Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Tarea-examen I

Kevin Ariel Merino Peña[1]

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que la tarea-examen se entrega individual.

1. Muestre que $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \{c + bx + ax^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, es un espacio vectorial con la suma usual y la multiplicación por escalar usual, es decir:

$$\begin{aligned}
+\colon & \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
& (a_1x^2 + b_1x + c_1, a_2x^2 + b_2x + c_2) \mapsto (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2). \\
\mu\colon & \mathbb{R} \times \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
& (\alpha, (a_1x^2 + b_1x + c_1)) \mapsto (\alpha a_1)x^2 + (\alpha b_1)x + (\alpha c_1).
\end{aligned}$$

Definición 1. Sea $\mathbb{V}$ un conjunto no vacío con 2 operaciones definidas $(+, \mu)$ y un campo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ que cumple

1. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$, entonces $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
2. Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{V}$, entonces $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
3. Existe $\vec{0} \in \mathbb{V} \quad \cdot\ni\cdot \quad \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}, \qquad \forall \vec{x} \in \mathbb{V}$
4. Para todo $\vec{x} \in \mathbb{V}$ existe $\vec{y} \in \mathbb{V}$ tal que $\vec{x} + \vec{y} = 0$
5. Para todo $\vec{x} \in \mathbb{V}$ se cumple que $\vec{1}\vec{x} = \vec{x}$ donde $\vec{1}$ es el neutro multiplicativo de $\mathbb{F}(\mathbb{R})$
6. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $\vec{x} \in \mathbb{V}$ se cumple $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
7. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $\vec{x} \in \mathbb{V}$ entonces $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$
8. Sea $\alpha \in \mathbb{F}$ y $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$, entonces $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, por demostrar $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$, como los elementos de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ son de la forma $c + ax + bx^2$, entonces digamos que

$$\vec{x} = a_1 + a_2x + a_3x^2$$
$$\vec{y} = b_1 + b_2x + b_3x^2$$

$$\begin{aligned}
\vec{x} + \vec{y} &= (a_1 + a_2x + a_3x^2) + (b_1 + b_2x + b_3x^2) && \text{Por definición de los vectores} \\
\vec{x} + \vec{y} &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3)x^2 && \text{Por definición de la suma} \\
\vec{x} + \vec{y} &= (b_1 + a_1) + (b_2 + a_2)x + (b_3 + a_3)x^2 && \text{Porque los elementos en } \mathbb{R} \text{ conmutan} \\
\vec{x} + \vec{y} &= (b_1 + b_2x + b_3x^2) + (a_1 + a_2x + a_3x^2) && \text{Por la definición de } + \\
\vec{x} + \vec{y} &= \vec{y} + \vec{x} && \text{Por definición de los vectores}
\end{aligned}$$

$\therefore$ los elementos de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ conmutan, *i.e.* $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{V}$ por demostrar $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ como los elementos de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ son de la forma $c + ax + bx^2$, entonces digamos que

$$\vec{x} = a_1 + a_2x + a_3x^2$$
$$\vec{y} = b_1 + b_2x + b_3x^2$$
$$\vec{z} = c_1 + c_2x + c_3x^2$$

---

[1] 317031326

$$
\begin{aligned}
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= (a_1+a_2x+a_3x^2+b_1+b_2x+b_3x^2)+c_1+c_2x+c_3x^2 && \text{Por definición de los vectores}\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= ((a_1+b_1)+(a_2+b_2)x+(a_3+b_3)x^2)+c_1+c_2x+c_3x^2 && \text{Por definición de los + en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= ((a_1+b_1)+c_1)+((a_2+b_2)+c_2)x+((a_3+b_3)+c_3)x^2 && \text{Por definición de los + en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= (a_1+(b_1+c_1))+(a_2+(b_2+c_2))x+(a_3+(b_3+c_3))x^2 && \text{Porque en } \mathbb{R} \text{ la suma es asociativa}\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= a_1+(b_1+c_1)+a_2x+(b_2+c_2)x+a_3x^2+(b_3+c_3)x^2 && \text{Emplendo la definición de suma}\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= a_1+(b_1+c_1)+a_2x+(b_2x+c_2x)+a_3x^2+(b_3x^2+c_3x^2) && \text{Aplicando distrubutividad}\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) && \text{Definiendo la suma en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

$$\therefore \qquad \text{la suma es asociativa en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

