



Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores
Ayud. Irving Hernández Rosas

Tarea-examen I

Kevin Ariel Merino Peña¹



Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que la tarea-examen se entrega individual.

1. Muestre que $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \{c + bx + ax^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, es un espacio vectorial con la suma usual y la multiplicación por escalar usual, es decir:

$$\begin{aligned} +: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\ (a_1x^2 + b_1x + c_1, a_2x^2 + b_2x + c_2) &\mapsto (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2). \\ \mu: \mathbb{R} \times \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\ (\alpha, (a_1x^2 + b_1x + c_1)) &\mapsto (\alpha a_1)x^2 + (\alpha b_1)x + (\alpha c_1). \end{aligned}$$

Definición 1. Sea \mathbb{V} un conjunto no vacío con 2 operaciones definidas $(+, \mu)$ y un campo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ que cumple

- Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$, entonces $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{V}$, entonces $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- Existe $\vec{0} \in \mathbb{V}$ tal que $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{V}$
- Para todo $\vec{x} \in \mathbb{V}$ existe $\vec{y} \in \mathbb{V}$ tal que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$
- Para todo $\vec{x} \in \mathbb{V}$ se cumple que $\vec{1}\vec{x} = \vec{x}$ donde $\vec{1}$ es el neutro multiplicativo de $\mathbb{F}(\mathbb{R})$
- Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $\vec{x} \in \mathbb{V}$ se cumple $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
- Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $\vec{x} \in \mathbb{V}$ entonces $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$
- Sea $\alpha \in \mathbb{F}$ y $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$, entonces $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, por demostrar $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$, como los elementos de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ son de la forma $c + ax + bx^2$, entonces digamos que

$$\begin{aligned} \vec{x} &= a_1 + a_2x + a_3x^2 \\ \vec{y} &= b_1 + b_2x + b_3x^2 \end{aligned}$$

$\vec{x} + \vec{y} = (a_1 + a_2x + a_3x^2) + (b_1 + b_2x + b_3x^2)$	Por definición de los vectores
$\vec{x} + \vec{y} = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3)x^2$	Por definición de la suma
$\vec{x} + \vec{y} = (b_1 + a_1) + (b_2 + a_2)x + (b_3 + a_3)x^2$	Porque los elementos en \mathbb{R} conmutan
$\vec{x} + \vec{y} = (b_1 + b_2x + b_3x^2) + (a_1 + a_2x + a_3x^2)$	Por la definición de +
$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$	Por definición de los vectores

\therefore los elementos de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ conmutan, *i.e.* $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{V}$ por demostrar $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ como los elementos de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ son de la forma $c + ax + bx^2$, entonces digamos que

$$\begin{aligned} \vec{x} &= a_1 + a_2x + a_3x^2 \\ \vec{y} &= b_1 + b_2x + b_3x^2 \\ \vec{z} &= c_1 + c_2x + c_3x^2 \end{aligned}$$

¹317031326

$$\begin{aligned}
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= (a_1 + a_2x + a_3x^2 + b_1 + b_2x + b_3x^2) + c_1 + c_2x + c_3x^2 && \text{Por definición de los vectores} \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= ((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3)x^2) + c_1 + c_2x + c_3x^2 && \text{Por definición de los } + \text{ en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= ((a_1 + b_1) + c_1) + ((a_2 + b_2) + c_2)x + ((a_3 + b_3) + c_3)x^2 && \text{Por definición de los } + \text{ en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= (a_1 + (b_1 + c_1)) + (a_2 + (b_2 + c_2))x + (a_3 + (b_3 + c_3))x^2 && \text{Porque en } \mathbb{R} \text{ la suma es asociativa} \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= a_1 + (b_1 + c_1) + a_2x + (b_2 + c_2)x + a_3x^2 + (b_3 + c_3)x^2 && \text{Emplendo la definición de suma} \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= a_1 + (b_1 + c_1) + a_2x + (b_2x + c_2x) + a_3x^2 + (b_3x^2 + c_3x^2) && \text{Aplicando distributividad} \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) && \text{Definiendo la suma en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

\therefore la suma es asociativa en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Por demostrar: $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$. Proponemos $\vec{0} = 0 + 0x + 0x^2$.

