



# Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores  
Ayud. Irving Hernández Rosas

## Tarea-examen I

Kevin Ariel Merino Peña<sup>1</sup>



Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que la tarea-examen se entrega individual.

1. Muestre que  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \{c + bx + ax^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ , es un espacio vectorial con la suma usual y la multiplicación por escalar usual, es decir:

$$\begin{aligned} +: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\ (a_1x^2 + b_1x + c_1, a_2x^2 + b_2x + c_2) &\mapsto (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2). \\ \mu: \mathbb{R} \times \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\ (\alpha, (a_1x^2 + b_1x + c_1)) &\mapsto (\alpha a_1)x^2 + (\alpha b_1)x + (\alpha c_1). \end{aligned}$$

**Definición 1.** Sea  $\mathbb{V}$  un conjunto no vacío con 2 operaciones definidas  $(+, \mu)$  y un campo  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  que cumple

- Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$ , entonces  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- Sean  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{V}$ , entonces  $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- Existe  $\vec{0} \in \mathbb{V}$  tal que  $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ ,  $\forall \vec{x} \in \mathbb{V}$
- Para todo  $\vec{x} \in \mathbb{V}$  existe  $\vec{y} \in \mathbb{V}$  tal que  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$
- Para todo  $\vec{x} \in \mathbb{V}$  se cumple que  $\vec{1}\vec{x} = \vec{x}$  donde  $\vec{1}$  es el neutro multiplicativo de  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$
- Para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  y  $\vec{x} \in \mathbb{V}$  se cumple  $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
- Para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  y  $\vec{x} \in \mathbb{V}$  entonces  $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$
- Sea  $\alpha \in \mathbb{F}$  y  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$ , entonces  $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , por demostrar  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ , como los elementos de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  son de la forma  $c + ax + bx^2$ , entonces digamos que

$$\begin{aligned} \vec{x} &= a_1 + a_2x + a_3x^2 \\ \vec{y} &= b_1 + b_2x + b_3x^2 \end{aligned}$$

$\vec{x} + \vec{y} = (a_1 + a_2x + a_3x^2) + (b_1 + b_2x + b_3x^2)$	Por definición de los vectores
$\vec{x} + \vec{y} = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3)x^2$	Por definición de la suma
$\vec{x} + \vec{y} = (b_1 + a_1) + (b_2 + a_2)x + (b_3 + a_3)x^2$	Porque los elementos en $\mathbb{R}$ conmutan
$\vec{x} + \vec{y} = (b_1 + b_2x + b_3x^2) + (a_1 + a_2x + a_3x^2)$	Por la definición de +
$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$	Por definición de los vectores

$\therefore$  los elementos de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  conmutan, *i.e.*  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

Sean  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{V}$  por demostrar  $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$  como los elementos de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  son de la forma  $c + ax + bx^2$ , entonces digamos que

$$\begin{aligned} \vec{x} &= a_1 + a_2x + a_3x^2 \\ \vec{y} &= b_1 + b_2x + b_3x^2 \\ \vec{z} &= c_1 + c_2x + c_3x^2 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>317031326

$$\begin{aligned}
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= (a_1 + a_2x + a_3x^2 + b_1 + b_2x + b_3x^2) + c_1 + c_2x + c_3x^2 && \text{Por definición de los vectores} \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= ((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3)x^2) + c_1 + c_2x + c_3x^2 && \text{Por definición de los } + \text{ en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= ((a_1 + b_1) + c_1) + ((a_2 + b_2) + c_2)x + ((a_3 + b_3) + c_3)x^2 && \text{Por definición de los } + \text{ en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= (a_1 + (b_1 + c_1)) + (a_2 + (b_2 + c_2))x + (a_3 + (b_3 + c_3))x^2 && \text{Porque en } \mathbb{R} \text{ la suma es asociativa} \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= a_1 + (b_1 + c_1) + a_2x + (b_2 + c_2)x + a_3x^2 + (b_3 + c_3)x^2 && \text{Emplendo la definición de suma} \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= a_1 + (b_1 + c_1) + a_2x + (b_2x + c_2x) + a_3x^2 + (b_3x^2 + c_3x^2) && \text{Aplicando distributividad} \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) && \text{Definiendo la suma en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

$\therefore$  la suma es asociativa en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Por demostrar:  $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ . Proponemos  $\vec{0} = 0 + 0x + 0x^2$ .

