Espacios vectoriales

Matemáticas para las ciencias aplicadas II

Aquino Chapa Armando Abraham y Merino Peña Kevin Ariel

23 de febrero de 2020

---

1. Escribe el vector cero en $M_{3x4}(\mathbb{R})$

Definición 0.1 (Matriz)**.** Una **Matriz** es un arreglo rectangular de elementos de un campo $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ de la forma

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

A los elementos $a_{i,j}$ con $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq i \leq m$ se les llama entradas de la matriz, a las matrices las denotamos por $\mathbb{A}$ *(letras mayúsculas)* y al conjunto de las matrices de mn se les denota por $M_{m\times n}(\mathbb{F})$

De esta manera tenemos que el vector cero de la matriz de 3 renglones por 4 columnas es aquella cuyas entradas (todas) son 0 *i. e.*

$$A_{3x4} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea V el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en $\mathbb{R}$. Muestre que V es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar para funciones.

Veamos que la derivada cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} (f(x)+g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)+g'(x) \end{aligned}$$

Así hemos probado que la derivada abre sumas

$$\begin{aligned} (cf(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

De esta manera queda conolidado que en la funciónd derivada, los escalares son sacados de la función

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto se vale para cualquier constante, en particular el 0

3. Prueba que el conjunto de las funciones pares en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial con suma y multiplicación por escalar usuales para funciones. Recuerde que una función es par si $\forall x \in Dom(f)$ entonces $f(-x) = f(x)$

Si tenemos en cuenta que $f(-t)+g(-t)=f(t)+g(t)$ y que si tenemos constantes siempre ocurre que $cf(-t)=cf(t)$ entonces ya hemos probado las dos primeras condiciones y para hallar el neutro basta con usar el 0 del cambo ($\mathbb{R}$) para notar que también lo manda al 0 vector.

4. Sea V el conjunto de pares ordenados de números reales. Si (a_1,a_2) y (b_1,b_2) son elementos de V y $\alpha\in\mathbb{R}$, definamos la suma y multiplicación escalar de la siguiente manera:

(i) $(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2b_2)$

(ii) $\alpha(a_1,a_2)=(\alpha a_1,a_2)$.

¿Es V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones?

No puede ser un espacio vectorial porque si tenemos que

$$0(a_1,a_2)=(0,a_2)$$

para cumplir el cero vector, entonces se compliría para cualquier a_2 lo cual no es posible pues contradice la unicidad del cero.

5. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$ bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar usual.

Definición 0.2. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto de $\mathcal{V}$ espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ decimos que $\mathcal{U}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$ si cumple lo siguiente

I) $\vec{0}\in\mathcal{U}$

II) $\forall\vec{u},\vec{v}\in\mathcal{U}\implies\vec{u}+\vec{v}\in\mathcal{U}$

III) Sea $\alpha\in\mathbb{F},\vec{u}\in\mathcal{U}\implies\alpha\cdot\vec{u}\in\mathcal{U}$

a) $W_1=\{(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3\big|a_1=3a_2 \text{ y } a_3=-a_2\}$

Veamos que W_1 contiene a $\vec{0}$ esto es que algún elemento en $W_1=(0,0,0)$ por lo que

$$\begin{aligned}(0,0,0)&=(a_1,a_2,a_3) && \text{Por } \vec{0}\in\mathbb{R}^3\\ &=(3a_2,a_2,-a_2) && \text{Por } a_1=3a_2 \text{ y } a_3=-a_2\\ &=(3(0),(0),-(0)) && \text{Para cualquier } a_2\\ &=(0,0,0)\end{aligned}$$

Por otra parte comprovemos que la suma está dentro de W_1 Sean (a_1,a_2,a_3)

b) $W_2=\{(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3\big|a_1=a_3+2\}$

NO es linear porque no contiene al elemento neutro dentro del espacio vectorial.

c) $W_3=\{(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3\big|2a_1-7a_2+a_3=0\}$

Sí es linear pues lo satisface $(2,-7,1)$

d) $W_4=\{(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3\big|a_1-4a_2-a_3=0\}$

Sí es linear pues lo satisface $(1,-4,-1)$

6. En cada caso diga si los vectores son generados por el conjunto S

a) $(2,-1,1), S=\{(1,0,2),(-1,1,1)\}$

Sea $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Entonces $(2,-1,1)=\alpha_1(1,0,2)+\alpha_2(-1,1,1)=(\alpha_1,0,2\alpha_1)+(-\alpha_2,\alpha_2,\alpha_2)=\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2,2\alpha_1+\alpha_2$.

