Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Tarea Examen III

Kevin Ariel Merino Peña[1]

27 de mayo de 2020

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden la tarea-examen se entregan de manera individual.

1.Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Muestre que $u = f(y - \kappa x)$ es una solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Hagamos una observación sobre u, pues debemos costruir a dicha función con el mismo dominio que f, *i.e.*

$$u(x, y) = f(y - \kappa x)$$

ahora empleemos la composición de funciones para designar una función auxiliar $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como sigue $g(x, y) = y - \kappa x$;

$$u(x, y) = (f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$$

luego, tomemos la derivada de u como

$$Du(x, y) = Df(g(x, y))$$

Veamos que, como g es una función escalar, entonces su derivada es ∇g y por la **regla de la cadena** en funciones compuestas, tenemos que

$$D_u(x, y) = D_f(g(x, y))\nabla g \tag{♀}$$

donde $\nabla g(x, y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (-\kappa, 1)$, luego de ♀ tenemos que

$$\begin{aligned}
D_u(x, y) &= f'(g(x, y)) \cdot (-\kappa, 1) && \text{Reemplazando lo que sabemos del gradiente}\\
D_u(x, y) &= -f'(g(x, y))\kappa, f'(g(x, y)) && \text{Reemplazando lo que sabemos del gradiente}\\
\frac{\partial u}{\partial x} &= -f'(g(x, y))\kappa && \text{Derivando con respecto a } x\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= f'(g(x, y)) && \text{Derivando con respecto a } y\\
\kappa\frac{\partial u}{\partial y} &= f'(g(x, y))\kappa && \text{Multiplicando ambos miembros por el mismo real}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = -f'(g(x, y))\kappa + f'(g(x, y))\kappa = 0$$

siguiendo la cadena de igualdades, tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \square$$

2.Muestre que si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tienen segundas parciales mixtas continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1b}$$

Entonces ambas son armónicas.

---

[1]Número de cuenta 317031326

Recuerde. *Una función $u = u(x,y)$ con segundas derivadas parciales continuas que satisface la ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

se dice que es una función armónica.

Veamos qué ocurre para u cuando obtenemos sus segundas derivadas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) && \text{Por definición de segunda derivada}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) && \text{Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} && \text{Volviendo a escribir la ecuación}
\end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) && \text{Por definición de segunda derivada}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) && \text{Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} && \text{Reescribiendo}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} && \text{Ya que por hipótesis } u \text{ es de clase } \mathcal{C}^2
\end{aligned}$$

de las últimas dos observaciones podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) && \text{Sumando ambos miembros}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 && \text{Así sabemos que } u \text{ es armónica}
\end{aligned}$$

luego, hagamos algunas observaciones para v

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) && \text{Por definición de segunda derivada}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) && \text{Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} && \text{Volviendo a escribir la ecuación}
\end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) && \text{Por definición de segunda derivada}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) && \text{Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} && \text{Reescribiendo}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} && \text{Ya que por hipótesis } v \text{ es de clase } \mathcal{C}^2
\end{aligned}$$

de las últimas dos observaciones podemos concluir que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) \qquad \text{Sumando ambos miembros}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{Así sabemos que } v \text{ es armónica}$$

$\therefore$ ambas ecuaciones son armónicas si satisfacen las ecuaciones de *Cauchy-Riemann* y son de clase $\mathcal{C}^2$(que sus segundas derivadas mixtas sean iguales)

3. Encontrar la expansión a segundo orden de Taylor para $f(x,y) = y^2e^{-x^2}$ en $(1,1)$

primero hallemos las derivadas de f

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^2e^{-x^2}) = -2xy^2e^{-x^2} \qquad \text{Derivando con respecto a } x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2e^{-x^2}) = 2ye^{-x^2} \qquad \text{Derivando con respecto a } y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-2xy^2e^{-x^2}) = (4x^2-2)y^2e^{-x^2} \qquad \text{Derivando con respecto a } xx$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-2xy^2e^{-x^2}) = -4xye^{-x^2} \qquad \text{Derivando con respecto a } xy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2y^2e^{-x^2}) = 2ye^{-x^2} \qquad \text{Derivando con respecto a } yy$$

Luego, usando el teorema (visto en clase) sobre la expansión a segundo orden de Taylor para $x_0 = (1,1)$ está dada por
4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy + 5$. Encuentre los puntos críticos de f y determine si son: mínimos locales, máximos locales o puntos silla.

5. Encuentre los valores máximos y mínimos absolutos de $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2 + 5$ sobre el disco unitario $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

6. Suponga que un pentágono está compuesto por un rectángulo coronado por un triángulo isósceles (ver Figura 1). Si la longitud del perímetro es fija, encuentre el área máxima posible.

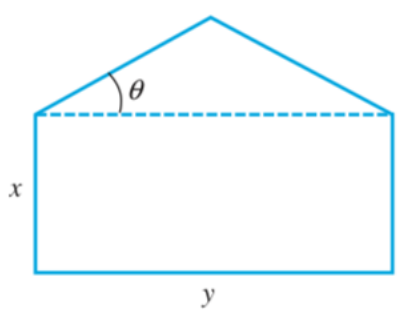

Figura 1: Maximizar el área para un perímetro dado.

7. Analice el comportamiento de las funciones en los puntos indicados. En la parte b el análisis depende de la constante C.

a) $z = x^2 - y^2 + 3xy$ en $(0,0)$.
b) $z = x^2 - y^2 + Cxy$ en $(0,0)$.
8. a) Encuentre la distancia mínima del origen en $\mathbb{R}^2$ a la superficie $z = \sqrt{x^2 - 1}$.

b) Haga lo mismo para la superficie $z = 6xy + 7$

9. Encuentre los puntos y valores críticos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones:

a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$, restringido a $x^2 + y^2 = 1$.

b) $f(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$, restringido a $x^2 + y^2 = 1$.

c) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, restringido a $x + y = 1$.

d) $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, restringido a $x + y = \frac{\pi}{4}$.

10. Encuentre el máximo de la función $f(x, y) = xy$ sobre la curva $(x + 1)^2 + y^2 = 1$

11. Encuentre la distancia más cercana del punto $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ al plano cuya ecuación está dada por: $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$, donde $(b_1, b_2, b_3) \neq 0$

12. Encuentre el punto sobre la linea de intersección de los planos $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ y $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ que es más cercano al origen.