Por demostrar: $\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$. Proponemos $\vec{0}=0+0x+0x^2$.
Sea $\vec{x}\in\mathbb{V}$, entonces $\vec{x}$ es de la forma

$$\vec{x}=a_1+a_2x+a_3x^2$$

$$
\begin{aligned}
\vec{0}+\vec{x} &= (0+0x+0x^2)+(a_1+a_2x+a_3x^2) && \text{Por definición de } \vec{x},\vec{0}\\
\vec{0}+\vec{x} &= (0+a_1)+(0+a_2)x+(0+a_3)x^2 && \text{Por definición de + en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
\vec{0}+\vec{x} &= a_1+a_2x+a_3x^2 && \text{Porque los elementos en } \mathbb{R} \text{ tienen neutro aditivo}\\
\vec{0}+\vec{x} &= \vec{x} && \text{Por definición de } \vec{x}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \qquad 0+0x+0x^2 \text{ es el neutro adivito en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

Sea $\vec{x}\in\mathbb{V}$, por demostrar, existe $\vec{y}\in V \quad \cdot\ni\cdot \quad \vec{x}+\vec{y}=\vec{0}$, sabemos que los elementos de $\mathbb{V}$ tienen la siguiente forma

$$\vec{x}=a_1+a_2x+a_3x^2$$

proponemos

$$\vec{y}=-a_1-a_2x-a_3x^2$$

$$
\begin{aligned}
\vec{x}+\vec{y} &= (a_1+a_2x+a_3x^2)+(-a_1-a_2x-a_3x^2) && \text{Por definición de los vectores}\\
\vec{x}+\vec{y} &= (a_1-a_1)+(a_2-a_2)x+(a_3-a_3)x^2 && \text{Por definición de la suma en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
\vec{x}+\vec{y} &= (0)+(0)x+(0)x^2 && \text{Los elementos del campo tienen inverso aditivo}\\
\vec{x}+\vec{y} &= \vec{0} && \text{Por definición del neutro aditivo}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \qquad -a_1-a_2x-a_3x^2 \text{ es el inverso aditivo de } \vec{x}$$

Sea $\vec{x}\in\mathbb{V}$, por demostrar $\vec{1}\cdot\vec{x}=\vec{x}$
Proponemos $\vec{1}=1$

$$
\begin{aligned}
1\cdot\vec{x} &= 1(a_1+a_2x+a_3x^2) && \text{Por definición de los elementos de } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
1\cdot\vec{x} &= (1\cdot a_1)+(1\cdot a_2)x+(1\cdot a_3)x^2 && \text{Por definición del producto en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
1\cdot\vec{x} &= a_1+a_2x+a_3x^2 && \text{Puesto que los elementos del campo tienen neutro multiplicativo}\\
1\cdot\vec{x} &= \vec{x} && \text{Por la definición de } \vec{x}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \vec{1} \text{ es el neutro multiplicativo en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{F}(\mathbb{F}=\mathbb{R})$ y $\vec{x}\in\mathbb{V}$, por demostrar que $(\alpha\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\vec{x})$

$$
\begin{aligned}
(\alpha\beta)\vec{x} &= (\alpha\beta)(a_1+a_2x+a_3x^2) && \text{Por definición de los elementos en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
(\alpha\beta)\vec{x} &= ((\alpha\beta)a_1)+((\alpha\beta)a_2)x+((\alpha\beta)a_3)x^2 && \text{Por definición del producto en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
(\alpha\beta)\vec{x} &= \alpha(\beta a_1)+\alpha(\beta a_2)x+\alpha(\beta a_3)x^2 && \text{Porque los elementos del campo asocian}\\
(\alpha\beta)\vec{x} &= \alpha(\beta\vec{x}) && \text{Aplicando la definición del producto}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \qquad \text{en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \text{ se cumple que } (\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{F}(\mathbb{F} = \mathbb{R})$ y $\vec{x} \in \mathbb{V}$, por demostrar que $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

