Математический анализ
1 курс

Теория для экзамена 4 модуля

1. Доказать теорему Ньютона–Лейбница. Вывести формулу Ньютона–Лейбница.
Теорема Ньютона–Лейбница. Пусть f непрерывна в (α,β), $a\in(\alpha,\beta)$, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ – первообразная для $f(x)$. Тогда $\forall x\in(\alpha,\beta): F'(x)=f(x)$.
$\square$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\\
&= \frac{1}{\Delta x}\cdot\left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right)\\
&= \frac{1}{\Delta x}\cdot\left(\int_a^{x} f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right)\\
&= \frac{1}{\Delta x}\cdot\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\\
& f \text{ непрерывна, а значит, по теореме о среднем, } \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=\Delta x\cdot f(x^*),\\
& \text{где } x^* \text{ лежит между } x \text{ и } x+\Delta x\\
&= \frac{1}{\Delta x}\cdot\Delta x\cdot f(x^*)\\
&= f(x^*)\xrightarrow[\Delta x\to 0]{} f(x)
\end{aligned}$$

$F'(x)=f(x)$ $\blacksquare$

Формула Ньютона–Лейбница. Пусть f – непрерывная на (α,β), $a,b\in(\alpha,\beta)$, а $\Phi(x)$ – некоторая первообразная для f. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a).$$

$\square$ $\exists C\in\mathbb{R}:\Phi(x)=F(x)+C=\int_a^x f(t)dt+C$
$\Phi(a)=\int_a^a f(t)dt+C=0+C=C$
$\Phi(b)=\int_a^b f(t)dt+C$
$\Phi(b)-\Phi(a)=\int_a^b f(t)dt+C-C=\int_a^b f(t)dt.$ $\blacksquare$

2. Вывести формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
$\square$ $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$ По формуле Ньютона-Лейбница, интегрируя по частям n раз, получим:

$$
\begin{aligned}
f(x)-f(a) &= \int_a^x f'(t)dt = -\int_a^x f'(t)d(x-t) = -f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t)dt = \\
&= f'(a)(x-a) - \int_a^x f''(t)d\frac{(x-t)^2}{2} = \\
&= f'(a)(x-a) + f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\Big|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}df''(t) = \\
&= f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f''(t)dt = \\
&= f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{2\cdot 3} + \int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^3}{2\cdot 3}dt = \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt
\end{aligned}
$$

■

3. Доказать признак сравнения для несобственных интегралов в предельной форме.
Пусть $x \in [a,b)$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$. Тогда если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b$, то $I_1 = \int_a^b f(x)dx$ и $I_2 = \int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.
□ По условию эквивалентности: $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
Рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Для него $\exists \delta > a : \forall x : \delta < x < b \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x)$
Если $I_2 = \int_a^b g(x)dx$ сходится, то $\int_\delta^b f(x)dx$ сходится.
Если I_2 расходится, то $\int_\delta^b \frac{1}{2}g(x)dx$ расходится $\Rightarrow \int_\delta^b f(x)dx$ расходится $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ расходится.■

4. Доказать интегральный признак сходимости числового ряда.
Дана функция f, определённая при всех $x \geq 1$, неотрицательная и убывающая, тогда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится $\Leftrightarrow$ сходится интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.
□ Так как функция монотонна на $[1,+\infty)$, тогда она интегрируема по Риману на любом конечном отрезке $[1,\eta]$, и поэтому имеет смысл говорить о несобственном интеграле.
Если $k \leq x \leq k+1$, тогда $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1), k = 1,2,\dots$ (функция убывает). Проинтегрировав это неравенство $[k, k+1]$, имеем:
$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1), k = 1,2,\dots$.
Суммируя от $k=1$ до $k=n$, получим:
$\sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^n f(k+1)$
Положим, $s_n = \sum_{k=1}^n f(k)$, будем иметь
$s_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq s_{n+1} - f(1)$
$n = 1,2,\dots$
Если интеграл сходится, то в силу неотрицательности f справдливо неравенство:
$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx$
Отсюда следует:
$s_{n+1} \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx$
То есть последовательность частичных сумм ряда огранисена сверху, а, значит, ряд сходится.
Если ряд сходится, пусть его сумма равна s, тогда $\forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq s$
И, следовательно, $\forall n \in \mathbb{N} \int_1^{n+1} f(x)dx$
Пусть ξ, то, взяв n так, чтобы $n \geq \xi$
В силу неотрицательности функции имеем:
$\int_1^{\xi} f(x)dx \leq \int_1^n f(x)dx \leq s$
Таким образом, совокупность всех интегралов $\int_1^{\xi} f(x)dx$ ограничена сверху.
Поэтому интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится. ■

