**Matemáticas para las Ciencias II**
**Semestre 2020-2**
Prof. Pedro Porras Flores
Ayud. Irving Hernández Rosas
**Tarea-examen I**

Kevin Ariel Merino Peña[1]

---

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que la tarea-examen se entrega individual.
1. Muestre que $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \{c+bx+ax^2 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$, es un espacio vectorial con la suma usual y la multiplicación por escalar usual, es decir:

$$\begin{aligned}
+ &\colon \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
&(a_1x^2 + b_1x + c_1, a_2x^2 + b_2x + c_2) \mapsto (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2). \\
\mu &\colon \mathbb{R} \times \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
&(\alpha, (a_1x^2 + b_1x + c_1)) \mapsto (\alpha a_1)x^2 + (\alpha b_1)x + (\alpha c_1).
\end{aligned}$$

**Definición 1.** Sea $\mathbb{V}$ un conjunto no vacío con 2 operaciones definidas $(+, \mu)$ y un campo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ que cumple

1. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$, entonces $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
2. Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{V}$, entonces $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
3. Existe $\vec{0} \in \mathbb{V} \quad \cdot\ni\cdot \quad \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}, \qquad \forall \vec{x} \in \mathbb{V}$
4. Para todo $\vec{x} \in \mathbb{V}$ existe $\vec{y} \in \mathbb{V}$ tal que $\vec{x} + \vec{y} = 0$
5. Para todo $\vec{x} \in \mathbb{V}$ se cumple que $1\vec{x} = \vec{x}$ donde 1 es el neutro multiplicativo de $\mathbb{F}(\mathbb{R})$
6. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $\vec{x} \in \mathbb{V}$ se cumple $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
7. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $\vec{x} \in \mathbb{V}$ entonces $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$
8. Sea $\alpha \in \mathbb{F}$ y $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$, entonces $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, por demostrar $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$, como los elementos de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ son de la forma $c + ax + bx^2$, entonces digamos que

$$\vec{x} = a_1 + a_2x + a_3x^2$$
$$\vec{y} = b_1 + b_2x + b_3x^2$$

$$\begin{aligned}
\vec{x} + \vec{y} &= (a_1 + a_2x + a_3x^2) + (b_1 + b_2x + b_3x^2) && \text{Por definición de los vectores} \\
\vec{x} + \vec{y} &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3)x^2 && \text{Por definición de la suma} \\
\vec{x} + \vec{y} &= (b_1 + a_1) + (b_2 + a_2)x + (b_3 + a_3)x^2 && \text{Porque los elementos en } \mathbb{R} \text{ conmutan} \\
\vec{x} + \vec{y} &= (b_1 + b_2x + b_3x^2) + (a_1 + a_2x + a_3x^2) && \text{Por la definición de } + \\
\vec{x} + \vec{y} &= \vec{y} + \vec{x} && \text{Por definición de los vectores}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ los elementos de } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \text{ conmutan, } \textit{i.e. } \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{V}$ por demostrar $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ como los elementos de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ son de la forma $c + ax + bx^2$, entonces digamos que

$$\vec{x} = a_1 + a_2x + a_3x^2$$
$$\vec{y} = b_1 + b_2x + b_3x^2$$
$$\vec{z} = c_1 + c_2x + c_3x^2$$

[1] 317031326

$$
\begin{aligned}
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= (a_1+a_2x+a_3x^2+b_1+b_2x+b_3x^2)+c_1+c_2x+c_3x^2 && \text{Por definición de los vectores}\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= ((a_1+b_1)+(a_2+b_2)x+(a_3+b_3)x^2)+c_1+c_2x+c_3x^2 && \text{Por definición de los + en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= ((a_1+b_1)+c_1)+((a_2+b_2)+c_2)x+((a_3+b_3)+c_3)x^2 && \text{Por definición de los + en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= (a_1+(b_1+c_1))+(a_2+(b_2+c_2))x+(a_3+(b_3+c_3))x^2 && \text{Porque en } \mathbb{R} \text{ la suma es asociativa}\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= a_1+(b_1+c_1)+a_2x+(b_2+c_2)x+a_3x^2+(b_3+c_3)x^2 && \text{Emplendo la definición de suma}\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= a_1+(b_1+c_1)+a_2x+(b_2x+c_2x)+a_3x^2+(b_3x^2+c_3x^2) && \text{Aplicando distrubutividad}\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) && \text{Definiendo la suma en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

Por demostrar: $\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$. Proponemos $\vec{0}=0+0x+0x^2$.
Sea $\vec{x}\in\mathbb{V}$, entonces $\vec{x}$ es de la forma

$$\vec{x}=a_1+a_2x+a_3x^2$$

$$\vec{0}+\vec{x}= \qquad\qquad \text{Por definición de } \vec{x},\vec{0}$$

2. Muestre que el conjunto $\beta=\{1,x,x^2\}$ es base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
3. Muestre que la siguiente transformación es lineal.

$$
\begin{aligned}
T\colon \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
T(f(x)) &\mapsto xf^{'}(x)+xf(2)+f(3).
\end{aligned}
$$

4. Determine el núcleo y la imagen de $T$.
5. Encuentre la matriz asociada a $T$ con respecto a la base $\beta$, esto es $[T]_\beta$.
6. ¿Cuál es el rango de $[T]_\beta$?
7. La matriz $[T]_\beta$ es invertible, si sí muéstrelo, si no argumente porque.
8. ¿Cuales son los valores propios asociados a $[T]_\beta$?
9. Determine los vectores propios asociados a cada valor propio.
10. Muestre que el conjunto de los vectores propios es una base ordenada.
11. Determine $Q\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, tal que $Q^{-1}[T]_\beta Q=D$, donde $D$ es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son valores propios.
12. Muestre que $\beta^{'}=\{-3+x,-3-13x+4x^2,1+x\}$, es una base para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y además determine $[T]_{\beta'}$ .