

Appunti di Analisi II

Andrea Franchini

March 27, 2020

Contents

1	Funzioni in più variabili	3
1.1	Definizione topologica di limite	3
1.2	Intorno di un punto	3
1.3	Calcolo dei limiti	3
1.4	Derivate Parziali	3
1.5	Teorema	3
1.6	Differenziale	3
1.7	Gradiente	4
1.8	Teorema: Formula del gradiente	4
1.9	Massimi e minimi locali	4
1.10	Punto critico	4
1.11	Punto di sella	4
1.12	Formula di Taylor per funzioni in due variabili	4
1.13	Determinante Hessiano	4
1.14	Massimi e minimi vincolati	5
1.15	Metodo moltiplicatore di Lagrange	5
2	Integrali doppi	5
2.1	Definizione	5
2.2	Teorema di Fubini	5
2.3	Volume	6
2.4	Area e Valore Medio di una funzione	6
2.5	Sostituzione di variabili in funzioni in una variabile	6
2.6	Sostituzione di variabili in funzioni in due variabili	6
3	Linee in forma parametrica	6
3.1	Definizioni	6
3.2	Calcolare la lunghezza di una linea	6
3.3	Ascissa curvilinea	7
3.4	Integrale di linea	7
3.5	Campo Vettoriale	7
3.6	Integrale di linea di II specie (Lavoro)	7
3.7	Teorema	7
3.8	Teorema	7
3.9	Rotore	8
3.10	Teorema	8
3.11	Calcolo del potenziale	8
4	Serie di potenze	8
4.1	Serie di potenze	8
4.2	Raggio di convergenza	8
4.3	Teorema di derivazione per serie di potenze	9
4.4	Teorema di integrazione per serie di potenze	9
4.5	Serie di Fourier	9
4.6	Uguaglianza di Bessel	10
4.7	Serie di Fourier con numeri complessi	10
5	Equazioni Differenziali	10
5.1	Forma normale	10
5.2	Problema di Cauchy	10
5.3	Tipi di Integrali	10
5.4	Equazioni differenziali del I ordine	10
5.5	Equazioni differenziali del II ordine a coefficienti costanti	11

1 Funzioni in più variabili

1.1 Definizione topologica di limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = l \quad l \in \mathbb{R}$$

oppure

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l \quad P = (x,y), P_0 = (x_0,y_0) \quad (1)$$

1.2 Intorno di un punto

$$I(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^2 : |P - P_0| < r\} \quad (2)$$

Per comodità si considerano intorni circolari.

1.3 Calcolo dei limiti

Il limite esiste e vale l se il limite è indipendente dal cammino. Presi due o più punti, ci sono infiniti modi per calcolare il limite. Se trovo almeno due strade con limiti diversi il limite non esiste.

Per comodità, conviene passare in coordinate polari:

$$f(x,y) \Rightarrow g(\rho, \theta) \quad \begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \theta \\ y = y_0 + \rho \sin \theta \end{cases} \quad (3)$$

1.4 Derivate Parziali

Derivata parziale rispetto a x :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (4)$$

1.5 Teorema

Se ho $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ continue su $(a,b) \Rightarrow f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

L'esistenza di derivate parziali non dice nulla sulla differenziabilità.

1.6 Differenziale

Il piano tangente π contiene le rette tangenti, in particolare le rette che ottengo dalle derivate parziali.

$$\begin{aligned} \pi : \quad z - z_0 &= a(x - x_0) + b(y - y_0) \quad a = f_x(x_0, y_0), b = f_y(x_0, y_0) \\ \Rightarrow \quad z - z_0 &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \end{aligned} \quad (5)$$

Ho trovato quindi un piano generato dalle rette tangenti a f in (x_0, y_0) .

Una funzione in più variabili è **differenziabile** in P_0 se

$$\Delta z = f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

con $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$, idem per $\varepsilon_2, \Delta y$.

Se $f(x,y)$ è differenziabile in un punto, allora:

- $f(x,y)$ è continua in (x_0, y_0)
- $f(x,y)$ ammette derivate direzionali in (x_0, y_0) lungo ogni direzione di $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$
- esistono le derivate parziali $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$

1.6.1 Teorema del differenziale

Se f_x e f_y sono continue (ed esistono) in (x_0, y_0) , allora $f(x,y)$ è differenziabile in quel punto. Se non lo sono, non posso dire nulla.

f differenziabile $\Rightarrow f$ continua.

f non differenziabile $\nRightarrow f$ continua.

