vee r \leftrightarrow q \vee r$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

真值表验证等值

- **德•摩根律**

$\neg(Q \vee R) \Leftrightarrow \neg Q \wedge \neg R$

$\neg(Q \wedge R) \Leftrightarrow \neg Q \vee \neg R$

p	q	$\neg(q \vee r)$	$\neg q \wedge \neg r$	$\neg(q \vee r) \leftrightarrow \neg q \wedge \neg r$
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

等值演算

- **定义：设合式公式Q 和R，存在等式序列$Q_0,\ldots,Q_n$，其中，$Q \Leftrightarrow Q_0$，$R \Leftrightarrow Q_n$，并且$Q_k \Leftrightarrow Q_{k+1}$，则称$Q_0,\ldots,Q_n$为等值演算。**

等值演算

- **例1.5：** 证明$p\rightarrow(q\rightarrow r)\Leftrightarrow p\wedge q\rightarrow r$

- $p\rightarrow(q\rightarrow r)$
- $\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)$ $P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$
- $\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee r$ 结合律
- $\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee r$ 摩根律
- $\Leftrightarrow p\wedge q\rightarrow r$ $P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$

等值演算

- 证明$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)\Leftrightarrow(p\vee q)\rightarrow r$

- $(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)$
- $\Leftrightarrow(\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)$ $\quad P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$
- $\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee r$ $\quad$ 分配律
- $\Leftrightarrow\neg(p\vee q)\vee r$ $\quad$ 摩根律
- $\Leftrightarrow(p\vee q)\rightarrow r$ $\quad P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$

等值演算

- 证明：$p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\to q)\to(p\to r)$
- $p\to(q\to r)$
- $\Leftrightarrow\neg p\vee(q\to r)$ $P\to Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$
- $\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q\vee r$ $P\to Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$
- $\Leftrightarrow((\neg p\vee\neg q)\wedge 1)\vee r$ 同一律
- $\Leftrightarrow((\neg p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee p))\vee r$ 排中律
- $\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\wedge p)\vee r$ 分配律
- $\Leftrightarrow(\neg q\wedge p)\vee\neg p\vee r$ 交换律
- $\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\vee\neg p\vee r$ 摩根律
- $\Leftrightarrow\neg(p\to q)\vee(p\to r)$ $P\to Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$
- $\Leftrightarrow(p\to q)\to(p\to r)$ $P\to Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$

等值演算

- 例1.6：用等值演算证明$p\oplus(q\wedge r)\rightarrow p\vee q\vee r$是永真式。

- $p\oplus(q\wedge r)\rightarrow p\vee q\vee r$
- $\Leftrightarrow \neg(p\oplus(q\wedge r))\vee p\vee q\vee r$
- $\Leftrightarrow \neg((p\wedge\neg(q\wedge r))\vee(\neg p\wedge(q\wedge r)))\vee p\vee q\vee r$
- $\Leftrightarrow \neg(p\wedge\neg(q\wedge r))\wedge\neg(\neg p\wedge(q\wedge r))\vee p\vee q\vee r$
- $\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg\neg(q\wedge r))\wedge(\neg\neg p\vee\neg(q\wedge r))\vee p\vee q\vee r$
- $\Leftrightarrow(\neg p\vee(q\wedge r))\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\vee p\vee q\vee r$
- $\Leftrightarrow(\neg p\vee(q\wedge r)\vee p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r\vee p\vee q\vee r)$
- $\Leftrightarrow(\neg p\vee p\vee(q\wedge r)\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee p\vee q\vee r\vee\neg r)$
- $\Leftrightarrow(1\vee(q\wedge r)\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee p\vee q\vee 1)$
- $\Leftrightarrow 1\wedge 1\Leftrightarrow 1$

内 容

- 1.1. 命题和联结词
- 1.2. 公式和真值赋值
- 1.3. 等值演算
- 1.4. 对偶定理
- 1.5. 联结词的完全集
- 1.6. 范式
- 1.7. 逻辑推论

对偶定理

- **定义1.10**
  - 设Q是由{0,1,¬,∨,∧}生成的公式，将Q中的∨和∧互换，0和1互换得到Q^*，称Q^*与Q互为对偶式。
  - $(p \lor q) \land r$ 和 $(p \land q) \lor r$
  - $\neg(p \lor 0) \land 1$ 和 $\neg(p \land 1) \lor 0$
- **定义1.11**
  - 如果真值赋值v_1和v_2满足对每个命题变元p，$p^{v_1} \neq p^{v_2}$，则称v_1和v_2是相反的。

