

Espacios vectoriales y Álgebra lineal

Matemáticas para las ciencias aplicadas II

Aquino Chapa Armando Abraham y Merino Peña Kevin Ariel
3 de marzo de 2020

1. Escribe el vector cero en $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$

Definición 1 (Matriz). Una **Matriz** es un arreglo rectangular de elementos de un campo $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ de la forma

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

A los elementos $a_{i,j}$ con $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq i \leq m$ se les llama entradas de la matriz, a las matrices las denotamos por \mathbb{A} (*letras mayúsculas*) y al conjunto de las matrices de $m \times n$ se les denota por $M_{m \times n}(\mathbb{F})$

De esta manera tenemos que el vector cero de la matriz de 3 renglones por 4 columnas es aquella cuyas entradas (todas) son 0 *i. e.*

$$A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea V el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en \mathbb{R} . Muestre que V es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar para funciones.

Veamos que la derivada cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Así hemos probado que la derivada abre sumas

$$\begin{aligned} (cf(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

De esta manera queda conolidado que en la función derivada, los escalares son sacados de la función

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto se vale para cualquier constante, en particular el 0

3. Prueba que el conjunto de las funciones pares en \mathbb{R} es un espacio vectorial con suma y multiplicación por escalar usuales para funciones. Recuerde que una función es par si $\forall x \in \text{Dom}(f)$ entonces $f(-x) = f(x)$

Si tenemos en cuenta que $f(-t) + g(-t) = f(t) + g(t)$ y que si tenemos constantes siempre ocurre que $cf(-t) = cf(t)$ entonces ya hemos probado las dos primeras condiciones y para hallar el neutro basta con usar el 0 del campo (\mathbb{R}) para notar que también lo manda al 0 vector.

4. Sea V el conjunto de pares ordenados de números reales. Si (a_1, a_2) y (b_1, b_2) son elementos de V y $\alpha \in \mathbb{R}$, definamos la suma y multiplicación escalar de la siguiente manera:

$$(i) \quad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(ii) \quad \alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2).$$

¿Es V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} con estas operaciones?

No puede ser un espacio vectorial porque si tenemos que

$$0(a_1, a_2) = (0, a_2)$$

para cumplir el cero vector, entonces se cumpliría para cualquier a_2 lo cual no es posible pues contradice la unicidad del cero.

5. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de \mathbb{R}^3 bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar usual.

Definición 2. Sea \mathcal{U} un subconjunto de \mathcal{V} espacio vectorial sobre \mathbb{F} decimos que \mathcal{U} es un subespacio vectorial de \mathcal{V} si cumple lo siguiente

$$I) \quad \vec{0} \in \mathcal{U}$$

$$II) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{U} \implies \vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{U}$$

$$III) \quad \text{Sea } \alpha \in \mathbb{F}, \vec{u} \in \mathcal{U} \implies \alpha \cdot \vec{u} \in \mathcal{U}$$

$$a) \quad W_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2\}$$

Veamos que W_1 contiene a $\vec{0}$ esto es que algún elemento en $W_1 = (0, 0, 0)$ por lo que

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (a_1, a_2, a_3) && \text{Por } \vec{0} \in \mathbb{R}^3 \\ &= (3a_2, a_2, -a_2) && \text{Por } a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2 \\ &= (3(0), (0), -(0)) && \text{Para cualquier } a_2 \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Por otra parte comprobemos que la suma está dentro de W_1

Sean $\hat{u} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\hat{v} = (b_1, b_2, b_3) \in W_1$ la suma de vectores se realiza entrada a entrada por lo que

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) &= (3a_2, a_2, -a_2) + (3b_2, b_2, -b_2) \\ &= (3a_2 + 3b_2, a_2 + b_2, -a_2 - b_2) \\ &= (3(a_2 + b_2), (a_2 + b_2), -(a_2 + b_2)) \end{aligned}$$

Y como $a_1 + b_1 \in \mathbb{R}^3$ entonces $\hat{u} + \hat{v} \in W_1$ por lo que cumple II)

Finalmente veamos que si $k \in \mathbb{R}, \hat{u} \in W_1 \implies k\hat{u} \in W_1$

$$\begin{aligned} k(3a_2, a_2, -a_2) &\in W_1 \\ (3ka_2, ka_2, -ka_2) &\in W_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto cumple III)

$\therefore W_1$ es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

b) $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = a_3 + 2\}$

Veamos si $\hat{0} \in W_2$ si esto ocurriera entonces $(0, 0, 0) \in W_2$ lo que significaría lo siguiente

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (a_3 + 2, a_2, a_3) && \text{Por que deben ser iguales entrada a entrada} \\ 0 &= a_3 + 2 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= a_3 \end{aligned}$$

Podemos observar que en esta situación, $a_3 = -2 \wedge a_3 = 0$ lo cual no es posible, dicha contradicción vino de suponer que $\hat{0} \in W_2$

$$\therefore \hat{0} \notin W_2$$

por lo que W_2 **no** es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

c) $W_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0\}$

Notemos que en la declaración de los elementos de W_3 podemos deducir que

$$a_3 = 7a_2 - 2a_1$$

entonces $\hat{u} \in W_3 \implies \hat{u} = (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1)$

Veamos que para cumplir $I)$ el vector cero debería estar en W_1 *i.e.*

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \\ 0 &= a_1 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= 7a_2 - 2a_1 \end{aligned}$$

lo anterior se cumple si $a_2 = 0 = a_1$

$$\therefore \hat{0} \in W_3$$

Ahora, sean $\hat{u}, \hat{v} \in W_3 \implies \hat{u} = (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \wedge \hat{v} = (b_1, b_2, 7b_2 - 2b_1)$ y probemos que $\hat{u} + \hat{v} \in W_3$