$(\alpha + \beta)\vec{x} = (\alpha + \beta)(a_1 + a_2x + a_3x^2)$	Definición de elementos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha a_1 + \beta a_1 + \alpha a_2x + \beta a_2x + \alpha a_3x^2 + \beta a_3x^2$	Pues los elementos del campo tienen distributividad
$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha a_1 + \alpha a_2x + \alpha a_3x^2 + \beta a_1 + \beta a_2x + \beta a_3x^2$	Reordenando
$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha(a_1 + a_2x + a_3x^2) + \beta(a_1 + a_2x + a_3x^2)$	Por definición del producto
$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$	Por definición de los elementos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

$\therefore$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ se cumple distributividad cuando un elemento se multiplica por la suma de dos escalares

Sea $\alpha \in \mathbb{V}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$, por demostrar que $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha((a_1 + a_2x + a_3x^2) + (b_1 + b_2x + b_3x^2))$	Por definición de los elementos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3)x^2)$	Por definición de la suma en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(a_1 + b_1) + \alpha(a_2 + b_2)x + \alpha(a_3 + b_3)x^2$	Por definición del producto en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = (\alpha a_1 + \alpha b_1) + (\alpha a_2 + \alpha b_2)x + (\alpha a_3 + \alpha b_3)x^2$	Porque los elementos del campo tienen distributividad
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(a_1 + a_2x + a_3x^2) + \alpha(b_1 + b_2x + b_3x^2)$	Agrupando de manera conveniente
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(\vec{x}) + \alpha(\vec{y})$	Por definición de dichos elementos

$$\therefore \qquad \text{en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \text{ se cumple que } \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$$

2. Muestre que el conjunto $\beta = \{1, x, x^2\}$ es base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Definición 2. Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ decimos que $\mathcal{S}$ genera a $\mathcal{V}$ si $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos de $\mathcal{S}$ a la generad de s se le denota como $span(\mathcal{S}), < \mathcal{S} >, gen(\mathcal{S})$

Definición 3. Una **base** β de $\mathbb{V}$ espacio vectorial es un subconjunto de $\mathbb{V} \ \cdot \ni \cdot \ \beta$ genera a $\mathbb{V}$ y β es linealmente independiente

Diremos que el conjunto β genera a $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ si ocurre que

$$\alpha_1(p_1(x)) + \alpha_2(p_2(x)) + \alpha_3(p_3(x)) = \beta_1(1 + 0x + 0x^2) + \beta_2(0 + 1x + 0x^2) + \beta_3(0 + 0x + 1x^2)$$

donde $p_1, p_2, p_2 \in \beta$ por lo que, sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1(1 + 0x + 0x^2) + \alpha_2(0 + x + 0x^2) + \alpha_3(0 + 0x + x^2) = \beta_1(1 + 0x + 0x^2) + \beta_2(0 + x + 0x^2) + \beta_3(0 + 0x + x^2)$$

$$(\alpha_1 + 0\alpha_1x + 0\alpha_1x^2) + (0\alpha_2 + x\alpha_2 + 0\alpha_2x^2) + (0\alpha_3 + 0\alpha_3x + \alpha_3x^2) = (\beta_1 + 0\beta_1x + 0\beta_1x^2) + (0\beta_2 + \beta_2x + 0\beta_2x^2) + (0\beta_3 + 0\beta_3x + \beta_3x^2)$$

$$(\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3) + (0\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3)x + (0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3)x^2 = (\beta_1 + 0\beta_2 + 0\beta_3) + (0\beta_1 + \beta_2 + 0\beta_3)x + (0\beta_1 + 0\beta_2 + \beta_3)x^2$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0\alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & \alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & 0\alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0\beta_2 & 0\beta_3 \\ 0\beta_1 & \beta_2 & 0\beta_3 \\ 0\beta_1 & 0\beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \qquad \text{Agrupando cada uno de los elementos en una matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Manteniendo sólo coeficientes}$$

