Método Monte-Carlo

Francisco Gerardo Meza Fierro

1. Introducción

En esta práctica se empleará el método Monte-Carlo para aproximar el valor de $\int_3^7 \frac{1}{\exp(x)+\exp(-x)}\,\mathrm{d}x$. Se inferirá sobre la relación que hay en aumentar el tamaño de muestra sobre la precisión de los valores estimados respecto al valor exacto de la integral, así como también sobre el tiempo de ejecución. Además, de manera análoga, se estimará el valor de π.

2. Estimación al valor de la integral

Dado que se requiere generar números pseudoaleatorios para poner en práctica el método Monte-Carlo, es necesario encontrar una función de distribución; se tomó $\frac{2f(x)}{\pi}$ como tal función dado que $\int \frac{2}{\pi}f(x)\mathrm{d}x = 1$. Esto nos permite generar números pseudoaleatorios con distribución $g(x) = \frac{2f(x)}{\pi}$ para poder estimar $\int_3^7 g(x)\,\mathrm{d}x$ y finalmente normalizarlo para tener $\int_3^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A fin de variar el tamaño de la muestra, se agregó una función `for` que incrementa la muestra en ocho distintos tamaños: 5,000, 20,000, 45,000, 80,000, 125,000, 180,000, 245,000, 320,000, donde para cada tamaño de muestra, con ayuda de otra función `for`, se crean diez repeticiones, teniendo en total ochenta estimaciones distintas para el valor de la integral; además se registró el tiempo de ejecución para cada repetición con ayuda función `Sys.time()`. Estos datos se aprecian en la figura 1 y se encuentran adjuntos en un archivo *.csv* en el repositorio de GitHub. Debe aclararse que la línea roja que ahí se aprecia indica el valor exacto de la integral en cuestión.

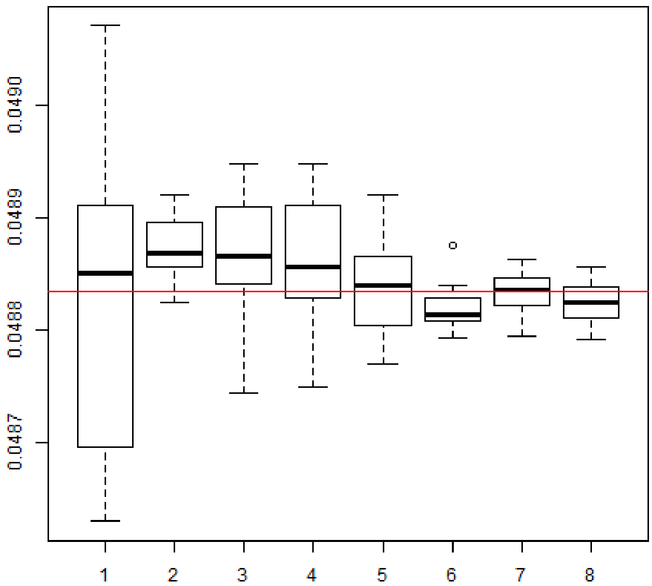
Resulta evidente que a mayor el tamaño de la muestra más aproximado es el valor que se obtiene de la integral, o lo que es lo mismo, menor es la diferencia entre las estimaciones y el valor real; esto se debe a que a mayor el tamaño, mayor los números que se generan y por tanto mejor la aproximación al valor real. Respecto a los tiempos de ejecución, es claro también que aumentaría conforme se aumenta el tamaño de la muestra. Ambos resultados fueron los deseados y esperados desde un principio.

3. Estimación del valor π

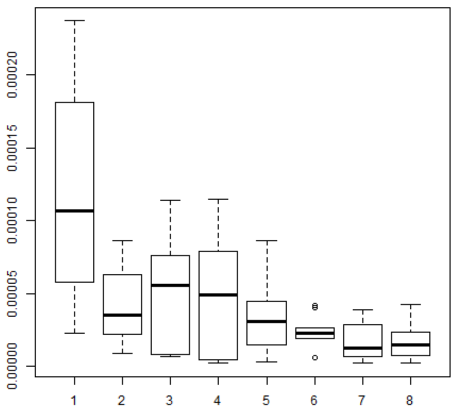
Antes de estimar el valor, se recordarán algunos conceptos elementales como lo son el área de un círculo, que está dada por πr^2, y si se dibuja un cuadrado conteniendo al círculo, entonces el área del cuadrado será $4r^2$ ya que el lado del cuadrado es de $2r$. Ahora, la proporción entre el área del círculo y el área del cuadrado es $\frac{\pi r^2}{4r^2}$ o simplemente $\frac{\pi}{4}$. Sabiendo esto, si podemos determinar empíricamente la relación entre el área del círculo y el área del cuadrado, podemos simplemente multiplicar ese número por cuatro y obtendremos nuestra aproximación de π.

Para hacer esto, podemos generar aleatoriamente los valores x y y de una unidad cuadrada centrada alrededor de cero. Si $x^2+y^2 \leq r^2$ entonces el punto está en el círculo ($r = 0{,}5$). La proporción de puntos en el círculo a la muestra total de puntos multiplicada por cuatro debe aproximar π. La figura 2 muestra un ejemplo de una aproximación del valor de π.

