软件开发环境国家重点实验室
State Key Laboratory of Software Development Environment

离散数学(1): 数理逻辑

Discrete Mathematics (1): Mathematical Logic

第三章 公理系统

赵永望

zhaoyw@buaa.edu.cn

北京航空航天大学 计算机学院

内 容

- 3.0. 公理系统简介
- 3.1. 命题逻辑的公理系统
- 3.2. 谓词逻辑的公理系统

欧式几何：公理系统

- 欧式几何的传统描述是一个公理系统，通过有限的公理来证明所有的“真命题”。
- 欧式几何的五条公理是：
  - 1、任意两个点可以通过一条直线连接。
  - 2、任意线段能无限延长成一条直线。
  - 3、给定任意线段，可以以其一个端点作为圆心，该线段作为半径作一个圆。
  - 4、所有直角都全等。
  - 5、若两条直线都与第三条直线相交，并且在同一边的内角之和小于两个直角和，则这两条直线在这一边必定相交。
- 第五条公理称为平行公理（平行公设）

逻辑公理—表达思想的初始概念

- 自然数公理
  - $\forall x(s(x)\neq x)$
  - $\forall x\forall y\ (x\neq y\rightarrow s(x)\neq s(y))$
  - $\forall x(x+0=x)$
  - $\forall x\forall y(x+s(y)=s(x+y))$
  - $\forall x(x\circ 0=0)$
  - $\forall x\forall y(x\circ s(y)=x\circ y+s(x))$
  - $(Q(0)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(s(x))))\rightarrow\forall xQ(x)$
- 自然数公理是实质公理
  - 具体概念：后继(s)，0，+，$\circ$，Q
- 自然数公理是所有的自然数命题真值的依据。
- 从自然数公理能推导出所有的自然数命题真值。

皮亚诺
（1858-1932）

形式系统

- **一个形式系统应当包括以下几部分。**
  - (1)各种初始符号。初始符号是一个形式系统的“字母”，经解释后其中一部分是初始概念。
  - (2)形成规则。规定初始符号组成各种合适符号序列的规则。经解释后合式符号序列是一子句，称为系统里的合式公式或命题。
  - (3)公理。把某些所要肯定的公式选出，作为推导其它所要肯定的公式的出发点，这些作为出发点的公式称为公理。
  - (4)变形规则。变形规则规定如何从公理和已经推导出的一个或几个公式经过符号变换而推导出另一公式。经过解释，变形规则就是推理规则。
  - 应用变形规则进行推导可以得到一系列公式，这些公式经过解释是系统的定理。
- **形式系统完全由一套表意符号建立，它能克服日常语言的歧义性，使概念、判断、推理精确化。**

希尔伯特证明论

David Hilbert
1826-1943

- 通过形式化第一次使证明本身成为数学研究对象。
- 给出初始符号集合
- 构造合式公式规则
- $\Gamma \vdash Q$的证明，构造出1~m个合式公式序列，其中，第m个合式公式是Q，并且1~m合式公式
  - 或者是前提
  - 或者是公理
  - 或者是推导规则
- 形式证明的正确性是可验证的。

逻辑公理系统

- **公理系统**
  - 从一些公理出发，根据推导规则推导出一系列定理，形成的演绎系统叫作公理系统。
- **公理系统的组成：**
  - 符号集
  - 公式集：用于表达命题的符号串
  - 公理集：公式集的一个真子集
    - 公理是用于表达推理由之出发的初始肯定命题；
  - 推理规则集
    - 推理规则是由公理及已证定理得出新定理的规则；
  - 定理集
    - 表达了本系统肯定的所有命题。
- **在公理系统中进行推理，涉及的仅仅是符号串之间的转换，并不考虑符号的具体含义。推理过程展现的是纯粹的语法关系**

内 容

- 3.0. 公理系统简介
- 3.1. 命题逻辑的公理系统
- 3.2. 谓词逻辑的公理系统

命题逻辑公理系统的定义

- **(1).符号：**
  - 命题变元、联结词¬, →、括号(,)
- **(2).公式：**
  - 命题变元是公式；
  - 若A,B是公式，则(¬ A)、 (A → B)也是公式
- **(3).公理：A,B,C为任意公式，三个公理模式**
  - 1). $\mathscr{A}_1$: A→ (B→A) 肯定后件律
  - 2). $\mathscr{A}_2$: (A→ (B→C)) → ((A→B) → (A→C)) 蕴含词分配律
  - 3). $\mathscr{A}_3$: (¬A → ¬B) → (B → A) 换位律
- **(4).推理规则**
  - 只有1条：分离规则MP

    从A和A→B推出B
  - 其中，A和A→B称为前提，B称为结论。

缩写定义

- 公理系统中仅使用了¬和→联结词符号，{¬,→}是完全集。其他联结词符号∨,∧,↔,⊕可由{¬,→} 定义，用≡表示缩写定义。
  - (1).$Q \vee R \equiv (\neg Q \to R)$
  - (2).$Q \wedge R \equiv \neg (Q \to \neg R)$
  - (3).$Q \leftrightarrow R \equiv (Q \to R) \wedge (R \to Q)$
  - (4).$Q \oplus R \equiv \neg (Q \leftrightarrow R)$

公理模式

- 公理模式是相同形式的公式的集合，每个公理模式中的公式都是公理

- $p_1 \to (p_2 \to p_1)$
- $\neg p_2 \to ((p_1 \to p_2) \to \neg p_2)$
- 都是公理一

- $(\neg\neg p_1 \to \neg p_2) \to (p_2 \to \neg p_1)$是公理三

定理集

- 公理集和推理规则集确定后，定理集就确定了
- 因此，定义中不必指出定理集

公理和公设

- 公理都是永真式
- 除了这些公理外，有时需要其他推理前提
  - 如平面几何需要欧几里得给出的几条公理/公设
  - 群论中，需要群的定义作为公理
  - 它们称为“非逻辑公理”或“公设”，用公式集合Γ表示

其他公理系统

- 我们定义的公理系统，只是命题逻辑的一个公理系统，它是“希尔伯特式”的公理系统
  - 公理多，规则少（只有1条），推演是线性的
- “根岑式”的自然推演系统
  - 公理少（只有1条，甚至没有），规则多
  - 推演是树状的

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{\forall x\ A(x)}^{\,1}}{A(y)} \qquad \cfrac{\overline{\forall x\ B(x)}^{\,2}}{B(y)}}{A(y)\wedge B(y)}}{\forall y\ (A(y)\wedge B(y))}\ {}^{2}}{\forall x\ B(x)\to\forall y\ (A(y)\wedge B(y))}\ {}^{1}}{\forall x\ A(x)\to(\forall x\ B(x)\to\forall y\ (A(y)\wedge B(y)))}$$

其他公理系统

- **弗雷格公理系统**
  - $Q \to (R \to Q)$
  - $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
  - $(P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$
  - $(Q \to R) \to (\neg R \to \neg Q)$
  - $\neg\neg Q \to Q$
  - $Q \to \neg\neg Q$
- **卢卡西维茨公理系统**
  - $Q \to (R \to Q)$
  - $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
  - $(\neg Q \to \neg R) \to (R \to Q)$
- **罗素公理系统**
  - $Q \vee Q \to Q$
  - $Q \to Q \vee R$
  - $Q \vee R \to R \vee Q$
  - $(P \to Q) \to (P \vee R \to Q \vee R)$

推演、前提集和结论

- **定义3.2**：设Γ是公式集，如果公式序列$A_1, \dots, A_n$中的每个公式A_i满足以下条件之一：
  - (1) A_i是公理
  - (2) $A_i \in \Gamma$
  - (3) 有j,k < i使A_i由A_j, A_k用MP规则推出
- 则称它为A_n的从公式集Γ的一个**推演**，其中Γ称为推演的**前提集**，A_n称为**结论**

定理和证明

- 如果存在一个B的从Γ的推演，记为$\Gamma \vdash B$
- 将$\{Q_1, \ldots, Q_n\} \vdash B$，简记为$Q_1, \ldots, Q_n \vdash B$。将$\emptyset \vdash B$，简记为$\vdash B$。
- 如果$\vdash B$，则称B为**定理(Theorem)**。
- 如果$A_1, \ldots, A_n$是B的从空集∅的推演，则称$A_1, \ldots, A_n$是B的一个**证明(Proof)**。

一些结论

- 每个公理本身即是它的一个证明
- 每个公理都是定理
- Γ中的每个公式A本身即是它的一个从Γ的推演，因此$\Gamma \vdash A$
- 如果公式A和A→B都是公式集Γ的逻辑推论，则B也是Γ的逻辑推论

逻辑推演举例

- 例3.1： $\vdash A \to A$
  - 证明： 证据：
  - A1=(A→ ((A→A)→A))→((A→(A→A))→(A→A))) 公理二
  - A2=A→ ((A→A) →A)) 公理一
  - A3=(A→ (A→A)) →(A→A) MP(A2)(A1)
  - A4=A→ (A→A) 公理一
  - A5=A→A MP(A4)(A3)
  - 证毕

公理一： A→ (B→A)

公理二： (A→ (B→C)) → ((A→B) → (A→C))

- **例3.2：若$\Gamma \vdash B$，则$\Gamma \vdash A \rightarrow B$**
  - 由$\Gamma \vdash B$，设$A_1, \dots, A_n, B$是B的从Γ的推演
  - 则$A_1, \dots, A_n, B, B \rightarrow (A \rightarrow B), A \rightarrow B$是$A \rightarrow B$的从Γ的推演，其中$B \rightarrow (A \rightarrow B)$是公理一
- **例3.3：若$\Gamma \vdash A \rightarrow B$且$\Gamma \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$，则$\Gamma \vdash A \rightarrow C$**
  - 设$B_1, \dots, B_n, A \rightarrow B$是$A \rightarrow B$的从Γ的推演
  - 设$C_1, \dots, C_m, A \rightarrow (B \rightarrow C)$是$A \rightarrow (B \rightarrow C)$的从Γ的推演
  - 则$B_1, \dots, B_n, A \rightarrow B, C_1, \dots, C_m, A \rightarrow (B \rightarrow C), (A \rightarrow$

- **例3.2：若$\Gamma \vdash B$，则$\Gamma \vdash A \to B$**
  - 根据公理一，有$\Gamma \vdash B \to (A \to B)$
  - 根据MP规则，有$\Gamma \vdash A \to B$
- **例3.3：若$\Gamma \vdash A \to B$且$\Gamma \vdash A \to (B \to C)$，则$\Gamma \vdash A \to C$**
  - 根据公理二，有$\Gamma \vdash \big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$
  - 根据MP规则和前提2，有$\Gamma \vdash \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$
  - 再根据MP规则和前提1，有$\Gamma \vdash A \to C$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

演绎定理

- **定理3.2**：$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$当且仅当$\Gamma \vdash A \to B$
  - 充分性：设$A_1, \ldots, A_n$是B的从$\Gamma \cup \{A\}$的推演，归纳证明$\Gamma \vdash A \to A_i$ (i = 1,2,…,n)
    - (1) 若A_i是公理，则$\Gamma \vdash A_i$，由例3.2可得$\Gamma \vdash A \to A_i$
    - (2) 若$A_i \in \Gamma$，则$\Gamma \vdash A_i$，同上。
    - (3) 设A_i由A_j, A_k用MP规则推出，其中j,k < i，A_k为$A_j \to A_i$。由归纳假设可知，$\Gamma \vdash A \to A_j$且$\Gamma \vdash A \to (A_j \to A_i)$，由例3.3得出$\Gamma \vdash A \to A_i$
    - 因此，$\Gamma \vdash A \to A_n$，即$\Gamma \vdash A \to B$
  - 必要性：设$\Gamma \vdash A \to B$，则$\Gamma \cup \{A\} \vdash A \to B$且$\Gamma \cup \{A\} \vdash A$，所以$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$