Sea $\vec{x} \in \mathbb{V}$, entonces \vec{x} es de la forma

$$\vec{x} = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

$$\begin{aligned}
\vec{0} + \vec{x} &= (0 + 0x + 0x^2) + (a_1 + a_2x + a_3x^2) && \text{Por definición de } \vec{x}, \vec{0} \\
\vec{0} + \vec{x} &= (0 + a_1) + (0 + a_2)x + (0 + a_3)x^2 && \text{Por definición de } + \text{ en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
\vec{0} + \vec{x} &= a_1 + a_2x + a_3x^2 && \text{Porque los elementos en } \mathbb{R} \text{ tienen neutro aditivo} \\
\vec{0} + \vec{x} &= \vec{x} && \text{Por definición de } \vec{x}
\end{aligned}$$

\therefore $0 + 0x + 0x^2$ es el neutro aditivo en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Sea $\vec{x} \in \mathbb{V}$, por demostrar, existe $\vec{y} \in \mathbb{V}$ tal que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$, sabemos que los elementos de \mathbb{V} tienen la siguiente forma

$$\vec{x} = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

proponemos

$$\vec{y} = -a_1 - a_2x - a_3x^2$$

$$\begin{aligned}
\vec{x} + \vec{y} &= (a_1 + a_2x + a_3x^2) + (-a_1 - a_2x - a_3x^2) && \text{Por definición de los vectores} \\
\vec{x} + \vec{y} &= (a_1 - a_1) + (a_2 - a_2)x + (a_3 - a_3)x^2 && \text{Por definición de la suma en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
\vec{x} + \vec{y} &= (0) + (0)x + (0)x^2 && \text{Los elementos del campo tienen inverso aditivo} \\
\vec{x} + \vec{y} &= \vec{0} && \text{Por definición del neutro aditivo}
\end{aligned}$$

\therefore $-a_1 - a_2x - a_3x^2$ es el inverso aditivo de \vec{x}

Sea $\vec{x} \in \mathbb{V}$, por demostrar $\vec{1} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Proponemos $\vec{1} = 1$

$$\begin{aligned}
1 \cdot \vec{x} &= 1(a_1 + a_2x + a_3x^2) && \text{Por definición de los elementos de } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
1 \cdot \vec{x} &= (1 \cdot a_1) + (1 \cdot a_2)x + (1 \cdot a_3)x^2 && \text{Por definición del producto en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
1 \cdot \vec{x} &= a_1 + a_2x + a_3x^2 && \text{Puesto que los elementos del campo tienen neutro multiplicativo} \\
1 \cdot \vec{x} &= \vec{x} && \text{Por la definición de } \vec{x}
\end{aligned}$$

\therefore $\vec{1}$ es el neutro multiplicativo en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{F}(\mathbb{F} = \mathbb{R})$ y $\vec{x} \in \mathbb{V}$, por demostrar que $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)\vec{x} &= (\alpha\beta)(a_1 + a_2x + a_3x^2) && \text{Por definición de los elementos en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
(\alpha\beta)\vec{x} &= ((\alpha\beta)a_1) + ((\alpha\beta)a_2)x + ((\alpha\beta)a_3)x^2 && \text{Por definición del producto en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
(\alpha\beta)\vec{x} &= \alpha(\beta a_1) + \alpha(\beta a_2)x + \alpha(\beta a_3)x^2 && \text{Porque los elementos del campo asocian} \\
(\alpha\beta)\vec{x} &= \alpha(\beta\vec{x}) && \text{Aplicando la definición del producto}
\end{aligned}$$

\therefore en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ se cumple que $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{F}(\mathbb{F} = \mathbb{R})$ y $\vec{x} \in \mathbb{V}$, por demostrar que $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

