# Appunti di Analisi II

Andrea Franchini

January 3, 2019

# Contents

# 1 Funzioni in più variabili

## 1.1 Definizione topologica di limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \qquad l \in \mathbb{R}$$

*oppure* (1)

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = l \qquad P = (x,y), P_0 = (x_0,y_0)$$

## 1.2 Intorno di un punto

$$I(P_0) = (P) \in \mathbb{R}^2 : |\mathrm{P} - \mathrm{P_0}| < \mathrm{r} \tag{2}$$

Per comodità si considerano intorni circolari.

## 1.3 Calcolo dei limiti

Il limite esiste e vale $l$ se il limite è indipendente dal cammino. Presi due o più punti, ci sono infiniti modi per calcolare il limite. Se trovo almeno due strade con limiti diversi il limite non esiste.

Per comodità, conviene passare in coordinate polari:

$$f(x,y) \Rightarrow g(\rho,\theta) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho\cos\theta \end{cases} \tag{3}$$

## 1.4 Derivate Parziali

Derivata parziale rispetto a $x$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{4}$$

## 1.5 Teorema

Se ho $f_{xx}$, $f_{xy}$, $f_{yx}$, $_{yy}$ continue su $(a,b) \Rightarrow f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

L'esistenza di derivate parziali non dice nulla sulla differenziabilità.

## 1.6 Differenziale

Il piano tangente $\pi$ contiene le rette tangenti, in particolare le rette che ottengo dalle derivate parziali.

$$\begin{aligned} \pi: \quad & z - z_0 = a(x-x_0) + b(y-y_0) \qquad a = f_x(x_0,y_0), b = f_y(x_0,y_0) \\ \Rightarrow \quad & z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \end{aligned} \tag{5}$$

Ho trovato quindi un piano generato dalle rette tangenti a $f$ in $(x_0,y_0)$.
Una funzione in più variabili è **differenziabile** in $P_0$ se

$$\Delta z = f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

con $\varepsilon_1 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$, idem per $\varepsilon_2$, $\Delta y$.
Se $f_x$ e $f_y$ sono continue, allora $f$ è differenziabile in un punto. Se non lo sono, non posso dire nulla.
$f$ differenziabile $\Rightarrow f$ continua.
$f$ non differenziabile $\not\Rightarrow f$ continua.

## 1.7 Gradiente

$$\vec{\nabla} f(a,b) = (f_x(a,b), f_y(a,b)) = grad\vec{f} \tag{6}$$

## 1.8 Teorema: Formula del gradiente

Prendiamo $f$ differenziabile.

$$\vec{u} = (u_1,u_2) \qquad D_{\vec{u}} f(a,b) = \vec{\nabla} f(a,b) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \tag{7}$$

## 1.9 Massimi e minimi locali

Dato un punto $(a,b)$ e $z = f(x,y)$:

- $(a,b)$ è massimo locale se in un intorno di $(a,b)$ se $f(x,y) \leq f(a,b)$.
- $(a,b)$ è minimo locale se in un intorno di $(a,b)$ se $f(x,y) \geq f(a,b)$.

  Se $(a,b)$ è un punto di massimo o minimo locale, allora $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.
  Il piano tangente in quel punto è uguale a $O(z = 0)$.

## 1.10 Punto critico

$(a,b) \in D_f$ è un punto critico se:
$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ *oppure* $\nexists$ almeno una derivata parziale.

## 1.11 Punto di sella

(analogo del punto di flesso per le funzioni in due variabili)
$f$ differenziabile in $(a,b)$, $(a,b)$ è il punto di sella.

$$\begin{aligned} &\forall I(a,b) \quad \exists punti(x,y) | f(x,y) \leq f(a,b) \quad \textbf{e} \\ &\qquad\qquad\quad \exists punti(x',y') | f(x',y') \geq f(a,b) \end{aligned} \tag{8}$$

## 1.12 Formula di Taylor per funzioni in due variabili

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + [(x-a)f_x(a,b) + (y-b)f_y(a,b)] \\ &+ \frac{1}{2}\left[(x-a)^2 f_{xx}(a,b) + 2(x-a)(y-b)f_{xy}(a,b) + (y-b)^2 f_{yy}(a,b)\right] \\ &+ ... \end{aligned} \tag{9}$$