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) + (b_1, b_2, 7b_2 - 2b_1) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 7a_2 + 7b_2 - 2a_1 - 2b_1) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 7(a_2 + b_2) - 2(a_1 + b_1)) \end{aligned}$$

y como $a_1 + b_1 \in \mathbb{R}$ también se encontrarán dentro de W_3 por lo que la suma es cerrada en el conjunto W_3

Por último veamos que si $k \in \mathbb{R}, \hat{u} \in W_3 \implies k \cdot \hat{u} \in W_3$

$$\begin{aligned} k\hat{u} &= k(a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \\ k\hat{u} &= (ka_1, ka_2, 7ka_2 - 2ka_1) \end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir que cada uno de esos ka_1, ka_2 elementos estarán en \mathbb{R} por lo que $k\hat{u}$ resultarán también estar en W_3

$\therefore W_3$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

d) $W_4 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 | a_1 - 4a_2 - a_3 = 0\}$ De la definición de los elementos de W_4 se sigue que si \hat{u} es un elemento de este conjunto, tendrá la forma $\hat{u} = (4a_2 + a_3, a_2, a_3)$ Comencemos averiguando si W_4 tiene elemento neutro, *i. e.*

$$\begin{aligned}(0, 0, 0) &= (4a_2 + a_3, a_2, a_3) \\ 0 &= 4a_2 + a_3 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= a_3\end{aligned}$$

para ser iguales entrada a entrada

Lo anterior ocurre cuando $a_2 = a_3 = 0$ por lo que $\hat{0} \in W_4$ y así cumple la condición *I*)

Siguiendo con la comprobación de sus propiedades como subespacio vectorial, tenemos que: Sean $\hat{u}, \hat{v} \in W_4 \implies \hat{u} + \hat{v} \in W_4$ *i. e.*

$$\begin{aligned}\hat{u} + \hat{v} &= (4a_2 + a_3, a_2, a_3) + (4b_2 + b_3, b_2, b_3) \\ &= (4a_2 + 4b_2 + b_3 + a_3, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (4(a_2 + b_2) + (b_3 + a_3), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3))\end{aligned}$$

sumando entrada por entrada
asociatividad y distributividad en \mathbb{R}

y como $(a_2 + b_2) \in \mathbb{R}$ la suma de $\hat{u}, \hat{v} \in W_4$

Finalmente notemos que si $k \in \mathbb{R}, \hat{u} \in W_4 \implies k \cdot \hat{u} \in W_4$

$$\begin{aligned}k\hat{u} &= k(4a_2 + a_3, a_2, a_3) \\ &= (4ka_2 + ka_3, ka_2, ka_3)\end{aligned}$$

por distributividad

y $ka_2, ka_3 \in \mathbb{R}$ entonces $k \cdot \hat{u} \in W_4$

$\therefore W_4$ es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

6. En cada caso diga si los vectores son generados por el conjunto S

Definición 3. Sea \mathcal{S} un subconjunto de un espacio vectorial \mathcal{V} decimos que \mathcal{S} genera a \mathcal{V} si $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos de \mathcal{S} al generado de \mathcal{S} se le denota como $span(\mathcal{S}), <\mathcal{S}>, gen(\mathcal{S})$

a) $(2, -1, 1), S = \{(1, 0, 2), (-1, 1, 1)\}$

Sea $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Entonces $(2, -1, 1) = \alpha_1(1, 0, 2) + \alpha_2(-1, 1, 1) = (\alpha_1, 0, 2\alpha_1) + (-\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2$.

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_2 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - (-1) &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1\end{aligned}$$

Al resolver el sistema, obtenemos:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 1 &= 1\end{aligned}$$

Entonces:

$$1(1, 0, 2) + (-1)(-1, 1, 1) = (1, 0, 2) + (1, -1, -1) = (2, -1, 1)$$

Cómo el sistema de ecuaciones si se satisface, el conjunto S SI genera al vector $(2, -1, -1)$

b) $(2, -1, 1, 3), S = \{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 1)\}$

Sea $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Entonces: $(2, -1, 1, 3) = \alpha_1(1, 0, 1, -1) + \alpha_2(0, 1, 1, 1) = (\alpha_1, 0, \alpha_1, -\alpha_1) + (0, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2$.

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 &= 3\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2 - 1 &= 1 \\ -(-1) + 2 &= 3\end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 1 &= 1 \\ 3 &= 3\end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones verificamos si el conjunto S genera al vector. Entonces:

$$2(1, 0, 1, -1) + (-1)(0, 1, 1, 1) = (2, 0, 2, -2) + (0, -1, -1, -1) = (2, -1, -1, -3)$$

Como el producto de los escalares por los elementos del conjunto S no forman al vector, podemos concluir que S **NO** genera a $(2, -1, 1, 3)$.

c) $2x^3 - x^2 + x + 3, S = \{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1\}$

Sean α_1, α_2 y α_3 elementos del campo, si suponemos que $2x^3 - x^2 + x + 3$ es generado por S implicará que existen dichos 3 elementos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = \alpha_1(x^3 + x^2 + x + 1) + \alpha_2(x^2 + x + 1) + \alpha_3(x + 1)$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 \\ \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 \\ \alpha_3 x + \alpha_3\end{aligned}$$

Por lo que ocurre lo siguiente

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3$$

$$\begin{aligned}
2x^3 - x^2 + x + 3 &= \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3 \\
&= x^3(\alpha_3) + x^2(\alpha_2 + \alpha_1) + x(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= 2 \\
\alpha_2 &= -1 - \alpha_1 \\
\alpha_2 &= -1 - 2 \\
\alpha_2 &= -3
\end{aligned}$$