De esta manera ha quedado claro que dichos coeficientes β existen, es más, podemos afirmar que son:

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \alpha_3 = \beta_3$$

$$\therefore \qquad < \beta >= \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

Ahora veamos si β es linealmente independiente para lo que debe ocurrir

Definición 4. Sea $\mathbb{S}$ un subconjunto de $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, decimos que $\mathbb{S}$ es linealmente independiente si la única solución para $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{s}_n = 0$$

es que todos los coeficientes $\alpha_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sean todos 0

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\alpha_1(1+0x+0x^2) + \alpha_2(0+x+0x^2) + \alpha_3(0+0x+x^2) &= \vec{0} && \beta \text{ como combinación lineal} \\
\alpha_1(1+0x+0x^2) + \alpha_2(0+x+0x^2) + \alpha_3(0+0x+x^2) &= 0+0x+0x^2 && \text{Por definición de } \vec{0} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
(1\alpha_1 + 0\alpha_1 x + 0\alpha_1 x^2) + (0\alpha_2 + \alpha_2 x + 0\alpha_2 x^2) + (0\alpha_3 + 0\alpha_3 x + \alpha_3 x^2) &= 0+0x+0x^2 && \text{Distribuyendo} \\
(\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3) + (0\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3)x + (0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3)x^2 &= 0+0x+0x^2 && \text{Agrupando}
\end{aligned}$$

Finalmente igualemos entrada con entrada

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0\alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & \alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & 0\alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{Igualemos entrada por entrada} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{Mateniendo sólo coeficientes}
\end{aligned}$$

Finalmente es fácil observar que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\therefore \quad \beta \text{ es linealmente independiente}$$
$$\therefore \quad \beta \text{ es base para } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

3. Muestre que la siguiente transformación es lineal.

$$T \colon \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

$$T(f(x)) \mapsto xf^{'}(x) + xf(2) + f(3)$$

Como el dominio de T es $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, entonces sean $p(x), q(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, y $\xi \in \mathbb{R}$ recordemos que los elementos de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tienen la forma

$$\begin{aligned}
p(x) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \\
q(x) &= \delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi p(x) + q(x) &= \xi(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) + (\delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2) && \text{Por definición de } p(x), q(x) \\
\xi p(x) + q(x) &= (\xi\alpha_1 + \xi\alpha_2 x + \xi\alpha_3 x^2) + (\delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2) && \text{Distribuyendo } \xi \\
\xi p(x) + q(x) &= (\xi\alpha_1 + \delta_1) + (\xi\alpha_2 + \delta_2)x + (\xi\alpha_3 + \delta_3)x^2 && \text{Por definición de la suma en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(\xi p(x) + q(x)) &= \xi\alpha_2 + \delta_2 + 2x(\xi\alpha_3 + \delta_3) + x((\xi\alpha_1 + \delta_1) + 2(\xi\alpha_2 + \delta_2) + 4(\xi\alpha_3 + \delta_3)) + ((\xi\alpha_1 + \delta_1) + 3(\xi\alpha_2 + \delta_2) + 9(\xi\alpha_3 + \delta_3)) \\
&= \xi\alpha_2 + \delta_2 + 2x(\xi\alpha_3 + \delta_3) + x(\xi\alpha_1 + \delta_1) + 2x(\xi\alpha_2 + \delta_2) + 4x(\xi\alpha_3 + \delta_3) + (\xi\alpha_1 + \delta_1) + 3(\xi\alpha_2 + \delta_2) + 9(\xi\alpha_3 + \delta_3) \\
&= (\xi\alpha_1 + \delta_1) + 3(\alpha_2 + \delta_2) + 9(\xi\alpha_3 + \delta_3) + x(\xi\alpha_1 + \delta_1 + 3\xi\alpha_2 + 3\delta_2 + 4\xi\alpha_3 + 4\delta_3) + 2x^2(\xi\alpha_3 + \delta_3) \\
&= \xi\left(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3 + x(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3) + 2x^2\alpha_3\right) + \delta_1 + 3\delta_2 + 9\delta_3 + x(\delta_1 + 3\delta_2 + 4\delta_3) + 2x^2\delta_3 \\
&= \xi T(p(x)) + T(q(x))
\end{aligned}$$