对偶定理（证明略）

- **定理1.4：** 设Q是由{0,1,¬,∨,∧}生成的公式，Q^*与Q互为对偶式，v和v'是相反的真值赋值，则$v(Q^*)=\neg v'(Q)$。
- 证明：
- 1.Q的复杂度为0，定理成立
  - (1)若Q为命题变元p，

    则Q^*也为p，$v(p)=\neg v'(p)$。
  - (2)若Q为0，则Q^*为1，$v(1)=\neg v'(0)$。
  - (3)若Q为1，则Q^*为0，$v(0)=\neg v'(1)$。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

- 2.假设对于复杂度不超过n的每个公式Q，$v(Q^*)=\neg v'(Q)$。
- 3.证明复杂度等于n，定理成立。
- (1)若Q为$\neg R$，$v(R^*)=\neg v'(R)$，并且Q^*为$\neg R^*$。

因此，$v(Q^*)=v(\neg R^*)=\neg v(R^*)=\neg\neg v'(R)=\neg v'(\neg R)= \neg v'(Q)$

- (2)若Q为$R\wedge S$，$v(R^*)=\neg v'(R)$且$v(S^*)=\neg v'(S)$，并且Q^*为$R^*\vee S^*$。

因此，$v(Q^*)=v(R^*\vee S^*)=v(R^*)\vee v(S^*)$

$=\neg v'(R)\vee\neg v'(S)= v'(\neg R\vee\neg S)=v'(\neg(R\wedge S))$

$= \neg v'(R\wedge S) = \neg v'(Q)$

- (3)若Q为$R\vee S$， $v(R^*)=\neg v'(R)$且$v(S^*)=\neg v'(S)$，并且Q^*为$R^*\wedge S^*$。

因此，$v(Q^*)=v(R^*\wedge S^*)=v(R^*)\wedge v(S^*)$

$=\neg v'(R)\wedge\neg v'(S)= v'(\neg R\wedge\neg S)=v'(\neg(R\vee S))=$

$\neg v'(R\vee S)= \neg v'(Q)$

对偶定理

- **定理1.5**：设Q,R是由{0,1,¬,∨,∧}生成的公式，Q^*与Q互为对偶式，R^*与R互为对偶式。如果$Q \Leftrightarrow R$，则$Q^* \Leftrightarrow R^*$。
- **证明**：
  - 任取真值赋值v，令v'是与v相反的真值赋值，因为$Q \Leftrightarrow R$，所以$v'(Q)=v'(R)$，因此，$v(Q^*)=\neg v'(Q)= \neg v'(R)=v(R^*)$
  - 所以，$Q^* \Leftrightarrow R^*$。

用对偶定理证明等值式

- 例1.9：证明等值式：
- (1) $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee (\neg p \vee q)) \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- (2) $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge (\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg p \wedge q$
- 证明：等值式(1)
  - $(p\wedge q)\vee(\neg p\vee(\neg p \vee q))$
  - $\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee(\neg p\vee\neg p \vee q)$
  - $\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee\neg p\vee q$
  - $\Leftrightarrow \neg p\vee q$
- 证明：等值式(2)
  - 对偶定理

内 容

- 1.1. 命题和联结词
- 1.2. 公式和真值赋值
- 1.3. 等值演算
- 1.4. 对偶定理
- 1.5. 联结词的完全集
- 1.6. 范式
- 1.7. 逻辑推论

联结词的完全集

- $p\to q \Leftrightarrow \neg p\vee q$
- $p\leftrightarrow q \Leftrightarrow (p\to q)\wedge(q\to p)=(\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$
- $p\oplus q \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$
- **结论:**

  ¬, ∧, ∨, →, ↔, ⊕不是独立的

  逻辑的最少联结词是什么?

