Complessità del calcolo

Caso pessimo

$T_M(n) = \max\{T_M(x), |x| = n\}$
$S_M(n) = \max\{T_M(x), |x| = n\}$

Notazioni

– O-grande: limite asintotico superiore.
  Data $g(n)$, $O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c, n_0\,(c, n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 0 \leq f(n) \leq cg(n))\}$
– Ω-grande: limite asintotico inferiore.
  Data $g(n)$, $\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c, n_0\,(c, n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 0 \leq cg(n) \leq f(n))\}$
– Θ-grande: limite asintotico sia superiore sia inferiore.
  Data $g(n)$, $\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2, n_0\,(c_1, c_2, n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n))\}$

Teoremi di accelererazione lineare

– Se L è accettato da una MT M a k nastri con complessità $S_M(n)$, per ogni $c > 0 (c \in R)$ si può costruire una MT M' a k nastri con complessità $S_{M'}(n) < cS_M(n)$
– Se L è accettato da una MT M a k nastri con complessità $S_M(n)$, si può costruire una MT M' a 1 nastro (*non* a nastro singolo) con complessità $S_{M'}(n) = S_M(n)$
– Se L è accettato da una MT M a k nastri con complessità $S_M(n)$, per ogni $c > 0 (c \in R)$ si può costruire una MT M' a 1 nastro con complessità $S_{M'}(n) < cS_M(n)$
– Se L è accettato da una MT M a k nastri con complessità $T_M(n)$, per ogni $c > 0 (c \in R)$ si può costruire una MT M' (a $k+1$ nastri) con complessità $T_{M'}(n) = \max\{n+1, cT_M(n)\}$

Conseguenze pratiche

– Lo schema di dimostrazione è valido per qualsiasi tipo di modello di calcolo, quindi anche per calcolatori reali (es.: aumentare il parallelismo fisico (16bit $\rightarrow$ 32bit $\rightarrow \ldots$)).
– Aumentando la potenza di calcolo in termini di risorse disponibili si può aumentare la velocità di esecuzione, ma il miglioramento è al più lineare.
– Miglioramenti di grandezza superiore possono essere ottenuti solo cambiando algoritmo e non in modo automatico.

Macchina RAM

Glossario

– *Accumulatore*: è la prima cella del modello della memoria, indicata con `M[0]`.
– *Immediato*: è un numero intero.
– *ADD*: Sono le operazioni elementari di somma (`ADD`), sottrazione (`SUB`), moltiplicazione (`MULT`), divisione (`DIV`).

Costi Logaritmici

Il costo della copia di un numero n da una cella all'altra è tante micro-operazioni elementari quanti sono i bit necessari a codificare n, cioè $\log(n)$.
Il costo dell'accesso ad una cella di posizione n-esima è l'apertura di $\log(n)$ gate logici ad altrettanti banchi di memoria.
In forma sintetica:

$$l(i) = \textit{if } i = 0 \textit{ then } 1 \textit{ else } \lfloor \log_2 |i| \rfloor + 1$$

Teorema di correlazione polinomiale

Sotto "ragionevoli" ipotesi di criteri di costo (il criterio di costo costante per la RAM non è ragionevole) se un problema è risolvibile mediante un modello di calcolo M_1 con complessità $C_1(n)$, allora è risolvibile da qualsiasi altro modello di calcolo M_2 con complessità $C_2(n) \leq P_2(C_1(n))$, essendo P_2 un opportuno polinomio.

Comando		Operazione	Complessità	Descrizione
`LOAD`	`X`	`M[0] = M[X]`	$l(x)$	Carica in `M[0]` il contenuto della cella X
`LOAD=`	`X`	`M[0] = X`	$l(x) + l(M[x])$	Carica in `M[0]` l'immediato X
`LOAD*`	`X`	`M[0] = M[M[X]]`	$l(x) + l(M[x]) + l(M[M[x]])$	Carica in `M[0]` dall'indirizzo M[X]
`STORE`	`X`	`M[X] = M[0]`	$l(x) + l(M[0])$	Carica in `M[X]` il contenuto di M[0]
`STORE*`	`X`	`M[X] = M[M[0]]`	$l(x) + l(M[x]) + l(M[0])$	Carica in `M[X]` dall'indirizzo M[0]
`ADD`	`X`	`M[0] = M[0] + M[X]`	$l(M[0]) + l(x) + l(M[x])$	Carica in `M[0]` il risultato dell'operazione
`ADD=`	`X`	`M[0] = M[0] + X`	$l(M[0]) + l(x)$	
`ADD*`	`X`	`M[0] = M[0] + M[M[X]]`	$l(M[0]) + l(x) + l(M[x]) + l(M[M[x]])$	
`READ`	`X`	`M[X] = read()`	$l($*input value*$) + l(x)$	Salva in X il valore letto in input
`READ*`	`X`		$l($*input value*$) + l(x) + l(M[x])$	
`WRITE`	`X`	write(M[X])	$l(x) + l(M[x])$	Scrive in output il valore di X
`WRITE=`	`X`	write(X)	$l(x)$	Scrive in output l'immediato X
`WRITE*`	`X`	write(M[M[X]])	$l(x) + l(M[x]) + l(M[M[x]])$	Scrive in output l'indirizzo di X
`JUMP`	`label`	`PC= b(label)`	1	Salta alla label indicata
`JZ`	`label`	`if M[0] == 0`	$l(M[0])$	Salta alla label indicata se l'accumulatore è 0.
`JGZ`	`label`	`if M[0] > 0`	$l(M[0])$	Salta alla label indicata se l'accumulatore è maggiore di 0.
`HALT`			1	Interrompe l'esecuzione del programma.

