



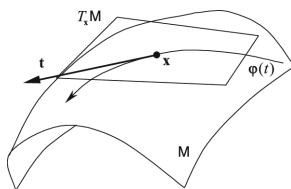
Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas para las ciencias aplicadas II

Tarea 1

Espacios vectoriales y Álgebra lineal



Profesor: M. en C. Pedro Porras Flores
Ayudante: Fís. Irving Hernández Rosa
Armando Abraham Aquino Chapa
Kevin Ariel Merino Peña

18 de marzo de 2020



Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que la tarea se entrega en equipos de a lo más tres integrantes.

Ejercicio 1

Escribe el vector cero en $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$

Definición 1 (Matriz). Una **Matriz** es un arreglo rectangular de elementos de un campo $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ de la forma

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

A los elementos $a_{i,j}$ con $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq i \leq m$ se les llama entradas de la matriz, a las matrices las denotamos por \mathbb{A} (*letras mayúsculas*) y al conjunto de las matrices de $m \times n$ se les denota por $M_{m \times n}(\mathbb{F})$

De esta manera tenemos que el vector cero de la matriz de 3 renglones por 4 columnas es aquella cuyas entradas (todas) son 0 *i. e.*

$$A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Sea V el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en \mathbb{R} . Muestre que V es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar para funciones.

Veamos que la derivada cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Así hemos probado que la derivada abre sumas

$$\begin{aligned} (cf(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

De esta manera queda conolidado que en la función derivada, los escalares son sacados de la función

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto se vale para cualquier constante, en particular el 0

Ejercicio 3

Prueba que el conjunto de las funciones pares en \mathbb{R} es un espacio vectorial con suma y multiplicación por escalar usuales para funciones. Recuerde que una función es par si $\forall x \in \text{Dom}(f)$ entonces $f(-x) = f(x)$

Si tenemos en cuenta que $f(-t) + g(-t) = f(t) + g(t)$ y que si tenemos constantes siempre ocurre que $cf(-t) = cf(t)$ entonces ya hemos probado las dos primeras condiciones y para hallar el neutro basta con usar el 0 del campo (\mathbb{R}) para notar que también lo manda al 0 vector.

Ejercicio 4

Sea V el conjunto de pares ordenados de números reales. Si (a_1, a_2) y (b_1, b_2) son elementos de V y $\alpha \in \mathbb{R}$, definamos la suma y multiplicación escalar de la siguiente manera:

$$(i) \quad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$$

$$(ii) \quad \alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, a_2).$$

¿Es V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} con estas operaciones?

No puede ser un espacio vectorial porque si tenemos que

$$0(a_1, a_2) = (0, a_2)$$

para cumplir el cero vector, entonces se cumpliría para cualquier a_2 lo cual no es posible pues contradice la unicidad del cero.

Ejercicio 5

Determinar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de \mathbb{R}^3 bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar usual.

Definición 2. Sea \mathcal{U} un subconjunto de \mathcal{V} espacio vectorial sobre \mathbb{F} decimos que \mathcal{U} es un subespacio vectorial de \mathcal{V} si cumple lo siguiente

$$I) \quad \vec{0} \in \mathcal{U}$$

$$II) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{U} \implies \vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{U}$$

$$III) \quad \text{Sea } \alpha \in \mathbb{F}, \vec{u} \in \mathcal{U} \implies \alpha \cdot \vec{u} \in \mathcal{U}$$

$$a) \quad W_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2\}$$

Veamos que W_1 contiene a $\vec{0}$ esto es que algún elemento en $W_1 = (0, 0, 0)$ por lo que

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (a_1, a_2, a_3) && \text{Por } \vec{0} \in \mathbb{R}^3 \\ &= (3a_2, a_2, -a_2) && \text{Por } a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2 \\ &= (3(0), (0), -(0)) && \text{Para cualquier } a_2 \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Por otra parte comprobemos que la suma está dentro de W_1

Sean $\hat{u} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\hat{v} = (b_1, b_2, b_3) \in W_1$ la suma de vectores se realiza entrada a entrada por lo que

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) &= (3a_2, a_2, -a_2) + (3b_2, b_2, -b_2) \\ &= (3a_2 + 3b_2, a_2 + b_2, -a_2 - b_2) \\ &= (3(a_2 + b_2), (a_2 + b_2), -(a_2 + b_2)) \end{aligned}$$

Y como $a_1 + b_1 \in \mathbb{R}^3$ entonces $\hat{u} + \hat{v} \in W_1$ por lo que cumple II)

Finalmente veamos que si $k \in R, \hat{u} \in W_1 \implies k\hat{u} \in W_1$

$$\begin{aligned} k(3a_2, a_2, -a_2) &\in W_1 \\ (3ka_2, ka_2, -ka_2) &\in W_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto cumple *III*)

$\therefore W_1$ es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

b) $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = a_3 + 2\}$

Veamos si $\hat{0} \in W_2$ si esto ocurriera entonces $(0, 0, 0) \in W_2$ lo que significaría lo siguiente

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (a_3 + 2, a_2, a_3) && \text{Por que deben ser iguales entrada a entrada} \\ 0 &= a_3 + 2 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= a_3 \end{aligned}$$

Podemos observar que en esta situación, $a_3 = -2 \wedge a_3 = 0$ lo cual no es posible, dicha contradicción vino de suponer que $\hat{0} \in W_2$

$$\therefore \hat{0} \notin W_2$$

por lo que W_2 **no** es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

c) $W_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0\}$

Notemos que en la declaración de los elementos de W_3 podemos deducir que

$$a_3 = 7a_2 - 2a_1$$

entonces $\hat{u} \in W_3 \implies \hat{u} = (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1)$

Veamos que para cumplir *I*) el vector cero debería estar en W_1 *i.e.*

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \\ 0 &= a_1 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= 7a_2 - 2a_1 \end{aligned}$$

lo anterior se cumple si $a_2 = 0 = a_1$

$$\therefore \hat{0} \in W_3$$

Ahora, sean $\hat{u}, \hat{v} \in W_3 \implies \hat{u} = (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \wedge \hat{v} = (b_1, b_2, 7b_2 - 2b_1)$ y probemos que $\hat{u} + \hat{v} \in W_3$

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) + (b_1, b_2, 7b_2 - 2b_1) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 7a_2 + 7b_2 - 2a_1 - 2b_1) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 7(a_2 + b_2) - 2(a_1 + b_1)) \end{aligned}$$

y como $a_1 + b_1 \in R$ también se encontrarán dentro de W_3 por lo que la suma es cerrada en el conjunto W_3

Por último veamos que si $k \in R, \hat{u} \in W_3 \implies k \cdot \hat{u} \in W_3$

$$\begin{aligned} k\hat{u} &= k(a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \\ k\hat{u} &= (ka_1, ka_2, 7ka_2 - 2ka_1) \end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir que cada uno de esos ka_1, ka_2 elementos estarán en R por lo que $k\hat{u}$ resultarán también estar en W_3

$\therefore W_3$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

d) $W_4 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 - 4a_2 - a_3 = 0\}$ De la definición de los elementos de W_4 se sigue que si \hat{u} es un elemento de este conjunto, tendrá la forma $\hat{u} = (4a_2 + a_3, a_2, a_3)$ Comencemos averiguando si W_4 tiene elemento neutro, *i. e.*

$$\begin{aligned}(0, 0, 0) &= (4a_2 + a_3, a_2, a_3) \\ 0 &= 4a_2 + a_3 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= a_3\end{aligned}$$

para ser iguales entrada a entrada

Lo anterior ocurre cuando $a_2 = a_3 = 0$ por lo que $\hat{0} \in W_4$ y así cumple la condición *I*)

Siguiendo con la comprobación de sus propiedades como subespacio vectorial, tenemos que: Sean $\hat{u}, \hat{v} \in W_4 \implies \hat{u} + \hat{v} \in W_4$ *i. e.*

$$\begin{aligned}\hat{u} + \hat{v} &= (4a_2 + a_3, a_2, a_3) + (4b_2 + b_3, b_2, b_3) \\ &= (4a_2 + 4b_2 + b_3 + a_3, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (4(a_2 + b_2) + (b_3 + a_3), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3))\end{aligned}$$

sumando entrada por entrada
asociatividad y distributividad en \mathbb{R}

y como $(a_2 + b_2) \in \mathbb{R}$ la suma de $\hat{u}, \hat{v} \in W_4$

Finalmente notemos que si $k \in \mathbb{R}, \hat{u} \in W_4 \implies k \cdot \hat{u} \in W_4$

$$\begin{aligned}k\hat{u} &= k(4a_2 + a_3, a_2, a_3) \\ &= (4ka_2 + ka_3, ka_2, ka_3)\end{aligned}$$

por distributividad

y $ka_2, ka_3 \in \mathbb{R}$ entonces $k \cdot \hat{u} \in W_4$

$\therefore W_4$ es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

Ejercicio 6

En cada caso diga si los vectores son generados por el conjunto S

Definición 3. Sea \mathcal{S} un subconjunto de un espacio vectorial \mathcal{V} decimos que \mathcal{S} genera a \mathcal{V} si $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos de \mathcal{S} al generado de \mathcal{S} se le denota como $span(\mathcal{S}), <\mathcal{S}>, gen(\mathcal{S})$

a) $(2, -1, 1), S = \{(1, 0, 2), (-1, 1, 1)\}$

Sea $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Entonces $(2, -1, 1) = \alpha_1(1, 0, 2) + \alpha_2(-1, 1, 1) = (\alpha_1, 0, 2\alpha_1) + (-\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2$.