Ahora llegamos a una contradicción, puesto que el sistema de ecuaciones anterior implica que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3 = 1$ por lo que el conjunto S no genera $2x^3 - x^2 + x + 3$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Recordemos que la suma de matrices se hace entrada por entrada eso es, si se van a sumar 2 matrices $A + B$ se hace de la forma $a_{ij} + b_{ij} \forall i, j \in A, B$ de tal manera que existen $a_{ij} + b_{ij} \forall i, i \in A, B$ de tal manera que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + \gamma_{1,1} & \beta_{1,2} + \gamma_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Notemos que

$$-\alpha_{2,1} = -3 \implies \alpha = 3$$

y luego

$$\beta_{2,2} = 4 \implies \beta = 4$$

y finalmente

$$\gamma = 2 - \beta_{1,2} \implies \gamma = 4$$

7. Determina cuando los siguientes conjuntos son linealmente dependientes o linealmente independientes.

$$\text{a) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -3\alpha_1 \\ -2\alpha_1 & 4\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\alpha_2 & 6\alpha_2 \\ 4\alpha_2 & -8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente renglón y columna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_2 & -3\alpha_1 + 6\alpha_2 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 & 4\alpha_1 - 8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\
-3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0 \\
-2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0 \\
4\alpha_1 - 8\alpha_2 &= 0
\end{aligned}$$

Multiplicamos dos veces el renglón 3 y lo sumamos al renglón 4. También multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 3.

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ -3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Por último multiplicamos tres veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 2:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = 2\alpha_2$.

Esto indica que α_1 depende de α_2 . Por lo tanto, el conjunto $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$ es **linealmente dependiente**.

$$\text{b) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -2\alpha_1 \\ -\alpha_1 & 4\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_2 & \alpha_2 \\ 2\alpha_2 & -4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente renglón y columna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & -2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 & 4\alpha_1 - 4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \\ 4\alpha_1 - 4\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Multiplicamos cuatro veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 4. También sumamos el renglón 1 al renglón 2:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Tenemos que $\alpha_2 = 0$, Entonces lo sustituimos en las demás ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 0 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 0 &= 0\end{aligned}$$

Es claro notar que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$.

Cómo ambos valen 0, podemos concluir que el conjunto $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ es **linealmente independiente**.

$$\text{c) } \{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\} \in P_3(\mathbb{R})$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

Tenemos que: $0x^3 + 0x^2 + 0x + d = \alpha_1(x^3 + 2x^2) + \alpha_2(-x^2 + 3x + 1) + \alpha_3(x^3 - x^2 + 2x - 1)$

$$x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = (\alpha_1 + \alpha_3)x^3 + (2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)x^2 + (3\alpha_2 + 2\alpha_3)x + (\alpha_2 - \alpha_3).$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Ahora multiplicamos -3 veces el renglón 4 y le sumamos el renglón 1:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Podemos obtener que $\alpha_3 = 0$. Entonces sustituimos este valor en las ecuaciones.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - 0 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

De lo anterior deducimos que $\alpha_1 = 0$, por tanto:

$$\begin{aligned}0 - \alpha_2 - 0 &= 0 \\ 0 + 3\alpha_2 + 0 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. Podemos que concluir que el conjunto $\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\} \in P_3(\mathbb{R})$ es **linealmente independiente**.

$$\text{d) } \{(1, -1, 2), (1, -2, 1), (1, 1, 4)\} \in \mathbb{R}^3$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\alpha_1(1, -1, 2) + \alpha_2(1, -2, 1) + \alpha_3(1, 1, 4) = (0, 0, 0). \text{ Ahora:}$$

$(\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (\alpha_2, -2\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, 4\alpha_3) = (0, 0, 0)$. Ordenamos los escalares:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3) = (0, 0, 0)$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos a "menos" el renglón 3. También sumamos el renglón 1 al renglón 2.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 2. Y al renglón 1 le sumamos el renglón 2.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Entonces nos queda el siguiente sistema.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

De esto podemos deducir que $\alpha_1 = -3\alpha_3$, $\alpha_2 = 2\alpha_3$ y $\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{2}$.

Entonces podemos concluir que el conjunto $\{(1, -1, 2), (1, -2, 1), (1, 1, 4)\} \in \mathbb{R}^3$ es **linealmente dependiente**.

$$\mathbf{e}\{(1, -1, 2), (2, 0, 1), (-1, 2, -1)\} \in \mathbb{R}^3$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

$$\alpha_1(1, -1, 2) + \alpha_2(2, 0, 1) + \alpha_3(-1, 2, -1) = (0, 0, 0). \text{ Ahora:}$$

$(\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (2\alpha_2, 0\alpha_2, \alpha_2) + (-\alpha_3, 2\alpha_3, -\alpha_3) = (0, 0, 0)$. Ordenamos los escalares:

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Primero multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 3. Luego sumamos el renglón 2 al renglón 1.

$$\begin{aligned}0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 1:

$$\begin{aligned}0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 5\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos que $\alpha_2 = 0$ y sustituimos en las demás ecuaciones.

$$\begin{aligned}0 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Es fácilmente apreciar que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 0$

Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto $(1, -1, 2), (2, 0, 1), (-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$ es **linealmente independiente**

Recuerde que $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \mid a_k \in \mathbb{R} \forall k = 0, 1, 2, \dots, n\}$

8. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son bases para \mathbb{R}^3 ?