完全集

- 定义1.12：设F是n元联结词，$p_1,p_2,\ldots,p_n$是不同的命题变元。如果公式Q中不出现除$p_1,p_2,\ldots,p_n$之外的命题变元，并且$Q \Leftrightarrow Fp_1,p_2,\ldots,p_n$，则称Q定义F。
- 如果存在由联结词集合S生成的公式来定义F，则称F可由S定义。如：$S=\{\neg, \wedge, \vee\}$
  - $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
  - $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) = (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$
  - $p \oplus q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

完全集

- **定义1.13：** 设S是联结词集合。如果每个n(n>0)元的联结词都可由S定义，则称S为**完全集**。

完全集定理

- **定理1.6：** $\{\neg,\wedge,\vee\}$**是完全集。**

真值表的启示

- (p/0,q/1), (p/1,q/0)　　$F_7=(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$
- (p/0,q/1) ,(p/1,q/1)　　$F_{11}=(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q)$
- (p/0,q/1) , (p/1,q/0),(p/1,q/1)　　$F_{15}=(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$

p	q	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

完全集定理

- **定理1.6：$\{\neg,\wedge,\vee\}$是完全集。**
- **证明：** 设n>0，F是n元联结词，$p_1,p_2,\ldots,p_n$是不同命题变元，可以找出定义F的由$\{\neg,\wedge,\vee\}$生成的公式Q。
- 若$Fp_1p_2\ldots p_n$是永假式，取Q为$p_1\wedge\neg p_1$。
- 若$Fp_1p_2\ldots p_n$是可满足式，满足$Fp_1p_2\ldots p_n=1$的真值赋值为$(p_1/a_1^1,\ldots,p_n/a_n^1),\ldots\ldots(p_1/a_1^m,\ldots,p_n/a_{n1}^m)$，则取Q为

$$(\tilde{p}_1^1\wedge\ldots\ldots\wedge\tilde{p}_n^1)\vee\ldots\ldots\vee(\tilde{p}_1^m\wedge\ldots\ldots\wedge\tilde{p}_n^m)$$

  - 其中

$$\tilde{p}_j^i=\begin{cases}p_j & 若a_j^i=1\\ \neg p_j & 若a_j^i=0\end{cases}$$

完全集定理

- 任取真值赋值v，v(Q)= 1
- 当且仅当有1≤i≤m，使 $v(\tilde{p}_1^i \wedge \ldots\ldots \wedge \tilde{p}_n^i) = 1$
  - 当且仅当 $v(\tilde{p}_1^i) \wedge \ldots\ldots \wedge v(\tilde{p}_n^i) = 1$
  - 当且仅当 $v(\tilde{p}_1^i) = \ldots\ldots = v(\tilde{p}_n^i) = 1$
  - 当且仅当 $v = (p_1 / a_1^i, \ldots\ldots, p_n / a_n^i)$
- 所以Q⇔F $p_1 p_2 \cdots p_n$，{¬,∧,∨}是完全集。
- 证毕

完全集定理

- **定理1.7：** 如果完全集S_1中的每个联结词都可由联结词集合S_2定义，则S_2也是完全集。

极小完全集

- **定义1.13**：如果从完全集S中去掉任何一个联结词就成为不完全的了，就称S为**极小完全集**。

- **定理1.8**：以下联结词集合是极小完全集。

  (1) $\{\neg, \wedge\}$, (2) $\{\neg, \vee\}$, (3) $\{\neg, \rightarrow\}$

$\{\neg, \wedge\}$是极小完全集

- 证明：
- 第一步：证明$\{\neg,\wedge\}$是完全集
- 因为$p\vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p\wedge\neg q)$，所以$\vee$可由$\{\neg,\wedge\}$定义。
- $\neg,\wedge,\vee$都可由$\{\neg,\wedge\}$定义，并且$\{\neg,\wedge,\vee\}$是完全集，所以$\{\neg,\wedge\}$也是完全集。

{¬, ∧}是极小完全集

- **第二步：证明{¬,∧}是极小完全集。**

- **（1）证明{∧}不是完全集。**
  - 即¬不能由∧来定义
  - 对于公式¬p，是否可以用只有p和∧生成的公式Q来定义？
    - 公式Q的模式：p∧p∧…∧p
  - Q可以定义¬p，要求：
    - 对于任意真值赋值v，v(Q) = v(¬p)
  - 但是令真值赋值v=(p/1)，则v(Q)=1，但v(¬p)=0，所以Q不能定义¬

