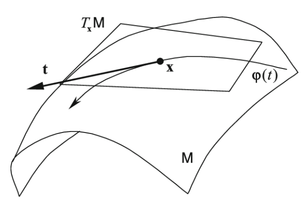
Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas para las ciencias aplicadas II

Tarea 1
Espacios vectoriales y Álgebra lineal



Profesor: M. en C. Pedro Porras Flores
Ayudante: Fís. Irving Hernández Rosas
Armando Abraham Aquino Chapa
Kevin Ariel Merino Peña

29 de marzo de 2020

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que la tarea se entrega en equipos de a lo más tres integrantes.

Ejercicio 1

Escribe el vector cero en $M_{3x4}(\mathbb{R})$

Definición 1 (Matriz)**.** Una **Matriz** es un arreglo rectangular de elementos de un campo $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ de la forma

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

A los elementos $a_{i,j}$ con $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq i \leq m$ se les llama entradas de la matriz, a las matrices las denotamos por $\mathbb{A}$ *(letras mayúsculas)* y al conjunto de las matrices de mn se les denota por $M_{m\times n}(\mathbb{F})$

De esta manera tenemos que el vector cero de la matriz de 3 renglones por 4 columnas es aquella cuyas entradas (todas) son 0 *i. e.*

$$A_{3x4} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Sea V el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en $\mathbb{R}$. Muestre que V es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar para funciones.

Veamos que la derivada cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} (f(x)+g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)+g'(x) \end{aligned}$$

Así hemos probado que la derivada abre sumas

$$\begin{aligned} (cf(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

De esta manera queda conolidado que en la función derivada, los escalares son sacados de la función

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto se vale para cualquier constante, en particular el 0

Ejercicio 3

Prueba que el conjunto de las funciones pares en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial con suma y multiplicación por escalar usuales para funciones. Recuerde que una función es par si $\forall x \in Dom(f)$ entonces $f(-x) = f(x)$

Si tenemos en cuenta que $f(-t) + g(-t) = f(t) + g(t)$ y que si tenemos constantes siempre ocurre que $cf(-t) = cf(t)$ entonces ya hemos probado las dos primeras condiciones y para hallar el neutro basta con usar el 0 del cambo ($\mathbb{R}$) para notar que también lo manda al 0 vector.

Ejercicio 4

Sea V el conjunto de pares ordenados de números reales. Si (a_1, a_2) y (b_1, b_2) son elementos de V y $\alpha \in \mathbb{R}$, definamos la suma y multiplicación escalar de la siguiente manera:

(i) $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$

(ii) $\alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, a_2)$.

¿Es V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones?

No puede ser un espacio vectorial porque si tenemos que

$$0(a_1, a_2) = (0, a_2)$$

para cumplir el cero vector, entonces se compliría para cualquier a_2 lo cual no es posible pues contradice la unicidad del cero.

Ejercicio 5

Determinar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$ bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar usual.

Definición 2. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto de $\mathcal{V}$ espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ decimos que $\mathcal{U}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$ si cumple lo siguiente

I) $\vec{0} \in \mathcal{U}$

II) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{U} \implies \vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{U}$

III) Sea $\alpha \in \mathbb{F}, \vec{u} \in \mathcal{U} \implies \alpha \cdot \vec{u} \in \mathcal{U}$

a) $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2\}$
Veamos que W_1 contiene a $\vec{0}$ esto es que algún elemento en $W_1 = (0, 0, 0)$ por lo que

$$\begin{aligned}
(0,0,0) &= (a_1, a_2, a_3) && \text{Por } \vec{0} \in \mathbb{R}^3 \\
&= (3a_2, a_2, -a_2) && \text{Por } a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2 \\
&= (3(0), (0), -(0)) && \text{Para cualquier } a_2 \\
&= (0,0,0)
\end{aligned}$$

Por otra parte comprobemos que la suma está dentro de W_1
Sean $\hat{u} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\hat{v}(b_1, b_2, b_3) \in W_1$ la suma de vectores se realiza entrada a entrada por lo que

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) &= (3a_2, a_2, -a_2) + (3b_2, b_2, -b_2) \\
&= (3a_2 + 3b_2, a_2 + b_2, -a_2 - b_2) \\
&= (3(a_2 + b_2), (a_2 + b_2), -(a_2 + b_2))
\end{aligned}$$

Y como $a_1 + b_2 \in \mathbb{R}^3$ entonces $\hat{u} + \hat{v} \in W_1$ por lo que cumple $II)$

Finalmente veamos que si $k \in R, \hat{u} \in W_1 \implies k\hat{u} \in W_1$

$$\begin{aligned} k(3a_2, a_2, -a_2) &\in W_1 \\ (3ka_2, ka_2, -ka_2) &\in W_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto cumple $III)$

$$\therefore W_1 \text{ es subespacio vectorial de } \mathbb{R}^3$$

b) $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| a_1 = a_3 + 2\}$
Veamos si $\hat{0} \in W_2$ si esto ocurriera entonces $(0,0,0) \in W_2$ l que significaría lo siguiente

$$\begin{aligned} (0,0,0) &= (a_3 + 2, a_2, a_3) && \text{Por que deben ser iguales entrada a entrada} \\ 0 &= a_3 + 2 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= a_3 \end{aligned}$$

Podemos observar que en esta situación, $a_3 = -2 \wedge a_3 = 0$ lo cual no es posible, dicha contradicción vino de suponer que $\hat{0} \in W_2$

$$\therefore \hat{0} \notin W_2$$

por lo que W_2 **no** es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

c) $W_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| 2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0\}$
Notemos que en la declaración de los elementos de W_3 podemos deducir que

$$a_3 = 7a_2 - 2a_1$$

entonces $\hat{u} \in W_3 \implies \hat{u} = (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1)$
Veamos que para cumplir $I)$ el vector cero debería estar en W_1 *i.e.*

$$\begin{aligned} (0,0,0) &= (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \\ 0 &= a_1 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= 7a_2 - 2a_1 \end{aligned}$$

lo anterior se cumple si $a_2 = 0 = a_1$

$$\therefore \hat{0} \in W_3$$

Ahora, sean $\hat{u}, \hat{v} \in W_3 \implies \hat{u} = (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \wedge \hat{v} = (b_1, b_2, 7b_1 - 2b_1)$ y probemos que $\hat{u} + \hat{v} \in W_3$

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) + (b_1, b_2, 7b_1 - 2b_1) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 7a_2 + 7b_2 - 2a_1 - 2b_1) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 7(a_2 + b_2) - 2(a_1 + b_1)) \end{aligned}$$

y como $a_1 + b_1 \in R$ también se encontrarán dentro de W_3 por lo que la suma es cerrada en el conjunto W_3
Por último veamos que si $k \in \mathbb{R}, \hat{u} \in W_3 \implies k \cdot \hat{u} \in W_3$

$$\begin{aligned} k\hat{u} &= k(a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \\ k\hat{u} &= (ka_1, ka_2, 7ka_2 - 2ka_1) \end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir que cada uno de esos ka_1, ka_2 elementos estarán en $\mathbb{R}$ por lo que $k\hat{u}$ resultarán también estar en W_3

$$\therefore W_3 \text{ es un subespacio vectorial de } \mathbb{R}^3$$

d) $W_4 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| a_1 - 4a_2 - a_3 = 0\}$ De la definición de los elementos de W_4 se sigue que si $\hat{u}$ es un elemento de este conjunto, tendrá la forma $\hat{u} = (4a_2 + a_3, a_2, a_3)$ Comencemos averiguando si W_4 tiene elemento neutro, *i. e.*

$$
\begin{aligned}
(0,0,0) &= (4a_2 + a_3, a_2, a_3) \\
0 &= 4a_2 + a_3 && \text{para ser iguales entrada a entrada} \\
0 &= a_2 \\
0 &= a_3
\end{aligned}
$$

Lo anterior ocurre cuando $a_2 = a_3 = 0$ por lo que $\hat{0} \in W_4$ y así cumple la condición *I)*

Siguiendo con la comprobación de sus propiedades como subespacio vectorial, tenemos que: Sean $\hat{u}, \hat{v} \in W_4 \implies \hat{u} + \hat{v} \in W_4$ *i. e.*

$$
\begin{aligned}
\hat{u} + \hat{v} &= (4a_2 + a_3, a_2, a_3) + (4b_2 + b_3, b_2, b_3) \\
&= (4a_2 + 4b_2 + b_3 + a_3, a_2 + b_2, a_3 + b_3) && \text{sumando entrada por entrada} \\
&= (4(a_2 + b_2) + (b_3 + a_3), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3)) && \text{asociatividad y distributividad en } \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

y como $(a_2 + b_2) \in \mathbb{R}$ la suma de $\hat{u}, \hat{v} \in W_4$

Finalmente notemos que si $k \in \mathbb{R}, \hat{u} \in W_4 \implies k \cdot \hat{u} \in W_4$

$$
\begin{aligned}
k\hat{u} &= k(4a_2 + a_3, a_2, a_3) \\
&= (4ka_2 + ka_3, ka_2, ka_3) && \text{por distributividad}
\end{aligned}
$$

y $ka_2, k_3 \in \mathbb{R}$ entonces $k \cdot \hat{u} \in W_4$

$$\therefore W_4 \text{ es subespacio vectorial de } \mathbb{R}^3$$

Ejercicio 6

En cada caso diga si los vectores son generados por el conjunto S

Definición 3. Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ decimos que $\mathcal{S}$ genera a $\mathcal{V}$ si $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos de $\mathcal{S}$ al generado de s se le denota como $span(\mathcal{S}), < \mathcal{S} >, gen(\mathcal{S})$

a) $(2, -1, 1), S = \{(1, 0, 2), (-1, 1, 1)\}$

Sea $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Entonces $(2, -1, 1) = \alpha_1(1, 0, 2) + \alpha_2(-1, 1, 1) = (\alpha_1, 0, 2\alpha_1) + (-\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2$.

