



Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores
Ayud. Irving Hernández Rosas

Proyecto III

Kevin Ariel Merino Peña¹



Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que estos proyectos se entregan de manera individual en la plataforma de google classroom.

1. Muestre que los siguientes conjuntos del plano son abiertos:

Definición 1. Sea $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $r \in \mathbb{R}^+$, la **bola** de radio r y centro en \vec{x}_0 es definida por el conjunto de todos los puntos \vec{x} tal que $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r$.

Este conjunto es denotado como $Br(\vec{x}_0)$ es el conjunto de los puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ cuya distancia de \vec{x}_0 es menor que r

Definición 2. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que U es **conjunto abierto** si para cada \vec{x}_0 , existe algún $r > 0$ tal que $Br(\vec{x}_0)$ está totalmente contenida en U , $Br(\vec{x}_0) \subset U$

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y\}$

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < x^2 + y^2 < 4\}$

2. Calcule los siguientes. límites si existen:

Definición 3. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\vec{x}_0 \in A$, un punto de acumulación de A . Entonces se dice que el límite de $f(\vec{x})$, cuando \vec{x} tiende a \vec{x}_0 , es $\vec{l} \in \mathbb{R}^m$ y se denota

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{l} \quad \text{o} \quad f(\vec{x}) \rightarrow \vec{l}$$

Si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$

Definición 4. Si $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$ donde $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, m\}$ son las componentes de la función de f , entonces

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = (l_1, l_2, \dots, l_m)$$

si y sólo si

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = l_i$$

para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 y^2}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2, e^x)$

3. Usando la formulación ϵ - δ muestre:

¹317031326

a) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x, x^2) = (6, 4)$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2} & : \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Muestre que f es continua en $(0, 0)$