{¬, ∧}是极小完全集

- （2）证明{¬}不是完全集。
  - 取一元联结词F使F(0)=F(1)，F不能由¬来定义
  - 任取命题p，令真值赋值$v_1=(p/1)$和$v_2=(p/0)$，
  - 任取由{¬}生成只出现命题变元p的公式Q，
    - 公式Q的模式：¬¬...¬p
  - 则$v_1(Q)\neq v_2(Q)$，而$v_1(Fp)=v_2(Fp)$，所以Q不能定义F。
  - F不能由{¬}定义。{¬}不是完全集。

{¬, ∨}是极小完全集

- 证明：
- 第一步：证明{¬, ∨}是完全集
- 因为$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$，所以$\wedge$可由{¬, ∨}定义。
- ¬,∧,∨都可由{¬, ∨}定义，并且{¬,∧,∨}是完全集，所以{¬, ∨}也是完全集。

{¬, ∨}是极小完全集

- 第二步：证明{¬, ∨}是极小完全集。

- （1）证明{¬}不是完全集（见前述证明）
- （2）证明{∨}不是完全集（和证明∧ 一样）
  - 即¬不能由∨来定义
  - 对于公式 ¬ p，是否可以用只有p和∨生成的公式Q来定义？
    - 公式Q的模式： p∨p∨…∨p
  - Q可以定义¬ p，要求：
    - 对于任意真值赋值v，v(Q) = v(¬ p)
  - 但是令真值赋值v=(p/1)，则v(Q)=1，但v(¬p)=0，所以Q不能定义¬

{¬, →}是极小完全集

- **证明：**
- **第一步：证明{¬, →}是完全集**
  - 因为$p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q) = \neg(p \rightarrow \neg q)$，所以$\wedge$可由{¬,→}定义。
  - ¬,∧都可由{¬,→}定义，并且{¬,∧}是完全集，所以{¬,→}也是完全集。

{¬, →}是极小完全集

- 第二步：证明{¬, →}是极小完全集。

- （1）证明{¬}不是完全集（见前述证明）
- （2）证明{→}不是完全集
  - 即¬不能由→来定义
  - 对于公式¬p，是否可以用只有p和→生成的公式Q来定义？
    - 公式Q的模式：$p \rightarrow p \rightarrow \ldots \rightarrow p$
  - Q可以定义¬p，要求：
    - 对于任意真值赋值v，$v(Q) = v(\neg p)$
  - 但是令真值赋值v=(p/1)，则v(Q)=1，但v(¬p)=0，所以Q不能定义¬

{⊕, ↔}不是完全集

- **例1.10**
- 证明不是完全集：找一个联结词，不能用⊕, ↔定义
- 我们看联结词∧和两个命题变元p,q
- 对于真值赋值v1=(p/0,q/0), v2=(p/0,q/1), v3=(p/1,q/0), v4=(p/1,q/1)，可以归纳证明每个由{⊕, ↔}生成的、不出现p,q之外命题变元的公式A，v1(A), v2(A), v3(A), v4(A)中有偶数个1，而在p ∧ q的真值表是1个1、3个0
- 所以∧不能由{⊕, ↔}定义

内 容

- 1.1. 命题和联结词
- 1.2. 公式和真值赋值
- 1.3. 等值演算
- 1.4. 对偶定理
- 1.5. 联结词的完全集
- 1.6. 范式
- 1.7. 逻辑推论

范式

- 许多形式化不同的公式是等值的：
  - $\neg(p\rightarrow q)\vee r \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee r \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee r$
  - $\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)$
  - $\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge (p\vee \neg q\vee r)\wedge(p\vee \neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee \neg q\vee r)$
- 结论：
  - 公式唯一性？？
  - 等值公式有唯一的表示？
  - 判断公式等值的第三种方式—范式比较
    - 第1种：真值表
    - 第2种：等值演算

范式定义

- 定义1.14：原子公式和原子公式的否定统称为文字。如果一个文字恰为另一个文字的否定，则称它们为相反文字。
  - 文字:p, 相反文字:¬p

- 定义1.15：设n是正整数，$Q_1,\ldots\ldots,Q_n$都是文字，则称
  - $Q_1 \vee \ldots \vee Q_n$为简单析取式
  - $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n$为简单合取式
  - 如$(p \vee q \vee r)$，$(p \wedge \neg q \wedge r)$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

