

Математический анализ

1 курс

Теория для экзамена 4 модуля

1. Доказать теорему Ньютона–Лейбница. Вывести формулу Ньютона–Лейбница.

Теорема Ньютона–Лейбница. Пусть f непрерывна в (α, β) , $a \in (\alpha, \beta)$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ – первообразная для $f(x)$. Тогда $\forall x \in (\alpha, \beta) : F'(x) = f(x)$.

□

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \end{aligned}$$

f непрерывна, а значит, по теореме о среднем, $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Delta x \cdot f(x^*)$,

где x^* лежит между x и $x + \Delta x$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \Delta x \cdot f(x^*) \\ &= f(x^*) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \end{aligned}$$

$$F'(x) = f(x) \quad \blacksquare$$

Формула Ньютона–Лейбница. Пусть f – непрерывная на (α, β) , $a, b \in (\alpha, \beta)$, а $\Phi(x)$ – некоторая первообразная для f . Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

$$\square \exists C \in \mathbb{R} : \Phi(x) = F(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C$$

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt + C = 0 + C = C$$

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt + C$$

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(t)dt + C - C = \int_a^b f(t)dt. \quad \blacksquare$$

2. Вывести формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

□ $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt$ По формуле Ньютона–Лейбница, интегрируя по частям n раз, получим:

$$\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t)dt = - \int_a^x f'(t)d(x-t) = -f'(t)(x-t) \Big|_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t)dt = \\
&= f'(a)(x-a) - \int_a^x f''(t)d\frac{(x-t)^2}{2} = \\
&= f'(a)(x-a) + f''(t)\frac{(x-t)^2}{2} \Big|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}df''(t) = \\
&= f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t)dt = \\
&= f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{2 \cdot 3} + \int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^3}{2 \cdot 3}dt = \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt
\end{aligned}$$

■

3. Доказать признак сравнения для несобственных интегралов в предельной форме.

Пусть $x \in [a, b)$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$. Тогда если $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow b$, то $I_1 = \int_a^b f(x)dx$ и $I_2 = \int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

□ По условию эквивалентности: $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Для него $\exists \delta > a : \forall x : \delta < x < b \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x)$$

Если $I_2 = \int_a^b g(x)dx$ сходится, то $\int_\delta^b f(x)dx$ сходится.

Если I_2 расходится, то $\int_\delta^b \frac{1}{2}g(x)dx$ расходится $\Rightarrow \int_\delta^b f(x)dx$ расходится $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ расходится. ■

4. Доказать интегральный признак сходимости числового ряда.

Дана функция f , определённая при всех $x \geq 1$, неотрицательная и убывающая, тогда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится \Leftrightarrow сходится интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

□ Так как функция монотонна на $[1, +\infty)$, тогда она интегрируема по Риману на любом конечном отрезке $[1, \eta]$, и поэтому имеет смысл говорить о несобственном интеграле.

Если $k \leq x \leq k+1$, тогда $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$, $k = 1, 2, \dots$ (функция убывает). Проинтегрировав это неравенство $[k, k+1]$, имеем:

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1), k = 1, 2, \dots$$

Суммируя от $k = 1$ до $k = n$, получим:

$$\sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^n f(k+1)$$

Положим, $s_n = \sum_{k=1}^n f(k)$, будем иметь

$$s_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq s_{n+1} - f(1)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Если интеграл сходится, то в силу неотрицательности f справедливо неравенство:

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

Отсюда следует:

$$s_{n+1} \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

То есть последовательность частичных сумм ряда ограничена сверху, а, значит, ряд сходится.

Если ряд сходится, пусть его сумма равна s , тогда $\forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq s$

И, следовательно, $\forall n \in \mathbb{N} \int_1^{n+1} f(x)dx$

Пусть ξ , то, взяв n так, чтобы $n \geq \xi$

В силу неотрицательности функции имеем:

$$\int_1^\xi f(x)dx \leq \int_1^n f(x)dx \leq s$$

Таким образом, совокупность всех интегралов $\int_1^\xi f(x)dx$ ограничена сверху.

Поэтому интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится. ■

5. Доказать признак д'Аламбера в предельной форме.

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда:

- если $q < 1$, то ряд сходится;
- если $q > 1$, то ряд расходится;
- если $q = 1$, то имеет место неопределённость.

□ 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$

Тогда $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{q+1}{2} < 1 \Rightarrow$ ряд сходится.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$

Тогда $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{q+1}{2} > 1 \Rightarrow$ ряд расходится.

3) а) Гармонический ряд $a_n = \frac{1}{n}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Ряд расходится.

б) $a_n = \frac{1}{n^2}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Ряд сходится. ■

6. Доказать сходимость абсолютно сходящегося ряда.

Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.

□

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2} = \begin{cases} a_n, & \text{if } a_n \geq 0 \\ 0, & \text{if } a_n < 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq a_n^+ \leq |a_n| \xrightarrow{\text{по теореме сравнения}} \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \text{сходится.}$$

$$a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2} = \begin{cases} 0, & \text{if } a_n \geq 0 \\ -a_n, & \text{if } a_n < 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq a_n^- \leq |a_n| \xrightarrow{\text{по теореме сравнения}} \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- - \text{сходится.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+}_{\text{сходится}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-}_{\text{сходится}} \Rightarrow \text{по линейности сходится и наш ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

■

7. Доказать теорему о почленном интегрировании и дифференцировании функционального ряда.

