



Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores
Ayud. Irving Hernández Rosas

Tarea Examen III

Kevin Ariel Merino Peña¹

28 de mayo de 2020



Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden la tarea-examen se entregan de manera individual.

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Muestre que $u = f(y - \kappa x)$ es una solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Hagamos una observación sobre u , pues debemos construir a dicha función con el mismo dominio que f , *i.e.*

$$u(x, y) = f(y - \kappa x)$$

ahora empleemos la composición de funciones para designar una función auxiliar $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue $g(x, y) = y - \kappa x$;

$$u(x, y) = (f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$$

luego, tomemos la derivada de u como

$$Du(x, y) = Df(g(x, y))$$

Veamos que, como g es una función escalar, entonces su derivada es ∇g y por la **regla de la cadena** en funciones compuestas, tenemos que

$$Du(x, y) = Df(g(x, y)) \nabla g \quad (\varphi)$$

donde $\nabla g(x, y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) = (-\kappa, 1)$, luego de φ tenemos que

$$Du(x, y) = f'(g(x, y)) \cdot (-\kappa, 1)$$

Reemplazando lo que sabemos del gradiente

$$Du(x, y) = -f'(g(x, y))\kappa, f'(g(x, y))$$

Reemplazando lo que sabemos del gradiente

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -f'(g(x, y))\kappa$$

Derivando con respecto a x

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(g(x, y))$$

Derivando con respecto a y

$$\kappa \frac{\partial u}{\partial y} = f'(g(x, y))\kappa$$

Multiplicando ambos miembros por el mismo real

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = -f'(g(x, y))\kappa + f'(g(x, y))\kappa = 0$$

siguiendo la cadena de igualdades, tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \square$$

2. Muestre que si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tienen segundas parciales mixtas continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1b)$$

Entonces ambas son armónicas.

¹Número de cuenta 317031326

Recuerde. Una función $u = u(x, y)$ con segundas derivadas parciales continuas que satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

se dice que es una función armónica.

Veamos qué ocurre para u cuando obtenemos sus segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Por definición de segunda derivada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Volviendo a escribir la ecuación

por otra parte

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Por definición de segunda derivada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

Reescribiendo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Ya que por hipótesis u es de clase \mathcal{C}^2

de las últimas dos observaciones podemos concluir que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)$$

Sumando ambos miembros

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Así sabemos que u es armónica

luego, hagamos algunas observaciones para v

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Por definición de segunda derivada

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Volviendo a escribir la ecuación

por otra parte

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Por definición de segunda derivada

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Reescribiendo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Ya que por hipótesis v es de clase \mathcal{C}^2

de las últimas dos observaciones podemos concluir que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)$$

Sumando ambos miembros

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

Así sabemos que v es armónica

\therefore ambas ecuaciones son armónicas si satisfacen las ecuaciones de *Cauchy-Riemann* y son de clase \mathcal{C}^2 (que sus segundas derivadas mixtas sean iguales)

3. Encontrar la expansión a segundo orden de Taylor para $f(x, y) = y^2 e^{-x^2}$ en $(1, 1)$

primero hallemos las derivadas de f

$$\frac{\partial}{\partial x} (y^2 e^{-x^2}) = -2xy^2 e^{-x^2}$$

Derivando con respecto a x

$$\frac{\partial}{\partial y} (y^2 e^{-x^2}) = 2ye^{-x^2}$$

Derivando con respecto a y

$$\frac{\partial}{\partial x} (-2xy^2 e^{-x^2}) = (4x^2 - 2) y^2 e^{-x^2}$$

Derivando con respecto a xx

$$\frac{\partial}{\partial y} (2ye^{-x^2}) = 2e^{-x^2}$$

Derivando con respecto a yy

$$\frac{\partial}{\partial y} (-2xy^2 e^{-x^2}) = -4xy e^{-x^2}$$

Derivando con respecto a xy, yx

Luego, usando el teorema (visto en clase) sobre la expansión a segundo orden de Taylor para $x_0 = (1, 1)$ está dada por