1.7 Gradiente

$$\vec{\nabla} f(a, b) = (f_x(a, b), f_y(a, b)) = \text{grad} f \quad (6)$$

1.8 Teorema: Formula del gradiente

Prendiamo f differenziabile.

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \quad D_{\vec{u}} f(a, b) = \vec{\nabla} f(a, b) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \quad (7)$$

1.9 Massimi e minimi locali

Dato un punto (a, b) e $z = f(x, y)$:

- (a, b) è massimo locale se in un intorno di (a, b) se $f(x, y) \leq f(a, b)$.
- (a, b) è minimo locale se in un intorno di (a, b) se $f(x, y) \geq f(a, b)$.

Se (a, b) è un punto di massimo o minimo locale, allora $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

Il piano tangente in quel punto è uguale a $O(z = 0)$.

1.10 Punto critico

$(a, b) \in D_f$ è un punto critico se:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_x(a, b) = 0 \\ f_y(a, b) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

1.11 Punto di sella

(analogo del punto di flesso per le funzioni in due variabili)

f differenziabile in (a, b) , (a, b) è il punto di sella.

$$\forall I(a, b) \quad \begin{array}{l} \exists \text{ punti } (x, y) \mid f(x, y) \leq f(a, b) \\ \exists \text{ punti } (x', y') \mid f(x', y') \geq f(a, b) \end{array} \quad \mathbf{e} \quad (9)$$

1.12 Formula di Taylor per funzioni in due variabili

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + [(x - a)f_x(a, b) + (y - b)f_y(a, b)] \\ &+ \frac{1}{2} [(x - a)^2 f_{xx}(a, b) + 2(x - a)(y - b)f_{xy}(a, b) + (y - b)^2 f_{yy}(a, b)] \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Studiare un punto critico

1. Risolvo il seguente sistema per trovare i punti critici:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \vec{\nabla} f(x, y) = 0 \quad (11)$$

2. Trovo (ad esempio) il punto (a, b) e studio la seguente espressione:

$$f_{xx}(a, b) + 2f_{xy}(a, b) + f_{yy}(a, b) \quad \begin{cases} > 0 & \text{max/min} \\ = 0 & ? \\ < 0 & \text{sella} \end{cases} \quad (12)$$

1.13 Determinante Hessiano

Anzichè scrivere la precedente forma (11), conviene calcolare il seguente determinante, sostituendo a (x, y) il punto (a, b) :

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = \begin{cases} \det H > 0 \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}(a, b) > 0 & \text{min} \\ f_{xx}(a, b) < 0 & \text{max} \end{cases} \\ \det H = 0 \Rightarrow ? \\ \det H < 0 \Rightarrow (a, b) \text{ sella} \end{cases} \quad (13)$$

1.14 Massimi e minimi vincolati

1. Calcolo le derivate prime
2. Calcolo le derivate seconde
3. Considero la funzione lungo i bordi
4. Considero la funzione nei vertici (se esistono) e nei punti critici sui bordi

Per i non-poligoni, posso passare alle coordinate polari e considero i massimi/minimi al variare di π .

1.15 Metodo moltiplicatore di Lagrange

Data una funzione $f(x, y, z)$, differenziabile in A , regione, e una curva regolare $C \in A$, trovo un punto P :

$$\vec{P}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \text{ versori} \quad (14)$$

Esisterà un punto derivato $\vec{P}'(t)$:

$$P'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} = \vec{v}(t) \quad (15)$$

Prendo $P_0 \in C$ in cui f ha un massimo o minimo rispetto ai punti della curva.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f &\perp \vec{v}(t) \\ f(x, y, z) &= f(x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (16)$$

Se P_0 è un massimo/minimo, allora $\vec{\nabla} f(P_0) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} f \cdot \vec{v} \Big|_{P_0} = 0$.

Se il prodotto scalare è 0, i due vettori sono perpendicolari.

