Espacios vectoriales

Matemáticas para las ciencias aplicadas II

Aquino Chapa Armando Abraham y Merino Peña Kevin Ariel
15 de febrero de 2020

---

1. Escribe el vector cero en $M_{3x4}(\mathbb{R})$

Definición 0.1 (Matriz)**.** Una **Matriz** es un arreglo rectangular de elementos de un campo $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ de la forma

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

A los elementos $a_{i,j}$ con $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq i \leq m$ se les llama entradas de la matriz, a las matrices las denotamos por $\mathbb{A}$ *(letras mayúsculas)* y al conjunto de las matrices de mn se les denota por $M_{m\times n}(\mathbb{F})$

De esta manera tenemos que el vector cero de la matriz de 3 renglones por 4 columnas es aquella cuyas entradas (todas) son 0 *i. e.*

$$A_{3x4} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea V el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en $\mathbb{R}$. Muestre que V es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar para funciones.

Veamos que la derivada cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

Así hemos probado que la derivada abre sumas

$$\begin{aligned}(cf(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= cf'(x)\end{aligned}$$

De esta manera queda conolidado que en la funciónd derivada, los escalares son sacados de la función

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= 0\end{aligned}$$

Esto se vale para cualquier constante, en particular el 0

3. Prueba que el conjunto de las funciones pares en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial con suma y multiplicación por escalar usuales para funciones. Recuerde que una función es par si $\forall x \in Dom(f)$ entonces $f(-x) = f(x)$

Si tenemos en cuenta que $f(-t) + g(-t) = f(t) + g(t)$ y que si tenemos constantes siempre ocurre que $cf(-t) = cf(t)$ entonces ya hemos probado las dos primeras condiciones y para hallar el neutro basta con usar el 0 del cambo ($\mathbb{R}$) para notar que también lo manda al 0 vector.

4. Sea V el conjunto de pares ordenados de números reales. Si (a_1, a_2) y (b_1, b_2) son elementos de V y $\alpha \in \mathbb{R}$, definamos la suma y multiplicación escalar de la siguiente manera:

(i) $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$

(ii) $\alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, a_2)$.

¿Es V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones?

No puede ser un espacio vectorial porque si tenemos que

$$0(a_1, a_2) = (0, a_2)$$

para cumplir el cero vector, entonces se compliría para cualquier a_2 lo cual no es posible pues contradice la unicidad del cero.

5. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$ bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar usual.
Basta con revisar si en cada caso se encuentra cerrado bajo la multiplicación escalar y bajo la adición, además que siempre contenga al o

a) $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2\}$
Sí es linear porque lo satisface $t(3, 1, -1)$

b) $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| a_1 = a_3 + 2\}$
NO es linear porque no contiene al elemento neutro dentro del espacio vectorial.

c) $W_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| 2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0\}$
Sí es linear pues lo satisface $(2, -7, 1)$

d) $W_4 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| a_1 - 4a_2 - a_3 = 0\}$
Sí es linear pues lo satisface $(1, -4, -1)$

6. En cada caso diga si los vectores son generados por el conjunto S
a) $(2, -1, 1), S = \{(1, 0, 2), (-1, 1, 1)\}$
Sea α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.
Entonces $(2, -1, 1) = \alpha_1(1, 0, 2) + \alpha_2(-1, 1, 1) = (\alpha_1, 0, 2\alpha_1) + (-\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2$.
Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - (-1) &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema, obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Entonces:
$1(1,0,2) + (-1)(-1,1,1) = (1,0,2) + (1,-1,-1) = (2,-1,1)$
Cómo el sistema de ecuaciones si se satisface, el conjunto S SI genera al vector $(2,-1,-1)$

b) $(2,-1,1,3), S = \{(1,0,1,-1),(0,1,1,1)\}$
Sea α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.
Entonces: $(2,-1,1,3) = \alpha_1(1,0,1,-1) + \alpha_2(0,1,1,1) = (\alpha_1, 0, \alpha_1, -\alpha_1) + (0, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2$.
Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 &= 3 \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2 - 1 &= 1 \\ -(-1) + 2 &= 3 \end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 1 &= 1 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones verificamos si el conjunto S genera al vector. Entonces:

$$2(1,0,1,-1) + (-1)(0,1,1,1) = (2,0,2,-2) + (0,-1,-1,-1) = (2,-1,-1,-3)$$

Como el producto de los escalares por los elementos del conjunto S no forman al vector, podemos concluir que S NO genera a $(2,-1,1,3)$.

c) $2x^3 - x^2 + x + 3, S = \{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1\}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$