Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Tarea Examen II

Kevin Ariel Merino Peña[1]

14 de mayo de 2020

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden la tarea-examen se entregan de manera individual.

1. El volumen específico V, la presión P la temperatura T de un gas van der Waals están relacionados por

$$P = \frac{RT}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2}$$

donde α, β y R son constantes.

a) Encuentre $\dfrac{\partial T}{\partial P}, \dfrac{\partial P}{\partial V}$ y $\dfrac{\partial V}{\partial T}$.

Consideremos lo siguiente en función de la temperatura y el volumen como

$$P(T,V) = \frac{RT}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2} \tag{1}$$

observemos que la ecuación anterior tiene al menos una solución tal que $P(T,V) = 0$ pues como α es una constante podemos elegirla cero y R o T iguales a cero, (alguna otra podría ser que entre ambos sumandos se hagan inversos aditivos.Como cada variable puede ser considerada independiente entonces, podemos proceder a despejar T com variable independiente

$$\begin{aligned}
P &= \frac{RT}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2} && \text{Por la primera ecuación en el ejercicio}\\
P - \frac{RT}{V-\beta} &= -\frac{\alpha}{V^2} && \text{sumando en ambos miembros el inverso aditivo de } \frac{RT}{V-\beta}\\
-\frac{RT}{V-\beta} &= -P - \frac{\alpha}{V^2} && \text{sumando en ambos miembros el inverso aditivo de } P\\
\frac{RT}{V-\beta} &= P + \frac{\alpha}{V^2} && \text{Multiplicando ambos miembros por } -1\\
RT &= \left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V-\beta) && \text{Multiplicando ambos miembros por el inverso multiplicativo de } V-\beta\\
T &= \left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V-\beta)\frac{1}{R} && \text{Multiplicando ambos miembros por } \frac{1}{R}\\
T &= \left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)\frac{V-\beta}{R} && \text{Reescribiendo la ecuación}\\
T(V,P) &= \left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)\frac{V-\beta}{R} && \text{Poniéndola en función de las variables}
\end{aligned}$$

$$T(V,P) = \left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)\frac{V-\beta}{R} \tag{2}$$

Por otro lado, es importante hacer una tercera observación

$$\begin{aligned}
P &= \frac{RT}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2} && \text{Por la primera ecuación en el ejercicio}\\
P &= \frac{RTV^2 - \alpha(V-\beta)}{V^2(V-\beta)} && \text{Empleando la regla de suma de fracciones}\\
V^2(V-\beta)P &= RTV^2 - \alpha(V-\beta) && \text{Multiplicando ambos miembros por } V^2(V-\beta)\\
(V^3 - V^2\beta)P &= RTV^2 - \alpha(V-\beta) && \text{Desarrolando el primer miembros por distributividad}
\end{aligned}$$

[1] Número de cuenta 317031326

$$(V-\beta)V^2P = RTV^2 - \alpha(V-\beta) \tag{3}$$

Empleando las dos observaciones anteriores podemos ver que

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V-\beta}{R} \qquad \text{Por la segunda observación, donde despejamos } T \tag{4}$$

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{-RT}{(V-\beta)^2} - \frac{2\alpha}{V^3} \qquad \text{Por la función original} \tag{5}$$

Para obtener la derivada del volumen con respecto a la temperatura, tomemos a P como una constante y derivemos con respecto a T obtenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial T}V^2P - 2(V-\beta)V\frac{\partial V}{\partial T}P = RV^2 + 2RTV\frac{\partial V}{\partial T} - \alpha\frac{\partial V}{\partial T} \qquad \text{Despejando en (2) para } \frac{\partial V}{\partial T}$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{(V-\beta)\left(\frac{RT}{(V-\beta)^2} - \frac{2\alpha}{V^3}\right)} \qquad \text{Finalmente obtenemos} \tag{6}$$

Identifique qué variables son constantes e interprete físicamente cada derivada parcial.

En (4) tenemos que si $R > 0$, entonces $\frac{\partial T}{\partial P}$ también será postivia, esto significa que la temperatura T está creciendo con respecto a la presión P cuando el volúmen V es $V > \beta$ y ésta disminuirá en otro caso. Cuando $R < 0$ lo contrario ocurre.

Luego, por (5) podemos vemis que $\frac{\partial P}{\partial V} > 0$ si $\frac{RT}{(V-\beta)^2} > \frac{2\alpha}{V^3}$, lo que significa que la presión P crecerá con respecto al volumen V. Además, entre más crezca V el volúmen, la presión se volverá cada vez más grande, vemos que si $\frac{\partial P}{\partial V}$ tiende a 0 es porque la presión se vuelve muy cercana a una constante (cuando incrementamos el volumen V).

b) Verifique $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right) = -1$

Primero veamos que tenemos una manera distinta de escribir a (5) como:

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{-RTV^3 + 2\alpha(V-\beta)^2}{V^3(V-\beta)^2}$$

ahora tomemos (4), (5) y la ultimoa ecuación reescrita para hacer el siguiente producto