演绎定理

- 演绎定理表明：如果要推演的公式是一个蕴含式，则可以把它的前件作为附加前提添加到前提集中，去推导它的后件。
- 一般来说，前提越多，推导起来越容易

逻辑推演举例

- 例3.4： $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
  - 首先找出$A \rightarrow B$的一个从$\{\neg A\}$的推演如下：
  - A1= $\neg A$ 前提
  - A2= $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ 公理一
  - A3= $\neg B \rightarrow \neg A$ MP(A1)(A2)
  - A4= $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ 公理三
  - A5= $A \rightarrow B$ MP(A3)(A4)
  - 再由演绎定理得出，$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
- 这个例子表明：如果能推出一对矛盾A和$\neg A$，就可以应用两次MP规则得到任何公式

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

逻辑推演举例

- 例3.5：$\vdash (\neg A \to A) \to A$
  - 根据演绎定理，先把$\neg A \to A$和$\neg A$加到前提集中
  - $\neg A \to A, \neg A \vdash \neg A$
  - $\neg A \to A, \neg A \vdash \neg A \to A$
  - $\neg A \to A, \neg A \vdash A$
  - $\neg A \to A, \neg A \vdash \neg A \to (A \to \neg(A \to A))$　例3.4
  - $\neg A \to A, \neg A \vdash \neg(A \to A)$　上式和A, $\neg A$使用MP规则
  - $\neg A \to A \vdash \neg A \to \neg(A \to A)$　演绎定理
  - $\neg A \to A \vdash (\neg A \to \neg(A \to A)) \to ((A \to A) \to A)$
    公理三 $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$
  - $\neg A \to A \vdash (A \to A) \to A$　上两式使用MP规则
  - $\neg A \to A \vdash A \to A$　例3.1
  - $\neg A \to A \vdash A$　上两式使用MP规则
  - $\vdash (\neg A \to A) \to A$　演绎定理

协调

- **定义3.3**：如果对于每个公式A，有$\Gamma \vdash A$，则称公式集Γ是不协调的，否则称Γ是协调的。
- **定理3.3**：若$\Gamma \vdash \neg p_1 \wedge p_1$，则Γ不协调
  - 证明：任取公式A，$\neg p_1 \wedge p_1$就是$\neg(\neg p_1 \rightarrow \neg p_1)$
  - $\Gamma \vdash \neg(\neg p_1 \rightarrow \neg p_1)$
  - $\Gamma \vdash \neg p_1 \rightarrow \neg p_1$ 例3.1
  - $\Gamma \vdash \neg(\neg p_1 \rightarrow \neg p_1) \rightarrow ((\neg p_1 \rightarrow \neg p_1) \rightarrow A)$ 例3.4
  - $\Gamma \vdash A$
- **定理3.4**：若Γ协调，则Γ可满足。

可靠性定理(Soundness)

- **逻辑系统：**
  - 逻辑推论$\Gamma \vDash A$ (语义的)
  - 逻辑推演$\Gamma \vdash A$，也称“演绎” (语法的)

- **回顾：命题逻辑的逻辑推论**
- **定义1.21：** 设Γ是公式的集合，Q是公式。如果每个满足Γ的<u>真值赋值</u>都满足Q，则称Q是Γ的逻辑推论，记为$\Gamma \vDash Q$。若$\Gamma \vDash Q$不成立，记为$\Gamma \nvDash Q$。将$\varnothing \vDash Q$记为$\vDash Q$
  - 如果v(Γ) = 1，则v(Q) = 1
  - 只要前提真，结论就一定真
  - 真值表的含义

可靠性定理(Soundness)

- **定理3.1：若$\Gamma \vdash A$，则$\Gamma \vDash A$。**
  - 证明：设$A_1, \dots, A_n$是A的从Γ的推演。归纳证明$\Gamma \vDash A_i$ (i=1,2,…,n)
  - (1) 若A_i是公理，则A_i是永真式，所以$\Gamma \vDash A_i$
  - (2) 若$A_i \in \Gamma$，则$\Gamma \vDash A_i$
  - (3) 设A_i由A_j, A_k用MP规则推出，其中j,k < i，A_k为$A_j \to A_i$
    - 由归纳假设可知，$\Gamma \vDash A_j$且$\Gamma \vDash A_j \to A_i$。
    - 若真值赋值v满足Γ，则$v(A_j) = v(A_j \to A_i) = 1$，因此$v(A_i) = 1$，所以$\Gamma \vDash A_i$
  - 而A_n就是A，所以$\Gamma \vDash A$
- **推论：若$\vdash A$，则$\vDash A$**

完备性定理(Completeness)

- **定理3.5：若$\Gamma \vDash A$，则$\Gamma \vdash A$。**
  - 证明：若真值赋值v满足Γ，则v必须满足A，即不满足$\neg A$
  - 所以，$\Gamma \cup \{\neg A\}$不可满足，由定理3.4可知，$\Gamma \cup \{\neg A\}$不协调。
  - 根据不协调的定义，可知$\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash A$
  - 由演绎定理得出，$\Gamma \vdash \neg A \rightarrow A$
  - 由例3.5可知，$\Gamma \vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$
  - 使用MP规则，得到$\Gamma \vdash A$
- **推论：若$\vDash A$，则$\vdash A$**

紧致性定理

- **定理3.6 (第一种形式)**：若$\Gamma \vDash A$，则有Γ的有穷子集Γ'使得$\Gamma' \vDash A$。
- **定理3.7 (第二种形式)**：若Γ不可满足，则有Γ的有穷子集不可满足

- 作用：将对无穷公式集的语义性质的讨论，归结为对它的一个有穷子集的语义性质的讨论
- 两种形式是等价的，它们讨论的是逻辑的语义性质，并没有涉及公理系统

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

定律与规则

- 思维直觉、思维定律与定理。
- 充分理由律（三段论）： $Q, Q\rightarrow R \vdash R$
- 传递律：$P\rightarrow Q, Q\rightarrow R \vdash P\rightarrow R$
- 反证律：如果$\Gamma, \neg Q \vdash R$, $\Gamma, \neg Q \vdash \neg R$,则$\Gamma \vdash Q$
- 归谬律：如果$\Gamma, Q \vdash R$, $\Gamma, Q \vdash \neg R$，则$\Gamma \vdash \neg Q$
- 排中律：$\vdash (Q\vee\neg Q)$
- 矛盾律：$\vdash \neg(Q\wedge\neg Q)$
-

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

命题逻辑定理

- $\vdash (P\rightarrow(Q\rightarrow R)) \rightarrow(Q\rightarrow(P\rightarrow R))$
- $\vdash(Q\rightarrow R)\rightarrow((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$
- $\vdash(P\rightarrow Q)\rightarrow((Q\rightarrow R)\rightarrow(P\rightarrow R))$
- $\vdash((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))\rightarrow(P\rightarrow(Q \rightarrow R)$
-
- $\vdash Q\rightarrow Q$
- $\vdash \neg\neg Q\rightarrow Q$
- $\vdash Q\rightarrow\neg\neg Q$

命题逻辑定理

- $\vdash (\neg\neg Q \to \neg\neg R) \to (Q \to R)$
- $\vdash (Q \to R) \to (\neg\neg Q \to \neg\neg R)$
- $\vdash (Q \to R) \to (\neg R \to \neg Q)$
- $\vdash (\neg Q \to R) \to (\neg R \to Q)$
- $\vdash (Q \to \neg R) \to (R \to \neg Q)$
-
- $\vdash \neg Q \to (Q \to R)$
- $\vdash (\neg Q \to Q) \to (R \to Q)$
- $\vdash (\neg Q \to Q) \to Q$
- $\vdash (\neg Q \to R \wedge \neg R) \to Q$
- $\vdash (\neg Q \to R) \to ((\neg Q \to \neg R) \to Q)$
- $\vdash (Q \to R) \to ((Q \to \neg R) \to \neg Q)$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

命题逻辑定理

- $\vdash Q \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow R)$
- $\vdash Q \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow R$
-
- $\vdash (P \wedge Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$
- $\vdash Q \rightarrow (R \rightarrow (Q \wedge R))$
- $\vdash (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow Q \wedge R)$
- $\vdash (P \rightarrow R) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow R))$

- $P, Q \vdash P \wedge Q$

命题逻辑定理

- $\vdash Q \vee Q \rightarrow Q$
- $\vdash Q \wedge Q \rightarrow Q$
- $\vdash (Q \rightarrow R) \vee (R \rightarrow Q)$
- $\vdash (Q \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow \neg R)$

- 单调性：$(Q \rightarrow R) \rightarrow (Q \wedge P \rightarrow R \wedge P)$

下面证明一些命题逻辑定理

定理(三段论)：Q, Q→R ⊢ R

- 证明：　　　证据：
- A_1= Q→R　　　$A_1 \in \Gamma$
- A_2= Q　　　$A_2 \in \Gamma$
- A_3= R　　　对A_1,A_2用MP规则
- 证毕

定理(传递律)：P→Q,Q→R ⊢ P→R

- 证明：　　　　　　　　证据：
- $A_1=(Q\to R)\to(P\to(Q\to R))$　　$\mathscr{A}_1$
- $A_2=Q\to R$　　$A_2\in\Gamma$
- $A_3=P\to(Q\to R)$　　$A_1=A_2\to A_3$
- $A_4=(P\to(Q\to R))\to((P\to Q)\to(P\to R))$　　$\mathscr{A}_2$
- $A_5=(P\to Q)\to(P\to R)$　　$A_4=A_3\to A_5$
- $A_6=(P\to Q)$　　$A_6\in\Gamma$
- $A_7=(P\to R)$　　$A_5=A_6\to A_7$
- 证毕

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

$P, Q\to(P\to R) \vdash Q\to R$

- 证明：　　　　证据：
- $A_1 = (Q\to(P\to R))\to((Q\to P)\to(Q\to R))$　　$\mathscr{A}_2$
- $A_2 = Q\to(P\to R)$　　$A_2 \in \Gamma$
- $A_3 = (Q\to P)\to(Q\to R)$　　$A_1 = A_2\to A_3$
- $A_4 = P\to (Q\to P)$　　$\mathscr{A}_1$
- $A_5 = P$　　$A_5 \in \Gamma$
- $A_6 = Q\to P$　　$A_4 = A_5 \to A_6$
- $A_7 = (Q\to R)$　　$A_6 = A_3\to A_7$
- 证毕

前提剥离

$\vdash (P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to R))$

- 证明： 证据：
- $A_1=(P\to(Q\to R))\to((P\to Q)\to(P\to R))$ $\mathscr{A}_2$
- $A_2=((P\to Q)\to(P\to R))\to(Q\to((P\to Q)\to(P\to R)))$ $\mathscr{A}_1$
- $A_3=(Q\to((P\to Q)\to(P\to R)))\to((Q\to(P\to Q))\to(Q\to(P\to R)))$ $\mathscr{A}_2$
- $A_4=((P\to(Q\to R))\to((Q\to(P\to Q))\to(Q\to(P\to R))))$ $A_1, A_2, A_3 \vdash A_4$
- $A_5=((P\to(Q\to R))\to((Q\to(P\to Q))\to(Q\to(P\to R))))$
- $\to((P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to Q)))\to(P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to R)))$ $\mathscr{A}_2$
- $A_6=((P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to Q))\to(P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to R))$ $A_5=A_4\to A_6$
- $A_7=Q\to(P\to Q)$ $\mathscr{A}_1$
- $A_8=(Q\to(P\to Q))\to((P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to Q)))$ $\mathscr{A}_1$
- $A_9=(P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to Q))$ $A_8=A_7\to A_9$
- $A_{10}=(P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to R))$ $A_6=A_9\to A_{10}$
- 证毕

