Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Proyecto III

Kevin Ariel Merino Peña[1]

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que estos proyectos se entregan de manera individual en la plataforma de google classroom.

1. Calcule la matriz de la derivadas parciales de:

Definición 1. Ses U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f es diferenciable en $\vec{x_0} \in U$ si todas las derivadas parciales existen y además si el siguiente límite existe:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \frac{||f(\vec{x}) - f(\vec{x_0}) - T(\vec{x} - \vec{x_0})||}{||\vec{x} - \vec{x_0}||} = 0$$

Donde $T = Df(\vec{x_0}) \in M_{mxn}$ cuyos elementos son $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ con $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. Esto es

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Es llamada matriz de las derivadas parciales o Matriz Jacobiana

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $f(x, y) = (e^x, \sin(xy))$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial e^x}{\partial x} & \frac{\partial e^x}{\partial y} \\ \frac{\partial \sin(xy)}{\partial x} & \frac{\partial \sin(xy)}{\partial y} \end{pmatrix}$$ Por definición de la matriz Jacobiana

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} e^x & \frac{\partial e^x}{\partial y} \\ \frac{\partial \sin(xy)}{\partial x} & \frac{\partial \sin(xy)}{\partial y} \end{pmatrix}$$ La derivada de e^x es la función misma (cálculo I)

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ \frac{\partial \sin(xy)}{\partial x} & \frac{\partial \sin(xy)}{\partial y} \end{pmatrix}$$ Puesto que x figura como constante

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ y\frac{\partial \sin(xy)}{\partial x} & x\frac{\partial \sin(xy)}{\partial y} \end{pmatrix}$$ Por regla de la cadena

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \end{pmatrix}$$ Efectuando las derivadas parciales

---

[1]Número de cuenta 317031326

b) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $f(x,y) = (xe^y + \cos(y), x, x + e^y)$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(xe^y + \cos(y)) & \dfrac{\partial}{\partial y}(xe^y + \cos(y)) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}x & \dfrac{\partial}{\partial y}x \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(x + e^y) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x + e^y) \end{pmatrix}$$ Por definición de matriz de derivadas parciales

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} e^y\dfrac{\partial}{\partial x}x + \dfrac{\partial}{\partial x}\cos(y) & x\dfrac{\partial}{\partial y}e^y + \dfrac{\partial}{\partial y}\cos(y) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}x & \dfrac{\partial}{\partial y}x \\ \dfrac{\partial}{\partial x}x + \dfrac{\partial}{\partial x}e^y & \dfrac{\partial}{\partial y}x + \dfrac{\partial}{\partial y}e^y \end{pmatrix}$$ Empleamos que la derivada es lineal, abre sumas y saca escalares

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y - \sin(y) \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{pmatrix}$$ Operando las derivadas

c) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $f(x,y,z) = (x + e^z + y, xy^2)$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(x + e^z + y) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x + e^z + y) & \dfrac{\partial}{\partial z}(x + e^z + y) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(xy^2) & \dfrac{\partial}{\partial y}(xy^2) & \dfrac{\partial}{\partial z}(xy^2) \end{pmatrix}$$ Definición de matriz de derivadas parciales

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}x + \dfrac{\partial}{\partial x}e^z + \dfrac{\partial}{\partial x}y & \dfrac{\partial}{\partial y}x + \dfrac{\partial}{\partial y}e^z + \dfrac{\partial}{\partial y}y & \dfrac{\partial}{\partial z}x + \dfrac{\partial}{\partial z}e^z + \dfrac{\partial}{\partial z}y \\ y^2\dfrac{\partial}{\partial x}x & x\dfrac{\partial}{\partial y}y^2 & \dfrac{\partial}{\partial z}(xy^2) \end{pmatrix}$$ Usamos que la derivada es un operador lineal