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_2 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - (-1) &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1\end{aligned}$$

Al resolver el sistema, obtenemos:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 1 &= 1\end{aligned}$$

Entonces:

$$1(1, 0, 2) + (-1)(-1, 1, 1) = (1, 0, 2) + (1, -1, -1) = (2, -1, 1)$$

Cómo el sistema de ecuaciones si se satisface, el conjunto S SI genera al vector $(2, -1, -1)$

b) $(2, -1, 1, 3), S = \{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 1)\}$

Sea $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Entonces: $(2, -1, 1, 3) = \alpha_1(1, 0, 1, -1) + \alpha_2(0, 1, 1, 1) = (\alpha_1, 0, \alpha_1, -\alpha_1) + (0, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2$.

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 &= 3\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2 - 1 &= 1 \\ -(-1) + 2 &= 3\end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 1 &= 1 \\ 3 &= 3\end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones verificamos si el conjunto S genera al vector. Entonces:

$$2(1, 0, 1, -1) + (-1)(0, 1, 1, 1) = (2, 0, 2, -2) + (0, -1, -1, -1) = (2, -1, -1, -3)$$

Como el producto de los escalares por los elementos del conjunto S no forman al vector, podemos concluir que S **NO** genera a $(2, -1, 1, 3)$.

c) $2x^3 - x^2 + x + 3, S = \{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1\}$

Sean α_1, α_2 y α_3 elementos del campo, si suponemos que $2x^3 - x^2 + x + 3$ es generado por S implicará que existen dichos 3 elementos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = \alpha_1(x^3 + x^2 + x + 1) + \alpha_2(x^2 + x + 1) + \alpha_3(x + 1)$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 \\ \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 \\ \alpha_3 x + \alpha_3\end{aligned}$$

Por lo que ocurre lo siguiente

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3$$

$$\begin{aligned}2x^3 - x^2 + x + 3 &= \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3 \\ &= x^3(\alpha_1) + x^2(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 - \alpha_1 \\ \alpha_2 &= -1 - 2 \\ \alpha_2 &= -3\end{aligned}$$

Ahora llegamos a una contradicción, puesto que el sistema de ecuaciones anterior implica que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3 = 1$ por lo que el conjunto S no genera $2x^3 - x^2 + x + 3$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Recordemos que la suma de matrices se hace entrada por entrada eso es, si se van a sumar 2 matrices $A + B$ se hace de la forma $a_{ij} + b_{ij} \forall i, j \in A, B$ de tal manera que existen $a_{ij} + b_{ij} \forall i, i \in A, B$ de tal manera que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + \gamma_{1,1} & \beta_{1,2} + \gamma_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Notemos que

$$-\alpha_{2,1} = -3 \implies \alpha = 3$$

y luego

$$\beta_{2,2} = 4 \implies \beta = 4$$

y finalmente

$$\gamma = 2 - \beta_{1,2} \implies \gamma = 4$$

Ejercicio 7

Determina cuando los siguientes conjuntos son linealmente dependientes o linealmente independientes.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -3\alpha_1 \\ -2\alpha_1 & 4\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\alpha_2 & 6\alpha_2 \\ 4\alpha_2 & -8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente renglón y columna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_2 & -3\alpha_1 + 6\alpha_2 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 & 4\alpha_1 - 8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ -3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0 \\ 4\alpha_1 - 8\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Multiplicamos dos veces el renglón 3 y lo sumamos al renglón 4. También multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 3.

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ -3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Por último multiplicamos tres veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 2:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = 2\alpha_2$.

Esto indica que α_1 depende de α_2 . Por lo tanto, el conjunto $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$ es **linealmente dependiente**.

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -2\alpha_1 \\ -\alpha_1 & 4\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_2 & \alpha_2 \\ 2\alpha_2 & -4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente renglón y columna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & -2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 & 4\alpha_1 - 4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \\ 4\alpha_1 - 4\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Multiplicamos cuatro veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 4. También sumamos el renglón 1 al renglón 2:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Tenemos que $\alpha_2 = 0$, Entonces lo sustituimos en las demás ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 0 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 0 &= 0\end{aligned}$$

Es claro notar que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$.

Cómo ambos valen 0, podemos concluir que el conjunto $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ es **linealmente independiente**.

c) $\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\} \in P_3(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

Tenemos que: $0x^3 + 0x^2 + 0x + d = \alpha_1(x^3 + 2x^2) + \alpha_2(-x^2 + 3x + 1) + \alpha_3(x^3 - x^2 + 2x - 1)$

$$x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = (\alpha_1 + \alpha_3)x^3 + (2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)x^2 + (3\alpha_2 + 2\alpha_3)x + (\alpha_2 - \alpha_3).$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Ahora multiplicamos -3 veces el renglón 4 y le sumamos el renglón 1:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Podemos obtener que $\alpha_3 = 0$. Entonces sustituimos este valor en las ecuaciones.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - 0 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

De lo anterior deducimos que $\alpha_1 = 0$, por tanto:

$$\begin{aligned}0 - \alpha_2 - 0 &= 0 \\ 0 + 3\alpha_2 + 0 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. Podemos que concluir que el conjunto $\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\} \in P_3(\mathbb{R})$ es **linealmente independiente**.

d) $\{(1, -1, 2), (1, -2, 1), (1, 1, 4)\} \in \mathbb{R}^3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Entonces:

$\alpha_1(1, -1, 2) + \alpha_2(1, -2, 1) + \alpha_3(1, 1, 4) = (0, 0, 0)$. Ahora:

$(\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (\alpha_2, -2\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, 4\alpha_3) = (0, 0, 0)$. Ordenamos los escalares:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3) = (0, 0, 0)$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos a "menos" el renglón 3. También sumamos el renglón 1 al renglón 2.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 2. Y al renglón 1 le sumamos el renglón 2.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Entonces nos queda el siguiente sistema.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

De esto podemos deducir que $\alpha_1 = -3\alpha_3$, $\alpha_2 = 2\alpha_3$ y $\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{2}$.

Entonces podemos concluir que el conjunto $\{(1, -1, 2), (1, -2, 1), (1, 1, 4)\} \in \mathbb{R}^3$ es **linealmente dependiente**.

$$\mathbf{e}\{(1, -1, 2), (2, 0, 1), (-1, 2, -1)\} \in \mathbb{R}^3$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\alpha_1(1, -1, 2) + \alpha_2(2, 0, 1) + \alpha_3(-1, 2, -1) &= (0, 0, 0) \\ (\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (2\alpha_2, 0\alpha_2, \alpha_2) + (-\alpha_3, 2\alpha_3, -\alpha_3) &= (0, 0, 0) \\ (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

Ahora

Ordenamos los escalares

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Primero multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 3. Luego sumamos el renglón 2 al renglón 1.

$$\begin{aligned}0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 1:

$$\begin{aligned}0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 5\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos que $\alpha_2 = 0$ y sustituimos en las demás ecuaciones.

$$\begin{aligned}0 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Es fácilmente apreciar que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 0$

Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto $(1, -1, 2), (2, 0, 1), (-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$ es **linealmente independiente**

Recuerde que $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \mid a_k \in \mathbb{R} \forall k = 0, 1, 2, \dots, n\}$

Ejercicio 8

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son bases para \mathbb{R}^3 ?

Definición 4. Una **base** β de \mathcal{V} espacio vectorial es un subconjunto de \mathcal{V} tal que β genera a \mathcal{V} y β es linealmente independiente

a) $S = \{(1, 0, -1), (2, 5, 1), (0, -4, 3)\}$ En primer lugar veamos quién es el generado del conjunto S , recordemos que un conjunto genera a otro $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos de S

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 5, 1) + \gamma(0, -4, 3)$$

$$\begin{aligned} \alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 5, 1) + \gamma(0, -4, 3) &= (\alpha, 0, -\alpha) + (2\beta, 5\beta, \beta) + (0, -4\gamma, 3\gamma) \\ &= (\alpha + 2\beta, 5\beta - 4\gamma, -\alpha + \beta + 3\gamma) \end{aligned}$$

Necesitamos que cada uno de esos vectores pueda ser el valor de una posición de \mathbb{R}^3 por lo que debería verse como

$$\alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 5, 1) + \gamma(0, -4, 3) = \delta(1, 0, 0) + \epsilon(0, 1, 0) + \eta(0, 0, 1)$$

De esta manera podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + 0\gamma &= \delta + 0\epsilon + 0\eta \\ 0\alpha + 5\beta - 4\gamma &= 0\delta + \epsilon + 0\eta \\ -\alpha + \beta + 3\gamma &= 0\delta + 0\epsilon + \eta \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma \\ -\alpha & \beta & 3\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ 0\delta & 0\epsilon & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0\delta & 0\epsilon & \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0\delta & 0\epsilon & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta \end{pmatrix} \quad \text{1ra fila} + 2da \text{ fila en } \mathbf{3ra \text{ fila}}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta \end{pmatrix} \quad \text{2da fila} \cdot \frac{1}{5} \text{ en } \mathbf{2da \text{ fila}}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & \delta & -\frac{3}{5}\epsilon & \eta \end{pmatrix} \quad \text{2da fila} \cdot -3 + 3^{ra} \text{ fila en } \mathbf{3ra \text{ fila}}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & \delta & -\frac{3}{5}\epsilon & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{pmatrix} \quad \text{3ra fila} \cdot \frac{5}{27} \text{ en } \mathbf{3ra \text{ fila}}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{pmatrix} \quad \left(3ra \text{ fila} \cdot \frac{4}{5}\right) + 2^{da} \text{ fila en } \mathbf{2da \text{ fila}}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{19}{27}\delta & -\frac{2}{9}\epsilon & -\frac{8}{27}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{pmatrix} \quad \left(2da \text{ fila} \cdot -2\right) + 1^a \text{ fila en } \mathbf{1ra \text{ fila}}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{19}{27}\delta & -\frac{2}{9}\epsilon & -\frac{8}{27}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{27}\delta & -\frac{2}{9}\epsilon & -\frac{8}{27}\eta \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{pmatrix} \quad \text{Conservando sólo } \mathbf{coeficientes}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{19}{27}\delta - \frac{2}{9}\epsilon - \frac{8}{27}\eta \\ \beta &= \frac{4}{27}\delta + \frac{1}{9}\epsilon + \frac{4}{27}\eta \\ \delta &= \frac{5}{27}\delta - \frac{1}{9}\epsilon + \frac{5}{27}\eta\end{aligned}$$

