



Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores
Ayud. Irving Hernández Rosas

Proyecto III

Kevin Ariel Merino Peña¹



Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que estos proyectos se entregan de manera individual en la plataforma de google classroom.

1. Calcule la matriz de la derivadas parciales de:

Definición 1. Sea U un conjunto abierto en \mathbb{R}^n y sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Se dice que f es diferenciable en $\vec{x}_0 \in U$ si todas las derivadas parciales existen y además si el siguiente límite existe:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - T(\vec{x} - \vec{x}_0)\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$$

Donde $T = Df(\vec{x}_0) \in M_{m \times n}$ cuyos elementos son $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ con $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. Esto es

$$Df(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Es llamada matriz de las derivadas parciales o Matriz Jacobiana

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $f(x, y) = (e^x, \sin(xy))$

$$Df(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial e^x}{\partial x} & \frac{\partial e^x}{\partial y} \\ \frac{\partial \sin(xy)}{\partial x} & \frac{\partial \sin(xy)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Por definición de la matriz Jacobiana

$$Df(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} e^x & \frac{\partial e^x}{\partial y} \\ \frac{\partial \sin(xy)}{\partial x} & \frac{\partial \sin(xy)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

La derivada de e^x es la función misma (cálculo I)

$$Df(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ \frac{\partial \sin(xy)}{\partial x} & \frac{\partial \sin(xy)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Puesto que x figura como constante

$$Df(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ y \frac{\partial \sin(xy)}{\partial x} & x \frac{\partial \sin(xy)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Por regla de la cadena

$$Df(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ y \cos(xy) & x \cos(xy) \end{pmatrix}$$

Efectuando las derivadas parciales

¹Número de cuenta 317031326

b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $f(x, y) = (xe^y + \cos(y), x, x + e^y)$

$$Df(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(xe^y + \cos(y)) & \frac{\partial}{\partial y}(xe^y + \cos(y)) \\ \frac{\partial}{\partial x}x & \frac{\partial}{\partial y}x \\ \frac{\partial}{\partial x}(x + e^y) & \frac{\partial}{\partial y}(x + e^y) \end{pmatrix} \quad \text{Por definición de matriz de derivadas parciales}$$

$$Df(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} e^y \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial x}\cos(y) & x \frac{\partial}{\partial y}e^y + \frac{\partial}{\partial y}\cos(y) \\ \frac{\partial}{\partial x}x & \frac{\partial}{\partial y}x \\ \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial x}e^y & \frac{\partial}{\partial y}x + \frac{\partial}{\partial y}e^y \end{pmatrix} \quad \text{Empleamos que la derivada es lineal, abre sumas y saca escalares}$$

$$Df(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y - \sin(y) \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{pmatrix} \quad \text{Operando las derivadas}$$

c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $f(x, y, z) = (x + e^z + y, xy^2)$

$$Df(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x + e^z + y) & \frac{\partial}{\partial y}(x + e^z + y) & \frac{\partial}{\partial z}(x + e^z + y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) & \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) & \frac{\partial}{\partial z}(xy^2) \end{pmatrix} \quad \text{Definición de matriz de derivadas parciales}$$

$$Df(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial x}e^z + \frac{\partial}{\partial x}y & \frac{\partial}{\partial y}x + \frac{\partial}{\partial y}e^z + \frac{\partial}{\partial y}y & \frac{\partial}{\partial z}x + \frac{\partial}{\partial z}e^z + \frac{\partial}{\partial z}y \\ y^2 \frac{\partial}{\partial x}x & x \frac{\partial}{\partial y}y^2 & \frac{\partial}{\partial z}(xy^2) \end{pmatrix} \quad \text{Usamos que la derivada es un operador lineal}$$

$$Df(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & e^z \\ y^2 & 2xy & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Efectuando las derivadas parciales}$$

d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $f(x, y, z) = (xye^{xy}, x \sin(y), 5xy^2)$