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & e^z \\ y^2 & 2xy & 0 \end{pmatrix}$$ Efectuando las derivadas parciales

d) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $f(x,y,z) = (xye^{xy}, x\sin(y), 5xy^2)$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}xye^{xy} & \dfrac{\partial}{\partial y}xye^{xy} & \dfrac{\partial}{\partial z}xye^{xy} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}x\sin(y) & \dfrac{\partial}{\partial y}x\sin(y) & \dfrac{\partial}{\partial z}x\sin(y) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}5xy^2 & \dfrac{\partial}{\partial y}5xy^2 & \dfrac{\partial}{\partial z}5xy^2 \end{pmatrix}$$ Definición de matriz de derivadas parciales

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} y\dfrac{\partial}{\partial x}e^{xy}x & x\dfrac{\partial}{\partial y}ye^{xy} & \dfrac{\partial}{\partial z}xye^{xy} \\ \sin(y)\dfrac{\partial}{\partial x}x & x\dfrac{\partial}{\partial y}\sin(y) & \dfrac{\partial}{\partial z}x\sin(y) \\ 5y^2\dfrac{\partial}{\partial x}x & 5x\dfrac{\partial}{\partial y}y^2 & \dfrac{\partial}{\partial z}5xy^2 \end{pmatrix}$$ Empleando que la derivada es operador lineal

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} y(e^{yx}+xye^{xy}) & x(e^{xy}+xye^{xy}) & 0 \\ \\ \sin(y) & x\cos(y) & 0 \\ \\ 5y^2 & 10xy & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Operando las dervidas parciales}$$

2. Sea $f(x,y) = xe^{y^2} - ye^{x^2}$

Definición 2 (Plano tangente)**.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\vec{x_0} = (x_0, y_0)$. El plano tangente en $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación

$$z = f(x_0,y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x-x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y-y_0)$$

Es llamado plano tangente a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0)

a) Encuentre el plano tangente a la gráfica de f en $(1,2)$

$$\begin{aligned}
&z = f(x_0,y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x-x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y-y_0) && \text{Planteando la ecuación}\\
&z = f(1,2) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\right](x-1) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right](y-2) && \text{Observemos que } x_0 = 1, y_0 = 2\\
&z = (e^4-2e) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\right](x-1) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right](y-2) && \text{Evaluando } f(1,2)\\
&z = (e^4-2e) + \left[\frac{\partial}{\partial x}(xe^{y^2} - ye^{x^2})\right]\Big|_{(1,2)}(x-1) + \left[\frac{\partial}{\partial y}(xe^{y^2} - ye^{x^2})\right]\Big|_{(1,2)}(y-2) && \text{Cambiando regla de correspondencia de } f\\
&z = (e^4-2e) + \left[e^{y^2} - 2e^{x^2}xy\right]\Big|_{(1,2)}(x-1) + \left[2xe^{y^2}y - e^{x^2}\right]\Big|_{(1,2)}(y-2) && \text{Con las parciales de } f\\
&z = (e^4-2e) + (-4e+e^4)(x-1) + (4e^4-e)(y-2) && \text{Evaluando en el punto dado}\\
&z = e^4 - 2e + -4ex + e^4x + 4e - e^4 + 4e^4y - ey - 8e^4 + 2e && \text{Por distributividad}\\
&z = (e^4-4e)x + (4e^4-e)y - 8e^4 + 4e && \text{Agrupando términos semejantes}
\end{aligned}$$

b) ¿Qué punto sobre la superficie $z = x^2 - y^2$, tiene un plano tangente paralelo al plano tangente encontrado en la primer parte?

Notemos que $\vec{n} = (e^4-4e, 4e^4-e, -1)$ es un vector normal en el plano del ejericicio anterior.
Empleando $z = x^2 - y^2$ definamos una nueva función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $g(x,y) = x^2 - y^2$.
Por otra parte, veamos que en (x_0, y_0) la normal al plano tangente en el punto $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ está definido como

$$\vec{m} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$$

Esto último significa que nos fijaremos en los puntos (x_0, y_0) que cumplan

$$\vec{m} = \alpha\vec{n}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, ahora obtengamos las derivadas parciales

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = \alpha(e^4-4e) && \text{Por que estamos buscando puntos de esta forma}\\
&\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = \alpha(4e^4-e)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = (x^2)' \qquad \text{Por definición de } g$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = (-y^2)'$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x \qquad \text{Aplicando la derivada}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = -2y$$