**Studiare un punto critico**

1. Risolvo il seguente sistema per trovare i punti critici:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \qquad o \qquad \vec{\nabla} f(x,y) = 0 \tag{10}$$

2. Trovo (ad esempio) il punto (a, b) e studio la seguente espressione:

$$f_{xx}(a,b) + 2f_{xy}(a,b) + f_{yy}(a,b) \qquad \begin{cases} > 0 & max/min \\ = 0 & ? \\ < 0 & sella \end{cases} \tag{11}$$

## 1.13 Determinante Hessiano

Anzichè scrivere la precedente forma (11), conviene calcolare il seguente determinante:

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = \begin{cases} detH > 0 \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}(a,b) > 0 & min \\ f_{xx}(a,b) < 0 & max \end{cases} \\ detH = 0 \Rightarrow \quad ? \\ detH < 0 \Rightarrow (a,b) \quad sella \end{cases} \tag{12}$$

## 1.14 Massimi e minimi vincolati

1. Calcolo le derivate prime
2. Calcolo le derivate seconde
3. Considero la funzione lungo i bordi
4. Considero la funzione nei vertici (se esistono) e nei punti critici sui bordi

Per i non-poligoni, posso passare alle coordinate polari e considero i massimi/minimi al variare di $\pi$.

### 1.15 Metodo moltiplicatore di Lagrange

Data una funzione $f(x,y,z)$, differenziabile in $A$, regione, e una curva regolare $C \in A$, trovo un punto $P$:

$$\vec{P}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \qquad \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \quad \text{versori} \tag{13}$$

Esisterà un punto derivato $\vec{P'}(t)$:

$$\vec{P'}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} = \vec{v}(t) \tag{14}$$

Prendo $P_0 \in C$ in cui $f$ ha un massimo o minimo rispetto ai punti della curva.

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla} f \perp \vec{v}(t) \\ &f(x,y,z) = f(x(t), y(t), z(t)) \\ &\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v} \end{aligned} \tag{15}$$

Se $P_0$ è un massimo/minimo, allora $\vec{\nabla} f(P_0) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}\Big|_{P_0} = 0$.
Se il prodotto scalare è 0, i due vettori sono perpendicolari.

**Dimostrazione geometrica del teorema di Lagrange**

$$\begin{aligned} &f(x,y,z) && \text{differenziabile} \\ &g(x,y,z) \to \text{vincolo} && \text{differenziabile} \\ &P_0 \in g(x,y,z) = 0 (\vec{\nabla} g \neq 0) && \text{In } P_0 f \text{ ha max/min locale} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lambda : \nabla f = \lambda \nabla g \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

$$L(x,y,z) = xy + \lambda g(x,y) \qquad \nabla L = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

$f$ è una funzionare da rappresentare, $x$ e $y$ sono le coordinate di un punto in funzione di $\lambda$. Osservo poi se i punti trovati appartengono al *vincolo*.

Poi cerco massimi e minimi locali rispetto a $C : g(x,y,z) = 0$.
$\vec{\nabla} f \perp \vec{v}$ e $\vec{\nabla} g \perp$ tutte le linee di *livello* ($\nabla f \perp \nabla g \Rightarrow \nabla f = \lambda \nabla g$).

# 2 Integrali doppi

## 2.1 Definizione

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(P_k) \cdot A_k = \int_R f(x,y) dR \tag{17}$$

## 2.2 Teorema di Fubini

(A) $\int_D f(x,y) = \int_a^b dx \left( \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y) dy \right)$ $D$ normale rispetto a $x$, $D = \{a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$.

(B) $\int_D f(x,y) = \int_c^d dy \left( \int_{h(y)}^{k(y)} f(x,y) dx \right)$ $D$ normale rispetto a $y$, $D = \{h(y) \leq x \leq k(y), c \leq y \leq d\}$.