$\therefore \mathcal{S}$ genera a \mathbb{R}^3

Ahora veamos si es linealmente independiente, lo cual ocurre si la única solución para

$$\alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 5, 1) + \gamma(0, -4, 3) = 0$$

es que

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta + 0\gamma &= 0 \\ 0\alpha + 5\beta - 4\gamma &= 0 \\ -\alpha + \beta + 3\gamma &= 0\end{aligned}$$

Resolviendo dicho sistema obtenemos que

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0 \\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) & \text{1ra fila} + 2\text{da fila en } \mathbf{3ra \text{ fila}} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) & \text{2da fila} \cdot \frac{1}{5} \text{ en } \mathbf{2da \text{ fila}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & 0\end{array}\right) & \text{2da fila} \cdot -3 + 3^{ra} \text{ fila en } \mathbf{3ra \text{ fila}} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0\end{array}\right) & \text{3ra fila} \cdot \frac{5}{27} \text{ en } \mathbf{3ra \text{ fila}} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0\end{array}\right) & \text{(3ra fila} \cdot \frac{4}{5}) + 2^{da} \text{ fila en } \mathbf{2da \text{ fila}} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0\end{array}\right) & \text{(2da fila} \cdot -2) + 1^a \text{ fila en } \mathbf{1ra \text{ fila}} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) & \text{Conservando sólo } \mathbf{coeficientes}\end{aligned}$$

De esta manera podemos concluir que \mathcal{S} es **linealmente independiente**

$\therefore \mathcal{S}$ es Base para \mathbb{R}^3

$$\text{b) } S = \{(2, -4, 1), (0, 3, -1), (6, 0, -1)\}$$

Veamos quién es el generador de S , un conjunto genera a otro si todo elemento del segundo conjunto puede ser expresado como una combinación lineal del primero, en este caso elementos de S

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(2, -4, 1) + \beta(0, 3, -1) + \gamma(6, 0, -1)$$

$$\begin{aligned}\alpha(2, -4, 1) + \beta(0, 3, -1) + \gamma(6, 0, -1) &= (2\alpha, -4\alpha, \alpha) + (0, 3\beta, -\beta) + (6\gamma, 0, -\gamma) \\ &= (2\alpha + 6\gamma, -4\alpha + 3\beta, \alpha - \beta - \gamma)\end{aligned}$$

Necesitamos que cada uno de dichos vectores pueda ser el valor de una posición en \mathbb{R}^3 por lo que debería de verse como

$$\alpha(2, -4, 1) + \beta(0, 3, -1) + \gamma(6, 0, -1) = \delta(1, 0, 0) + \xi(0, 1, 0) + \eta(0, 0, 1)$$

De esta manera obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}2\alpha + 0\beta + 6\gamma &= \delta + 0\xi + 0\eta \\ -4\alpha + 3\beta + 0\gamma &= 0\delta + \xi + 0\eta \\ \alpha - \beta - \gamma &= 0\delta + 0\xi + \eta\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2\alpha & 0\beta & 6\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \delta & 0\xi & 0\eta & & & \\ 0\delta & \xi & 0\eta & & & \\ 0\delta & 0\xi & \eta & & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2\alpha & 0\beta & 6\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2\alpha & 0\beta & 6\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) \quad \text{1ra fila} \cdot \frac{1}{2} \text{ en 1a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & \gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) \quad \text{(1ra fila} \cdot 4) + 2\alpha \text{ fila en 2a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) \quad \text{3ra fila} - 1\text{ra fila en 3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) \quad \text{2fa fila} \cdot \frac{1}{3} \text{ en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{1}{6}\delta & \frac{1}{3}\xi & \eta \end{array} \right) \quad \text{3ra fila} - 2\alpha \text{ fila en 3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{1}{6}\delta & \frac{1}{3}\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) \quad \text{3a fila} \cdot 6 \text{ en 3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) \quad \text{3a fila} \cdot -\frac{2}{3} + 2\alpha \text{ fila en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & 0\delta & -\xi & -3\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) \quad \text{3a fila} \cdot -\frac{1}{2} + 1\alpha \text{ fila en 1a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & 0\delta & -\xi & -3\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right) \quad \text{Conservando sólo coeficientes}$$

Notemos que para γ tenemos que tiene ceros en la parte izquierda y puede tener valores distintos de cero en la parte derecha, por lo tanto el sistema de ecuaciones es inconsistente y consecuentemente

S no genera a \mathbb{R}^3
 $\therefore S$ no es base de \mathbb{R}^3

c) $S\{(1, 2, -1), (1, 0, 2), (2, 1, 1)\}$

Comencemos por ver quien en es generado de S , recordemos que un conjunto genera a otro si $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos para \mathcal{S}

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(1, 2, -1) + \beta(1, 0, 2) + \gamma(2, 1, 1)$$

$$\begin{aligned}\alpha(1, 2, -1) + \beta(1, 0, 2) + \gamma(2, 1, 1) &= (\alpha, 2\alpha, -\alpha) + (\beta, 0\beta, 2\beta) + (2\gamma, \gamma, \gamma) \\ &= (\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha + 0\beta + \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma)\end{aligned}$$

Es menester que cada una de esas entradas represente una en \mathbb{R}^3 pues nos gustaría ver que S genera a \mathbb{R}^3 por lo que obtenemos la siguiente ecuación

$$(\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha + 0\beta + \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma) = \delta(1, 0, 0) + \xi(0, 1, 0) + \eta(0, 0, 1)$$

y así tenemos que

$$\alpha + \beta + 2\gamma = \delta + 0\xi + 0\eta$$

$$2\alpha + 0\beta + \gamma = 0\delta + \xi + 0\eta$$

$$-\alpha + 2\beta + \gamma = 0\delta + 0\xi + \eta$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 2\alpha & 0\beta & \gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \delta & 0\xi & 0\eta & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\delta & \xi & 0\eta & 0\delta & \xi & 0\eta \\ 0\delta & 0\xi & \eta & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 2\alpha & 0\beta & \gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 2\alpha & 0\beta & \gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) && \text{2a fila} - 2(1a \text{ fila}) \text{ en 2a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) && \text{1a fila} + 3a \text{ fila en 3a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) && \text{2a fila} \cdot -\frac{1}{2} \text{ en 2a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & -2\delta & \frac{3}{2}\xi & \eta \end{array} \right) && \text{2a fila} \cdot -3 + 3a \text{ fila en 3 fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & -2\delta & \frac{3}{2}\xi & \eta \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array} \right) && \text{3a fila} \cdot -\frac{2}{3} \text{ en 3a Fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array} \right) && \text{3a fila} \cdot -\frac{3}{2} + 2a \text{ fila en 2a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 0\gamma & -\frac{5}{3}\delta & 2\xi & \frac{4}{3}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array} \right) && (3a \text{ fila} \cdot -2) + 1a \text{ fila en 1a Fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 0\gamma & -\frac{5}{3}\delta & 2\xi & \frac{4}{3}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 0\gamma & -\frac{2}{3}\delta & 1\xi & \frac{1}{3}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array} \right) && \text{1a fila} - 2a \text{ fila en 1a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 0\gamma & -\frac{2}{3}\delta & 1\xi & \frac{1}{3}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \end{array} \right) && \text{Manteniendo sólo coeficientes} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{2}{3}\delta + 1\xi + \frac{1}{3}\eta \\ \beta &= -\delta + \xi + \eta \\ \gamma &= \frac{4}{3}\delta - \xi - \frac{2}{3}\eta\end{aligned}$$

$\therefore S$ genera a \mathbb{R}^3

Ahora veamos si el linealmente independiente, lo cual ocurre si la única solución a la siguiente ecuación es que todos los coeficientes sean 0

$$\begin{aligned}\alpha(1, 2, -1) + \beta(1, 0, 2) + \gamma(2, 1, 1) &= 0 \\ (\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha + 0\beta + \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma) &= 0\end{aligned}$$

Lo cual permite formar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \\ 2\alpha + 0\beta + \gamma &= 0 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 2\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\end{array}\right) & \text{2a fila - 2(1a fila) en 2a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) & \text{1a fila + 3a fila en 3a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) & \text{2a fila} \cdot -\frac{1}{2} \text{ en 2a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & 0\end{array}\right) & \text{2a fila} \cdot -3 + 3a \text{ fila en 3 fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0\end{array}\right) & \text{3a fila} \cdot -\frac{2}{3} \text{ en 3a Fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0\end{array}\right) & \text{3a fila} \cdot -\frac{3}{2} + 2a \text{ fila en 2a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0\end{array}\right) & \text{(3a fila} \cdot -2) + 1a \text{ fila en 1a Fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0\end{array}\right) & \text{1a fila - 2a fila en 1a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) & \text{Manteniendo sólo coeficientes}\end{aligned}$$

Así podemos concluir que S es linealmente independiente

$\therefore S$ es base para \mathbb{R}^3

Ejercicio 9

Diga si los siguientes $x^3 - 2x^2 + 1, 4x^2 - x + 3y3x - 2$ generan a $P_3(\mathbb{R})$

Sea $ax^3 + bx^2 + cx + d \in (\mathbb{R})$.

