Espacios vectoriales

Matemáticas para las ciencias aplicadas II

Aquino Chapa Armando Abraham y Merino Peña Kevin Ariel

23 de febrero de 2020

---

1. Escribe el vector cero en $M_{3x4}(\mathbb{R})$

Definición 0.1 (Matriz)**.** Una **Matriz** es un arreglo rectangular de elementos de un campo $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ de la forma

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

A los elementos $a_{i,j}$ con $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq i \leq m$ se les llama entradas de la matriz, a las matrices las denotamos por $\mathbb{A}$ *(letras mayúsculas)* y al conjunto de las matrices de mn se les denota por $M_{m\times n}(\mathbb{F})$

De esta manera tenemos que el vector cero de la matriz de 3 renglones por 4 columnas es aquella cuyas entradas (todas) son 0 *i. e.*

$$A_{3x4} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea V el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en $\mathbb{R}$. Muestre que V es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar para funciones.

Veamos que la derivada cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} (f(x)+g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)+g'(x) \end{aligned}$$

Así hemos probado que la derivada abre sumas

$$\begin{aligned} (cf(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

De esta manera queda conolidado que en la función derivada, los escalares son sacados de la función

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto se vale para cualquier constante, en particular el 0

3. Prueba que el conjunto de las funciones pares en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial con suma y multiplicación por escalar usuales para funciones. Recuerde que una función es par si $\forall x \in Dom(f)$ entonces $f(-x) = f(x)$

Si tenemos en cuenta que $f(-t)+g(-t)=f(t)+g(t)$ y que si tenemos constantes siempre ocurre que $cf(-t)=cf(t)$ entonces ya hemos probado las dos primeras condiciones y para hallar el neutro basta con usar el 0 del cambo ($\mathbb{R}$) para notar que también lo manda al 0 vector.

4. Sea V el conjunto de pares ordenados de números reales. Si (a_1,a_2) y (b_1,b_2) son elementos de V y $\alpha\in\mathbb{R}$, definamos la suma y multiplicación escalar de la siguiente manera:

(i) $(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2b_2)$

(ii) $\alpha(a_1,a_2)=(\alpha a_1,a_2)$.

¿Es V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones?

No puede ser un espacio vectorial porque si tenemos que

$$0(a_1,a_2)=(0,a_2)$$

para cumplir el cero vector, entonces se compliría para cualquier a_2 lo cual no es posible pues contradice la unicidad del cero.

«“‘¡HEAD **5**. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$ bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar usual.
Basta con revisar si en cada caso se encuentra cerrado bajo la multiplicación escalar y bajo la adición, además que siempre contenga al o
»”’======= 5. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$ bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar usual.

Definición 0.2. »”’Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto de $\mathcal{V}$ espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ decimos que $\mathcal{U}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$ si cumple lo siguiente

I) »”’$\vec{0}\in\mathcal{U}$

II) »”’$\forall\vec{u},\vec{v}\in\mathcal{U}\implies\vec{u}+\vec{v}\in\mathcal{U}$

III) »”’Sea $\alpha\in\mathbb{F},\vec{u}\in\mathcal{U}\implies\alpha\cdot\vec{u}\in\mathcal{U}$

»”””»¿d95c7500ca98027786aa371f7f54eeff10a5b0c4

a) $W_1=\{(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3\big|a_1=3a_2 \text{ y } a_3=-a_2\}$

Veamos que W_1 contiene a $\vec{0}$ esto es que algún elemento en $W_1=(0,0,0)$ por lo que

$$\begin{aligned}(0,0,0)&=(a_1,a_2,a_3) && \text{Por } \vec{0}\in\mathbb{R}^3\\ &=(3a_2,a_2,-a_2) && \text{Por } a_1=3a_2 \text{ y } a_3=-a_2\\ &=(3(0),(0),-(0)) && \text{Para cualquier } a_2\\ &=(0,0,0)\end{aligned}$$

Por otra parte comprovemos que la suma está dentro de W_1 Sean (a_1,a_2,a_3)

b) $W_2=\{(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3\big|a_1=a_3+2\}$

NO es linear porque no contiene al elemento neutro dentro del espacio vectorial.

c) $W_3=\{(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3\big|2a_1-7a_2+a_3=0\}$

Sí es linear pues lo satisface $(2,-7,1)$

d) $W_4=\{(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3\big|a_1-4a_2-a_3=0\}$

