



Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores
Ayud. Irving Hernández Rosas

Tarea Examen III

Kevin Ariel Merino Peña¹

27 de mayo de 2020



Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden la tarea-examen se entregan de manera individual.

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Muestre que $u = f(y - \kappa x)$ es una solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Hagamos una observación sobre u , pues debemos construir a dicha función con el mismo dominio que f , *i.e.*

$$u(x, y) = f(y - \kappa x)$$

ahora empleemos la composición de funciones para designar una función auxiliar $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue $g(x, y) = y - \kappa x$;

$$u(x, y) = (f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$$

luego, tomemos la derivada de u como

$$Du(x, y) = Df(g(x, y))$$

Veamos que, como g es una función escalar, entonces su derivada es ∇g y por la **regla de la cadena** en funciones compuestas, tenemos que

$$Du(x, y) = Df(g(x, y)) \nabla g \quad (\varphi)$$

donde $\nabla g(x, y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) = (-\kappa, 1)$, luego de φ tenemos que

$$Du(x, y) = f'(g(x, y)) \cdot (-\kappa, 1)$$

Reemplazando lo que sabemos del gradiente

$$Du(x, y) = -f'(g(x, y))\kappa, f'(g(x, y))$$

Reemplazando lo que sabemos del gradiente

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -f'(g(x, y))\kappa$$

Derivando con respecto a x

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(g(x, y))$$

Derivando con respecto a y

$$\kappa \frac{\partial u}{\partial y} = f'(g(x, y))\kappa$$

Multiplicando ambos miembros por el mismo real

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = -f'(g(x, y))\kappa + f'(g(x, y))\kappa = 0$$

siguiendo la cadena de igualdades, tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \square$$

2. Muestre que si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tienen segundas parciales mixtas continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1b)$$

Entonces ambas son armónicas.

¹Número de cuenta 317031326

Recuerde. Una función $u = u(x, y)$ con segundas derivadas parciales continuas que satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

se dice que es una función armónica.

Veamos qué ocurre para u cuando obtenemos sus segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Por definición de segunda derivada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Volviendo a escribir la ecuación

por otra parte

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Por definición de segunda derivada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

Reescribiendo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Ya que por hipótesis u es de clase \mathcal{C}^2

de las últimas dos observaciones podemos concluir que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)$$

Sumando ambos miembros

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Así sabemos que u es armónica

luego, hagamos algunas observaciones para v

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Por definición de segunda derivada

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Volviendo a escribir la ecuación

por otra parte

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Por definición de segunda derivada

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Reescribiendo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Ya que por hipótesis v es de clase \mathcal{C}^2

de las últimas dos observaciones podemos concluir que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)$$

Sumando ambos miembros

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

Así sabemos que v es armónica

\therefore ambas ecuaciones son armónicas si satisfacen las ecuaciones de *Cauchy-Riemann* y son de clase \mathcal{C}^2 (que sus segundas derivadas mixtas sean iguales)

3. Encontrar la expansión a segundo orden de Taylor para $f(x, y) = y^2 e^{-x^2}$ en $(1, 1)$

primero hallemos las derivadas de f

$$\frac{\partial}{\partial x} (y^2 e^{-x^2}) = -2xy^2 e^{-x^2}$$

Derivando con respecto a x

$$\frac{\partial}{\partial y} (y^2 e^{-x^2}) = 2ye^{-x^2}$$

Derivando con respecto a y

$$\frac{\partial}{\partial x} (-2xy^2 e^{-x^2}) = (4x^2 - 2) y^2 e^{-x^2}$$

Derivando con respecto a xx

$$\frac{\partial}{\partial y} (2ye^{-x^2}) = 2e^{-x^2}$$

Derivando con respecto a yy

$$\frac{\partial}{\partial y} (-2xy^2 e^{-x^2}) = -4xy e^{-x^2}$$

Derivando con respecto a xy, yx

Luego, usando el teorema (visto en clase) sobre la expansión a segundo orden de Taylor para $x_0 = (1, 1)$ está dada por

$$f(h_1, h_2) = f(1, 1) + h_1 f_x(1, 1) + h_2 f_y(1, 1) + \frac{1}{2} (h_1^2 f_{xx}(1, 1) + h_1 h_2 f_{xy}(1, 1) + h_1 h_2 f_{yx}(1, 1) + h_2^2 f_{yy}(1, 1))$$