Algoritmi

Si adotta il criterio di **costo costante** (manipoliamo numeri che non richiedono quantità di memoria molto più grandi della dimensione dell'input).
Ogni istruzione viene eseguita in un tempo costante c_i.

Complessità di un algoritmo *divide et impera*

- Si divide il problem in b sottoproblemi, ciascuno con dimensione $\frac{1}{b}$.
- Se il problema ha dimensione n piccola a sufficienza ($n < c$, c costante caratteristica del problema), esso può essere risolto in tempo costante ($\Theta(1)$).
- $D(n)$ è il costo di dividere il problema, e $C(n)$ è il costo di ricombinare i sottoproblemi. $T(n)$ è il costo per risolvere il problema totale.

$$\text{Equazione di Ricorrenza} \quad T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n < c \\ D(n) + aT(\frac{n}{b}) + C(n) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Insertion Sort

```
INSERTION-SORT(A)
    for j = 2 to A.length
        key = A[j]
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > key
        A[i+1] = A[i]
        i = i - 1
    A[i+1] = key
```

Merge Sort

```
MERGE-SORT(A, p, r)
    if p < r
        q = ⌊(p+r)/2⌋
        MERGE-SORT(A, p, q)
        MERGE-SORT(A, q+1, r)
        MERGE(A, p, q, r)

MERGE (A, p, q, r)
n1 = q-p+1
n2 = r-q
CreaArray(L[1...n1+1] e R[1...n2+1])
for i = 1 to n1
    L[i] = A[p+i-1]
for j = 1 to n2
    R[j] = A[q+j]
L[n1+1] = ∞
R[n2+1] = ∞
i = 1
j = 2
for k = p to r
    if L[i] <= R[j]
        A[k] = L[i]
        i = i+1
    else
        A[k] = R[j]
        j = j+1
```

Heapsort

```
PARENT(i)
    return ⌊i/2⌋
LEFT(i)
    return 2*i
RIGHT(i)
    return 2*i+1

MAX-HEAPIFY(A, i)
    l = LEFT(i)
    r = RIGHT(i)
    if l <= A.heapsize and A[l] > A[i]
        max = l
    else
        max = i
    if r <= A.heapsize
    and A[r] > A[max]
        max = r
    if max != i
        swap A[i] ↔ A[max]
        MAX-HEAPIFY(A, max)

BUILD-MAX-HEAP(A)
    A.heapsize = A.length
    for i = A.length/2 to 1
        MAX-HEAPIFY(A, i)

HEAPSORT(A)
    BUILD-MAX-HEAP(A)
    for i = A.length to 2
        swap A[1] ↔ A[i]
        A.heapsize = A.heapsize - 1
        MAX-HEAPIFY(A, 1)
```

Quicksort

```
QUICKSORT(A, p, r)
    if p < r
        q = PARTITION(A, p, r)
        QUICKSORT(A, p, q-1)
        QUICKSORT(A, q+1, r)

PARTITION(A, p, r)
    x = A[r]
    i = p-1
    for j = p to r-1
        if A[j] <= X
            i = i+1
            swap A[i] ↔ A[j]
    swap A[i+1] ↔ A[r]
    return i+1
```

Counting Sort

```
COUNTING-SORT(A, B, k)
    for i = 0 to k
        C[i] = 0
    for j = 1 to A.length
        C[A[j]] = C[A[j]] + 1
    for i = 1 to k
        C[i] = C[i] + C[i-1]
    for j = A.length to 1
        B[C[A[j]]] = A[j]
        C[A[j]] = C[A[j]] - 1
```