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = \left(\frac{(V-\beta)}{R}\right)\cdot\left(\frac{-RTV^3 + 2\alpha(V-\beta)^2}{V^3(V-\beta)^2}\right)\cdot\left(\frac{R}{(V-\beta)\left(\frac{RT}{(V-\beta)^2} - \frac{2\alpha}{V^3}\right)}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = (V-\beta)\cdot\left(\frac{-RTV^3 + 2\alpha(V-\beta)^2}{V^3(V-\beta)^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{(V-\beta)\left(\frac{RT}{(V-\beta)^2} - \frac{2\alpha}{V^3}\right)}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = \left(\frac{-RTV^3 + 2\alpha(V-\beta)^2}{V^3(V-\beta)^2}\right)\cdot\left(\frac{V-\beta}{(V-\beta)\left(\frac{RT}{(V-\beta)^2} - \frac{2\alpha}{V^3}\right)}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = \left(\frac{-RTV^3 + 2\alpha(V-\beta)^2}{V^3(V-\beta)^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\left(\frac{RT}{(V-\beta)^2} - \frac{2\alpha}{V^3}\right)}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{-RTV^3 + 2\alpha(V-\beta)^2}{V^3(V-\beta)^2\left(\dfrac{RT}{(V-\beta)^2} - \dfrac{2\alpha}{V^3}\right)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{-RTV^3 + 2\alpha(V-\beta)^2}{\dfrac{V^3(V-\beta)^2 RT}{(V-\beta)^2} - \dfrac{2V^3\alpha(V-\beta)^2}{V^3}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{-RTV^3 + 2\alpha(V-\beta)^2}{V^3RT - 2\alpha(V-\beta)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = -1$$

2. Considere una función de temperatura $T(x,y) = x\sin(y)$ Trazar algunas curvas de nivel. Calcula ∇T y explique su significado.

Para trazar algunas curvas ade nivel, igualemos la función a alguna constante k

$T(x,y) = x\sin(y)$	Ecuación dada
$T(x,y) = k$	Para encontrar alguna curva de nivel
$x\sin(y) = k$	Sustitiuyendo $T(x,y)$
$x\sin(y) = -1$	Evaluando en $k < 0$
$y = \arcsin\left(-\dfrac{1}{x}\right)$	Por cálculo I
$x\sin(y) = 2$	Evaluando en $k > 0$
$y = \arcsin\left(\dfrac{2}{x}\right)$	Por cálculo I

Ahora calculemos el gradiente como $\nabla T = \left(\dfrac{\partial T}{\partial x}, \dfrac{\partial T}{\partial y}\right)$, lo calculamos directamente:

$$\nabla T(x,y) = (\sin(x), x\cos(y))$$

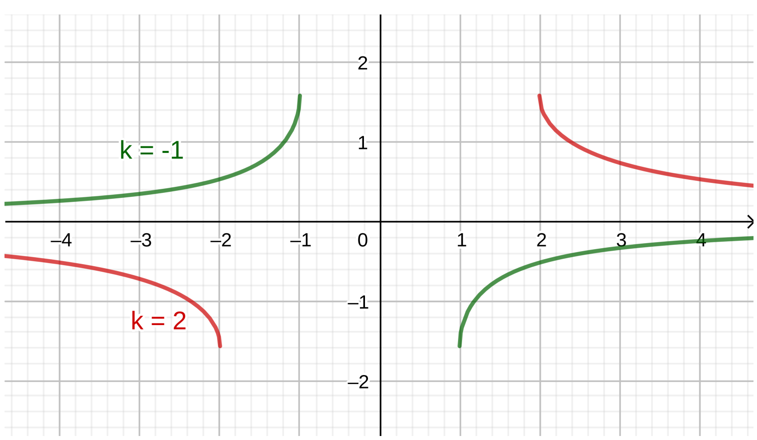

Figura 1: En el plano, los cuadrantes 1 y 2, son el conjunto B

En todos los casos el gradiente nos ofrece la dirección de más rápido crecimiento en una función, en este caso habla sobre la dirección en que más rápido incrementa la temperatura.

3. Encuentre el plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, -2, 5)$. Explica el significado geométrico para esta superficie del gradiente de $f(x, y) = x^2 + y^2$

4. Un bicho se encuentra en un entorno tóxico. El nivel de toxicidad está dado por $T(x, y) = 2x^2 - 4y^2$. Si el bicho está en $(-1, 2)$. ¿En qué dirección debería moverse para reducir la toxicidad más rápido.

5. El desplazamiento en el tiempo t y la posición horizontal en la recta x de una cierta cuerda de violín, está dada por

$$u(x, t) = \sin(x - 6t) + \sin(x + 6t)$$

Calcule la velocidad de la cuerda en $x = 1$ cuando $t = \dfrac{1}{3}$.

6. La altura h del volcán hawaiano Mauna Loa se describe (aproximadamente) por la función

$$H(x, y) = 2.59 - 0.00024y^2 - 0.00065x^2$$

donde h es la altura sobre el nivel del mar en millas y x e y se miden de **este** a **oeste** y de **norte** a **sur**, también en millas desde la cima de la montaña. En $(x, y) = (-2, -4)$:

a) ¿Qué tan rápido amenta la altura en la dirección $(1, 1)$(es decir, hacia el noreste)? Exprese su respuesta en millas de altura por milla de distancia horizontal recorrida.

b) ¿En qué dirección es el camino ascendente más empinado?