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 - \alpha_2 &= 2 \\
\alpha_2 &= -1 \\
2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1
\end{aligned}
$$

Ahora:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 - (-1) &= 2 \\
\alpha_2 &= -1 \\
2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1
\end{aligned}
$$

Al resolver el sistema, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= 1 \\
\alpha_2 &= -1 \\
1 &= 1
\end{aligned}
$$

Entonces:
$1(1,0,2) + (-1)(-1,1,1) = (1,0,2) + (1,-1,-1) = (2,-1,1)$
Cómo el sistema de ecuaciones si se satisface, el conjunto S SI genera al vector $(2,-1,-1)$

b) $(2,-1,1,3), S = \{(1,0,1,-1),(0,1,1,1)\}$

Sea α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.
Entonces: $(2,-1,1,3) = \alpha_1(1,0,1,-1) + \alpha_2(0,1,1,1) = (\alpha_1,0,\alpha_1,-\alpha_1) + (0,\alpha_2,\alpha_2,\alpha_2) = \alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_1+\alpha_2$.
Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 &= 3 \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2 - 1 &= 1 \\ -(-1) + 2 &= 3 \end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 1 &= 1 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones verificamos si el conjunto S genera al vector. Entonces:

$$2(1,0,1,-1) + (-1)(0,1,1,1) = (2,0,2,-2) + (0,-1,-1,-1) = (2,-1,-1,-3)$$

Como el producto de los escalares por los elementos del conjunto S no forman al vector, podemos concluir que S **NO** genera a $(2,-1,1,3)$.

c) $2x^3 - x^2 + x + 3, S = \{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1\}$

Sean α_1, α_2 y α_3 elementos del campo, si suponemos que $2x^3 - x^2 + x + 3$ es generado por S implicará que existen dichos 3 elementos $\cdot \ni \cdot$

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = \alpha_1(x^3 + x^2 + x + 1) + \alpha_2(x^2 + x + 1) + \alpha_3(x + 1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 \\ \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 \\ \alpha_3 x + \alpha_3 \end{aligned}$$

Por lo que ocurre lo siguiente

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3$$

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 + x + 3 &= \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3 \\ &= x^3(\alpha_3) + x^2(\alpha_2 + \alpha_1) + x(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= 2\\ \alpha_2 &= -1-\alpha_1\\ \alpha_2 &= -1-2\\ \alpha_2 &= -3\end{aligned}$$

Ahora llegamos a una contradicción, puesto que el sistema de ecuaciones anterior implica que $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3=1$ por lo que el conjunto S no genera $2x^3-x^2+x+3$

d)

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}, S=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

Recordemos que la suma de matrices se hace entrada por entrada eso es, si se van a sumar 2 matrices $A+B$ se hace de la forma $a_{ij}+b_{ij}\forall i,j\in A,B$ de tal manera que existen $a_{ij}+b_{ij}\forall i,i\in A,B$ de tal manera que existen $\alpha,\beta,\gamma\ \cdot\ni\cdot$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix} &= \alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\alpha_{1,1}+\gamma_{1,1} & \beta_{1,2}+\gamma_{1,2}\\ -\alpha_{2,1} & \beta_{2,2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Notemos que

$$-\alpha_{2,1}=-3 \implies \alpha=3$$

y luego

$$\beta_{2,2}=4 \implies \beta=4$$

y finalmente

$$\gamma=2-\beta_{1,2} \implies \gamma=4$$

Ejercicio 7

Determina cuando los siguientes conjuntos son linealmente dependientes o linealmente independientes.

a) $\left\{\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2 & 6\\ 4 & -8\end{pmatrix}\right\}\in M_{2x2}(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1,\alpha_2,\in\mathbb{R}$. Entonces:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 4 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & -3\alpha_1\\ -2\alpha_1 & 4\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\alpha_2 & 6\alpha_2\\ 4\alpha_2 & -8\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente reglón y columna:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1-2\alpha_2 & -3\alpha_1+6\alpha_2\\ -2\alpha_1+4\alpha_2 & 4\alpha_1-8\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1-2\alpha_2 &= 0\\ -3\alpha_1+6\alpha_2 &= 0\\ -2\alpha_1+4\alpha_2 &= 0\\ 4\alpha_1-8\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Multiplicamos dos veces el renglón 3 y lo sumamos al renglón 4. También multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 3.

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ -3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Por último multiplicamos tres veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 2:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = 2\alpha_2$.

Esto indica que α_1 depende de α_2. Por lo tanto, el conjunto $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \in M_{2x2}$ es **linealmente dependiente**.

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -2\alpha_1 \\ -\alpha_1 & 4\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_2 & \alpha_2 \\ 2\alpha_2 & -4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente reglón y columna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & -2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 & 4\alpha_1 - 4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \\ 4\alpha_1 - 4\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicamos cuatro veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 4. También sumamos el renglón 1 al renglón 2:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos que $\alpha_2 = 0$, Entonces lo sustituimos en las demás ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 0 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Es claro notar que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$.

Cómo ambos valen 0, podemos concluir que el conjunto $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ es **linealmente independiente**.

c) $\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\} \in P_3(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.
Tenemos que: $0x^3 + 0x^2 + 0x + d = \alpha_1(x^3 + 2x^2) + \alpha_2(-x^2 + 3x + 1) + \alpha_3(x^3 - x^2 + 2x - 1)$

$x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = (\alpha_1 + \alpha_3)x^3 + (2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)x^2 + (3\alpha_2 + 2\alpha_3)x + (\alpha_2 - \alpha_3)$.
Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$
$$0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$
$$0\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

Ahora multiplicamos -3 veces el renglón 4 y le sumamos el renglón 1:

$$\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$
$$0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$
$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0$$

Podemos obtener que $\alpha_3 = 0$. Entonces sustituimos este valor en las ecuaciones.

$$\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0 = 0$$
$$2\alpha_1 - \alpha_2 - 0 = 0$$
$$0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$

De lo anterior deducimos que $\alpha_1 = 0$, por tanto:

$$0 - \alpha_2 - 0 = 0$$
$$0 + 3\alpha_2 + 0 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$

Entonces $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Podemos que concluir que el conjunto $\{x^3+2x^2, -x^2+3x+1, x^3-x^2+2x-1\} \in P_3(\mathbb{R})$ es **linealmente independiente**.

d) $\{(1,-1,2), (1,-2,1), (1,1,4)\} \in \mathbb{R}^3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Entonces:
$\alpha_1(1,-1,2) + \alpha_2(1,-2,1) + \alpha_3(1,1,4) = (0,0,0)$. Ahora:

$(\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (\alpha_2, -2\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, 4\alpha_3) = (0,0,0)$. Ordenamos los escalares:

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3) = (0,0,0)$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$-\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0$$

Multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos a "menos.[el] renglón 3. También sumamos el renglón 1 al renglón 2.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$
$$0\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 2. Y al renglón 1 le sumamos el renglón 2.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 0\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces nos queda el siguiente sistema.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

De esto podemos deducir que $\alpha_1 = -3\alpha_3$, $\alpha_2 = 2\alpha_3$ y $\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{2}$.

Entonces podemos concluir que el conjunto $\{(1,-1,2),(1,-2,1),(1,1,4)\} \in \mathbb{R}^3$ es **linealmente dependiente**.

e)$\{(1,-1,2),(2,0,1),(-1,2,-1)\} \in \mathbb{R}^3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \alpha_1(1,-1,2) + \alpha_2(2,0,1) + \alpha_3(-1,2,-1) &= (0,0,0) && \text{Ahora} \\ (\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (2\alpha_2, 0\alpha_2, \alpha_2) + (-\alpha_3, 2\alpha_3, -\alpha_3) &= (0,0,0) && \text{Ordenamos los escalares} \\ (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Primero multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 3. Luego sumamos el renglón 2 al renglón 1.

$$\begin{aligned} 0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 1:

$$\begin{aligned} 0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 5\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos que $\alpha_2 = 0$ y sustituimos en las demás ecuaciones.

$$\begin{aligned} 0 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Es fácilmente apreciar que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 0$

Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto $(1,-1,2),(2,0,1),(-1,2,-1) \in \mathbb{R}^3$ es **linealmente independiente**

Recuerde que $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \big| a_k \in \mathbb{R}\, \forall k = 0,1,2,\ldots n\}$

Ejercicio 8

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son bases para $\mathbb{R}^3$?

Definición 4. Una **base** β de $\mathbb{V}$ espacio vectorial es un subconjunto de $\mathcal{V} \cdot \ni \cdot\ \beta$ genera a $\mathbb{V}$ y β es linealmente independiente

a) $S = \{(1,0,-1),(2,5,1),(0,-4,3)\}$ En primer lugar veamos quién es el generado del conjunto S, recordemos que un conjunto genera a otro $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos de $\mathcal{S}$

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(1,0,-1) + \beta(2,5,1) + \gamma(0,-4,3)$$

$$\begin{aligned}\alpha(1,0,-1) + \beta(2,5,1) + \gamma(0,-4,3) &= (\alpha,0,-\alpha) + (2\beta,5\beta,\beta) + (0,-4\gamma,3\gamma)\\ &= (\alpha+2\beta, 5\beta-4\gamma, -\alpha+\beta+3\gamma)\end{aligned}$$

Necesitamos que cada uno de esos vectores pueda ser el valor de una posición de $\mathbb{R}^3$ por lo que debería verse como

$$\alpha(1,0,-1) + \beta(2,5,1) + \gamma(0,-4,3) = \delta(1,0,0) + \epsilon(0,1,0) + \eta(0,0,1)$$

De esta manera podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta + 0\gamma &= \delta + 0\epsilon + 0\eta\\ 0\alpha + 5\beta - 4\gamma &= 0\delta + \epsilon + 0\eta\\ -\alpha + \beta + 3\gamma &= 0\delta + 0\epsilon + \eta\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & 2\beta & 0\gamma\\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma\\ -\alpha & \beta & 3\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\delta & \epsilon & 0\eta\\ 0\delta & 0\epsilon & \eta\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta\\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0\delta & 0\epsilon & \eta\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta\\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0\delta & 0\epsilon & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta\end{array}\right) \quad \text{1ra fila + 2da fila en } \textbf{3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta\end{array}\right) \quad \text{2da fila} \cdot \frac{1}{5} \text{ en } \textbf{2da fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & \delta & -\frac{3}{5}\epsilon & \eta\end{array}\right) \quad \text{2da fila} \cdot -3 + 3^{ra} \text{ fila en } \textbf{3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & \delta & -\frac{3}{5}\epsilon & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right) \quad \text{3ra fila} \cdot \frac{5}{27} \textbf{ en 3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right) \quad (\text{3ra fila} \cdot \frac{4}{5}) + 2^{da} \text{ fila } \textbf{en 2da fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{19}{27}\delta & -\frac{2}{9}\epsilon & -\frac{8}{27}\eta\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right) \quad (\text{2da fila} \cdot -2) + 1^{a} \text{ fila } \textbf{en 1ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{19}{27}\delta & -\frac{2}{9}\epsilon & -\frac{8}{27}\eta\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{19}{27} & -\frac{2}{9} & -\frac{8}{27}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{27} & \frac{1}{9} & \frac{4}{27}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{27}\end{array}\right) \quad \text{Conservando sólo } \textbf{coeficientes}$$

$$\alpha = \frac{19}{27}\delta - \frac{2}{9}\epsilon - \frac{8}{27}\eta$$
$$\beta = \frac{4}{27}\delta + \frac{1}{9}\epsilon + \frac{4}{27}\eta$$
$$\delta = \frac{5}{27}\delta - \frac{1}{9}\epsilon + \frac{5}{27}\eta$$

$$\therefore \mathcal{S} \text{ genera a } \mathbb{R}^3$$

Ahora veamos si es linealmente independiente, lo cual ocurre si la única solución para

$$\alpha(1,0,-1) + \beta(2,5,1) + \gamma(0,-4,3) = 0$$

es que

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\alpha + 2\beta + 0\gamma = 0$$
$$0\alpha + 5\beta - 4\gamma = 0$$
$$-\alpha + \beta + 3\gamma = 0$$

