Matemáticas para las Ciencias II
Semestre 2020-2
Prof. Pedro Porras Flores
Ayud. Irving Hernández Rosas
Tarea Examen

Kevin Ariel Merino Peña[1]

Lema 1. Sea B $\in M_{nxm}(\mathbb{R}) \;\cdot\ni\cdot\;\; B=[b_{ij}]$ y B es la maatriz asociada a la función cuadrática $H:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tal que $H(h_1\dots h_n) = (h_1\dots h_n)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$ es definida positiva, entonces existe $M>0$ tal que, $\forall\vec{h}\in\mathbb{R}^n$

$$H(\vec{h}) \leq M\left|\left|\vec{h}\right|\right|^2$$

Demostración. Definimos $g(\vec{h}) = H(\vec{h})$ y consideremos $\left|\left|\vec{h}\right|\right| = 1$.Aquí observamos que g es continua, por lo que tenemos

$$H(\vec{h}) = H\left(\frac{\vec{h}}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\left|\left|\vec{h}\right|\right|\right) = \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2\left(\frac{\vec{h}}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\right) = \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2 g\left(\frac{\vec{h}}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\right)$$

así, g alcanza su **máximo** en un intervalo abierto de $\mathbb{R}^n$ i.e. $\exists M\in\mathbb{R}\;\;\cdot\ni\cdot$

$$g\left(\frac{\vec{h}}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\right) \leq M \implies \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2 g\left(\frac{\vec{h}}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\right) \leq \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2 M$$

Entonces habiendo hecho esta observación podemos concluir

$$H(\vec{h}) = H\left(\frac{\vec{h}}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\left|\left|\vec{h}\right|\right|\right) = \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2\left(\frac{\vec{h}}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\right) = \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2 g\left(\frac{\vec{h}}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\right) \leq \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2 M$$

Siguiendo la cadena de desigualdades, tenemos:

$$H(\vec{h}) \leq \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2 M$$

□

Lema 2. Sea $f:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^3$ y $\vec{x_0}\in U$ un punto crítico de f y el Hessiano $Hf(\vec{x_0})$ es definido negativo, entonces $\vec{x_0}$ tiene un máximo relativo

Demostración. Por hipótesis f es de clase $\mathcal{C}^3$, entonces tiene expasión de Taylor por un teorema mostrado en clases anteriores, i.e.

$$f(\vec{x_0}+\vec{h}) = f(\vec{x_0}) + Df(\vec{x_0}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j + R_2(\vec{x_0},\vec{h})$$

Además sabemos que $\vec{x_0}$ es un punto crítico, lo que significa $Df(\vec{x_0})=0$ y el segundo término de la expasión en Taylor es el Hessiano

$$f(\vec{x_0}+\vec{h}) - f(\vec{x_0}) = Hf(\vec{x_0})\vec{h} + R_2(\vec{x_0}\vec{h})$$

siempre y cuando se satisfaga la condición del residuo, esto es: si $h\to 0$, entonces $\dfrac{R_2(\vec{x_0},\vec{h})}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|^2}\to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{R_2(\vec{x_0},\vec{h})}{\left|\left|\vec{h}^2\right|\right|} = 0$$

[1]Número de cuenta 317031326

Esto anterior ocurre, por la defición de límite si:

$$\forall M > 0 \exists \delta(M) > 0 \quad \cdot \ni \cdot \quad 0 < \left|\left|\vec{h}\right|\right| < \delta \implies \left|\frac{R_2(\vec{x_0}, \vec{h})}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|^2}\right| < M$$

De lo último podemos extraer lo siguiente

$$\left|\frac{R_2(\vec{x_0}, \vec{h})}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|^2}\right| < M \implies R_2(\vec{x_0}, \vec{h}) \leq M \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2 \implies -M \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2 \leq R_2(\vec{x_0}, \vec{h}) \leq M \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2$$

además por hipótesis el hessiano de la función es definido negativo, entonces afirmamos que

$$\exists M > 0 \quad \cdot \ni \cdot \quad Hf(\vec{x_0}) \leq M \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2$$

, si sumamos estu último con la observación al valor absoluto hecha arriba, tendremos que

$$Hf(\vec{x_0}) + R_2(\vec{x_0}, h) \leq 2M \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2$$
$$f(x_0 + h) - f(x_0 + h) \leq 2M \left|\left|\vec{h}\right|\right|^2$$

$\square$