前提交换

$\vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

- 证明： 证据：
- $A_1 = (Q \to R) \to (P \to (Q \to R))$ $\mathscr{A}_1$
- $A_2 = (P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ $\mathscr{A}_2$
- $A_3 = (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ 传递律定理
- 证毕

前提加入

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

$\vdash (P\to Q)\to((Q\to R)\to(P\to R))$

- 证明：　　　　　　　　　　　　　　证据：
- $A_1=(Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$

  前提加入 $\vdash(Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$
- $A_2=((Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R)))$

  $\to((P\to Q)\to((Q\to R)\to(P\to R)))$

  前提交换 $\vdash(P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to R))$
- $A_3=((P\to Q)\to((Q\to R)\to(P\to R)))$　　传递律定理
- 证毕

$\vdash \neg\neg Q \to Q$

- **证明：** — **证据：**
- $A_1 = \neg\neg Q \to (\neg\neg\neg\neg Q \to \neg\neg Q)$ — $\mathscr{A}_1$
- $A_2 = (\neg\neg\neg\neg Q \to \neg\neg Q) \to (\neg Q \to \neg\neg\neg Q)$ — $\mathscr{A}_3$
- $A_3 = (\neg Q \to \neg\neg\neg Q) \to (\neg\neg Q \to Q)$ — $\mathscr{A}_3$
- $A_4 = \neg\neg Q \to (\neg\neg Q \to Q)$ — $A_1, A_2, A_3 \vdash A_4$
- $A_5 = (\neg\neg Q \to (\neg\neg Q \to Q))$
  $\to ((\neg\neg Q \to \neg\neg Q) \to (\neg\neg Q \to Q))$ — $\mathscr{A}_2$
- $A_6 = (\neg\neg Q \to \neg\neg Q) \to (\neg\neg Q \to Q)$ — $A_5 = A_4 \to A_6$
- $A_7 = (\neg\neg Q \to \neg\neg Q)$ — $\vdash Q \to Q$
- $A_8 = \neg\neg Q \to Q$ — $A_6 = A_7 \to A_8$
- **证毕**

$\vdash Q\to\neg\neg Q$

- **证明：**
- $A_1 = (\neg\neg\neg Q \to \neg Q)\to(Q\to\neg\neg Q)$
- $A_2 = (\neg\neg\neg Q \to \neg Q)$
- $A_3 = Q\to\neg\neg Q$
- **证毕**

证据：

$\mathscr{A}_3$

$\vdash \neg\neg Q\to Q$

$A_1 = A_2 \to A_3$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

$\vdash (\neg\neg Q \rightarrow \neg\neg R) \rightarrow (Q \rightarrow R)$

• **证明：**	**证据：**
• $A_1 = (\neg\neg Q \rightarrow \neg\neg R) \rightarrow (\neg R \rightarrow \neg Q)$	$\mathscr{A}_3$
• $A_2 = (\neg R \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$\mathscr{A}_3$
• $A_3 = (\neg\neg Q \rightarrow \neg\neg R) \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$A_1, A_2 \vdash A_3$
• **证毕**	

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

$\vdash (Q\to R)\to(\neg\neg Q\to\neg\neg R)$

- 证明： 证据：
- $A_1 = R\to\neg\neg R$ $\quad\vdash Q\to\neg\neg Q$
- $A_2=(R\to\neg\neg R)\to(\neg\neg Q\to(R\to\neg\neg R))$ $\quad\mathscr{A}_1$
- $A_3=\neg\neg Q\to(R\to\neg\neg R)$ $\quad A_2=A_1\to A_3$
- $A_4=(\neg\neg Q\to(R\to\neg\neg R))\to((\neg\neg Q\to R)\to(\neg\neg Q\to\neg\neg R))$ $\quad\mathscr{A}_2$
- $A_5= (\neg\neg Q\to R)\to(\neg\neg Q\to\neg\neg R)$ $\quad A_4=A_3\to A_5$
- $A_6= \neg\neg Q \to Q$ $\quad\vdash\neg\neg Q\to Q$
- $A_7=(\neg\neg Q\to Q)\to((Q\to R)\to(\neg\neg Q \to R))$ $\quad\vdash(P\to Q)\to((Q \to R)\to(P\to R))$
- $A_8=(Q\to R)\to(\neg\neg Q \to R)$ $\quad A_7=A_6\to A_8$
- $A_9=(Q\to R)\to(\neg\neg Q\to\neg\neg R)$ $\quad A_8, A_5\vdash A_9$
- 证毕

为什么不能像上一页一样，
直接用公理三？

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

$\vdash (Q\to R)\to(\neg R\to\neg Q)$

- 证明：　　　　　　　　　　　　　　证据：
- $A_1=(Q\to R)\to(\neg\neg Q\to\neg\neg R)$　　$\vdash (Q\to R)\to(\neg\neg Q\to\neg\neg R)$
- $A_2=(\neg\neg Q\to\neg\neg R)\to(\neg R\to\neg Q)$　　$\mathscr{A}_3$
- $A_3=(Q\to R)\to(\neg R\to\neg Q)$　　$A_1,A_2\vdash A_3$
- 证毕

$\vdash (\neg Q \to R) \to (\neg R \to Q)$

- **证明：** **证据：**
- $A_1 = (\neg Q \to R) \to (\neg R \to \neg\neg Q)$ $\vdash (Q \to R) \to (\neg R \to \neg Q)$
- $A_2 = \neg\neg Q \to Q$ $\vdash \neg\neg Q \to Q$
- $A_3 = (\neg\neg Q \to Q) \to ((\neg R \to \neg\neg Q) \to (\neg R \to Q))$
  $\vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
- $A_4 = (\neg R \to \neg\neg Q) \to (\neg R \to Q)$ $A_3 = A_2 \to A_4$
- $A_5 = (\neg Q \to R) \to (\neg R \to Q)$ $A_1, A_4 \vdash A_5$
- **证毕**

$\vdash (Q \to \neg R) \to (R \to \neg Q)$

- 证明：　　　　　　　　　　　　　　　　证据：
- $A_1 = (\neg\neg Q \to \neg R) \to (R \to \neg Q)$　　　　$\mathscr{A}_3$
- $A_2 = (\neg\neg Q \to Q) \to ((Q \to \neg R) \to (\neg\neg Q \to \neg R))$

  $\vdash (P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$
- $A_3 = (\neg\neg Q \to Q)$　　　　$\vdash (\neg\neg Q \to Q)$
- $A_4 = (Q \to \neg R) \to (\neg\neg Q \to \neg R)$　　　　$A_2 = A_3 \to A_4$
- $A_5 = (Q \to \neg R) \to (R \to \neg Q)$　　　　$A_4, A_1 \vdash A_5$
- 证毕

$\vdash (\neg Q \to Q) \to (R \to Q)$

- 证明: 证据:
- $A_1 = \neg Q \to (\neg\neg R \to \neg Q)$ $\mathscr{A}_1$
- $A_2 = (\neg\neg R \to \neg Q) \to (Q \to \neg R)$ $\mathscr{A}_3$
- $A_3 = \neg Q \to (Q \to \neg R)$ $A_1, A_2 \vdash A_3$
- $A_4 = (\neg Q \to (Q \to \neg R))$
  $\to ((\neg Q \to Q) \to (\neg Q \to \neg R))$ $\mathscr{A}_2$
- $A_5 = (\neg Q \to Q) \to (\neg Q \to \neg R)$ $A_4 = A_3 \to A_5$
- $A_6 = (\neg Q \to \neg R) \to (R \to Q)$ $\mathscr{A}_3$
- $A_7 = (\neg Q \to Q) \to (R \to Q)$ $A_5, A_6 \vdash A_7$
- 证毕

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

$\vdash Q \vee Q \rightarrow Q$

- **证明：**
- $A_1 = Q \vee Q \rightarrow (\neg Q \rightarrow Q)$
- $A_2 = (\neg Q \rightarrow Q) \rightarrow Q$
- $A_3 = Q \vee Q \rightarrow Q$
- **证毕**

证据：

$Q \vee Q \equiv (\neg Q \rightarrow Q)$

$\vdash (\neg Q \rightarrow Q) \rightarrow Q$

$A_1, A_2 \vdash A_3$

$\vdash \neg(Q\wedge\neg Q)$

- 证明：
- $A_1=Q\to\neg\neg Q$
- $A_2=(Q\to\neg\neg Q)\to\neg\neg(Q\to\neg\neg Q)$
- $A_3=\neg\neg(Q\to\neg\neg Q)$
- $A_4=\neg(Q\wedge\neg Q)$
- 证毕

证据：

$\vdash Q\to\neg\neg Q$

$\vdash Q\to\neg\neg Q$

$A_2=A_1\to A_3$

$Q\wedge R\equiv\neg(Q\to\neg R)$

$\vdash (Q \vee \neg Q)$

- **证明：**
- $A_1 = \neg Q \rightarrow \neg Q$
- $A_2 = (Q \vee \neg Q)$
- **证毕**

证据：

$\vdash Q \rightarrow Q$

$Q \vee R \equiv \neg Q \rightarrow R$

$\vdash (Q\to R)\vee(R\to Q)$

证明：	证据：
$A_1 = \neg Q\to(\neg R\to\neg Q)$	$\mathscr{A}_1$
$A_2 = (\neg R\to\neg Q)\to(Q\to R)$	$\mathscr{A}_3$
$A_3 = \neg Q\to(Q\to R)$	$\vdash \neg Q\to(Q\to R)$
$A_4 = (\neg Q\to(Q\to R))\to(R\to(\neg Q\to(Q\to R)))$	$\mathscr{A}_1$
$A_5 = R\to(\neg Q\to(Q\to R))$	$A_4 = A_3\to A_5$
$A_6 = (\neg Q\to(Q\to R))\to(\neg(Q\to R)\to Q)$	$\vdash(\neg Q\to R)\to(\neg R\to Q)$
$A_7 = R\to(\neg(Q\to R)\to Q)$	$A_5, A_6 \vdash A_7$
$A_8 = \neg(Q\to R)\to(R\to Q)$	$\vdash(P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to R))$
$A_9 = (Q\to R)\vee(R\to Q)$	$Q\vee R\equiv\neg Q\to R$
证毕	

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

$\vdash (Q\to R)\vee(Q\to\neg R)$

- **证明：** **证据：**
- $A_1 = R\to(Q\to R)$ $\mathscr{A}_1$
- $A_2 = (R\to(Q\to R))\to(Q\to(R\to(Q\to R)))$ $\mathscr{A}_1$
- $A_3 = Q\to(R\to(Q\to R))$ $A_2=A_1\to A_3$
- $A_4 = (R\to(Q\to R))\to(\neg(Q\to R)\to\neg R)$ $\vdash(Q\to R)\to(\neg R\to\neg Q)$
- $A_5 = Q\to(\neg(Q\to R)\to\neg R)$ $A_3, A_4 \vdash A_5$
- $A_6 = (Q\to(\neg(Q\to R)\to\neg R))$
  $\to(\neg(Q\to R)\to(Q\to\neg R))$ $\vdash (P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to R))$
- $A_7 = \neg(Q\to R)\to(Q\to\neg R)$ $A_6=A_5\to A_7$
- $A_8 = (Q\to R)\vee(Q\to\neg R)$ $Q\vee R\equiv\neg Q\to R$
- **证毕**