$$f(h_1, h_2) = f(1, 1) + h_1 f_x(1, 1) + h_2 f_y(1, 1) + \frac{1}{2} (h_1^2 f_{xx}(1, 1) + h_1 h_2 f_{xy}(1, 1) + h_1 h_2 f_{yx}(1, 1) + h_2^2 f_{yy}(1, 1))$$

$$f(x, y) = f(1, 1) + x f_x(1, 1) + y f_y(1, 1) + \frac{1}{2} (h_1^2 f_{xx}(1, 1) + h_1 h_2 f_{xy}(1, 1) + h_1 h_2 f_{yx}(1, 1) + h_2^2 f_{yy}(1, 1))$$

$$f(x, y) = f(1, 1) + x \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,1)} + y \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,1)} + \frac{1}{2} \left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(1,1)} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(1,1)} \right)$$

$$f(x, y) = 1^2 e^{-1^2} + x (-2xy^2 e^{-x^2}) \Big|_{(1,1)} + y \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,1)} + \frac{1}{2} \left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(1,1)} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(1,1)} \right)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{e} - \frac{2h_1}{e} + \frac{2h_2}{e} + \frac{1}{2} \left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(1,1)} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(1,1)} \right)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{e} - \frac{2h_1}{e} + \frac{2h_2}{e} + \frac{1}{2} (h_1^2 (2e^{-1}) + h_1 h_2 (-4e^{-1}) + h_1 h_2 (-4e^{-1}) + h_2^2 (2e^{-1}))$$

$$f(x, y) = \frac{1}{e} - \frac{2h_1}{e} + \frac{2h_2}{e} + \frac{h_1^2 - 4h_1 h_2 + h_2^2}{e}$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 4xy + y^2 + 4y - 1}{e}$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 5$. Encuentre los puntos críticos de f y determine si son: mínimos locales, máximos locales o puntos silla.

Para ello derivemos la función y localicemos los puntos críticos.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^2 - xy + 5)$$

Derivando con respecto a x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$$

Aplicando la derivada

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2y - x$$

Aplicando la derivada con respecto a y de f

$$0 = 2x - y$$

Igualemos a 0

$$0 = -2y - x$$

De la primera ecuación, obtenemos que $y = 2x$, sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos que $0 = -5x$, de esta manera sabemos que el único punto crítico que tiene f es $(x, y) = (0, 0)$. Ahora calculemos las segundas derivadas parciales para conocer el determinante del Hessiano

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$$

$$D \Big|_{(0,0)} = 2 \cdot (-2) - 1 = -5 < 0$$

Entonces, usando el teorema visto en clase sobre el determinante del hessiano, ahora sabemos que $(0, 0)$ es un punto silla, es más es el único punto crítico de f .

5. Encuentre los valores máximos y mínimos absolutos de $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + 5$ sobre el disco unitario $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Primero calculemos la derivada de f e igualemos a 0 para encontrar los puntos críticos en el interior del disco.

$$f_x = 2x + 3y$$

Derivando con respecto a x

$$f_y = 2y + 3x$$

Derivando con respecto a y

$$0 = 2x + 3y$$

Igualeando a 0

$$0 = 2y + 3x$$

Igualeando a 0

$$4\lambda^2 - 8\lambda - 5 = 5$$

Ecuación para λ

De lo anterior concluimos que el único punto crítico es $\vec{x}_0 = (0, 0)$, además notemos que $(0, 0) \in D$, ahora nombremos la función $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$, emplearemos multiplicadores de lagrange para resolver

$$\nabla g = (2x, 2y)$$

Calculando el gradiente de g

$$\nabla f = (2x + 3y, 3x + 3y)$$

Calculando el gradiente de g

$$2x + 3y = 2x\lambda$$

Igualeando la primera entrada

$$3x + 2y = 2y\lambda$$

Igualeando la segunda entrada

$$x^2 + y^2 = 1$$

La restricción dada

Notemos, de la primera ecuación que $x \neq 0$ porque eso implicaría que $y = 0$ lo cual no podría pasar por la restricción dada, entonces despejando λ obtenemos que

$$\lambda = \frac{2x + 3y}{2x}$$

reemplazando en cualquier ecuación obtendremos que $x^2 = y^2 \implies x = \pm y$, ahora ocupemos esto en la restricción para obtener que $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, así tenemos que los puntos críticos son