Tomamos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in (\mathbb{R})$. Entonces:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (\alpha_1)x^3 + (-2\alpha_1 + 4\alpha_2)x^2 + (\alpha_2 + 3\alpha_3)x + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3)$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= b \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 &= c \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Sustituimos α_1 en las demás ecuaciones

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ -2a + 4\alpha_2 &= b \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 &= c \\ a + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Del renglón 2 es fácil apreciar cuál es el valor de α_2

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 &= c \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

De igual forma sustituimos α_2 en las demás ecuaciones.

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ -\left(\frac{b+2a}{4}\right) + 3\alpha_3 &= c \\ a + 3\left(\frac{b+2a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Observamos que tenemos 2 ecuaciones, en las cuáles sólo hay un valor a encontrar, entonces en estas dos ecuaciones procedemos a encontrar el valor de α_3 . Primero comenzaremos con el renglón 3.

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ 3\alpha_3 &= \frac{4c}{4} + \left(\frac{b+2a}{4}\right) \\ a + 3\left(\frac{b+2a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ \alpha_3 &= \frac{\frac{4c+b+2a}{4}}{3} \\ a + 3\left(\frac{b+2a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Obtenemos el primer valor de α_3 :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ \alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\ a + 3\left(\frac{b+2a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Encontraremos el valor de α_3 en la ecuación cuatro.

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ \alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\ a + \left(\frac{b+2a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ \alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\ 2\alpha_3 &= a + \left(\frac{3b+6a}{4}\right) - d\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ \alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\ 2\alpha_3 &= \frac{4a}{4} + \left(\frac{3b+6a}{4}\right) - \frac{4d}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ \alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\ \alpha_3 &= \frac{\frac{3b+10a-4d}{4}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ \alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\ \alpha_3 &= \frac{3b+10a-4d}{8}\end{aligned}$$

Una vez que encontramos los valores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, para ver que el conjunto dado genera a cualquier polinomio de grado tres, damos algún polinomio y este tendrá que poder escribirse como combinación lineal los elementos del conjunto y los escalares.

Elegimos el polinomio $5x^3 + 2x^2x + 2$. Ahora encontraremos los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ para poder escribirlo de la manera:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (\alpha_1)x^3 + (-2\alpha_1 + 4\alpha_2)x^2 + (\alpha_2 + 3\alpha_3)x + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3)$$

Utilizando los resultados del sistema de ecuaciones tenemos que:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 5 \\ \alpha_2 &= 3 \\ \alpha_3 &= 6 \\ \alpha_3 &= \frac{20}{12}\end{aligned}$$

Como podemos apreciar los valores de α_3 no son los mismos, y esto es debido a que originalmente teníamos un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas, entonces el sistema tiene diversas soluciones y al encontrar que los resultados de las ecuaciones de α_3 no son el mismo, podemos concluir que el conjunto $x^3 - 2x^2 + 1, 4x^2 - x + 3y3x - 2$ **NO** generan a $P_3(\mathbb{R})$

Ejercicio 10

Prueba que las siguientes transformaciones T son lineales y encuentra el núcleo $Nu(T)$ y la imagen $Im(T)$

Definición 5. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, la **imagen** de una transformación T es $Im(T) = \{T(\hat{x}) | \hat{x} \in V\}$

Definición 6. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, el **núcleo** de una transformación T es $Nu(T) = \{\hat{x} \in V | T(\hat{x}) = \hat{0}_W\}$

a) $\{T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2\}$ definida por $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, 2a_3)$ Para ver que una transformación es lineal, debe cumplir que **abra sumas y saque escalares**

Sean $\hat{a}_1, \hat{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ y $\xi \in \mathbb{R}$ entonces

$\xi a_1 + a_2 = \xi(x_1, y_1, z_1) + (x_1, y_2, z_2)$	Por definición de a_1 y a_2
$\xi a_1 + a_2 = (\xi x_1, \xi y_1, \xi z_1) + (x_2, y_2, z_2)$	Por distributividad de los \mathbb{R}
$\xi a_1 + a_2 = (\xi x_1 + x_2, \xi y_1 + y_2, \xi z_1 + z_2)$	Sumando entrada por entrada
$T(\xi a_1 + a_2) = T(\xi x_1 + x_2, \xi y_1 + y_2, \xi z_1 + z_2)$	Aplicando T
$T(\xi a_1 + a_2) = ((\xi x_1 + x_2) - (\xi y_1 + y_2), 2(\xi z_1 + z_2))$	Siguiendo la regla de T
$T(\xi a_1 + a_2) = (\xi x_1 + x_2 - \xi y_1 - y_2, 2\xi z_1 + 2z_2)$	Por asociatividad
$T(\xi a_1 + a_2) = (\xi x_1 - \xi y_1 + x_2 - y_2, 2\xi z_1 + 2z_2)$	Por conmutatividad
$T(\xi a_1 + a_2) = ((\xi x_1 - \xi y_1) + (x_2 - y_2), 2\xi z_1 + 2z_2)$	Asociatividad nuevamente
$T(\xi a_1 + a_2) = (\xi x_1 - \xi y_1, 2\xi z_1) + (x_2 - y_2, 2z_2)$	Asociatividad entre elementos en \mathbb{R}^2
$T(\xi a_1 + a_2) = \xi(x_1 - y_1, 2z_1) + (x_2 - y_2, 2z_2)$	Por distributividad de ξ
$T(\xi a_1 + a_2) = \xi T(a_1) + T(a_2)$	Por definición de T

$\therefore T$ es transformación lineal

Ahora veamos quién es el núcleo de la transformación igualando a $\hat{0}_{\mathbb{R}^2}$ sea $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$

$T(\hat{x}) = \hat{0}_{\mathbb{R}^2}$	Planteando la igualdad
$T(\hat{x}) = (0, 0)$	Por definición del neutro aditivo en \mathbb{R}^2
$T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)$	Porque $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$
$(x_1 - x_2, 2x_3) = (0, 0)$	Por definición de T
$x_1 - x_2 = 0$	Obtenemos el siguiente sistema
$2x_3 = 0$	
$x_3 = 0$	Por lo que tenemos
$x_1 = x_2$	y por otra parte

\therefore el núcleo de la transformación son todos los elementos cuya primera y segunda coordenada son la misma y la tercera 0.

$$i.e. Nu(T) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | (x_1, x_1, 0)\}$$

Finalmente observemos que la imagen de la transformación es:

Sean $\hat{y} \in \mathbb{R}^2$ y $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$ veamos que

$T(\hat{x}) = \hat{y}$	Para ver la forma de los elementos en la imagen
$T(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2)$	Por definición de \hat{y}, \hat{x}
$(x_1 - x_2, 2x_3) = (y_1, y_2)$	Usando la regla de correspondencia de T
$x_1 - x_2 = y_1$	Obtenemos que y_1 es de esa forma
$2x_3 = y_2$	y que y_2 se obtiene de esta manera

Es menester mencionar que la suma (diferencia) entre elementos de \mathbb{R} es algún otro elemento en \mathbb{R} por lo que la imagen de T es todo \mathbb{R}^2

b) $\{T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ definida por $(a_1, a_2) \mapsto (a_1 + a_2, 0, 2a_1 - a_2)$ Para ver que una transformación es lineal, debe cumplir que **abra sumas y saque escalares**

Sean $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^3$ y $\theta \in \mathbb{R}$ entonces

$\theta\hat{x} + \hat{y} = \theta(a, b) + (c, d)$	Por definición de \hat{x}, \hat{y}
$\theta\hat{x} + \hat{y} = (\theta a, \theta b) + (c, d)$	Distributividad en \mathbb{R}
$\theta\hat{x} + \hat{y} = (\theta a + c, \theta b + d)$	Sumando entrada a entrada
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = T(\theta a + c, \theta b + d)$	Aplicando T en ambos lados
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = ((\theta a + c) + (\theta b + d), 0, 2(\theta a + c) - (\theta b + d))$	Aplicando la regla de correspondencia
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = (\theta a + \theta b + c + d, 0, 2\theta a + 2c - \theta b - d)$	Asociatividad en \mathbb{R}
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = ((\theta a + \theta b) + (c + d), 0, (2\theta a - \theta b) + (2c - d))$	Asociatividad y distributividad en \mathbb{R}
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = (\theta a + \theta b, 0, 2\theta a - \theta b) + (c + d, 0, 2c - d)$	Asociatividad
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = \theta(a + b, 0, 2a - b) + (c + d, 0, 2c - d)$	Distributividad <i>inversa</i>
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = \theta T(\hat{x}) + T(\hat{y})$	Definición de T

$\therefore T$ es transformación lineal

Revisemos cuál es el núcleo de la transformación lineal, tomando un elemento en el dominio y viendo qué forma tienen los elementos que irán al neutro aditivo de su codominio.