$\vdash Q\to((Q\to R)\to R)$

- 证明：　　　　　　　　　　　　证据：
- $A_1=(Q\to R)\to(Q\to R)$　　　　$\vdash Q\to Q$
- $A_2=((Q\to R)\to(Q\to R))\to(Q\to((Q\to R)\to R))$

  $\vdash(P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to R))$
- $A_3=Q\to((Q\to R)\to R)$　　　　$A_2=A_1\to A_3$
- 证毕
-

$\vdash Q\wedge(Q\to R)\to R$

证明：	证据：
$A_1=(Q\to R)\to(Q\to R)$	$\vdash Q\to Q$
$A_2=Q\to((Q\to R)\to R)$	$\vdash Q\to((Q\to R)\to R)$
$A_3=((Q\to R)\to R)\to(\neg R\to\neg(Q\to R))$	$\vdash(Q\to R)\to(\neg R\to\neg Q)$
$A_4=Q\to(\neg R\to\neg(Q\to R))$	$A_2, A_3\vdash A_4$
$A_5=\neg R\to(Q\to\neg(Q\to R))$	$A_4;\vdash(P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to R))$
$A_6=\neg(Q\to\neg(Q\to R))\to R$	$A_5;\vdash(\neg Q\to R)\to(\neg R\to Q)$
$A_7=Q\wedge(Q\to R)\to R$	$Q\wedge R\equiv\neg(Q\to\neg R)$
证毕	

$\vdash (\neg Q \to R) \to ((\neg Q \to \neg R) \to Q)$

证明：	证据：
$A_1 = (\neg Q \to Q) \to Q$	$\vdash (\neg Q \to Q) \to Q$
$A_2 = ((R \to Q) \to (\neg Q \to Q)) \to ((R \to Q) \to Q)$	A_1; $\vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
$A_3 = ((\neg Q \to R) \to ((R \to Q) \to (\neg Q \to Q)))$	
$\quad \to ((\neg Q \to R) \to ((R \to Q) \to Q))$	A_2; $\vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
$A_4 = (\neg Q \to R) \to ((R \to Q) \to (\neg Q \to Q))$	$\vdash (P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$
$A_5 = (\neg Q \to R) \to ((R \to Q) \to Q)$	$A_3 = A_4 \to A_5$
$A_6 = (R \to Q) \to ((\neg Q \to R) \to Q)$	A_5; $\vdash (P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$
$A_7 = (\neg Q \to \neg R) \to (R \to Q)$	$\mathscr{A}_3$
$A_8 = (\neg Q \to \neg R) \to ((\neg Q \to R) \to Q)$	$A_7, A_6 \vdash A_8$
$A_9 = (\neg Q \to R) \to ((\neg Q \to \neg R) \to Q)$	A_8; $\vdash (P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$

证毕

$\vdash (Q\to R)\to((Q\to\neg R)\to\neg Q)$

- **证明：** **证据：**
- $A_1= (\neg\neg Q\to\neg Q) \to\neg Q$ $\vdash (\neg Q\to Q) \to Q$
- $A_2=(Q\to\neg Q) \to (\neg\neg Q\to\neg Q)$ $\vdash (Q\to R) \to(\neg R\to\neg Q)$
- $A_3= (Q\to\neg Q)\to\neg Q$ $A_2, A_1 \vdash A_3$
- $A_4= ((R\to\neg Q) \to (Q\to\neg Q))\to ((R\to\neg Q) \to\neg Q)$ A_3; $\vdash (Q\to R) \to((P \to Q) \to(P \to R))$
- $A_5= ((Q\to R) \to((R\to\neg Q) \to (Q\to\neg Q)))$
- $\to ((Q\to R) \to((R\to\neg Q) \to\neg Q))$ A_4; $\vdash (Q\to R) \to((P \to Q) \to(P \to R))$
- $A_6= (Q\to R) \to((R\to\neg Q) \to (Q\to\neg Q))$ $\vdash (P \to Q) \to((Q \to R) \to(P \to R))$
- $A_7= (Q\to R) \to((R\to\neg Q) \to\neg Q)$ $A_5=A_6\to A_7$
- $A_8= (R\to\neg Q) \to((Q\to R)\to\neg Q)$ A_5; $\vdash (P \to(Q \to R)) \to(Q \to(P\to R))$
- $A_9= (Q\to\neg R) \to (R\to\neg Q)$ $\vdash (Q\to\neg R) \to (R\to\neg Q)$
- $A_{10}= (Q\to\neg R) \to((Q\to R)\to\neg Q)$ $A_9, A_8 \vdash A_{10}$
- $A_{11}= (Q\to R) \to((Q\to\neg R)\to\neg Q)$ A_{10}; $\vdash (P \to(Q \to R)) \to(Q \to(P\to R))$
- **证毕**

$\vdash (\neg Q \to R \wedge \neg R) \to Q$

- 证明：
- $A_1 = (\neg Q \to \neg (R \to \neg\neg R)) \to ((R \to \neg\neg R) \to Q)$
- $A_2 = R \to \neg\neg R$
- $A_3 = (\neg Q \to \neg (R \to \neg\neg R)) \to Q$
- $A_4 = (\neg Q \to R \wedge \neg R) \to Q$
- 证毕

证据：

$\vdash (\neg Q \to \neg R) \to (R \to Q)$

$\vdash Q \to \neg\neg Q$

$P \to (Q \to R), Q \vdash P \to R$

$Q \wedge R \equiv \neg (Q \to \neg R)$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

$\vdash Q\to R\vee Q$

- 证明：
- $A_1 = Q\to(\neg R\to Q)$
- $A_2 = Q\to R\vee Q$
- 证毕

证据：

$\mathscr{A}_1$

$Q\vee R=(\neg Q\to R)$

$\vdash Q\wedge R\rightarrow R\wedge Q$

- 证明：
- $A_1=(R\rightarrow\neg Q)\rightarrow(Q\rightarrow\neg R)$
- $A_2=((R\rightarrow\neg Q)\rightarrow(Q\rightarrow\neg R))\rightarrow(\neg(Q\rightarrow\neg R)\rightarrow\neg(R\rightarrow\neg Q))$
- $A_3=\neg(Q\rightarrow\neg R)\rightarrow\neg(R\rightarrow\neg Q)$
- $A_4=Q\wedge R\rightarrow R\wedge Q$
- 证毕
-

证据：

$\vdash(R\rightarrow\neg Q)\rightarrow(Q\rightarrow\neg R)$

$\vdash(R\rightarrow Q)\rightarrow(\neg Q\rightarrow\neg R)$

$A_2=A_1\rightarrow A_3$

$Q\wedge R\equiv\neg(Q\rightarrow\neg R)$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

$\vdash Q \wedge R \rightarrow Q$

- 证明： 证据：
- $A_1 = \neg Q \rightarrow (R \rightarrow \neg Q)$ $\mathscr{A}_1$
- $A_2 = (R \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow \neg R)$ $\vdash (Q \rightarrow \neg R) \rightarrow (R \rightarrow \neg Q)$
- $A_3 = \neg Q \rightarrow (Q \rightarrow \neg R)$ $A_1, A_2 \vdash A_3$
- $A_4 = (\neg Q \rightarrow (Q \rightarrow \neg R)) \rightarrow (\neg (Q \rightarrow \neg R) \rightarrow Q)$
- $\vdash (\neg Q \rightarrow R) \rightarrow (\neg R \rightarrow Q)$
- $A_5 = (\neg (Q \rightarrow \neg R) \rightarrow Q)$ $A_4 = A_3 \rightarrow A_5$
- $A_6 = Q \wedge R \rightarrow Q$ $Q \wedge R \equiv \neg (Q \rightarrow \neg R)$
- 证毕

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

$\vdash (P\wedge Q\rightarrow R) \rightarrow (P\rightarrow(Q\rightarrow R))$

证明：	证据：
$A_1= (P\wedge Q \rightarrow R) \rightarrow (\neg R\rightarrow\neg(P\wedge Q))$	$\vdash(Q\rightarrow R) \rightarrow(\neg R \rightarrow\neg Q)$
$A_2= (\neg R\rightarrow\neg(P\wedge Q))\rightarrow(\neg R \rightarrow\neg\neg(P \rightarrow\neg Q))$	$Q\wedge R\equiv\neg (Q\rightarrow\neg R)$
$A_3= \neg\neg(P\rightarrow\neg Q)\rightarrow(P \rightarrow\neg Q)$	$\vdash\neg\neg Q\rightarrow Q$
$A_4= (\neg R\rightarrow\neg\neg(P\rightarrow\neg Q)) \rightarrow(\neg R\rightarrow(P \rightarrow\neg Q))$	$A_3; \vdash(Q\rightarrow R)\rightarrow((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$
$A_5= (\neg R \rightarrow(P \rightarrow\neg Q))\rightarrow (P\rightarrow(\neg R \rightarrow\neg Q)))$	$\vdash(P\rightarrow(Q\rightarrow R)) \rightarrow(Q\rightarrow(P\rightarrow R))$
$A_6=(\neg R \rightarrow\neg Q) \rightarrow(Q\rightarrow R)$	$\mathscr{A}_3$
$A_7=((\neg R \rightarrow\neg Q) \rightarrow(Q\rightarrow R))$ $\rightarrow ((P\rightarrow(\neg R \rightarrow\neg Q))\rightarrow(P\rightarrow(Q\rightarrow R)))$	$\vdash(Q\rightarrow R)\rightarrow((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$
$A_8= (P\rightarrow(\neg R \rightarrow\neg Q))\rightarrow(P\rightarrow(Q\rightarrow R))$	$A_7=A_6\rightarrow A_8$
$A_9= (P\wedge Q \rightarrow R) \rightarrow(P\rightarrow(Q\rightarrow R))$	$A_1, A_2 , A_4 , A_5 , A_8 \vdash A_9$
证毕	

$\vdash Q\to(R\to(Q\wedge R))$

- 证明：
- $A_1 = (Q\to\neg R)\to(Q\to\neg R)$
- $A_2=((Q\to\neg R)\to(Q\to\neg R))\to(Q\to((Q\to\neg R)\to\neg R))$
- $A_3= Q\to((Q\to\neg R)\to\neg R))$
- $A_4= ((Q\to\neg R)\to\neg R)\to(R\to\neg(Q\to\neg R))$
- $A_5= Q\to(R\to\neg(Q\to\neg R))$
- $A_6= Q\to(R\to(Q\wedge R))$
- 证毕
-

证据：

$\vdash Q\to Q$

$\vdash(P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to R))$

$A_2=A_1\to A_3$

$\vdash(Q\to\neg R)\to(R\to\neg Q)$

$A_3, A_4 \vdash A_5$

$Q\wedge R\equiv\neg(Q\to\neg R)$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

$\vdash Q\to(\neg R\to\neg(Q\to R))$

- 证明：
- $A_1=(Q\to R)\to(Q\to R)$
- $A_2=((Q\to R)\to(Q\to R))$
  $\to(Q\to((Q\to R)\to R))$
- $A_3= Q\to((Q\to R)\to R)$
- $A_4=((Q\to R)\to R)$
  $\to(\neg R\to\neg(Q\to R))$
- $A_5= Q\to(\neg R\to\neg(Q\to R))$
- 证毕