$$Df(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}xye^{xy} & \frac{\partial}{\partial y}xye^{xy} & \frac{\partial}{\partial z}xye^{xy} \\ \frac{\partial}{\partial x}x \sin(y) & \frac{\partial}{\partial y}x \sin(y) & \frac{\partial}{\partial z}x \sin(y) \\ \frac{\partial}{\partial x}5xy^2 & \frac{\partial}{\partial y}5xy^2 & \frac{\partial}{\partial z}5xy^2 \end{pmatrix} \quad \text{Definición de matriz de derivadas parciales}$$

$$Df(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} y \frac{\partial}{\partial x}e^{xy}x & x \frac{\partial}{\partial y}ye^{xy} & \frac{\partial}{\partial z}xye^{xy} \\ \sin(y) \frac{\partial}{\partial x}x & x \frac{\partial}{\partial y}\sin(y) & \frac{\partial}{\partial z}x \sin(y) \\ 5y^2 \frac{\partial}{\partial x}x & 5x \frac{\partial}{\partial y}y^2 & \frac{\partial}{\partial z}5xy^2 \end{pmatrix} \quad \text{Empleando que la derivada es operador lineal}$$

$$Df(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} y(e^{yx} + xye^{xy}) & x(e^{xy} + xye^{xy}) & 0 \\ \sin(y) & x \cos(y) & 0 \\ 5y^2 & 10xy & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Operando las dervidas parciales}$$

2. Sea $f(x, y) = xe^{y^2} - ye^{x^2}$

Definición 2 (Plano tangente). Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$. El plano tangente en \mathbb{R}^3 definido por la ecuación

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0)$$

Es llamado plano tangente a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0)

a) Encuentre el plano tangente a la gráfica de f en $(1, 2)$

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0) \quad \text{Planteando la ecuación}$$

$$z = f(1, 2) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) \right] (x - 1) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) \right] (y - 2) \quad \text{Observemos que } x_0 = 1, y_0 = 2$$

$$z = (e^4 - 2e) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) \right] (x - 1) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) \right] (y - 2) \quad \text{Evaluando } f(1, 2)$$

$$z = (e^4 - 2e) + \left[\frac{\partial}{\partial x}(xe^{y^2} - ye^{x^2}) \right] \Big|_{(1,2)} (x - 1) + \left[\frac{\partial}{\partial y}(xe^{y^2} - ye^{x^2}) \right] \Big|_{(1,2)} (y - 2) \quad \text{Cambiando regla de correspondencia de } f$$

$$z = (e^4 - 2e) + \left[e^{y^2} - 2e^{x^2}xy \right] \Big|_{(1,2)} (x - 1) + \left[2xe^{y^2}y - e^{x^2} \right] \Big|_{(1,2)} (y - 2) \quad \text{Con las parciales de } f$$

$$z = (e^4 - 2e) + (-4e + e^4)(x - 1) + (4e^4 - e)(y - 2) \quad \text{Evaluando en el punto dado}$$

$$z = e^4 - 2e + -4ex + e^4x + 4e - e^4 + 4e^4y - ey - 8e^4 + 2e \quad \text{Por distributividad}$$

$$z = (e^4 - 4e)x + (4e^4 - e)y - 8e^4 + 4e \quad \text{Agrupando términos semejantes}$$

b) ¿Qué punto sobre la superficie $z = x^2 - y^2$, tiene un plano tangente paralelo al plano tangente encontrado en la primer parte?

Notemos que $\vec{n} = (e^4 - 4e, 4e^4 - e, -1)$ es un vector normal en el plano del ejercicio anterior.

Empleando $z = x^2 - y^2$ definamos una nueva función $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(x, y) = x^2 - y^2$.