Así, los puntos (x_0, y_0) que buscamos son de la forma

$$(x_0, y_0) = \frac{\alpha}{2}(e^4 - 4e, e - 4e^4) \iff (x_0, y_0) = \alpha(e^4 - 4e, e - 4e^4)$$

Tomemos $\alpha = 1$ entonces tenemos el punto

$$(e^4 - 4e, e - 4e^4, -15e^2(e^6 - 1))$$

3. Calcule el gradiente de las siguientes funciones:

Definición 3 (Gradiente)**.** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definimos al gradiente de f como

$$\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

a) $f(x, y, z) = xe^{-(x^2+y^2+z^2)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{-(x^2+y^2+z^2)}) \qquad \text{Planteando la derivada parcial con respecto a } x$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{\partial}{\partial x}e^{-(x^2+y^2+z^2)} + e^{-(x^2+y^2+z^2)}\frac{\partial}{\partial x}x \qquad \text{Por la derivada de productos}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{\partial}{\partial x}e^{-(x^2+y^2+z^2)} + e^{-(x^2+y^2+z^2)} \qquad \text{Por neutro multiplicativo}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = xe^{-(x^2+y^2+z^2)} - 2x + e^{-(x^2+y^2+z^2)} \qquad \text{Por la regla de la cadena}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x^2e^{-(x^2+y^2+z^2)} + e^{-(x^2+y^2+z^2)} \qquad \text{Conmutantando}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-(x^2+y^2+z^2)}(-2x^2 + 1) \qquad \text{Factorizando}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{-(x^2+y^2+z^2)}) \qquad \text{Planteando la derivada parcial}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial y}e^{-(x^2+y^2+z^2)} \qquad \text{Empleando que la derivada es lineal}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{-(x^2+y^2+z^2)} - 2y \qquad \text{Por la regla de la cadena}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2yxe^{-(x^2+y^2+z^2)} \qquad \text{Conmutando el producto}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(xe^{-(x^2+y^2+z^2)}) \qquad \text{Planteando la derivada parcial}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = x\frac{\partial}{\partial z}e^{-(x^2+y^2+z^2)} \qquad \text{Porque la derivada es un operador lineal}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{-(x^2+y^2+z^2)} - 2z \qquad \text{Por la regla de la cadena}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2zxe^{-(x^2+y^2+z^2)} \qquad \text{Conmutando el podcuto}$$

$$\therefore \nabla f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}(-2x^2+1,-2yx,-2zx)$$

b) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right) && \text{Planteando la derivada parcial}\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - xyz\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} && \text{Reglas de derivada de Calculo I}\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{(x^2+y^2+z^2)yz - xyz(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^2} && \text{Derivando la parcial}\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-x^2yz+y^3z+yz^3}{(x^2+y^2+z^2)^2} && \text{Sumando términos semejantes}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right) && \text{Planteando la derivada parcial}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial}{\partial y}(xyz) - xyz\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} && \text{Reglas de derivada de Calculo I}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{(x^2+y^2+z^2)xz - xyz(2y)}{(x^2+y^2+z^2)^2} && \text{Derivando la parcial}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^3z-xy^2z+xz^3}{(x^2+y^2+z^2)^2} && \text{Sumando términos semejantes}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right) && \text{Planteando la derivada parcial}\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial}{\partial z}(xyz) - xyz\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} && \text{Reglas de derivada de Calculo I}\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{(x^2+y^2+z^2)xy - xyz(2z)}{(x^2+y^2+z^2)^2} && \text{Derivando la parcial}\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{x^3y+xy^3-xyz^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} && \text{Sumando términos semejantes}
\end{aligned}$$

$$\therefore \nabla f(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\left(yz(-x^2+y^2+z^2), xz(x^2-y^2+z^2), xy(x^2+y^2-z^2)\right)$$