Definición 4. Una **base** β de \mathcal{V} espacio vectorial es un subconjunto de \mathcal{V} tal que β genera a \mathcal{V} y β es linealmente independiente

a) $S = \{(1, 0, -1), (2, 5, 1), (0, -4, 3)\}$ En primer lugar veamos quién es el generado del conjunto S , recordemos que un conjunto genera a otro $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos de S

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 5, 1) + \gamma(0, -4, 3)$$

$$\begin{aligned}\alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 5, 1) + \gamma(0, -4, 3) &= (\alpha, 0, -\alpha) + (2\beta, 5\beta, \beta) + (0, -4\gamma, 3\gamma) \\ &= (\alpha + 2\beta, 5\beta - 4\gamma, -\alpha + \beta + 3\gamma)\end{aligned}$$

Necesitamos que cada uno de esos vectores pueda ser el valor de una posición de \mathbb{R}^3 por lo que debería verse como

$$\alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 5, 1) + \gamma(0, -4, 3) = \delta(1, 0, 0) + \epsilon(0, 1, 0) + \eta(0, 0, 1)$$

De esta manera podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta + 0\gamma &= \delta + 0\epsilon + 0\eta \\ 0\alpha + 5\beta - 4\gamma &= 0\delta + \epsilon + 0\eta \\ -\alpha + \beta + 3\gamma &= 0\delta + 0\epsilon + \eta\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma \\ -\alpha & \beta & 3\gamma \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ 0\delta & 0\epsilon & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0\delta & 0\epsilon & \eta \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0\delta & 0\epsilon & \eta \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta \end{array} \right) && \text{1ra fila} + 2\text{da fila en } \mathbf{3ra \text{ fila}} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta \end{array} \right) && \text{2da fila} \cdot \frac{1}{5} \text{ en } \mathbf{2da \text{ fila}} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & \delta & -\frac{3}{5}\epsilon & \eta \end{array} \right) && \text{2da fila} \cdot -3 + 3^{ra} \text{ fila en } \mathbf{3ra \text{ fila}} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & \delta & -\frac{3}{5}\epsilon & \eta \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{array} \right) && \text{3ra fila} \cdot \frac{5}{27} \text{ en } \mathbf{3ra \text{ fila}} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{array} \right) && (3ra \text{ fila} \cdot \frac{4}{5}) + 2^{da} \text{ fila en } \mathbf{2da \text{ fila}} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{19}{27}\delta & -\frac{2}{9}\epsilon & -\frac{8}{27}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{array} \right) && (2da \text{ fila} \cdot -2) + 1^a \text{ fila en } \mathbf{1ra \text{ fila}} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{19}{27}\delta & -\frac{2}{9}\epsilon & -\frac{8}{27}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{27} & -\frac{2}{9} & -\frac{8}{27} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{27} & \frac{1}{9} & \frac{4}{27} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{27} \end{array} \right) && \text{Conservando sólo } \mathbf{coeficientes}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{19}{27}\delta - \frac{2}{9}\epsilon - \frac{8}{27}\eta \\
\beta &= \frac{4}{27}\delta + \frac{1}{9}\epsilon + \frac{4}{27}\eta \\
\delta &= \frac{5}{27}\delta - \frac{1}{9}\epsilon + \frac{5}{27}\eta
\end{aligned}$$

$\therefore \mathcal{S}$ genera a \mathbb{R}^3

Ahora veamos si es linealmente independiente, lo cual ocurre si la única solución para

$$\alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 5, 1) + \gamma(0, -4, 3) = 0$$

es que

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\begin{aligned}
\alpha + 2\beta + 0\gamma &= 0 \\
0\alpha + 5\beta - 4\gamma &= 0 \\
-\alpha + \beta + 3\gamma &= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo dicho sistema obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0 \\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array} \right) && \text{1ra fila} + 2\text{da fila en } \mathbf{3ra \text{ fila}} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array} \right) && \text{2da fila} \cdot \frac{1}{5} \text{ en } \mathbf{2da \text{ fila}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & 0 \end{array}\right) & \text{2da fila} \cdot -3 + 3^{ra} \text{ fila en } \mathbf{3ra \text{ fila}} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & 0 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) & \text{3ra fila} \cdot \frac{5}{27} \text{ en } \mathbf{3ra \text{ fila}} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) & (3ra \text{ fila} \cdot \frac{4}{5}) + 2^{da} \text{ fila en } \mathbf{2da \text{ fila}} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) & (2da \text{ fila} \cdot -2) + 1^a \text{ fila en } \mathbf{1ra \text{ fila}} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) & \text{Conservando sólo } \mathbf{coeficientes}
\end{aligned}$$

De esta manera podemos concluir que S es **linealmente independiente**

$\therefore S$ es Base para \mathbb{R}^3

b) $S = \{(2, -4, 1), (0, 3, -1), (6, 0, -1)\}$

Veamos quién es el generado de S , un conjunto genera a otro si todo elemento del segundo conjunto puede ser expresado como una combinación lineal del primero, en este caso elementos de S

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(2, -4, 1) + \beta(0, 3, -1) + \gamma(6, 0, -1)$$

$$\begin{aligned}
\alpha(2, -4, 1) + \beta(0, 3, -1) + \gamma(6, 0, -1) &= (2\alpha, -4\alpha, \alpha) + (0, 3\beta, -\beta) + (6\gamma, 0, -\gamma) \\
&= (2\alpha + 6\gamma, -4\alpha + 3\beta, \alpha - \beta - \gamma)
\end{aligned}$$

Necesitamos que cada uno de dichos vectores pueda ser el valor de una posición en \mathbb{R}^3 por lo que debería de verse como

$$\alpha(2, -4, 1) + \beta(0, 3, -1) + \gamma(6, 0, -1) = \delta(1, 0, 0) + \xi(0, 1, 0) + \eta(0, 0, 1)$$

