Математический анализ
1 курс

Теория для экзамена 4 модуля

1. Доказать теорему Ньютона–Лейбница. Вывести формулу Ньютона–Лейбница.
Теорема Ньютона–Лейбница. Пусть f непрерывна в (α, β), $a \in (\alpha, \beta)$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ – первообразная для $f(x)$. Тогда $\forall x \in (\alpha, \beta) : F'(x) = f(x)$.
$\square$

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) \\
&= \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) \\
&= \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \\
&\quad f \text{ непрерывна, а значит, по теореме о среднем, } \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Delta x \cdot f(x^*), \\
&\quad \text{где } x^* \text{ лежит между } x \text{ и } x + \Delta x \\
&= \frac{1}{\Delta x} \cdot \Delta x \cdot f(x^*) \\
&= f(x^*) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f(x)
\end{aligned}
$$

$F'(x) = f(x)$ $\blacksquare$

Формула Ньютона–Лейбница. Пусть f – непрерывная на (α, β), $a, b \in (\alpha, \beta)$, а $\Phi(x)$ – некоторая первообразная для f. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

$\square$ $\exists C \in \mathbb{R} : \Phi(x) = F(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C$
$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt + C = 0 + C = C$
$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt + C$
$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(t)dt + C - C = \int_a^b f(t)dt.$ $\blacksquare$

2. Вывести формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
$\square$ $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt$ По формуле Ньютона-Лейбница, интегрируя по частям n раз, получим:

$$
\begin{aligned}
f(x)-f(a)&=\int_a^x f'(t)dt=-\int_a^x f'(t)d(x-t)=-f'(t)(x-t)\Big|_a^x+\int_a^x (x-t)f''(t)dt=\\
&=f'(a)(x-a)-\int_a^x f''(t)d\frac{(x-t)^2}{2}=\\
&=f'(a)(x-a)+f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\Big|_a^x+\int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}df''(t)=\\
&=f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}+\int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f''(t)dt=\\
&=f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}+f'''(a)\frac{(x-a)^3}{2\cdot 3}+\int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^3}{2\cdot 3}dt=\\
&=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt
\end{aligned}
$$

■

3. Доказать признак сравнения для несобственных интегралов в предельной форме.
Пусть $x\in[a,b)$, $f(x)>0$, $g(x)>0$. Тогда если $f(x)\sim g(x)$ при $x\to b$, то $I_1=\int_a^b f(x)dx$ и $I_2=\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.
□ По условию эквивалентности: $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.
Рассмотрим $\varepsilon=\frac{1}{2}$. Для него $\exists\delta>a:\forall x:\delta<x<b\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}-1\right|<\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}g(x)<f(x)<\frac{3}{2}g(x)$
Если $I_2=\int_a^b g(x)dx$ сходится, то $\int_\delta^b f(x)dx$ сходится.
Если I_2 расходится, то $\int_\delta^b \frac{1}{2}g(x)dx$ расходится $\Rightarrow\int_\delta^b f(x)dx$ расходится $\Rightarrow\int_a^b f(x)dx$ расходится.■

4. Доказать интегральный признак сходимости числового ряда.
Дана функция f, определённая при всех $x\geq 1$, неотрицательная и убывающая, тогда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ сходится $\Leftrightarrow$ сходится интеграл $\int_1^{+\infty}f(x)dx$.
□ Так как функция монотонна на $[1,+\infty)$, тогда она интегрируема по Риману на любом конечном отрезке $[1,\eta]$, и поэтому имеет смысл говорить о несобственном интеграле.
Если $k\leq x\leq k+1$, тогда $f(k)\geq f(x)\geq f(k+1), k=1,2,\dots$ (функция убывает). Проинтегрировав это неравенство $[k,k+1]$, имеем:
$f(k)\geq\int_k^{k+1}f(x)dx\geq f(k+1), k=1,2,\dots.$
Суммируя от $k=1$ до $k=n$, получим:
$\sum_{k=1}^n f(k)\geq\int_1^{n+1}f(x)dx\geq\sum_{k=1}^n f(k+1)$
Положим, $s_n=\sum_{k=1}^n f(k)$, будем иметь
$s_n\geq\int_1^{n+1}f(x)dx\geq s_{n+1}-f(1)$
$n=1,2,\dots$
Если интеграл сходится, то в силу неотрицательности f справдливо неравенство:
$\int_1^{n+1}f(x)dx\leq\int_1^{+\infty}f(x)dx$
Отсюда следует:
$s_{n+1}\leq f(1)+\int_1^{+\infty}f(x)dx$
То есть последовательность частичных сумм ряда огранисена сверху, а, значит, ряд сходится.
Если ряд сходится, пусть его сумма равна s, тогда $\forall n\in\mathbb{N}:s_n\leq s$
И, следовательно, $\forall n\in\mathbb{N}\int_1^{n+1}f(x)dx$
Пусть ξ, то, взяв n так, чтобы $n\geq\xi$
В силу неотрицательности функции имеем:
$\int_1^{\xi}f(x)dx\leq\int_1^n f(x)dx\leq s$
Таким образом, совокупность всех интегралов $\int_1^{\xi}f(x)dx$ ограничена сверху.
Поэтому интеграл $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ сходится. ■