$\therefore$ T es transformación lineal, pues hemos visto que abre sumas «$p(x) + q(x)$» y saca escalares «ξ»

4. Determine el núcleo y la imagen de T.

Definición 5. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, la **imagen** de una trasformación T es $Im(T) = \{T(\hat{x}) | \hat{x} \in V\}$

Definición 6. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, el **núcleo** de una trasformación T es $Nu(T) = \left\{\hat{x} \in V | T(\hat{x}) = \hat{0}_W\right\}$

Para ello, tomemos un elemento en el dominio de T. Sea $p(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \quad \cdot \ni \cdot \quad p(x) = \eta_1 + \eta_2 x + \eta_3 x^2$ y $\vec{0}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}$

$$
\begin{aligned}
T(p(x)) &= \vec{0}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})} && \text{Por definición del núcleo} \\
T(\eta_1 + \eta_2 x + \eta_3 x^2) &= 0 + 0x + 0x^2 && \text{Por definición de los elementos} \\
\eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 + x(\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3) + 2x^2\eta_3 &= 0 + 0x + 0x^2 && \text{Siguiendo la regla de correspondencia} \\
\\
\eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 &= 0 && \text{Igualando entrada a entrada} \\
x(\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3) &= 0x && \text{Igualando entrada a entrada} \\
2x^2\eta_3 &= 0x^2 && \text{Igualando entrada a entrada} \\
\\
\eta_3 &= 0 && \text{De lo anterior} \\
\eta_1 + 3\eta_2 + 9(0) &= 0 && \text{Sistituyendo} \\
\eta_1 &= -3\eta_2 && \text{Sistituyendo}
\end{aligned}
$$

La solución puede escribirse como $(-3 + 1x + 0x^2)\eta_2$ por lo que el **núcleo** de la transformación $\{(-3(\eta_2) + x(\eta_2) + 0x^2)\}$. Cabe mencionar que la nulidad de T es 1, pues esa es la dimensión del núcleo y además, T no es una transformación uno a uno pues el núcleo $\neq \vec{0}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}$

Para ver cuál es la imagen de la transformación lineal tomemos un elemento arbitrario en el dominio y otro en su imagen. Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, recordemos que los elementos de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tienen la forma

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \\
q(x) &= \delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T(p(x)) &= q(x) && \text{Por definición de la imagen} \\
T(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) &= \delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2 && \text{Por definición delos vectores} \\
\eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 + x(\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3) + 2x^2\eta_3 &= \delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2 && \text{Por definición delos vectores} \\
\\
\eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 &= \delta_1 && \text{Igualando entrada a entrada} \\
x(\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3) &= \delta_2 x && \text{Igualando segunda enterada} \\
2x^2\eta_3 &= \delta_3 x^2 && \text{Igualando tercera entrada} \\
\\
\eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 &= \delta_1 && \text{Igualando entrada a entrada} \\
\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3 &= \delta_2 && \text{Por el inverso multiplicativo de } x \\
2\eta_3 &= \delta_3 && \text{Por el inverso multiplicativo de } x^2
\end{aligned}
$$

$\therefore$ los elementos de la imagen son de la forma $q(x) = \delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2$ donde

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= \eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 \\
\delta_2 &= \eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3 \\
\delta_3 &= 2\eta_3
\end{aligned}
$$