Risoluzione di ricorrenze

– Metodo della sostituzione
  – formulare un'ipotesi di soluzione
  – sostituire la soluzione nella ricorrenza, e dimostrazione (per induzione) che è in effetti una soluzione
– Teorema dell'esperto (Master Theorem)
  – Data la ricorrenza $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$, in cui $a \geq 1$, $b > 1$, $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ o $\lceil \frac{n}{b} \rceil$.
    1. se $f(n) = O\left(n^{\log_b a-\varepsilon}\right)$ per qualche $\varepsilon > 0$, allora $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$
    2. se $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$, allora $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log(n)\right)$
    3. se $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right)$ per qualche $\varepsilon > 0$, e $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ per qualche $c < 1$ e per tutti gli n grandi a sufficienza, allora $T(n) = \Theta(f(n))$
  – Se $f(n) = \Theta\left(n^k\right)$, con k una qualche costante:
    1. se $k < \log_b a \rightarrow T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$
    2. se $k = \log_b a \rightarrow T(n) = \Theta\left(n^k \log(n)\right)$
    3. se $k > \log_b a \rightarrow T(n) = \Theta\left(n^k\right)$

Strutture dati

`S` = collezione, `k` = chiave

Operazioni comuni

– `SEARCH(S, k)`
– `INSERT(S, k)`
– `DELETE(S, k)`
– `MINIMUM(S)`
– `MAXIMUM(S)`
– `SUCCESSOR(S, k)`
– `PREDECESSOR(S, k)`

Pila/Stack

– Politica **LIFO** (Last In First Out)
– `POP(S)` cancella l'elemento in cima alla pila e lo restituisce
– `PUSH(S)` aggiunge un elemento in cima alla pila
– `S.top` è l'elemento in cima alla pila
– Se può contenere al massimo n elementi, si implementa come un array di dimensione n

Code/Queue

– Politica **FIFO** (First In First Out)
– `ENQUEUE(S)` inserisce un elemento in fondo alla coda
– `DEQUEUE(S)` cancella il primo elemento dalla coda
– `S.head` è l'elemento nella coda da più tempo
– `S.tail` è la posizione dove verrà inserito il nuovo elemento

Lista doppiamente concatenata

– Ogni oggetto x della lista L è costituito da 3 attributi:
  – `key` è il contenuto
  – `next` è il puntatore all'oggetto seguente
  – `prev` è il puntatore all'oggetto precedente
– Se `x.next == nil`, `x` non ha successore
– Se `x.prev == nil`, `x` non ha predecessore
– `L.head` è il puntatore al primo elemento della lista

Costi di una lista

Search	$T(n) = O(n)$
Insert	$T(n) = O(1)$
Delete	$T(n) = O(1)$

Dizionario/Dictionary

– Supporta solo le operazioni di `INSERT`, `DELETE`, `SEARCH`
– Agli oggetti di un dizionario si accede tramite le chiavi, che sono numeri interi
– Se la cardinalità m dell'insieme delle possibili chiavi è piccola, conviene l'indirizzamento diretto, cioè un array di dimensione m dove ogni chiave k è mappata alla cella corrispondente

Costi di un dizionario

Search	$T(n) = O(1)$
Insert	$T(n) = O(1)$
Delete	$T(n) = O(1)$

Tabella Hash/Hash Table

– Ho una funzione hash $h(k) \in N$ che converte una chiave di qualsiasi tipo in un intero tra 0 e m
– Se la dimensione m della mia tabella è tale che $m \ll |U|$, ci sono sicuramente chiavi tali che $h(k_1) = h(k_2)$: in questo caso ho delle collisioni.

Concatenamento

– *Idea:* gli oggetti che vengono mappati sullo stesso slot vengono messi in una lista L concatenata, di lunghezza $|M|L| = [h(k)]|$

Search	$T(n) = \|M[h(k)]\|$	M è la hash table
Insert	$T(n) = O(1)$	$x \notin M$
Delete (1)	$T(n) = O(1)$	double-linked L
Delete (2)	$T(n) = \|M[h(k)]\|$	single-linked L

- Nel caso pessimo si ha la complessità di una ricerca in una lista di n elementi, cioè $T(n) = O(n)$.
- $\alpha = \frac{n}{m}$ è il *fattore di carico*
- $0 \leq n \leq |U| \to 0 \leq \alpha \leq \frac{|U|}{m}$

Ipotesi di hashing uniforme semplice

- Ogni chiave ha la stessa probabilità $\frac{1}{m}$ di finire in una qualsiasi delle m celle di T, indipendentemente dalle chiavi inserite. La lunghezza media di una lista è quindi:

$$E(n_j) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} n_i = \frac{n}{m} = \alpha$$

- Il tempo medio per cercare una chiave k, sia che sia presente o meno nella lista, è

$$T(n) = \Theta(1+\alpha) \to T(n) = O(1) \quad \text{(in media)}$$

Indirizzamento aperto

- La tabella contiene tutte le chiavi, senza memoria aggiuntiva $\to \alpha \leq 1$
- *Idea:* si calcola l'indice dello slot in cui memorizzare l'oggetto. Se è già occupato, se ne cerca un altro libero.
- Quando si cancella un oggetto, si inserisce nello slot un valore convenzionale come `DELETED`. La complessità dipende però dalla sequenza di ispezione della funzione di hash anzichè dal fattore di carico

Tecniche di ispezione

Introduciamo una seconda funzione di hash $h'(k)$.