析取/合取范式

- **定义1.16：设n是正整数。**
  - 若$R_1,\ldots\ldots,R_n$都是简单合取式，则称$R_1\vee\ldots\vee R_n$为析取范式。
  - 若$R_1,\ldots\ldots,R_n$都是简单析取式，则称$R_1\wedge\ldots\wedge R_n$为合取范式。

  - 简单合取式的析取是析取范式,
  - $(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$
  - 简单析取式的合取是合取范式,
  - $(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

范式举例：例1.11

- $(p \vee q \to r) \to p$
- $\Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r) \to p$
- $\Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee p$
- $\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg r \vee p$
- $\Leftrightarrow (p \vee q \vee p) \wedge (\neg r \vee p)$
- $\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg r \vee p)$ 合取范式
- $\Leftrightarrow p \wedge (\neg r \vee p) \vee q \wedge (\neg r \vee p)$
- $\Leftrightarrow p \vee q \wedge \neg r \vee q \wedge p$
- $\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg r)$ 析取范式
- $\Leftrightarrow p \wedge (r \vee \neg r) \vee (q \wedge \neg r)$
- $\Leftrightarrow p \wedge r \vee p \wedge \neg r \vee (q \wedge \neg r)$ 不唯一

等值的析取范式和合取范式不唯一

极大项和极小项

- **定义1.17**：设n是正整数，$p_1,\ldots\ldots,p_n$是不同的命题变元。若对于每个i，Q_i是p_i或$\neg p_i$，则称：

  $Q_1\vee\ldots\vee Q_n$为关于$p_1,\ldots\ldots,p_n$的**极大项**，

  $Q_1\wedge\ldots\wedge Q_n$为关于$p_1,\ldots\ldots,p_n$的**极小项**。

  每个Q_i都有两种取值：p_i或$\neg p_i$，所以关于$p_1,\ldots\ldots,p_n$的极大项和极小项都有2^n个。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

极大项和极小项

- 极大项是一类特殊的简单析取式
- 极小项是一类特殊的简单合取式

- 极大项和极小项中，不允许出现相反的文字，也不允许一个文字出现多次
  - $p \wedge \neg q \wedge p$不是极小项
  - $p \wedge \neg q \wedge \neg q$不是极小项

主析取范式和主合取范式

- **定义1.18：设m是自然数。**
  - 若$R_1,\ldots\ldots,R_m$是关于$p_1,\ldots\ldots,p_n$的不同极小项，则称$R_1\vee\ldots\vee R_m$为关于$p_1,\ldots\ldots,p_n$的主析取范式。
  - 若$R_1,\ldots\ldots,R_m$是关于$p_1,\ldots\ldots,p_n$的不同极大项，则称$R_1\wedge\ldots\wedge R_m$为关于$p_1,\ldots\ldots,p_n$的主合取范式。
  - 主析取范式和主合取范式统称为主范式。

公式的主析取/主合取范式

- **定义1.19**：设公式Q中出现的命题变元为$p_1,p_2,...,p_n$，
- R是关于$p_1,p_2,...,p_n$的主析取范式（主合取范式），并且$Q \Leftrightarrow R$,
- 则称R为Q的主析取范式（主合取范式）。

公式的主析取/主合取范式

- 按照某种顺序排列命题变元，以及极小项和极大项，则每个公式有唯一的主析取范式和主合取范式
- 公式A的主析取范式，包含所有使A为真的真值赋值所对应的极小项
- 公式A的主合取范式，包含所有使A为假的真值赋值所对应的极大项

公式的主析取/主合取范式

- $F_7=(p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)$ $F_7=(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$
- $F_{11}=(p\vee q)\wedge(\neg p\wedge q)$ $F_{11}=(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q)$
- $F_{15}=(\neg p\vee\neg q)$ $F_{15}=(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$

p	q	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

主范式变换步骤

- **联接词等值变换**
- （1）消去联接词→、↔、⊕将公式由∧、∨、¬表示
  - $Q \to R \Leftrightarrow \neg Q \vee R$
  - $Q \leftrightarrow R \Leftrightarrow (Q \to R) \wedge (R \to Q)$
  - $Q \oplus R \Leftrightarrow (\neg Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R)$
- **德.摩根律**
- （2）应用德.摩根律¬内移或消去约束公式的¬变换为约束变元
  - $\neg(Q \vee R) \Leftrightarrow \neg Q \wedge \neg R$　$\neg(Q \wedge R) \Leftrightarrow \neg Q \vee \neg R$