Resolviendo dicho sistema obtenemos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0 \\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) \qquad \text{1ra fila + 2da fila en } \textbf{3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) \qquad \text{2da fila } \cdot\frac{1}{5} \text{ en } \textbf{2da fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & 0 \end{array}\right) \qquad \text{2da fila } \cdot -3 + 3^{ra} \text{ fila en } \textbf{3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma 0 & \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) \qquad \text{3ra fila } \cdot\frac{5}{27} \textbf{ en 3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) \qquad \text{(3ra fila } \cdot\frac{4}{5}) + 2^{da} \text{ fila } \textbf{en 2da fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) \qquad \text{(2da fila } \cdot -2) + 1^{a} \text{ fila } \textbf{en 1ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{Conservando sólo } \textbf{coeficientes}$$

De esta manera podemos concluir que $\mathcal{S}$ es **linealmente independiente**

$$\therefore \mathcal{S} \text{ es Base para } \mathbb{R}^3$$

b) $S = \{(2,-4,1),(0,3,-1),(6,0,-1)\}$
Veamos quién es el generado de S, un conjunto genera a otro si todo elemento del segundo conjunto puede ser expresado como una combinación lineal del primero,en este caso elementos de S

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(2,-4,1) + \beta(0,3,-1) + \gamma(6,0,-1)$$

$$\alpha(2,-4,1)+\beta(0,3,-1)+\gamma(6,0,-1) = (2\alpha,-4\alpha,\alpha)+(0,3\beta,-\beta)+(6\gamma,0,-\gamma)$$
$$= (2\alpha+6\gamma,-4\alpha+3\beta,\alpha-\beta-\gamma)$$

Necesitamos que cada uno de dichos vectores pueda ser el valor de una posición en $\mathbb{R}^3$ por lo que debería de verse como

$$\alpha(2,-4,1)+\beta(0,3,-1)+\gamma(6,0,-1) = \delta(1,0,0)+\xi(0,1,0)+\eta(0,0,1)$$

De esta manera obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2\alpha+0\beta+6\gamma &= \delta+0\xi+0\eta \\ -4\alpha+3\beta+0\gamma &= 0\delta+\xi+0\eta \\ \alpha-\beta-\gamma &= 0\delta+0\xi+\eta \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & 0\beta & 6\gamma \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma \\ \alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\delta & \xi & 0\eta \\ 0\delta & 0\xi & \eta \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2\alpha & 0\beta & 6\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2\alpha & 0\beta & 6\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) \qquad \text{1ra fila } \cdot\frac{1}{2} \text{ en 1a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & \gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) \qquad \text{(1ra fila } \cdot 4\text{)+2a fila en 2a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) \qquad \text{3ra fila - 1ra fila en 3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) \qquad \text{2fa fila } \cdot\frac{1}{3} \text{ en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{1}{6}\delta & \frac{1}{3}\xi & \eta \end{array}\right) \qquad \text{3ra fila -2a fila en 3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{1}{6}\delta & \frac{1}{3}\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array}\right) \qquad \text{3a fila } \cdot 6 \text{ en 3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array}\right) \qquad \text{3a fila } \cdot -\frac{2}{3} + \text{ 2a fila en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & 0\delta & -\xi & -3\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array}\right) \qquad \text{3a fila } \cdot -\frac{1}{2} + \text{ 1a fila en 1a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & 0\delta & -\xi & -3\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \qquad \text{Conservando sólo coeficientes}$$

Notemos que para γ tenemos que tiene ceros en la parte izquierda y puede tener valores distintos de cero en la parte derecha, por lo tanto el sistema de ecuaciones es inconsistente y consecuentemente

S **no** genera a $\mathbb{R}^3$
$\therefore S$ **no** es base de $\mathbb{R}^3$

c) $S\{(1,2,-1),(1,0,2),(2,1,1)\}$

Comencemos por ver quien en es generado de S, recordemos que un conjunto genera a otro si $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos para $\mathcal{S}$

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(1,2,-1)+\beta(1,0,2)+\gamma(2,1,1)$$

$$\begin{aligned}\alpha(1,2,-1)+\beta(1,0,2)+\gamma(2,1,1) &= (\alpha,2\alpha,-\alpha)+(\beta,0\beta,2\beta)+(2\gamma,\gamma,\gamma)\\ &= (\alpha+\beta+2\gamma, 2\alpha+0\beta+\gamma, -\alpha+2\beta+\gamma)\end{aligned}$$

Es menester que cada una de esas entradas represente una en $\mathbb{R}^3$ pues nos gustaría ver que S genera a $\mathbb{R}^3$ por lo que obtenemos la siguiente ecuación

$$(\alpha+\beta+2\gamma, 2\alpha+0\beta+\gamma, -\alpha+2\beta+\gamma) = \delta(1,0,0)+\xi(0,1,0)+\eta(0,0,1)$$

y así tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+2\gamma &= \delta+0\xi+0\eta\\ 2\alpha+0\beta+\gamma &= 0\delta+\xi+0\eta\\ -\alpha+2\beta+\gamma &= 0\delta+0\xi+\eta\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 2\gamma\\ 2\alpha & 0\beta & \gamma\\ -\alpha & 2\beta & \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta & 0\xi & 0\eta\\ 0\delta & \xi & 0\eta\\ 0\delta & 0\xi & \eta\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta\\ 2\alpha & 0\beta & \gamma & 0\delta & \xi & 0\eta\\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta\\ 2\alpha & 0\beta & \gamma & 0\delta & \xi & 0\eta\\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta\\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta\\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right) \quad \text{2a fila - 2(1a fila) en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta\\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta\\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta\\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta\\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right) \quad \text{1a fila + 3a fila en 3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta\\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta\\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta\\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right) \quad \text{2a fila} \cdot -\frac{1}{2} \text{ en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta\\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta\\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & -2\delta & \frac{3}{2}\xi & \eta\end{array}\right) \quad \text{2a fila} \cdot -3 + \text{3a fila en 3 fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta\\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & -2\delta & \frac{3}{2}\xi & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta\\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta\end{array}\right) \quad \text{3a fila} \cdot -\frac{2}{3} \text{ en 3a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta\\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta\\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta\end{array}\right) \quad \text{3a fila} \cdot -\frac{3}{2} + \text{2a fila en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta\\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 0\gamma & -\frac{5}{3}\delta & 2\xi & \frac{4}{3}\eta\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta\\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta\end{array}\right) \quad (\text{3a fila} \cdot -2) + 1afilaen1aFila$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 0\gamma & -\frac{5}{3}\delta & 2\xi & \frac{4}{3}\eta\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta\\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 0\beta & 0\gamma & -\frac{2}{3}\delta & 1\xi & \frac{1}{3}\eta\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta\\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta\end{array}\right) \quad \text{1a fila - 2a fila en 1a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 0\beta & 0\gamma & -\frac{2}{3}\delta & 1\xi & \frac{1}{3}\eta\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta\\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -1 & -\frac{2}{3}\end{array}\right) \quad \text{Manteniendo sólo coeficientes}$$

$$\alpha = -\frac{2}{3}\delta + 1\xi + \frac{1}{3}\eta$$
$$\beta = -\delta + \xi + \eta$$
$$\gamma = \frac{4}{3}\delta - \xi - \frac{-2}{3}\eta$$

$$\therefore S \text{ genera a } \mathbb{R}^3$$

Ahora veamos si el linealmente independiente, lo cual ocurre si la única solución a la siguiente ecuación es que todos los coeficientes sean 0

$$\alpha(1,2,-1) + \beta(1,0,2) + \gamma(2,1,1) = 0$$
$$(\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha + 0\beta + \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma) = 0$$

Lo cual permite formar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\alpha + \beta + 2\gamma = 0$$
$$2\alpha + 0\beta + \gamma = 0$$
$$-\alpha + 2\beta + \gamma = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 2\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) \quad \text{2a fila - 2(1a fila) en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) \quad \text{1a fila + 3a fila en 3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) \quad \text{2a fila} \cdot -\frac{1}{2} \text{ en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & 0 \end{array}\right) \quad \text{2a fila} \cdot -3 + \text{3a fila en 3 fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array}\right) \quad \text{3a fila} \cdot -\frac{2}{3} \text{ en 3a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array}\right) \quad \text{3a fila} \cdot -\frac{3}{2} + \text{2a fila en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array}\right) \quad \text{(3a fila} \cdot -2) + \text{1a fila en 1a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array}\right) \quad \text{1a fila - 2a fila en 1a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{Manteniendo sólo coeficientes}$$

Así podemos concluir que S es linealmente independiente

$$\therefore S \text{ es base para } \mathbb{R}^3$$

Ejercicio 9

Diga si los siguientes $x^3 - 2x^2 + 1, 4x^2 - x + 3y3x - 2$ generan a $P_3(\mathbb{R})$

Sea $ax^3 + bx^2 + cx + d \in (\mathbb{R})$.

Tomamos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in (\mathbb{R})$. Entonces:
$ax^3 + bx^2 + cx + d = (\alpha_1)x^3 + (-2\alpha_1 + 4\alpha_2)x^2 + (\alpha_2 + 3\alpha_3)x + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3)$
Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= b \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 &= c \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 &= d \end{aligned}$$

Sustituimos α_1 en las demás ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a \\ -2a + 4\alpha_2 &= b \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 &= c \\ a + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 &= d \end{aligned}$$

Del renglón 2 es fácil apreciar cuál es el valor de α_2

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 &= c \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 &= d \end{aligned}$$

De igual forma sustituimos α_2 en las demás ecuaciones.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ -\left(\frac{b+2a}{4}\right) + 3\alpha_3 &= c \\ a + 3\left(\frac{b+2a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d \end{aligned}$$

Observamos que tenemos 2 ecuaciones, en las cuáles sólo hay un valor a encontrar, entonces en estas dos ecuaciones procedemos a encontrar el valor de α_3. Primero comenzaremos con el renglón 3.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ 3\alpha_3 &= \frac{4c}{4} + \left(\frac{b+2a}{4}\right) \\ a + 3\left(\frac{b+2a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a\\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4}\\ \alpha_3 &= \frac{\frac{4c+b+2a}{4}}{3}\\ a+3\left(\frac{b+2a}{4}\right)-2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Obtenemos el primer valor de α_3:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a\\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4}\\ \alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12}\\ a+3\left(\frac{b+2a}{4}\right)-2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Encontraremos el valor de α_3 en la ecuación cuatro.

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a\\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4}\\ \alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12}\\ a+\left(\frac{b+2a}{4}\right)-2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a\\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4}\\ \alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12}\\ 2\alpha_3 &= a+\left(\frac{3b+6a}{4}\right)-d\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a\\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4}\\ \alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12}\\ 2\alpha_3 &= \frac{4a}{4}+\left(\frac{3b+6a}{4}\right)-\frac{4d}{4}\end{aligned}$$

$$\alpha_1 = a$$
$$\alpha_2 = \frac{b+2a}{4}$$
$$\alpha_3 = \frac{4c+b+2a}{12}$$
$$\alpha_3 = \frac{\frac{3b+10a-4d}{4}}{2}$$

$$\alpha_1 = a$$
$$\alpha_2 = \frac{b+2a}{4}$$
$$\alpha_3 = \frac{4c+b+2a}{12}$$
$$\alpha_3 = \frac{3b+10a-4d}{8}$$

Una vez que encontramos los valores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, para ver que el conjunto dado genera a cualquier polinomio de grado tres, damos algún polinomio y este tendrá que poder escribirse como combinación lineal los elementos del conjunto y los escalares.