5. Доказать признак д'Аламбера в предельной форме.
Пусть $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда:
- если $q < 1$, то ряд сходится;
- если $q > 1$, то ряд расходится;
- если $q = 1$, то имеет место неопределённость.

□ 1) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$
Тогда $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{q+1}{2} < 1 \Rightarrow$ ряд сходится.
2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$
Тогда $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{q+1}{2} > 1 \Rightarrow$ ряд расходится.
3) а) Гармонический ряд $a_n = \frac{1}{n}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Ряд расходится.
б) $a_n = \frac{1}{n^2}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Ряд сходится. ■

6. Доказать сходимость абсолютно сходящегося ряда.
Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.
□

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2} = \begin{cases} a_n, \ if\ a_n \geq 0 \\ 0, \ if\ a_n < 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq a_n^+ \leq |a_n| \xRightarrow[\text{по теореме сравнения}]{} \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \ - \ \text{сходится.}$$

$$a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2} = \begin{cases} 0, \ if\ a_n \geq 0 \\ -a_n, \ if\ a_n < 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq a_n^- \leq |a_n| \xRightarrow[\text{по теореме сравнения}]{} \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \ - \ \text{сходится.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+}_{\text{сходится}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-}_{\text{сходится}} \Rightarrow \text{ по линейности сходится и наш ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

■

7. Доказать теорему о почленном интегрировании и дифференцировании функционального ряда.
Теорема о почленном интегрировании функционального ряда. Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в Δ, и притом все $u_n(x)$ непрерывны в Δ, то

$$\forall [a,b] \subset \Delta : \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

□ $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна в $\Delta \Rightarrow s(x) \in \mathcal{R}([a,b])$, $[a,b] \subset \Delta$.

$$\begin{aligned} \int_a^b s(x)dx &= \int_a^b (s_n(x) + r_n(x))\, dx \\ &= \int_a^b s_n(x)dx + \int_a^b r_n(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)dx + \int_a^b r_n(x)dx \end{aligned}$$

$$\left| \int_a^b r_n(x)dx \right| \leq \left| \int_a^b |r_n(x)|\, dx \right| \leq |b-a| \cdot \max_{[a,b]} |r_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ (по равномерной сходимости)}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_n(x)dx + \int_a^b r_n(x)dx \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)dx. \quad ■$$

Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in \Delta$ – интервал, и притом:

1) $u_n(x), u_n'(x)$ непрерывны в Δ;
2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится в Δ;
3) $\exists a \in \Delta : \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ сходится,
то:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

$\square$ $s(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots$ – непрерывная в Δ функция.
Выясним, сходится ли $S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots$.

$$\begin{aligned}\int_a^x s(t)dt &= \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)\right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)dt \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(a))}_{(1)} \text{ (по Ньютону–Лейбницу)} \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)}_{(2)} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)}_{(3)}\end{aligned}$$

(1), (3) сходятся по условию $\Rightarrow$ (2) сходится.
Таким образом, $\int_a^x s(t)dt = S(x) - S(a) \xRightarrow{\text{Ньютона–Лейбница}} S'(x) = s(x)$. $\blacksquare$

8. Доказать лемму Абеля.
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1 \cdot (x-a) + c_2 \cdot (x-a)^2 + \cdots + c_n \cdot (x-a)^n + \ldots$ - степенной ряд:
$a \in \mathbb{R}$ - центр степенного ряда
$c_i \in \mathbb{R}$ - коэффициент степенного ряда
Множество сходимости степенного ряда $\neq \varnothing$
а). Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ сходится в точке $x_1 \neq 0$, то степенной ряд абсолютно сходится $\forall x : |x| < |x_1|$
$\square$ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x_1^n$ сходится $\xRightarrow[\text{необходимый признак}]{} |c_n x_1^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \exists M \forall n = 0, 1, \cdots \Rightarrow |c_n x_1^n| \leq M$.
Пусть $|x| < |x_1| \Rightarrow |c_n x^n| = |c_n \cdot x_1^n \cdot \frac{x^n}{x_1^n}| \leq M \cdot \frac{x^n}{x_1^n}$
Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ мажорируется (ограничен сверху) сходящимся рядом $M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_n}\right|^n < \infty$
То есть, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ абсолютно сходится. $\blacksquare$
б). Если степенной ряд расходится в точке x_2, то степенной ряд расходится. $\forall x : |x| > |x_2|$
$\square$ Если $\exists x' : |x'| > |x_2|$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x')^n$ сходится, то получается противоречие пункту а). $\blacksquare$

