Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Proyecto V

Kevin Ariel Merino Peña[1]

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que estos proyectos se entregan de manera individual en la plataforma de google classroom.

1. Verifique el primer caso de la regla de la cadena de la composición $f \circ \vec{\gamma}$ para cada uno de los siguientes casos, esto es primero haga la composición y derive, y le luego use la regla de la cadena y vea que se llega al mismo resultado.

Teorema 1 (Regla de la cadena)**.** *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos, $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ dos funciones tales que g manda a U en V i.e. $f \circ g$. Supogamos que g es diferenciable en $\vec{x_0}$ y $D(f\circ g)(\vec{x_0}) = Df(g(\vec{x_0}))Dg(\vec{x_0})$.*

- ***Primer caso de la regla de la cadena***

  Supongamos $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una trayectoria diferenciable y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Sea $h(t) = f(\vec{\gamma})(t) = f(x(t), y(t), z(t)$ donde $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Entonces
  $$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$
  esto es:
  $$\frac{dh}{dt} = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma'}(t)$$
  donde $\vec{\gamma'}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

- ***Segundo caso de la regla de la cadena***

  Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Escribimos
  $$g(x,y,z) = (u(x,y,x), v(x,y,z), w(x,y,z) \quad y \quad h(x,y,z) = f(u(x,y,z), u(x,y,z), w(x,y,z))$$
  Entonces:
  $$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{pmatrix}$$

a) $f(x,y) = xy$, $\vec{\gamma}(t) = (e^t, \cos(t))$.
Tenemos que $f \circ \gamma(t) = e^t \cos(t)$ y su derivada es

$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) = \frac{d}{dt}e^t\cos(t)$	Planteando la derivada
$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) = e^t\frac{d}{dt}\cos(t) + \cos(t)\frac{d}{dt}e^t$	Por la regla del producto en derivadas
$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) = e^t(-\sin(t)) + \cos(t)e^t$	Por nuestro curso de Cálculo I
$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) = e^t\cos(t) - e^t\sin(t)$	Conmutando la suma de funciones

por otra parte, por el primer caso de la regla de la cadena, obtenemos
$$\frac{d}{dt}(f\circ g) = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}$$

[1]Número de cuenta 317031326

entonces calculemos las siguientes derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(xy) = y \qquad \text{Por la regla del producto}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(xy) = x \qquad \text{Por la regla del producto}$$
$$\frac{dx}{dt}(e^t) = e^t \qquad \text{Por propiedades de la exponencial}$$
$$\frac{dy}{dt}(\cos(t)) = -\sin(t) \qquad \text{Por características de las trigonométricas}$$

Así, se tiene que

$$\frac{d}{dt}(f \circ g) = ye^t - x\sin(t)$$

y como $x = e^t$ y $y = \cos(t)$

$$\therefore \qquad \frac{d}{dt}(f \circ g) = \cos(t)e^t - e^t\sin(t)$$

b) $f(x, y) = xy$, $\vec{\gamma}(t) = (3t^2, t^3)$.

Tenemos que $f \circ \gamma(t) = e^{(3t^2)(t^3)} = e^{3t^5}$ y su derivada es

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = \frac{d}{dt}e^{3t^5} \qquad \text{Planteando la derivada}$$
$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = e^{3t^5}\frac{d}{dt}3t^5 \qquad \text{Por la regla de la derivada para la exponencial}$$
$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = e^{3t^5}(15t^4) \qquad \text{Derivando un monomio}$$
$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = 15t^4e^{3t^5} \qquad \text{Derivando un monomio}$$

por otra parte, por el primer caso de la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(f \circ g) = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}$$

entonces calculemos las siguientes derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(e^{xy}) = ye^{xy} \qquad \text{Por la regla de la exponencial}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(e^{xy}) = xe^{xy} \qquad \text{Por la regla de la exponencial}$$
$$\frac{dx}{dt}(3t^2) = 6t \qquad \text{Por propiedades de la derivada en exponentes}$$
$$\frac{dy}{dt}(t^3) = 3t^2 \qquad \text{Por propiedades de la derivada en exponentes}$$

Así, se tiene que

$$\frac{d}{dt}(f \circ g) = ye^{xy}(6t) - xe^{xy}(3t^2)$$

y como $x = 3t^2$ y $y = t^3$

$$\therefore \qquad \frac{d}{dt}(f \circ g) = 15t^4e^{3t^5}$$

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)\ln\sqrt{x^2 + y^2}$, $\vec{\gamma}(t) = (e^t, e^{-t})$.

Tenemos que $f \circ \gamma(t) = (e^{2t} + e^{-2t})\ln\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}$ y su derivada es

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) &= \frac{d}{dt}((e^{2t}+e^{-2t})\ln\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}) && \text{Planteando la derivada}\\
\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) &= \frac{d}{dt}((e^{2t}+e^{-2t})\cdot\frac{1}{2}\ln(e^{2t}+e^{-2t})) && \text{Pues } \ln(a^c)=c\cdot\ln(a)\\
\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) &= \frac{1}{2}\ln(e^{2t}+e^{-2t})\cdot\frac{d}{dt}(e^{2t}+e^{-2t})+(e^{2t}+e^{-2t})\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\ln(e^{2t}+e^{-2t})\right) && \text{Por regla del producto en derivadas}\\
\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) &= \frac{1}{2}\ln(e^{2t}+e^{-2t})\cdot 2(e^{2t}-e^{-2t})+(e^{2t}+e^{-2t})\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\ln(e^{2t}+e^{-2t})\right) && \text{Derivando la primera parte}\\
\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) &= \frac{1}{2}\ln(e^{2t}+e^{-2t})\cdot 2(e^{2t}-e^{-2t})+\frac{e^{2t}+e^{-2t}(2e^{2t}-2e^{-2t})}{2\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}} && \text{Derivando la segunda parte}\\
\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) &= (e^{2t}-e^{-2t})(2\ln\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}+1) && \text{Factorizando } (e^{2t}-e^{-2t})
\end{aligned}$$