Sea  $\vec{x} \in \mathbb{V}$ , entonces  $\vec{x}$  es de la forma

$$\vec{x} = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

$$\begin{aligned}
\vec{0} + \vec{x} &= (0 + 0x + 0x^2) + (a_1 + a_2x + a_3x^2) && \text{Por definición de } \vec{x}, \vec{0} \\
\vec{0} + \vec{x} &= (0 + a_1) + (0 + a_2)x + (0 + a_3)x^2 && \text{Por definición de } + \text{ en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
\vec{0} + \vec{x} &= a_1 + a_2x + a_3x^2 && \text{Porque los elementos en } \mathbb{R} \text{ tienen neutro aditivo} \\
\vec{0} + \vec{x} &= \vec{x} && \text{Por definición de } \vec{x}
\end{aligned}$$

$\therefore$   $0 + 0x + 0x^2$  es el neutro aditivo en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Sea  $\vec{x} \in \mathbb{V}$ , por demostrar, existe  $\vec{y} \in \mathbb{V}$  tal que  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ , sabemos que los elementos de  $\mathbb{V}$  tienen la siguiente forma

$$\vec{x} = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

proponemos

$$\vec{y} = -a_1 - a_2x - a_3x^2$$

$$\begin{aligned}
\vec{x} + \vec{y} &= (a_1 + a_2x + a_3x^2) + (-a_1 - a_2x - a_3x^2) && \text{Por definición de los vectores} \\
\vec{x} + \vec{y} &= (a_1 - a_1) + (a_2 - a_2)x + (a_3 - a_3)x^2 && \text{Por definición de la suma en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
\vec{x} + \vec{y} &= (0) + (0)x + (0)x^2 && \text{Los elementos del campo tienen inverso aditivo} \\
\vec{x} + \vec{y} &= \vec{0} && \text{Por definición del neutro aditivo}
\end{aligned}$$

$\therefore$   $-a_1 - a_2x - a_3x^2$  es el inverso aditivo de  $\vec{x}$

Sea  $\vec{x} \in \mathbb{V}$ , por demostrar  $\vec{1} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Proponemos  $\vec{1} = 1$

$$\begin{aligned}
1 \cdot \vec{x} &= 1(a_1 + a_2x + a_3x^2) && \text{Por definición de los elementos de } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
1 \cdot \vec{x} &= (1 \cdot a_1) + (1 \cdot a_2)x + (1 \cdot a_3)x^2 && \text{Por definición del producto en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
1 \cdot \vec{x} &= a_1 + a_2x + a_3x^2 && \text{Puesto que los elementos del campo tienen neutro multiplicativo} \\
1 \cdot \vec{x} &= \vec{x} && \text{Por la definición de } \vec{x}
\end{aligned}$$

$\therefore$   $\vec{1}$  es el neutro multiplicativo en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}(\mathbb{F} = \mathbb{R})$  y  $\vec{x} \in \mathbb{V}$ , por demostrar que  $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)\vec{x} &= (\alpha\beta)(a_1 + a_2x + a_3x^2) && \text{Por definición de los elementos en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
(\alpha\beta)\vec{x} &= ((\alpha\beta)a_1) + ((\alpha\beta)a_2)x + ((\alpha\beta)a_3)x^2 && \text{Por definición del producto en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
(\alpha\beta)\vec{x} &= \alpha(\beta a_1) + \alpha(\beta a_2)x + \alpha(\beta a_3)x^2 && \text{Porque los elementos del campo asocian} \\
(\alpha\beta)\vec{x} &= \alpha(\beta\vec{x}) && \text{Aplicando la definición del producto}
\end{aligned}$$

$\therefore$  en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  se cumple que  $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$

Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}(\mathbb{F} = \mathbb{R})$  y  $\vec{x} \in \mathbb{V}$ , por demostrar que  $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

$(\alpha + \beta)\vec{x} = (\alpha + \beta)(a_1 + a_2x + a_3x^2)$	Definición de elementos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha a_1 + \beta a_1 + \alpha a_2x + \beta a_2x + \alpha a_3x^2 + \beta a_3x^2$	Pues los elementos del campo tienen distributividad
$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha a_1 + \alpha a_2x + \alpha a_3x^2 + \beta a_1 + \beta a_2x + \beta a_3x^2$	Reordenando
$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha(a_1 + a_2x + a_3x^2) + \beta(a_1 + a_2x + a_3x^2)$	Por definición del producto
$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$	Por definición de los elementos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

$\therefore$  en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  se cumple distributividad cuando un elemento se multiplica por la suma de dos escalares