Elegimos el polinomio $5x^3 + 2x^2x + 2$.Ahora encontraremos los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ para poder escribirlo de la manera:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (\alpha_1)x^3 + (-2\alpha_1 + 4\alpha_2)x^2 + (\alpha_2 + 3\alpha_3)x + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3)$$

Utilizando los resultados del sistema de ecuaciones tenemos que:

$$\alpha_1 = 5$$
$$\alpha_2 = 3$$
$$\alpha_3 = 6$$
$$\alpha_3 = \frac{20}{12}$$

Como podemos apreciar los valores de α_3 no son los mismos, y esto es debido a que originalmente teníamos un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas, entonces el sistema tiene diversas soluciones y al encontrar que los resultados de las ecuaciones de α_3 no son el mismo, podemos concluir que el conjunto $x^3 - 2x^2 + 1, 4x^2 - x + 3y3x - 2$ **NO** generan a $P_3(\mathbb{R})$

Ejercicio 10

Prueba que las siguientes transformaciones T son lineales y encuentra el núcleo $Nu(T)$ y la imagen $Im(T)$

Definición 5. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, la **imagen** de una trasformación T es $Im(T) = \{T(\hat{x}) | \hat{x} \in V\}$

Definición 6. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, el **núcleo** de una trasformación T es $Nu(T) = \left\{\hat{x} \in V | T(\hat{x}) = \hat{0}_W\right\}$

a) $\{T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2\}$ definida por $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, 2a_3)$ Para ver que una transformación es lineal, debe cumplir que **abra sumas y saque escalares**

Sean $\hat{a_1}, \hat{a_2} \in \mathbb{R}^3$ y $\xi \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}
\xi a_1 + a_2 &= \xi(x_1, y_1, z_1) + (x_1, y_2, z_2) && \text{Por definición de } a_1 \text{ y } a_2 \\
\xi a_1 + a_2 &= (\xi x_1, \xi y_1, \xi z_1) + (x_2, y_2, z_2) && \text{Por distributividad de los } \mathbb{R} \\
\xi a_1 + a_2 &= (\xi x_1 + x_2, \xi y_1 + y_2, \xi z_1 + z_2) && \text{Sumando entrada por entrada} \\
T(\xi a_1 + a_2) &= T(\xi x_1 + x_2, \xi y_1 + y_2, \xi z_1 + z_2) && \text{Aplicando T} \\
T(\xi a_1 + a_2) &= ((\xi x_1 + x_2) - (\xi y_1 + y_2), 2(\xi z_1 + z_2)) && \text{Siguiendo la regla de T} \\
T(\xi a_1 + a_2) &= (\xi x_1 + x_2 - \xi y_1 - y_2, 2\xi z_1 2z_2) && \text{Por asociatividad} \\
T(\xi a_1 + a_2) &= (\xi x_1 - \xi y_1 + x_2 - y_2, 2\xi z_1 2z_2) && \text{Por conmutatividad} \\
T(\xi a_1 + a_2) &= ((\xi x_1 - \xi y_1) + (x_2 - y_2), 2\xi z_1 2z_2) && \text{Asociatividad nuevamente} \\
T(\xi a_1 + a_2) &= (\xi x_1 - \xi y_1, 2\xi z_1) + (x_2 - y_2, 2z_2) && \text{Asociatividad entre elementos en } \mathbb{R}^2 \\
T(\xi a_1 + a_2) &= \xi(x_1 - y_1, 2z_1) + (x_2 - y_2, 2z_2) && \text{Por distributividad de } \xi \\
T(\xi a_1 + a_2) &= \xi T(a_1) + T(a_2) && \text{Por definición de T}
\end{aligned}$$

$$\therefore T \text{ es transformación lineal}$$

Ahora veamos quién es el núcleo de la transformación igualando a $\hat{0}_{\mathbb{R}^2}$ sea $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
T(\hat{x}) &= \hat{0}_{\mathbb{R}^2} && \text{Planteando la iguladad} \\
T(\hat{x}) &= (0, 0) && \text{Por definición del neutro aditivo en } \mathbb{R}^2 \\
T(x_1, x_2, x_3) &= (0, 0) && \text{Porque } \hat{x} \in \mathbb{R}^3 \\
(x_1 - x_2, 2x_3) &= (0, 0) && \text{Por definición de T} \\
x_1 - x_2 &= 0 && \text{Obtenemos el siguiente sistema} \\
2x_3 &= 0 \\
\\
x_3 &= 0 && \text{Por lo que tenemos} \\
x_1 &= x_2 && \text{y por otra parte}
\end{aligned}$$

$\therefore$ el núcleo de la transformación son todos los elementos cuya primera y segunda coordenada son la misma y la tercera 0.

$$i.e.\ Nu(T) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | (x_1, x_1, 0)\}$$

Finalmente observemos que la imagen de la transformacion es:
Sean $\hat{y} \in \mathbb{R}^2$ y $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$ veamos que

$$\begin{aligned}
T(\hat{x}) &= \hat{y} && \text{Para ver la forma de los elementos en la imgaen} \\
T(x_1, x_2, x_3) &= (y_1, y_2) && \text{Por definición de } \hat{y}, \hat{x} \\
(x_1 - x_2, 2x_3) &= (y_1, y_2) && \text{Usando la regla de correspondencia de T} \\
\\
x_1 - x_2 &= y_1 && \text{Obtenemos que } y_1 \text{ es de esa forma} \\
2x_3 &= y_2 && \text{y que } y_2 \text{ se obtiene de esta manera}
\end{aligned}$$

Es menester mencionar que la suma (diferencia) entre elementos de $\mathbb{R}$ es algún otro elemento en $\mathbb{R}$ por lo que la imagen de T es todo $\mathbb{R}^2$

b) $\{T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3\}$ definida por $(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, 0, 2a_1 - a_2)$ Para ver que una transformación es lineal, debe cumplir que **abra sumas y saque escalares**
Sean $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^3$ y $\theta \in \mathbb{R}$ entonces

$$
\begin{aligned}
\theta\hat{x}+\hat{y} &= \theta(a,b)+(c,d) && \text{Por definición de } \hat{x},\hat{y}\\
\theta\hat{x}+\hat{y} &= (\theta a,\theta b)+(c,d) && \text{Distributividad en } \mathbb{R}\\
\theta\hat{x}+\hat{y} &= (\theta a+c,\theta b+d) && \text{Sumando entrada a entrada}\\
T(\theta\hat{x}+\hat{y}) &= T(\theta a+c,\theta b+d) && \text{Aplicando T en ambos lados}\\
T(\theta\hat{x}+\hat{y}) &= ((\theta a+c)+(\theta b+d),0,2(\theta a+c)-(\theta b+d) && \text{Aplicando la regla de correspondencia}\\
T(\theta\hat{x}+\hat{y}) &= (\theta a+\theta b+c+d,0,2\theta a+2c-\theta b-d) && \text{Asociatividad en } \mathbb{R}\\
T(\theta\hat{x}+\hat{y}) &= ((\theta a+\theta b)+(c+d),0,(2\theta a-\theta b)+(2c-d) && \text{Asociativiad y distributividad en } \mathbb{R}\\
T(\theta\hat{x}+\hat{y}) &= (\theta a+\theta b,0,2\theta a-\theta b)+(c+d,0,2c-d) && \text{Asociativiad}\\
T(\theta\hat{x}+\hat{y}) &= \theta(a+b,0,2a-b)+(c+d,0,2c-d) && \text{Distributividad \textit{inversa}}\\
T(\theta\hat{x}+\hat{y}) &= \theta T(\hat{x})+T(\hat{y}) && \text{Definición de T}
\end{aligned}
$$

$$\therefore T \text{ es transformación lineal}$$

Revisemos cuál es el núcleo de la transformación lineal, tomando un elemento en el dominio y viendo qué forma tienen los elementos que irán al neutro aditivo de su codominio.
Sea $\hat{x}\in\mathbb{R}^2$ entonces

$$
\begin{aligned}
T(\hat{x}) &= \hat{0}_{\mathbb{R}^3} && \text{Planteando la igualdad}\\
T(x_1,x_2) &= \hat{0}_{\mathbb{R}^3} && \text{Por la forma de } \hat{x}\\
T(x_1,x_2) &= (0,0,0) && \text{Por la forma de } \hat{0}_{\mathbb{R}^3}\\
(x_1+x_2,0,2x_1-x_2) &= (0,0,0) && \text{Aplicando la regla de correspondencia de T}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2 &= 0 && \text{Obtenemos el siguiente sistema}\\
0 &= 0\\
2x_1-x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -x_2 && \text{Deducimos lo siguiente}\\
2x_1 &= x_2
\end{aligned}
$$

Y la única manera de que eso ocurra es que

$$x_1=x_2=0$$

$$\therefore \text{ el núcleo de la transformación es } (0,0)$$

Finalmente notemos que la imagen de la transformación está dada por lo siguiente.
Sea $\hat{y}\in\mathbb{R}^3$ y $\hat{x}\in\mathbb{R}^2$ de la forma

$$\hat{y}=(y_1,y_2,y_3) \qquad \hat{x}=(x_1,x_2)$$

entonces

$$
\begin{aligned}
T(\hat{x}) &= \hat{y} && \text{Para ver de que forma son los elementos}\\
T(x_1,x_2) &= (y_1,y_2,y_3) && \text{Usando su representación}\\
(x_1+x_2,0,2x_1-x_2) &= (y_1,y_2,y_3) && \text{Por la regla de correspondencia de T}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2 &= y_1 && \text{Igualamos entrada a entrada}\\
0 &= y_2 && \text{Obteniendo lo siguiente}\\
2x_1-x_2 &= y_3 && \text{Se deduce de lo anterior}
\end{aligned}
$$

