Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-1

Prof. Pedro Porras Flores
Ayud. Irving Hérnandez Rosas
Merino Peña Kevin Ariel
317031326

Proyecto I

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que estos proyectos se entregan de manera individual en la plataforma de google classroom.

1. De la definición de parábola deduzca de manera análoga como lo hicimos en la video-clase la ecuación para una parábola cuyo foco se encuentra en el eje x, es decir

$$y^2 = 4px.$$

Definición 1. El conjunto de los puntos del plano · ϶ · que están a la misma distancia de una recta dada D y de un punto $\vec{F}$, que no esté sobre D, recibe el nombre de **parábola**

Para deducir la ecuación de la parábola supongamos que la coordenadas de $\vec{F} = (p, 0)$ y que la recta D está descrita por $w = (-p, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$, Luego por la definición que hemos tomado de prábola tenemos que

$$\begin{aligned}
||\vec{u} - \vec{F}|| &= ||\vec{u} - \vec{w}|| && \text{Por definición de distancia} \\
||(x, y) - (p, 0)|| &= ||(x, y) - (-p, y)|| && \text{Los valores de dichos vectores} \\
||(x - p, y)|| &= ||(x + p, y - y)|| && \text{Restando de manera directa} \\
\sqrt{< (x - p, y), (x - p, y) >} &= \sqrt{< (x + p, 0), (x + p, 0) >} && \text{Definición de la norma en vectores} \\
\sqrt{(x - p)^2 + y^2} &= \sqrt{(x + p)^2 + (0)^2} && \text{Calculando el producto interior} \\
(x - p)^2 + y^2 &= (x + p)^2 + (0)^2 && \text{Factorizando} \\
x^2 - 2xp + p^2 + y^2 &= x^2 + 2xp + p^2 && \text{Por distributividad} \\
y^2 &= 4xp && \text{Agrupando y sumando términos semejantes}
\end{aligned}$$

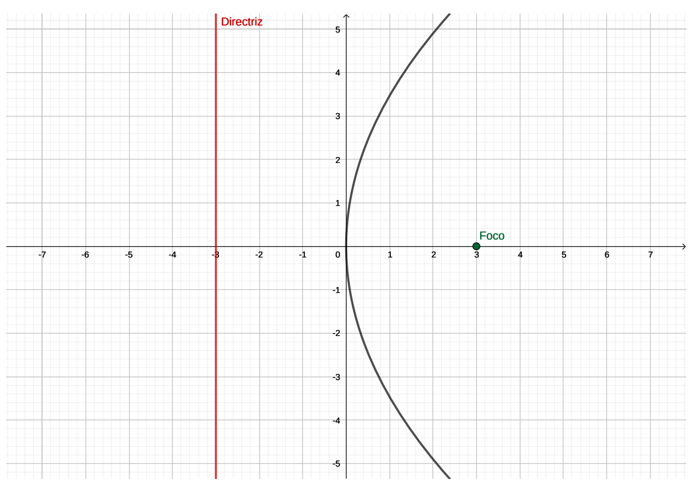

Figura 1: Parábola con foco sobre el eje x.

2. De igual manera que se hizo en clase deduzca la ecuación de una elipse cuyos focos se encuentran sobre el eje y, esto es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Definición 2. Dados dos puntos $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ del plano $\mathbb{R}^2$ tales que la suma de las diatancias de $\vec{u}$ a $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ es una constante positiva mayor que $d(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ recibe el nombre de **elipse** A $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ se les conoce como focos y la recta que los contiene se llama eje principal

Ahora vamos a deducir la equación de la **elipse**. Hagamos las siguientes suposiciones;