## 2.3 Volume

$$\int_T \Big| f(x,y) \Big| dT > 0 \qquad \text{Il volume è l'integrale del modulo.} \tag{18}$$

## 2.4 Area e Valore Medio di una funzione

$$\text{Area T} = \iint_T dxdy \qquad M = \frac{\int_T f dT}{\text{area T}} \tag{19}$$

### 2.5 Sostituzione di variabili in funzioni in una variabile

$$f(x) \longrightarrow x = g(t) \quad \text{invertibile}$$
$$\int_a^b f(x)dx = \int_x^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt \qquad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{e} \quad x \leq t^2 \tag{20}$$

### 2.6 Sostituzione di variabili in funzioni in due variabili

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} \quad \text{A} \quad \text{campo connesso} \\
&\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \in C^0(A) \qquad (u,v) \to (x(u,v), y(u,v)) \\
&\text{(II)} \quad \tau : \text{A} \to \tau(\text{A}) = \text{B} \quad \text{biunivoca} \\
&\text{(III)} \quad \det \text{J} = \text{frac}\partial(\text{u},\text{v})\partial(\text{x},\text{y}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \textit{(matrice Jacobiana)}
\end{aligned} \tag{21}$$

Se ho I, II, III, la trasformazione è regolare.

## 3 Linee in forma parametrica

### 3.1 Definizioni

- $\gamma$ è una curva *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$, cioè se gli estremi coincidono.
- $\gamma$ è una curva *semplice* se $\forall t_1, t_2 \quad \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2), t(a,b)$.
- $\gamma$ è una curva *regolare* se:
  1. $\gamma(t) \in C^1([a,b])$
  2. $\gamma'(t) \neq 0 \forall t \in (a,b)$
  3. $\gamma(t)$ semplice

### 3.2 Calcolare la lunghezza di una linea

Data una curva regolare, posso scrivere i punti $P_i$ sul piano, ricavandoli da $\vec{P}(t)$:

$$\begin{aligned} &\vec{P}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad t \in [a,b] \\ &P_i = (x(t_i), y(t_i)) \end{aligned} \tag{22}$$

Calcolo la distanza fra due punti:

$$\begin{aligned} P_{i+1} - P_i &= \sqrt{[x(t_{i+1} - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2} = \\ &= \sqrt{[(t_{i+1} - t_i)x'(\alpha)]^2 + [(t_{i+1} - t_i)y'(\beta)]^2} = \\ &= (t_{i+1} - t_i)\sqrt{s'^2(\alpha) + y'^2(\beta)} \end{aligned} \tag{23}$$

Considero la lunghezza della spezzata composta da segmenti infinitesimi:

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{\delta=0}^{N} \left( \delta_i \sqrt{x'^2(\alpha) + y'^2(\beta)} \right) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \tag{24}$$

### 3.3 Ascissa curvilinea

$$s(t) = \int_a^t |P'(t)| \, dt \tag{25}$$

Posso scrivere sia in forma parametrica ($s(t)$) che in ascissa curvilinea ($t(s)$). Ogni curva ha la propria ascissa curvilinea.
Posso calcolare l'ascissa curvilinea anziché usare $(x,y,z)$ come sistema di riferimento, e per ogni punto della linea esistono i vettori $\vec{n}$ (vettore normale principale), $\vec{t}$ (vettore tangente) e $\vec{b}$ (binomiale, indica se la terna è destra).

$$\vec{n} = \frac{P''(s)}{|P''(s)|} \qquad\qquad \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} \tag{26}$$

**Triedro fondamentale (o di Fresnel)** $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{b})$

### 3.4 Integrale di linea

Con l'integrale di linea calcolo la superficie laterale compresa tra il piano $xy$ la funzione $z = f(x, y)$.

$$\lim_{\delta \to 0} \sum f_i(t_{i+1} - t_i) = \int_a^b f(s) ds \tag{27}$$

Siccome è difficile calcolare l'integrale di linea con l'ascissa curvilinea, posso effettuare un cambio di variabile:

$$s \to t \qquad \text{e} \qquad ds \to |P'(t)|dt \tag{28}$$

### 3.5 Campo Vettoriale

Un campo vettoriale è definito come segue:

$$\vec{F} = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) \textit{Definizione di campo vettoriale} \tag{29}$$