主范式变换步骤

- 分配律
  - （3）应用分配律求取合取范式或析取范式
  - $Q \vee (R \wedge S) \Leftrightarrow (Q \vee R) \wedge (Q \vee S)$
  - $Q \wedge (R \vee S) \Leftrightarrow (Q \wedge R) \vee (Q \wedge S)$
- 矛盾律与排中律
  - （4）应用矛盾律与排中律求主合取范式或主析取范式
  - $Q \wedge \neg Q \Leftrightarrow 0 \quad Q \vee \neg Q \Leftrightarrow 1$
- 交换律
  - （5）应用交换律变元位置排序
  - $Q \vee R \Leftrightarrow R \vee Q \quad Q \wedge R \Leftrightarrow R \wedge Q$

求公式的主合取范式

- **例1.12：** $A = (\neg p \rightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow p)$ 的主合取范式
- $\Leftrightarrow (\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)$
- $\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$　合取式，非主合取式
- $\Leftrightarrow (p \vee r \vee q \wedge \neg q) \wedge (\neg q \vee p \vee r \wedge \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r \wedge \neg r)$

  缺某个变元x，用$(x \wedge \neg x)$补上
- $\Leftrightarrow (p \vee r \vee q) \wedge (p \vee r \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee p \vee r)$
  $\wedge (\neg q \vee p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$
- $\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$ 去掉1个
  $\wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$
- $\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$

由主合取式求主析取式

- $A \Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$
- 出现5个极大项，使A为假的真值赋值是这5个极大项所对应的真值赋值
- 那么使¬ A为假，即A为真的真值赋值是其余3个极大项所对应的真值赋值，因此¬ A的主合取范式是其余3个极大项的合取
- $\neg A \Leftrightarrow (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
- $A \Leftrightarrow \neg(p \vee q \vee \neg r) \vee \neg(\neg p \vee \neg q \vee r) \vee \neg(\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
- $\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

求公式的主析取范式

- $(p\to q)\wedge\neg(\neg p\vee\neg q)\to p\wedge q$
- $\Leftrightarrow\underline{(\neg p\vee q)}\wedge\neg(\neg p\vee\neg q)\to p\wedge q$
- $\Leftrightarrow\neg((\neg p\vee q)\wedge\neg(\neg p\vee\neg q))\vee p\wedge q$
- $\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\vee(\neg p\vee\neg q)\vee p\wedge q$
- $\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee\neg p\vee\neg q\vee(p\wedge q)$
- $\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee\underline{\neg p\wedge(q\vee\neg q)}\vee\neg q\vee(p\wedge q)$
- $\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee\underline{\neg p\wedge q\vee\neg p\wedge\neg q}\vee\neg q\vee(p\wedge q)$
- $\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee\neg p\wedge q\vee\neg p\wedge\neg q\vee\underline{(p\vee\neg p)\wedge\neg q}\vee(p\wedge q)$
- $\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee\neg p\wedge q\vee\neg p\wedge\neg q\vee\underline{p\wedge\neg q\vee\neg p\wedge\neg q}\vee(p\wedge q)$ 去重复、排序
- $\Leftrightarrow p\wedge q\vee p\wedge\neg q\vee\neg p\wedge q\vee\neg p\wedge\neg q$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

- **定理：**
  - 任何公式等值于某一析取范式
  - 任何公式等值于某一合取范式
  - 每一公式有唯一的主析取范式
  - 每一公式有唯一的主合取范式

- **定理1.9**：设在公式Q中出现n个命题变元，以下条件是等价的。
  - (1)Q是永真式。
  - (2)Q的主析取范式中包含了所有的极小项，即它是2^n个极小项的析取。
  - (3)Q的主合取范式中不包含任何极大项，即它是 0 个极大项的合取，也就是 1 。

- **定理1.10**：设在公式Q中出现n个命题变元，则以下条件是等价的。
  - (1)Q是永假式。
  - (2)Q的主合取范式中包含了所有的极大项，即它是2^n个极大项的合取。
  - (3)Q的主析取范式中不包含任何极小项，即它是 0 个极小项的析取，也就是 0 。

内 容

逻辑推论 — 从三段论看

- 公式取值，v(Q) = ?
  - 任意赋值函数为真
  - 任意赋值函数为假
  - 有的赋值函数为真，有的赋值函数为假
- 可满足的公式之间的关系?
  - 当$v(Q\to R)=1$, $v(Q)=1$, $v(R)=$??