Es importante mencionar que la suma de elementos en $\mathbb{R}$ es algún elemento en $\mathbb{R}$ pues la suma es cerrada en dicho conjunto. Por lo que podemos deducir que la imagen de T es

$$Im(T)=\{(x_1,0,x_2)|x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$$

c) $\{T : M_{2x3}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2x2}(\mathbb{R})\}$ definido por

$$T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sean $A, B \in M_{2x3}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$ y que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\lambda A + B &= \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} && \text{Por definición de A y B} \\
\lambda A + B &= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} && \text{Distributividad de } \lambda \\
\lambda A + B &= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + b_{11} & \lambda a_{12} + b_{12} & \lambda a_{13} + b_{13} \\ \lambda a_{21} + b_{21} & \lambda a_{22} + b_{22} & \lambda a_{23} + b_{23} \end{pmatrix} && \text{Definición de + en } M_{2x3}(\mathbb{R}) \\
T(\lambda A + B) &= T\left(\begin{pmatrix} \lambda a_{11} + b_{11} & \lambda a_{12} + b_{12} & \lambda a_{13} + b_{13} \\ \lambda a_{21} + b_{21} & \lambda a_{22} + b_{22} & \lambda a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}\right) && \text{Aplicando T en ambos miembros} \\
T(\lambda A + B) &= \begin{pmatrix} 2(\lambda a_{11} + b_{11}) - (\lambda a_{12} + b_{12}) & \lambda a_{13} + b_{13} + 2(\lambda a_{12} + b_{12}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{Siguiendo la regla de transformación de T} \\
T(\lambda A + B) &= \begin{pmatrix} 2\lambda a_{11} + 2b_{11} - \lambda a_{12} - b_{12} & \lambda a_{13} + b_{13} + 2\lambda a_{12} + 2b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{Distributividad} \\
T(\lambda A + B) &= \begin{pmatrix} (2\lambda a_{11} - \lambda a_{12}) + (2b_{11} - b_{12}) & (\lambda a_{13} + 2\lambda a_{12}) + (b_{13} + 2b_{12}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{Asociatividad en } \mathbb{R} \\
T(\lambda A + B) &= \begin{pmatrix} 2\lambda a_{11} - \lambda a_{12} & \lambda a_{13} + 2\lambda a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_{11} - b_{12} & b_{13} + 2b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{Asociatividad en } M_{2x3}(\mathbb{R}) \\
T(\lambda A + B) &= \lambda \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_{11} - b_{12} & b_{13} + 2b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{Distributividad } \textit{inversa} \text{ en } \lambda \\
T(\lambda A + B) &= \lambda T(A) + T(B) && \text{Definición de } T(A), T(B)
\end{aligned}$$

$$\therefore T \text{ es transformación lineal}$$

Veamos cuál es el núcleo de la transformación.
Sea $A \in M_{2x3}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
T(A) &= \hat{0}_{M_{2x2}} && \text{Planteando la igualdad} \\
T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{Planteando la igualdad} \\
\begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{Por la regla de correspondencia de T}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2a_{11} - a_{12} &= 0 && \text{Obtenemos esto} \\
a_{13} + 2a_{12} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{a_{12}}{2} && \text{Finalmente conseguimos} \\
a_{13} &= -2a_{12}
\end{aligned}$$

$\therefore$ El **núcleo** de T son todas las matrices en $M_{2x3}(\mathbb{R})$ tal que $a_{11} = \dfrac{a_{12}}{2}$ y que $a_{13} = -2a_{12}$ sin importar las entradas a_{21}, a_{22}, a_{23}

Para ver quién es la imagen de T tomemos un elemento en el dominio e igualémoslo con un elemento del codominio *i.e.* Sea $\hat{B} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ y $\hat{A} \in M_{2x3}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
T(\hat{A}) &= \hat{B} && \text{Planteando la igualdad} \\
T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} && \text{Planteando la igualdad} \\
\begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} && \text{Por la regla de correspondencia de T}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2a_{11} - a_{12} &= b_{11} && \text{Obtenemos esto} \\
a_{13} + 2a_{12} &= b_{12} \\
0 &= b_{21} = b_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{a_{12}}{2} && \text{Finalmente conseguimos} \\
a_{13} &= -2a_{12}
\end{aligned}$$

veamos que $2a_{11} - a_{12} \in \mathbb{R},\ a_{13} + 2a_{12} \in \mathbb{R}$

Por lo que podemos concluir que la **imagen** de T son todas las matrices en $M_{22}(\mathbb{R}) \quad \cdot \ni \cdot \quad b_{21} = b_{22} = 0$

d) $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})\}$ definida por $T(f(x)) = xf(x) + f'(x)$. Para ver que una transformación es lineal, debe cumplir que **abra sumas y saque escalares**
Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{R}^3$ y $\psi \in \mathbb{R}$ donde

$$p(x) = a + bx + cx^2 \qquad q(x) = d + ex + fx^2$$

entonces

$$\begin{aligned}
\psi p(x) + q(x) &= \psi(a + bx + cx^2) + (d + ex + fx^2) && \text{Definición de } p(x), q(x) \\
\psi p(x) + q(x) &= (\psi a + \psi bx + \psi cx^2) + (d + ex + fx^2) && \text{Distributividad de } \psi \\
\psi p(x) + q(x) &= (\psi a + d + \psi bx + ex + \psi cx^2 + fx^2) && \text{Asociatividad} \\
T(\psi p(x) + q(x)) &= T(\psi a + d + \psi bx + ex + \psi cx^2 + fx^2) && \text{Aplicando T en ambos miembros} \\
T(\psi p(x) + q(x)) &= \psi ax + dx + \psi bx^2 + ex^2 + \psi cx^3 + fx^3 + \psi b + e + \psi 2cx + 2fx && \text{Usando la regla de correspondencia} \\
T(\psi p(x) + q(x)) &= \psi ax + \psi b + \psi bx^2 + \psi cx^2 + \psi 2cx + e + dx + ex^2 + fx^3 + 2fx && \text{Conmutatividad en } \mathbb{R} \\
T(\psi p(x) + q(x)) &= (\psi ax + \psi b + \psi bx^2 + \psi cx^3 + \psi 2cx) + (e + dx + ex^2 + fx^3 + 2fx) && \text{Asociativiad en } \mathbb{R} \\
T(\psi p(x) + q(x)) &= \psi(ax + b + bx^2 + cx^3 + 2cx) + (e + dx + ex^2 + 2fx + fx^2) && \text{Distributividad \textit{inversa} en } \mathbb{R} \\
T(\psi p(x) + q(x)) &= \psi T(p(x)) + T(q(x)) && \text{Definición de } T(p(x)), T(q(x))
\end{aligned}$$

$\therefore T$ es transformación lineal

Veamos quien es el núcleo de la transformación para lo que necesitaremos tomar un $f(x) \in P_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 && \text{Por la forma de } f(x) \\
T(f(x)) &= x(a_0 + a_1x + a_2x^2) + a_1 + 2a_2x && \text{Aplicando la regla de correspondencia} \\
T(f(x)) &= a_1 + a_0x + 2a_2x + a_1x^2 + a_2x^3 && \text{Distributividad} \\
T(f(x)) &= a_1 + (a_0 + 2a_2)x + a_1x^2 + a_2x^3 && \text{Distributividad \textit{inversa} y asociatividad}
\end{aligned}$$

y ahora igualemos este resultado con $\hat{0}_{P_3(\mathbb{R})}$

$$a_1 + (a_0 + 2a_2)x + a_1x^2 + a_2x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \qquad \text{igualemos entrada a entrada}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 && \text{Primera entrada} \\ a_0 + 2a_2 &= 0 && \text{Segunda entrada} \\ a_1 &= 0 && \text{Tercera entrada} \\ a_2 &= 0 && \text{Cuarta entrada} \end{aligned}$$

Por lo tanto el **núcleo** de la transformación es el polinomio en $P_2(\mathbb{R}) \quad \cdot \ni \cdot \quad a_2 = a_1 = a_0 = 0$

Por último veamos quién es la imagen de la transformación lineal.
Sea $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \in P_3(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} T(f(x)) &= q(x) && \text{Planteamos la igualdad} \\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 && \text{Por definición de } f(x) \text{ y } q(x) \\ a_1 + (a_0 + 2a_2)x + a_1x^2 + a_2x^3 &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 && \text{Por la regla de correspondencia de T} \end{aligned}$$

Notemos que el término constante y el cuadrático son el mismo por lo que la imagen de la transformación son todos los polinomios en

$$p(x) \in P_3(\mathbb{R}) \quad \cdot \ni \cdot \quad p(x) = a + (c + 2b)x + ax^2 + bx^3$$

Ejercicio 11

Sean β y γ las bases estándar para $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Para cada transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ encontrar su representación matricial.

Definición 7. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y β una base ordenada de $\mathbb{V}$ si $\vec{x} \in \mathbb{V}$ entonces existen

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \cdot \ni \cdot \quad \vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots$$

donde $\vec{v}_i \in \beta$ entonces definimos al vector de coordenadas de $\vec{x}$ con respecto a la base β como

$$[\vec{x}]_\beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Definición 8. Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita y β, γ sus respectivas bases. Además consideremos $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ transformación lineal, entonces definimos a la matriz asociada a la función T de la base β en la base γ como

$$[T]_\beta^\gamma$$

a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(a_1, a_2) = (2a_1 - a_2, 3a_1 + 4a_2, a_1)$
Tomemos en cuenta que las bases estándar de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ son respectivamente, las siguientes

$$\beta = \{(1,0), (0,1)\} \quad \gamma = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

Ahora, con el primer elemento de la base β apliquemos la transformación lineal

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (2(1) - 0, 3(1) + 4(0), 1) && \text{Usando la regla de correspondencia} \\ T(1,0) &= (2,3,1) && \text{Por neutro aditivo y multiplicativo} \end{aligned}$$

Luego, escribamos a $(2,3,1)$ como combinación lineal de γ

$$\begin{aligned}
(2,3,1) &= \alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1) && \text{Coeficientes en el campo}\\
(2,3,1) &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) && \text{Distribuyendo y sumando}\\
2 &= \alpha_1 && \text{Valores resultantes}\\
3 &= \alpha_3 && \text{Valores resultantes}\\
1 &= \alpha_3 && \text{Valores resultantes}
\end{aligned}$$

Con lo que ahora tenemos podemos construir

$$[T(1,0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 2\\ 3\\ 1 \end{pmatrix}$$

Empleemos el segundo elemento de la base β para aplicarle la transformación lineal

$$\begin{aligned}
T(0,1) &= (2(0)-1, 3(0)+4(1), 0) && \text{Por la regla de correspondencia de T}\\
T(0,1) &= (-1,4,0) && \text{Distributividad,neutro aditivo y multiplicativo}
\end{aligned}$$

Ahora escribamos a $(-1,4,0)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned}
(-1,4,0) &= \alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1) && \text{Coeficientes en el campo}\\
(-1,4,0) &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) && \text{Disstribuyendo y sumando entrada a entrada}\\
\\
-1 &= \alpha_1 && \text{Valor del coeficiente}\\
4 &= \alpha_2 && \text{Valor del coeficiente}\\
0 &= \alpha_2 && \text{Valor del coeficiente}
\end{aligned}$$

Entonces el vector de coordenadas asociado a $(0,1)$ es

$$[T(0,1)]_\gamma = \begin{pmatrix} -1\\ 4\\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz asociada a la transformación T es

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ 3 & 4\\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(a_1,a_2,a_3) = (2a_1+3a_2-a_3, a_1+a_3)$

$$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \quad \gamma = \{(1,0),(0,1)\}$$

Tomemos el primer elemento de la base canónica β para aplicar la transformación lineal T

$$\begin{aligned}
T(1,0,0) &= (2(1)+3(0)-(0),(1)+(0)) && \text{Usando la regla de correspondencia}\\
T(1,0,0) &= (2,1) && \text{Por neutro aditivo, neutro multiplicativo}
\end{aligned}$$