证据：

$\mathscr{A}_1$

$\vdash(P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to R))$

$A_2=A_1\to A_3$

$\vdash(Q\to R)\to(\neg R\to\neg Q)$

$A_3, A_4\vdash A_5$

$\vdash (P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to R))$

- **应用演绎定理**

  $P\to(Q\to R)\vdash Q\to(P\to R)$

  $P\to(Q\to R), Q\vdash P\to R$

  $P\to(Q\to R), Q, P\vdash R$
- **证明：**
- $A_1= P\to(Q\to R)$ $\quad A_1\in \Gamma$
- $A_2=P$ $\quad A_2\in \Gamma$
- $A_3= Q\to R$ $\quad A_1=A_2\to A_3$
- $A_4=Q$ $\quad A_4\in \Gamma$
- $A_5=R$ $\quad A_3=A_4\to A_5$
- **证毕**

$\vdash (P\to Q)\wedge(P\to R) \to (P\to Q\wedge R)$

- 根据演绎定理，证明$(P\to Q)\wedge(P\to R)$，$P \vdash Q\wedge R$
- 证明： 证据：
- $A_1= (P\to Q)\wedge(P\to R)$ $A_1\in\Gamma$
- $A_2= (P\to Q)\wedge(P\to R)\to(P\to Q)$ $\vdash Q\wedge R\to Q$
- $A_3= (P\to Q) \wedge(P\to R) \to (P\to R)$ $\vdash Q\wedge R\to R$
- $A_4= P\to Q$ $A_2=A_1\to A_4$
- $A_5= P$ $A_5\in\Gamma$
- $A_6= Q$ $A_3=A_4\to A_5$
- $A_7= P\to R$ $A_3=A_1\to A_7$
- $A_8= R$ $A_7=A_5\to A_8$
- $A_9= Q \wedge R$ $A_6, A_8 \vdash A_6\wedge A_8$
- 证毕

$\vdash (P\to R)\wedge(Q\to S)\to(P\wedge Q\to R\wedge S)$

- 根据演绎定理，证明$(P\to R)\wedge(Q\to S)$, $P\wedge Q \vdash R\wedge S$
- 设$\Gamma=\{(P\to R)\wedge(Q\to S), P\wedge Q\}$
- 证明：　　　　证据：
- $A_1=(P\to R)\wedge(Q\to S)$　　$A_1\in\Gamma$
- $A_2=(P\to R)\wedge(Q\to S)\to(P\to R)$　　$\vdash Q\wedge R\to Q$
- $A_3= P\to R$　　$A_2=A_1\to A_3$
- $A_4=(P\to R)\wedge(Q\to S)\to(Q\to S)$　　$\vdash Q\wedge R\to R$
- $A_5= Q\to S$　　$A_4=A_1\to A_5$
- $A_6= P\wedge Q$　　$A_6\in\Gamma$
- $A_7= P\wedge Q\to P$　　$\vdash Q\wedge R\to Q$
- $A_8=P$　　$A_7=A_6\to A_8$
- $A_9= P\wedge Q\to Q$　　$\vdash Q\wedge R\to R$

- $A_{10}=Q$　　$A_9=A_8\to A_{10}$
- $A_{11}=R$　　$A_3=A_8\to A_{11}$
- $A_{12}=S$　　$A_5=A_{10}\to A_{12}$
- $A_{13}= R\wedge S$　　$Q,R\vdash Q\wedge R$
- 证毕

应用演绎定理进行证明

$\vdash(P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to R))$

- **应用演绎定理**

  $P\to(Q\to R)\vdash Q\to(P\to R)$

  $P\to(Q\to R), Q\vdash P\to R$

  $P\to(Q\to R), Q, P\vdash R$
- **证明：**
- $A_1= P\to(Q\to R)$ $\qquad A_1\in \Gamma$
- $A_2=P$ $\qquad A_2\in \Gamma$
- $A_3= Q\to R$ $\qquad A_1=A_2\to A_3$
- $A_4=Q$ $\qquad A_4\in \Gamma$
- $A_5=R$ $\qquad A_3=A_4\to A_5$
- **证毕**

$\vdash (P\to Q)\wedge(P\to R) \to (P\to Q\wedge R)$

- 根据演绎定理，证明$(P\to Q)\wedge(P\to R)$，$P \vdash Q\wedge R$
- 证明：　　　　　　　　　　　　　　　　　证据：
- $A_1= (P\to Q)\wedge(P\to R)$　　　　　　　$A_1\in\Gamma$
- $A_2= (P\to Q)\wedge(P\to R)\to(P\to Q)$　　　$\vdash Q\wedge R\to Q$
- $A_3= (P\to Q) \wedge(P\to R) \to (P\to R)$　　$\vdash Q\wedge R\to R$
- $A_4= P\to Q$　　　　　　　　　　　　　$A_2=A_1\to A_4$
- $A_5= P$　　　　　　　　　　　　　　　$A_5\in\Gamma$
- $A_6= Q$　　　　　　　　　　　　　　　$A_3=A_4\to A_5$
- $A_7= P\to R$　　　　　　　　　　　　　$A_3=A_1\to A_7$
- $A_8= R$　　　　　　　　　　　　　　　$A_7=A_5\to A_8$
- $A_9= Q \wedge R$　　　　　　　　　　　　$A_6, A_8 \vdash A_6\wedge A_8$
- 证毕

$\vdash (P\to R)\wedge(Q\to S)\to(P\wedge Q\to R\wedge S)$

- 根据演绎定理，证明$(P\to R)\wedge(Q\to S), P\wedge Q \vdash R\wedge S$
- 设$\Gamma=\{(P\to R)\wedge(Q\to S), P\wedge Q\}$
- 证明：　　　　证据：
- $A_1=(P\to R)\wedge(Q\to S)$　　$A_1\in\Gamma$
- $A_2=(P\to R)\wedge(Q\to S)\to(P\to R)$　　$\vdash Q\wedge R\to Q$
- $A_3=P\to R$　　$A_2=A_1\to A_3$
- $A_4=(P\to R)\wedge(Q\to S)\to(Q\to S)$　　$\vdash Q\wedge R\to R$
- $A_5=Q\to S$　　$A_4=A_1\to A_5$
- $A_6=P\wedge Q$　　$A_6\in\Gamma$
- $A_7=P\wedge Q\to P$　　$\vdash Q\wedge R\to Q$
- $A_8=P$　　$A_7=A_6\to A_8$
- $A_9=P\wedge Q\to Q$　　$\vdash Q\wedge R\to R$

- $A_{10}=Q$　　$A_9=A_8\to A_{10}$
- $A_{11}=R$　　$A_3=A_8\to A_{11}$
- $A_{12}=S$　　$A_5=A_{10}\to A_{12}$
- $A_{13}=R\wedge S$　　$Q,R\vdash Q\wedge R$
- 证毕

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

内 容

- 3.0. 公理系统简介
- 3.1. 命题逻辑的公理系统
- 3.2. 谓词逻辑的公理系统

谓词逻辑公理系统

- (1) 符号：个体变元、个体常元、n元函数符号、n元谓词符号、联结词¬, →、量词符号∀、括号(,)、逗号,
- (2) 项和公式：见第二章谓词逻辑
- (2).公理集合：
  - 1).公理模式$\mathscr{A}_1$：A→ (B→A)
  - 2).公理模式$\mathscr{A}_2$：(A→ (B→C)) → ((A→B) → (A→C))
  - 3).公理模式$\mathscr{A}_3$：(¬A→¬B) → (B→A)
  - 4).公理模式$\mathscr{A}_4$：$\forall x_i A \to A_t^{x_i}$

    (其中, 项t对于A中的x_i是可代入的)
  - 5).公理模式$\mathscr{A}_5$：$\forall x_i(A \to B) \to (A \to \forall x_i B)$

    (其中, x不是A中自由变元)
- (3).推理规则
  - 1).分离规则（简称MP规则）：从A和A→B推出B。
  - 2).全称概括（简称UG规则）：从A推出$\forall x_i A$。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

缩写定义

- 公理系统中仅使用了¬和→联结词符号，{¬,→}是完全集。其他联结词符号∨,∧,↔,⊕可由{¬,→} 定义，谓词符号∃可由∀定义，用≡表示缩写定义。
  - (1).$Q \vee R \equiv (\neg Q \rightarrow R)$
  - (2).$Q \wedge R \equiv \neg (Q \rightarrow \neg R)$
  - (3).$Q \leftrightarrow R \equiv (Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q)$
  - (4).$Q \oplus R \equiv \neg (Q \leftrightarrow R)$
- 谓词公理系统中仅使用了量词∀，而量词∃可以认为是缩写公式，用≡表示缩写定义。
  - (5). $\exists x_i Q \equiv \neg \forall x_i \neg Q$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

推演、前提集和结论

- **定义3.2**：设Γ是**语句集**， 如果公式序列$A_1, \dots, A_n$中的每个公式A_i满足以下条件之一：
  - (1) A_i是公理
  - (2) $A_i \in \Gamma$
  - (3) 有j,k < i使A_i由A_j, A_k用MP规则推出
  - (4) 有j < i, 使A_i由A_j用UG规则推出
- 则称它为A_n的从语句集Γ的一个**推演**，其中Γ称为推演的**前提集**，A_n称为**结论**

定理和证明

- 如果存在一个B的从Γ的推演，记为$\Gamma \vdash B$
- 将$\{Q_1, \ldots, Q_n\} \vdash B$，简记为$Q_1, \ldots, Q_n \vdash B$。将$\emptyset \vdash B$，简记为$\vdash B$。
- 如果$\vdash B$，则称B为定理(Theorem)。
- 如果$A_1, \ldots, A_n$是B的从空集∅的推演，则称$A_1, \ldots, A_n$是B的一个证明(Proof)。

可靠性定理(Soundness)

- **定理3.8**：若$\Gamma \vdash A$，则$\Gamma \vDash A$。
  - 证明：设$A_1, \ldots, A_n$是A的从Γ的推演。归纳证明$\Gamma \vDash A_i$ (i=1,2,…,n)
  - (1) 若A_i是公理一、二、三，则A_i是永真式，所以$\Gamma \vDash A_i$
  - (2) 若A_i是公理四$\forall x_j B \to B_t^{x_j}$，根据2.4节例2.17，它是永真式，所以$\Gamma \vDash A_i$
  - (3) 若A_i是公理五$\forall x_j(B \to C) \to (B \to \forall x_j C)$，有2.5节等值式可知$\forall x_j(B \to C) \Leftrightarrow (B \to \forall x_j C)$，因此$\forall x_j(B \to C) \leftrightarrow (B \to \forall x_j C)$是永真式，因此$\forall x_j(B \to C) \to (B \to \forall x_j C)$是永真式，所以$\Gamma \vDash A_i$
  - (4) 若$A_i \in \Gamma$，则$\Gamma \vDash A_i$

可靠性定理(Soundness)

- **定理3.8**：若$\Gamma \vdash A$，则$\Gamma \vDash A$。
  - (5) 若A_i由A_j, A_k用MP规则推出，其中j,k < i，A_k为$A_j \to A_i$，由归纳假设可知，$\Gamma \vDash A_j$且$\Gamma \vDash A_j \to A_i$，所以$\Gamma \vDash A_i$
  - (6) 若A_i由A_j用UG规则推出，其中j < i，$A_i = \forall x_k A_j$。由归纳假设$\Gamma \vDash A_j$，任取满足Γ的解释I，则$I \vDash A_j$。设v是I中的任意赋值，任取$d \in D_I$，则$I(A_j)(v[x_k/d]) = 1$，因此$I(\forall x_k A_j)(v) = 1$，所以$\Gamma \vDash A_i$
  - 而A_n就是A，所以$\Gamma \vDash A$

