

# Математический анализ

## 1 курс

### Теория для экзамена 4 модуля

#### 1. Доказать теорему Ньютона–Лейбница. Вывести формулу Ньютона–Лейбница.

*Теорема Ньютона–Лейбница.* Пусть  $f$  непрерывна в  $(\alpha, \beta)$ ,  $a \in (\alpha, \beta)$ ,  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  – первообразная для  $f(x)$ . Тогда  $\forall x \in (\alpha, \beta) : F'(x) = f(x)$ .

□

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \left( \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \left( \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \end{aligned}$$

$f$  непрерывна, а значит, по теореме о среднем,  $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Delta x \cdot f(x^*)$ ,

где  $x^*$  лежит между  $x$  и  $x + \Delta x$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \Delta x \cdot f(x^*) \\ &= f(x^*) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \end{aligned}$$

$$F'(x) = f(x) \quad \blacksquare$$

*Формула Ньютона–Лейбница.* Пусть  $f$  – непрерывная на  $(\alpha, \beta)$ ,  $a, b \in (\alpha, \beta)$ , а  $\Phi(x)$  – некоторая первообразная для  $f$ . Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

$$\square \exists C \in \mathbb{R} : \Phi(x) = F(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C$$

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt + C = 0 + C = C$$

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt + C$$

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(t)dt + C - C = \int_a^b f(t)dt. \quad \blacksquare$$

#### 2. Вывести формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

□  $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt$  По формуле Ньютона–Лейбница, интегрируя по частям  $n$  раз, получим:

$$\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t)dt = - \int_a^x f'(t)d(x-t) = -f'(t)(x-t) \Big|_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t)dt = \\
&= f'(a)(x-a) - \int_a^x f''(t)d\frac{(x-t)^2}{2} = \\
&= f'(a)(x-a) + f''(t)\frac{(x-t)^2}{2} \Big|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}df''(t) = \\
&= f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t)dt = \\
&= f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{2 \cdot 3} + \int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^3}{2 \cdot 3}dt = \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt
\end{aligned}$$

■

### 3. Доказать признак сравнения для несобственных интегралов в предельной форме.

Пусть  $x \in [a, b)$ ,  $f(x) > 0$ ,  $g(x) > 0$ . Тогда если  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow b$ , то  $I_1 = \int_a^b f(x)dx$  и  $I_2 = \int_a^b g(x)dx$  сходятся или расходятся одновременно.

□ По условию эквивалентности:  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

Рассмотрим  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Для него  $\exists \delta > a : \forall x : \delta < x < b \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x)$$

Если  $I_2 = \int_a^b g(x)dx$  сходится, то  $\int_\delta^b f(x)dx$  сходится.

Если  $I_2$  расходится, то  $\int_\delta^b \frac{1}{2}g(x)dx$  расходится  $\Rightarrow \int_\delta^b f(x)dx$  расходится  $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$  расходится. ■

### 4. Доказать интегральный признак сходимости числового ряда.

Дана функция  $f$ , определённая при всех  $x \geq 1$ , неотрицательная и убывающая, тогда числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  сходится  $\Leftrightarrow$  сходится интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ .

□ Так как функция монотонна на  $[1, +\infty)$ , тогда она интегрируема по Риману на любом конечном отрезке  $[1, \eta]$ , и поэтому имеет смысл говорить о несобственном интеграле.

Если  $k \leq x \leq k+1$ , тогда  $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (функция убывает). Проинтегрировав это неравенство  $[k, k+1]$ , имеем:

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1), k = 1, 2, \dots$$

Суммируя от  $k = 1$  до  $k = n$ , получим:

$$\sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^n f(k+1)$$

Положим,  $s_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ , будем иметь

$$s_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq s_{n+1} - f(1)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Если интеграл сходится, то в силу неотрицательности  $f$  справедливо неравенство:

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

Отсюда следует:

$$s_{n+1} \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

То есть последовательность частичных сумм ряда ограничена сверху, а, значит, ряд сходится.

Если ряд сходится, пусть его сумма равна  $s$ , тогда  $\forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq s$

И, следовательно,  $\forall n \in \mathbb{N} \int_1^{n+1} f(x)dx$

Пусть  $\xi$ , то, взяв  $n$  так, чтобы  $n \geq \xi$

В силу неотрицательности функции имеем:

$$\int_1^\xi f(x)dx \leq \int_1^n f(x)dx \leq s$$

Таким образом, совокупность всех интегралов  $\int_1^\xi f(x)dx$  ограничена сверху.

Поэтому интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  сходится. ■

**5. Доказать признак д'Аламбера в предельной форме.**

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ . Тогда:

- если  $q < 1$ , то ряд сходится;
- если  $q > 1$ , то ряд расходится;
- если  $q = 1$ , то имеет место неопределённость.

□ 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$

Тогда  $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{q+1}{2} < 1 \Rightarrow$  ряд сходится.

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$

Тогда  $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{q+1}{2} > 1 \Rightarrow$  ряд расходится.

3) а) Гармонический ряд  $a_n = \frac{1}{n}$ ;  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ . Ряд расходится.

б)  $a_n = \frac{1}{n^2}$ ;  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ . Ряд сходится. ■

**6. Доказать сходимость абсолютно сходящегося ряда.**

Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.