$(\alpha + \beta)\vec{x} = (\alpha + \beta)(a_1 + a_2x + a_3x^2)$	Definición de elementos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha a_1 + \beta a_1 + \alpha a_2x + \beta a_2x + \alpha a_3x^2 + \beta a_3x^2$	Pues los elementos del campo tienen distributividad
$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha a_1 + \alpha a_2x + \alpha a_3x^2 + \beta a_1 + \beta a_2x + \beta a_3x^2$	Reordenando
$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha(a_1 + a_2x + a_3x^2) + \beta(a_1 + a_2x + a_3x^2)$	Por definición del producto
$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$	Por definición de los elementos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

\therefore en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ se cumple distributividad cuando un elemento se multiplica por la suma de dos escalares

Sea $\alpha \in \mathbb{V}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$, por demostrar que $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha((a_1 + a_2x + a_3x^2) + (b_1 + b_2x + b_3x^2))$	Por definición de los elementos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3)x^2)$	Por definición de la suma en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(a_1 + b_1) + \alpha(a_2 + b_2)x + \alpha(a_3 + b_3)x^2$	Por definición del producto en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = (\alpha a_1 + \alpha b_1) + (\alpha a_2 + \alpha b_2)x + (\alpha a_3 + \alpha b_3)x^2$	Porque los elementos del campo tienen distributividad
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(a_1 + a_2x + a_3x^2) + \alpha(b_1 + b_2x + b_3x^2)$	Agrupando de manera conveniente
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(\vec{x}) + \alpha(\vec{y})$	Por definición de dichos elementos

\therefore en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ se cumple que $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

2. Muestre que el conjunto $\beta = \{1, x, x^2\}$ es base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Definición 2. Sea \mathcal{S} un subconjunto de un espacio vectorial \mathcal{V} decimos que \mathcal{S} genera a \mathcal{V} si $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos de \mathcal{S} al generado de \mathcal{S} se le denota como $span(\mathcal{S}), <\mathcal{S}>, gen(\mathcal{S})$

Definición 3. Una **base** β de \mathbb{V} espacio vectorial es un subconjunto de \mathbb{V} $\cdot \ni \cdot$ β genera a \mathbb{V} y β es linealmente independiente

Diremos que el conjunto β genera a $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ si ocurre que

$$\alpha_1(p_1(x)) + \alpha_2(p_2(x)) + \alpha_3(p_3(x)) = \beta_1(1 + 0x + 0x^2) + \beta_2(0 + 1x + 0x^2) + \beta_3(0 + 0x + 1x^2)$$

donde $p_1, p_2, p_3 \in \beta$ por lo que, sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1(1 + 0x + 0x^2) + \alpha_2(0 + x + 0x^2) + \alpha_3(0 + 0x + x^2) = \beta_1(1 + 0x + 0x^2) + \beta_2(0 + x + 0x^2) + \beta_3(0 + 0x + x^2)$$

$$(\alpha_1 + 0\alpha_1x + 0\alpha_1x^2) + (0\alpha_2 + x\alpha_2 + 0\alpha_2x^2) + (0\alpha_3 + 0\alpha_3x + \alpha_3x^2) = (\beta_1 + 0\beta_1x + 0\beta_1x^2) + (0\beta_2 + \beta_2x + 0\beta_2x^2) + (0\beta_3 + 0\beta_3x + \beta_3x^2)$$

$$(\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3) + (0\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3)x + (0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3)x^2 = (\beta_1 + 0\beta_2 + 0\beta_3) + (0\beta_1 + \beta_2 + 0\beta_3)x + (0\beta_1 + 0\beta_2 + \beta_3)x^2$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0\alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & \alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & 0\alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0\beta_2 & 0\beta_3 \\ 0\beta_1 & \beta_2 & 0\beta_3 \\ 0\beta_1 & 0\beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \quad \text{Agrupando cada uno de los elementos en una matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Manteniendo sólo coeficientes}$$

De esta manera ha quedado claro que dichos coeficientes β existen, es más, podemos afirmar que son:

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \alpha_3 = \beta_3$$

$$\therefore <\beta> = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

Ahora veamos si β es linealmente independiente para lo que debe ocurrir

Definición 4. Sea S un subconjunto de V un espacio vectorial, decimos que S es linealmente independiente si la única solución para $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_n \vec{s}_n = 0$$

es que todos los coeficientes $\alpha_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sean todos 0

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1(1 + 0x + 0x^2) + \alpha_2(0 + x + 0x^2) + \alpha_3(0 + 0x + x^2) = \vec{0} \quad \beta \text{ como combinación lineal}$$

$$\alpha_1(1 + 0x + 0x^2) + \alpha_2(0 + x + 0x^2) + \alpha_3(0 + 0x + x^2) = 0 + 0x + 0x^2 \quad \text{Por definición de } \vec{0} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

$$(1\alpha_1 + 0\alpha_1x + 0\alpha_1x^2) + (0\alpha_2 + \alpha_2x + 0\alpha_2x^2) + (0\alpha_3 + 0\alpha_3x + \alpha_3x^2) = 0 + 0x + 0x^2 \quad \text{Distribuyendo}$$

$$(\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3) + (0\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3)x + (0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3)x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \quad \text{Agrupando}$$

Finalmente igualemos entrada con entrada

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0\alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & \alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & 0\alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Igualamos entrada por entrada}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Mateniendo sólo coeficientes}$$

Finalmente es fácil observar que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\therefore \quad \beta \text{ es linealmente independiente}$$

$$\therefore \quad \beta \text{ es base para } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

3. Muestre que la siguiente transformación es lineal.

$$T: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

$$T(f(x)) \mapsto xf'(x) + xf(2) + f(3)$$

Como el dominio de T es $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, entonces sean $p(x), q(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, y $\xi \in \mathbb{R}$ recordemos que los elementos de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tienen la forma

$$p(x) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2$$

$$q(x) = \delta_1 + \delta_2x + \delta_3x^2$$

$$\xi p(x) + q(x) = \xi(\alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2) + (\delta_1 + \delta_2x + \delta_3x^2) \quad \text{Por definición de } p(x), q(x)$$

$$\xi p(x) + q(x) = (\xi\alpha_1 + \xi\alpha_2x + \xi\alpha_3x^2) + (\delta_1 + \delta_2x + \delta_3x^2) \quad \text{Distribuyendo } \xi$$

$$\xi p(x) + q(x) = (\xi\alpha_1 + \delta_1) + (\xi\alpha_2 + \delta_2)x + (\xi\alpha_3 + \delta_3)x^2 \quad \text{Por definición de la suma en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} T(\xi p(x) + q(x)) &= \xi\alpha_2 + \delta_2 + 2x(\xi\alpha_3 + \delta_3) + x((\xi\alpha_1 + \delta_1) + 2(\xi\alpha_2 + \delta_2) + 4(\xi\alpha_3 + \delta_3)) + ((\xi\alpha_1 + \delta_1) + 3(\xi\alpha_2 + \delta_2) + 9(\xi\alpha_3 + \delta_3)) \\ &= \xi\alpha_2 + \delta_2 + 2x(\xi\alpha_3 + \delta_3) + x(\xi\alpha_1 + \delta_1) + 2x(\xi\alpha_2 + \delta_2) + 4x(\xi\alpha_3 + \delta_3) + (\xi\alpha_1 + \delta_1) + 3(\xi\alpha_2 + \delta_2) + 9(\xi\alpha_3 + \delta_3) \\ &= (\xi\alpha_1 + \delta_1) + 3(\alpha_2 + \delta_2) + 9(\xi\alpha_3 + \delta_3) + x(\xi\alpha_1 + \delta_1 + 3\xi\alpha_2 + 3\delta_2 + 4\xi\alpha_3 + 4\delta_3) + 2x^2(\xi\alpha_3 + \delta_3) \\ &= \xi(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3 + x(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3) + 2x^2\alpha_3) + \delta_1 + 3\delta_2 + 9\delta_3 + x(\delta_1 + 3\delta_2 + 4\delta_3) + 2x^2\delta_3 \\ &= \xi T(p(x)) + T(q(x)) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad T \text{ es transformación lineal, pues hemos visto que abre sumas } \langle p(x) + q(x) \rangle \text{ y saca escalares } \langle \xi \rangle$$