- Lineare
  - $h(k,i) = (h'(k) + 1) \mod m$
  - Soffre del fenomeno dell'addensamento (clustering) primario, cioè lunghe sequenze di celle consecutive, che aumentano il tempo di ricerca
- Quadratica
  - $h(k,i) = \left(h'(k) + c_1 i + c_2 i^2\right) \mod m$
  - c_1 e $c_2 (\neq 0)$ sono costanti ausiliarie, scelte opportunamente
  - Soffre del fenomeno dell'addensamento secondario: chiavi con la stessa posizione iniziale danno luogo alla stessa sequenza d'ispezione
- Doppio hashing
  - $h(k,i) = (h_1(k) + ih_2(k))\, mod m$
  - h_1 e h_2 sono funzioni di hash ausiliarie
  - Il numero di sequenze d'ispezione è ora $\Theta(m^2)$, perchè ogni coppia $(h_1(k), h_2(k))$ produce una sequenza di ispezione distinta

Albero Binario/Binary Tree

- È composto da 3 elementi:
  - un nodo detto *radice*
  - un albero binario detto *sottoalbero sinistro*
  - un albero binario detto *sottoalbero destro*
- A ogni nodo è associata una chiave

Binary Search Tree

- Per tutti i nodi x del BST, se l è un nodo nel sottoalbero sinistro, allora `l.key` $\leq$ `x.key`; se r è un nodo del sottoalbero destro, allora `r.key` $\geq$ `x.key`

Attraversamento simmetrico/(in order)

Restituisce i nodi ordinati se l'albero è un BST:

- Prima si visita il sottoalbero sinistro e si restituiscono i suoi nodi
- Si restituisce la radice
- Si visita il sottoalbero destro e si restituiscono i suoi nodi

Successore

Il *successore* di un oggetto x in un BST è l'elemento y tale che `y.key` è la più piccola tra le chiavi che sono più grandi di `x.key`, cioè è il minimo del sottoalbero destro di x. Se il sottoalbero di x è vuoto, il successore di x è il primo elemento y che si incontra risalendo nell'albero da x tale che x è nel sottoalbero sinistro di y (salgo dai "right" finchè non risalgo da un "left")

Predecessore

Il *predecessore* di un oggetto x in un BST è l'elemento y tale che `y.key` è la più grande tra le chiavi che sono più piccole di `x.key`, cioè è il massimo del sottoalbero sinistro di x. Se il sottoalbero di x è vuoto, il predecessore di x è il primo elemento y che si incontra risalendo nell'albero da x tale che x è nel sottoalbero destro di y (salgo dai "left" finchè non risalgo da un "right")

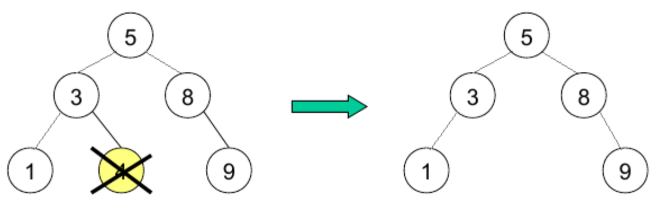
Inserimento

Scendo nell'albero finchè non si raggiunge il posto in cui il nuovo elemento deve essere inserito, e lo si aggiunge come foglia.

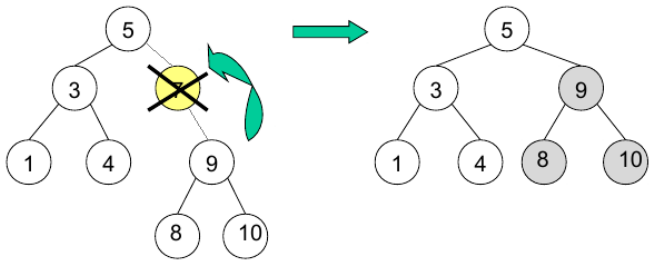
Cancellazione

Ci sono 3 possibili casi per cancellare un nodo z:

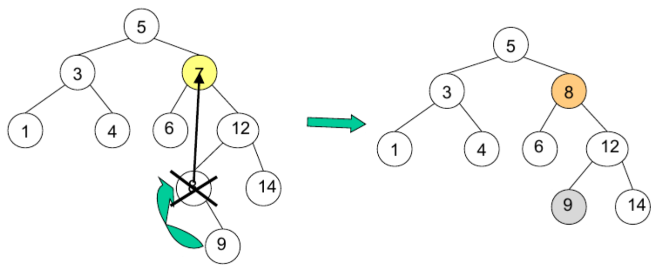
- Il nodo z non ha sottoalberi: si mette a `nil` il puntatore del padre di z
- Il nodo z ha 1 sottoalbero: bisogna spostare il sottoalbero di z in su di un livello.
- Il nodo z ha 2 sottoalberi: bisogna trovare il successore di z, copiare la chiave del successore in z e cancellare il successore.