Dimostrazione geometrica del teorema di Lagrange

$f(x, y, z)$	differenziabile
$g(x, y, z) \rightarrow$ vincolo	differenziabile
$P_0 \in g(x, y, z) = 0 (\vec{\nabla} g \neq 0)$	In $P_0 f$ ha max/min locale

$$\begin{cases} \lambda : \nabla f = \lambda \nabla g & \lambda \in \mathbb{R} \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} L(x, y, z) &= xy + \lambda g(x, y) & \nabla L &= 0 \\ \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} & & f \text{ è una funzione da rappresentare, } x \text{ e } y \text{ sono} \\ & & \text{le coordinate di un punto in funzione di } \lambda. \\ & & \text{Osservo poi se i punti trovati appartengono al} \\ & & \text{vincolo.} \end{aligned}$$

Poi cerco massimi e minimi locali rispetto a $C : g(x, y, z) = 0$.

$\vec{\nabla} f \perp \vec{v}$ e $\vec{\nabla} g \perp$ tutte le linee di *livello* ($\nabla f \perp \nabla g \Rightarrow \nabla f = \lambda \nabla g$).

2 Integrali doppi

2.1 Definizione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(P_k) \cdot A_k = \int_R f(x, y) dR \quad (18)$$

2.2 Teorema di Fubini

- (A) $\int_D f(x, y) = \int_a^b dx \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right)$ D normale rispetto a x , $D = \{a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$.
- (B) $\int_D f(x, y) = \int_c^d dy \left(\int_{h(y)}^{k(y)} f(x, y) dx \right)$ D normale rispetto a y , $D = \{h(y) \leq x \leq k(y), c \leq y \leq d\}$.

2.3 Volume

$$\int_T |f(x, y)| dT > 0 \quad \text{Il volume è l'integrale del modulo.} \quad (19)$$

2.4 Area e Valore Medio di una funzione

$$\text{Area } T = \iint_T dx dy \quad M = \frac{\int_T f dT}{\text{area } T} \quad (20)$$

2.5 Sostituzione di variabili in funzioni in una variabile

$$f(x) \longrightarrow x = g(t) \quad \text{invertibile} \\ \int_a^b f(x) dx = \int_x^d f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{e} \quad x \leq t^2 \quad (21)$$

2.6 Sostituzione di variabili in funzioni in due variabili

(I) A campo connesso

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \in C^0(A) \quad (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v)) \\ \text{(II)} \quad \tau : A \rightarrow \tau(A) = B \quad \text{biunivoca} \quad (22)$$

$$\text{(III)} \quad \det J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{matrice Jacobiana})$$

Se ho I, II, III, la trasformazione è regolare.

3 Linee in forma parametrica

3.1 Definizioni

- γ è una curva *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$, cioè se gli estremi coincidono.
- γ è una curva *semplice* se $\forall t_1, t_2 \quad \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2), t(a, b)$.
- γ è una curva *regolare* se:
 1. $\gamma(t) \in C^1([a, b])$
 2. $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a, b)$
 3. $\gamma(t)$ semplice

3.2 Calcolare la lunghezza di una linea

Data una curva regolare, posso scrivere i punti P_i sul piano, ricavandoli da $\vec{P}(t)$:

$$\begin{aligned} \vec{P}(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \quad t \in [a, b] \\ P_i &= (x(t_i), y(t_i)) \end{aligned} \quad (23)$$

Calcolo la distanza fra due punti:

$$\begin{aligned} P_{i+1} - P_i &= \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2} \\ &= \sqrt{[(t_{i+1} - t_i)x'(\alpha)]^2 + [(t_{i+1} - t_i)y'(\beta)]^2} \\ &= (t_{i+1} - t_i) \sqrt{s'^2(\alpha) + y'^2(\beta)} \end{aligned} \quad (24)$$

Considero la lunghezza della spezzata composta da segmenti infinitesimi:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{\delta=0}^N \left(\delta_i \sqrt{x'^2(\alpha) + y'^2(\beta)} \right) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \quad (25)$$

3.3 Ascissa curvilinea

$$s(t) = \int_a^t |P'(t)| dt \quad (26)$$

Posso scrivere sia in forma parametrica ($s(t)$) che in ascissa curvilinea ($t(s)$). Ogni curva ha la propria ascissa curvilinea.