Se considero il lavoro infinitesimale e lo integro ottengo il lavoro $L$:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} \textit{Lavoro infinitesimale} \tag{30}$$

L'integrale di linea in un campo vettoriale viene chiamato *lavoro*:

$$L = \int_C \vec{F} d\vec{s} \tag{31}$$

Se considero $d\vec{s} = (dx, dy, dz)$ allora posso scrivere:

$$\vec{F} d\vec{s} = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = x'(t)dt \\ dy = y'(t)dt \\ dz = z'(t)dt \end{cases} \tag{32}$$

### 3.6 Integrale di linea di II specie (Lavoro)

$$I = \int_a^b (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) \tag{33}$$

$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ è detta *Forma Differenziale Lineare*, se è *esatta* vuol dire che esiste un potenziale per tale funzione.

### 3.7 Teorema

Data una *fdl* $\omega(x, y) = X dx + Y dy$, $\omega$ è esatta se $\exists f : \vec{\nabla} f = \omega = X dx + Y dy$, e il campo è conservativo (perché ammette un potenziale). Se una *fdl* è esatta, il lavoro dipende solo dagli estremi.

### 3.8 Teorema

Se $\omega(x, y, z)$ è esatta in $A$ connesso, allora $\forall$ linea regolare $\gamma \in A$ che abbia estremi $A$ e $B$,

$$L = \int_\gamma \omega(x, y) d\gamma = \int_A^B \vec{\nabla} f d\gamma = \int_A^B f'(P) dP = f(B) - f(A) \tag{34}$$

Se il campo è *irrotazionale* e *semplicemente connesso aperto*, il campo è conservativo.

**Osservazione** La circuitazione (integrale lungo una linea *chiusa*) in un campo conservativo è 0.

### 3.9 Rotore

Se il rotore rot $\vec{\omega} = 0$, la *fdl* è chiusa e il campo è detto *irrotazionale*.

$$\text{rot}\, \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \tag{35}$$

### 3.10 Teorema

Se $\vec{r} \times d\vec{F}$ *fdl* di classe C1, in $A$ aperto e connesso, allora *fdl* è *esatta* e quindi *chiusa*.

**Osservazione** Se *fdl* è chiusa, non è detto che sia esatta (ci possono essere *buchi*).

### 3.11 Calcolo del potenziale

1. Trovo le derivate $X_y$ e $Y_x$ $\omega(x,y) = (Xdx, Ydy)$ e verifico che rot $\vec{\omega} = 0$.
   **Se $X_y = Y_x$, allora rot $\vec{\omega} = 0$**

2. Calcolo il potenziale con la spezzata in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} &U(x,y) = \int_a^b Xdx + g(y) \\ &g(y) \text{ è la funzione della variabile rispetto alla quale non integro.} \\ &\frac{\partial U}{\partial y} = g'(y) \longrightarrow g(y) = \int g'(y)dy = (...) + c \qquad \text{sostituisco } g(y) \text{ in } U(x,y). \end{aligned} \tag{36}$$

3. Nel caso avessi più di due variabili, nel passo 2 anzichè scrivere $c$ scriverò $h(z)$ (e $g(y)$ diventerà $g(y,z)$).

# 4 Serie di potenze

$$\text{Serie Numeriche} \begin{cases} \text{a segno positivo} \\ \text{a segno alterno} \end{cases} \qquad \text{Una serie} \begin{cases} \text{converge} \\ \text{non converge} \begin{cases} \text{diverge} \\ \text{oscilla} \end{cases} \end{cases} \tag{37}$$

## 4.1 Serie di potenze

$$\sum_0^{\text{inf}} a_n x^n \qquad \text{o} \qquad \sum a_n (x - x_0)^n \quad \text{dove } x_0 \text{ si dice centro della serie.} \tag{38}$$

Posso fissare $x$ e ottengo una serie numerica:

$$a_n = \frac{(\bar{x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum (-1)^n b_n \qquad \bar{x} \text{ è un } x \text{ fissato} \tag{39}$$

Le serie di potenze sono una generalizzazione delle serie di Taylor.