Sea $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ entonces

$T(\hat{x}) = \hat{0}_{\mathbb{R}^3}$	Planteando la igualdad
$T(x_1, x_2) = \hat{0}_{\mathbb{R}^3}$	Por la forma de \hat{x}
$T(x_1, x_2) = (0, 0, 0)$	Por la forma de $\hat{0}_{\mathbb{R}^3}$
$(x_1 + x_2, 0, 2x_1 - x_2) = (0, 0, 0)$	Aplicando la regla de correspondencia de T

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 \\ 2x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Deducimos lo siguiente

Y la única manera de que eso ocurra es que

$$x_1 = x_2 = 0$$

\therefore el núcleo de la transformación es $(0, 0)$

Finalmente notemos que la imagen de la transformación está dada por lo siguiente.

Sea $\hat{y} \in \mathbb{R}^3$ y $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ de la forma

$$\hat{y} = (y_1, y_2, y_3) \quad \hat{x} = (x_1, x_2)$$

entonces

$T(\hat{x}) = \hat{y}$	Para ver de qué forma son los elementos
$T(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3)$	Usando su representación
$(x_1 + x_2, 0, 2x_1 - x_2) = (y_1, y_2, y_3)$	Por la regla de correspondencia de T

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= y_1 \\ 0 &= y_2 \\ 2x_1 - x_2 &= y_3 \end{aligned}$$

Igualamos entrada a entrada

Obteniendo lo siguiente

Se deduce de lo anterior

Es importante mencionar que la suma de elementos en \mathbb{R} es algún elemento en \mathbb{R} pues la suma es cerrada en dicho conjunto. Por lo que podemos deducir que la imagen de T es

$$Im(T) = \{(x_1, 0, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

c) $\{T : M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})\}$ definido por

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sean $A, B \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A + B = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \quad \text{Por definición de A y B}$$

$$\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \quad \text{Distributividad de } \lambda$$

$$\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + b_{11} & \lambda a_{12} + b_{12} & \lambda a_{13} + b_{13} \\ \lambda a_{21} + b_{21} & \lambda a_{22} + b_{22} & \lambda a_{23} + b_{23} \end{pmatrix} \quad \text{Definición de } + \text{ en } M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

$$T(\lambda A + B) = T \left(\begin{pmatrix} \lambda a_{11} + b_{11} & \lambda a_{12} + b_{12} & \lambda a_{13} + b_{13} \\ \lambda a_{21} + b_{21} & \lambda a_{22} + b_{22} & \lambda a_{23} + b_{23} \end{pmatrix} \right) \quad \text{Aplicando T en ambos miembros}$$

$$T(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} 2(\lambda a_{11} + b_{11}) - (\lambda a_{12} + b_{12}) & \lambda a_{13} + b_{13} + 2(\lambda a_{12} + b_{12}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Siguiendo la regla de transformación de T}$$

$$T(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} 2\lambda a_{11} + 2b_{11} - \lambda a_{12} - b_{12} & \lambda a_{13} + b_{13} + 2\lambda a_{12} + 2b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Distributividad}$$

$$T(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} (2\lambda a_{11} - \lambda a_{12}) + (2b_{11} - b_{12}) & (\lambda a_{13} + 2\lambda a_{12}) + (b_{13} + 2b_{12}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Asociatividad en } \mathbb{R}$$

$$T(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} 2\lambda a_{11} - \lambda a_{12} & \lambda a_{13} + 2\lambda a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_{11} - b_{12} & b_{13} + 2b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Asociatividad en } M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

$$T(\lambda A + B) = \lambda \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_{11} - b_{12} & b_{13} + 2b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Distributividad inversa en } \lambda$$

$$T(\lambda A + B) = \lambda T(A) + T(B) \quad \text{Definición de } T(A), T(B)$$

$\therefore T$ es transformación lineal

Veamos cuál es el núcleo de la transformación.

Sea $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$

$$T(A) = \hat{0}_{M_{2 \times 2}} \quad \text{Planteando la igualdad}$$

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Planteando la igualdad}$$

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Por la regla de correspondencia de T}$$

$$2a_{11} - a_{12} = 0 \quad \text{Obtenemos esto}$$

$$a_{13} + 2a_{12} = 0$$

$$a_{11} = \frac{a_{12}}{2} \quad \text{Finalmente conseguimos}$$

$$a_{13} = -2a_{12}$$

\therefore El **núcleo** de T son todas las matrices en $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que $a_{11} = \frac{a_{12}}{2}$ y que $a_{13} = -2a_{12}$ sin importar las entradas a_{21}, a_{22}, a_{23}

Para ver quién es la imagen de T tomemos un elemento en el dominio e igualémoslo con un elemento del codominio *i.e.* Sea $\hat{B} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y $\hat{A} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$

$$T(\hat{A}) = \hat{B}$$

Planteando la igualdad

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Planteando la igualdad

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Por la regla de correspondencia de T

$$2a_{11} - a_{12} = b_{11}$$

$$a_{13} + 2a_{12} = b_{12}$$

$$0 = b_{21} = b_{22}$$

Obtenemos esto

$$a_{11} = \frac{a_{12}}{2}$$

$$a_{13} = -2a_{12}$$

Finalmente conseguimos

veamos que $2a_{11} - a_{12} \in \mathbb{R}$, $a_{13} + 2a_{12} \in \mathbb{R}$
 Por lo que podemos concluir que la **imagen** de T son todas las matrices en $M_{22}(\mathbb{R})$ $\cdot \ni \cdot$ $b_{21} = b_{22} = 0$

d) $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})$ definida por $T(f(x)) = xf(x) + f'(x)$. Para ver que una transformación es lineal, debe cumplir que **abra sumas y saque escalares**
 Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{R}^3$ y $\psi \in \mathbb{R}$ donde

$$p(x) = a + bx + cx^2 \quad q(x) = d + ex + fx^2$$

entonces

$$\psi p(x) + q(x) = \psi(a + bx + cx^2) + (d + ex + fx^2) \quad \text{Definición de } p(x), q(x)$$

$$\psi p(x) + q(x) = (\psi a + \psi bx + \psi cx^2) + (d + ex + fx^2) \quad \text{Distributividad de } \psi$$

$$\psi p(x) + q(x) = (\psi a + d + \psi bx + ex + \psi cx^2 + fx^2) \quad \text{Asociatividad}$$

$$T(\psi p(x) + q(x)) = T(\psi a + d + \psi bx + ex + \psi cx^2 + fx^2) \quad \text{Aplicando T en ambos miembros}$$

$$T(\psi p(x) + q(x)) = \psi ax + dx + \psi bx^2 + ex^2 + \psi cx^3 + fx^3 + \psi b + e + \psi 2cx + 2fx \quad \text{Usando la regla de correspondencia}$$

$$T(\psi p(x) + q(x)) = \psi ax + \psi b + \psi bx^2 + \psi cx^2 + \psi 2cx + e + dx + ex^2 + fx^3 + 2fx \quad \text{Conmutatividad en } \mathbb{R}$$

$$T(\psi p(x) + q(x)) = (\psi ax + \psi b + \psi bx^2 + \psi cx^3 + \psi 2cx) + (e + dx + ex^2 + fx^3 + 2fx) \quad \text{Asociatividad en } \mathbb{R}$$

$$T(\psi p(x) + q(x)) = \psi(ax + b + bx^2 + cx^3 + 2cx) + (e + dx + ex^2 + 2fx + fx^2) \quad \text{Distributividad inversa en } \mathbb{R}$$

$$T(\psi p(x) + q(x)) = \psi T(p(x)) + T(q(x)) \quad \text{Definición de } T(p(x)), T(q(x))$$

$\therefore T$ es transformación lineal

Veamos quien es el núcleo de la transformación para lo que necesitaremos tomar un $f(x) \in P_2(\mathbb{R})$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \text{Por la forma de } f(x)$$

$$T(f(x)) = x(a_0 + a_1x + a_2x^2) + a_1 + 2a_2x \quad \text{Aplicando la regla de correspondencia}$$

$$T(f(x)) = a_1 + a_0x + 2a_2x + a_1x^2 + a_2x^3 \quad \text{Distributividad}$$

$$T(f(x)) = a_1 + (a_0 + 2a_2)x + a_1x^2 + a_2x^3 \quad \text{Distributividad inversa y asociatividad}$$

y ahora igualemos este resultado con $\hat{0}_{P_3(\mathbb{R})}$

$$a_1 + (a_0 + 2a_2)x + a_1x^2 + a_2x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \quad \text{igualemos entrada a entrada}$$

$$\begin{array}{ll} a_1 = 0 & \text{Primera entrada} \\ a_0 + 2a_2 = 0 & \text{Segunda entrada} \\ a_1 = 0 & \text{Tercera entrada} \\ a_2 = 0 & \text{Cuarta entrada} \end{array}$$

Por lo tanto el **núcleo** de la transformación es el polinomio en $P_2(\mathbb{R})$ $\cdot \ni \cdot$ $a_2 = a_1 = a_0 = 0$

Por último veamos quién es la imagen de la transformación lineal.

Sea $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \in P_3(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ll} T(f(x)) = q(x) & \text{Planteamos la igualdad} \\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 & \text{Por definición de } f(x) \text{ y } q(x) \\ a_1 + (a_0 + 2a_2)x + a_1x^2 + a_2x^3 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 & \text{Por la regla de correspondencia de T} \end{array}$$

Notemos que el término constante y el cuadrático son el mismo por lo que la imagen de la transformación son todos los polinomios en

$$p(x) \in P_3(\mathbb{R}) \quad \cdot \ni \cdot \quad p(x) = a + (c + 2b)x + ax^2 + bx^3$$

Ejercicio 11

Sean β y γ las bases estándar para \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m respectivamente. Para cada transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ encontrar su representación matricial.