Sea  $\alpha \in \mathbb{V}$ ,  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$ , por demostrar que  $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha((a_1 + a_2x + a_3x^2) + (b_1 + b_2x + b_3x^2))$	Por definición de los elementos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3)x^2)$	Por definición de la suma en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(a_1 + b_1) + \alpha(a_2 + b_2)x + \alpha(a_3 + b_3)x^2$	Por definición del producto en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = (\alpha a_1 + \alpha b_1) + (\alpha a_2 + \alpha b_2)x + (\alpha a_3 + \alpha b_3)x^2$	Porque los elementos del campo tienen distributividad
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(a_1 + a_2x + a_3x^2) + \alpha(b_1 + b_2x + b_3x^2)$	Agrupando de manera conveniente
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(\vec{x}) + \alpha(\vec{y})$	Por definición de dichos elementos

$\therefore$  en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  se cumple que  $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

2. Muestre que el conjunto  $\beta = \{1, x, x^2\}$  es base de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

**Definición 2.** Sea  $\mathcal{S}$  un subconjunto de un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  decimos que  $\mathcal{S}$  genera a  $\mathcal{V}$  si  $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$  es una combinación lineal de elementos de  $\mathcal{S}$  a la generad de s se le denota como  $span(\mathcal{S}), < \mathcal{S} >, gen(\mathcal{S})$

**Definición 3.** Una **base**  $\beta$  de  $\mathbb{V}$  espacio vectorial es un subconjunto de  $\mathbb{V}$   $\cdot \ni \cdot$   $\beta$  genera a  $\mathbb{V}$  y  $\beta$  es linealmente independiente

Diremos que el conjunto  $\beta$  genera a  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  si ocurre que

$$\alpha_1(p_1(x)) + \alpha_2(p_2(x)) + \alpha_3(p_3(x)) = \beta_1(1 + 0x + 0x^2) + \beta_2(0 + 1x + 0x^2) + \beta_3(0 + 0x + 1x^2)$$

donde  $p_1, p_2, p_3 \in \beta$  por lo que, sean  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1(1 + 0x + 0x^2) + \alpha_2(0 + x + 0x^2) + \alpha_3(0 + 0x + x^2) = \beta_1(1 + 0x + 0x^2) + \beta_2(0 + x + 0x^2) + \beta_3(0 + 0x + x^2)$$

$$(\alpha_1 + 0\alpha_1x + 0\alpha_1x^2) + (0\alpha_2 + x\alpha_2 + 0\alpha_2x^2) + (0\alpha_3 + 0\alpha_3x + \alpha_3x^2) = (\beta_1 + 0\beta_1x + 0\beta_1x^2) + (0\beta_2 + \beta_2x + 0\beta_2x^2) + (0\beta_3 + 0\beta_3x + \beta_3x^2)$$

$$(\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3) + (0\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3)x + (0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3)x^2 = (\beta_1 + 0\beta_2 + 0\beta_3) + (0\beta_1 + \beta_2 + 0\beta_3)x + (0\beta_1 + 0\beta_2 + \beta_3)x^2$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0\alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & \alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & 0\alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0\beta_2 & 0\beta_3 \\ 0\beta_1 & \beta_2 & 0\beta_3 \\ 0\beta_1 & 0\beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \quad \text{Agrupando cada uno de los elementos en una matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Manteniendo sólo coeficientes}$$

De esta manera ha quedado claro que dichos coeficientes  $\beta$  existen, es más, podemos afirmar que son:

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \alpha_3 = \beta_3$$

$$\therefore < \beta > = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

Ahora veamos si  $\beta$  es linealmente independiente para lo que debe ocurrir

**Definición 4.** Sea  $S$  un subconjunto de  $V$  un espacio vectorial, decimos que  $S$  es linealmente independiente si la única solución para  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_n \vec{s}_n = 0$$

es que todos los coeficientes  $\alpha_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$  sean todos 0

Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1(1 + 0x + 0x^2) + \alpha_2(0 + x + 0x^2) + \alpha_3(0 + 0x + x^2) = \vec{0} \quad \beta \text{ como combinación lineal}$$

$$\alpha_1(1 + 0x + 0x^2) + \alpha_2(0 + x + 0x^2) + \alpha_3(0 + 0x + x^2) = 0 + 0x + 0x^2 \quad \text{Por definición de } \vec{0} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

$$(1\alpha_1 + 0\alpha_1x + 0\alpha_1x^2) + (0\alpha_2 + \alpha_2x + 0\alpha_2x^2) + (0\alpha_3 + 0\alpha_3x + \alpha_3x^2) = 0 + 0x + 0x^2 \quad \text{Distribuyendo}$$

$$(\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3) + (0\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3)x + (0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3)x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \quad \text{Agrupando}$$