Es decir, todo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

5. Encuentre la matriz asociada a T con respecto a la base β, esto es $[T]_\beta$. Tomememos las bases ordenadas $\beta\{1, x, x^2\}$ y $\gamma = \{1, x, x^2\}$ entonces. Apliquemosla trasformación T a cada uno de los elementos de β

$$
\begin{aligned}
T(p(x)) &= \eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 + x(\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3) + 2x^2\eta_3 && \text{Por el ejercicio anterior}\\
T(1) &= 1 + 3(0) + 9(0) + x(1 + 3(0) + 4(0)) + 2x^2(0) && \text{Porque } \eta_1 = 1, \eta_2 = 0, \eta_3 = 0\\
T(1) &= 1 + x && \text{Operando}\\
\\
T(x) &= (0) + 3(1) + 9(0) + x((0) + 3(1) + 4(0)) + 2x^2(0) && \text{Porque } \eta_1 = 0, \eta_2 = 1, \eta_3 = 0\\
T(x) &= 3 + 3x && \text{Operando}\\
\\
T(x^2) &= (0) + 3(0) + 9(1) + x((0) + 3(0) + 4(1)) + 2x^2(1) && \text{Operando}\\
T(x^2) &= 9 + 4x + 2x^2 && \text{Desarrollando}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 && \text{Igualemos el primer elemento de } \beta\\
T(x) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 && \text{Igualemos el segundo elemento de } \beta\\
T(x^2) &= 9 \cdot 1 + 4 \cdot x + 2 \cdot x^2 && \text{Igualemos el tercer elemento de } \beta
\end{aligned}
$$

De lo anterior, es claro poder concluir que

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. ¿Cuál es el rango de $[T]_\beta$?
El rango de una matriz es el número de columnas linealmente independientes, en este paso es muy claro que sólo tiene 2 columnas linealmente independientes, por lo que su rango es $n = 2$

7. La matriz $[T]_\beta$ es invertible, si sí muéstrelo, si no argumente porque.
Como vimos en clase, una matriz es invertible si y sólo si tiene rango completo, en ese caso no fue así, por lo que $[T]_\beta$ no es invertible

8. ¿Cuales son los valores propios asociados a $[T]_\beta$?

Definición 7. Sea T un operador lineal sobre V, dónde V es de dimensión finita y $\vec{x} \in V$ tal que $\vec{x}$ no es 0. Sean $A \in M_{n*n}(\mathbb{R})$, entonces λ es un valor propio de A si y sólo si $det(A - \lambda Id_n) = 0$

Por lo que comencemos calculando el $det([T]_\beta - \lambda Id_n)$

$$
\begin{aligned}
det\left([T]_\beta - \lambda Id_3\right) &= 0 && \text{Por definición de valores propios}\\
det\left([T]_\beta - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= 0 && \text{Por definición de la identidad}\\
det\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= 0 && \text{Por lo obtenido en } [T]_\beta\\
det\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) &= 0 && \text{Multiplicación por un escalar}\\
det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= 0 && \text{Por suma de matrices}
\end{aligned}
$$

Definición 8. Sea $A \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \quad \cdot \ni \cdot \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Entonces el determinante de A está definido como $det(A) = ad - bc$

Definición 9. Sea $A \in M_{nxn}(\mathbb{F})$ si $n < 1$ entonces $A = (A_{11})$ entonces $det(A) = A_{11}$ para $n \geq 2$ definimos el determinante de manera recursiva como

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n(dimen.)} (-1)^{1+j} A_{1j} det(\hat{A}_{1j})$$