## 4.2 Raggio di convergenza

Una serie $\sum a_n x^n$ di raggio di convergenza $R$ converge:

- $x = 0$ ogni serie converge
- $\exists R > 0$ converge $\forall |x| < R$, diverge $|x| > R$, $|x| = R$ non posso dire nulla
- $R = +\infty$

Per calcolare il raggio, conviene cercare le x con $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{b_n+1} \cdot \frac{b_n}{x^n} \right| < 1$.

## 4.3 Teorema di derivazione per serie di potenze

Se ho una serie di potenze che converge posso derivare termine a termine e ho una somma di derivate che converge.

## 4.4 Teorema di integrazione per serie di potenze

(Inverso del precedente)
Sia $f(x)$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k \tag{40}$$

La serie $F(x)$ ha lo stesso raggio di convergenza $R$:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} \tag{41}$$

Allora $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$. In particolare:

$$\int_a^b \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k \right] dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ \int_a^b a_k (x - x_0)^k \right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} \right] \tag{42}$$

**Osservazione** Posso ottenere una serie dall'integrale solo se questa è oscillante. Dato un integrale con un termine incalcolabile, lo espando con gli sviluppi di Taylor, portando fuori dall'integrale la serie, lasciando all'interno la parte con l'incognita. Calcolo infine i singoli $b_i$, $i = 0, 1, 2...$ finché non ottengo una valore che è minore dell'errore dato, a quel punto scrivo $I = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 ....$

## 4.5 Serie di Fourier

Dato un periodo $T = \pi$,

$$f(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{43}$$

in cui

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \tag{44}$$

$a_n$ e $b_n$ sono i coefficienti della serie di Fourier se $T = 2\pi$. Il termine $a_0$ è più facile calcolarlo separatamente.

**Condizioni sufficienti per la convergenza**

$$\begin{aligned} &f \quad \text{continua} \qquad \sum \text{converge al valore di } f(x_0) \\ &f \quad \text{discontinua di I specie} \qquad \sum \text{converge alla semisomma } \frac{f(x_{0^+}) + f(x_{0^-})}{2} \end{aligned} \tag{45}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_n = 0 &\iff f \text{dispari (funzione di soli seni)} \\ b_n = 0 &\iff f \text{pari (funzione di soli coseni)} \end{aligned} \quad (46)}$$

**Periodi diversi da $2\pi$** Se ho periodi diversi da $2\pi$, bisogna effettuare una sostituzione:

$$T = L \qquad y = \frac{tx}{2\pi} \qquad f(x) \to f(y) \qquad a_n = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cos \left[ \frac{2\pi}{L} nx \right] dx \qquad b_n = \dots \tag{47}$$

**Estensione del teorema di CS per la convergenza** Una funzione è sviluppabile come serie di Fourier se è assolutamente integrabile nell'intervallo.
*In questo modo una funzione con discontinuità di II specie potrebbe essere sviluppabile con Fourier.*

## 4.6 Uguaglianza di Bessel

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{1}^{\infty} \left( a_n^2 + b_n^2 \right) \tag{48}$$

## 4.7 Serie di Fourier con numeri complessi

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx$$
$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \qquad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2}$$
$$C_k = \frac{a_k}{2} - i\frac{b_k}{2} \qquad C_{-k} = \frac{a_k}{2} + i\frac{b_k}{2} \tag{49}$$
$$\Longrightarrow \sum_1 (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_1 \left(C_k e^{ikx} + C_k e^{-ikx}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k e^{ikx}$$

# 5 Equazioni Differenziali

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_n(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = 0 \tag{50}$$

in cui $a_n$ sono funzioni di $x$ e $y^{(n)}(x)$ è la funzione incognita.
Un'equazione differenziale di tale tipologia si dice *ordinaria di ordine $n$ e grado $m$.*

## 5.1 Forma normale

$$y^{(n)}(x) = F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right) \tag{51}$$

## 5.2 Problema di Cauchy

**Teorema di esistenza e unicità in piccolo** Data il seguente sistema

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \quad \longleftarrow \textit{Problema di Cauchy} \end{cases} \tag{52}$$

se $f$ e $f_y$ sono continue in $I(x_0, y_0)$, allora esiste una sola soluzione del problema di Cauchy in $I$.