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 7 + \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 + \frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 + \frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 7 + \frac{1}{2}$$

por lo tanto, el máximo absoluto es $7 + \frac{1}{2}$, en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

El mínimo absoluto es $4 + \frac{1}{2}$, en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6. Suponga que un pentágono está compuesto por un rectángulo coronado por un triángulo isósceles (ver Figura 1). Si la longitud del perímetro es fija, encuentre el área máxima posible.

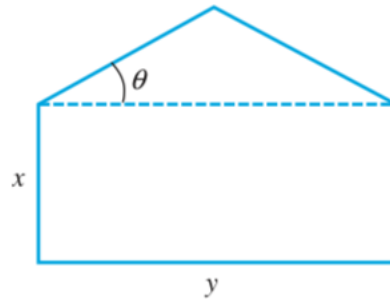


Figura 1: Maximizar el área para un perímetro dado.

Sea z la longitud de una de los lados del triángulo isósceles sobre el rectángulo en la figura. Sea p el perímetro del pentágono

$$p = 2x + y + 2z$$

Observemos que

$$z \cos(\theta) = \frac{1}{2}y$$

$$z = \frac{y}{2 \cos(\theta)}$$

$$2z = \frac{y}{\cos(\theta)}$$

Tomando el ángulo de la mitad del triángulo isósceles como referencia

Multiplicando ambos lados por $\frac{1}{\cos(\theta)}$

Multiplicando ambos lados por 2

24

♂

Sea a el área del pentágono dada por la suma del rectángulo formado por los lados x , y y el triángulo superior, entonces

$$a = x \cdot y + \frac{1}{2}yz \sin(\theta) \quad \text{obteniendo la altura del triángulo con identidades trigonométricas}$$

$$a = xy + \frac{y^2 \sin(\theta)}{4 \cos(\theta)} \quad \text{Sustituyendo el resultado de 7}$$

Observemos que de esta última ecuación, se nos proporcionan algunas restricciones puesto que el área siempre debe ser positivo y al menos mayor que cero para este ejercicio, por lo que $0 < x$, $0 < y$ y $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Luego, volvamos al perímetro y sustituyamos el valor de z

$$p = 2x + y \frac{y}{\cos(\theta)} \quad \text{Sustituyendo } 2z \text{ de } \sigma$$

$$x = \frac{1}{2} \left(p - y - \frac{y}{\cos(\theta)} \right) \quad \text{Despejando a } x$$

Ahora pongamos al área en función de y y del ángulo

$$a(y, \theta) = xy + \frac{y^2 \sin(\theta)}{4 \cos(\theta)} \quad \text{De lo construido anteriormente}$$

$$a(y, \theta) = \frac{1}{2}py - \frac{1}{2}y^2 - \frac{y^2}{2 \cos(\theta)} + \frac{y^2 \sin(\theta)}{4 \cos(\theta)} \quad \text{Sustituyendo el valor de } x$$

Ahora, al calcular $\frac{\partial a}{\partial \theta} = 0$ y $\frac{\partial a}{\partial y} = 0$ podemos observar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial y} &= \frac{p}{2} - y - \frac{y}{\cos(\theta)} + \frac{y \sin(\theta)}{2 \cos(\theta)} \\ 0 &= \frac{p}{2} - y - \frac{y}{\cos(\theta)} + \frac{y \sin(\theta)}{2 \cos(\theta)} \\ \frac{p}{2} &= y \left(1 + \frac{1}{\cos(\theta)} - \frac{\sin(\theta)}{2 \cos(\theta)} \right) \\ \frac{p}{2} &= y \left(\frac{2 + 2 \cos(\theta) - \sin(\theta)}{2 \cos(\theta)} \right) \\ y &= \frac{p \cos(\theta)}{2 + 2 \cos(\theta) - \sin(\theta)} \end{aligned}$$

