Serie di potenze come funzioni

$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$(-\infty,+\infty)$	$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$	$(-\infty,+\infty)$
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$(-\infty,+\infty)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$	$(-\infty,+\infty)$
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$(-\infty,+\infty)$	$\arctan x$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$[-\infty,+\infty]$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$	$(-\infty,\infty)$	$\log(1+x)$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$	$(-\infty,\infty)$

Serie di Fourier

Consideriamo una funzione periodica f di periodo L:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi}{L} x + b_k \sin \frac{2k\pi}{L} x \right)$$

allora

$$a_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cos \frac{2k\pi}{L} x dx \qquad b_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \sin \frac{2k\pi}{L} x dx$$

Uguaglianza di Parseval

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)^2 dx = \frac{L}{2} \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \right]$$

Ricerca di un integrale particolare dell'equazione $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$

- Sia $f(t) = P_m(t)$, polinomio di grado $m \geq 0$, allora $y(t) = P_q(t)$ ove $q = m + r$, essendo r l'ordine minimo di derivazione con cui appare la $y(t)$ nell'equazione differenziale.
- Sia $f(t) = he^{kt}, k \neq 0$
  - se k non è radice dell'equazione caratteristica $y(t) = Ae^{kt}$
  - se k è radice r-pla dell'equazione caratteristica $y(t) = At^r e^{kt}$
- Sia $f(t) = P_m(t)e^{kt}$ allora $y(t) = P_q(t)e^{kt}$ ove
  - $q = m$ se k non è radice dell'equazione caratteristica
  - $q = m + r$ se k è radice r-pla dell'equazione caratteristica
- Sia $f(t) = h\sin(kt)$ oppure $f(t) = h\cos(kt)$:
  - se $\pm ik$ non sono radici dell'equazione caratteristica allora $y(t) = A\sin(kt) + B\cos(kt)$
  - se $\pm ik$ sono radici dell'equazione caratteristica $y(t) = t(A\sin(kt) + B\cos(kt))$
- Sia $f(t) = e^{pt}\cos(qt)$ oppure $f(t) = e^{pt}\sin(qt)$
  - se $p \pm iq$ non sono radici dell'equazione caratteristica $y(t) = e^{pt}(A\cos(qt) + B\sin(qt))$
  - se $p \pm iq$ sono radici dell'equazione caratteristica $y(t) = e^{pt}(A\cos(qt) + B\sin(qt))$

Equazione di Eulero

$$x^2y''(x)+bxy'(x)+cy(x)=f(x)$$

Supponiamo $x>0$ e poniamo $x=e^t$,

$$y(x)=y(e^t)=u(t)$$
$$u'(t)=y'(e^t)e^t$$
$$u''(t)=y''(e^t)e^{2t}+y'(e^t)e^t$$
$$y'(e^t)=u'(t)e^{-t}$$
$$y''(e^t)e^{2t}=u''(t)-y'(e^t)e^t=u''(t)-u'(t)e^{-t}e^t$$
$$y''(e^t)=\left[u''(t)-u'(t)\right]e^{-2t}$$

Quindi l'equazione di partenza diventa

$$e^{2t}\left[u''(t)-u'(t)\right]e^{-2t}+be^tu'(t)e^{-t}+cu(t)=f(e^t)$$
$$u''(t)+(b-1)u'(t)+cu(t)=f(t)$$

Esempi

$$x^2y''(x)+xy'(x)-y(x)=1 \quad \text{diventa}$$
$$u''(t)-u(t)=1$$
$$u(t)=Ae^t+Be^{-t}-1$$
$$y(x)=Ax+Bx^{-1}-1$$

$$x^2y''(x)-5xy'(x)+8y(x)=x^3 \quad \text{diventa}$$
$$u''(t)-6u'(t)+8u(t)=e^{3t}$$
$$u(t)=Ae^{4t}+Be^{2t}-e^{3t}$$
$$y(x)=Ax^4+Bx^2-x^3$$