- a es la distancia entre los vértices $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$
- la suma de las distancias que separan a $\vec{u}$ de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ es $2a$
- $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{F}_1 = (0, c)$ y $\vec{F}_2 = (0, -c)$

por lo que, empleando la definición de la elipse

$$\begin{aligned}
||\vec{u} - \vec{F}_2|| + ||\vec{u} - \vec{F}_1|| &= 2a && \text{Definición de elipse} \\
||(x, y) - (0, -c)|| + ||(x, y) - (0, c)|| &= 2a && \text{Definición de los vectores} \\
||(x, y + c)|| + ||(x, y - c)|| &= 2a && \text{Suma en vectores} \\
\sqrt{x^2 + (y + c)^2} + \sqrt{x^2 + (y - c)^2} &= 2a && \text{Definición de norma de un vector} \\
\sqrt{x^2 + (y + c)^2} &= 2a - \sqrt{x^2 + (y - c)^2} && \text{Sumando inverso aditivo} \\
x^2 + (y + c)^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + x^2 + (y - c)^2 && \text{Elevando al cuadrado ambos lados} \\
x^2 + y^2 + 2yc + c^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + x^2 + y^2 - 2yc + c^2 && \text{Desarrollando el cuadrado} \\
2yc &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} - 2yc && \text{Eliminando términos iguales} \\
4yc &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} && \text{Sumando } 2yc \\
yc &= a^2 - a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} && \text{Dividiendo entre 4} \\
a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} &= a^2 - yc && \text{Despejando un término} \\
a^2(x^2 + (y - c)^2) &= a^4 - 2a^2yc + y^2c^2 && \text{Elevando ambos al cuadrado} \\
a^2(x^2 + y^2 - 2yc + c^2) &= a^4 - 2a^2yc + y^2c^2 && \text{Desarrolando los exponentes} \\
a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2yc + a^2c^2 &= a^4 - 2a^2yc + y^2c^2 && \text{Por distributividad} \\
a^2x^2 - y^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 && \text{Eliminando términos iguales} \\
a^2x^2 + a^2y^2 - y^2c^2 &= a^4 - a^2c^2 && \text{Despejando} \\
a^2x^2 + y^2(a^2 - c^2) &= a^2(a^2 - c^2) && \text{Factorizando adecuadamente}
\end{aligned}$$

Observemos que $0 < c < a \implies c^2 < a^2$ por lo que $a^2 - c^2 > 0$ definimos $b^2 = a^2 - c^2$ notemos que $b^2 > 0, b > 0$ entonces

$$\begin{aligned}
a^2x^2 + y^2(a^2 - c^2) &= a^2(a^2 - c^2) && \text{Del resultado que obtuvimos} \\
a^2x^2 + y^2b^2 &= a^2b^2 && \text{Usando la observación anterior} \\
\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} &= 1 && \text{Dividiendo todo por } a^2b^2
\end{aligned}$$

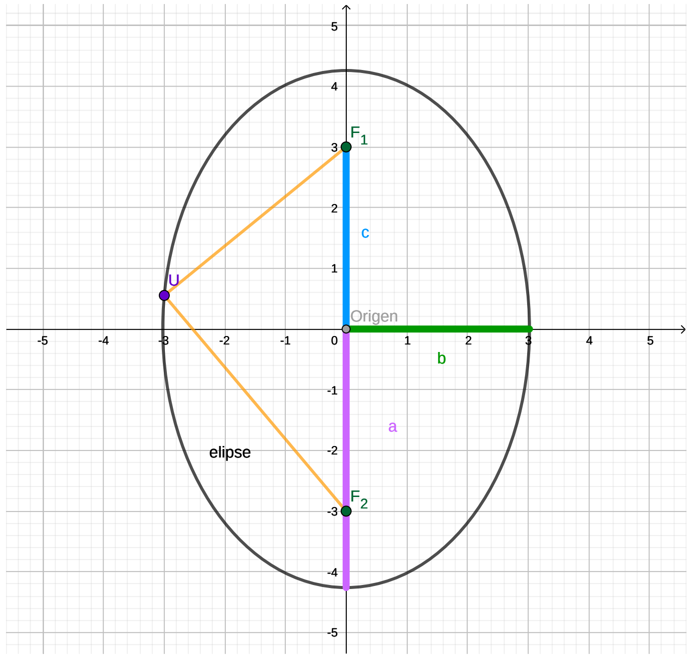

Figura 2: Elipse con focos sobre el eje y.