- **推论：若$\vdash A$，则$\vDash A$**
- **定理3.9：若A是重言式，则$\vdash A$**

> **定义2.17：** 用谓词逻辑公式$B_1,\ldots,B_n$分别替换命题逻辑公式A中的命题变元$p_1,\ldots,p_n$得到谓词逻辑公式$A^{p_1,\cdots,p_n}_{B_1,\cdots,B_n}$，称为A的替换实例。
>
> 命题逻辑永真式的替换实例称为**重言式**
>
> **定理2.4：** 重言式必是永真式

- 证明：设$A = B^{p_1,\cdots,p_n}_{B_1,\cdots,B_n}$, B是命题逻辑永真式
- 有命题逻辑公理系统完备性可知$\vdash B$, 设$C_1,\ldots,C_m$是B的一个证明, 用$B_1,\ldots,B_n$分别替换$C_1,\ldots,C_m$中出现的$p_1,\ldots,p_n$得到$D_1,\ldots,D_m$。现在证明$D_1,\ldots,D_m$是A的一个证明：
  - 若C_i是公理，则D_i是同样公理模式中的公理
  - 若C_i由C_j, C_k用MP规则推出，则D_i由D_j, D_k用MP规则推出
- 因为C_m是B, 所以D_m是A。

演绎定理

- **定理3.10**：若A是句子, $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$当且仅当$\Gamma \vdash A \to B$
  - 充分性：设$A_1, \dots, A_n$是B的从$\Gamma \cup \{A\}$的推演，归纳证明$\Gamma \vdash A \to A_i$ (i = 1,2,…,n)
  - (1) 对于A_i是公理, $A_i \in \Gamma$，A_i由A_j, A_k用MP规则推出，这三种情况, 证明过程同定理3.2。
  - (2) 设A_i是$\forall x_k A_j$, 其中j < i。由归纳假设$\Gamma \vdash A \to A_j$, 由UG规则得$\Gamma \vdash \forall x_k(A \to A_j)$。因为A是语句, x_k不是A的自由变元, $\forall x_k(A \to A_j) \to (A \to \forall x_k A_j)$是公理五。用MP规则得出$\Gamma \vdash A \to \forall x_k A_j$
  - 因此，$\Gamma \vdash A \to A_n$，即$\Gamma \vdash A \to B$
  - 必要性：同定理3.2。

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

- **例3.6**：若 $\Gamma \vdash \forall x_i A$ 且t对于A中的 x_i 可代入，则$\Gamma \vdash A_t^{x_i}$
  - 证明：$\forall x_i A \to A_t^{x_i}$ 是公理四，和前提条件一起使用MP规则，得出$\Gamma \vdash A_t^{x_i}$

- **定理3.11**：设$b_1, \dots, b_n$是语句集Γ中不出现的不同常元, $y_1, \dots, y_n$是公式A中不出现的不同变元, 用 $y_1, \dots, y_n$ 分别替换A中的 $b_1, \dots, b_n$ 得到B。若$\Gamma \vdash A$, 则$\Gamma \vdash B$
  - 证明：设$C_1, \dots, C_m$是A从Γ的一个推演，$z_1, \dots, z_n$是在$C_1, \dots, C_m$不出现的不同变元，并且$\{z_1, \dots, z_n\} \cap \{y_1, \dots, y_n\} = \emptyset$。用$z_1, \dots, z_n$分别代替$C_1, \dots, C_m$中出现的$b_1, \dots, b_n$，得到$D_1, \dots, D_m$。现在证明$D_1, \dots, D_m$是$D_m$的从Γ的一个推演
  - (1) 若C_i是公理，则D_i是同样公理模式中的公理
  - (2) 若$C_i \in \Gamma$, 由于$b_1, \dots, b_n$是语句集Γ中不出现的不同常元, 则C_i与D_i

- (3) 若C_i由C_j, C_k用MP规则推出, 则D_i由D_j, D_k用MP规则推出
- (4) 若C_i由C_j用UG规则推出, 则D_i由D_j用UG规则推出
- 因此, $\Gamma \vdash D_m$, 用n次UG规则得$\Gamma \vdash \forall z_1 \ldots \forall z_n D_m$, 在用n次例3.6得$\Gamma \vdash (D_m)_{y_1,\ldots,y_n}^{z_1,\ldots,z_n}$, 即$\Gamma \vdash B$

定理3.11的应用

- **例3.7**：$\vdash \forall x_1(P_1^2(x_1,x_2) \to P_2^2(x_1,x_2)) \to (\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2) \to \forall x_1 P_2^2(x_1,x_2))$
  - 证明：有自由变元 x_2，不是语句，不能用演绎定理。由定理3.11, 只需证
  $\vdash \forall x_1(P_1^2(x_1,a_1) \to P_2^2(x_1,a_1)) \to (\forall x_1 P_1^2(x_1,a_1) \to \forall x_1 P_2^2(x_1,a_1))$
  - 再由演绎定理, 只需证

    $\forall x_1\left(P_1^2(x_1,a_1) \to P_2^2(x_1,a_1)\right), \forall x_1 P_1^2(x_1,a_1) \vdash \forall x_1 P_2^2(x_1,a_1)$

  - $\{\forall x_1\left(P_1^2(x_1,a_1) \to P_2^2(x_1,a_1)\right), \forall x_1 P_1^2(x_1,a_1)\}$记为$\Gamma$

- $\Gamma \vdash \forall x_1 P_1^2(x_1, a_1)$
- $\Gamma \vdash P_1^2(x_1, a_1)$ 例3.6
- $\Gamma \vdash \forall x_1 \left(P_1^2(x_1, a_1) \to P_2^2(x_1, a_1)\right)$
- $\Gamma \vdash P_1^2(x_1, a_1) \to P_2^2(x_1, a_1)$ 例3.6
- $\Gamma \vdash P_2^2(x_1, a_1)$ MP规则
- $\Gamma \vdash \forall x_1 P_2^2(x_1, a_1)$ UG规则

- **例3.8**：$\Gamma \vdash A \to B$, 则$\Gamma \vdash \forall x_i A \to \forall x_i B$
  - $\Gamma \vdash \forall x_i A \to A$ 公理四
  - $\Gamma \vdash A \to B$
  - $\Gamma \vdash (\forall x_i A \to A) \to ((A \to B) \to (\forall x_i A \to B))$
    重言式$(P \to A) \to ((A \to B) \to (P \to B))$
  - $\Gamma \vdash \forall x_i A \to B$ MP规则
  - $\Gamma \vdash \forall x_i(\forall x_i A \to B)$ UG规则
  - $\Gamma \vdash \forall x_i(\forall x_i A \to B) \to (\forall x_i A \to \forall x_i B)$ 公理五
  - $\Gamma \vdash \forall x_i A \to \forall x_i B$ MP规则

- **例3.9**：$\vdash \forall x_i A \vee \forall x_i B \to \forall x_i (A \vee B)$
  - $\vdash A \to A \vee B$ 重言式
  - $\vdash \forall x_i A \to \forall x_i (A \vee B)$ 例3.8
  - $\vdash B \to A \vee B$ 重言式
  - $\vdash \forall x_i B \to \forall x_i (A \vee B)$ 例3.8
  - $\vdash (\forall x_i A \to \forall x_i (A \vee B)) \to (\forall x_i B \to \forall x_i (A \vee B)) \to (\forall x_i A \vee \forall x_i B \to \forall x_i (A \vee B))$

    重言式$(P \to R) \to (Q \to R) \to (P \vee Q \to R)$
  - $\vdash \forall x_i A \vee \forall x_i B \to \forall x_i (A \vee B)$ MP规则

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

协调

- **定义3.6**：如果对于每个公式A，有$\Gamma \vdash A$，则称Γ是不协调的语句集，否则称Γ是协调的语句集。
- **定理3.12**：若$\Gamma \vdash \neg P_1^1(x_1) \wedge P_1^1(x_1)$，则Γ是不协调的
  - 证明: 任取公式A，$\neg P_1^1(x_1) \wedge P_1^1(x_1) \to A$是重言式, 故$\Gamma \vdash \neg P_1^1(x_1) \wedge P_1^1(x_1) \to A$, 所以$\Gamma \vdash A$
- **定理3.13**：若Γ协调，则Γ可满足。

软件开发环境国家重点实验室
State Key Laboratory of Software Development Environment

完备性定理

- **定理3.14**：若$\Gamma \vDash A$，则$\Gamma \vdash A$。
  - 证明: 设B是A的闭包, 若解释I满足Γ, 则必然满足B, 即不满足$\neg B$, 所以$\Gamma \cup \{\neg B\}$不可满足。由定理3.13得出,$\Gamma \cup \{\neg B\}$不协调, 因此$\Gamma \cup \{\neg B\} \vdash B$。由演绎定理可知, $\Gamma \vdash \neg B \to B$。
  - 又因为$(\neg B \to B) \to B$是重言式, 故$\Gamma \vdash (\neg B \to B) \to B$, 由MP规则得出$\Gamma \vdash B$, 再若干次使用例3.6, 得到$\Gamma \vdash A$
- **推论**：若$\vDash A$，则$\vdash A$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

紧致性定理

- **定理3.15 (第一种形式)**：若$\Gamma \vDash A$，则有Γ的有穷子集Γ'使得$\Gamma' \vDash A$。
- **定理3.16 (第二种形式)**：若Γ不可满足，则有Γ的有穷子集不可满足

- 紧致性定理是一阶逻辑的重要性质，用完备性定理来证明
- 对于二阶逻辑，紧致性定理不成立，因此找不到一个既可靠又完备的二阶逻辑公理系统，即不管怎样规定公理和推理规则，都不能做到$\Gamma \vDash A$当且仅当则$\Gamma \vdash A$。

一阶谓词逻辑定理

- $\vdash \forall x R(x) \leftrightarrow \forall y\ R(y)$
- $\vdash \exists x R(x) \leftrightarrow \exists y\ R(y)$
- $\vdash Q(c) \rightarrow \exists x Q(x)$
- $\vdash \forall x R(x) \rightarrow \exists x R(x)$
-
- $\vdash \forall x \forall y\ R(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x R(x,y)$
- $\vdash \exists x \exists y\ R(x,y) \leftrightarrow \exists y \exists x R(x,y)$
- $\vdash \exists x \forall y R(x,y) \rightarrow \forall y \exists x\ R(x,y)$
- $\vdash \forall x \forall y R(x,y) \rightarrow \forall x R(x,x)$
- $\vdash \exists x R(x,x) \rightarrow \exists x \exists y R(x,y)$

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

一阶谓词逻辑定理

- $\vdash \forall x(P(x)\to Q(x)) \to (\forall xP(x) \to \forall x\, Q(x))$
- $\vdash \forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists xP(x) \to \exists x\, Q(x))$
- $\vdash \forall x(P(x)\land Q(x))\leftrightarrow(\forall xP(x)\land\forall xQ(x))$
- $\vdash \forall xP(x) \lor \forall xQ(x))\to\forall x(P(x) \lor Q(x))$
- $\vdash \exists x(P(x)\land Q(x)) \to(\exists xP(x) \land\exists xQ(x))$
- $\vdash \exists x(P(x)\lor Q(x)) \leftrightarrow(\exists xP(x) \lor\exists xQ(x))$