Posso calcolare l'ascissa curvilinea anziché usare (x, y, z) come sistema di riferimento, e per ogni punto della linea esistono i vettori \vec{n} (vettore normale principale), \vec{t} (vettore tangente) e \vec{b} (binomiale, indica se la terna è destra).

$$\vec{n} = \frac{P''(s)}{|P''(s)|} \quad \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} \quad (27)$$

Triedro fondamentale (o di Fresnel) $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{b})$

3.4 Integrale di linea

Con l'integrale di linea calcolo la superficie laterale compresa tra il piano xy la funzione $z = f(x, y)$.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum f_i(t_{i+1} - t_i) = \int_a^b f(s) ds \quad (28)$$

Siccome è difficile calcolare l'integrale di linea con l'ascissa curvilinea, posso effettuare un cambio di variabile:

$$s \rightarrow t \quad \text{e} \quad ds \rightarrow |P'(t)| dt \quad (29)$$

3.5 Campo Vettoriale

Un campo vettoriale è definito come segue:

$$\vec{F} = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) \text{ Definizione di campo vettoriale} \quad (30)$$

Se considero il lavoro infinitesimale e lo integro ottengo il lavoro L :

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} \text{ Lavoro infinitesimale} \quad (31)$$

L'integrale di linea in un campo vettoriale viene chiamato *lavoro*:

$$L = \int_C \vec{F} d\vec{s} \quad (32)$$

Se considero $d\vec{s} = (dx, dy, dz)$ allora posso scrivere:

$$\vec{F} d\vec{s} = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \begin{cases} dx = x'(t) dt \\ dy = y'(t) dt \\ dz = z'(t) dt \end{cases} \quad (33)$$

3.6 Integrale di linea di II specie (Lavoro)

$$I = \int_a^b (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) \quad (34)$$

$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ è detta *Forma Differenziale Lineare*, se è *esatta* vuol dire che esiste un potenziale per tale funzione.

3.7 Teorema

Data una *fdl* $\omega(x, y) = Xdx + Ydy$, ω è esatta se $\exists f : \vec{\nabla} f = \omega = Xdx + Ydy$, e il campo è conservativo (perché ammette un potenziale). Se una *fdl* è esatta, il lavoro dipende solo dagli estremi.

3.8 Teorema

Se $\omega(x, y, z)$ è esatta in A connesso, allora \forall linea regolare $\gamma \in A$ che abbia estremi A e B ,

$$L = \int_{\gamma} \omega(x, y) d\gamma = \int_A^B \vec{\nabla} f d\gamma = \int_A^B f'(P) dP = f(B) - f(A) \quad (35)$$

Se il campo è *irrotazionale* e *semplicemente connesso aperto*, il campo è conservativo.

Osservazione La circuitazione (integrale lungo una linea *chiusa*) in un campo conservativo è 0.

3.9 Rotore

Se il rotore $\text{rot } \vec{\omega} = 0$, la *fdl* è chiusa e il campo è detto *irrotazionale*.

Se $X_y = Y_x$, allora $\text{rot } \vec{\omega} = 0$.

$$\text{rot } \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (36)$$

3.10 Teorema

Se $\vec{r} \times d\vec{F}$ *fdl* di classe C1, in A aperto e connesso, allora *fdl* è *esatta* e quindi *chiusa*.

Osservazione Se *fdl* è chiusa, non è detto che sia esatta (ci possono essere *buchi*).

3.11 Calcolo del potenziale

1. Trovo le derivate X_y e Y_x $\omega(x, y) = (Xdx, Ydy)$ e verifico che $\text{rot } \vec{\omega} = 0$.

Se $X_y = Y_x$, allora $\text{rot } \vec{\omega} = 0$

2. Calcolo il potenziale con la spezzata in \mathbb{R}^3 :

$$U(x, y) = \int Xdx + g(y) \quad (37)$$

$g(y)$ è la funzione della variabile rispetto alla quale non integro.

$$\frac{\partial U}{\partial y} + g'(y) = Y \longrightarrow g(y) = \int g'(y)dy = (...) + c \quad (38)$$

3. Sostituisco $g(y)$ in $U(x, y)$

4. Nel caso avessi più di due variabili, nel passo 2 anzichè scrivere c scriverò $h(z)$ (e $g(y)$ diventerà $g(y, z)$)

4 Serie di potenze

$$\text{Serie Numeriche} \begin{cases} \text{a segno positivo} \\ \text{a segno alterno} \end{cases} \quad \text{Una serie} \begin{cases} \text{converge} \\ \text{non converge} \begin{cases} \text{diverge} \\ \text{oscilla} \end{cases} \end{cases} \quad (39)$$