5. Доказать признак д'Аламбера в предельной форме.
Пусть $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$. Тогда:
• если $q<1$, то ряд сходится;
• если $q>1$, то ряд расходится;
• если $q=1$, то имеет место неопределённость.
□ 1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$
Тогда $\exists N:\forall n\geq N\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{q+1}{2}<1\Rightarrow$ ряд сходится.
2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q>1$
Тогда $\exists N:\forall n\geq N\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{q+1}{2}>1\Rightarrow$ ряд расходится.
3) а) Гармонический ряд $a_n=\frac{1}{n}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$. Ряд расходится.
б) $a_n=\frac{1}{n^2}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$. Ряд сходится. ■

6. Доказать сходимость абсолютно сходящегося ряда.
Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.
□

$$a_n^+=\frac{|a_n|+a_n}{2}=\begin{cases}a_n, & if\ a_n\geq 0\\ 0, & if\ a_n<0\end{cases}\Rightarrow 0\leq a_n^+\leq|a_n|\xRightarrow[\text{по теореме сравнения}]{}\text{ряд }\sum_{n=1}^\infty a_n^+\ -\ \text{сходится.}$$

$$a_n^-=\frac{|a_n|-a_n}{2}=\begin{cases}0, & if\ a_n\geq 0\\ -a_n, & if\ a_n<0\end{cases}\Rightarrow 0\leq a_n^-\leq|a_n|\xRightarrow[\text{по теореме сравнения}]{}\text{ряд }\sum_{n=1}^\infty a_n^-\ -\ \text{сходится.}$$

$$\sum_{n=1}^\infty a_n=\sum_{n=1}^\infty(a_n^+-a_n^-)=\underbrace{\sum_{n=1}^\infty a_n^+}_{\text{сходится}}-\underbrace{\sum_{n=1}^\infty a_n^-}_{\text{сходится}}\Rightarrow\ \text{по линейности сходится и наш ряд }\sum_{n=1}^\infty a_n.$$

■

7. Доказать теорему о почленном интегрировании и дифференцировании функционального ряда.
Теорема о почленном интегрировании функционального ряда. Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ равномерно сходится в Δ, и притом все $u_n(x)$ непрерывны в Δ, то

$$\forall[a,b]\subset\Delta:\int_a^b\left(\sum_{n=1}^\infty u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^\infty\int_a^b u_n(x)dx.$$

□ $s(x)=\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ непрерывна в $\Delta\Rightarrow s(x)\in\mathcal{R}([a,b])$, $[a,b]\subset\Delta$.

$$\begin{aligned}\int_a^b s(x)dx&=\int_a^b(s_n(x)+r_n(x))\,dx\\&=\int_a^b s_n(x)dx+\int_a^b r_n(x)dx\\&=\sum_{k=1}^n\int_a^b u_k(x)dx+\int_a^b r_n(x)dx\end{aligned}$$

$$\left|\int_a^b r_n(x)dx\right|\leq\left|\int_a^b|r_n(x)|\,dx\right|\leq|b-a|\cdot\max_{[a,b]}|r_n(x)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0\ \text{(по равномерной сходимости)}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n\int_a^b u_n(x)dx+\int_a^b r_n(x)dx\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\sum_{k=1}^n\int_a^b u_k(x)dx.$$ ■

Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда. Если $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$, $x\in\Delta$ – интервал, и притом:

1) $u_n(x), u_n'(x)$ непрерывны в Δ;
2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится в Δ;
3) $\exists a \in \Delta : \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ сходится,
то:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

$\square$ $s(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots$ – непрерывная в Δ функция.
Выясним, сходится ли $S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots$.

$$\begin{aligned}
\int_a^x s(t)dt &= \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)\right) dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)dt \\
&= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(a))}_{(1)} \text{ (по Ньютону–Лейбницу)} \\
&= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)}_{(2)} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)}_{(3)}
\end{aligned}$$

(1), (3) сходятся по условию $\Rightarrow$ (2) сходится.
Таким образом, $\int_a^x s(t)dt = S(x) - S(a) \xRightarrow{\text{Ньютона–Лейбница}} S'(x) = s(x)$. $\blacksquare$

8. Доказать лемму Абеля.
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1 \cdot (x-a) + c_2 \cdot (x-a)^2 + \cdots + c_n \cdot (x-a)^n + \ldots$ - степенной ряд:
$a \in \mathbb{R}$ - центр степенного ряда
$c_i \in \mathbb{R}$ - коэффициент степенного ряда
Множество сходимости степенного ряда $\neq \varnothing$
а). Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ сходится в точке $x_1 \neq 0$, то степенной ряд абсолютно сходится $\forall x : |x| < |x_1|$
$\square$ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x_1^n$ сходится $\xRightarrow[\text{необходимый признак}]{} |c_n x_1^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \exists M \forall n = 0, 1, \cdots \Rightarrow |c_n x_1^n| \le M$.
Пусть $|x| < |x_1| \Rightarrow |c_n x^n| = |c_n \cdot x_1^n \cdot \frac{x^n}{x_1^n}| \le M \cdot \frac{x^n}{x_1^n}$
Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ мажорируется (ограничен сверху) сходящимся рядом $M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_n}\right|^n < \infty$
То есть, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ абсолютно сходится. $\blacksquare$
б). Если степенной ряд расходится в точке x_2, то степенной ряд расходится. $\forall x : |x| > |x_2|$
$\square$ Если $\exists x' : |x'| > |x_2|$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x')^n$ сходится, то получается противоречие пункту а). $\blacksquare$