Ahora veamos a $(2,1)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned}
(2,1) &= \alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1) && \text{Donde } \alpha_1,\alpha_2 \text{ son coeficientes del campo}\\
(2,1) &= (\alpha_1,\alpha_2) && \text{Distribuyendo y sumando vectores}\\
2 &= \alpha_1 && \text{Igualando entrada a entrada}\\
1 &= \alpha_2 && \text{Igualando entrada a entrada}
\end{aligned}$$

Por lo que ya podemos ver que

$$[T(1,0,0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Empleemos la transformación lineal con el segundo elemento de la base β

$$\begin{aligned} T(0,1,0) &= (2(0)+3(1)-0, 0+1) && \text{Usando la regla de correspondencia de T} \\ T(0,1,0) &= (3,1) && \text{Multiplicando y sumando neutros aditivos} \end{aligned}$$

Ahora veamos como combinación lineal de elementos de la base γ a $(3,1)$

$$\begin{aligned} (3,1) &= \alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1) && \text{Donde } \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R} \\ (3,1) &= (\alpha_1,\alpha_2) && \text{Distribuyendo y sumando entrada con entrada} \\ \\ 3 &= \alpha_1 && \text{Igualando las entradas} \\ 1 &= \alpha_2 && \text{Igualando las entradas} \end{aligned}$$

Y así podemos construir

$$[T(0,1,0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por último tomemos el tercer elemento de la base β para aplicar la transformación lineal

$$\begin{aligned} T(0,0,1) &= (2(0)+3(0)-1, 0+1) && \text{Por la regla de correspondencia de T} \\ T(0,0,1) &= (-1,1) && \text{Sumando y multiplicando respectivamente} \end{aligned}$$

Ahora veamos a $(-1,1)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned} (-1,1) &= \alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1) && \text{Donde } \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R} \\ (-1,1) &= (\alpha_1,\alpha_2) && \text{Distribuyendo y sumando} \\ \\ -1 &= \alpha_1 && \text{Igualamos entrada correspondiente} \\ 1 &= \alpha_2 && \text{Igualamos entrada correspondiente} \end{aligned}$$

De tal forma que el vector de coordenadas asociado a $T(0,0,1)$ es

$$[T(0,0,1)]_\gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y ahora que contamos con todos los coeficientes podemos construir la matriz asociada a la transformación lineal T como

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $T(a_1,a_2,a_3) = 2a_1 + a_2 - 3a_3$

$$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \quad \gamma = \{1\}$$

En este ejercicio tenemos un caso un tanto trivial pues la base estándar de $\mathbb{R}$ es el neutro multiplicativo, así que sólo bastará con aplicar la transformación lineal a elementos de β para obtener los coeficientes de la matriz asociada a dicha transformación.

$$\begin{aligned}
T(1,0,0) &= 2(1)+0-3(0) && \text{Por la regla de correspondencia}\\
T(1,0,0) &= 2 && \text{Operando}\\
\\
T(0,1,0) &= 2(0)+1-3(0) && \text{Por la regla de correspondencia}\\
T(0,1,0) &= 1 && \text{Simplificando}\\
\\
T(0,0,1) &= 2(0)+0-3(1) && \text{Por la regla de correspondencia}\\
T(0,0,1) &= -3 && \text{Efectuando los productos}
\end{aligned}$$

Finalmente la matriz asociada a esta transformación es

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

d) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(a_1,a_2,a_3) = (2a_2+a_3, -a_1+4a_2+5a_3, a_1+a_3)$

$$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \quad \gamma = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

Tomemos el primer elemento de la base β y apliquemos la transformación lineal

$$\begin{aligned}
T(1,0,0) &= (2(0)+(0), -(1)+4(0)+5(0), (1)+(0)) && \text{Usando la regla de correspondencia}\\
T(1,0,0) &= (0,-1,1)
\end{aligned}$$

Ahora veamos a $(0,-1,1)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned}
(0,-1,1) &= \alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1) && \text{Donde } \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}\\
(0,-1,1) &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) && \text{Distribuyendo y sumando}\\
\\
0 &= \alpha_1 && \text{Igualanado entradas}\\
-1 &= \alpha_2 && \text{Igualanado entradas}\\
1 &= \alpha_3 && \text{Igualanado entradas}
\end{aligned}$$

De esta manera podemos construir el vector de coordenadas asociado

$$[T(1,0,0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomemos el segundo elemento de la base β y apliquemos la transformación lineal

$$\begin{aligned}
T(0,1,0) &= (2(1)+(0), -(0)+4(1)+5(0), (0)+(0)) && \text{Usando la regla de correspondencia}\\
T(0,1,0) &= (2,4,0)
\end{aligned}$$

Ahora veamos a $(2,4,0)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned}
(2,4,0) &= \alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1) && \text{Donde } \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}\\
(2,4,0) &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) && \text{Distribuyendo y sumando}\\
\\
2 &= \alpha_1 && \text{Igualanado entradas}\\
4 &= \alpha_2 && \text{Igualanado entradas}\\
0 &= \alpha_3 && \text{Igualanado entradas}
\end{aligned}$$

De esta manera podemos construir el vector de coordenadas asociado

$$[T(0,1,0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tomemos el tercer elemento de la base β y apliquemos la transformación lineal

$$\begin{aligned} T(0,0,1) &= (2(0)+(1), -(0)+4(0)+5(1), (0)+(1)) && \text{Usando la regla de correspondencia} \\ T(0,0,1) &= (1,5,1) \end{aligned}$$

Ahora veamos a $(1,5,1)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned} (1,5,1) &= \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) && \text{Donde } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \\ (1,5,1) &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) && \text{Distribuyendo y sumando} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 && \text{Igualanado entradas} \\ 5 &= \alpha_2 && \text{Igualanado entradas} \\ 1 &= \alpha_3 && \text{Igualanado entradas} \end{aligned}$$

De esta manera podemos construir el vector de coordenadas asociado

$$[T(0,0,1)]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por último construyamos la matriz asociada a la transformación T

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 12

Para cada uno de los siguientes pares de bases β y β' para $\mathbb{R}^2$, encuentra la matriz de cambio de coordenadas que cambia las coordenadas de β' en las de β.

a)$\beta = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ y $\beta' = \{(a_1,a_2),(b_1,b_2)\}$
Veamos a la base $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ de tal manera que

$$\begin{aligned} (1,0) &= \alpha_1(a_1,a_2) + \alpha_2(b_1,b_2) \\ (1,0) &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1, \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1 \\ 0 &= \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (0,1) &= \alpha_1(a_1,a_2) + \alpha_2(b_1,b_2) \\ (0,1) &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1, \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1 \\ 1 &= \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 \end{aligned}$$

Finalmente la matriz de cambio de base es

$$) \; ($$

b)$\beta = \{(-1,3),(2,-1)\}$ y $\beta' = \{(0,10),(5,0)\}$
Veamos al primer elemento de la base β como combinación lineal de elementos de la base β'

$$(-1,3) = \alpha_1(0,10) + \alpha_2(5,0)$$
$$(-1,3) = (0,10\alpha_1) + (5\alpha_2,0)$$
$$(-1,3) = 5\alpha_2, 10\alpha_1)$$

$$-1 = 5\alpha_2$$
$$3 = 10\alpha_1$$

$$\frac{3}{10} = \alpha_1$$
$$-\frac{1}{5} = \alpha_2$$

Hagamos lo mismo para el segundo elemento en la base β

$$(2,-1) = \alpha_1(0,10) + \alpha_2(5,0)$$
$$(2,-1) = (0,10\alpha_1) + (5\alpha_2,0)$$
$$(2,-1) = 5\alpha_2, 10\alpha_1)$$

$$2 = 5\alpha_2$$
$$-1 = 10\alpha_1$$

$$-\frac{1}{10} = \alpha_1$$
$$\frac{2}{5} = \alpha_2$$

Finalmente la matriz de cambio de base es

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

c)$\beta = \{(2,5),(-1,-3)\}$ y $\beta' = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$
Encontremos la combinación lineal de elementos de la base β' para el primer elemento de la base β

$$(2,5) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1)$$
$$(2,5) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

$$2 = \alpha_1$$
$$5 = \alpha_2$$

Ahora hagamos lo mismo con el otro elemento de la base β

$$(-1,-3) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1)$$
$$(-1,-3) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

$$-1 = \alpha_1$$
$$-3 = \alpha_2$$

Por lo tanto, la matriz de cambio de base es
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$
d)$\beta = \{(-4,3),(2,-1)\}$ y $\beta' = \{(2,1),(-4,1)\}$
Veamos al primer vector de la base β como combinación lineal de la base β'
$$\begin{aligned} (-4,3) &= \alpha_1(2,1) + \alpha_2(-4,1) \\ (-4,3) &= (2\alpha_1, \alpha_1) + (-4\alpha_2, \alpha_2) \\ (-4,3) &= (2\alpha_1 - 4\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} -4 &= 2\alpha_1 - 4\alpha_2 \\ 3 &= \alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \frac{4}{3} &= \alpha_1 \\ \frac{5}{3} &= \alpha_2 \end{aligned}$$

Hagamos lo mismo con el segundo vector
$$\begin{aligned} (2,-1) &= \alpha_1(2,1) + \alpha_2(-4,1) \\ (2,-1) &= (2\alpha_1, \alpha_1) + (-4\alpha_2, \alpha_2) \\ (2,-1) &= (2\alpha_1 - 4\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} 2 &= 2\alpha_1 - 4\alpha_2 \\ -1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} &= \alpha_1 \\ -\frac{2}{3} &= \alpha_2 \end{aligned}$$

Finalmente la matriz de cambio de base es
$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13

Encontrar la matriz inversa por el método de *Gauss-Jordan* de las siguientes matrices

a)$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Adjuntemos la matriz I_2 de tal manera que obtengamos
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{1a Fila} \cdot -1 + \text{2a Fila en 2a Fila}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \text{2a Fila} \cdot -1$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \text{2a Fila} \cdot -2 + \text{1a Fila en 1a Fila}$$

$$\therefore \text{ la inversa de la matriz dada es } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Adjuntemos la matriz I_2 de tal manera que obtengamos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{1a Fila} \cdot -2 + 2^a \text{ en 2a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad \text{2a Fila} \cdot -\frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad \text{2a Fila} \cdot -1 + \text{1a fila en 1a fila}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2 \implies \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ Es singular}$$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Adjuntemos la matriz I_3 de tal manera que obtengamos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{1a fila} \cdot -1 + 2^a \text{ fila en 2a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{1a fila} \cdot -2 + \text{3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{2a fila} + \text{3a fila en 3a fila}$$

Observemos que

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_3 \implies \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ Es singular}$$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Adjuntemos la matriz I_3 de tal manera que obtengamos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{Intercambiar la 1a fila por la 2a}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{1a fila} \cdot -2 + 3^a \text{ Fila en 3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{Multiplicar 2a fila} \cdot -\frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{2a fila} \cdot -2 + 3^a \text{ fila en 3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{3a fila} \cdot 2 + 2^a \text{ fila en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{3a fila + 1a fila en 1a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{2a fila} \cdot -1 + 1^a \text{ fila en 1a fila}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & -1 \\ \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ es la inversa de } \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14

