Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Proyecto III

Kevin Ariel Merino Peña[1]

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que estos proyectos se entregan de manera individual en la plataforma de google classroom.

1. Calcule la matriz de la derivadas parciales de:

Definición 1. Ses U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f es diferenciable en $\vec{x_0} \in U$ si todas las derivadas parciales existen y además si el siguiente límite existe:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \frac{||f(\vec{x}) - f(\vec{x_0}) - T(\vec{x} - \vec{x_0})||}{||\vec{x} - \vec{x_0}||} = 0$$

Donde $T = Df(\vec{x_0}) \in M_{mxn}$ cuyos elementos son $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ con $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. Esto es

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Es llamada matriz de las derivadas parciales o Matriz Jacobiana

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $f(x, y) = (e^x, \sin(xy))$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial e^x}{\partial x} & \dfrac{\partial e^x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \sin(xy)}{\partial x} & \dfrac{\partial \sin(xy)}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \text{Por definición de la matriz Jacobiana}$$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} e^x & \dfrac{\partial e^x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \sin(xy)}{\partial x} & \dfrac{\partial \sin(xy)}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \text{La derivada de } e^x \text{ es la función misma (cálculo I)}$$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ \dfrac{\partial \sin(xy)}{\partial x} & \dfrac{\partial \sin(xy)}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \text{Puesto que } x \text{ figura como constante}$$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ y\dfrac{\partial \sin(xy)}{\partial x} & x\dfrac{\partial \sin(xy)}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \text{Por regla de la cadena}$$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \end{pmatrix} \qquad \text{Efectuando las derivadas parciales}$$

[1]Número de cuenta 317031326

b) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $f(x,y) = (xe^y + \cos(y), x, x+e^y)$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(xe^y+\cos(y)) & \frac{\partial}{\partial y}(xe^y+\cos(y)) \\ \frac{\partial}{\partial x}x & \frac{\partial}{\partial y}x \\ \frac{\partial}{\partial x}(x+e^y) & \frac{\partial}{\partial y}(x+e^y) \end{pmatrix} \quad \text{Por definición de matriz de derivadas parciales}$$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} e^y\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial x}\cos(y) & x\frac{\partial}{\partial y}e^y + \frac{\partial}{\partial y}\cos(y) \\ \frac{\partial}{\partial x}x & \frac{\partial}{\partial y}x \\ \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial x}e^y & \frac{\partial}{\partial y}x + \frac{\partial}{\partial y}e^y \end{pmatrix} \quad \text{Empleamos que la derivada es lineal, abre sumas y saca escalares}$$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y - \sin(y) \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{pmatrix} \quad \text{Operando las derivadas}$$

c) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $f(x,y,z) = (x+e^z+y, xy^2)$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x+e^z+y) & \frac{\partial}{\partial y}(x+e^z+y) & \frac{\partial}{\partial z}(x+e^z+y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) & \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) & \frac{\partial}{\partial z}(xy^2) \end{pmatrix} \quad \text{Por definición de la matriz de derivadas parciales}$$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial x}e^z + \frac{\partial}{\partial x}y & \frac{\partial}{\partial y}x + \frac{\partial}{\partial y}e^z + \frac{\partial}{\partial y}y & \frac{\partial}{\partial z}x + \frac{\partial}{\partial z}e^z + \frac{\partial}{\partial z}y \\ y^2\frac{\partial}{\partial x}x & x\frac{\partial}{\partial y}y^2 & \frac{\partial}{\partial z}(xy^2) \end{pmatrix} \quad \text{Usamos que la derivada es un operador lineal}$$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & e^z \\ y^2 & 2xy & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Efectuando las derivadas parciales}$$

d) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $f(x,y,z) = (xye^{xy}, x\sin(y), 5xy^2)$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}xye^{xy} & \frac{\partial}{\partial y}xye^{xy} & \frac{\partial}{\partial z}xye^{xy} \\ \frac{\partial}{\partial x}x\sin(y) & \frac{\partial}{\partial y}x\sin(y) & \frac{\partial}{\partial z}x\sin(y) \\ \frac{\partial}{\partial x}5xy^2 & \frac{\partial}{\partial y}5xy^2 & \frac{\partial}{\partial z}5xy^2 \end{pmatrix} \quad \text{Definición de matriz de derivadas parciales}$$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} y\frac{\partial}{\partial x}e^{xy}x & x\frac{\partial}{\partial y}ye^{xy} & \frac{\partial}{\partial z}xye^{xy} \\ \sin(y)\frac{\partial}{\partial x}x & x\frac{\partial}{\partial y}\sin(y) & \frac{\partial}{\partial z}x\sin(y) \\ 5y^2\frac{\partial}{\partial x}x & 5x\frac{\partial}{\partial y}y^2 & \frac{\partial}{\partial z}5xy^2 \end{pmatrix} \quad \text{Empleando que la derivada es operador lineal}$$

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} y(e^{yx} + xye^{xy}) & x(e^{xy} + xye^{xy}) & 0 \\ \\ \sin(y) & x\cos(y) & 0 \\ \\ 5y^2 & 10xy & 0 \end{pmatrix}$$ Operando las dervidas parciales

2. Sea $f(x,y) = xe^{y^2} - ye^{x^2}$

a) Encuentre el plano tangente a la gráfica de f en $(1,2)$

b) ¿Qué punto sobre la superficie $z = x^2 - y^2$, tiene un plano tangente paralelo al plano tangente encontrado en la primer parte?

3. Calcule el gradiente de las siguientes funciones:

a) $f(x,y,z) = xe^{-(x^2+y^2+z^2)}$

b) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

c) $f(x,y,z) = z^2e^x\cos(y)$

4. Haga un bosquejo de las curvas que son las imágenes de las siguientes trayectorias:

a) $\vec{\gamma}(t) = (\sin(t), 4\cos(t))$, donde $0 \leq t \leq 2\pi$

b) $\vec{\gamma}(t) = (2\sin(t), 4\cos(t))$, donde $0 \leq t \leq 2\pi$

c) $\vec{\gamma}(t) = (t\sin(t), t\cos(t), t)$, donde $-4\pi \leq t \leq 4\pi$

5. El vector de posición para una partícula que se mueve sobre una hélice es:

$$\vec{\gamma}(t) = (\sin(t), \cos(t), t^2)$$

a) Encuentre la rapidez de la partícula en el tiempo $t_0 = 4\pi$

b) ¿Es $\vec{\gamma}$ es ortogonal a $\vec{\gamma'}$

c) Encuentre la recta tangente a $\vec{\gamma}$ $t_0 = 4\pi$

d) ¿Dónde se intersecará esta línea con el plano xy?