9. Доказать достаточное условие представимости функции рядом Тейлора.
Если $f(x)$ имеет в $O_h(a)$ $(h > 0)$ производные всех порядков, которые ограничены в совокупности ($\exists M > 0 : \left|f^{(n)}(x)\right| \le M, \forall x \in O_h(a), n = 0, 1, \ldots$), то $\forall x \in O_h(a) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ – ряд Тейлора функции $f(x)$ с центром в $x = a$.
$\square$ $\forall n \forall x \in O_h(a) : f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$ (ξ лежит между a и x).

$$\left|\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}\right| \le M \cdot \frac{|x-a|^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad (x \in O_h(a) \text{ фиксирован})$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (\forall x \in O_h(a))$$ $\blacksquare$

10. Доказать теорему о необходимом условии условного экстремума.

$$\begin{cases} f(x,y,z) \to extr \\ g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Если $M(x^*, y^*, z^*)$ - точка локального условного экстремума, f_1, g_1, g_2 имеют непрерывные частные производные 1 порядка в окрестности точки M и $\underbrace{\nabla}_{\text{градиент}} g_1(M), \nabla g_2(M)$ - л. н. з.

Утверждение: $\exists \lambda_1, \lambda_2 : \nabla f(M) + \lambda_1 \nabla g_1(M) + \lambda_2 \nabla g_2(M) = 0$

□ Пусть $\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial y} & \frac{\partial y_1}{\partial z} \\ \frac{\partial y_2}{\partial y} & \frac{\partial y_2}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$, по теореме о неявной функции: $y = y(x); z = z(x)$ в окрестности точки M: $f(x, y(x), z(x))$ и x - локальные экстремумы $\phi'(x^*) = 0$

В окрестности точки M $\begin{cases} g_1(x, y(x), z(x)) = 0 \\ g_2(x, y(x), z(x)) = 0 \end{cases}$

Рассмотрим в точке M : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot z' = 0 \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial g_1}{\partial z} \cdot z' = 0 | \cdot \lambda_1 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial g_2}{\partial z} \cdot z' = 0 | \cdot \lambda_2 \end{cases}$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x}\right) + y' \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial y}\right) + z' \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial z}\right) = 0$

Пусть λ_1, λ_2 - решения: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial z} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ в точке M : $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x} = 0$

$\nabla f(M) + \lambda_1 \nabla g_1(M) + \lambda_2 g_2(M) = \bar{0}$ ■

11. Доказать теорему о достаточном условии экстремума.

Пусть функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков в $O_h(x_0, y_0)$, и притом

1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$,

2) $Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2 > 0 \quad (dx^2 + dy^2 \neq 0)$,

где $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x0, y0)$.

Тогда точка (x_0, y_0) — точка локального минимума.

□

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial d}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy}_{0} + \frac{1}{2}\left(f''_{xx}dx^2 + 2f''_{yx}dxdy + f''_{yy}dy^2\right) \end{aligned}$$

Произведем замены $x = x_0 + \theta dx, y = y_0 + \theta dy, \theta \in (0,1), dx = r\cos\varphi, dy = r\sin\varphi$

$$\begin{aligned} &= \frac{r^2}{2}\left(f''_{xx}\cos^2\varphi + 2f''_{xy}\cos\varphi\sin\varphi + f''_{yy}\sin^2\varphi\right)_{x=x_0+\theta dx, \quad y=y_0+\theta dy} \\ &= \frac{r^2}{2}\left(A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi + \varepsilon(dx,dy)\right), \end{aligned}$$

где $|\varepsilon(dx, dy)| \xrightarrow[dx\to 0, \quad dy\to 0]{}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$

$m = \min_\varphi \left(A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi\right) > 0$

$\Delta f > (m + \varepsilon(dx, dy)) \, \exists \delta > 0 : \forall dx, dy : \sqrt{dx^2 + dy^2} < \delta \Rightarrow |\varepsilon(dx, dy)| < m \Rightarrow$ в $O_\delta(x_0, y_0) : \Delta f > 0, (dx, dy) \neq (0, 0)$ ■