De esta manera obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
2\alpha + 0\beta + 6\gamma &= \delta + 0\xi + 0\eta \\
-4\alpha + 3\beta + 0\gamma &= 0\delta + \xi + 0\eta \\
\alpha - \beta - \gamma &= 0\delta + 0\xi + \eta
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2\alpha & 0\beta & 6\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \delta & 0\xi & 0\eta & 2\alpha & 0\beta & 6\gamma \\ 0\delta & \xi & 0\eta & -4\alpha & 3\beta & 0\gamma \\ 0\delta & 0\xi & \eta & \alpha & -\beta & -\gamma \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2\alpha & 0\beta & 6\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) \quad \text{1ra fila} \cdot \frac{1}{2} \text{ en 1a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & \gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) \quad (1ra \text{ fila} \cdot 4) + 2a \text{ fila en } 2a \text{ Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) \quad \text{3ra fila} - 1ra \text{ fila en } 3ra \text{ fila}$$

$$\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) & \text{2fa fila} \cdot \frac{1}{3} \text{ en 2a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{1}{6}\delta & \frac{1}{3}\xi & \eta \end{array} \right) & \text{3ra fila} - 2\text{a fila en 3a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{1}{6}\delta & \frac{1}{3}\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) & \text{3a fila} \cdot 6 \text{ en 3a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) & \text{3a fila} \cdot -\frac{2}{3} + 2\text{a fila en 2a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & 0\delta & -\xi & -3\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) & \text{3a fila} \cdot -\frac{1}{2} + 1\text{a fila en 1a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & 0\delta & -\xi & -3\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right) & \text{Conservando sólo coeficientes}
\end{array}$$

Notemos que para γ tenemos que tiene ceros en la parte izquierda y puede tener valores distintos de cero en la parte derecha, por lo tanto el sistema de ecuaciones es inconsistente y consecuentemente

S **no** genera a \mathbb{R}^3
 $\therefore S$ **no** es base de \mathbb{R}^3

c) $S\{(1, 2, -1), (1, 0, 2), (2, 1, 1)\}$

Comencemos por ver quien en es generado de S , recordemos que un conjunto genera a otro si $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos para S

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(1, 2, -1) + \beta(1, 0, 2) + \gamma(2, 1, 1)$$

$$\begin{aligned}
\alpha(1, 2, -1) + \beta(1, 0, 2) + \gamma(2, 1, 1) &= (\alpha, 2\alpha, -\alpha) + (\beta, 0\beta, 2\beta) + (2\gamma, \gamma, \gamma) \\
&= (\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha + 0\beta + \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma)
\end{aligned}$$

Es menester que cada una de esas entradas represente una en \mathbb{R}^3 pues nos gustaría ver que S genera a \mathbb{R}^3 por lo que obtenemos la siguiente ecuación

$$(\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha + 0\beta + \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma) = \delta(1, 0, 0) + \xi(0, 1, 0) + \eta(0, 0, 1)$$

y así tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta + 2\gamma &= \delta + 0\xi + 0\eta \\
2\alpha + 0\beta + \gamma &= 0\delta + \xi + 0\eta \\
-\alpha + 2\beta + \gamma &= 0\delta + 0\xi + \eta
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 2\alpha & 0\beta & \gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \delta & 0\xi & 0\eta & \alpha & \beta & 2\gamma \\ 0\delta & \xi & 0\eta & 2\alpha & 0\beta & \gamma \\ 0\delta & 0\xi & \eta & -\alpha & 2\beta & \gamma \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 2\alpha & 0\beta & \gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) & \text{2a fila} - 2(1\text{a fila}) \text{ en 2a fila} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) & \text{1a fila} + 3\text{a fila en 3a fila} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) & \text{2a fila} \cdot -\frac{1}{2} \text{ en 2a fila} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & -2\delta & \frac{3}{2}\xi & \eta \end{array} \right) & \text{2a fila} \cdot -3 + 3\text{a fila en 3a fila} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & -2\delta & \frac{3}{2}\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array} \right) & \text{3a fila} \cdot -\frac{2}{3} \text{ en 3a Fila} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array} \right) & \text{3a fila} \cdot -\frac{3}{2} + 2\text{a fila en 2a fila} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 0\gamma & -\frac{5}{3}\delta & 2\xi & \frac{4}{3}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array} \right) & (3\text{a fila} \cdot -2) + 1\text{a fila en 1a Fila} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 0\gamma & -\frac{5}{3}\delta & 2\xi & \frac{4}{3}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 0\gamma & -\frac{2}{3}\delta & 1\xi & \frac{1}{3}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array} \right) & \text{1a fila} - 2\text{a fila en 1a fila} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 0\gamma & -\frac{2}{3}\delta & 1\xi & \frac{1}{3}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \end{array} \right) & \text{Manteniendo sólo coeficientes}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{2}{3}\delta + 1\xi + \frac{1}{3}\eta \\
\beta &= -\delta + \xi + \eta \\
\gamma &= \frac{4}{3}\delta - \xi - \frac{2}{3}\eta
\end{aligned}$$

$\therefore S$ genera a \mathbb{R}^3

Ahora veamos si el linealmente independiente, lo cual ocurre si la única solución a la siguiente ecuación es que todos los coeficientes sean 0

$$\begin{aligned}
\alpha(1, 2, -1) + \beta(1, 0, 2) + \gamma(2, 1, 1) &= 0 \\
(\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha + 0\beta + \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma) &= 0
\end{aligned}$$

Lo cual permite formar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \\
2\alpha + 0\beta + \gamma &= 0 \\
-\alpha + 2\beta + \gamma &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl}
\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 2\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0 \end{array} \right) & \text{2a fila} - 2(1a \text{ fila}) \text{ en 2a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array} \right) & \text{1a fila} + 3a \text{ fila en 3a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array} \right) & \text{2a fila} \cdot -\frac{1}{2} \text{ en 2a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & 0 \end{array} \right) & \text{2a fila} \cdot -3 + 3a \text{ fila en 3 fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & 0 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array} \right) & \text{3a fila} \cdot -\frac{2}{3} \text{ en 3a Fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array} \right) & \text{3a fila} \cdot -\frac{3}{2} + 2a \text{ fila en 2a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array} \right) & (3a \text{ fila} \cdot -2) + 1a \text{ fila en 1a Fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array} \right) & \text{1a fila} - 2a \text{ fila en 1a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \text{Manteniendo sólo coeficientes}
\end{array}$$

Así podemos concluir que S es linealmente independiente

$\therefore S$ es base para \mathbb{R}^3

9. Diga si los siguientes $x^3 - 2x^2 + 1, 4x^2 - x + 3y3x - 2$ generan a $P_3(\mathbb{R})$

Sea $ax^3 + bx^2 + cx + d \in (\mathbb{R})$.

