Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Proyecto III

Kevin Ariel Merino Peña[1]

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que estos proyectos se entregan de manera individual en la plataforma de google classroom.

1. Muestre que los siguientes conjuntos del plano son abiertos:

Definición 1. Sea $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $r \in \mathbb{R}^+$, la **bola** de radio r y centro en $\vec{x}_0$ es definida por el conjunto de todos los puntos $\vec{x}$ tal que $||\vec{x} - \vec{x}_0|| < r$.
Este conjunto es denotado como $Br(\vec{x}_0)$ es el conjunto de los puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ cuya distancia de $\vec{x}_0$ es menor que r

Definición 2. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que U es **conjunto abierto** si para cada $\vec{x}_0$, existe algún $r > 0$ tal que $Br(\vec{x}_0)$ está totalmente contenida en U, $Br(\vec{x}_0) \subset U$

$$\text{a) } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$$

$$\text{b) } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, 0 < y\}$$

$$\text{c) } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, 2 < x^2 + y^2 < 4\}$$

2. Calcule los siguientes. límites si existen:

Definición 3. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\vec{x}_0 \in A$, un punto de acumulación de A. Entonces se dice qe el límite de $f(\vec{x})$, cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{x}_0$, es $\vec{l} \in \mathbb{R}^m$ y se denota

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} = \vec{l} \qquad \text{o } f(\vec{x}) \to \vec{l}$$

Si $\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0$ tal que $\vec{x} \to \vec{x}_0$

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{x^2y^2}$
Resultará conveniente recordar de nuestro curso de Matemáticas para las ciencias aplicadas I que

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{cos(\alpha) - 1}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}$$

. Entonces tomemos el siguiente cambio de variable $\alpha = xy$ y por el recordatorio anterior, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{x^2y^2} = -\frac{1}{2}$$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$
Para este segundo ejercicio, tomemos un cambio de variable $y = \sqrt{r}$ y $x = \sqrt{r}$ entonces $xy = r$ por lo que

$$\text{b) } \lim_{(r \to 0} \frac{\sin(r)}{r}$$

Y de nuestro curso de Matemáticas para las ciencias aplicadas I tenemos que $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} \frac{sin(\alpha)}{\alpha} = 1$, por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$$

---

[1] 317031326

c) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2, e^x)$

Tenemos un teorema enunciado en clase sobre las propiedades de los límites, una de ellas dice:

Definición 4. Si $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$ donde $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ son las componentes de la función de f, entonces

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$$

si y sólo si

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = l_i$$

para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$

entonces si

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}(x^2, e^x) &= \left(\lim_{x\to 1} x^2, \lim_{x\to 1} e^x\right)\\
\lim_{x\to 1}(x^2, e^x) &= \left((1)^2, e^1\right)\\
\lim_{x\to 1}(x^2, e^x) &= (1, e)
\end{aligned}$$

3. Usando la formulación ϵ-δ muestre:

a) $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

c) $$\lim_{x\to 2}(3x, x^2) = (6, 4)$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{|x|^3 + y^2} & : \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Muestre que f es continua en $(0,0)$ Para averiguar quién es el límite, tomémonos traectorias distintas.
Deifinimos $y = g(x) = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, g(x))\\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, 0)\\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2}\\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(0)}{|x|^3 + (0)^2}\\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= 0
\end{aligned}$$

Por otra parte, definamos $y = g(x) = x$ por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,g(x))$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x)$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{|x|^3 + x^2}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2\left(\frac{|x|^3}{x^2} + 1\right)}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{|x|^3}{x^2} + 1}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{\lim_{x\to 0} x}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{|x|^3}{x^2} + 1\right)}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{\lim_{x\to 0} x}{\lim_{x\to 0} \frac{3|x|^2|x|'}{2x} + 1} \qquad \text{Aplicando ley de L'Hôpital}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{\lim_{x\to 0} x}{\frac{3}{2}\lim_{x\to 0} \frac{|x|^2}{x} \cdot \lim_{x\to 0} |x|' + 1} \qquad \text{Por la regla del producto}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{\lim_{x\to 0} x}{\frac{3}{2} \cdot 0\{-1,1\} + 1} \qquad \text{Por definición de la derivada del valor absoluto}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{\lim_{x\to 0} x}{1}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Sea $\epsilon > 0$, consideremos $||f(x,y) - l||$, donde $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{|x|^3 + y^2}$ y $l = 0$, entonces

$$\left|\left|\frac{x^2y}{|x|^3 + y^2} - 0\right|\right| = \left|\frac{x^2y}{|x|^3 + y^2}\right| \leq \left|\frac{x^2y}{x^2}\right|$$

luego, veamos que $\left|\dfrac{x^2y}{x^2}\right| = |y| = \sqrt{y^2}$ y como $0 \leq y^2 \leq y^2 + x^2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^2y}{|x|^3+y^2}\right| &\leq |y| = \sqrt{y^2} \\
\left|\frac{x^2y}{|x|^3+y^2}\right| &\leq \sqrt{y^2} \\
\left|\frac{x^2y}{|x|^3+y^2}\right| &\leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \\
\left|\frac{x^2y}{|x|^3+y^2}\right| &\leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} && \text{Puesto que } \sqrt{x^2+y^2} = ||(x,y)|| \\
\left|\frac{x^2y}{|x|^3+y^2}\right| &\leq \sqrt{y^2} \leq ||(x,y)|| < \epsilon && \text{Por hipótesis} \\
\left|\frac{x^2y}{|x|^3+y^2}\right| &\leq ||(x,y)|| < \epsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto, basta tomar $\delta = \epsilon$