c) $f(x,y,z) = z^2e^x\cos(y)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}z^2e^x\cos(y) && \text{Planteando la parcial}\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= z^2\cos(y)\frac{\partial}{\partial x}e^x && \text{Porque la derivada es lineal y saca escalares}\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= z^2\cos(y)e^x && \text{Por nuestro curso de Cálculo I}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}z^2e^x\cos(y) && \text{Planteando la parcial}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= z^2e^x(-\sin(y)) && \text{Por derivadas de trigonométricas}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -z^2e^x\sin(y) && \text{Asociando}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} z^2 e^x \cos(y) \qquad \text{Planteando la parcial}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^x \cos(y) 2z \qquad \text{Por reglas de la derivada de exponentes}$$

$$\therefore \nabla f(x, y, z) = z e^x (z\cos(y), -z\sin(y), 2\cos(y))$$

4. Haga un bosquejo de las curvas que son las imágenes de las siguientes trayectorias:

a) $\vec{\gamma}(t) = (\sin(t), 4\cos(t))$, donde $0 \leq t \leq 2\pi$

b) $\vec{\gamma}(t) = (2\sin(t), 4\cos(t))$, donde $0 \leq t \leq 2\pi$

c) $\vec{\gamma}(t) = (t\sin(t), t\cos(t), t)$, donde $-4\pi \leq t \leq 4\pi$

5. El vector de posición para una partícula que se mueve sobre una hélice es:

$$\vec{\gamma}(t) = (\sin(t), \cos(t), t^2)$$

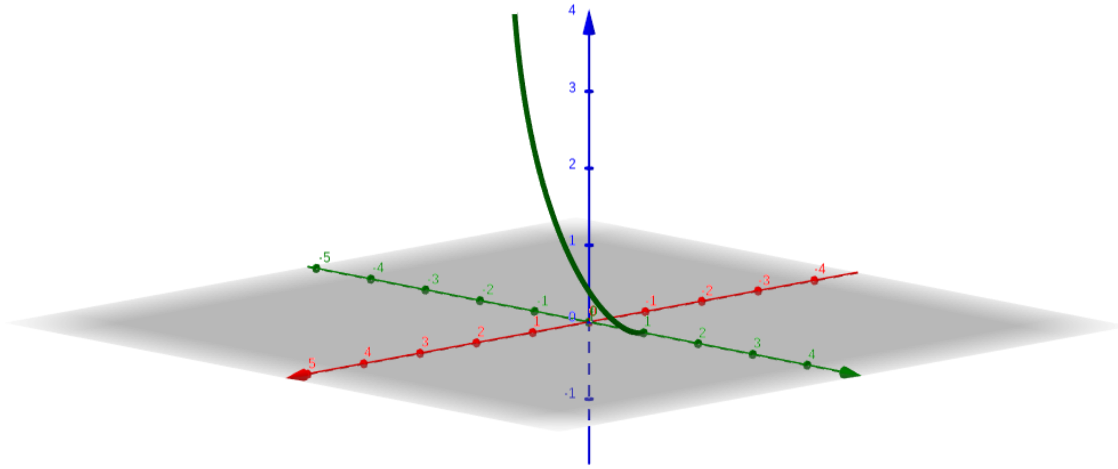


Figura 1: Curva trazada por $\vec{\gamma}$

Definición 4 (Vector velocidad)**.** Si $\vec{\gamma}$ es una trayectoria es diferenciable, decimos que $\vec{\gamma}$ es una trayectoria diferenciable. El vector velocidad de $\vec{\gamma}$ en el tiempo t es definido por:

$$\vec{\gamma'} = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{\gamma}(t+h) - \vec{\gamma}(t)}{h}$$

Normalmente se dibuja el vector $\vec{\gamma'}(t)$ con la cola en el punto $\vec{\gamma}(t)$. Si $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$, en $\mathbb{R}^2$, entonces:

$$\vec{\gamma'}(t) = (x'(t), y'(t)) = x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j}$$

y si

$$\vec{\gamma'}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t) = x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j} + z'(t)\hat{k}$$