Finalmente igualemos entrada con entrada

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0\alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & \alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & 0\alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Igulemos entrada por entrada}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Mateniendo sólo coeficientes}$$

Finalmente es fácil observar que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\therefore \quad \beta \text{ es linealmente independiente}$$

$$\therefore \quad \beta \text{ es base para } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

3. Muestre que la siguiente transformación es lineal.

$$T: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

$$T(f(x)) \mapsto xf'(x) + xf(2) + f(3)$$

Como el dominio de  $T$  es  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , entonces sean  $p(x), q(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , y  $\xi \in \mathbb{R}$  recordemos que los elementos de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  tienen la forma

$$p(x) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2$$

$$q(x) = \delta_1 + \delta_2x + \delta_3x^2$$

$$\xi p(x) + q(x) = \xi(\alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2) + (\delta_1 + \delta_2x + \delta_3x^2) \quad \text{Por definición de } p(x), q(x)$$

$$\xi p(x) + q(x) = (\xi\alpha_1 + \xi\alpha_2x + \xi\alpha_3x^2) + (\delta_1 + \delta_2x + \delta_3x^2) \quad \text{Distribuyendo } \xi$$

$$\xi p(x) + q(x) = (\xi\alpha_1 + \delta_1) + (\xi\alpha_2 + \delta_2)x + (\xi\alpha_3 + \delta_3)x^2 \quad \text{Por definición de la suma en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} T(\xi p(x) + q(x)) &= \xi\alpha_2 + \delta_2 + 2x(\xi\alpha_3 + \delta_3) + x((\xi\alpha_1 + \delta_1) + 2(\xi\alpha_2 + \delta_2) + 4(\xi\alpha_3 + \delta_3)) + ((\xi\alpha_1 + \delta_1) + 3(\xi\alpha_2 + \delta_2) + 9(\xi\alpha_3 + \delta_3)) \\ &= \xi\alpha_2 + \delta_2 + 2x(\xi\alpha_3 + \delta_3) + x(\xi\alpha_1 + \delta_1) + 2x(\xi\alpha_2 + \delta_2) + 4x(\xi\alpha_3 + \delta_3) + (\xi\alpha_1 + \delta_1) + 3(\xi\alpha_2 + \delta_2) + 9(\xi\alpha_3 + \delta_3) \\ &= (\xi\alpha_1 + \delta_1) + 3(\alpha_2 + \delta_2) + 9(\xi\alpha_3 + \delta_3) + x(\xi\alpha_1 + \delta_1 + 3\xi\alpha_2 + 3\delta_2 + 4\xi\alpha_3 + 4\delta_3) + 2x^2(\xi\alpha_3 + \delta_3) \\ &= \xi(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3 + x(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3) + 2x^2\alpha_3) + \delta_1 + 3\delta_2 + 9\delta_3 + x(\delta_1 + 3\delta_2 + 4\delta_3) + 2x^2\delta_3 \\ &= \xi T(p(x)) + T(q(x)) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad T \text{ es transformación lineal, pues hemos visto que abre sumas } \langle p(x) + q(x) \rangle \text{ y saca escalares } \langle \xi \rangle$$

---

4. Determine el núcleo y la imagen de  $T$ .

**Definición 5.** Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal, la **imagen** de una transformación  $T$  es  $Im(T) = \{T(\hat{x}) | \hat{x} \in V\}$

**Definición 6.** Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal, el **núcleo** de una transformación  $T$  es  $Nu(T) = \{\hat{x} \in V | T(\hat{x}) = \hat{0}_W\}$

Para ello, tomemos un elemento en el dominio de  $T$ . Sea  $p(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$   $\cdot \ni \cdot$   $p(x) = \eta_1 + \eta_2 x + \eta_3 x^2$  y  $\vec{0}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}$