9. Доказать достаточное условие представимости функции рядом Тейлора.
Если $f(x)$ имеет в $O_h(a)$ $(h > 0)$ производные всех порядков, которые ограничены в совокупности $(\exists M > 0 : \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M, \forall x \in O_h(a), n = 0, 1, \ldots)$, то $\forall x \in O_h(a) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ – ряд Тейлора функции $f(x)$ с центром в $x = a$.
$\square$ $\forall n \forall x \in O_h(a) : f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$ (ξ лежит между a и x).

$$\left|\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}\right| \leq M \cdot \frac{|x-a|^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad (x \in O_h(a) \text{ фиксирован})$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (\forall x \in O_h(a))$$ $\blacksquare$

10. Доказать теорему о необходимом условии условного экстремума.

$\begin{cases} f(x,y,z) \to extr \\ g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$

Если $M(x^*, y^*, z^*)$ - точка локального условного экстремума, f_1, g_1, g_2 имеют непрерывные частные производные 1 порядка в окрестности точки M и $\underbrace{\nabla}_{\text{градиент}} g_1(M), \nabla g_2(M)$ - л. н. з.

Утверждение: $\exists \lambda_1, \lambda_2 : \nabla f(M) + \lambda_1 \nabla g_1(M) + \lambda_2 \nabla g_2(M) = 0$

$\square$ Пусть $\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial y} & \frac{\partial y_1}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial y_2}{\partial y} & \frac{\partial y_2}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$, по теореме о неявной функции: $y = y(x); z = z(x)$ в окрестности точки M: $f(x, y(x), z(x))$ и x - локальные экстремумы $\phi'(x^*) = 0$

В окрестности точки M $\begin{cases} g_1(x, y(x), z(x)) = 0 \\ g_2(x, y(x), z(x)) = 0 \end{cases}$

Рассмотрим в точке M : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot z' = 0 \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial g_1}{\partial z} \cdot z' = 0 | \cdot \lambda_1 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial g_2}{\partial z} \cdot z' = 0 | \cdot \lambda_2 \end{cases}$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x} \right) + y' \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial y} \right) + z' \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial z} \right) = 0$

Пусть λ_1, λ_2 - решения: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial z} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ в точке M : $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x} = 0$

$\nabla f(M) + \lambda_1 \nabla g_1(M) + \lambda_2 g_2(M) = \bar{0}$ $\blacksquare$

11. Доказать теорему о достаточном условии экстремума.

Пусть функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков в $O_h(x_0, y_0)$, и притом

1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$,

2) $Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2 > 0 \quad (dx^2 + dy^2 \neq 0)$,

где $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x0, y0)$.

Тогда точка (x_0, y_0) — точка локального минимума.

$\square$

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial d}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy}_{0} + \frac{1}{2} \left(f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{yx} dx dy + f''_{yy} dy^2 \right) \end{aligned}$$

Произведем замены $x = x_0 + \theta dx, y = y_0 + \theta dy, \theta \in (0, 1), dx = r \cos \varphi, dy = r \sin \varphi$

$$\begin{aligned} &= \frac{r^2}{2} \left(f''_{xx} \cos^2 \varphi + 2 f''_{xy} \cos \varphi \sin \varphi + f''_{yy} \sin^2 \varphi \right)_{x = x_0 + \theta dx, \quad y = y_0 + \theta dy} \\ &= \frac{r^2}{2} \left(A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi + \varepsilon(dx, dy) \right), \end{aligned}$$

где $|\varepsilon(dx, dy)| \xrightarrow[dx \to 0, \quad dy \to 0]{}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$

$m = \min_\varphi \left(A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi \right) > 0$

$\Delta f > (m + \varepsilon(dx, dy)) \, \exists \delta > 0 : \forall dx, dy : \sqrt{dx^2 + dy^2} < \delta \Rightarrow |\varepsilon(dx, dy)| < m \Rightarrow$ в $O_\delta(x_0, y_0) : \Delta f > 0, (dx, dy) \neq (0, 0)$ $\blacksquare$