4.1 Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{o} \quad \sum a_n (x - x_0)^n \quad \text{dove } x_0 \text{ si dice centro della serie.} \quad (40)$$

Posso fissare x e ottengo una serie numerica:

$$a_n = \frac{(\bar{x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum (-1)^n b_n \quad \bar{x} \text{ è un } x \text{ fissato} \quad (41)$$

Le serie di potenze sono una generalizzazione delle serie di Taylor.

4.2 Raggio di convergenza

Una serie $\sum a_n x^n$ di raggio di convergenza R converge:

- $x = 0$ ogni serie converge
- $\exists R > 0$ converge $\forall |x| < R$, diverge $|x| > R$, $|x| = R$ non posso dire nulla
- $R = +\infty$

Per calcolare il raggio, conviene cercare le x con $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{b_{n+1}} \cdot \frac{b_n}{x^n} \right| < 1$.

4.3 Teorema di derivazione per serie di potenze

Se ho una serie di potenze che converge posso derivare termine a termine e ho una somma di derivate che converge.

4.4 Teorema di integrazione per serie di potenze

(Inverso del precedente)

Sia $f(x)$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k \quad (42)$$

La serie $F(x)$ ha lo stesso raggio di convergenza R :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} \quad (43)$$

Allora $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$. In particolare:

$$\int_a^b \left[\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k \right] dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\int_a^b a_k (x - x_0)^k \right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} \right] \quad (44)$$

Osservazione Posso ottenere una serie dall'integrale solo se questa è oscillante. Dato un integrale con un termine incalcolabile, lo espando con gli sviluppi di Taylor, portando fuori dall'integrale la serie, lasciando all'interno la parte con l'incognita. Calcolo infine i singoli b_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ finché non ottengo un valore che è minore dell'errore dato, a quel punto scrivo $I = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 \dots$

4.5 Serie di Fourier

Dato un periodo $T = \pi$,

$$f(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (45)$$

in cui

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (46)$$

a_n e b_n sono i coefficienti della serie di Fourier se $T = 2\pi$. Il termine a_0 è più facile calcolarlo separatamente.

Condizioni sufficienti per la convergenza

$$\begin{array}{ll} f \text{ continua} & \sum \text{ converge al valore di } f(x_0) \\ f \text{ discontinua di I specie} & \sum \text{ converge alla semisomma } \frac{f(x_{0+}) + f(x_{0-})}{2} \end{array} \quad (47)$$

$$\begin{array}{ll} a_n = 0 \iff f \text{ dispari (funzione di soli seni)} \\ b_n = 0 \iff f \text{ pari (funzione di soli coseni)} \end{array} \quad (48)$$

Periodi diversi da 2π Se ho periodi diversi da 2π , bisogna effettuare una sostituzione:

$$T = L \quad y = \frac{tx}{2\pi} \quad f(x) \rightarrow f(y) \quad a_n = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cos \left[\frac{2\pi}{L} nx \right] dx \quad b_n = \dots \quad (49)$$

Estensione del teorema di CS per la convergenza Una funzione è sviluppabile come serie di Fourier se è assolutamente integrabile nell'intervallo.

In questo modo una funzione con discontinuità di II specie potrebbe essere sviluppabile con Fourier.

4.6 Uguaglianza di Bessel

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (50)$$

4.7 Serie di Fourier con numeri complessi

$$\begin{aligned} & a_k \cos kx + b_k \sin kx \\ \cos kx &= \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2} \\ C_k &= \frac{a_k}{2} - i \frac{b_k}{2} \quad C_{-k} = \frac{a_k}{2} + i \frac{b_k}{2} \\ \Rightarrow \sum_1 (a_k \cos kx + b_k \sin kx) &= \sum_1 (C_k e^{ikx} + C_{-k} e^{-ikx}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k e^{ikx} \end{aligned} \quad (51)$$

5 Equazioni Differenziali

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = 0 \quad (52)$$

in cui a_n sono funzioni di x e $y^{(n)}(x)$ è la funzione incognita.