Por lo que el $det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ se calcula como sigue

$$(1-\lambda)det(\hat{A}_{11}) - 3det\hat{A}_{12} + 9det\hat{A}_{13} = 0 \qquad \text{Por lo definido anteriormente}^{(**)}$$

$$\begin{aligned}
det(\hat{A}_{11}) &= (a_{22})(a_{33}) - (a_{32})(a_{23}) && \text{Por definición del determinante en 2x2} \\
det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (3-\lambda)(2-\lambda) - 4(0) && \text{Calculando el determinante del menor} \\
det(\hat{A}_{11}) &= (3-\lambda)(2-\lambda) && \text{Operando}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
det(\hat{A}_{12}) &= (a_{12})(a_{33}) - (a_{32})(a_{13}) && \text{Por definición de determinante en 2x2} \\
det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda) - 0 && \text{Calculando el determinante del menor} \\
det(\hat{A}_{12}) &= 2-\lambda && \text{Operando}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
det(\hat{A}_{13}) &= (a_{12})(a_{23}) - (a_{22})(a_{13}) && \text{Por definición de determinante en 2x2} \\
det \begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= (a_{12})(a_{23}) - (a_{22})(a_{13}) && \text{Calculando el determinante del menor} \\
det(\hat{A}_{13}) &= 0 && \text{Operando}
\end{aligned}$$

Luego, por $(**)$ tenemos que

$$det([T]_\beta - \lambda Id_n) = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 3(2-\lambda) = 0$$

De lo anterior obtenemos la siguiente equación con 3 incógnitas

$$\begin{aligned}
(1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 3(2-\lambda) &= 0 && \text{Por la definición de determinante} \\
(3-\lambda-3\lambda+\lambda^2)(2-\lambda) - 3(2-\lambda) &= 0 && \text{Operando los primeros miembros} \\
6 - 2\lambda - 6\lambda + 2\lambda^2 - 3\lambda + \lambda^2 + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 6 + 3\lambda &= 0 && \text{Desarrolando} \\
-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda &= 0 && \text{Agrupando términos semejantes} \\
-\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 8) &= 0 && \text{Factorizando } \lambda \\
-\lambda(\lambda-2)(\lambda-4) &= 0 && \text{Factorizando el trinomio}
\end{aligned}$$

$\therefore$ las soluciones a la ecuación son

$$\lambda_1 = 4$$
$$\lambda_2 = 2$$
$$\lambda_3 = 0$$

esos mismos son los valores propios asociados a $[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9. Determine los vectores propios asociados a cada valor propio.

Definición 10. Decimos que $\vec{x}$ es vector propio de T si $T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para eso tomemos $\lambda_1 = 4$ y sustituyamos en $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Por la definición de vector propio}$$

$$\begin{pmatrix} 1-(4) & 3 & 9 \\ 1 & 3-(4) & 4 \\ 0 & 0 & 2-(4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Porque tomamos } \lambda_1 = 4$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Operando los signos}$$

De lo anterior obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$-3x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \tag{1}$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \tag{2}$$
$$-2x_3 = 0 \tag{3}$$

Por lo que es fácil deducir que $x_3 = 0$ y si lo sustituimos en 2, tenemos que $x_2 = x_3$ por lo que

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para eso tomemos $\lambda_2 = 2$ y sustituyamos en $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Por la definición de vector propio}$$

$$\begin{pmatrix} 1-(2) & 3 & 9 \\ 1 & 3-(2) & 4 \\ 0 & 0 & 2-(2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Porque tomamos } \lambda_2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Operando los signos}$$

De lo anterior obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$-1x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \tag{4}$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \tag{5}$$

Por lo que es fácil deducir que $x_1 = -\frac{3}{4}x_3$, al sumar ambas equaciones y si lo sustituimos en 5, tenemos que $x_2 = \frac{-13}{4}x_3$, para el vector tomemos $x_3 = 4$ por lo que

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Para eso tomemos $\lambda_3 = 0$ y sustituyamos en $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Por la definición de vector propio}$$

$$\begin{pmatrix} 1-(0) & 3 & 9 \\ 1 & 3-(0) & 4 \\ 0 & 0 & 2-(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Porque tomamos } \lambda_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Operando los signos}$$

De lo anterior obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \tag{6}$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \tag{7}$$
$$2x_3 = 0 \tag{8}$$

Por lo que es fácil deducir que $x_3 = 0$, al sustituirlo en 7, tenemos que $x_1 = -3x_2$ tomemos $x_2 = 1$ por lo que

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, podemos obtener

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & -13 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Muestre que el conjunto de los vectores propios es una base ordenada.