□

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2} = \begin{cases} a_n, & \text{if } a_n \geq 0 \\ 0, & \text{if } a_n < 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq a_n^+ \leq |a_n| \xrightarrow{\text{по теореме сравнения}} \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \text{сходится.}$$

$$a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2} = \begin{cases} 0, & \text{if } a_n \geq 0 \\ -a_n, & \text{if } a_n < 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq a_n^- \leq |a_n| \xrightarrow{\text{по теореме сравнения}} \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- - \text{сходится.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+}_{\text{сходится}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-}_{\text{сходится}} \Rightarrow \text{по линейности сходится и наш ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

■

**7. Доказать теорему о почленном интегрировании и дифференцировании функционального ряда.**

*Теорема о почленном интегрировании функционального ряда.* Если функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится в  $\Delta$ , и притом все  $u_n(x)$  непрерывны в  $\Delta$ , то

$$\forall [a, b] \subset \Delta : \int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

□  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  непрерывна в  $\Delta \Rightarrow s(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ ,  $[a, b] \subset \Delta$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b s(x) dx &= \int_a^b (s_n(x) + r_n(x)) dx \\ &= \int_a^b s_n(x) dx + \int_a^b r_n(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx + \int_a^b r_n(x) dx \end{aligned}$$

$$\left| \int_a^b r_n(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |r_n(x)| dx \right| \leq |b-a| \cdot \max_{[a,b]} |r_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ (по равномерной сходимости)}$$

$$\left( \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx + \int_a^b r_n(x) dx \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx. \quad \blacksquare$$

*Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда.* Если  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ,  $x \in \Delta$  — интервал, и притом:

- 1)  $u_n(x), u'_n(x)$  непрерывны в  $\Delta$ ;
- 2) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  равномерно сходится в  $\Delta$ ;
- 3)  $\exists a \in \Delta : \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$  сходится,

то:

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

□  $s(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots$  – непрерывная в  $\Delta$  функция.

Выясним, сходится ли  $S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots$

$$\begin{aligned} \int_a^x s(t) dt &= \int_a^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t) dt \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(a))}_{(1)} \quad (\text{по Ньютону–Лейбницу}) \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)}_{(2)} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)}_{(3)} \end{aligned}$$

(1), (3) сходятся по условию  $\Rightarrow$  (2) сходится.

Таким образом,  $\int_a^x s(t) dt = S(x) - S(a) \xrightarrow[\text{Ньютона–Лейбница}]{n \rightarrow \infty} S'(x) = s(x)$ . ■

### 8. Доказать лемму Абеля.

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1 \cdot (x-a) + c_2 \cdot (x-a)^2 + \dots + c_n \cdot (x-a)^n + \dots$  – степенной ряд:

$a \in \mathbb{R}$  – центр степенного ряда

$c_i \in \mathbb{R}$  – коэффициент степенного ряда

Множество сходимости степенного ряда  $\neq \emptyset$

а). Если степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$  сходится в точке  $x_1 \neq 0$ , то степенной ряд абсолютно сходится

$\forall x : |x| < |x_1|$

□  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x_1^n$  сходится  $\xrightarrow[\text{необходимый признак}]{n \rightarrow \infty} |c_n x_1^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \exists M \forall n = 0, 1, \dots \Rightarrow |c_n x_1^n| \leq M$ .

Пусть  $|x| < |x_1| \Rightarrow |c_n x^n| = |c_n \cdot x_1^n \cdot \frac{x^n}{x_1^n}| \leq M \cdot \frac{x^n}{x_1^n}$

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$  мажорируется (ограничен сверху) сходящимся рядом  $M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n < \infty$

То есть,  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  абсолютно сходится. ■

б). Если степенной ряд расходится в точке  $x_2$ , то степенной ряд расходится.  $\forall x : |x| > |x_2|$

□ Если  $\exists x' : |x'| > |x_2|$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x')^n$  сходится, то получается противоречие пункту а). ■

### 9. Доказать достаточное условие представимости функции рядом Тейлора.

Если  $f(x)$  имеет в  $O_h(a)$  ( $h > 0$ ) производные всех порядков, которые ограничены в совокупности

( $\exists M > 0 : |f^{(n)}(x)| \leq M, \forall x \in O_h(a), n = 0, 1, \dots$ ), то  $\forall x \in O_h(a) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$  – ряд Тейлора функции  $f(x)$  с центром в  $x = a$ .

□  $\forall n \forall x \in O_h(a) : f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x-a)^{N+1}$  ( $\xi$  лежит между  $a$  и  $x$ ).

$$\left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x-a)^{N+1} \right| \leq M \cdot \frac{|x-a|^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (x \in O_h(a) \text{ фиксирован})$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x-a)^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (\forall x \in O_h(a)) \quad \blacksquare$$

10. Доказать теорему о необходимом условии условного экстремума.

$$\begin{cases} f(x, y, z) \rightarrow \text{extr} \\ g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Если  $M(x^*, y^*, z^*)$  - точка локального условного экстремума,  $f_1, g_1, g_2$  имеют непрерывные частные производные 1 порядка в окрестности точки  $M$  и  $\underbrace{\nabla g_1(M), \nabla g_2(M)}_{\text{градиент}}$  - л. н. з.

Утверждение:  $\exists \lambda_1, \lambda_2 : \nabla f(M) + \lambda_1$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

11. Доказать теорему о достаточном условии экстремума.