Definición 7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y β una base ordenada de V si $\vec{x} \in V$ entonces existen

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \cdot \ni \cdot \quad \vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots$$

donde $\vec{v}_i \in \beta$ entonces definimos al vector de coordenadas de \vec{x} con respecto a la base β como

$$[\vec{x}]_\beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Definición 8. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y β, γ sus respectivas bases. Además consideremos $T : V \rightarrow W$ transformación lineal, entonces definimos a la matriz asociada a la función T de la base β en la base γ como

$$[T]_\beta^\gamma$$

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(a_1, a_2) = (2a_1 - a_2, 3a_1 + 4a_2, a_1)$

Tomemos en cuenta que las bases estándar de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ son respectivamente, las siguientes

$$\beta = \{(1, 0), (0, 1)\} \quad \gamma = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Ahora, con el primer elemento de la base β apliquemos la transformación lineal

$$\begin{array}{ll} T(1, 0) = (2(1) - 0, 3(1) + 4(0), 1) & \text{Usando la regla de correspondencia} \\ T(1, 0) = (2, 3, 1) & \text{Por neutro aditivo y multiplicativo} \end{array}$$

Luego, escribamos a $(2, 3, 1)$ como combinación lineal de γ

$$\begin{aligned}(2, 3, 1) &= \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) && \text{Coeficientes en el campo} \\(2, 3, 1) &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) && \text{Distribuyendo y sumando} \\2 &= \alpha_1 && \text{Valores resultantes} \\3 &= \alpha_2 && \text{Valores resultantes} \\1 &= \alpha_3 && \text{Valores resultantes}\end{aligned}$$

Con lo que ahora tenemos podemos construir

$$[T(1, 0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Empleemos el segundo elemento de la base β para aplicarle la transformación lineal

$$\begin{aligned}T(0, 1) &= (2(0) - 1, 3(0) + 4(1), 0) && \text{Por la regla de correspondencia de T} \\T(0, 1) &= (-1, 4, 0) && \text{Distributividad, neutro aditivo y multiplicativo}\end{aligned}$$

Ahora escribamos a $(-1, 4, 0)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned}(-1, 4, 0) &= \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) && \text{Coeficientes en el campo} \\(-1, 4, 0) &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) && \text{Distribuyendo y sumando entrada a entrada} \\-1 &= \alpha_1 && \text{Valor del coeficiente} \\4 &= \alpha_2 && \text{Valor del coeficiente} \\0 &= \alpha_3 && \text{Valor del coeficiente}\end{aligned}$$

Entonces el vector de coordenadas asociado a $(0, 1)$ es

$$[T(0, 1)]_\gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz asociada a la transformación T es

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 + 3a_2 - a_3, a_1 + a_3)$

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \quad \gamma = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

Tomemos el primer elemento de la base canónica β para aplicar la transformación lineal T

$$\begin{aligned}T(1, 0, 0) &= (2(1) + 3(0) - (0), (1) + (0)) && \text{Usando la regla de correspondencia} \\T(1, 0, 0) &= (2, 1) && \text{Por neutro aditivo, neutro multiplicativo}\end{aligned}$$

Ahora veamos a $(2, 1)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned}(2, 1) &= \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) && \text{Donde } \alpha_1, \alpha_2 \text{ son coeficientes del campo} \\(2, 1) &= (\alpha_1, \alpha_2) && \text{Distribuyendo y sumando vectores} \\2 &= \alpha_1 && \text{Igualando entrada a entrada} \\1 &= \alpha_2 && \text{Igualando entrada a entrada}\end{aligned}$$

Por lo que ya podemos ver que

$$[T(1, 0, 0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Empleemos la transformación lineal con el segundo elemento de la base β

$$\begin{aligned} T(0, 1, 0) &= (2(0) + 3(1) - 0, 0 + 1) \\ T(0, 1, 0) &= (3, 1) \end{aligned}$$

Usando la regla de correspondencia de T
Multiplicando y sumando neutros aditivos

Ahora veamos como combinación lineal de elementos de la base γ a $(3, 1)$

$$\begin{aligned} (3, 1) &= \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) \\ (3, 1) &= (\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned}$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
Distribuyendo y sumando entrada con entrada

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha_1 \\ 1 &= \alpha_2 \end{aligned}$$

Igualando las entradas
Igualando las entradas

Y así podemos construir

$$[T(0, 1, 0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por último tomemos el tercer elemento de la base β para aplicar la transformación lineal

$$\begin{aligned} T(0, 0, 1) &= (2(0) + 3(0) - 1, 0 + 1) \\ T(0, 0, 1) &= (-1, 1) \end{aligned}$$

Por la regla de correspondencia de T
Sumando y multiplicando respectivamente

Ahora veamos a $(-1, 1)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned} (-1, 1) &= \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) \\ (-1, 1) &= (\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned}$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
Distribuyendo y sumando

$$\begin{aligned} -1 &= \alpha_1 \\ 1 &= \alpha_2 \end{aligned}$$

Igualamos entrada correspondiente
Igualamos entrada correspondiente

De tal forma que el vector de coordenadas asociado a $T(0, 0, 1)$ es

$$[T(0, 0, 1)]_\gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y ahora que contamos con todos los coeficientes podemos construir la matriz asociada a la transformación lineal T como

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $T(a_1, a_2, a_3) = 2a_1 + a_2 - 3a_3$

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \quad \gamma = \{1\}$$

En este ejercicio tenemos un caso un tanto trivial pues la base estándar de \mathbb{R} es el neutro multiplicativo, así que sólo bastará con aplicar la transformación lineal a elementos de β para obtener los coeficientes de la matriz asociada a dicha

transformación.

$$T(1, 0, 0) = 2(1) + 0 - 3(0)$$

Por la regla de correspondencia

$$T(1, 0, 0) = 2$$

Operando

$$T(0, 1, 0) = 2(0) + 1 - 3(0)$$

Por la regla de correspondencia

$$T(0, 1, 0) = 1$$

Simplificando

$$T(0, 0, 1) = 2(0) + 0 - 3(1)$$

Por la regla de correspondencia

$$T(0, 0, 1) = -3$$

Efectuando los productos

Finalmente la matriz asociada a esta transformación es

$$[T]_{\beta}^{\gamma} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

d) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(a_1, a_2, a_3) = (2a_2 + a_3, -a_1 + 4a_2 + 5a_3, a_1 + a_3)$

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \quad \gamma = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Tomemos el primer elemento de la base β y apliquemos la transformación lineal

$$T(1, 0, 0) = (2(0) + (0), -(1) + 4(0) + 5(0), (1) + (0))$$

Usando la regla de correspondencia

$$T(1, 0, 0) = (0, -1, 1)$$

Ahora veamos a $(0, -1, 1)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$(0, -1, 1) = \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1)$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$(0, -1, 1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

Distribuyendo y sumando

$$0 = \alpha_1$$

Igualando entradas

$$-1 = \alpha_2$$

Igualando entradas

$$1 = \alpha_3$$

Igualando entradas

De esta manera podemos construir el vector de coordenadas asociado

$$[T(1, 0, 0)]_{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomemos el segundo elemento de la base β y apliquemos la transformación lineal

$$T(0, 1, 0) = (2(1) + (0), -(0) + 4(1) + 5(0), (0) + (0))$$

Usando la regla de correspondencia

$$T(0, 1, 0) = (2, 4, 0)$$

Ahora veamos a $(2, 4, 0)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$(2, 4, 0) = \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1)$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$(2, 4, 0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

Distribuyendo y sumando

$$2 = \alpha_1$$

Igualando entradas

$$4 = \alpha_2$$

Igualando entradas

$$0 = \alpha_3$$

Igualando entradas

De esta manera podemos construir el vector de coordenadas asociado

$$[T(0, 1, 0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tomemos el tercer elemento de la base β y apliquemos la transformación lineal

$$\begin{aligned} T(0, 0, 1) &= (2(0) + (1), -(0) + 4(0) + 5(1), (0) + (1)) \\ T(0, 0, 1) &= (1, 5, 1) \end{aligned} \quad \text{Usando la regla de correspondencia}$$

Ahora veamos a $(1, 5, 1)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned} (1, 5, 1) &= \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) \\ (1, 5, 1) &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Donde } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \\ \text{Distribuyendo y sumando} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 & \text{Igualando entradas} \\ 5 &= \alpha_2 & \text{Igualando entradas} \\ 1 &= \alpha_3 & \text{Igualando entradas} \end{aligned}$$

De esta manera podemos construir el vector de coordenadas asociado

$$[T(0, 0, 1)]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por último construyamos la matriz asociada a la transformación T

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 12

Para cada uno de los siguientes pares de bases β y β' para \mathbb{R}^2 , encuentra la matriz de cambio de coordenadas que cambia las coordenadas de β' en las de β .

a) $\beta = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ y $\beta' = \{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\}$

Veamos a la base $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de tal manera que

$$\begin{aligned} (1, 0) &= \alpha_1(a_1, a_2) + \alpha_2(b_1, b_2) \\ (1, 0) &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1, \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1 \\ 0 &= \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (0, 1) &= \alpha_1(a_1, a_2) + \alpha_2(b_1, b_2) \\ (0, 1) &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1, \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1 \\ 1 &= \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 \end{aligned}$$