por otra parte, por el primer caso de la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(f\circ g)=\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}$$

entonces calculemos las siguientes derivadas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}((x^2+y^2)\ln\sqrt{x^2+y^2}) &= x(2\ln\sqrt{x^2+y^2}+1) && \text{Haciendo la parcial con } x\\
\frac{\partial f}{\partial y}((x^2+y^2)\ln\sqrt{x^2+y^2}) &= y(2\ln\sqrt{x^2+y^2}+1) && \text{El caso anterior es homólogo con } y\\
\frac{dx}{dt}(e^t) &= e^t && \text{Por propiedades de la exponencial}\\
\frac{dy}{dt}(-e^t) &= -e^{-t} && \text{Por propiedades de la exponencial}
\end{aligned}$$

Así, se tiene que

$$\frac{d}{dt}(f\circ g)=x(2\ln\sqrt{x^2+y^2}+1)\cdot e^t+y(2\ln\sqrt{x^2+y^2}+1)\cdot(-e^{-t})$$

y como $x=e^t$ y $y=e^{-t}$

$$\therefore \qquad \frac{d}{dt}(f\circ g)=(e^{2t}-e^{-2t})(2\ln\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}+1)$$

d) $f(x,y)=xe^{x^2+y^2}$, $\vec{\gamma}(t)=(t,-t)$.

Tenemos que $f\circ\gamma(t)=te^{2t^2}$ y su derivada es

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) &= \frac{d}{dt}te^{2t^2} && \text{Planteando la derivada}\\
\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) &= t\frac{d}{dt}e^{2t^2}+e^{2t^2}\cdot\frac{d}{dt}t && \text{Por propiedades de la multiplicación}\\
\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) &= t\frac{d}{dt}e^{2t^2}+e^{2t^2}\cdot\frac{d}{dt}t && \text{Por propiedades de la multiplicación}\\
\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) &= t2e^{2t^2}\frac{d}{dt}t^2+e^{2t^2} && \text{La derivada de la exponencial es ella misma por la derivada de su argumento}\\
\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) &= 4t^2e^{2t^2}+e^{2t^2} && \text{Derivando un monomio}\\
\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) &= e^{2t^2}(4t^2+1) && \text{Empleando factor común}
\end{aligned}$$

por otra parte, por el primer caso de la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(f\circ g)=\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}$$

entonces calculemos las siguientes derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(xe^{x^2+y^2}) = e^{x^2+y^2}(1+2x^2) \qquad \text{Aplicando la parcial a la función}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(xe^{x^2+y^2}) = 2xye^{x^2+y^2} \qquad \text{Aplicando la parcial a la función}$$
$$\frac{dx}{dt}(t) = 1 \qquad \text{Derivando un termino lineal}$$
$$\frac{dy}{dt}(-t) = -1 \qquad \text{Derivando un término lineal}$$

Así, se tiene que

$$\frac{d}{dt}(f \circ g) = e^{x^2+y^2}(1+2x^2) - 2xye^{x^2+y^2}$$

y como $x = t$ y $y = -t$

$$\therefore \qquad \frac{d}{dt}(f \circ g) = e^{2t^2}(1+4t^2)$$

2. Sea $f(u, v, w) = (e^{u-w}, \cos(u+v) + \sin(u+v+w))$ y $g(x, y) = (e^x, \cos(y-x), e^{-y})$. Calcule $f \circ g$ y $\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0)$.

3. Calcule la derivada direccional de las siguientes funciones en el punto y la dirección dada:

a) $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$ y $\vec{v} = \frac{3}{5}\hat{e}_1 + \frac{4}{5}\hat{e}_2$.

b) $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$ y $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$.

c) $f(x, y) = e^x \cos(\pi y)$, $(x_0, y_0) = (0, -1)$ y $\vec{v} = -\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\hat{e}_1 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\hat{e}_2$.

d) $f(x, y) = xy^2 + x^3y$, $(x_0, y_0) = (4, -2)$ y $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\hat{e}_1 + \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\hat{e}_2$.

4. Encuentre un vector que sea normal a la curva $x^3 + xy + y^3 = 11$ en $(1, 2)$.

5. El Capitán Ralphis se encuentra en problemas cerca del lado soleado de Mercurio. La temperatura del casco del barco cuando está en la ubicación (x, y, z) estará dada por $T(x, y, z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$, donde x, y, z se miden en metros. Actualmente está en $(1, 1, 1)$.

a) ¿En qué direcciones debería proceder para disminuir la temperatura más rápidamente?

b) Si el barco viaja a e^8 metros por segundo, ¿qué tan rápido será la disminución de la temperatura si avanza en esa dirección?

c) Desafortunadamente, el metal del casco se romperá si se enfría a una velocidad superior a $\sqrt{14}e^2$ grados por segundo. Describa el conjunto de posibles direcciones en las que puede proceder a bajar la temperatura a no más de esa tasa.