4. Determine el núcleo y la imagen de T .

Definición 5. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, la **imagen** de una transformación T es $Im(T) = \{T(\hat{x}) | \hat{x} \in V\}$

Definición 6. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, el **núcleo** de una transformación T es $Nu(T) = \{\hat{x} \in V | T(\hat{x}) = \hat{0}_W\}$

Para ello, tomemos un elemento en el dominio de T . Sea $p(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ $\cdot \cdot \cdot$ $p(x) = \eta_1 + \eta_2 x + \eta_3 x^2$ y $\vec{0}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}$

$T(p(x)) = \vec{0}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}$	Por definición del núcleo
$T(\eta_1 + \eta_2 x + \eta_3 x^2) = 0 + 0x + 0x^2$	Por definición de los elementos
$\eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 + x(\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3) + 2x^2\eta_3 = 0 + 0x + 0x^2$	Siguiendo la regla de correspondencia
$\eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 = 0$	Igualando entrada a entrada
$x(\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3) = 0x$	Igualando entrada a entrada
$2x^2\eta_3 = 0x^2$	Igualando entrada a entrada
$\eta_3 = 0$	De lo anterior
$\eta_1 + 3\eta_2 + 9(0) = 0$	Sistituyendo
$\eta_1 = -3\eta_2$	Sistituyendo

La solución puede escribirse como $(-3 + 1x + 0x^2)\eta_2$ por lo que el **núcleo** de la transformación $\{(-3 + 1x + 0x^2)\}$. Cabe mencionar que la nulidad de T es 1, pues esa es la dimensión del núcleo y además, T no es una transformación uno a uno pues el núcleo $\neq \vec{0}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}$

Para ver cuál es la imagen de la transformación lineal tomemos un elemento arbitrario en el dominio y otro en su imagen. Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, recordemos que los elementos de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tienen la forma

$$p(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$

$$q(x) = \delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2$$

$T(p(x)) = q(x)$	Por definición de la imagen
$T(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) = \delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2$	Por definición de los vectores
$\eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 + x(\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3) + 2x^2\eta_3 = \delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2$	Por definición de los vectores
$\eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 = \delta_1$	Igualando entrada a entrada
$x(\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3) = \delta_2 x$	Igualando segunda entrada
$2x^2\eta_3 = \delta_3 x^2$	Igualando tercera entrada
$\eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3 = \delta_1$	Igualando entrada a entrada
$\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3 = \delta_2$	Por el inverso multiplicativo de x
$2\eta_3 = \delta_3$	Por el inverso multiplicativo de x^2

\therefore los elementos de la imagen son de la forma $q(x) = \delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2$ donde

$$\delta_1 = \eta_1 + 3\eta_2 + 9\eta_3$$

$$\delta_2 = \eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3$$

$$\delta_3 = 2\eta_3$$

Es decir, todo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

-
5. Encuentre la matriz asociada a T con respecto a la base β , esto es $[T]_{\beta}$.
 6. ¿Cuál es el rango de $[T]_{\beta}$?
 7. La matriz $[T]_{\beta}$ es invertible, si sí muéstrela, si no argumente porque.
 8. ¿Cuales son los valores propios asociados a $[T]_{\beta}$?
 9. Determine los vectores propios asociados a cada valor propio.
 10. Muestre que el conjunto de los vectores propios es una base ordenada.
 11. Determine $Q \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, tal que $Q^{-1}[T]_{\beta}Q = D$, donde D es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son valores propios.
 12. Muestre que $\beta' = \{-3 + x, -3 - 13x + 4x^2, 1 + x\}$, es una base para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y además determine $[T]_{\beta'}$.