Un'equazione differenziale di tale tipologia si dice *ordinaria di ordine n e grado m* .

5.1 Forma normale

$$y^{(n)}(x) = F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right) \quad (53)$$

5.2 Problema di Cauchy

Teorema di esistenza e unicità in piccolo Data il seguente sistema

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \leftarrow \text{Problema di Cauchy} \quad (54)$$

se f e f_y sono continue in $I(x_0, y_0)$, allora esiste una sola soluzione del problema di Cauchy in I .

5.3 Tipi di Integrali

- **Integrale Generale** (ha la costante D): $y^a = P(x) + D$
- **Integrale Particolare** (non ha la costante): $y = P(x)^{\frac{1}{a}}$
- **Integrale Singolare**: è l'identità data sostituendo a y nel problema di Cauchy i valori in cui l'equazione in y non è determinata. Potrebbe non esistere.

5.4 Equazioni differenziali del I ordine

Esistono alcune classi di equazioni per le quali si può giungere a una soluzione esplicita.

5.4.1 Teorema

L'integrale generale della non-omogenea è la somma dell'integrale generale della omogenea e dell'integrale particolare della non-omogenea.

5.4.2 Equazioni a variabili separabili

$$y' = a(t)b(y) \quad (55)$$

Se \bar{y} è soluzione di $b(y) = 0$, $y(t) = \bar{y}$ è una soluzione dell'equazione differenziale. Se $b(y) \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{y'}{b(y)} &= a(t) \\ \frac{dy}{b(y)dt} &= a(t) \\ \int \frac{y'}{b(y)} dt &= \int a(t) dt + c \\ B(y) &= A(t) + c \\ y &= B^{-1}(A(t) + c)\end{aligned}$$

5.4.3 Equazioni lineari

Sono equazioni riscrivibili nella forma *normale*

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \quad (56)$$

Se $f(t) = 0$ l'equazione si dice omogenea. L'integrale generale si calcola con la seguente formula

$$y(t) = e^{-A(t)} \left[C_1 + \int f(t)e^{A(t)} dt \right] \quad \text{in cui} \quad A(t) = \int a(t) dt \quad (57)$$

Con quest'ultima equazione posso eventualmente verificare la soluzione al problema di Cauchy.

5.4.4 Equazioni di Bernoulli

$$y' = P(t)y + Q(t)y^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq 1 \quad (58)$$

Se $\alpha > 0$, $y = 0$ è una soluzione dell'equazione.

Se $y \neq 0$, dividendo per y^α ottengo

$$y^{-\alpha}y' = P(t)y^{1-\alpha} + Q(t) \quad (59)$$

che è un'equazione lineare; risolvo ponendo $t = y^{1-\alpha}$ e derivandolo.

5.4.5 Equazioni Omogenee

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (60)$$

Si può sostituire

$$t(x) = \frac{y(x)}{x} \quad y(x) = t(x)x \quad \text{e} \quad y'(x) = t'(x)x + t(x) \quad (61)$$

Sostituita nell'equazione di partenza si ottiene una equazione in variabili separabili.

5.5 Equazioni differenziali del II ordine a coefficienti costanti

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y = y(x) \quad (62)$$

Si risolve così:

1. Scrivo l'equazione omogenea $y'' + ay' + by = 0$
2. Scrivo l'equazione caratteristica $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$
3. L'equazione caratteristica può avere soluzioni
 - distinte ($\Delta > 0$) $\Rightarrow y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$
 - coincidenti ($\Delta = 0$) $\Rightarrow y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$
 - complesse coniugate ($\Delta < 0$) $\Rightarrow y = e^{\alpha x} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$
4. Sostituisco gli α e scrivo l'*integrale generale della omogenea*.
5. Studio la *forzante* $f(x)$ secondo la classificazione provvista dalla dispensa.
6. Basandomi sul punto precedente, calcolo $\bar{y}(x), \bar{y}'(x), \bar{y}''(x)$, li sostituisco nella equazione differenziale e risolvo il sistema. Trovate le soluzioni del sistema, le sostituisco in $\bar{y}(x)$, trovando l'*integrale particolare della non-omogenea*.
7. Applico il teorema e trovo l'integrale generale dell'equazione *completa* (o non-omogenea)