Finalmente la matriz de cambio de base es

) (

b) $\beta = \{(-1, 3), (2, -1)\}$ y $\beta' = \{(0, 10), (5, 0)\}$

Veamos al primer elemento de la base β como combinación lineal de elementos de la base β'

$$(-1, 3) = \alpha_1(0, 10) + \alpha_2(5, 0)$$

$$(-1, 3) = (0, 10\alpha_1) + (5\alpha_2, 0)$$

$$(-1, 3) = 5\alpha_2, 10\alpha_1)$$

$$-1 = 5\alpha_2$$

$$3 = 10\alpha_1$$

$$\frac{3}{10} = \alpha_1$$

$$-\frac{1}{5} = \alpha_2$$

Hagamos lo mismo para el segundo elemento en la base β

$$(2, -1) = \alpha_1(0, 10) + \alpha_2(5, 0)$$

$$(2, -1) = (0, 10\alpha_1) + (5\alpha_2, 0)$$

$$(2, -1) = 5\alpha_2, 10\alpha_1)$$

$$2 = 5\alpha_2$$

$$-1 = 10\alpha_1$$

$$-\frac{1}{10} = \alpha_1$$

$$\frac{2}{5} = \alpha_2$$

Finalmente la matriz de cambio de base es

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

c) $\beta = \{(2, 5), (-1, -3)\}$ y $\beta' = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$

Encontremos la combinación lineal de elementos de la base β' para el primer elemento de la base β

$$(2, 5) = \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1)$$

$$(2, 5) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

$$2 = \alpha_1$$

$$5 = \alpha_2$$

Ahora hagamos lo mismo con el otro elemento de la base β

$$(-1, -3) = \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1)$$

$$(-1, -3) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

$$-1 = \alpha_1$$

$$-3 = \alpha_2$$

Por lo tanto, la matriz de cambio de base es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

d) $\beta = \{(-4, 3), (2, -1)\}$ y $\beta' = \{(2, 1), (-4, 1)\}$

Veamos al primer vector de la base β como combinación lineal de la base β'

$$(-4, 3) = \alpha_1(2, 1) + \alpha_2(-4, 1)$$

$$(-4, 3) = (2\alpha_1, \alpha_1) + (-4\alpha_2, \alpha_2)$$

$$(-4, 3) = (2\alpha_1 - 4\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$-4 = 2\alpha_1 - 4\alpha_2$$

$$3 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\frac{4}{3} = \alpha_1$$

$$\frac{5}{3} = \alpha_2$$

Hagamos lo mismo con el segundo vector

$$(2, -1) = \alpha_1(2, 1) + \alpha_2(-4, 1)$$

$$(2, -1) = (2\alpha_1, \alpha_1) + (-4\alpha_2, \alpha_2)$$

$$(2, -1) = (2\alpha_1 - 4\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$2 = 2\alpha_1 - 4\alpha_2$$

$$-1 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$-\frac{1}{3} = \alpha_1$$

$$-\frac{2}{3} = \alpha_2$$

Finalmente la matriz de cambio de base es

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13

Encontrar la matriz inversa por el método de *Gauss-Jordan* de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Adjuntamos la matriz I_2 de tal manera que obtengamos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{lcl} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) & \text{1a Fila} \cdot -1 + 2\text{a Fila en 2a Fila} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) & \text{2a Fila} \cdot -1 \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) & \text{2a Fila} \cdot -2 + 1\text{a Fila en 1a Fila} \end{array}$$

\therefore la inversa de la matriz dada es $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Adjuntamos la matriz I_2 de tal manera que obtengamos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) && \text{1a Fila} \cdot -2 + 2^a \text{ en 2a Fila} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) && \text{2a Fila} \cdot -\frac{1}{2} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) && \text{2a Fila} \cdot -1 + 1a \text{ fila en 1a fila} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2 \implies \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ Es singular}$$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Adjuntamos la matriz I_3 de tal manera que obtengamos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) && \text{1a fila} \cdot -1 + 2^a \text{ fila en 2a Fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) && \text{1a fila} \cdot -2 + 3a \text{ fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) && \text{2a fila} + 3a \text{ fila en 3a fila} \end{aligned}$$

Observemos que

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_3 \implies \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ Es singular}$$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Adjuntamos la matriz I_3 de tal manera que obtengamos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{lcl}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) & = & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) & \text{Intercambiar la 1a fila por la 2a} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) & = & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) & \text{1a fila} \cdot -2 + 3^a \text{ Fila en 3a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) & = & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) & \text{Multiplicar 2a fila} \cdot -\frac{1}{2} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) & = & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) & \text{2a fila} \cdot -2 + 3^a \text{ fila en 3a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) & = & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) & \text{3a fila} \cdot 2 + 2^a \text{ fila en 2a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) & = & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) & \text{3a fila} + 1^a \text{ fila en 1a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) & = & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) & \text{2a fila} \cdot -1 + 1^a \text{ fila en 1a fila} \\
\therefore \left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{2} & 3 & -1 \\ \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right) & \text{es la inversa de} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{array}\right)
\end{array}$$

Ejercicio 14

Calcular el determinante de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Definición 9. Definimos a $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ como el espacio vectorial de las matrices de 2×2 con coeficientes en los \mathbb{R} de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Definición 10. Sea $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ $\cdot \ni \cdot$ $a = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Entonces el determinante de A está definido como $\det(A) = ad - bc$ por la definición de determinante tenemos que

$$\det(A) = (6)(4) - (-3)(2)$$

$$\det(A) = 24 + 6$$

$$\therefore \det(A) = 30$$

b) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

Por la definición de determinante tenemos que

$$\det(A) = (-5)(1) - (-3)(2)$$

$$\det(A) = (-5) - (-6)$$

$$\det(A) = -5 + 6$$

$$\det(A) = 1$$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Definición 11. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ si $n < 1$ entonces $A = (A_{11})$ entonces $\det(A) = A_{11}$ para $n \geq 2$ definimos el determinante de manera recursiva como

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n(\text{dimen.})} (-1)^{1+j} A_{1j} \det(\hat{A}_{1j})$$

Y así, por la definición de $\det(A)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^3 A_{1j} \det(\hat{A}_{1j}) \\ \det(A) &= (-1)^2 A_{11} \det(\hat{A}_{11}) + (-1)^3 A_{12} \det(\hat{A}_{12}) + (-1)^4 A_{13} \det(\hat{A}_{13}) \\ \det(A) &= A_{11} \det(\hat{A}_{11}) - A_{12} \det(\hat{A}_{12}) + A_{13} \det(\hat{A}_{13}) \\ \det(A) &= (0) \det(\hat{A}_{11}) - (-1) \det(\hat{A}_{12}) + (2) \det(\hat{A}_{13}) \\ \det(A) &= -\det(\hat{A}_{12}) + 2 \det(\hat{A}_{13}) \end{aligned}$$

Por la definición de determinantes en $M_{2 \times 2}$

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}_{12}) &= ad - bc \\ \det(\hat{A}_{12}) &= (-1)(0) - (-3)(2) \\ \det(\hat{A}_{12}) &= 6 \end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}_{13}) &= ad - bc \\ \det(\hat{A}_{13}) &= (-1)(3) - (0)(2) \\ \det(\hat{A}_{13}) &= -3 \end{aligned}$$

Sustituyendo del $\det(\hat{A}_{12})$ y $\det(\hat{A}_{13})$ en $\det(A)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \det(A) &= -1(6) + 2(-3) \\ \det(A) &= -6 - 6 \\ \therefore \det(A) &= -12 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Por la definición de determinante en $M_{n \times n}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^4 (-1)^{1+j} A_{1j} \det(\hat{A}_{1j}) \\ \det(A) &= (-1)^2 A_{11} \det(\hat{A}_{11}) + (-1)^3 A_{12} \det(\hat{A}_{12}) + (-1)^4 A_{13} \det(\hat{A}_{13}) + (-1)^5 A_{14} \det(\hat{A}_{14}) \\ \det(A) &= A_{11} \det(\hat{A}_{11}) - A_{12} \det(\hat{A}_{12}) + A_{13} \det(\hat{A}_{13}) - A_{14} \det(\hat{A}_{14}) \\ \det(A) &= (0) \det(\hat{A}_{11}) - 2 \det(\hat{A}_{12}) + \det(\hat{A}_{13}) - 3 \det(\hat{A}_{14}) \\ \det(A) &= -2 \det(\hat{A}_{12}) + \det(\hat{A}_{13}) - 3 \det(\hat{A}_{14}) \end{aligned}$$

Sea $\hat{A}_{12} = B$

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} B_{1j} \det(\hat{B}_{1j}) \\ \det(B) &= (-1)^2 B_{11} \det(\hat{B}_{11}) + (-1)^3 B_{12} \det(\hat{B}_{12}) + (-1)^4 B_{13} \det(\hat{B}_{13}) \\ \det(B) &= (1)(1) \det(\hat{B}_{11}) + (-1)(-2) \det(\hat{B}_{12}) + (1)(2) \det(\hat{B}_{13}) \\ \det(B) &= \det(\hat{B}_{11}) + 2 B_{12} \det(\hat{B}_{12}) + 2 \det(\hat{B}_{13}) \end{aligned}$$