Il nodo z non ha sottoalberi



Il nodo z ha un sottoalbero



Il nodo z ha due sottoalberi

Complessità degli alberi binari

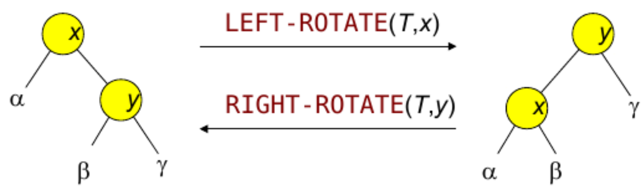
Un albero si dice *bilanciato* se per ogni nodo x le altezze dei due sottoalberi di x differiscono al massimo di 1. h è l'altezza dell'albero.

$$h = \begin{cases} \Theta(\log(n)) & \text{albero bilanciato} \\ \Theta(n) & \text{caso pessimo} \end{cases}$$

Operazione	Complessità
In-order walk	$T(n) = \Theta(n)$
Search	$T(n) = O(h)$
Max/Min	$T(n) = O(h)$
Successor	$T(n) = O(h)$
Insert	$T(n) = O(h)$
Delete	$T(n) = O(h)$

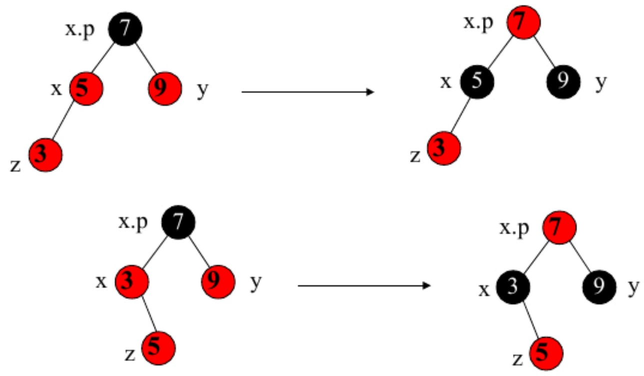
Alberi rosso-neri

- Sono BST abbastanza bilanciati, tali che $h = O(\log(n))$ ed è possibile realizzare tutte le operazioni più importanti in $T(n) = O(\log(n))$
- Un ramo non è mai più lungo del doppio di un altro
- Un BST è un albero RB se soddisfa le seguenti proprietà:
  1. Ogni nodo è *rosso* oppure *nero*
  2. La radice è necessari
  3. Le foglie (`nil`) sono tutte nere
  4. I figli di un nodo rosso sono entrambi neri
  5. Per ogni nodo x tutti i cammini da x alle foglie sue discendenti contengono lo stesso numero $bh(x)$ di nodi neri. $bh(x)$ è l'*altezza nera* del nodo x, che non viene conteggiato nella sua altezza
- Per comodità le foglie `nil` si usa un nodo sentinella `T.nil`
- Un albero RB con n nodi interni (cioè con chiavi), ha altezza $h \leq 2\log_2(n+1)$. Pertanto, `SEARCH`, `MINIMUM`, `MAXIMUM`, `SUCCESSOR`, `PREDECESSOR` richiedono tempo $T(n) = O(\log(n))$
- `INSERT` e `DELETE` sono modificate per poter rispettare le proprietà degli alberi RB, ma richiedono sempre $T(n) = O(\log(n))$
- Per realizzare inserimenti e cancellazioni si usa il meccanismo delle rotazioni, con `ROTATE-LEFT` e `ROTATE-RIGHT`