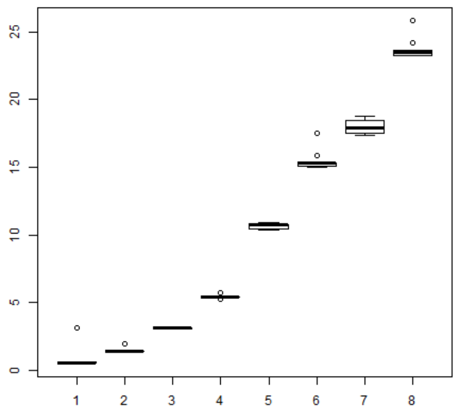
Ahora bien, de manera análoga a la sección anterior de esta práctica, se varía el tamaño de muestra en veinte distintos tamaños (desde 10,000 hasta 4,000,000) y para cada uno se generaron diez aproximaciones, obteniendo un total de 200 estimaciones distintas para el valor de π. Estos datos se aprecian en la figura 3 y se encuentran adjuntos en un archivo *.csv* en el repositorio de GitHub. Se aclara que la línea roja que ahí se aprecia indica el valor exacto del valor de π.



(a) Valores estimados por tamaño de muestra



(b) Diferencia entre el valor estimado y el valor real



(c) Tiempos de ejecución por tamaño de muestra

Figura 1: Datos obtenidos de las estimaciones de la integral

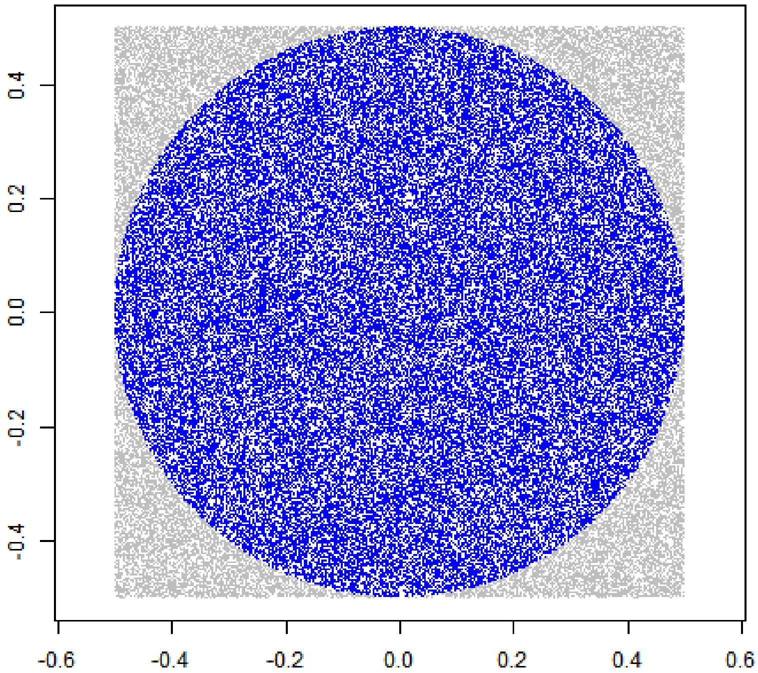
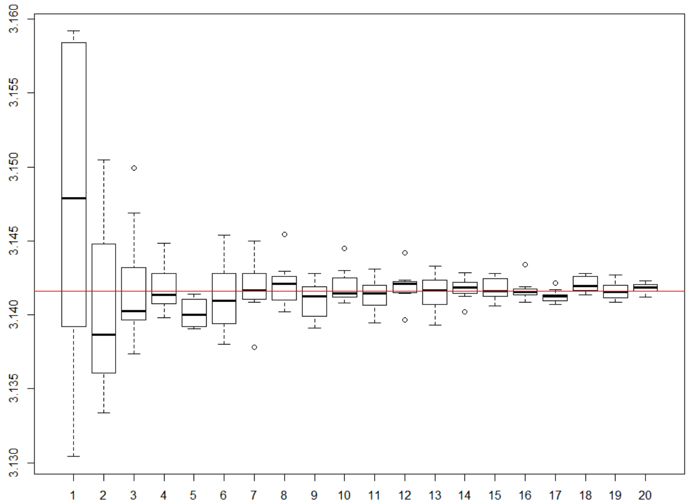
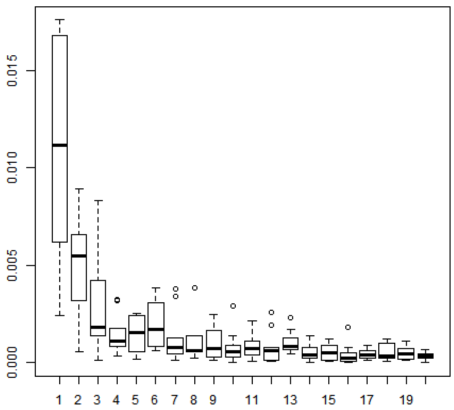


Figura 2: Ejemplo de aproximación de π distribuciones

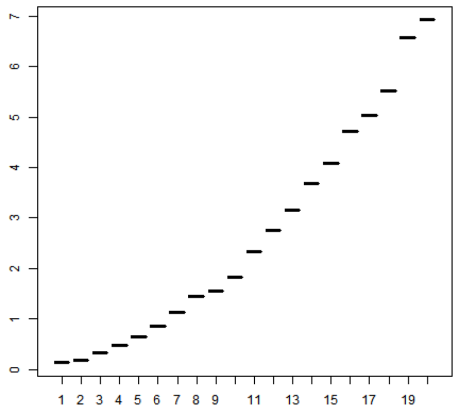
De manera análoga al análisis de las estimaciones de la integral, es evidente que a mayor el tamaño de la muestra más aproximado es el valor que se obtiene de π, o lo que es lo mismo, menor es la diferencia entre las estimaciones y el valor real. Respecto a los tiempos de ejecución, es claro también que aumentaría conforme se aumenta el tamaño de la muestra. Ambos resultados fueron los deseados y esperados desde un principio.



(a) Valores estimados por tamaño de muestra



(b) Diferencia entre el valor estimado y el valor real



(c) Tiempos de ejecución por tamaño de muestra

Figura 3: Datos obtenidos de las estimaciones de π