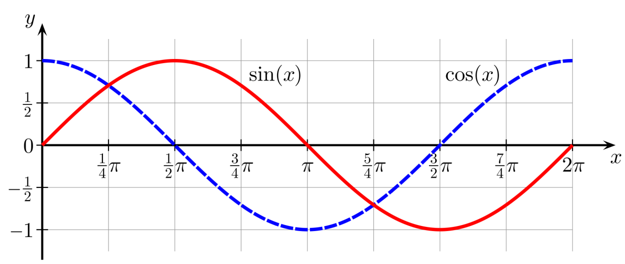
Definición 5 (Rapidez)**.** La rapidez de la trayectoria $\vec{\gamma}(t)$ es $s = \left|\left|\vec{\gamma'}(t)\right|\right|$, es decir la longitud del vector velocidad

Definición 6 (Vector tangente)**.** La velocidad $\vec{\gamma'}(t)$ es una recta tangente a la trayectoria $\vec{\gamma}(t)$ en el tiempo t si C es una curva trazada por $\vec{\gamma}(t)$ si $\vec{\gamma'}(t) \neq 0 \quad \forall t \in$ Dominio de $\vec{\gamma}$, entonces $\vec{\gamma'}(t)$ es un vector tangente a la curva C en el punto $\vec{\gamma'}(t)$

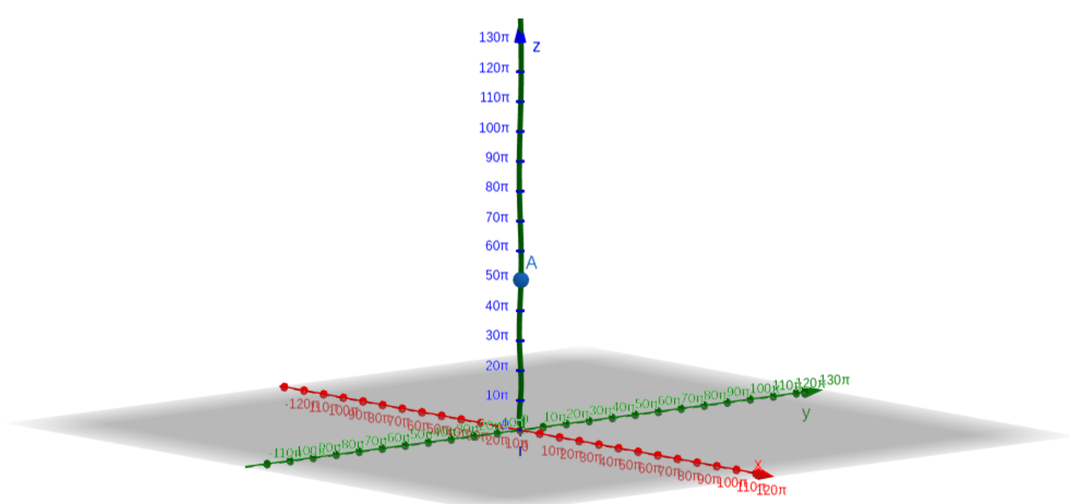
a) Encuentre la rapidez de la partícula en el tiempo $t_0 = 4\pi$
Para ello, primero hallemos el vector velocidad

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma'}(t_0) &= (\sin'(t), \cos'(t), (t^2)') && \text{Por definición de velocidad} \\
\vec{\gamma'}(t_0) &= (\cos(t), -\sin(t), 2t) && \text{Aplicando la derivada} \\
\vec{\gamma'}(4\pi) &= (\cos(4\pi), -\sin(4\pi), 2 \cdot 4\pi) && \text{Sustituyendo el valor de } t_0 \\
\vec{\gamma'}(4\pi) &= (\cos(0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi), -\sin(4\pi), 8\pi) && \text{Multiplicando escalares}
\end{aligned}$$