Tomamos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in (\mathbb{R})$. Entonces:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (\alpha_1)x^3 + (-2\alpha_1 + 4\alpha_2)x^2 + (\alpha_2 + 3\alpha_3)x + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3)$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l}
\alpha_1 = a \\
-2\alpha_1 + 4\alpha_2 = b \\
-\alpha_2 + 3\alpha_3 = c \\
\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = d
\end{array}$$

Sustituimos α_1 en las demás ecuaciones

$$\begin{array}{l}
\alpha_1 = a \\
-2a + 4\alpha_2 = b \\
-\alpha_2 + 3\alpha_3 = c \\
a + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = d
\end{array}$$

Del renglón 2 es fácil apreciar cuál es el valor de α_2

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 &= c \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

De igual forma sustituimos α_2 en las demás ecuaciones.

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ -(\frac{b+2a}{4}) + 3\alpha_3 &= c \\ a + 3(\frac{b+2a}{4}) - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Observamos que tenemos 2 ecuaciones, en las cuáles sólo hay un valor a encontrar, entonces en estas dos ecuaciones procedemos a encontrar el valor de α_3 . Primero comenzaremos con el renglón 3.

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ 3\alpha_3 &= \frac{4c}{4} + (\frac{b+2a}{4}) \\ a + 3(\frac{b+2a}{4}) - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ \alpha_3 &= \frac{\frac{4c+b+2a}{4}}{3} \\ a + 3(\frac{b+2a}{4}) - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Obtenemos el primer valor de α_3 :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ \alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\ a + 3(\frac{b+2a}{4}) - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Encontraremos el valor de α_3 en la ecuación cuatro.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a \\
\alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\
\alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\
a + \left(\frac{3b+6a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a \\
\alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\
\alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\
2\alpha_3 &= a + \left(\frac{3b+6a}{4}\right) - d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a \\
\alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\
\alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\
2\alpha_3 &= \frac{4a}{4} + \left(\frac{3b+6a}{4}\right) - \frac{4d}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a \\
\alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\
\alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\
\alpha_3 &= \frac{\frac{3b+10a-4d}{4}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a \\
\alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\
\alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\
\alpha_3 &= \frac{3b+10a-4d}{8}
\end{aligned}$$

Una vez que encontramos los valores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, para ver que el conjunto dado genera a cualquier polinomio de grado tres, damos algún polinomio y este tendrá que poder escribirse como combinación lineal los elementos del conjunto y los escalares.

Elegimos el polinomio $5x^3 + 2x^2x + 2$. Ahora encontraremos los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ para poder escribirlo de la manera:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (\alpha_1)x^3 + (-2\alpha_1 + 4\alpha_2)x^2 + (\alpha_2 + 3\alpha_3)x + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3)$$

Utilizando los resultados del sistema de ecuaciones tenemos que:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 5 \\ \alpha_2 &= 3 \\ \alpha_3 &= 6 \\ \alpha_3 &= \frac{20}{12}\end{aligned}$$

Como podemos apreciar los valores de α_3 no son los mismos, y esto es debido a que originalmente teníamos un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas, entonces el sistema tiene diversas soluciones y al encontrar que los resultados de las ecuaciones de α_3 no son el mismo, podemos concluir que el conjunto $x^3 - 2x^2 + 1, 4x^2 - x + 3y3x - 2$ **NO** generan a $P_3(\mathbb{R})$

10. Prueba que las siguientes transformaciones T son lineales y encuentra el núcleo $Nu(T)$ y la imagen $Im(T)$

Definición 5. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, la **imagen** de una transformación T es $Im(T) = \{T(\hat{x}) | \hat{x} \in V\}$

Definición 6. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, el **núcleo** de una transformación T es $Nu(T) = \{\hat{x} \in V | T(\hat{x}) = \hat{0}_W\}$

a) $\{T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2\}$ definida por $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, 2a_3)$ Para ver que una transformación es lineal, debe cumplir que **abra sumas y saque escalares**

Sean $\hat{a}_1, \hat{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ y $\xi \in \mathbb{R}$ entonces

$\xi a_1 + a_2 = \xi(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$	Por definición de a_1 y a_2
$\xi a_1 + a_2 = (\xi x_1, \xi y_1, \xi z_1) + (x_2, y_2, z_2)$	Por distributividad de los \mathbb{R}
$\xi a_1 + a_2 = (\xi x_1 + x_2, \xi y_1 + y_2, \xi z_1 + z_2)$	Sumando entrada por entrada
$T(\xi a_1 + a_2) = T(\xi x_1 + x_2, \xi y_1 + y_2, \xi z_1 + z_2)$	Aplicando T
$T(\xi a_1 + a_2) = ((\xi x_1 + x_2) - (\xi y_1 + y_2), 2(\xi z_1 + z_2))$	Siguiendo la regla de T
$T(\xi a_1 + a_2) = (\xi x_1 + x_2 - \xi y_1 - y_2, 2\xi z_1 + 2z_2)$	Por asociatividad
$T(\xi a_1 + a_2) = (\xi x_1 - \xi y_1 + x_2 - y_2, 2\xi z_1 + 2z_2)$	Por conmutatividad
$T(\xi a_1 + a_2) = ((\xi x_1 - \xi y_1) + (x_2 - y_2), 2\xi z_1 + 2z_2)$	Asociatividad nuevamente
$T(\xi a_1 + a_2) = (\xi x_1 - \xi y_1, 2\xi z_1) + (x_2 - y_2, 2z_2)$	Asociatividad entre elementos en \mathbb{R}^2
$T(\xi a_1 + a_2) = \xi(x_1 - y_1, 2z_1) + (x_2 - y_2, 2z_2)$	Por distributividad de ξ
$T(\xi a_1 + a_2) = \xi T(a_1) + T(a_2)$	Por definición de T