Q	R	Q	$Q\to R$	R
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

逻辑推论 — 从传递律看

- 当v(Q→R)=1,v(R→S)=1, v(Q→S)=??

Q	R	S	Q→R	R→S	Q→S
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

重要定律与定理

- 充分理由律（三段论）：$Q, Q\to R \vDash R$
- 传递律：$P\to Q, Q\to R \vDash P\to R$
- 反证律：如果$\Gamma, \neg Q \vDash R$,　$\Gamma, \neg Q \vDash \neg R$,　则$\Gamma \vDash Q$
- 归谬律：如果$\Gamma, Q \vDash R$,　$\Gamma, Q \vDash \neg R$,　则$\Gamma \vDash \neg Q$
- 排中律：$\vDash (Q \vee \neg Q)$
- 矛盾律：$\vDash \neg (Q \wedge \neg Q)$

逻辑推论

- $\Gamma=\{Q_1, \ldots, Q_n\}$
- 定义1.20：若真值赋值v满足公式集合Γ中的每个公式，则称v满足Γ。若有真值赋值满足Γ，则称Γ是可满足的，否则称Γ是不可满足的。
  - $v(Q_1) = 1, \ldots\ldots, v(Qn) = 1$
- 定义1.21：设Γ是公式的集合，Q是公式。如果每个满足Γ的真值赋值都满足Q，则称Q是Γ的逻辑推论， 记为$\Gamma \vDash Q$。若$\Gamma \vDash Q$不成立，记为$\Gamma \nvDash Q$。将$\varnothing \vDash Q$记为 $\vDash Q$
  - 如果v(Γ) = 1，则v(Q) = 1
  - 只要前提真，结论就一定真
  - 真值表的含义
- 若$\Gamma = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$，则将Γ简记为$Q_1,\ldots,Q_n \vDash Q$。

推理形式

- 每一推理形式都相当于一个真值形式。
  - 正确的推理形式相当于一个重言式。
  - 错误的推理形式虽然也有一个相当的真值形式，但不是重言式。
  - 判别一推理形式是否正确，就是要判别其相当的蕴涵式是不是一个重言式。
- 正确推理形式
  - $((p \to q) \land p) \to q$
- 错误推理形式
  - $((p \to q) \land \neg p) \to \neg q$

三段论证明

- 例题1.14： 证明Q，Q→R⊨R
- 证明：
  - 若真值赋值v，使v(Q)=1， v(Q→R)=1，v(Q)→v(R)=1, 则v(R)=1。
  - 所以Q, Q→R⊨ R

传递律证明

- **例题1.15： 证明$Q\to R$, $R\to S \vDash Q\to S$**
- **证明：**
  - 设真值赋值v，使$v(Q\to R)=v(R\to S)=1$
    - 若$v(Q)=0$，则$v(Q\to S)=1$
    - 若$v(Q)=1$， $v(Q)\to v(R)=1$，则$v(R)=1$
      $v(R)\to v(S)=1$，所以$v(S)=1$，因此，
      $v(Q)\to v(S)=1$
  - 因此，$Q\to R$, $R\to S \vDash Q\to S$

软件开发环境国家重点实验室
State Key Laboratory of Software Development Environment

- 例题1.16： $Q \to R$，$S \to W$，$Q \lor S \vDash R \lor W$
- 证明：
  - 设真值赋值v使 $v(Q \to R)=v(S \to W)=v(Q \lor S)=1$，则 $v(Q)=1$ 或 $v(S)=1$。
    - 若 $v(Q)=1$，则由 $v(Q \to R)=1$ 得出 $v(R)=1$。
    - 若 $v(S)=1$，则由 $v(S \to W)=1$ 得出 $v(W)=1$。
  - 无论哪种情况皆有 $v(R \lor W)=1$。