Sí es linear pues lo satisface $(1,-4,-1)$

6. En cada caso diga si los vectores son generados por el conjunto S

a) $(2,-1,1), S=\{(1,0,2),(-1,1,1)\}$
Sea $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
Entonces $(2,-1,1)=\alpha_1(1,0,2)+\alpha_2(-1,1,1)=(\alpha_1,0,2\alpha_1)+(-\alpha_2,\alpha_2,\alpha_2)=\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2,2\alpha_1+\alpha_2$.
Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1-\alpha_2 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2\alpha_1+\alpha_2 &= 1 \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \alpha_1-(-1) &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2\alpha_1+\alpha_2 &= 1 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema, obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Entonces:
$1(1,0,2)+(-1)(-1,1,1)=(1,0,2)+(1,-1,-1)=(2,-1,1)$
Cómo el sistema de ecuaciones si se satisface, el conjunto S SI genera al vector $(2,-1,-1)$

b) $(2,-1,1,3), S=\{(1,0,1,-1),(0,1,1,1)\}$
Sea $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
Entonces: $(2,-1,1,3)=\alpha_1(1,0,1,-1)+\alpha_2(0,1,1,1)=(\alpha_1,0,\alpha_1,-\alpha_1)+(0,\alpha_2,\alpha_2,\alpha_2)=\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_1+\alpha_2$.
Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ \alpha_1+\alpha_2 &= 1 \\ -\alpha_1+\alpha_2 &= 3 \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2-1 &= 1 \\ -(-1)+2 &= 3 \end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 1 &= 1 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones verificamos si el conjunto S genera al vector. Entonces:

$$2(1,0,1,-1)+(-1)(0,1,1,1)=(2,0,2,-2)+(0,-1,-1,-1)=(2,-1,-1,-3)$$

Como el producto de los escalares por los elementos del conjunto S no forman al vector, podemos concluir que S NO genera a $(2,-1,1,3)$.

c) $2x^3-x^2+x+3, S=\{x^3+x^2+x+1, x^2+x+1, x+1\}$

Sean α_1, α_2 y α_3 elementos del campo, si suponemos que $2x^3-x^2+x+3$ es generado por S implicará que existen dichos 3 elementos $\cdot \ni \cdot$

$$2x^3-x^2+x+3=\alpha_1(x^3+x^2+x+1)+\alpha_2(x^2+x+1)+\alpha_3(x+1)$$

$$\begin{align} \alpha_1x^3+\alpha_1x^2+\alpha_1x+\alpha_1 \tag{1}\\ \alpha_2x^2+\alpha_2x+\alpha_2 \tag{2}\\ \alpha_3x+\alpha_3 \tag{3} \end{align}$$

Por lo que ocurre lo siguiente

$$2x^3-x^2+x+3=\alpha_1x^3+\alpha_1x^2+\alpha_1x+\alpha_1+\alpha_2x^2+\alpha_2x+\alpha_2+\alpha_3x+\alpha_3$$

$$\begin{aligned} 2x^3-x^2+x+3 &= \alpha_1x^3+\alpha_1x^2+\alpha_1x+\alpha_1+\alpha_2x^2+\alpha_2x+\alpha_2+\alpha_3x+\alpha_3 \\ &= x^3(\alpha_3)+x^2(\alpha_2+\alpha_1)+x(\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1)+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1-\alpha_1 \\ \alpha_2 &= -1-2 \\ \alpha_2 &= -3 \end{aligned}$$

Ahora llegamos a una contradicción, puesto que el sistema de ecuaciones anterior implica que $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3=1$ por lo que el conjunto S no genera $2x^3-x^2+x+3$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, S=\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

Recordemos que la suma de matrices se hace entrada por entrada eso es, si se van a sumar 2 matrices $A+B$ se hace de la forma $a_{ij}+b_{ij}\forall i,j\in A,B$ de tal manera que existen $a_{ij}+b_{ij}\forall i,i\in A,B$ de tal manera que existen α,β,γ $\cdot \ni \cdot$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} &= \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}+\gamma_{1,1} & \beta_{1,2}+\gamma_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notemos que

$$-\alpha_{2,1}=-3 \implies \alpha=3$$

y luego

$$\beta_{2,2}=4 \implies \beta=4$$

y finalmente

$$\gamma=2-\beta_{1,2} \implies \gamma=4$$

7. Determina cuando los siguientes conjuntos son linealmente dependientes o linealmente independientes.

a) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}\right\} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \in \mathbb{R}$. Entonces:

$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ahora:

$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -3\alpha_1 \\ -2\alpha_1 & 4\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\alpha_2 & 6\alpha_2 \\ 4\alpha_2 & -8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente reglón y columna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_2 & -3\alpha_1 + 6\alpha_2 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 & 4\alpha_1 - 8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ -3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0 \\ 4\alpha_1 - 8\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicamos dos veces el renglón 3 y lo sumamos al renglón 4. También multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 3.