$\therefore T$ es transformación lineal

Ahora veamos quién es el núcleo de la transformación igualando a $\hat{0}_{\mathbb{R}^2}$ sea $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$

$T(\hat{x}) = \hat{0}_{\mathbb{R}^2}$	Planteando la igualdad
$T(\hat{x}) = (0, 0)$	Por definición del neutro aditivo en \mathbb{R}^2
$T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)$	Porque $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$
$(x_1 - x_2, 2x_3) = (0, 0)$	Por definición de T
$x_1 - x_2 = 0$	Obtenemos el siguiente sistema
$2x_3 = 0$	
$x_3 = 0$	Por lo que tenemos
$x_1 = x_2$	y por otra parte

\therefore el núcleo de la transformación son todos los elementos cuya primera y segunda coordenada son la misma y la tercera 0.

$$i.e. Nu(T) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | (x_1, x_1, 0)\}$$

Finalmente observemos que la imagen de la transformación es:

Sean $\hat{y} \in \mathbb{R}^2$ y $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$ veamos que

$$\begin{aligned} T(\hat{x}) &= \hat{y} \\ T(x_1, x_2, x_3) &= (y_1, y_2) \\ (x_1 - x_2, 2x_3) &= (y_1, y_2) \end{aligned}$$

Para ver la forma de los elementos en la imgaen
Por definición de \hat{y}, \hat{x}
Usando la regla de correspondencia de T

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= y_1 \\ 2x_3 &= y_2 \end{aligned}$$

Obtenemos que y_1 es de esa forma
y que y_2 se obtiene de esta manera

Es menester mencionar que la suma (diferencia) entre elementos de \mathbb{R} es algún otro elemento en \mathbb{R} por lo que la imagen de T es todo \mathbb{R}^2

b) $\{T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3\}$ definida por $(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, 0, 2a_1 - a_2)$ Para ver que una transformación es lineal, debe cumplir que **abra sumas y saque escalares**

Sean $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^3$ y $\theta \in \mathbb{R}$ entonces

$\theta\hat{x} + \hat{y} = \theta(a, b) + (c, d)$	Por definición de \hat{x}, \hat{y}
$\theta\hat{x} + \hat{y} = (\theta a, \theta b) + (c, d)$	Distributividad en \mathbb{R}
$\theta\hat{x} + \hat{y} = (\theta a + c, \theta b + d)$	Sumando entrada a entrada
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = T(\theta a + c, \theta b + d)$	Aplicando T en ambos lados
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = ((\theta a + c), (\theta b + d), 0, 2(\theta a + c) - (\theta b + d))$	Aplicando la regla de correspondencia
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = (\theta a + \theta b + c + d, 0, 2\theta a + 2c - \theta b - d)$	Asociatividad en \mathbb{R}
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = ((\theta a + \theta b) + (c + d), 0, (2\theta a - \theta b) + (2c - d))$	Asociativiad y distributividad en \mathbb{R}
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = (\theta a + \theta b, 0, 2\theta a - \theta b) + (c + d, 0, 2c - d)$	Asociativiad
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = \theta(a + b, 0, 2a - b) + (c + d, 0, 2c - d)$	Distributividad <i>inversa</i>
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = \theta T(\hat{x}) + T(\hat{y})$	Definición de T

$\therefore T$ es transformación lineal

Revisemos cuál es el núcleo de la transformación lineal, tomando un elemento en el dominio y viendo qué forma tienen los elementos que irán al neutro aditivo de su codominio.

Sea $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ entonces

$T(\hat{x}) = \hat{0}_{\mathbb{R}^3}$	Planteando la igualdad
$T(x_1, x_2) = \hat{0}_{\mathbb{R}^3}$	Por la forma de \hat{x}
$T(x_1, x_2) = (0, 0, 0)$	Por la forma de $\hat{0}_{\mathbb{R}^3}$
$(x_1 + x_2, 0, 2x_1 - x_2) = (0, 0, 0)$	Aplicando la regla de correspondencia de T

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 \\ 2x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Deducimos lo siguiente

Y la única manera de que eso ocurra es que

$$x_1 = x_2 = 0$$

\therefore el núcleo de la transformación es $(0, 0)$

Finalmente notemos que la imagen de la transformación está dada por lo siguiente.
Sea $\hat{y} \in \mathbb{R}^3$ y $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ de la forma

$$\hat{y} = (y_1, y_2, y_3) \quad \hat{x} = (x_1, x_2)$$

entonces

$T(\hat{x}) = \hat{y}$	Para ver de que forma son los elementos
$T(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3)$	Usando su representación
$(x_1 + x_2, 0, 2x_1 - x_2) = (y_1, y_2, y_3)$	Por la regla de correspondencia de T
$x_1 + x_2 = y_1$	Igualamos entrada a entrada
$0 = y_2$	Obteniendo lo siguiente
$2x_1 - x_2 = y_3$	Se deduce de lo anterior

Es importante mencionar que la suma de elementos en \mathbb{R} es algún elemento en \mathbb{R} pues la suma es cerrada en dicho conjunto. Por lo que podemos deducir que la imagen de T es

$$Im(T) = \{(x_1, 0, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

c) $\{T : M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})\}$ definido por