$T(p(x)) = \vec{0}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}$	Por definición del núcleo
$T(\eta_1 + \eta_2 x + \eta_3 x^2) = 0 + 0x + 0x^2$	Por definición de los elementos
$\eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 + x(\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3) + 2x^2\eta_3 = 0 + 0x + 0x^2$	Siguiendo la regla de correspondencia
$\eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 = 0$	Igualando entrada a entrada
$x(\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3) = 0x$	Igualando entrada a entrada
$2x^2\eta_3 = 0x^2$	Igualando entrada a entrada
$\eta_3 = 0$	De lo anterior
$\eta_1 + 3\eta_2 + 9(0) = 0$	Sistituyendo
$\eta_1 = -3\eta_2$	Sistituyendo

La solución puede escribirse como  $(-3 + 1x + 0x^2)\eta_2$  por lo que el **núcleo** de la transformación  $\{(-3(\eta_2) + x(\eta_2) + 0x^2)\}$ . Cabe mencionar que la nulidad de  $T$  es 1, pues esa es la dimensión del núcleo y además,  $T$  no es una transformación uno a uno pues el núcleo  $\neq \vec{0}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}$

Para ver cuál es la imagen de la transformación lineal tomemos un elemento arbitrario en el dominio y otro en su imagen. Sean  $p(x), q(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , recordemos que los elementos de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  tienen la forma

$p(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$	
$q(x) = \delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2$	
$T(p(x)) = q(x)$	Por definición de la imagen
$T(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) = \delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2$	Por definición de los vectores
$\eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 + x(\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3) + 2x^2\eta_3 = \delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2$	Por definición de los vectores
$\eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 = \delta_1$	Igualando entrada a entrada
$x(\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3) = \delta_2 x$	Igualando segunda entrada
$2x^2\eta_3 = \delta_3 x^2$	Igualando tercera entrada
$\eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 = \delta_1$	Igualando entrada a entrada
$\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3 = \delta_2$	Por el inverso multiplicativo de $x$
$2\eta_3 = \delta_3$	Por el inverso multiplicativo de $x^2$

$\therefore$  los elementos de la imagen son de la forma  $q(x) = \delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2$  donde

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 \\ \delta_2 &= \eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3 \\ \delta_3 &= 2\eta_3\end{aligned}$$

Es decir, todo  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

5. Encuentre la matriz asociada a  $T$  con respecto a la base  $\beta$ , esto es  $[T]_\beta$ . Tomemos las bases ordenadas  $\beta\{1, x, x^2\}$  y  $\gamma = \{1, x, x^2\}$  entonces. Apliquemos la transformación  $T$  a cada uno de los elementos de  $\beta$

$T(p(x)) = \eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 + x(\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3) + 2x^2\eta_3$	Por el ejercicio anterior
$T(1) = 1 + 3(0) + 9(0) + x(1 + 3(0) + 4(0)) + 2x^2(0)$	Porque $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0, \eta_3 = 0$
$T(1) = 1 + x$	Operando
$T(x) = (0) + 3(1) + 9(0) + x((0) + 3(1) + 4(0)) + 2x^2(0)$	Porque $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1, \eta_3 = 0$
$T(x) = 3 + 3x$	Operando
$T(x^2) = (0) + 3(0) + 9(1) + x((0) + 3(0) + 4(1)) + 2x^2(1)$	Operando
$T(x^2) = 9 + 4x + 2x^2$	Desarrollando

$T(1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$	Igualemos el primer elemento de $\beta$
$T(x) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$	Igualemos el segundo elemento de $\beta$
$T(x^2) = 9 \cdot 1 + 4 \cdot x + 2 \cdot x^2$	Igualemos el tercer elemento de $\beta$

De lo anterior, es claro poder concluir que

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. ¿Cuál es el rango de  $[T]_\beta$ ?

El rango de una matriz es el número de columnas linealmente independientes, en este paso es muy claro que sólo tiene 2 columnas linealmente independientes, por lo que su rango es  $n = 2$

7. La matriz  $[T]_\beta$  es invertible, si sí muéstrelo, si no argumente porque.

Como vimos en clase, una matriz es invertible si y sólo si tiene rango completo, en ese caso no fue así, por lo que  $[T]_\beta$  no es invertible

8. ¿Cuales son los valores propios asociados a  $[T]_\beta$ ?