Por otra parte, veamos que en (x_0, y_0) la normal al plano tangente en el punto $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ está definido como

$$\vec{m} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$$

Esto último significa que nos fijaremos en los puntos (x_0, y_0) que cumplan

$$\vec{m} = \alpha \vec{n}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, ahora obtengamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \alpha(e^4 - 4e)$$

Por que estamos buscando puntos de esta forma

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \alpha(4e^4 - e)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = (x^2)'$$

Por definición de g

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = (-y^2)'$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x$$

Aplicando la derivada

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = -2y$$

Así, los puntos (x_0, y_0) que buscamos son de la forma

$$(x_0, y_0) = \frac{\alpha}{2}(e^4 - 4e, e - 4e^4) \iff (x_0, y_0) = \alpha(e^4 - 4e, e - 4e^4)$$

Tomemos $\alpha = 1$ entonces tenemos el punto

$$(e^4 - 4e, e - 4e^4, -15e^2(e^6 - 1))$$

3. Calcule el gradiente de las siguientes funciones:

a) $f(x, y, z) = xe^{-(x^2+y^2+z^2)}$

b) $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$

c) $f(x, y, z) = z^2 e^x \cos(y)$

4. Haga un bosquejo de las curvas que son las imágenes de las siguientes trayectorias:

a) $\vec{\gamma}(t) = (\sin(t), 4\cos(t))$, donde $0 \leq t \leq 2\pi$

b) $\vec{\gamma}(t) = (2\sin(t), 4\cos(t))$, donde $0 \leq t \leq 2\pi$

c) $\vec{\gamma}(t) = (t\sin(t), t\cos(t), t)$, donde $-4\pi \leq t \leq 4\pi$

5. El vector de posición para una partícula que se mueve sobre una hélice es:

$$\vec{\gamma}(t) = (\sin(t), \cos(t), t^2)$$

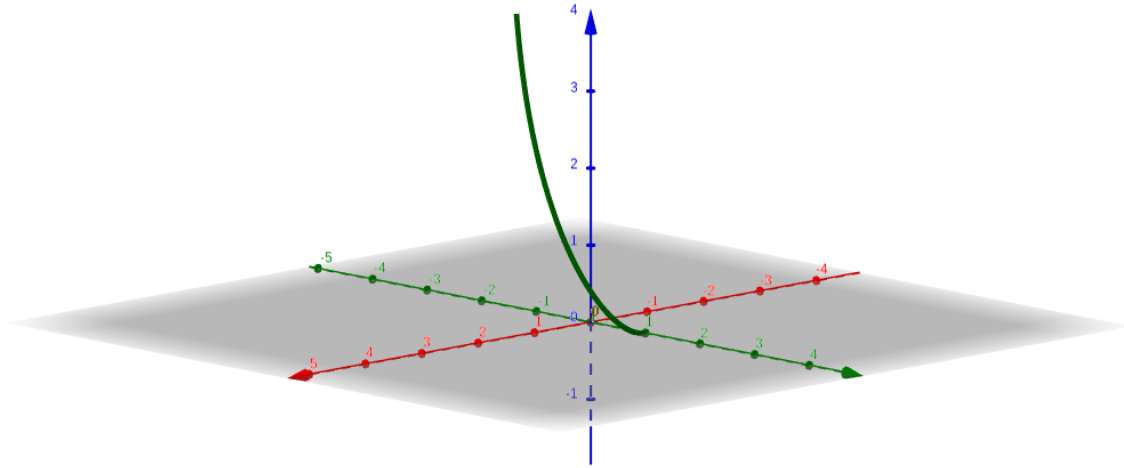


Figura 1: Curva trazada por $\vec{\gamma}$

Definición 3 (Vector velocidad). Si $\vec{\gamma}$ es una trayectoria es diferenciable, decimos que $\vec{\gamma}$ es una trayectoria diferenciable. El vector velocidad de $\vec{\gamma}$ en el tiempo t es definido por:

$$\vec{\gamma}' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\gamma}(t+h) - \vec{\gamma}(t)}{h}$$

Normalmente se dibuja el vector $\vec{\gamma}'(t)$ con la cola en el punto $\vec{\gamma}(t)$. Si $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$, en \mathbb{R}^2 , entonces:

$$\vec{\gamma}'(t) = (x'(t), y'(t)) = x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j}$$

y si

$$\vec{\gamma}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j} + z'(t)\hat{k}$$