3. Deduzca la ecuación de la hipérbola de la definición, sin importar donde estén los focos, es decir ya sea que muestre:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ o } \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Definición 3. Para dos puntos datos $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ del plano $\mathbb{R}^2$, el conjunto de puntos $\vec{u} = (x, y)$ del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias que separan a los puntos $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ de $\vec{u}$ es una constante menor que $d(\vec{F_1}, \vec{F_2})$ es una **hipérbola**

Deduzcamos la ecuación de la hiérbola, cuyo centro es el origen con focos $\vec{F_1} = (c, 0)$ y $\vec{F_2} = (-c, 0)$
Supongamos que la distance del vértice al origen es a. Además la distancia de cada punto $\vec{u}$ a $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ es igual a $2a$
Para deducir la ecuación consideremos

$$\begin{aligned}
|||\vec{u} - \vec{F_1}|| - ||\vec{u} - \vec{F_2}||| &= 2a && \text{Por definición de hipérbola}\\
||\vec{u} - \vec{F_1}|| - ||\vec{u} - \vec{F_2}|| &= \pm 2a && \text{Definición de valor absoluto}\\
\sqrt{< \vec{u} - \vec{F_1}, \vec{u} - \vec{F_1} >} - \sqrt{< \vec{u} - \vec{F_2}, \vec{u} - \vec{F_2} >} &= \pm 2a && \text{Por definición de distancia}\\
\sqrt{< (x-c, y), (x-c, y) >} - \sqrt{< (x+c, y), (x+c, y) >} &= \pm 2a && \text{Así elegimos los vectores}\\
\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \pm 2a && \text{Aplicando producto interno}\\
\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} && \text{Despejando}\\
(x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 && \text{Elevando al cuadrado}\\
(x-c)^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 && \text{Eliminando t. iguales}\\
x^2 - 2xc + c^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 && \text{Desarrolando}\\
-2xc &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2xc && \text{Eliminando iguales}\\
-4xc &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} && \text{Despejando términos}\\
-xc &= a^2 \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} && \text{Dividiendo entre 4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-(xc + a^2) &= \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} && \text{Despejando términos} \\
a^4 + 2a^2cx + x^2c^2 &= a^2((x+c)^2 + y^2) && \text{Elevando al cuadrado} \\
a^4 + 2a^2cx + x^2c^2 &= a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) && \text{Desarrollando cuadrados} \\
a^4 + 2a^2cx + x^2c^2 &= a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 && \text{Distribuyendo} \\
(c^2 - a^2)x^2 &= a^2(c^2 - a^2) + a^2y^2 && \text{Despejando} \\
b^2x^2 &= a^2b^2 + a^2y^2 && \text{Despejando} \\
b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 && \text{Restando } a^2y^2 \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 && \text{Dividiendo por } a^2b^2
\end{aligned}
$$

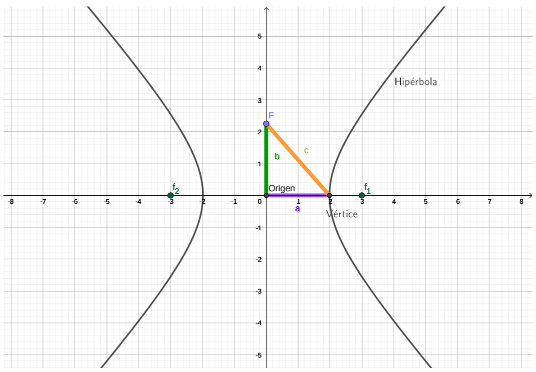

Figura 3: Hipérbola con focos sobre el eje x.