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sean $A, B \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$ y que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$\lambda A + B = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$	Por definición de A y B
$\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$	Distributividad de λ
$\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + b_{11} & \lambda a_{12} + b_{12} & \lambda a_{13} + b_{13} \\ \lambda a_{21} + b_{21} & \lambda a_{22} + b_{22} & \lambda a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$	Definición de $+$ en $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$
$T(\lambda A + B) = T \left(\begin{pmatrix} \lambda a_{11} + b_{11} & \lambda a_{12} + b_{12} & \lambda a_{13} + b_{13} \\ \lambda a_{21} + b_{21} & \lambda a_{22} + b_{22} & \lambda a_{23} + b_{23} \end{pmatrix} \right)$	Aplicando T en ambos miembros
$T(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} 2(\lambda a_{11} + b_{11}) - (\lambda a_{12} + b_{12}) & \lambda a_{13} + b_{13} + 2(\lambda a_{12} + b_{12}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Siguiendo la regla de transformación de T
$T(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} 2\lambda a_{11} + 2b_{11} - \lambda a_{12} - b_{12} & \lambda a_{13} + b_{13} + 2\lambda a_{12} + 2b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Distributividad
$T(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} (2\lambda a_{11} - \lambda a_{12}) + (2b_{11} - b_{12}) & (\lambda a_{13} + 2\lambda a_{12}) + (b_{13} + 2b_{12}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Asociatividad en \mathbb{R}
$T(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} 2\lambda a_{11} - \lambda a_{12} & \lambda a_{13} + 2\lambda a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_{11} - b_{12} & b_{13} + 2b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Asociatividad en $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$
$T(\lambda A + B) = \lambda \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_{11} - b_{12} & b_{13} + 2b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Distributividad <i>inversa</i> en λ
$T(\lambda A + B) = \lambda T(A) + T(B)$	Definición de $T(A), T(B)$

$\therefore T$ es transformación lineal

Veamos cuál es el núcleo de la transformación.
Sea $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$

$$T(A) = \hat{0}_{M_{2 \times 2}} \quad \text{Planteando la igualdad}$$

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Planteando la igualdad}$$

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Por la regla de correspondencia de T}$$

$$2a_{11} - a_{12} = 0$$

$$a_{13} + 2a_{12} = 0$$

Obtenemos esto

$$a_{11} = \frac{a_{12}}{2}$$

$$a_{13} = -2a_{12}$$

Finalmente conseguimos

\therefore El **núcleo** de T son todas las matrices en $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que $a_{11} = \frac{a_{12}}{2}$ y que $a_{13} = -2a_{12}$
sin importar las entradas a_{21}, a_{22}, a_{23}

Para ver quién es la imagen de T tomemos un elemento en el dominio e igualémoslo con un elemento del codominio *i.e.*
Sea $\hat{B} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y $\hat{A} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$

$$T(\hat{A}) = \hat{B} \quad \text{Planteando la igualdad}$$

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{Planteando la igualdad}$$

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{Por la regla de correspondencia de T}$$

$$2a_{11} - a_{12} = b_{11}$$

$$a_{13} + 2a_{12} = b_{12}$$

$$0 = b_{21} = b_{22}$$

Obtenemos esto

$$a_{11} = \frac{a_{12}}{2}$$

$$a_{13} = -2a_{12}$$

Finalmente conseguimos

veamos que $2a_{11} - a_{12} \in \mathbb{R}$, $a_{13} + 2a_{12} \in \mathbb{R}$
Por lo que podemos concluir que la **imagen** de T son todas las matrices en $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ $\cdot \cdot \cdot$ $b_{21} = b_{22} = 0$

d) $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})$ definida por $T(f(x)) = xf(x) + f'(x)$. Para ver que una transformación es lineal, debe cumplir que **abra sumas y saque escalares**
Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{R}^3$ y $\psi \in \mathbb{R}$ donde

$$p(x) = a + bx + cx^2 \quad q(x) = d + ex + fx^2$$

entonces

$\psi p(x) + q(x) = \psi(a + bx + cx^2) + (d + ex + fx^2)$	Definición de $p(x), q(x)$
$\psi p(x) + q(x) = (\psi a + \psi bx + \psi cx^2) + (d + ex + fx^2)$	Distributividad de ψ
$\psi p(x) + q(x) = (\psi a + d + \psi bx + ex + \psi cx^2 + fx^2)$	Asociatividad
$T(\psi p(x) + q(x)) = T(\psi a + d + \psi bx + ex + \psi cx^2 + fx^2)$	Aplicando T en ambos miembros
$T(\psi p(x) + q(x)) = \psi ax + dx + \psi bx^2 + ex^2 + \psi cx^3 + fx^3 + \psi b + e + \psi 2cx + 2fx$	Usando la regla de correspondencia
$T(\psi p(x) + q(x)) = \psi ax + \psi b + \psi bx^2 + \psi cx^2 + \psi 2cx + e + dx + ex^2 + fx^3 + 2fx$	Conmutatividad en \mathbb{R}
$T(\psi p(x) + q(x)) = (\psi ax + \psi b + \psi bx^2 + \psi cx^3 + \psi 2cx) + (e + dx + ex^2 + fx^3 + 2fx)$	Asociatividad en \mathbb{R}
$T(\psi p(x) + q(x)) = \psi(ax + b + bx^2 + cx^3 + 2cx) + (e + dx + ex^2 + 2fx + fx^2)$	Distributividad <i>inversa</i> en \mathbb{R}
$T(\psi p(x) + q(x)) = \psi T(p(x)) + T(q(x))$	Definición de $T(p(x)), T(q(x))$

$\therefore T$ es transformación lineal