Definición 4 (Rapidez). La rapidez de la trayectoria $\vec{\gamma}(t)$ es $s = \|\vec{\gamma}'(t)\|$, es decir la longitud del vector velocidad

Definición 5 (Vector tangente). La velocidad $\vec{\gamma}'(t)$ es una recta tangente a la trayectoria $\vec{\gamma}(t)$ en el tiempo t si C es una curva trazada por $\vec{\gamma}(t)$ si $\vec{\gamma}'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \text{Dominio de } \vec{\gamma}$, entonces $\vec{\gamma}'(t)$ es un vector tangente a la curva C en el punto $\vec{\gamma}(t)$

a) Encuentre la rapidez de la partícula en el tiempo $t_0 = 4\pi$
Para ello, primero hallemos el vector velocidad

$$\vec{\gamma}'(t_0) = (\sin'(t), \cos'(t), (t^2)')$$

$$\vec{\gamma}'(t_0) = (\cos(t), -\sin(t), 2t)$$

$$\vec{\gamma}'(4\pi) = (\cos(4\pi), -\sin(4\pi), 2 \cdot 4\pi)$$

$$\vec{\gamma}'(4\pi) = (\cos(0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi), -\sin(4\pi), 8\pi)$$

Por definición de velocidad

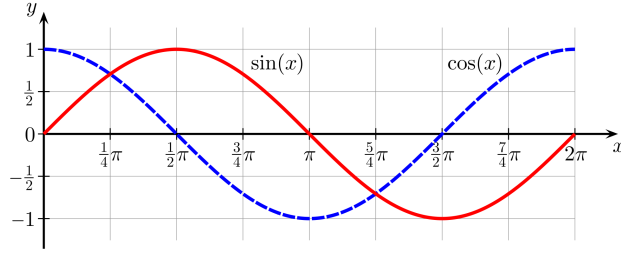
Aplicando la derivada

Sustituyendo el valor de t_0

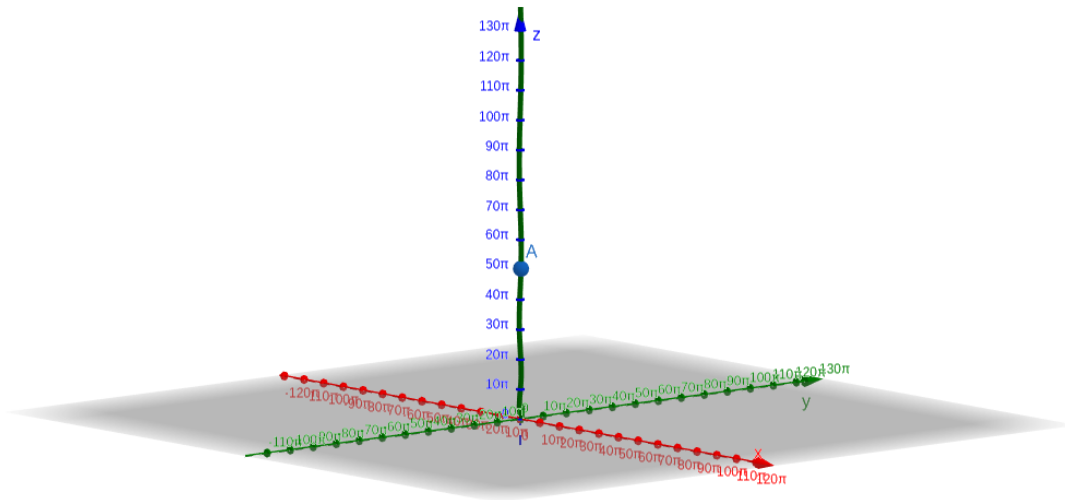
Multiplicando escalares

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}'(4\pi) &= (\cos(0), -\sin(4\pi), 8\pi) \\ \vec{\gamma}'(4\pi) &= (\cos(0), -\sin(0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi), 8\pi) \\ \vec{\gamma}'(4\pi) &= (1, -\sin(0), 8\pi) \\ \vec{\gamma}'(4\pi) &= (1, 0, 8\pi) \\ \|\vec{\gamma}'(4\pi)\| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + (8\pi)^2} \\ \|\vec{\gamma}'(4\pi)\| &= \sqrt{1 + 8^2\pi^2} \\ \|\vec{\gamma}'(4\pi)\| &= \sqrt{1 + 64\pi^2} \\ 3 &< \pi \\ 24 &< 8\pi \\ 24 &< \sqrt{8^2\pi^2} \\ 24 &< \sqrt{8^2\pi^2} < \sqrt{1 + 8^2\pi^2} \\ 24 &< \sqrt{1 + 8^2\pi^2} \\ 1 + 8^2\pi^2 &< 676 \\ \sqrt{1 + 8^2\pi^2} &< \sqrt{676} \\ \sqrt{1 + 8^2\pi^2} &< 26 \\ 24 &< \sqrt{1 + 8^2\pi^2} < 26 \\ \|\vec{\gamma}'(4\pi)\| &\approx 25,1526\end{aligned}$$

De cálculo I tenemos que $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos(\alpha)$
Reacomodando el valor de sin