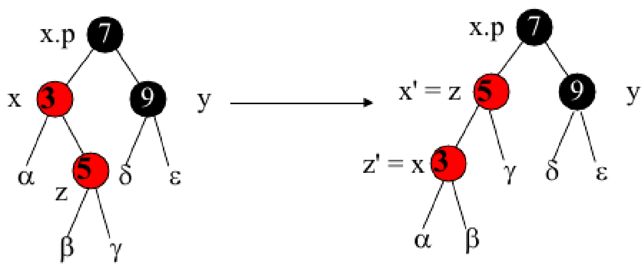


Inserimento

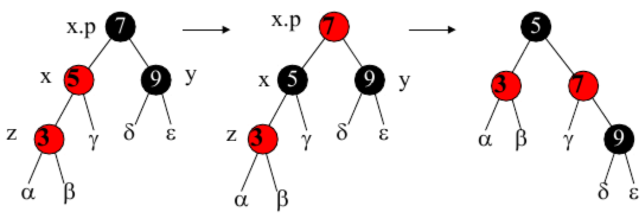
Analogo a quello dei BST, ma per ristabilire le proprietà degli alberi RB si usa `RB-INSERT-FIXUP`, che viene invocato sempre su un nodo z tale che `z.color = RED`, e al massimo $O(log(n))$ volte.



y rosso



y nero e z figlio destro di x

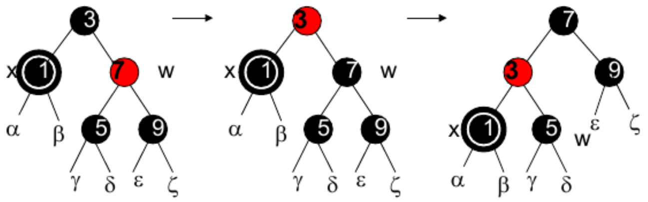


y nero e z figlio sinistro di x

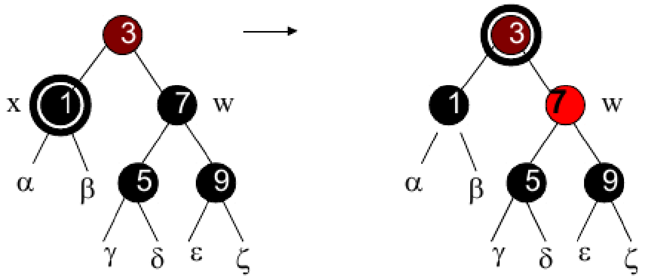
Cancellazione

Analogo a quello dei BST. Se viene cancellato un nodo rosso non c'è bisogno di modificare i colori dei nodi, e quello che prende il suo posto è per forza nero.

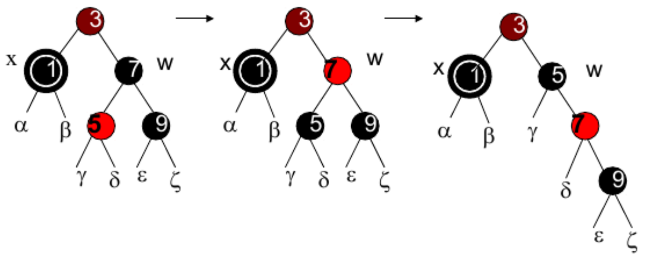
x rosso, oppure è la radice



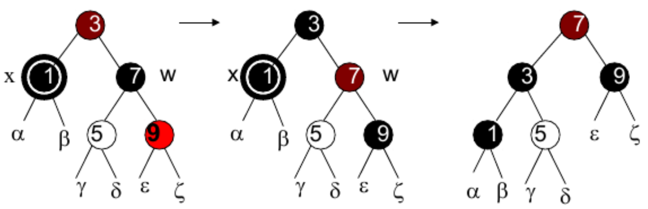
x nero, il fratello destro w è rosso, e quindi il padre è nero



x nero, il fratello destro w è nero con figli neri



x nero, il fratello destro w è nero con figlio sinistro rosso e figlio destro nero



x nero, il fratello destro w è nero con figlio destro rosso

Grafi

Un grafo è una coppia $G = (V, E)$ in cui:

- V è un insieme di nodi detti vertici
- E è un insieme di archi detti lati/edges. Un arco è una connessione fra due vertici, detti quindi adiacenti. Un arco è una coppia $(u, v) \in E \subseteq V^2$
- $|V|$ è il numero di vertici nel grafo, mentre $|E|$ è il numero di archi. Inoltre $0 \leq |E| \leq |V|^2$

I grafi esistono orientanti e *non orientati*.

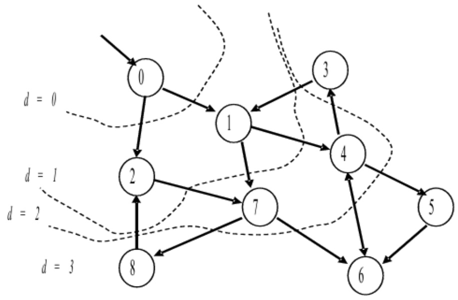
Rappresentazione in memoria

- *Liste di adiacenza*: array di liste, una per nodo. Per ogni nodo, la lista contiene i nodi adiacenti ad esso. Ha complessità spaziale $S_L = \Theta(|V| + |E|)$
- *Matrice di adiacenza*: $m_{ij} = 1$ se c'è un arco dal nodo i al nodo j, altrimenti è 0. Ha complessità spaziale $S_M = \Theta(|V|^2)$

Visita in ampiezza/Breadth-First Search

Ha complessità $T_{\text{BFS}} = O(|V| + |E|)$.