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1-\alpha_2&=2\\ \alpha_2&=-1\\ 2\alpha_1+\alpha_2&=1 \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \alpha_1-(-1)&=2\\ \alpha_2&=-1\\ 2\alpha_1+\alpha_2&=1 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema, obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_1&=1\\ \alpha_2&=-1\\ 1&=1 \end{aligned}$$

Entonces:

$1(1,0,2)+(-1)(-1,1,1)=(1,0,2)+(1,-1,-1)=(2,-1,1)$

Cómo el sistema de ecuaciones si se satisface, el conjunto S SI genera al vector $(2,-1,-1)$

b) $(2,-1,1,3), S=\{(1,0,1,-1),(0,1,1,1)\}$

Sea $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Entonces: $(2,-1,1,3)=\alpha_1(1,0,1,-1)+\alpha_2(0,1,1,1)=(\alpha_1,0,\alpha_1,-\alpha_1)+(0,\alpha_2,\alpha_2,\alpha_2)=\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_1+\alpha_2$.

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1&=2\\ \alpha_2&=-1\\ \alpha_1+\alpha_2&=1\\ -\alpha_1+\alpha_2&=3 \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \alpha_1&=2\\ \alpha_2&=-1\\ 2-1&=1\\ -(-1)+2&=3 \end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned} \alpha_1&=2\\ \alpha_2&=-1\\ 1&=1\\ 3&=3 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones verificamos si el conjunto S genera al vector. Entonces:

$$2(1,0,1,-1) + (-1)(0,1,1,1) = (2,0,2,-2) + (0,-1,-1,-1) = (2,-1,-1,-3)$$

Como el producto de los escalares por los elementos del conjunto S no forman al vector, podemos concluir que S NO genera a $(2,-1,1,3)$.

c) $2x^3 - x^2 + x + 3, S = \{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1\}$

Sean α_1, α_2 y α_3 elementos del campo, si suponemos que $2x^3 - x^2 + x + 3$ es generado por S implicará que existen dichos 3 elementos $\cdot \ni \cdot$

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = \alpha_1(x^3 + x^2 + x + 1) + \alpha_2(x^2 + x + 1) + \alpha_3(x + 1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 \quad &(1)\\ \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 \quad &(2)\\ \alpha_3 x + \alpha_3 \quad &(3) \end{aligned}$$

Por lo que ocurre lo siguiente

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3$$

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 + x + 3 \quad &= \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3 \\ &= x^3(\alpha_3) + x^2(\alpha_2 + \alpha_1) + x(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 - \alpha_1 \\ \alpha_2 &= -1 - 2 \\ \alpha_2 &= -3 \end{aligned}$$

Ahora llegamos a una contradicción, puesto que el sistema de ecuaciones anterior implica que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3 = 1$ por lo que el conjunto S no genera $2x^3 - x^2 + x + 3$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, S = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

Recordemos que la suma de matrices se hace entrada por entrada eso es, si se van a sumar 2 matrices $A + B$ se hace de la forma $a_{ij} + b_{ij} \forall i, j \in A, B$ de tal manera que existen $a_{ij} + b_{ij} \forall i, i \in A, B$ de tal manera que existen $\alpha, \beta, \gamma \quad \cdot \ni \cdot$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + \gamma_{1,1} & \beta_{1,2} + \gamma_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notemos que

$$-\alpha_{2,1} = -3 \implies \alpha = 3$$

y luego

$$\beta_{2,2} = 4 \implies \beta = 4$$

y finalmente

$$\gamma = 2 - \beta_{1,2} \implies \gamma = 4$$