Serie di potenze come funzioni

$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$(-\infty,+\infty)$	$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$	$(-\infty,+\infty)$
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$(-\infty,+\infty)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$	$(-\infty,+\infty)$
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$(-\infty,+\infty)$	$\arctan x$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$[-\infty,+\infty]$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$	$(-\infty,\infty)$	$\log(1+x)$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$	$(-\infty,\infty)$

Serie di Fourier

Consideriamo una funzione periodica f di periodo L:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right)\right)$$

allora

$$a_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right)dx \qquad b_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right)dx$$

Uguaglianza di Parseval

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)^2 dx = \frac{L}{2}\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right]$$

Ricerca di un integrale particolare dell'equazione $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$

- Sia $f(t) = P_m(t)$, polinomio di grado $m \geq 0$, allora $y(t) = P_q(t)$ ove $q = m + r$, essendo r l'ordine minimo di derivazione con cui appare la $y(t)$ nell'equazione differenziale.
- Sia $f(t) = he^{kt}, k \neq 0$
  - se k non è radice dell'equazione caratteristica $y(t) = Ae^{kt}$
  - se k è radice r-pla dell'equazione caratteristica $y(t) = At^r e^{kt}$
- Sia $f(t) = P_m(t)e^{kt}$ allora $y(t) = P_q(t)e^{kt}$ ove
  - $q = m$ se k non è radice dell'equazione caratteristica
  - $q = m + r$ se k è radice r-pla dell'equazione caratteristica
- Sia $f(t) = h\sin(kt)$ oppure $f(t) = h\cos(kt)$:
  - se $\pm ik$ non sono radici dell'equazione caratteristica allora $y(t) = A\sin(kt) + B\cos(kt)$
  - se $\pm ik$ sono radici dell'equazione caratteristica $y(t) = t(A\sin(kt) + B\cos(kt))$
- Sia $f(t) = e^{pt}\cos(qt)$ oppure $f(t) = e^{pt}\sin(qt)$
  - se $p \pm iq$ non sono radici dell'equazione caratteristica $y(t) = e^{pt}(A\cos(qt) + B\sin(qt))$
  - se $p \pm iq$ sono radici dell'equazione caratteristica $y(t) = e^{pt}(A\cos(qt) + B\sin(qt))$

Equazione di Eulero

$$x^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = f(x)$$

Supponiamo $x > 0$ e poniamo $x = e^t$,

$$y(x) = y(e^t) = u(t)$$
$$u'(t) = y'(e^t)e^t$$
$$u''(t) = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t$$
$$y'(e^t) = u'(t)e^{-t}$$
$$y''(e^t)e^{2t} = u''(t) - y'(e^t)e^t = u''(t) - u'(t)e^{-t}e^t$$
$$y''(e^t) = [u''(t) - u'(t)]\, e^{-2t}$$

Quindi l'equazione di partenza diventa

$$e^{2t}\,[u''(t) - u'(t)]\, e^{-2t} + be^t u'(t)e^{-t} + cu(t) = f(e^t)$$
$$u''(t) + (b-1)u'(t) + cu(t) = f(t)$$

Esempi

$$x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = 1 \quad \text{diventa}$$
$$u''(t) - u(t) = 1$$
$$u(t) = Ae^t + Be^{-t} - 1$$
$$y(x) = Ax + Bx^{-1} - 1$$

$$x^2y''(x) - 5xy'(x) + 8y(x) = x^3 \quad \text{diventa}$$
$$u''(t) - 6u'(t) + 8u(t) = e^{3t}$$
$$u(t) = Ae^{4t} + Be^{2t} - e^{3t}$$
$$y(x) = Ax^4 + Bx^2 - x^3$$