**Definición 7.** Sea  $T$  un operador lineal sobre  $V$ , donde  $V$  es de dimensión finita y  $\vec{x} \in V$  tal que  $\vec{x}$  no es 0. Sean  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , entonces  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  si y sólo si  $\det(A - \lambda Id_n) = 0$

Por lo que comencemos calculando el  $\det([T]_\beta - \lambda Id_n)$

$\det([T]_\beta - \lambda Id_3) = 0$	Por definición de valores propios
$\det \left( [T]_\beta - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$	Por definición de la identidad
$\det \left( \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$	Por lo obtenido en $[T]_\beta$
$\det \left( \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = 0$	Multiplicación por un escalar
$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$	Por suma de matrices

**Definición 8.** Sea  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  .  $\exists$  .  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  Entonces el determinante de A está definido como  $\det(A) = ad - bc$

**Definición 9.** Sea  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$  si  $n < 1$  entonces  $A = (A_{11})$  entonces  $\det(A) = A_{11}$  para  $n \geq 2$  definimos el determinante de manera recursiva como

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n(\text{dimen.})} (-1)^{1+j} A_{1j} \det(\hat{A}_{1j})$$

Por lo que el  $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$  se calcula como sigue

$$(1-\lambda)\det(\hat{A}_{11}) - 3\det\hat{A}_{12} + 9\det\hat{A}_{13} = 0$$

Por lo definido anteriormente<sup>(\*\*)</sup>

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}_{11}) &= (a_{22})(a_{33}) - (a_{32})(a_{23}) \\ \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (3-\lambda)(2-\lambda) - 4(0) \\ \det(\hat{A}_{11}) &= (3-\lambda)(2-\lambda) \end{aligned}$$

Por definición del determinante en 2x2

Calculando el determinante del menor

Operando

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}_{12}) &= (a_{12})(a_{33}) - (a_{32})(a_{13}) \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda) - 0 \\ \det(\hat{A}_{12}) &= 2-\lambda \end{aligned}$$

Por definición de determinante en 2x2

Calculando el determinante del menor

Operando

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}_{13}) &= (a_{12})(a_{23}) - (a_{22})(a_{13}) \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= (a_{12})(a_{23}) - (a_{22})(a_{13}) \\ \det(\hat{A}_{13}) &= 0 \end{aligned}$$

Por definición de determinante en 2x2

Calculando el determinante del menor

Operando

Luego, por (\*\*) tenemos que

$$\det([T]_{\beta} - \lambda Id_n) = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 3(2-\lambda) = 0$$

De lo anterior obtenemos la siguiente ecuación con 3 incógnitas

$$\begin{aligned} (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 3(2-\lambda) &= 0 \\ (3-\lambda-3\lambda+\lambda^2)(2-\lambda) - 3(2-\lambda) &= 0 \\ 6-2\lambda-6\lambda+2\lambda^2-3\lambda+\lambda^2+3\lambda^2-\lambda^3-6+3\lambda &= 0 \\ -\lambda^3+6\lambda^2-8\lambda &= 0 \\ -\lambda(\lambda^2-6\lambda+8) &= 0 \\ -\lambda(\lambda-2)(\lambda-4) &= 0 \end{aligned}$$

Por la definición de determinante

Operando los primeros miembros

Desarrollando

Agrupando términos semejantes

Factorizando  $\lambda$

Factorizando el trinomio

$\therefore$  las soluciones a la ecuación son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

esos mismos son los valores propios asociados a  $[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9. Determine los vectores propios asociados a cada valor propio.

**Definición 10.** Decimos que  $\vec{x}$  es vector propio de T si  $T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$  donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Para eso tomemos  $\lambda_1 = 4$  y sustituyamos en  $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Por la definición de vector propio}$$

$$\begin{pmatrix} 1-(4) & 3 & 9 \\ 1 & 3-(4) & 4 \\ 0 & 0 & 2-(4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Porque tomamos } \lambda_1 = 4$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Operando los signos}$$

De lo anterior obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$-3x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \quad (1)$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \quad (2)$$

$$-2x_3 = 0 \quad (3)$$

Por lo que es fácil deducir que  $x_3 = 0$  y si lo sustituimos en 2, tenemos que  $x_2 = x_3$  por lo que

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para eso tomemos  $\lambda_2 = 2$  y sustituyamos en  $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Por la definición de vector propio}$$

$$\begin{pmatrix} 1-(2) & 3 & 9 \\ 1 & 3-(2) & 4 \\ 0 & 0 & 2-(2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Porque tomamos } \lambda_2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Operando los signos}$$

De lo anterior obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$-1x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \quad (4)$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \quad (5)$$

Por lo que es fácil deducir que  $x_1 = -\frac{3}{4}x_3$ , al sumar ambas ecuaciones y si lo sustituimos en 5, tenemos que  $x_2 = \frac{-13}{4}x_3$ , para el vector tomemos  $x_3 = 4$  por lo que