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ -3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Por último multiplicamos tres veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 2:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = 2\alpha_2$.

Esto indica que α_1 depende de α_2. Por lo tanto, el conjunto $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \in M_{2x2}$ es **linealmente dependiente**.

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \in \mathbb{R}$. Entonces:

$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ahora:

$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -2\alpha_1 \\ -\alpha_1 & 4\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_2 & \alpha_2 \\ 2\alpha_2 & -4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente reglón y columna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & -2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 & 4\alpha_1 - 4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \\ 4\alpha_1 - 4\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicamos cuatro veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 4. También sumamos el renglón 1 al renglón 2:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos que $\alpha_2 = 0$, Entonces lo sustituimos en las demás ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 0 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Es claro notar que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$.
Cómo ambos valen 0, podemos concluir que el conjunto $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ es **linealmente independiente**.

c) $\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\} \in P_3(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.
Tenemos que: $0x^3 + 0x^2 + 0x + d = \alpha_1(x^3 + 2x^2) + \alpha_2(-x^2 + 3x + 1) + \alpha_3(x^3 - x^2 + 2x - 1)$

$x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = (\alpha_1 + \alpha_3)x^3 + (2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)x^2 + (3\alpha_2 + 2\alpha_3)x + (\alpha_2 - \alpha_3)$.
Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora multiplicamos -3 veces el renglón 4 y le sumamos el renglón 1:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos obtener que $\alpha_3 = 0$. Entonces sustituimos este valor en las ecuaciones.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 0\alpha_2 + 0 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - 0 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

De lo anterior deducimos que $\alpha_1 = 0$, por tanto:

$$\begin{aligned} 0 - \alpha_2 - 0 &= 0 \\ 0 + 3\alpha_2 + 0 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Podemos que concluir que el conjunto $\{x^3+2x^2, -x^2+3x+1, x^3-x^2+2x-1\} \in P_3(\mathbb{R})$ es **linealmente independiente**.

d) $\{(1,-1,2),(1,-2,1),(1,1,4)\} \in \mathbb{R}^3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Entonces:
$\alpha_1(1,-1,2) + \alpha_2(1,-2,1) + \alpha_3(1,1,4) = (0,0,0)$. Ahora:

$(\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (\alpha_2, -2\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, 4\alpha_3) = (0,0,0)$. Ordenamos los escalares:

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3) = (0,0,0)$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos a "menos.[el] renglón 3. También sumamos el renglón 1 al renglón 2.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 2. Y al renglón 1 le sumamos el renglón 2.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 0\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces nos queda el siguiente sistema.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

De esto podemos deducir que $\alpha_1 = -3\alpha_3$, $\alpha_2 = 2\alpha_3$ y $\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{2}$.

Entonces podemos concluir que el conjunto $\{(1,-1,2),(1,-2,1),(1,1,4)\} \in \mathbb{R}^3$ es **linealmente dependiente**.

e)$\{(1,-1,2),(2,0,1),(-1,2,-1)\} \in \mathbb{R}^3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.
$\alpha_1(1,-1,2) + \alpha_2(2,0,1) + \alpha_3(-1,2,-1) = (0,0,0)$. Ahora:

$(\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (2\alpha_2, 0\alpha_2, \alpha_2) + (-\alpha_3, 2\alpha_3, -\alpha_3) = (0,0,0)$. Ordenamos los escalares:

$(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = (0,0,0)$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Primero multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 3. Luego sumamos el renglón 2 al renglón 1.

$$\begin{aligned} 0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 1:

$$\begin{aligned} 0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 5\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos que $\alpha_2 = 0$ y sustituimos en las demás ecuaciones.

$$\begin{aligned} 0 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Es fácilmente apreciar que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 0$

Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto $(1,-1,2), (2,0,1), (-1,2,-1) \in \mathbb{R}^3$ es **linealmente independiente**

Recuerde que $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \big| a_k \in \mathbb{R} \, \forall k = 0, 1, 2, \ldots n\}$