$$f(x, y) = f(1, 1) + x f_x(1, 1) + y f_y(1, 1) + \frac{1}{2} (h_1^2 f_{xx}(1, 1) + h_1 h_2 f_{xy}(1, 1) + h_1 h_2 f_{yx}(1, 1) + h_2^2 f_{yy}(1, 1))$$

$$f(x, y) = f(1, 1) + x \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,1)} + y \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,1)} + \frac{1}{2} \left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(1,1)} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(1,1)} \right)$$

$$f(x, y) = 1^2 e^{-1^2} + x (-2xy^2 e^{-x^2}) \Big|_{(1,1)} + y \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,1)} + \frac{1}{2} \left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(1,1)} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(1,1)} \right)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{e} - \frac{2h_1}{e} + \frac{2h_2}{e} + \frac{1}{2} \left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(1,1)} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(1,1)} \right)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{e} - \frac{2h_1}{e} + \frac{2h_2}{e} + \frac{1}{2} (h_1^2 (2e^{-1}) + h_1 h_2 (-4e^{-1}) + h_1 h_2 (-4e^{-1}) + h_2^2 (2e^{-1}))$$

$$f(x, y) = \frac{1}{e} - \frac{2h_1}{e} + \frac{2h_2}{e} + \frac{h_1^2 - 4h_1 h_2 + h_2^2}{e}$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 4xy + y^2 + 4y - 1}{e}$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 5$. Encuentre los puntos críticos de f y determine si son: mínimos locales, máximos locales o puntos silla.

Para ello derivemos la función y localicemos los puntos críticos.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^2 - xy + 5)$$

Derivando con respecto a x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$$

Aplicando la derivada

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2y - x$$

Aplicando la derivada con respecto a y de f

$$0 = 2x - y$$

Igualemos a 0

$$0 = -2y - x$$

De la primera ecuación, obtenemos que $y = 2x$, sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos que $0 = -5x$, de esta manera sabemos que el único punto crítico que tiene f es $(x, y) = (0, 0)$. Ahora calculemos las segundas derivadas parciales para conocer el determinante del Hessiano

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$$

$$D \Big|_{(0,0)} = 2 \cdot (-2) - 1 = -5 < 0$$

Entonces, usando el teorema visto en clase sobre el determinante del hessiano, ahora sabemos que $(0, 0)$ es un punto silla, es más es el único punto crítico de f .

5. Encuentre los valores máximos y mínimos absolutos de $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + 5$ sobre el disco unitario $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

6. Suponga que un pentágono está compuesto por un rectángulo coronado por un triángulo isósceles (ver Figura 1). Si la longitud del perímetro es fija, encuentre el área máxima posible.

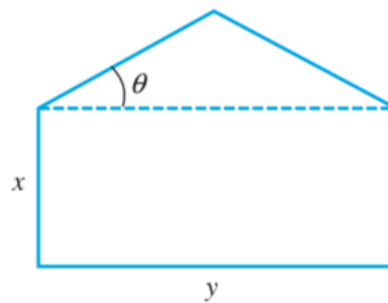


Figura 1: Maximizar el área para un perímetro dado.

7. Analice el comportamiento de las funciones en los puntos indicados. En la parte b el análisis depende de la constante C .

a) $z = x^2 - y^2 + 3xy$ en $(0, 0)$.

b) $z = x^2 - y^2 + Cxy$ en $(0, 0)$.

8. a) Encuentre la distancia mínima del origen en \mathbb{R}^2 a la superficie $z = \sqrt{x^2 - 1}$.

-
- b) Haga lo mismo para la superficie $z = 6xy + 7$
9. Encuentre los puntos y valores críticos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones:
- a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$, restringido a $x^2 + y^2 = 1$.
- b) $f(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$, restringido a $x^2 + y^2 = 1$.
- c) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, restringido a $x + y = 1$.
- d) $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, restringido a $x + y = \frac{\pi}{4}$.
10. Encuentre el máximo de la función $f(x, y) = xy$ sobre la curva $(x + 1)^2 + y^2 = 1$
11. Encuentre la distancia más cercana del punto $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ al plano cuya ecuación está dada por: $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$, donde $(b_1, b_2, b_3) \neq 0$
12. Encuentre el punto sobre la línea de intersección de los planos $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ y $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ que es más cercano al origen.