Calcular el determinante de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Definición 9. Definimos a $M_{2x2}(\mathbb{R})$ como el espacio vectorial de las matrices de $2x2$ con coeficientes en los $\mathbb{R}$ de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Definición 10. Sea $A \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \ \cdot \ni \cdot \ a = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Entonces el determinante de A está definido como $det(A) = ad - bc$

por la definición de determinante tenemos que

$$\begin{aligned} det(A) &= (6)(4) - (-3)(2) \\ det(A) &= 24 + 6 \\ \therefore \quad det(A) &= 30 \end{aligned}$$

b) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

Por la definición de determinante tenemos que

$$\begin{aligned} det(A) &= (-5)(1) - (-3)(2) \\ det(A) &= (-5) - (-6) \\ det(A) &= -5 + 6 \\ det(A) &= 1 \end{aligned}$$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Definición 11. Sea $A \in M_{nxn}(\mathbb{F})$ si $n < 1$ entonces $A = (A_{11})$ entonces $det(A) = A_{11}$ para $n \geq 2$ definimos el determinante de manera recursiva como

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n(dimen.)} (-1)^{1+j} A_{1j} det(\hat{A}_{1j})$$

Y así, por la definición de $det(A)$ tenemos que

$$det(A) = \sum_{j=1}^{3} A_{1j} det(\hat{A}_{1j})$$
$$det(A) = (-1)^2 A_{11} det(\hat{A}_{11}) + (-1)^3 A_{12} det(\hat{A}_{12}) + (-1)^4 A_{13} det(\hat{A}_{13})$$
$$det(A) = A_{11} det(\hat{A}_{11}) + -A_{12} det(\hat{A}_{12}) + A_{13} det(\hat{A}_{13})$$
$$det(A) = (0) det(\hat{A}_{11}) + -(-1) det(\hat{A}_{12}) + (2) det(\hat{A}_{13})$$
$$det(A) = -det(\hat{A}_{12}) + 2det(\hat{A}_{13})$$

Por la definición de determinantes en M_{2x2}

$$det(\hat{A}_{12}) = ad - bc$$
$$det(\hat{A}_{12}) = (-1)(0) - (-3)(2)$$
$$det(\hat{A}_{12}) = 6$$

por otra parte

$$det(\hat{A}_{13}) = ad - bc$$
$$det(\hat{A}_{13}) = (-1)(3) - (0)(2)$$
$$det(\hat{A}_{13}) = -3$$

Sustituyendo del $det(\hat{A}_{12})$ y $det(\hat{A}_{13})$ en $det(A)$ tenemos que

$$det(A) = -1(6) + 2(-3)$$
$$det(A) = -6 - 6$$
$$\therefore \quad det(A) = -12$$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Por la definición de determinante en M_{nxn} tenemos que

$$det(A) = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{1+j} A_{1j} det(\hat{A}_{1j})$$
$$det(A) = (-1)^2 A_{11} det(\hat{A}_{11}) + (-1)^3 A_{12} det(\hat{A}_{12}) + (-1)^4 A_{13} det(\hat{A}_{13}) + (-1)^5 A_{14} det(\hat{A}_{14})$$
$$det(A) = A_{11} det(\hat{A}_{11}) - A_{12} det(\hat{A}_{12}) + A_{13} det(\hat{A}_{13}) - A_{14} det(\hat{A}_{14})$$
$$det(A) = (0) det(\hat{A}_{11}) - 2det(\hat{A}_{12}) + det(\hat{A}_{13}) - 3det(\hat{A}_{14})$$
$$det(A) = -2det(\hat{A}_{12}) + det(\hat{A}_{13}) - 3det(\hat{A}_{14})$$

Sea $\hat{A}_{12} = B$

$$det(B) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} B_{1j} det(\hat{B}_{1j})$$
$$det(B) = (-1)^2 B_{11} det(\hat{B}_{11}) + (-1)^3 B_{12} det(\hat{B}_{12}) + (-1)^4 B_{13} det(\hat{B}_{13})$$
$$det(B) = (1)(1) det(\hat{B}_{11}) + (-1)(-2) B_{12} det(\hat{B}_{12}) + (1)(2) det(\hat{B}_{13})$$
$$det(B) = det(\hat{B}_{11}) + 2B_{12} det(\hat{B}_{12}) + 2det(\hat{B}_{13})$$

Como $\hat{B}_{11}, \hat{B}_{12}, \hat{B}_{13} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ usaremos la definición para calcular el determinante en este tipo de matrices por lo que

$$det(\hat{B}_{11}) = ad - bc = 0(0) - (1)(2) = -2$$
$$det(\hat{B}_{12}) = ad - bc = 3(0) - (1)(-1) = 1$$
$$det(\hat{B}_{13}) = ad - bc = 3(2) - (0)(-1) = 6$$

Por lo que

$$\begin{aligned} det(B) &= -2 + 2(1) + 2(6) \\ det(B) &= -2 + 2 + 12 \\ det(B) &= 12 \end{aligned}$$

Por otro lado sea $\hat{A}_{13} = C$ entonces

$$\begin{aligned} det(C) &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} C_{1j} det(\hat{C}_{1j}) \\ det(C) &= (-1)^2 C_{11} det(\hat{C}_{11}) + (-1)^3 C_{12} det(\hat{C}_{12}) + (-1)^4 C_{13} det \hat{C}_{13} \\ det(C) &= (1) det(\hat{C}_{11}) + (-1)(0) det(\hat{C}_{12}) + (1)(2) det \hat{C}_{13} \\ det(C) &= det(\hat{C}_{11}) + 2 det \hat{C}_{13} \end{aligned}$$

y como $\hat{C}_{11}, \hat{C}_{13} \in M_{2x2}$ entonces

$$\begin{aligned} det(\hat{C}_{11}) &= ad - bc = (-1)(0) - (1)(1) \\ det(\hat{C}_{11}) &= ad - bc = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} det(\hat{C}_{13}) &= ad - bc = (3)(1) - (-1)(-1) \\ det(\hat{C}_{13}) &= ad - bc = 2 \end{aligned}$$

$$det(B) = -1 + 2(2) = 3$$

Ahora, sea $\hat{A}_{14} = D$

$$\begin{aligned} det(D) &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} D_{1j} det(\hat{D}_{1j}) \\ det(D) &= (-1)^2 D_{11} det(\hat{D}_{11}) + (-1)^3 D_{12} det(\hat{D}_{12}) + (-1)^4 D_{13} det(\hat{D}_{13}) \\ det(D) &= (1) det(\hat{D}_{11}) + (-1)(0) det(\hat{D}_{12}) + (1)(-2) det(\hat{D}_{13}) \\ det(D) &= det(\hat{D}_{11}) - 2 det(\hat{D}_{13}) \end{aligned}$$

Y como $\hat{D}_{11}, \hat{D}_{13} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ entonces

$$\begin{aligned} det(\hat{D}_{11}) &= ad - bc = (-1)(2) - (-1)(0) = -2 \\ det(\hat{D}_{13}) &= ad - bc = (3)(1) - (-1)(-2) = 2 \\ det(D) &= -2 - (2)(2) = -6 \end{aligned}$$

Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned} & det(A) = -2(12) + 3 - 3(-6) \\ & det(A) = -24 + 3 + 18 = -3 \\ \therefore \quad & det(A) = -3 \end{aligned}$$

Ejercicio 15

Para cada par de vectores u y v en $\mathbb{R}^2$, calcula el área del paralelogramo determinado por u y v.

a)$\vec{u} = (3, -2)$ y $\vec{v} = (2, 5)$

Definición 12. Sea $\vec{u} = (a, b), \vec{u} = (c, d)$ entonces $det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Entonces

$$\left| det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} \right| = \begin{pmatrix} (3, -2) \\ (2, 5) \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 3, -2 \\ 2, 5 \end{pmatrix}$$

$$\left| det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} \right| = |(3)(5) - (-2)(2)| = 15 + 4 = 19$$

$\therefore$ El área del paralelogramo es 19 con orientación positiva

b)$\vec{u} = (1, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 1)$
Entonces

$$det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \left| det \begin{pmatrix} (1, 3) \\ (-3, 1) \end{pmatrix} \right| = \left| det \begin{pmatrix} 1, 3 \\ -3, 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} = |(1)(1) - (3)(-3)| = |1 - 9| = |-8| = 8$$

$\therefore$ El área del paralelogramo es 8 con orientación negativa

c)$\vec{u} = (4, -1)$ y $\vec{v} = (-6, -2)$
Entonces

$$\left| det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} \right| = \left| det \begin{pmatrix} (4, -1) \\ (-6, -2) \end{pmatrix} \right| = \left| det \begin{pmatrix} 4, -1 \\ -6, -2 \end{pmatrix} \right|$$

$$\left| det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} \right| = |(4)(2) - (-1)(-6)| = |8 - 6| = |2|$$

$\therefore$ El área del paralelogramo es 2 con orientación positiva

Ejercicio 16

Para cada una de las siguientes matrices $A \in M_{n*n}(R)$ determine los valores propios de A y para cada valor propio λ de A, encontrar el conjunto de vectores propios correspondientes a A.

Definición 13. Sea T un operador lineal sobre V, dónde V es de dimensión finita y $\vec{x} \in V$ tal que $\vec{x}$ no es 0. Decimos que $\vec{x}$ es vector propio de T si $T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$.
Teorema. Sean $A \in M_{n*n}(\mathbb{R})$, entonces λ es un valor propio de A si y sólo si $det(A - \lambda Id_n) = 0$
Proposición. Si Q es la matriz formada por los vectores propios asociados a sus respectivos valores propios de $A \in M_{n*n}(\mathbb{R})$, entonces $D = Q^{-1}AQ$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
Por el teorema mencionado, para encontrar los valores propios de A, primero calculemos:
$A - \lambda Id_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$
Entonces:

$$det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Usando la definición de determinante en M_{2*2} tenemos que:
$(1 - \lambda)(2 - \lambda) - (3)(2) = 0$
Simplificando la expresión;
$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$
$(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$

Al resolver la ecuación por factorización, concluimos que los **valores propios de A son** $\lambda_1 = -1$ **y** $\lambda_2 = 4$
Ahora calculemos el conjunto de vectores propios. Tenemos que sustituir λ_1 y λ_2 en $(A - \lambda Id_n)(\vec{v}) = \vec{0}$
Primero hagamos el cálculo para $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 3 & 2-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones;

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$
$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

Multiplicamos 3 veces el renglón 1, -2 veces el renglón 3 y sumamos el renglón 1 al renglón 2.

$$6x_1 + 6x_2 = 0$$

Es fácil apreciar que $x_1 = -x_2$. Entonces como x_1 depende de x_2, el sistema tiene tantas soluciones como $\mathbb{R}$, menos "0"por definición. Por tanto tomamos $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$

$$\therefore \vec{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora hagamos el cálculo para $\lambda_2 = 4$