Definición 11. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial dimensionalmente finito. Una base ordenada para $\mathbb{V}$ es una base para $\mathbb{V}$ establecida con un orden específico; es decir, una base ordenada para $\mathbb{V}$ en una secuencia finita de elementos de $\mathbb{V}$ linealmente independientes que generan a $\mathbb{V}$

Nombremos $\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, que también se puede expresar como $\gamma = \{1 + x, -3 - 13x + 4x^2, -3 + x\}$

Veamos quién es la generada de γ. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ y $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ entonces planteemos, y reorganicemos con los términos semejantes

$$\alpha_1(1 + x + 0x^2) + \alpha_2(-3 - 13x + 4x^2) + \alpha_3(-3 + x + 0x^2) = \beta_1(1 + 0x + 0x^2) + \beta_2(0 + x + 0x^2) + \beta_3(0 + 0x + x^2)$$
$$(\alpha_1 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3) + (\alpha_1 - 13\alpha_2 + \alpha_3)x + (0\alpha_1 + 4\alpha_2 + 0\alpha_3)x^2 = (\beta_1 + 0\beta_2 + 0\beta_3) + (0\beta_1 + \beta_2 + 0\beta_3)x + (0\beta_1 + 0\beta_2 + \beta_3)x^2$$

$$\alpha_1 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3 = \beta_1 + 0\beta_2 + 0\beta_3$$
$$\alpha_1 - 13\alpha_2 + \alpha_3 = 0\beta_1 + \beta_2 + 0\beta_3$$
$$0\alpha_1 + 4\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0\beta_1 + 0\beta_2 + \beta_3$$

Ahora sólo mantengamos los coeficientes y resolvamos por el método *Gauss-Jordan*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -13 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{1a Fila} \cdot \text{-1 + 2a Fila en 2aFila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{2a Fila} \cdot -\frac{1}{10}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{array}\right) \qquad \text{2a Fila} \cdot -4 + \text{3a Fila en 3a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) \qquad \text{3a Fila} \cdot \frac{5}{8}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) \qquad \text{3a Fila} \cdot \frac{2}{5} + \text{2a Fila en 2a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) \qquad \text{3a Fila} \cdot \frac{2}{5} + \text{2a Fila en 2a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{15}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) \qquad \text{3a Fila} \cdot 3 + \text{3a Fila en 3a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{15}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{21}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) \qquad \text{2a Fila} \cdot 3 + \text{1a Fila en 1a Fila}$$

De esta manera hemos obtenido los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, veamos la sutileza al calcularlos pues encontramos Q^{-1}

$$\therefore \qquad <\gamma>= \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

Por lo anterior, ya hemos encontrado Q^{-1} y esto sólo ocurre si la matriz es de rango completo, así que podemos afirmar que el rango de Q es 3, luego resulta sencillo observar que es linealmente independiente, desde su construcción.

Por otra parte, si comparamos γ con β' del ejercicio 12, veremos que ambas son bases pero no son las mismas bases ordenadas pues en γ se describe un orden distinto.

$$\therefore \qquad \gamma \text{ es una base ordenada}$$

11. Determine $Q \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, tal que $Q^{-1}[T]_\beta Q = D$, donde D es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son valores propios.

Por el inciso anterior, podemos rescatar que

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{21}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

Y por el ejercicio 9 tenemos que

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & -13 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

y del ejercicio 5 concluimos que

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo que sólo resta calcular

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{21}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & -13 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{21}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & -13 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{21}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & -13 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente veamos que $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$ y efectivamente, son los elementos de la diagonal

12. Muestre que $\beta^{'} = \{-3 + x, -3 - 13x + 4x^2, 1 + x\}$, es una base para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y además determine $[T]_{\beta'}$
Primero veamos quién es la generada de β'