De cálculo I tenemos que $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin(\alpha)$
Finalmente obtenemos
Por definición de norma
Propiedades de los exponentes
Elevando al cuadrado 8
Por definición de π
Por propiedades de $<$
Pues $8^2\pi^2 > 0$
Ya que al menos distan una unidad
Transitividad de la desigualdad
Por curso de cálculo I
La raíz cuadrada es continua
Por el valor de dicha raíz
Por transitividad
Aproximando el resultado



(a) Recordemos las gráficas de $\sin(x)$, $\cos(x)$



(b) Localización del punto A que es $\vec{\gamma}(4\pi)$

b) ¿Es $\vec{\gamma}$ es ortogonal a $\vec{\gamma}'$?

Definición 6 (Vector ortogonal). Sean $\vec{x}, \vec{y} \in V$ decimos que \vec{x} es ortogonal a \vec{y} si y sólo si $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(t) &= (\sin(t), \cos(t), t^2) && \text{Recordatorio} \\ \vec{\gamma}'(t) &= (\cos(t) - \sin(t), 2t) && \text{Recordatorio}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \vec{\gamma}, \vec{\gamma}' \rangle &= \langle (\sin(t), \cos(t), t^2), (\cos(t) - \sin(t), 2t) \rangle && \text{Por recordatorio anterior} \\ \langle \vec{\gamma}, \vec{\gamma}' \rangle &= \sin(t) \cdot \cos(t) + \cos(t) \cdot (-\sin(t)) + 2t \cdot t^2 && \text{Por definición de producto escalar} \\ \langle \vec{\gamma}, \vec{\gamma}' \rangle &= \sin(t) \cos(t) - \sin(t) \cos(t) + 2t^3 && \text{Multiplicando términos semejantes} \\ \langle \vec{\gamma}, \vec{\gamma}' \rangle &= 2t^3 && \text{Existencia del inverso aditivo en } \mathbb{R}\end{aligned}$$

Notemos que $2t^3 = 0$
Esto sólo ocurre cuando $t = 0 \therefore \vec{\gamma}'$ sólo es ortogonal a $\vec{\gamma}$ en $t = 0$

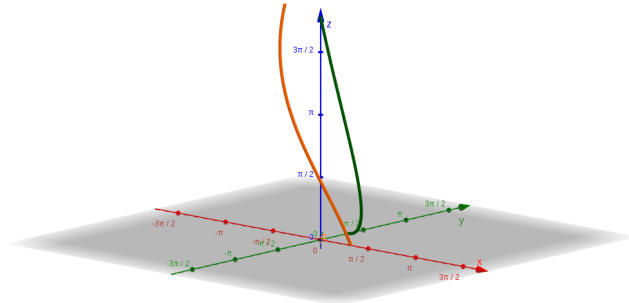


Figura 3: Claramente ambos vectores no son ortogonales

c) Encuentre la recta tangente a $\vec{\gamma}(t_0)$, $t_0 = 4\pi$

Definición 7 (Recta tangente). Si $\vec{\gamma}(t)$ es una trayectoria en \mathbb{R}^3 (i.e. $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$) con $\vec{\gamma}'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, entonces la ecuación de la recta tangente en t_0 es