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 2 \\ 3 & 2-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones;

$$-3x_1 + 2x_2 = 0$$
$$3x_1 - 2x_2 = 0$$

Sumamos el renglón 1 al renglón 2.

$$3x_1 - 2x_2 = 0$$

Es fácil apreciar que $x_1 = \dfrac{2x_2}{3}$. Como en el caso pasado, el sistema tiene tantas soluciones como $\mathbb{R}$. Entonces tomamos $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

$$\therefore \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por último calcularemos la matriz diagonal, pero primero calcularemos Q^{-1} con la proposición:
$Q^{-1} = \dfrac{1}{det(Q)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
Entonces:

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
$det(Q) = (1)(3) - (-1)(2) = 5$
Ahora calculemos la matriz diagonal:

$$\tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ es la matriz diagonal.}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Usando el teorema enunciado, encontramos los valores propios de A:

$A - \lambda Id_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

Ahora calculemos $det(A - \lambda Id_n)$ usando la definición 11:

$$det(A - \lambda Id_n) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} A_{1j} det(\hat{A}_{1j}) = A_{11} det(\hat{A}_{11}) - A_{12} det(\hat{A}_{12}) + A_{13} det(\hat{A}_{13})$$

$$det(A - \lambda Id_n) = (1-\lambda) det(\hat{A}_{11}) + 2 det(\hat{A}_{13})$$

$det(\hat{A}_{11}) = (1-\lambda)(1-\lambda) - (1)(0) = (1-\lambda)^2$
$det(\hat{A}_{13}) = (-1)(0 - (1-\lambda)(2) = -2 + 2\lambda$
Sustituyendo:

$$det(A - \lambda Id_n) = (1-\lambda)(1-\lambda)^2 + 2(-2+2\lambda) = (1-\lambda)^3 - 4(1-\lambda) = 0$$

Obtenemos los valores de λ mediante factorización:

$$(1-\lambda)[(1-\lambda)(1-\lambda) - 4] = (1-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda - 3] = (1-\lambda)[(\lambda-3)(\lambda+1)] = 0$$

Es fácil notar que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$, los cuales son los **valores propios.**
Ahora calcularemos el conjunto de vectores propios. Tenemos que sustituir $(A - \lambda Id_n)(\vec{v}) = \vec{0}$.
Primero hagamos el cálculo para $\lambda_1 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 2 \\ -1 & 1-1 & 1 \\ 2 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2X_3 &= 0 \\ -X_1 + 0X_2 + X_3 &= 0 \\ 2X_1 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos notar que $X_1 = 0$ y $X_3 = 0$. Y X_2 puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$ ya que $0X_2$ siempre es 0. Entonces tomamos $X_2 = 1$.

$$\therefore \vec{V_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora hagamos el cálculo para $\lambda_2 = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 2 \\ -1 & 1-3 & 1 \\ 2 & 0 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sumamos el renglón 3 al renglón 1.

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sumamos el renglón 2 a dos veces el renglón 1.

$$\begin{aligned} -4x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

De esto podemos concluir que $x_1 = x_3$ y $x_2 = 0$. Como x_1 depende de x_3. Tomamos $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$.

$$\therefore \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por último hagamos el cálculo para $\lambda_3 = -1$.

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 0 & 2 \\ -1 & 1-(-1) & 1 \\ 2 & 0 & 1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Cómo tenemos repetida una ecuación la podemos eliminar.

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sumamos el renglón 2 a dos veces el renglón 1.

$$\begin{aligned} 4x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

De esto obtenemos que $x_1 = -x_3$ y $x_2 = -x_3$. Entonces $x_1 = x_2 = -x_3$ Como x_1 y x_2 dependen de x_3. Tomamos $x_1 = -1$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 1$.

$$\therefore \vec{V_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces: } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último calcularemos la matriz diagonal de A, pero primero tenemos que calcular Q^{-1} con la proposición $Q^{-1} = \dfrac{1}{det(Q)}(cof(Q^T))$

Es fácil apreciar que $det(A) = -2$ y $cof(A^T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Entonces:

$$A^{-1} = \tfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora encontremos la matriz diagonal utilizando la proposición que se encuentra al inicio del ejercicio.

$$D = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c)$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Comencemos por hallar los **valores porpios** de la matriz

$$\begin{aligned}
A - \lambda Id_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{Por el teorema enunciado al inicio del ejercicio} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} && \text{Multiplicacion por un escalar} \\
&= \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & -3 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} && \text{Adición entrada a entrada}
\end{aligned}$$

Ahora obtengamos el determinante de esa matriz

$$\begin{aligned}
det(A - \lambda Id_3) &= det\begin{pmatrix} -\lambda & -2 & -3 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} && \text{Sustituyendo lo que ya calculamos} \\
det(A - \lambda Id_3) &= \sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}A_{1j}det(\hat{A}_{1j}) && \text{Por la definición de determinante} \\
det(A - \lambda Id_3) &= (-\lambda)det(\hat{A}_{11}) + 2det(\hat{A}_{12}) - 3det(\hat{A}_{13}) && \text{Usando los valores } A_{1j}
\end{aligned}$$

Por otra parte calculemos el determinante de $\hat{A}_{11}$

$$\begin{aligned}
det(\hat{A}_{11}) &= (1-\lambda)(5-\lambda) - (-1)(2) && \text{Por definición determiante de 2x2} \\
det(\hat{A}_{11}) &= (1-\lambda)(5-\lambda) + 2 && \text{Multiplicando el segundo sumando} \\
det(\hat{A}_{11}) &= (5 - \lambda - 5\lambda + \lambda^2) + 2 && \text{Desarrollando el primer sumando} \\
det(\hat{A}_{11}) &= -6\lambda + \lambda^2 + 7 && \text{Sumando terminos semejantes}
\end{aligned}$$

Hagamos lo mismo para encontrar el determinate de $\hat{A}_{12}$

$$\begin{aligned}
det(\hat{A}_{12}) &= -(5-\lambda) - (-1)(2) && \text{Por definición del determinante en } M(\mathbb{F})_{2x2} \\
det(\hat{A}_{12}) &= -(5-\lambda) + 2 && \text{Operando signos}
\end{aligned}$$

Por último esto ocurre al resolver el determinante de $\hat{A}_{13}$

$$\begin{aligned}
det(\hat{A}_{11}) &= (-1)(2) - (1-\lambda)(2) && \text{Definición de determinante en 2x2}\\
det(\hat{A}_{11}) &= -2 - (1-\lambda)(2) && \text{Efectuando operación en signos}\\
det(\hat{A}_{11}) &= -2(2-\lambda) && \text{Por factorización de 2}
\end{aligned}$$

Recordemos, de los pasos anteriores que:

$$det(A - \lambda Id_3) = (-\lambda)det(\hat{A}_{11}) + 2det(\hat{A}_{12}) - 3det(\hat{A}_{13})$$

$$\begin{aligned}
det(A - \lambda Id_3) &= (-\lambda)(-6\lambda + \lambda^2 + 7) + 2(-(5-\lambda) + 2) - 3(-2(2-\lambda)) && \text{Por lo anterior}\\
det(A - \lambda Id_3) &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 1\lambda + 6 && \text{Agrupando términos semejantes}\\
det(A - \lambda Id_3) &= -(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1) && \text{Factorizando adecuadamente}
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 3$$

Encontremos el conjunto de vectores propios haciendo uso de la proposición enunciada al inicio de este ejercicio

$$(A - \lambda Id_3)(\vec{v}) = \vec{0}$$

Tomemos el caso en el que $\lambda_1 = 1$

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_1 Id_3)(\vec{v}_1) &= \vec{0} && \text{Planteemos la equación}\\
\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & 1-1 & -1 \\ 2 & 2 & 5-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{Por el resultado anterior}\\
\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{Operando los elementos de la matriz}
\end{aligned}$$

Así obtenemos el siguiente sistema de equaciones

$$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \tag{1}$$
$$-x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \tag{2}$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \tag{3}$$

Si sumamos $(1) + (3)$ obtendremos que $x_1 = -x_3$ y sustituyendo en (2) obtenemos que $x_2 = -x_3$ tomemos $x_3 = 1$ entonces $x_2 = x_1 = -1$ Así, el vector que obtenemos es

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomemos el caso en el que $\lambda_2 = 2$

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_1 Id_3)(\vec{v}_2) &= \vec{0} && \text{Planteemos la equación}\\
\begin{pmatrix} 0-2 & -2 & -3 \\ -1 & 1-2 & -1 \\ 2 & 2 & 5-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{Por el resultado anterior}\\
\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{Operando los elementos de la matriz}
\end{aligned}$$

Así obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones, no incluimos la 1^a fila, pues es muy evidente que se trata de la 3^a fila multiplicada por -1

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \tag{4}$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 = 0 \tag{5}$$

Sumando ambas obtenemos que $x_3 = 0$ y que $x_2 = -x_1$ sea $x_2 = 1$ entonces $x_1 = -1$ Así, el vector que obtenemos es

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tomemos el caso en el que $\lambda_3 = 3$

$$(A - \lambda_1 Id_3)(\vec{v}_3) = \vec{0} \qquad \text{Planteemos la equación}$$

$$\begin{pmatrix} 0-3 & -2 & -3 \\ -1 & 1-3 & -1 \\ 2 & 2 & 5-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Por el resultado anterior}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Operando los elementos de la matriz}$$

$$-3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \tag{6}$$
$$-x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \tag{7}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \tag{8}$$

Si sumamos $(7) + (8)$ sabremos que $x_2 = 0$ y sustituyendo en (8) obtenemos que $x_3 = -x_1$ Sea $x_3 = 1$ entonces $x_1 = -1$ Así, el vector que obtenemos es

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo anterior podemos concluir que la matriz de vectores propios es

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora resta invertir dicha matriz, lo haremos de la siguiente manera

$$Q^{-1} = \frac{1}{det(Q)}(cof(Q^T))$$

Calculemos el determinate de Q de la siguiente manera

$$det(Q) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} Q_{1j} det(\hat{Q}_{1j}) \qquad \text{Mostrado en clase}$$
$$det(Q) = (-1)((-1) - 0) - (-1)(0 - (-1)) + (-1)(0 - 1) \qquad \text{Aplicando dicha definición}$$
$$det(Q) = -1 + 1 + 1$$
$$det(Q) = 1$$

Y como la definición de una matriz *Transpuesta* es cambiar renglones por columnas tenemos que

$$Q^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Construyamos la matriz de cofactores para la que necesiaremos

Definición 13. Sea $Q \in M(\mathbb{F})_{3x3}$, tenemos que la matriz de cofactores de Q denotada por

$$cof(Q) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{n1} & & & C_{nm} \end{pmatrix}$$

donde $C_{nm} = (-1)^{(n+m)} \cdot det(\hat{C}_{nm})$

De esta manera podemos concluir que

$$cof\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix} = Q^{-1}$$

Finalmente hallemos la matriz diagonal como $D = Q^{-1}AQ$

$$D = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{Por la definición de diagonal}$$

$$D = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3 & -2 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{Realizando el primer producto}$$

$$D = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{Matriz diagonal}$$