$\vec{\gamma}'(4\pi) = (\cos(0), -\sin(4\pi), 8\pi)$	De cálculo I tenemos que $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos(\alpha)$
$\vec{\gamma}'(4\pi) = (\cos(0), -\sin(0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi), 8\pi)$	Reacomodando el valor de $\sin$
$\vec{\gamma}'(4\pi) = (1, -\sin(0), 8\pi)$	De cálculo I tenemos que $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin(\alpha)$
$\vec{\gamma}'(4\pi) = (1, 0, 8\pi)$	Finalmente obtenemos
$\left\lVert \vec{\gamma}'(4\pi) \right\rVert = \sqrt{1^2 + 0^2 + (8\pi)^2}$	Por definición de norma
$\left\lVert \vec{\gamma}'(4\pi) \right\rVert = \sqrt{1 + 8^2\pi^2}$	Propiedades de los exponentes
$\left\lVert \vec{\gamma}'(4\pi) \right\rVert = \sqrt{1 + 64\pi^2}$	Elevando al cuadrado 8
$3 < \pi$	Por definición de π
$24 < 8\pi$	Por propiedades de $<$
$24 < \sqrt{8^2\pi^2}$	Pues $8^2\pi^2 > 0$
$24 < \sqrt{8^2\pi^2} < \sqrt{1 + 8^2\pi^2}$	Ya que al menos distan una unidad
$24 < \sqrt{1 + 8^2\pi^2}$	Transitividad de la desigualdad
$1 + 8^2\pi^2 < 676$	Por curso de cálculo I
$\sqrt{1 + 8^2\pi^2} < \sqrt{676}$	La raíz cuadrada es continua
$\sqrt{1 + 8^2\pi^2} < 26$	Por el valor de dicha raíz
$24 < \sqrt{1 + 8^2\pi^2} < 26$	Por transitividad
$\left\lVert \vec{\gamma}'(4\pi) \right\rVert \approx 25{,}1526$	Aproximando el resultado



(a) Recordemos las gráicas de $\sin(x), \cos(x)$



(b) Localización del punto A que es $\vec{\gamma}(4\pi)$

b) ¿Es $\vec{\gamma}$ es ortogonal a $\vec{\gamma'}$?

Definición 7 (Vector ortogonal)**.** Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$ decimos que $\vec{x}$ es ortogonal a $\vec{y}$ si y sólo si $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(t) &= (\sin(t), \cos(t), t^2) && \text{Recordatorio} \\ \vec{\gamma'}(t) &= (\cos(t) - \sin(t), 2t) && \text{Recordatorio} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{\gamma}, \vec{\gamma'} \rangle &= \langle (\sin(t), \cos(t), t^2), (\cos(t) - \sin(t), 2t) \rangle && \text{Por recordatorio anterior} \\ \langle \vec{\gamma}, \vec{\gamma'} \rangle &= \sin(t) \cdot \cos(t) + \cos(t) \cdot (-\sin(t)) + 2t \cdot t^2 && \text{Por definición de producto escalar} \\ \langle \vec{\gamma}, \vec{\gamma'} \rangle &= \sin(t)\cos(t) - \sin(t)\cos(t) + 2t^3 && \text{Multiplicando términos semejantes} \\ \langle \vec{\gamma}, \vec{\gamma'} \rangle &= 2t^3 && \text{Existencia del inverso aditivo en } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Notemos que $2t^3 = 0$
Esto sólo ocurre cuando $t = 0 \therefore \quad \vec{\gamma'}$ sólo es ortogonal a $\vec{\gamma}$ en $t = 0$

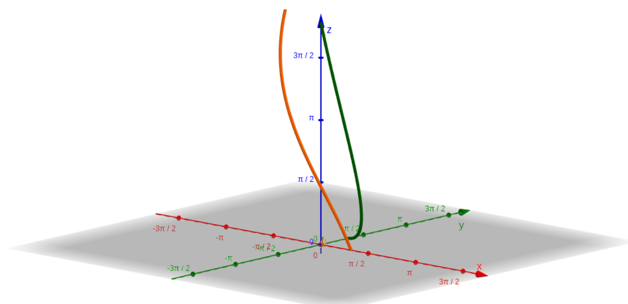


Figura 3: Claramente ambos vectores no son ortogonales

c) Encuentre la recta tangente a $\vec{\gamma}(t_0)$, $t_0 = 4\pi$

Definición 8 (Recta tangente)**.** Si $\vec{\gamma}(t)$ es una trayectoria en $\mathbb{R}^3$ (*i.e.* $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$) con $\vec{\gamma}(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, entonces la ecuación de la recta tangente en t_0 es