$$\ell(t) = \vec{\gamma}'(t_0)(t - t_0) + \vec{\gamma}(t_0)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\ell(t) &= (1, 0, 8\pi)(t - 4\pi) + (0, 1, 16\pi^2) && \text{Por el inciso a)} \\ \ell(t) &= (t - 4\pi, 0, 8\pi t - 32\pi^2) + (0, 1, 16\pi^2) && \text{Por distributividad} \\ \ell(t) &= (t - 4\pi, 1, 8\pi t - 32\pi^2 + 16\pi^2) && \text{Sumando de manera directa} \\ \ell(t) &= (t - 4\pi, 1, 8\pi(t - 2\pi)) && \text{Factorizando}\end{aligned}$$

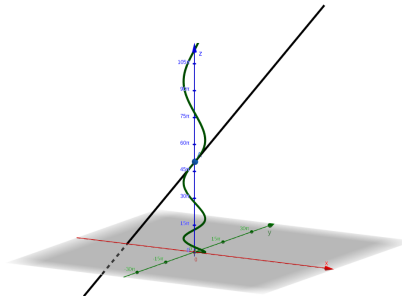


Figura 4: Ajustando los ejes un poco podemos apreciar que efectivamente se trata de la recta tangente

d) ¿Dónde se intersecará esta línea con el plano xy ?

Tomemos en cuenta $\ell(t) = (x(t), y(t), 0)$ entonces lo único que tenemos que resolver es

$$8\pi(t - 2\pi) = 0$$

$$t - 2\pi = 0$$

$$t = 2\pi$$

Planteando la ecuación

Multiplicando por el inverso multiplicativo de 8π

Añadiendo en ambos miembros 2π

es decir, hay que evaluar $\ell(t_0)$ en $t_0 = 2\pi$, esto es $B = (-2\pi, 1, 0)$

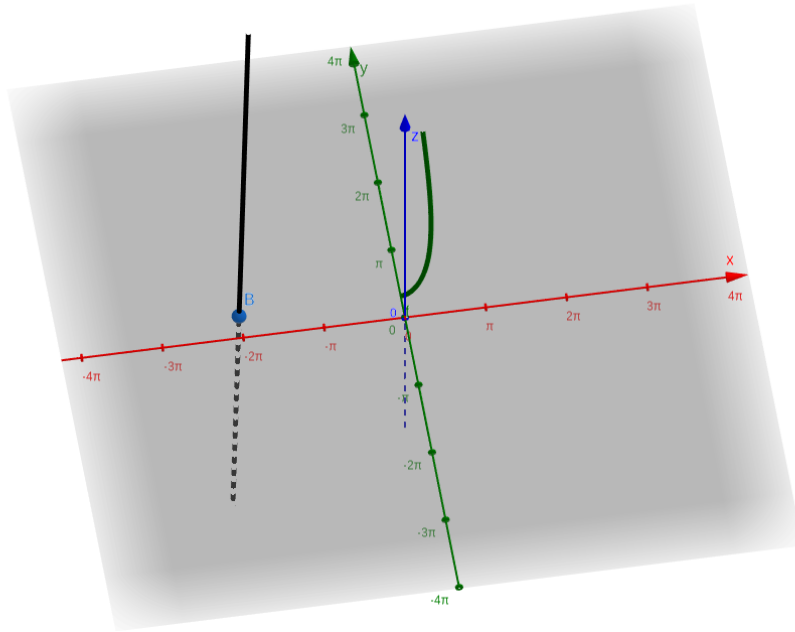


Figura 5: Se puede observar que efectivamente, la recta ℓ interseca al plano xy en B