Por otra parte, buscando los puntos críticos con el ángulo conseguimos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \theta} &= -\frac{y^2}{2} \left(\frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \right) + \frac{y^2}{4} \left(\frac{1}{\cos^2(\theta)} \right) \\ 0 &= -\frac{y^2}{2} \left(\frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \right) + \frac{y^2}{4} \left(\frac{1}{\cos^2(\theta)} \right) \\ \frac{y^2}{2 \cos^2(\theta)} \sin(\theta) &= \frac{y^2}{2 \cos^2(\theta)} \cdot \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{1}{2} \\ \theta &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Una vez hallado el ángulo, podemos evaluar el coseno en ese punto y sustituirlo en la y , la última ecuación que hayamos para encontrar quién es x

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y &= \frac{p \cos(\theta)}{2 + 2 \cos(\theta) - \sin(\theta)} \\ y &= \frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

luego, de una ecuación para x

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} \left(p - y - \frac{y}{\cos(\theta)} \right) \\ x &= \frac{1}{2} \left(p - \frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} - \frac{2p}{3 + 2\sqrt{3}} \right) \\ x &= \frac{p}{2} \left(\frac{3 + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2}{3 + 2\sqrt{2}} \right) \\ x &= \frac{p(1 + \sqrt{3})}{2(3 + 2\sqrt{3})}\end{aligned}$$

Como ya tenemos quienes son x, y , sustituyamos en la ecuación del área

$$\begin{aligned}a \left(\frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6} \right) &= xy + \frac{y^2 \sin(\theta)}{4 \cos(\theta)} \\ a \left(\frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6} \right) &= \frac{p(1 + \sqrt{3})}{2(3 + 2\sqrt{3})} \cdot \frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4} \left(\frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \\ a \left(\frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6} \right) &= \frac{p^2(3 + \sqrt{3})}{2(9 + 12\sqrt{3} + 12)} + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{3p^2}{9 + 12\sqrt{3} + 12} \right) \\ a \left(\frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6} \right) &= p^2 \frac{18 + 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{12(21 + 12\sqrt{3})} \\ a \left(\frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6} \right) &= p^2 \frac{9(2 + \sqrt{3})}{12 \cdot 3(7 + 4\sqrt{3})} \\ a \left(\frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6} \right) &= \frac{p^2}{4} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área máxima con un perímetro fijo del pentágono presentado está dado por

$$\frac{p^2}{4} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}}$$

7. Analice el comportamiento de las funciones en los puntos indicados. En la parte b el análisis depende de la constante C .

- a) $z = x^2 - y^2 + 3xy$ en $(0, 0)$.
- b) $z = x^2 - y^2 + Cxy$ en $(0, 0)$.
- 8. a) Encuentre la distancia mínima del origen en \mathbb{R}^2 a la superficie $z = \sqrt{x^2 - 1}$.

b) Haga lo mismo para la superficie $z = 6xy + 7$

9. Encuentre los puntos y valores críticos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones:

-
- a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$, restringido a $x^2 + y^2 = 1$.
- b) $f(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$, restringido a $x^2 + y^2 = 1$.
- c) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, restringido a $x + y = 1$.
- d) $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, restringido a $x + y = \frac{\pi}{4}$.
10. Encuentre el máximo de la función $f(x, y) = xy$ sobre la curva $(x + 1)^2 + y^2 = 1$
11. Encuentre la distancia más cercana del punto $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ al plano cuya ecuación está dada por: $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$, donde $(b_1, b_2, b_3) \neq 0$
12. Encuentre el punto sobre la línea de intersección de los planos $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ y $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ que es más cercano al origen.