Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Tarea Examen

Kevin Ariel Merino Peña[1]

Lema 1. Sea B $\in M_{nxm}(\mathbb{R})$ $\ni$ $B = [b_{ij}]$ y B es la maatriz asociada a la función cuadrática $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $H(h_1 \dots h_n) = (h_1 \dots h_n) \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ es definida positiva, entonces existe $M > 0$ tal que, $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$

$$H(\vec{h}) \leq M \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2$$

Demostración. Definimos $g(\vec{h}) = H(\vec{h})$ y consideremos $\left|\left|\vec{h}\right|\right| = 1$.Aquí observamos que g es continua, por lo que tenemos

$$H(\vec{h}) = H\left(\frac{\vec{h}}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\left|\left|\vec{h}\right|\right|\right) = \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2 \left(\frac{\vec{h}}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\right) = \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2 g\left(\frac{\vec{h}}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\right)$$

así, g alcanza su **máximo** en un intervalo abierto de $\mathbb{R}^n$ i.e. $\exists M \in \mathbb{R}$ $\ni$

$$g\left(\frac{\vec{h}}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\right) \leq M \implies \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2 g\left(\frac{\vec{h}}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\right) \leq \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2 M$$

Entonces habiendo hecho esta observación podemos concluir

$$H(\vec{h}) = H\left(\frac{\vec{h}}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\left|\left|\vec{h}\right|\right|\right) = \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2 \left(\frac{\vec{h}}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\right) = \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2 g\left(\frac{\vec{h}}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\right) \leq \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2 M$$

Siguiendo la cadena de desigualdades, tenemos:

$$H(\vec{h}) \leq \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2 M$$

$\square$

---

[1] Número de cuenta 317031326