Математический анализ
1 курс

Теория для экзамена 4 модуля

1. Доказать теорему Ньютона–Лейбница. Вывести формулу Ньютона–Лейбница.
Теорема Ньютона–Лейбница. Пусть f непрерывна в (α, β), $a \in (\alpha, \beta)$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ – первообразная для $f(x)$. Тогда $\forall x \in (\alpha, \beta) : F'(x) = f(x)$.
$\square$

$$F'(x) = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$
$$= \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right)$$
$$= \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right)$$
$$= \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

f непрерывна, а значит, по теореме о среднем, $\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Delta x \cdot f(x^*)$,

где x^* лежит между x и $x + \Delta x$

$$= \frac{1}{\Delta x} \cdot \Delta x \cdot f(x^*)$$
$$= f(x^*) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f(x)$$

$F'(x) = f(x)$ $\blacksquare$

Формула Ньютона–Лейбница. Пусть f – непрерывная на (α, β), $a, b \in (\alpha, \beta)$, а $\Phi(x)$ – некоторая первообразная для f. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

$\square$ $\exists C \in \mathbb{R} : \Phi(x) = F(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C$
$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt + C = 0 + C = C$
$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt + C$
$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(t)dt + C - C = \int_a^b f(t)dt.$ $\blacksquare$

2. Вывести формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
$\square$ $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$
По формуле Ньютона-Лейбница, интегрируя по частям n раз, получим:
$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = -\int_a^x f'(t)d(x-t) = -f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t)dt = f'(a)(x-a) -$
$- \int_a^x f''(t)d\frac{(x-t)^2}{2} = f'(a)(x-a) + f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\Big|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}df''(t) = f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} +$
$+ \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f''(t)dt = f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{2\cdot 3} + \int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^3}{2\cdot 3}dt =$
$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$ $\blacksquare$

3. Доказать признак сравнения для несобственных интегралов в предельной форме.
Пусть $x \in [a, b)$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$. Тогда если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b$, то $I_1 = \int_a^b f(x)dx$ и $I_2 = \int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.
$\square$ По условию эквивалентности: $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Для него $\exists \delta > a : \forall x : \delta < x < b \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}$
$\frac{1}{2} g(x) < f(x) < \frac{3}{2} g(x)$
Если $I_2 = \int_a^b g(x)dx$ сходится, то $\int_\delta^b f(x)dx$ сходится.
Если I_2 расходится, то $\int_\delta^b \frac{1}{2} g(x)dx$ расходится $\Rightarrow \int_\delta^b f(x)dx$ расходится $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ расходится.$\blacksquare$

4. Доказать интегральный признак сходимости числового ряда.

5. Доказать признак д'Аламбера в предельной форме.
Пусть $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда:
- если $q < 1$, то ряд сходится;
- если $q > 1$, то ряд расходится;
- если $q = 1$, то имеет место неопределённость.

$\square$ 1) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$
Тогда $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{q+1}{2} < 1 \Rightarrow$ ряд сходится.
2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$
Тогда $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{q+1}{2} > 1 \Rightarrow$ ряд расходится.
3) а) Гармонический ряд $a_n = \frac{1}{n}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Ряд расходится.
б) $a_n = \frac{1}{n^2}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Ряд сходится. $\blacksquare$

6. Доказать сходимость абсолютно сходящегося ряда.

7. Доказать теорему о почленном интегрировании и дифференцировании функционального ряда.
Теорема о почленном интегрировании функционального ряда. Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ равномерно сходится в Δ, и притом все $u_n(x)$ непрерывны в Δ, то

$$\forall [a,b] \subset \Delta : \int_a^b \left(\sum_{n=1}^\infty u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^\infty \int_a^b u_n(x)dx.$$

$\square$ $s(x) = \sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ непрерывна в $\Delta \Rightarrow s(x) \in \mathcal{R}([a,b])$, $[a,b] \subset \Delta$.

$$\begin{aligned} \int_a^b s(x)dx &= \int_a^b (s_n(x) + r_n(x))\, dx \\ &= \int_a^b s_n(x)dx + \int_a^b r_n(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x)dx + \int_a^b r_n(x)dx \end{aligned}$$

$$\left|\int_a^b r_n(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b |r_n(x)|\, dx\right| \leq |b-a| \cdot \max_{[a,b]} |r_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ (по равномерной сходимости)}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n \int_a^b u_n(x)dx + \int_a^b r_n(x)dx\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x)dx. \qquad \blacksquare$$

Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда. Если $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$, $x \in \Delta$ – интервал, и притом:
1) $u_n(x), u_n'(x)$ непрерывны в Δ;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится в Δ;
3) $\exists a \in \Delta : \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ сходится,
то:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

$\square$ $s(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots$ – непрерывная в Δ функция.
Выясним, сходится ли $S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots$.

$$\begin{aligned}
\int_a^x s(t)dt &= \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)\right) dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)dt \\
&= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(a))}_{(1)} \text{ (по Ньютону–Лейбницу)} \\
&= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)}_{(2)} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)}_{(3)}
\end{aligned}$$

(1), (3) сходятся по условию $\Rightarrow$ (2) сходится.
Таким образом, $\int_a^x s(t)dt = S(x) - S(a) \xRightarrow{\text{Ньютона–Лейбница}} S'(x) = s(x)$. $\blacksquare$

8. Доказать лемму Абеля.

9. Доказать достаточное условие представимости функции рядом Тейлора.
Если $f(x)$ имеет в $O_h(a)$ $(h > 0)$ производные всех порядков, которые ограничены в совокупности ($\exists M > 0 : \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M, \forall x \in O_h(a), n = 0, 1, \ldots$), то $\forall x \in O_h(a) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ – ряд Тейлора функции $f(x)$ с центром в $x = a$.
$\square$ $\forall n \forall x \in O_h(a) : f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$ (ξ лежит между a и x).

$$\left|\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}\right| \leq M \cdot \frac{|x-a|^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad (x \in O_h(a) \text{ фиксирован})$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (\forall x \in O_h(a)) \qquad \blacksquare$$

10. Доказать теорему о необходимом условии условного экстремума.

11. Доказать теорему о достаточном условии экстремума.