一阶谓词逻辑定理

- $\vdash \forall x P(x) \leftrightarrow \neg\exists x \neg P(x)$
- $\vdash \exists x P(x) \leftrightarrow \neg\forall x \neg P(x)$
- $\vdash \exists x \neg P(x) \leftrightarrow \neg\forall x P(x)$
- $\vdash \neg\exists x \neg P(x) \leftrightarrow \forall x P(x)$
-

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

$\vdash \forall x Q(x) \to \forall y\, Q(y)$（y不在Q中出现）

- **证明：**
  证据：
- $A_1 = \forall x Q(x) \to Q(y)$
  $\mathscr{A}_4$
- $A_2 = \forall y(\forall x Q(x) \to Q(y))$
  UG
- $A_3 = \forall y(\forall x Q(x) \to Q(y)) \to (\forall x Q(x) \to \forall y\, Q(y))$
  $\mathscr{A}_5$
- $A_4 = \forall x Q(x) \to \forall y\, Q(y)$
  $A_3 = A_2 \to A_4$
- **证毕**

$\vdash \exists x Q(x) \rightarrow \exists y Q(y)$

- **证明：** **证据：**
- $A_1 = \forall y \neg Q(y) \rightarrow \forall x \neg Q(x)$ $\vdash \forall x Q(x) \rightarrow \forall y Q(y)$
- $A_2 = (\forall y \neg Q(y) \rightarrow \forall x \neg Q(x))$

  $\rightarrow (\neg \forall x \neg Q(x) \rightarrow \neg \forall y \neg Q(y))$

  $\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow (\neg R \rightarrow \neg Q)$
- $A_3 = (\neg \forall x \neg Q(x) \rightarrow \neg \forall y \neg Q(y))$ $A_2 = A_1 \rightarrow A_3$
- $A_4 = \exists x Q(x) \rightarrow \exists y Q(y)$ $\exists x Q(x) \equiv \neg \forall x \neg Q(x)$
- **证毕**

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

$\vdash \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$

• **证明：**	**证据：**
• $A_1 = \forall x \neg P(x) \rightarrow \neg P(y)$	$\mathscr{A}_4$
• $A_2 = (\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg P(y)) \rightarrow (\neg\neg P(y) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x))$	$\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow (\neg R \rightarrow \neg Q)$
• $A_3 = \neg\neg P(y) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)$	$A_1, A_2 \vdash A_3$
• $A_4 = P(y) \rightarrow \neg\neg P(y)$	$\vdash Q \rightarrow \neg\neg Q$
• $A_5 = P(y) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)$	$A_4, A_3 \vdash A_5$
• $A_6 = \forall x P(x) \rightarrow P(y)$	$\mathscr{A}_4$
• $A_7 = \forall x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)$	$A_6, A_5 \vdash A_7$
• $A_8 = \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$	$\exists x Q(x) \equiv \neg \forall \neg Q(x)$
• **证毕**	

$\vdash Q(c) \rightarrow \exists x Q(x)$

- **证明：** 　　　　**证据：**
- $A_1 = \forall x \neg Q(x) \rightarrow \neg Q(c)$ 　　$\mathscr{A}_4$
- $A_2 = (\forall x \neg Q(x) \rightarrow \neg Q(c)) \rightarrow (\neg\neg Q(c) \rightarrow \neg \forall x \neg Q(x))$

  $\vdash (Q \rightarrow \neg R) \rightarrow (R \rightarrow \neg Q)$
- $A_3 = \neg\neg Q(c) \rightarrow \neg \forall x \neg Q(x)$ 　　$A_2 = A_1 \rightarrow A_3$
- $A_4 = Q(c) \rightarrow \neg\neg Q(c)$ 　　$\vdash Q \rightarrow \neg\neg Q$
- $A_5 = Q(c) \rightarrow \neg \forall x \neg Q(x)$ 　　$A_4, A_3 \vdash A_5$
- $A_6 = Q(c) \rightarrow \exists x Q(x)$ 　　$\exists x Q(x) \equiv \neg \forall \neg Q(x)$
- **证毕**

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

$\vdash \forall x \forall y\, R(x,y) \to \forall y \forall x R(x,y)$

证明:	证据:
$A_1=\forall x\forall y\, R(x,y) \to \forall y\, R(x,y)$	$\mathscr{A}_4$
$A_2=\forall y\, R(x,y) \to R(x,y)$	$\mathscr{A}_4$
$A_3=\forall x\forall y\, R(x,y) \to R(x,y)$	$A_1, A_2 \vdash A_3$
$A_4=\forall x\, (\forall x\forall y\, R(x,y) \to R(x,y))$	UG
$A_5=\forall x\, (\forall x\forall y\, R(x,y) \to R(x,y)) \to (\forall x\forall y\, R(x,y) \to \forall x R(x,y))$	$\mathscr{A}_5$
$A_6=(\forall x\forall y\, R(x,y) \to \forall x R(x,y))$	$A_5=A_4\to A_6$
$A_7=\forall y(\forall x\forall y\, R(x,y) \to \forall x R(x,y))$	UG
$A_8=\forall y(\forall x\forall y\, R(x,y) \to \forall x R(x,y)) \to (\forall x\forall y\, R(x,y) \to \forall y\forall x R(x,y))$	$\mathscr{A}_5$
$A_9=(\forall x\forall y\, R(x,y) \to \forall y\forall x R(x,y))$	$A_8=A_7\to A_9$
证毕	

$\vdash \exists x \exists y R(x,y) \rightarrow \exists y \exists x R(x,y)$

- 证明：　　　　　　　　　　　　　　　　　　证据：
- $A_1 = \forall y \forall x \neg R(x,y) \rightarrow \forall x \forall y \neg R(x,y)$

  $\vdash \forall x \forall y\, R(x,y) \rightarrow \forall y \forall x R(x,y)$
- $A_2 = \neg \forall x \forall y \neg R(x,y) \rightarrow \neg \forall y \forall x \neg R(x,y)$

  $A_1; \vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow (\neg R \rightarrow \neg Q)$
- $A_3 = \exists\, x \neg \forall y \neg R(x,y) \rightarrow \exists\, y \neg \forall x \neg R(x,y)$

  $\neg \forall x Q(x) \equiv \exists x \neg Q(x)$
- $A_4 = \exists\, x \exists y R(x,y) \rightarrow \exists\, y \exists x R(x,y)$

  $\neg \forall x \neg Q(x) \equiv \exists x Q(x)$
- 证毕

$\vdash \exists x \forall y R(x,y) \to \forall y \exists x R(x,y)$

- 证明：　　　　证据：
- $A_1 = \exists x \forall y R(x,y) \to \forall y R(c,y)$　　$\vdash \exists x Q(x) \to Q(c)$
- $A_2 = \forall y R(c,y) \to R(c,y)$　　$\mathscr{A}_4$
- $A_3 = R(c,y) \to \exists x R(x,y)$　　$\vdash Q(c) \to \exists x Q(x)$
- $A_4 = \exists x \forall y R(x,y) \to \exists x R(x,y)$　　$A_1, A_2, A_3 \vdash A_3$
- $A_5 = \forall y(\exists x \forall y R(x,y) \to \exists x R(x,y))$　　UG
- $A_6 = \forall y(\exists x \forall y R(x,y) \to \exists x R(x,y)) \to (\exists x \forall y R(x,y) \to \forall y \exists x R(x,y))$　　$\mathscr{A}_5$
- $A_7 = \exists x \forall y R(x,y) \to \forall y \exists x R(x,y)$　　$A_6 = A_5 \to A_7$
- 证毕

$\vdash \forall x \forall y R(x,y) \to \forall x R(x,x)$

- **证明：** **证据：**
- $A_1 = \forall x \forall y R(x,y) \to \forall y R(x,y)$ $\mathscr{A}_4$
- $A_2 = \forall y R(x,y) \to R(x,x)$ $\mathscr{A}_4$
- $A_3 = \forall x \forall y R(x,y) \to R(x,x)$ $A_1, A_2 \vdash A_3$
- $A_4 = \forall x (\forall x \forall y R(x,y) \to R(x,x))$ UG
- $A_5 = \forall x (\forall x \forall y R(x,y) \to R(x,x))$
  $\to (\forall x \forall y R(x,y) \to \forall x R(x,x))$ $\mathscr{A}_5$
- $A_6 = \forall x \forall y R(x,y) \to \forall x R(x,x)$ $A_5 = A_4 \to A_6$
- **证毕**

软件开发环境国家重点实验室
State Key Laboratory of Software Development Environment

$\vdash \exists x R(x,x) \to \exists x \exists y R(x,y)$

- 证明：　　　　证据：
- $A_1 = \forall x \forall y \neg R(x,y) \to \forall x \neg R(x,x)$

  $\vdash \forall x \forall y R(x,y) \to \forall x R(x,x)$
- $A_2 = \neg \forall x \neg R(x,x) \to \neg \forall x \forall y \neg R(x,y)$

  A_1; $\vdash (Q \to R) \to (\neg R \to \neg Q)$
- $A_3 = \exists x R(x,x) \to \neg \forall x \forall y \neg R(x,y)$

  $\neg \forall x \neg Q(x) \equiv \exists x Q(x)$
- $A_4 = \neg \forall x \forall y \neg R(x,y) \to \exists x \neg \forall y \neg R(x,y)$

  $\neg \forall x Q(x) \equiv \exists x \neg Q(x)$
- $A_5 = \exists x \neg \forall y \neg R(x,y) \to \exists x \exists y R(x,y)$

  $\neg \forall x \neg Q(x) \equiv \exists x Q(x)$
- $A_6 = \exists x R(x,x) \to \exists x \exists y R(x,y)$

  $A_3, A_4, A_5 \vdash A_6$
- 证毕

$\vdash \forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow (\forall xP(x)\rightarrow \forall xQ(x))$

- **证明：** 证据：
- $A_1= (\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow(P(x)\rightarrow Q(x))$ $\mathscr{A}_4$
- $A_2=(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow((\forall xP(x)\rightarrow P(x))\rightarrow(\forall xP(x)\rightarrow Q(x)))$
  $\vdash(Q\rightarrow R)\rightarrow((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$
- $A_3= (\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow ((\forall xP(x)\rightarrow P(x))\rightarrow(\forall xP(x)\rightarrow Q(x)))$
  $A_1, A_2 \vdash A_3$
- $A_4= \forall xP(x)\rightarrow P(x)$ $\mathscr{A}_4$
- $A_4= (\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow (\forall xP(x)\rightarrow Q(x))$ Q
  $\vdash(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\rightarrow(P\rightarrow R)$
- $A_5=\forall x((\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow (\forall xP(x)\rightarrow Q(x)))$ UG
- $A_6= \forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow\forall x(\forall xP(x)\rightarrow Q(x))$ $\mathscr{A}_5$
- $A_7=\forall x(\forall xP(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow(\forall xP(x)\rightarrow\forall x\, Q(x))$ $\mathscr{A}_5$
- $A_8=\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow (\forall xP(x)\rightarrow\forall x\, Q(x))$ $A_6, A_7 \vdash A_8$
- **证毕**

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

$\vdash \forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow(\exists xP(x)\rightarrow\exists x\, Q(x))$