- Usa una politica FIFO (coda)
- Visito tutti i nodi a distanza 1 da s (sorgente)
- Quando visito un nodo u, salvo la sua distanza da s in un attributo `u.dist`
- Coloro i nodi che visito (*bianco* se è da visitare, *grigio* se è già stato visitato, ma bisogna completare la visita dei nodi adiacenti, *nero* dopo che abbiamo visitato tutti i suoi nodi adiacenti)
- All'inizio tutti i nodi sono bianchi tranne s che è grigio.
- I nodi da visitare sono in una coda (inizialmente solo s)
- A ogni iterazione, cancello dalla coda un elemento u e ne visitiamo i nodi adiacenti che sono ancora bianchi (la cui distanza da s sarà `u.dist+1`)



BFS

Visita in profondità/Depth-First Search

Ha complessità $T_{\text{DFS}} = O(|V| + |E|)$.

- Usa una politica LIFO (stack)
- Tiene traccia di quando un nodo è aggiunto alla pila (`u.d`) e di quando viene tolto (`u.f`)

Ordinamento Topologico

Dato un grafo orientato aciclico (DAG), un ordinamento topologico è un ordinamento lineare dei nodi del grafo tale che, se nel DAG c'è un arco (u, v), allora il nodo u precede v nell'ordinamento (cioè che le frecce "vanno solo in una direzione"). L'ordinamento ottenuto rispetta la precedenza tra nodi/eventi.

- Visito il DAG con un algoritmo DFS
- quando coloro un nodo u di nero, inserisco u in testa alla lista
- Una volta visitati tutti i nodi, ottengo un ordinamento topologico

Ha la stessa complessità di DFS, cioè $T_{\text{TS}} = O(|V| + |E|)$.

Cammini Minimi

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\left\{w(p) : u \xrightarrow{p} v\right\} & \text{se } \exists \text{ cammino } p \text{ da } u \text{ a } v \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $w : E \to R$ è la *funzione di peso*
- $d[v] = \delta(s, v)$ è detto *stima di cammino minimo* dalla sorgente s a v
  - All'inizio vale $d[v] = \infty$

  - viene ridotto col procedere dell'algoritmo, ma $d[v] \leq \delta(s, v)$
- $P_i[v]$ è il *predecessore di* v nel cammino minimo da s, se non esiste è `nil`

Rilassamento di un lato

- se $d[v] > d[u] + w(u, v)$ allora $d[v] = d[u] + w(u, v)$ e $P_i[v] = u$

Bellman-Ford

- Rilasso un passo alla volta partendo da s
- Ad ogni passo avanzo nei cammini
- Al $|V| - 1$-esimo passo sicuramente avrò toccato tutti i nodi raggiungibili
- *non* converge se ci sono cicli negativi

```
BELLMAN-FORD(adj, s)
    V = vector of nodes of adj
    allocate vectors d, Pi of size adj

    for i = 0 to |adj| - 1
        d[i] = ∞
    d[s] = 0
        repeat for |V| - 1 times
            for u in V
                for v in adj[u]
                    RELAX(u, v, adj, d, Pi)
    return [d, Pi]
```

In Order Tree Walk

```
INORDER-TREE-WALK(x)
    if x != nil
        INORDER-TREE-WALK(x.left)
        print x.key
        INORDER-TREE-WALK(x.right)
```

Tree Search

```
TREE-SEARCH(x, k)
    if x == nil or k == x.key
        return x
    if k < x.key
        return TREE-SEARCH(x.left, k)
    else
        return TREE-SEARCH(x.right, k)
```

Tree Minimum

```
TREE-MINIMUM(x)
    while x.left != nil
        x = x.left
    return x
```

Tree Maximum

```
TREE-MAXIMUM(x)
    while x.right != nil
        x = x.right
    return x
```

Tree Successor

```
TREE-SUCCESSOR(x)
    if x.right != nil
        return TREE-MINIMUM(x.right)
    y = x.p
    while y != nil and x = y.right
        x = y
        y = y.p
    return y
```

Tree Insert

```
TREE-INSERT(T, z)
    y = nil
    x = T.root
    while x != nil
        y = x
        if z.key < x.key
            x = x.left
        else x = x.right
    z.p = y
    if y == nil
        T.root = z
    else if z.key < y.key
        y.left = z
    else
        y.right = z
```