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Para eso tomemos  $\lambda_3 = 0$  y sustituyamos en  $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Por la definición de vector propio}$$

$$\begin{pmatrix} 1-(0) & 3 & 9 \\ 1 & 3-(0) & 4 \\ 0 & 0 & 2-(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Porque tomamos } \lambda_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Operando los signos}$$

De lo anterior obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \quad (6)$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \quad (7)$$

$$2x_3 = 0 \quad (8)$$

Por lo que es fácil deducir que  $x_3 = 0$ , al sustituirlo en 7, tenemos que  $x_1 = -3x_2$  tomemos  $x_2 = 1$  por lo que

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, podemos obtener

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & -13 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Muestre que el conjunto de los vectores propios es una base ordenada.

**Definición 11.** Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial dimensionalmente finito. Una base ordenada para  $\mathbb{V}$  es una base para  $\mathbb{V}$  establecida con un orden específico; es decir, una base ordenada para  $\mathbb{V}$  en una secuencia finita de elementos de  $\mathbb{V}$  linealmente independientes que generan a  $\mathbb{V}$

Nombremos  $\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ , que también se puede expresar como  $\gamma = \{1+x, -3-13x+4x^2, -3+x\}$

Veamos quién es la generada de  $\gamma$ . Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  y  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$  entonces planteemos, y reorganicemos con los términos semejantes

$$\alpha_1(1+x+0x^2) + \alpha_2(-3-13x+4x^2) + \alpha_3(-3+x+0x^2) = \beta_1(1+0x+0x^2) + \beta_2(0+x+0x^2) + \beta_3(0+0x+x^2)$$

$$(\alpha_1 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3) + (\alpha_1 - 13\alpha_2 + \alpha_3)x + (0\alpha_1 + 4\alpha_2 + 0\alpha_3)x^2 = (\beta_1 + 0\beta_2 + 0\beta_3) + (0\beta_1 + \beta_2 + 0\beta_3)x + (0\beta_1 + 0\beta_2 + \beta_3)x^2$$

$$\alpha_1 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3 = \beta_1 + 0\beta_2 + 0\beta_3$$

$$\alpha_1 - 13\alpha_2 + \alpha_3 = 0\beta_1 + \beta_2 + 0\beta_3$$

$$0\alpha_1 + 4\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0\beta_1 + 0\beta_2 + \beta_3$$

Ahora sólo mantengamos los coeficientes y resolvamos por el método *Gauss-Jordan*

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -13 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{1a Fila} \cdot -1 + 2a \text{ Fila en 2a Fila}$$

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) & \text{2a Fila} \cdot -\frac{1}{10} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{array}\right) & \text{2a Fila} \cdot -4 + \text{3a Fila en 3a Fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) & \text{3a Fila} \cdot \frac{5}{8} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) & \text{3a Fila} \cdot \frac{2}{5} + \text{2a Fila en 2a Fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) & \text{3a Fila} \cdot \frac{2}{5} + \text{2a Fila en 2a Fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{15}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) & \text{3a Fila} \cdot 3 + \text{3a Fila en 3a Fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{15}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{21}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}\right) & \text{2a Fila} \cdot 3 + \text{1a Fila en 1a Fila}
\end{aligned}$$

De esta manera hemos obtenido los coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , veamos la sutileza al calcularlos pues encontramos  $Q^{-1}$

$$\therefore \quad \langle \gamma \rangle = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

Por lo anterior, ya hemos encontrado  $Q^{-1}$  y esto sólo ocurre si la matriz es de rango completo, así que podemos afirmar que el rango de  $Q$  es 3, luego resulta sencillo observar que es linealmente independiente, desde su construcción.

Por otra parte, si comparamos  $\gamma$  con  $\beta'$  del ejercicio 12, veremos que ambas son bases pero no son las mismas bases ordenadas pues en  $\gamma$  se describe un orden distinto.

$$\therefore \quad \gamma \text{ es una base ordenada}$$

11. Determine  $Q \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ , tal que  $Q^{-1}[T]_{\beta}Q = D$ , donde  $D$  es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son valores propios.

Por el inciso anterior, podemos rescatar que

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{21}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

Y por el ejercicio 9 tenemos que

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & -13 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

y del ejercicio 5 concluimos que

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo que sólo resta calcular

$$\begin{aligned}
\left( \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{21}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & -13 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{21}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & -13 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{21}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & -13 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente veamos que  $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$  y efectivamente, son los elementos de la diagonal

12. Muestre que  $\beta' = \{-3 + x, -3 - 13x + 4x^2, 1 + x\}$ , es una base para  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  y además determine  $[T]_{\beta'}$

Primero veamos quién es la generada de  $\beta'$ , para lo que tomemos elementos aleatorios del campo y veamos a los elementos de  $\beta'$  como combinación lineal.