## 5.3 Tipi di Integrali

- **Integrale Generale** (ha la costante $D$): $\quad y^a = P(x) + D$
- **Integrale Particolare** (non ha la costante): $\quad y = P(x)^{\frac{1}{a}}$
- **Integrale Singolare**: è l'identità data sostituendo a $y$ nel problema di Cauchy i valori in cui l'equazione in $y$ non è determinata. Potrebbe non esistere.

## 5.4 Equazioni differenziali del I ordine

Esistono alcune classi di equazioni per le quali si può giungere a una soluzione esplicita.

### 5.4.1 Teorema

L'integrale generale della non-omogenea è la somma dell'integrale generale della omogenea e dell'integrale particolare della non-omogenea.

### 5.4.2 Equazioni a variabili separabili

$$y' = a(t)b(y) \tag{53}$$

Se $\bar{y}$ è soluzione di $b(y) = 0$, $y(t) = \bar{y}$ è una soluzione dell'equazione differenziale. Se $b(y) \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{b(y)} &= a(t) \\ \frac{dy}{b(y)dt} &= a(t) \\ \int \frac{y'}{b(y)}dt &= \int a(t)dt + c \\ B(y) &= A(t) + c \\ y &= B^{-1}(A(t) + c) \end{aligned}$$

### 5.4.3 Equazioni lineari

Sono equazioni riscrivibili nella forma *normale*

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \tag{54}$$

Se $f(t) = 0$ l'equazione si dice omogenea. L'integrale generale si calcola con la seguente formula

$$y(t) = e^{-A(t)} \left[ C_1 + \int g(t)e^{A(t)} \right] dt \qquad \text{in cui} \quad A(t) = \int a(t)dt \tag{55}$$

Con quest'ultima equazione posso eventualmente verificare la soluzione al problema di Cauchy.

### 5.4.4 Equazioni di Bernoulli

$$y' = P(t)y + Q(t)y^{\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq 1 \tag{56}$$

Se $\alpha > 0$, $y = 0$ è una soluzione dell'equazione.
Se $y \neq 0$, dividendo per $y^{\alpha}$ ottengo

$$y^{-\alpha}y' = P(t)y^{1-\alpha} + Q(t) \tag{57}$$

che è un'equazione lineare; risolvo ponendo $t = y^{1-\alpha}$ e derivandolo.

### 5.4.5 Equazioni Omogenee

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{58}$$

Si può sostituire

$$t(x) = \frac{y(x)}{x} \qquad\qquad y(x) = t(x)x \quad \text{e} \quad y'(x) = t'(x)x + t(x) \tag{59}$$

Sostituita nell'equazione di partenza si ottiene una equazione in variabili separabili.

## 5.5 Equazioni differenziali del II ordine a coefficienti costanti

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathrm{y = y(x)} \tag{60}$$

Si risolve così:

1. Scrivo l'equazione omogenea $y'' + ay' + by = 0$
2. Scrivo l'equazione caratteristica $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$
3. L'equazione caratteristica può avere soluzioni
   - distinte $(\Delta > 0) \Rightarrow y = C_1e^{\alpha_1 x} + C_2e^{\alpha_2 x}$
   - coincidenti $(\Delta = 0) \Rightarrow y = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\alpha x}$
   - complesse coniugate $(\Delta < 0) \Rightarrow y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right)$
4. Sostituisco gli $\alpha$ e scrivo l'*integrale generale della omogenea.*
5. Studio la *forzante* $f(x)$ secondo la classificazione provvista dalla dispensa.
6. Basandomi sul punto precendente, calcolo $\bar{y}(x), \bar{y}'(x), \bar{y}''(x)$, li sostituisco nella equazione differenziale e risolvo il sistema. Trovate le soluzioni del sistema, le sostituisco in $\bar{y}(x)$, trovando l'*integrale particolare della non-omogenea.*
7. Applico il teorema e trovo l'integrale generale dell'equazione *completa* (o non-omogenea)