Теорема о почленном интегрировании функционального ряда. Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в Δ , и притом все $u_n(x)$ непрерывны в Δ , то

$$\forall [a, b] \subset \Delta : \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

□ $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна в $\Delta \Rightarrow s(x) \in \mathcal{R}([a, b])$, $[a, b] \subset \Delta$.

$$\begin{aligned} \int_a^b s(x) dx &= \int_a^b (s_n(x) + r_n(x)) dx \\ &= \int_a^b s_n(x) dx + \int_a^b r_n(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx + \int_a^b r_n(x) dx \end{aligned}$$

$$\left| \int_a^b r_n(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |r_n(x)| dx \right| \leq |b-a| \cdot \max_{[a,b]} |r_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ (по равномерной сходимости)}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx + \int_a^b r_n(x) dx \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx. \quad \blacksquare$$

Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in \Delta$ — интервал, и притом:

- 1) $u_n(x), u'_n(x)$ непрерывны в Δ ;
- 2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ равномерно сходится в Δ ;
- 3) $\exists a \in \Delta : \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ сходится,

то:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

□ $s(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots$ — непрерывная в Δ функция.

Выясним, сходится ли $S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots$

$$\begin{aligned} \int_a^x s(t) dt &= \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t) dt \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(a))}_{(1)} \quad (\text{по Ньютону–Лейбницу}) \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)}_{(2)} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)}_{(3)} \end{aligned}$$

(1), (3) сходятся по условию \Rightarrow (2) сходится.

Таким образом, $\int_a^x s(t) dt = S(x) - S(a) \xrightarrow[\text{Ньютона–Лейбница}]{n \rightarrow \infty} S'(x) = s(x)$. ■

8. Доказать лемму Абеля.

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1 \cdot (x-a) + c_2 \cdot (x-a)^2 + \dots + c_n \cdot (x-a)^n + \dots$ — степенной ряд:

$a \in \mathbb{R}$ — центр степенного ряда

$c_i \in \mathbb{R}$ — коэффициент степенного ряда

Множество сходимости степенного ряда $\neq \emptyset$

а). Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ сходится в точке $x_1 \neq 0$, то степенной ряд абсолютно сходится

$\forall x : |x| < |x_1|$

□ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x_1^n$ сходится $\xrightarrow[\text{необходимый признак}]{n \rightarrow \infty} |c_n x_1^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \exists M \forall n = 0, 1, \dots \Rightarrow |c_n x_1^n| \leq M$.

Пусть $|x| < |x_1| \Rightarrow |c_n x^n| = |c_n \cdot x_1^n \cdot \frac{x^n}{x_1^n}| \leq M \cdot \frac{x^n}{x_1^n}$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ мажорируется (ограничен сверху) сходящимся рядом $M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n < \infty$

То есть, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ абсолютно сходится. ■

б). Если степенной ряд расходится в точке x_2 , то степенной ряд расходится. $\forall x : |x| > |x_2|$

□ Если $\exists x' : |x'| > |x_2|$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x')^n$ сходится, то получается противоречие пункту а). ■

9. Доказать достаточное условие представимости функции рядом Тейлора.

Если $f(x)$ имеет в $O_h(a)$ ($h > 0$) производные всех порядков, которые ограничены в совокупности

($\exists M > 0 : |f^{(n)}(x)| \leq M, \forall x \in O_h(a), n = 0, 1, \dots$), то $\forall x \in O_h(a) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ — ряд Тейлора функции $f(x)$ с центром в $x = a$.

□ $\forall n \forall x \in O_h(a) : f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x-a)^{N+1}$ (ξ лежит между a и x).

$$\left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x-a)^{N+1} \right| \leq M \cdot \frac{|x-a|^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (x \in O_h(a) \text{ фиксирован})$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x-a)^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (\forall x \in O_h(a)) \quad \blacksquare$$

10. Доказать теорему о необходимом условии условного экстремума.

$$\begin{cases} f(x, y, z) \rightarrow \text{extr} \\ g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Если $M(x^*, y^*, z^*)$ - точка локального условного экстремума, f_1, g_1, g_2 имеют непрерывные частные производные 1 порядка в окрестности точки M и $\underbrace{\nabla g_1(M), \nabla g_2(M)}_{\text{градиент}}$ - л. н. з.

Утверждение: $\exists \lambda_1, \lambda_2 : \nabla f(M) + \lambda_1 \nabla g_1(M) + \lambda_2 \nabla g_2(M) = 0$

□ Пусть $\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial y} & \frac{\partial y_1}{\partial z} \\ \frac{\partial y_2}{\partial y} & \frac{\partial y_2}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$, по теореме о неявной функции: $y = y(x); z = z(x)$ в окрестности точки

M : $f(x, y(x), z(x))$ и x - локальные экстремумы $\phi'(x^*) = 0$

В окрестности точки M $\begin{cases} g_1(x, y(x), z(x)) = 0 \\ g_2(x, y(x), z(x)) = 0 \end{cases}$

Рассмотрим в точке $M \frac{\partial f}{\partial x}$

■

11. Доказать теорему о достаточном условии экстремума.