- **例题1.17：** $p\rightarrow q \nvDash p\rightarrow q\oplus r$
- **证明：**
  - 需要找出一个真值赋值v使$v(p\rightarrow q)=1$，但是$v(p\rightarrow q\oplus r)=0$
  - 取v使得$v(p)=v(q)=1$，则$v(q\oplus r)=0$，则$v(p\rightarrow q\oplus r)=0$。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

- **定理1.11：设Q是公式，则 ⊨ Q当且仅当Q是永真式。**
- **证明**
  - 充分性：设 ⊨ Q，任取真值赋值v，因为v(Q)=1。因此，Q是永真式。
  - 必要性：设Q是永真式，显然 ⊨ Q。
- **证毕**

- **定理1.12**：设$Q_1,\ldots,Q_n$，R是公式，$Q_1,\ldots,Q_n \vDash R$，当且仅当$Q_1\wedge\ldots\wedge Q_n\rightarrow R$是永真式。
- **证明**
  - 充分性：设$Q_1,\ldots,Q_n \vDash R$。任取真值赋值v。
  - 如果$v(Q_1\wedge\ldots\wedge Q_n)=1$，则$v(Q_1)=\ldots\ldots=v(Q_n)=1$，则$v(R)=1$，则：$v(Q_1\wedge\ldots\wedge Q_n)\rightarrow v(R)=v(Q_1\wedge\ldots\wedge Q_n\rightarrow R)=1$。因此$Q_1\wedge\ldots\wedge Q_n\rightarrow R$是永真式。
  - 必要性：设$Q_1\wedge\ldots\wedge Q_n\rightarrow R$是永真式，任取真值赋值v，若$v(Q_1)=\ldots\ldots=v(Q_n)=1$，则$v(Q_1\wedge\ldots\wedge Q_n)=1$，故$v(R)=1$。因此$Q_1,\ldots,Q_n \vDash R$

- **定理1.13：设Q，R是公式。**

  $Q \Leftrightarrow R$当且仅当$Q \vDash R$且$R \vDash Q$。

- **证明**
  - $Q \Leftrightarrow R$
  - 当且仅当 $Q \leftrightarrow R$是永真式
  - 当且仅当 $Q \rightarrow R$和$R \rightarrow Q$都是永真式
  - 当且仅当 $Q \vDash R$且$R \vDash Q$
- **证毕**

- **定理1.14：设Γ是公式的集合，Q和R是公式，则**

$$\Gamma\cup\{Q\}\vDash R \text{当且仅当} \Gamma\vDash Q\rightarrow R\text{。}$$

- **证明**
  - 若$\Gamma\cup\{Q\}\vDash R$，则任意真值赋值v使Γ中公式皆真且v(Q)=1，则有v(R)=1。所以v(Q→R)=1，所以$\Gamma\vDash Q\rightarrow R$。
  - 若$\Gamma\vDash Q\rightarrow R$，则任意真值赋值v使Γ中公式皆真，则有v(Q→R)=1。
  - 又若v(Q)=1，则v(R)=1。所以$\Gamma\cup\{Q\}\vDash R$。
- **证毕**

- **定理1.15：** 设n是正整数。公式集$\{Q_1,\ldots\ldots,Q_n\}$是可满足的当且仅当$Q_1\wedge\ldots\ldots\wedge Q_n$是可满足式。
- **证明：**
  - 公式集$\{Q_1,\ldots\ldots,Q_n\}$是可满足，当且仅当存在真值赋值v，$v(Q_1\wedge\ldots\ldots\wedge Q_n)= 1 = \sigma(Q_1)\wedge\ldots\wedge\sigma(Q_n)$
  - 当且仅当$v(Q_1)=\ldots= \sigma(Q_n)=1$
  - 当且仅当$v(Q_1\wedge\ldots\ldots\wedge Q_n)=1$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

- **定理1.16：设Γ是公式的集合，Γ是不可满足的，当且仅当每个公式都是Γ的逻辑推论。**
- **证明：**
  - 充分性：公式集Γ是不可满足，A为任意公式，则显然每个满足Γ的真值赋值v使的v(A)=1，因为满足Γ的真值赋值根本不存在
  - 必要性：每个公式都是Γ的逻辑推论，则Γ ⊨ 0，若有真值赋值v满足Γ，则v(0)=1，这是不可能的。所以，没有真值赋值v满足Γ

本 节 完！

问题与解答？