$$\ell(t) = \vec{\gamma'}(t_0)(t - t_0) + \vec{\gamma}(t_0)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \ell(t) &= (1, 0, 8\pi)(t - 4\pi) + (0, 1, 16\pi^2) && \text{Por el inciso a)} \\ \ell(t) &= (t - 4\pi, 0, 8\pi t - 32\pi^2) + (0, 1, 16\pi^2) && \text{Por distributividad} \\ \ell(t) &= (t - 4\pi, 1, 8\pi t - 32\pi^2 + 16\pi^2) && \text{Sumando de manera directa} \\ \ell(t) &= (t - 4\pi, 1, 8\pi(t - 2\pi)) && \text{Factorizando} \end{aligned}$$

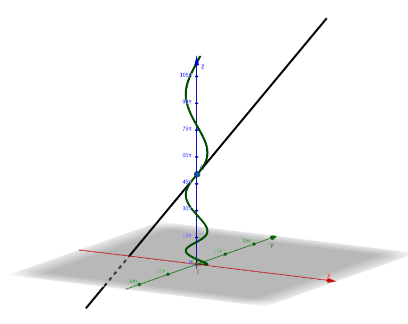


Figura 4: Ajustando los ejes un poco podemos apreciar que efectivamente se trata de la recta tangente

d) ¿Dónde se intersecará esta línea con el plano xy?

Tomemos en cuenta $\ell(t) = (x(t), y(t), 0)$ entonces lo único que tenemos que resolver es

$$\begin{aligned} 8\pi(t-2\pi) &= 0 && \text{Planteando la ecuación} \\ t-2\pi &= 0 && \text{Multiplicando por el inverso multiplicativo de } 8\pi \\ t &= 2\pi && \text{Añadiendo en ambos miembros } 2\pi \end{aligned}$$

es decir, hay que evaluar $\ell(t_0)$ en $t_o = 2\pi$, esto es $B = (-2\pi, 1, 0)$

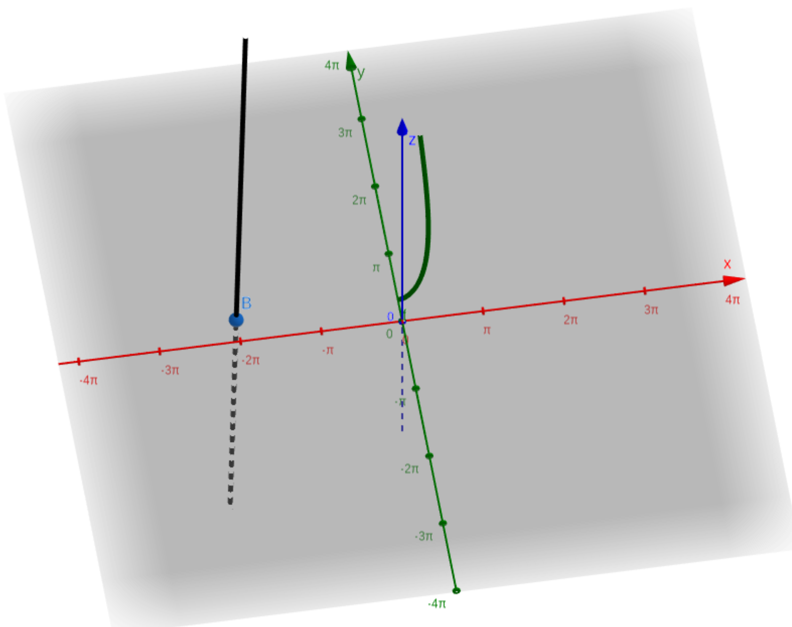


Figura 5: Se puede observar que efectivamente, la recta ℓ interseca al plano xy en B