- **证明：** **证据：**
- $A_1= \forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow(P(x)\rightarrow Q(x))$ $\mathscr{A}_4$
- $A_2=Q(x)\rightarrow\exists x\, Q(x)$ $\vdash Q(c)\rightarrow\exists x\, Q(x)$
- $A_3=(Q(x)\rightarrow\exists x\, Q(x))\rightarrow((P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow(P(x)\rightarrow\exists x\, Q(x)))$
  $\vdash(Q\rightarrow R)\rightarrow((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$
- $A_4= (P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow(P(x)\rightarrow\exists x\, Q(x))$ $A_3=A_2\rightarrow A_4$
- $A_5= (P(x)\rightarrow\exists x\, Q(x))\rightarrow(\neg\exists x\, Q(x)\rightarrow\neg P(x))$
  $\vdash(Q\rightarrow R)\rightarrow(\neg R\rightarrow\neg Q)$
- $A_6= \forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow(\neg\exists x\, Q(x)\rightarrow\neg P(x))$ $A_1 , A_4, A_5 \vdash A_6$
- $A_7=\forall x(\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow(\neg\exists x\, Q(x)\rightarrow\neg P(x)))$ UG
- $A_8=\forall x(\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow(\neg\exists x\, Q(x)\rightarrow\neg P(x)))$
- $\rightarrow((\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow\forall x(\neg\exists x\, Q(x)\rightarrow\neg P(x)))$ $\mathscr{A}_5$

- $A_9 = (\forall x(P(x) \to Q(x)) \to \forall x (\neg\exists x\, Q(x) \to \neg P(x))$ $A_8 = A_7 \to A_9$
- $A_{10} = \forall x (\neg\exists x\, Q(x) \to \neg P(x)) \to (\neg\exists x\, Q(x) \to \forall x\, \neg P(x))$ $\mathscr{A}_5$
- $A_{11} = (\neg\exists x Q(x) \to \forall x \neg P(x)) \to (\neg\forall x \neg P(x) \to \exists x\, Q(x))$

  $\vdash (\neg Q \to R) \to (\neg R \to Q)$
- $A_{12} = (\neg\forall x \neg P(x) \to \exists x\, Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x\, Q(x))$

  $\neg\forall x \neg P(x) \equiv \exists x P(x)$
- $A_{13} = (\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x))$

  $A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12} \vdash A_{13}$
- **证毕**
-

软件开发环境国家重点实验室 State Key Laboratory of Software Development Environment

$\vdash (\forall x P(x) \land \forall x Q(x)) \to \forall x (P(x) \land Q(x))$

- 证明： 　　证据：
- $A_1 = (\forall x P(x) \land \forall x Q(x)) \to \forall x P(x)$ 　　$\vdash Q \land R \to Q$
- $A_2 = \forall x P(x) \to P(x)$ 　　$\mathscr{A}_4$
- $A_3 = (\forall x P(x) \land \forall x Q(x)) \to P(x)$ 　　$A_1, A_2 \vdash A_3$
- $A_4 = (\forall x P(x) \land \forall x Q(x)) \to \forall x Q(x)$ 　　$\vdash Q \land R \to R$
- $A_5 = \forall x Q(x) \to Q(x)$ 　　$\mathscr{A}_4$
- $A_6 = (\forall x P(x) \land \forall x Q(x)) \to Q(x)$ 　　$A_4, A_5 \vdash A_6$
- $A_7 = (\forall x P(x) \land \forall x Q(x)) \to P(x) \land Q(x)$

  $\vdash ((P \to Q) \land (P \to R)) \to (P \to Q \land R)$
- $A_8 = \forall x ((\forall x P(x) \land \forall x Q(x)) \to P(x) \land Q(x))$ 　　UG
- $A_9 = \forall x ((\forall x P(x) \land \forall x Q(x)) \to P(x) \land Q(x))$
- $\quad \to (\forall x P(x) \land \forall x Q(x)) \to \forall x (P(x) \land Q(x))$ 　　$\mathscr{A}_5$
- $A_{10} = (\forall x P(x) \land \forall x Q(x)) \to \forall x (P(x) \land Q(x))$ 　　$A_9 = A_8 \to A_{10}$
- 证毕

$\vdash (\forall xP(x)\vee\forall xQ(x))\rightarrow\forall x(P(x)\vee Q(x))$

- **证明：** 　　　　　　　　　　　　　　　　**证据：**
- $A_1= \forall xP(x)\rightarrow P(x)$ 　　　　　　$\mathscr{A}_4$
- $A_2= \forall xQ(x)\rightarrow Q(x)$ 　　　　　　$\mathscr{A}_4$
- $A_3=(\forall xP(x)\vee\forall xQ(x))\rightarrow (P(x)\vee Q(x))$

$Q_0\rightarrow R_0, Q_1\rightarrow R_1 \vdash Q_0\vee Q_1\rightarrow R_0\vee R_1$

- $A_4=\forall x ((\forall xP(x) \vee\forall xQ(x))\rightarrow (P(x) \vee Q(x)))$ 　　UG
- $A_5=\forall x ((\forall xP(x) \vee\forall xQ(x))\rightarrow (P(x)\vee Q(x)))$
- $\rightarrow (\forall xP(x) \vee\forall xQ(x))\rightarrow\forall x (P(x) \vee Q(x))$ 　　$\mathscr{A}_5$
- $A_6= (\forall xP(x) \vee\forall xQ(x))\rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$ 　　$A_5=A_4\rightarrow A_6$
- **证毕**

$\vdash \exists x(P(x)\wedge Q(x))\to(\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x))$

- 证明： 证据：
- $A_1= \forall x\neg P(x)\to\neg P(x)$ $\mathscr{A}_4$
- $A_2=\forall x\neg Q(x)\to\neg Q(x)$ $\mathscr{A}_4$
- $A_3= \forall x\neg P(x)\vee\forall x\neg Q(x)\to\neg P(x)\vee\neg Q(x)$

  $Q_0\to R_0,\ Q_1\to R_1 \vdash Q_0\vee Q_1\to R_0\vee R_1$
- $A_4=\forall x\ (\forall x\neg P(x)\vee\forall x\neg Q(x)\to\neg P(x)\vee\neg Q(x))$ UG
- $A_5=\forall x\ (\forall x\neg P(x)\vee\forall x\neg Q(x)\to\neg P(x)\vee\neg Q(x))$
- $\to(\forall x\neg P(x)\vee\forall x\neg Q(x)\to\forall x(\neg P(x)\vee\neg Q(x)))$ $\mathscr{A}_5$
- $A_6=(\forall x\neg P(x)\vee\forall x\neg Q(x)\to\forall x(\neg P(x)\vee\neg Q(x))$ $A_5=A_4\to A_6$
- $A_7= \neg\forall x(\neg P(x)\vee\neg Q(x))\to\neg(\forall x\neg P(x)\vee\forall x\neg Q(x))$

  $A_6;\ \vdash(Q\to R)\to(\neg R\to\neg Q)$
- $A_8=\neg\forall x\neg(P(x)\wedge Q(x))\to\neg\neg(\neg\forall x\neg P(x)\wedge\neg\forall x\neg Q(x))$ $\vdash(Q\vee R)\to\neg(\neg Q\wedge\neg R)$
- $A_9= \exists x(P(x)\wedge Q(x))\to\neg\neg(\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x))$ $\neg\forall x\neg Q(x)\equiv\exists xQ(x)$
- $A_{10}= \neg\neg(\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x))\to(\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x))$ $\vdash\neg\neg Q\to Q$
- $A_{11}= \exists x(P(x)\wedge Q(x))\to(\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x))$ $A_9,\ A_{10}\vdash A_{11}$
- 证毕

$\vdash \exists x(P(x)\vee Q(x))\to(\exists xP(x)\vee\exists xQ(x))$

证明：	证据：
$A_1= \forall x\neg P(x)\to\neg P(x)$	$\mathscr{A}_4$
$A_2= \forall x\neg Q(x)\to\neg Q(x)$	$\mathscr{A}_4$
$A_3= \forall x\neg P(x)\wedge\forall x\neg Q(x)\to\neg P(x)\wedge\neg Q(x)$	$Q_0\to R_0, Q_1\to R_1 \vdash Q_0\wedge Q_1\to R_0\wedge R_1$
$A_4= \neg P(x)\wedge\neg Q(x)\to\neg(P(x)\vee Q(x))$	$\vdash \neg Q\wedge\neg R\to\neg(Q\vee R)$
$A_5= \forall x\neg P(x)\wedge\forall x\neg Q(x)\to\neg(P(x)\vee Q(x))$	$A_3, A_4 \vdash A_5$
$A_6= \neg(\neg\forall x\neg P(x)\vee\neg\forall x\neg Q(x))\to\forall x\neg P(x)\wedge\forall x\neg Q(x)$	$\vdash\neg(\neg Q\vee\neg R)\to(Q\wedge R)$
$A_7= \neg(\neg\forall x\neg P(x)\vee\neg\forall x\neg Q(x))\to\neg(P(x)\vee Q(x))$	$A_6, A_5 \vdash A_7$
$A_8= \neg(\exists xP(x)\vee\exists xQ(x))\to\neg(P(x)\vee Q(x))$	$\neg\forall x\neg Q(x)\equiv\exists xQ(x)$
$A_9= \forall x(\neg(\exists xP(x)\vee\exists xQ(x))\to\neg(P(x)\vee Q(x)))$	UG
$A_{10}=\forall x(\neg(\exists xP(x)\vee\exists xQ(x))\to\neg(P(x)\vee Q(x)))$	
$\quad\to\neg(\exists xP(x)\vee\exists xQ(x))\to\forall x\neg(P(x)\vee Q(x))$	$\mathscr{A}_5$
$A_{11}= \neg(\exists xP(x)\vee\exists xQ(x))\to\forall x\neg(P(x)\vee Q(x))$	$A_{10}, A_9 \vdash A_{11}$
$A_{12}=(\neg(\exists xP(x)\vee\exists xQ(x))\to\forall x\neg(P(x)\vee Q(x)))$	
$\quad\to(\neg\forall x\neg(P(x)\vee Q(x))\to(\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)))$	$\vdash(\neg Q\to R)\to(\neg R\to Q)$
$A_{13}= \exists x(P(x)\vee Q(x))\to(\exists xP(x)\vee\exists xQ(x))$	$A_{12}=A_{11}\to A_{13}$
证毕	

$\vdash \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$

• **证明：**	**证据：**
• $A_1 = \neg P(x) \rightarrow \neg P(x)$	$Q \rightarrow Q$
• $A_2 = P(x) \vee \neg P(x)$	$Q \vee R \equiv (\neg Q \rightarrow R)$
• $A_3 = \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$	UG
• **证毕**	

应用演绎定理进行证明

$\vdash \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \to (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$

- 演绎定理：仅需证$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
- 设$\Gamma = \{\forall x(P(x) \wedge Q(x))\}$
- 证明：　　　　证据：
- $A_1 = \forall x(P(x) \wedge Q(x))$　　　　$A_1 \in \Gamma$
- $A_2 = \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \to P(x) \wedge Q(x)$　　　　$\mathscr{A}_4$
- $A_3 = P(x) \wedge Q(x)$　　　　$A_2 = A_1 \to A_3$
- $A_4 = P(x) \wedge Q(x) \to P(x)$　　　　$\vdash Q \wedge R \to Q$
- $A_5 = P(x)$　　　　$A_4 = A_3 \to A_5$
- $A_6 = \forall x P(x)$　　　　$\mathscr{A}_5$
- $A_7 = P(x) \wedge Q(x) \to Q(x)$　　　　$\vdash Q \wedge R \to R$
- $A_8 = Q(x)$　　　　$A_7 = A_3 \to A_8$
- $A_9 = \forall x Q(x)$　　　　$\mathscr{A}_5$
- $A_{10} = \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$　　　　$Q, R \vdash Q \wedge R$
- 证毕

本　节　完！

问题与解答？