Sean  $\alpha, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\alpha_1(-3 + x) + \alpha_2(-3 - 13x + 4x^2) + \alpha_3(1 + x) &= \beta_1(1 + 0x + 0x^2) + \beta_2(0 + x + 0x^2) + \beta_3(0 + 0x + x^2) \\ \alpha_1(-3 + x + 0x^2) + \alpha_2(-3 - 13x + 4x^2) + \alpha_3(1 + x + 0x^2) &= \beta_1(1 + 0x + 0x^2) + \beta_2(0 + x + 0x^2) + \beta_3(0 + 0x + x^2) \\ (-3\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_1 - 13\alpha_2 + \alpha_3)x + (0\alpha_1 + 4\alpha_2 + 0\alpha_3)x^2 &= (\beta_1 + 0\beta_2 + 0\beta_3) + (0\beta_1 + \beta_2 + 0\beta_3)x + (0\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)x^2\end{aligned}$$

$$-3\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + 0\beta_2 + 0\beta_3$$

$$\alpha_1 - 13\alpha_2 + \alpha_3 = 0\beta_1 + \beta_2 + 0\beta_3$$

$$0\alpha_1 + 4\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$$

luego, resolvamos el sistema de ecuaciones anterior, adjuntando la identidad y reduciéndola a su forma escalonada

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -13 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -13 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) & \text{1a fila} \cdot -\frac{1}{3} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -13 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -14 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) & \text{1a fila} \cdot -1 + 2^a \text{ Fila en 2a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -14 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{21} & -\frac{1}{42} & -\frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) & \text{2a fila} \cdot -\frac{1}{14} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{21} & -\frac{1}{42} & -\frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{21} & -\frac{1}{42} & -\frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{21} & \frac{2}{21} & \frac{2}{7} & 1 \end{array}\right) & \text{2a fila} \cdot -4 + 3a \text{ fila en 3a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{21} & -\frac{1}{42} & -\frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{21} & \frac{2}{21} & \frac{2}{7} & 1 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{21} & -\frac{1}{42} & -\frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{21}{8} \end{array}\right) & \text{3a fila} \cdot \frac{21}{8} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{21} & -\frac{1}{42} & -\frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{21}{8} \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{21}{8} \end{array}\right) & \text{3a fila} \cdot \frac{2}{21} + 2a \text{ fila en 2a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{21}{8} \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{21}{8} \end{array}\right) & \text{3a fila} \cdot \frac{1}{3} + 1a \text{ fila en 1a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{21}{8} \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{21}{8} \end{array}\right) & \text{2a fila} \cdot -1 + 1a \text{ fila en 1a fila}\end{aligned}$$

Así hemos encontrado la solución al sistema de ecuaciones planteado

$$\therefore \langle \beta' \rangle = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

Ahora veamos si es linealmente independiente, para ello, debe ocurrir que la única solución a

$$\alpha_1(-3 + x) + \alpha_2(-3 - 13x + 4x^2) + \alpha_3(1 + x) = 0$$

sea que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

entonces obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -13 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -13 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right) & \text{1a fila} \cdot -\frac{1}{3} \\
 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -13 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -14 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right) & \text{1a fila} \cdot -1 + 2^a \text{ Fila en 2a fila} \\
 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -14 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{21} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right) & \text{2a fila} \cdot -\frac{1}{14} \\
 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{21} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{21} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{21} & 0 \end{array} \right) & \text{2a fila} \cdot -4 + 3a \text{ fila en 3a fila} \\
 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{21} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{21} & 0 \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \text{3a fila} \cdot \frac{21}{8} \\
 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \text{3a fila} \cdot \frac{2}{21} + 2a \text{ fila en 2a fila} \\
 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \text{3a fila} \cdot \frac{1}{3} + 1a \text{ fila en 1a fila} \\
 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \text{2a fila} \cdot -1 + 1a \text{ fila en 1a fila}
 \end{aligned}$$

$\therefore \beta'$  es linealmente independiente  
 $\therefore \beta'$  es base para  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

$$[T]_{\beta'}^{\beta'}$$

$$[T]_{\beta}^{\beta'}$$