Como $\hat{B}_{11}, \hat{B}_{12}, \hat{B}_{13} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ usaremos la definición para calcular el determinante en este tipo de matrices por lo que

$$\det(\hat{B}_{11}) = ad - bc = 0(0) - (1)(2) = -2$$

$$\det(\hat{B}_{12}) = ad - bc = 3(0) - (1)(-1) = 1$$

$$\det(\hat{B}_{13}) = ad - bc = 3(2) - (0)(-1) = 6$$

Por lo que

$$\det(B) = -2 + 2(1) + 2(6)$$

$$\det(B) = -2 + 2 + 12$$

$$\det(B) = 12$$

Por otro lado sea $\hat{A}_{13} = C$ entonces

$$\det(C) = \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} C_{1j} \det(\hat{C}_{1j})$$

$$\det(C) = (-1)^2 C_{11} \det(\hat{C}_{11}) + (-1)^3 C_{12} \det(\hat{C}_{12}) + (-1)^4 C_{13} \det(\hat{C}_{13})$$

$$\det(C) = (1) \det(\hat{C}_{11}) + (-1)(0) \det(\hat{C}_{12}) + (1)(2) \det(\hat{C}_{13})$$

$$\det(C) = \det(\hat{C}_{11}) + 2 \det(\hat{C}_{13})$$

y como $\hat{C}_{11}, \hat{C}_{13} \in M_{2 \times 2}$ entonces

$$\det(\hat{C}_{11}) = ad - bc = (-1)(0) - (1)(1)$$

$$\det(\hat{C}_{11}) = ad - bc = -1$$

$$\det(\hat{C}_{13}) = ad - bc = (3)(1) - (-1)(-1)$$

$$\det(\hat{C}_{13}) = ad - bc = 2$$

$$\det(B) = -1 + 2(2) = 3$$

Ahora, sea $\hat{A}_{14} = D$

$$\det(D) = \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} D_{1j} \det(\hat{D}_{1j})$$

$$\det(D) = (-1)^2 D_{11} \det(\hat{D}_{11}) + (-1)^3 D_{12} \det(\hat{D}_{12}) + (-1)^4 D_{13} \det(\hat{D}_{13})$$

$$\det(D) = (1) \det(\hat{D}_{11}) + (-1)(0) \det(\hat{D}_{12}) + (1)(-2) \det(\hat{D}_{13})$$

$$\det(D) = \det(\hat{D}_{11}) - 2 \det(\hat{D}_{13})$$

Y como $\hat{D}_{11}, \hat{D}_{13} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ entonces

$$\det(\hat{D}_{11}) = ad - bc = (-1)(2) - (-1)(0) = -2$$

$$\det(\hat{D}_{13}) = ad - bc = (3)(1) - (-1)(-2) = 2$$

$$\det(D) = -2 - (2)(2) = -6$$

Finalmente tenemos que

$$\det(A) = -2(12) + 3 - 3(-6)$$

$$\det(A) = -24 + 3 + 18 = -3$$

$$\therefore \det(A) = -3$$

Ejercicio 15

Para cada par de vectores u y v en \mathbb{R}^2 , calcula el área del paralelogramo determinado por u y v .

a) $\vec{u} = (3, -2)$ y $\vec{v} = (2, 5)$

Definición 12. Sea $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ entonces $\det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} \right| &= \left| \begin{pmatrix} 3, -2 \\ 2, 5 \end{pmatrix} \right| = \det \begin{pmatrix} 3, -2 \\ 2, 5 \end{pmatrix} \\ \left| \det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} \right| &= |(3)(5) - (-2)(2)| = 15 + 4 = 19 \end{aligned}$$

\therefore El área del paralelogramo es 19 con orientación positiva

b) $\vec{u} = (1, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 1)$

Entonces

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} &= \left| \det \begin{pmatrix} 1, 3 \\ -3, 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 1, 3 \\ -3, 1 \end{pmatrix} \right| \\ \det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} &= |(1)(1) - (3)(-3)| = |1 - 9| = |-8| = 8 \end{aligned}$$

\therefore El área del paralelogramo es 8 con orientación negativa

c) $\vec{u} = (4, -1)$ y $\vec{v} = (-6, -2)$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} \right| &= \left| \det \begin{pmatrix} 4, -1 \\ -6, -2 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 4, -1 \\ -6, -2 \end{pmatrix} \right| \\ \left| \det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} \right| &= |(4)(2) - (-1)(-6)| = |8 - 6| = |2| \end{aligned}$$

\therefore El área del paralelogramo es 2 con orientación positiva

Ejercicio 16

Para cada una de las siguientes matrices $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ determine los valores propios de A y para cada valor propio λ de A, encontrar el conjunto de vectores propios correspondientes a A.

Definición 13. Sea T un operador lineal sobre V, donde V es de dimensión finita y $\vec{x} \in V$ tal que \vec{x} no es 0. Decimos que \vec{x} es vector propio de T si $T(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema. Sean $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces λ es un valor propio de A si y sólo si $\det(A - \lambda Id_n) = 0$

Proposición. Si Q es la matriz formada por los vectores propios asociados a sus respectivos valores propios de $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces $D = Q^{-1}AQ$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Por el teorema mencionado, para encontrar los valores propios de A, primero calculemos:

$$A - \lambda Id_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Usando la definición de determinante en $M_{2 \times 2}$ tenemos que:

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda) - (3)(2) = 0$$

Simplificando la expresión;

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$$

Al resolver la ecuación por factorización, concluimos que los **valores propios de A** son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$. Ahora calculemos el conjunto de vectores propios. Tenemos que sustituir λ_1 y λ_2 en $(A - \lambda Id_n)(\vec{v}) = \vec{0}$. Primero hagamos el cálculo para $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 - (-1) & 2 \\ 3 & 2 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones;

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicamos 3 veces el renglón 1, -2 veces el renglón 3 y sumamos el renglón 1 al renglón 2.

$$6x_1 + 6x_2 = 0$$

Es fácil apreciar que $x_1 = -x_2$. Entonces como x_1 depende de x_2 , el sistema tiene tantas soluciones como \mathbb{R} , menos "0" por definición. Por tanto tomamos $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$

$$\therefore \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora hagamos el cálculo para $\lambda_2 = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 - 4 & 2 \\ 3 & 2 - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones;

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sumamos el renglón 1 al renglón 2.

$$3x_1 - 2x_2 = 0$$

Es fácil apreciar que $x_1 = \frac{2x_2}{3}$. Como en el caso pasado, el sistema tiene tantas soluciones como \mathbb{R} . Entonces tomamos $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

$$\therefore \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por último calcularemos la matriz diagonal, pero primero calcularemos Q^{-1} con la proposición:

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(Q) = (1)(3) - (-1)(2) = 5$$

Ahora calculemos la matriz diagonal:

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$\therefore \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ es la matriz diagonal.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Usando el teorema enunciado, encontramos los valores propios de A :

$$A - \lambda Id_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos $\det(A - \lambda Id_n)$ usando la definición 11:

$$\det(A - \lambda Id_n) = \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} A_{1j} \det(\hat{A}_{1j}) = A_{11} \det(\hat{A}_{11}) - A_{12} \det(\hat{A}_{12}) + A_{13} \det(\hat{A}_{13})$$

$$\det(A - \lambda Id_n) = (1 - \lambda) \det(\hat{A}_{11}) + 2 \det(\hat{A}_{13})$$

$$\det(\hat{A}_{11}) = (1 - \lambda)(1 - \lambda) - (1)(0) = (1 - \lambda)^2$$

$$\det(\hat{A}_{13}) = (-1)(0 - (1 - \lambda)(2)) = -2 + 2\lambda$$

Sustituyendo:

$$\det(A - \lambda Id_n) = (1 - \lambda)(1 - \lambda)^2 + 2(-2 + 2\lambda) = (1 - \lambda)^3 - 4(1 - \lambda) = 0$$

Obtenemos los valores de λ mediante factorización:

$$(1 - \lambda)[(1 - \lambda)(1 - \lambda) - 4] = (1 - \lambda)[\lambda^2 - 2\lambda - 3] = (1 - \lambda)[(\lambda - 3)(\lambda + 1)] = 0$$

Es fácil notar que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$, los cuales son los **valores propios**.

Ahora calcularemos el conjunto de vectores propios. Tenemos que sustituir $(A - \lambda Id_n)(\vec{v}) = \vec{0}$.

Primero hagamos el cálculo para $\lambda_1 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 2 \\ -1 & 1-1 & 1 \\ 2 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2X_3 &= 0 \\ -X_1 + 0X_2 + X_3 &= 0 \\ 2X_1 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos notar que $X_1 = 0$ y $X_3 = 0$. Y X_2 puede tomar cualquier valor en \mathbb{R} ya que $0X_2$ siempre es 0. Entonces tomamos $X_2 = 1$.

$$\therefore \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora hagamos el cálculo para $\lambda_2 = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 2 \\ -1 & 1-3 & 1 \\ 2 & 0 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sumamos el renglón 3 al renglón 1.

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sumamos el renglón 2 a dos veces el renglón 1.

$$\begin{aligned} -4x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

De esto podemos concluir que $x_1 = x_3$ y $x_2 = 0$. Como x_1 depende de x_3 . Tomamos $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$.

$$\therefore \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por último hagamos el cálculo para $\lambda_3 = -1$.

$$\begin{pmatrix} 1 - (-1) & 0 & 2 \\ -1 & 1 - (-1) & 1 \\ 2 & 0 & 1 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Cómo tenemos repetida una ecuación la podemos eliminar.

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sumamos el renglón 2 a dos veces el renglón 1.

$$\begin{aligned} 4x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

De esto obtenemos que $x_1 = -x_3$ y $x_2 = -x_3$. Entonces $x_1 = x_2 = -x_3$. Como x_1 y x_2 dependen de x_3 . Tomamos $x_1 = -1$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 1$.

$$\therefore \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces: } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último calcularemos la matriz diagonal de A , pero primero tenemos que calcular Q^{-1} con la proposición $Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)}(\text{cof}(Q^T))$

Es fácil apreciar que $\det(A) = -2$ y $\text{cof}(A^T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora encontremos la matriz diagonal utilizando la proposición que se encuentra al inicio del ejercicio.

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$