Tree Delete

y e' il nodo da eliminare, x e' quello con cui lo sostituiamo

```
TREE-DELETE(T, z)
    if z.left == nil or z.right == nil
        y = z
    else
        y = TREE-SUCCESSOR(z)
    if y.left != nil
        x = y.left
    else
        x = y.right
    if x != nil
        T.root = x
    else if y == y.p.left
        y.p.left = x
    else
        y.p.right = x
    if y != z
        z.key = y.key
    return y
```

Rotazione a sinistra

```
ROTATE-LEFT(T, z)
    y = x.right
    x.right = y.left

    if y.left != T.nil
        y.left.p = x
    y.p = x.p
    if x.p == T.nil
        T.root = y
    else if x == x.p.left
        x.p.left = y
    else
        x.p.right = y
    y.left = x
    x.p = y
```

RB Tree Insert

```
RB-TREE-INSERT(T, z)
    y = T.nil
    x = T.root
    while x != T.nil
        y = x
        if z.key < x.key
            x = x.left
        else x = x.right
    z.p = y
    if y == T.nil
        T.root = z
    else if z.key < y.key
        y.left = z
    else
        y.right = z
    z.left = T.nil
    z.right = T.nil
    z.color = RED
    RB-INSERT-FIXUP(T, z)
```

RB Insert Fixup

```
RB-INSERT-FIXUP(T, z)
    if z == T.root
        T.root.color = BLACK
    else
        x = z.p
    if x.color == RED
        if x == x.p.left
            y = x.p.right
            if y.color == RED
                x.color = BLACK
                y.color = BLACK
                x.p.color = RED
                RB-INSERT-FIXUP(T, x.p)
            else if z == x.right
                z = x
                LEFT-ROTATE(T, z)
                x = z.p
            x.color = BLACK
            x.p.color = RED
            RIGHT-ROTATE(T, x.p)
        else //...
    (come il contenuto dell'if
    associato, scabio left e right)
```

RB Delete

```
RB-DELETE(T, z)
    if z.left == T.nil
    or z.right == T.nil
        y = z
    else
        y = TREE-SUCCESSOR(z)
    if y.left != T.nil
        x = y.left
    else
        x = y.right
    x.p = y.p
    if y.p == T.nil
        T.root = x
    else if y = y.p.left
        y.p.left = x
    else
        y.p.right = x
    if y != z
        z.key = y.key
    if y.color = BLACK
        RB-DELETE-FIXUP(T,x)
    return y
```

RB Delete Fixup

```
RB-DELETE-FIXUP(T, x)
    if x.color == RED
    or x.p == T.nil
        x.color = BLACK
    else if x == x.p.right
        w = x.p.right
        if w.color == RED
            w.color = BLACK
            x.p.color = RED
            LEFT-ROTATE(T, x.p)
            w = x.p.right
        if w.left.color == BLACK
        and w.right.color == BLACK
            w.color = RED
            RB-DELETE-FIXUP(T, x.p)
        else if w.right.color == BLACK
            w.left.color = BLACK
            w.color = RED
            ROTATE-RIGHT(T, w)
            w = x.p.right
        w.color = x.p.color
        x.p.color = BLACK
        ROTATE-LEFT(T, x.p)
    else
    // come le righe 4-21, scambio
    // "left" ↔ "right"
```

Breadth First Search

```
BFS(G, s)
    for each u ∈ G.V − {s}
        u.color = WHITE
        u.dist = ∞
    s.color = GREY
    s.dist = 0
    Q = nil
    ENQUEUE(Q, s)
    while Q != nil
        u = DEQUEUE(Q)
        for each v ∈ u.Adj
            if v.color == WHITE
                v.color = GREY
                v.dist = u.dist + 1
                ENQUEUE(Q, v)
    u.color = BLACK
```

Depth First Search

```
DFS(G)
    for each u ∈ G.V
        u.color = WHITE
    time = 0
    for each u ∈ G.V
        if u.color = WHITE
            DFS-VISIT(u)

DFS-VISIT(u)
    u.color = GREY
    time = time + 1
    u.d = time
    for each v ∈ u.Adj
        if v.color = WHITE
            DFS-VISIT(v)
    u.color = BLACK
    u.f = time = time + 1
```

Ordinamento Topologico

```
TOPOLOGICAL-SORT(G)
    L = nil
    for each u ∈ G.V
        u.color = WHITE
```

```
    for each u ∈ G.V
        if u.color = WHITE
            TOPSORT-VISIT(L, u)
return L

TOPSORT-VISIT(L, u)
    u.color = GREY
    for each v ∈ u.Adj
        if v.color = WHITE
            TOPSORT-VISIT(L, v)
    ... // crea l'elemento di lista x
    x.key = u
    LIST-INSERT(L, x)
    u.color = BLACK
```