Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Proyecto V

Kevin Ariel Merino Peña[1]

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que estos proyectos se entregan de manera individual en la plataforma de google classroom.

1. Verifique el primer caso de la regla de la cadena de la composición $f \circ \vec{\gamma}$ para cada uno de los siguientes casos, esto es primero haga la composición y derive, y le luego use la regla de la cadena y vea que se llega al mismo resultado.

Teorema 1 (Regla de la cadena)**.** *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos, $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ dos funciones tales que g manda a U en V i.e. $f \circ g$. Supogamos que g es diferenciable en $\vec{x_0}$ y $D(f \circ g)(\vec{x_0}) = Df(g(\vec{x_0}))Dg(\vec{x_0})$.*

- ***Primer caso de la regla de la cadena***

  Supongamos $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una trayectoria diferenciable y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Sea $h(t) = f(\vec{\gamma})(t) = f(x(t), y(t), z(t)$ donde $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Entonces

  $$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

  esto es:

  $$\frac{dh}{dt} = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)$$

  donde $\vec{\gamma'}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

- ***Segundo caso de la regla de la cadena***

  Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Escribimos

  $$g(x,y,z) = (u(x,y,x), v(x,y,z), w(x,y,z) \quad y \quad h(x,y,z) = f(u(x,y,z), u(x,y,z), w(x,y,z))$$

  Entonces:

  $$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{pmatrix}$$

a) $f(x,y) = xy$, $\vec{\gamma}(t) = (e^t, \cos(t))$.

Tenemos que $f \circ \gamma(t) = e^t \cos(t)$ y su derivada es

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = \frac{d}{dt} e^t \cos(t) \qquad \text{Planteando la derivada}$$

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = e^t \frac{d}{dt}\cos(t) + \cos(t)\frac{d}{dt}e^t \qquad \text{Por la regla del producto en derivadas}$$

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = e^t(-\sin(t)) + \cos(t)e^t \qquad \text{Por nuestro curso de Cálculo I}$$

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = e^t \cos(t) - e^t \sin(t) \qquad \text{Conmutando la suma de funciones}$$

por otra parte, por el primer caso de la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(f \circ g) = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}$$

---

[1] Número de cuenta 317031326

entonces calculemos las siguientes derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(xy) = y \qquad \text{Por la regla del producto}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(xy) = x \qquad \text{Por la regla del producto}$$
$$\frac{dx}{dt}(e^t) = e^t \qquad \text{Por propiedades de la exponencial}$$
$$\frac{dy}{dt}(\cos(t)) = -\sin(t) \qquad \text{Por características de las trigonométricas}$$

Así, se tiene que

$$\frac{d}{dt}(f \circ g) = ye^t - x\sin(t)$$

y como $x = e^t$ y $y = \cos(t)$

$$\therefore \qquad \frac{d}{dt}(f \circ g) = \cos(t)e^t - e^t\sin(t)$$

b) $f(x, y) = xy$, $\vec{\gamma}(t) = (3t^2, t^3)$.

Tenemos que $f \circ \gamma(t) = e^{(3t^2)(t^3)} = e^{3t^5}$ y su derivada es

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = \frac{d}{dt}e^{3t^5} \qquad \text{Planteando la derivada}$$
$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = e^{3t^5}\frac{d}{dt}3t^5 \qquad \text{Por la regla de la derivada para la exponencial}$$
$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = e^{3t^5}(15t^4) \qquad \text{Derivando un monomio}$$
$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = 15t^4e^{3t^5} \qquad \text{Derivando un monomio}$$

por otra parte, por el primer caso de la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(f \circ g) = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}$$

entonces calculemos las siguientes derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(e^{xy}) = ye^{xy} \qquad \text{Por la regla de la exponencial}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(e^{xy}) = xe^{xy} \qquad \text{Por la regla de la exponencial}$$
$$\frac{dx}{dt}(3t^2) = 6t \qquad \text{Por propiedades de la derivada en exponentes}$$
$$\frac{dy}{dt}(t^3) = 3t^2 \qquad \text{Por propiedades de la derivada en exponentes}$$

Así, se tiene que

$$\frac{d}{dt}(f \circ g) = ye^{xy}(6t) - xe^{xy}(3t^2)$$

y como $x = 3t^2$ y $y = t^3$

$$\therefore \qquad \frac{d}{dt}(f \circ g) = 15t^4e^{3t^5}$$

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)\ln\sqrt{x^2 + y^2}$, $\vec{\gamma}(t) = (e^t, e^{-t})$.

Tenemos que $f \circ \gamma(t) = (e^{2t} + e^{-2t})\ln\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}$ y su derivada es

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)=\frac{d}{dt}((e^{2t}+e^{-2t})\ln\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}) && \text{Planteando la derivada}\\
&\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)=\frac{d}{dt}((e^{2t}+e^{-2t})\cdot\frac{1}{2}\ln(e^{2t}+e^{-2t})) && \text{Pues } \ln(a^c)=c\cdot\ln(a)\\
&\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)=\frac{1}{2}\ln(e^{2t}+e^{-2t})\cdot\frac{d}{dt}(e^{2t}+e^{-2t})+(e^{2t}+e^{-2t})\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\ln(e^{2t}+e^{-2t})\right) && \text{Por regla del producto en derivadas}\\
&\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)=\frac{1}{2}\ln(e^{2t}+e^{-2t})\cdot 2(e^{2t}-e^{-2t})+(e^{2t}+e^{-2t})\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\ln(e^{2t}+e^{-2t})\right) && \text{Derivando la primera parte}\\
&\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)=\frac{1}{2}\ln(e^{2t}+e^{-2t})\cdot 2(e^{2t}-e^{-2t})+\frac{e^{2t}+e^{-2t}(2e^{2t}-2e^{-2t})}{2\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}} && \text{Derivando la segunda parte}\\
&\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)=(e^{2t}-e^{-2t})(2\ln\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}+1) && \text{Factorizando } (e^{2t}-e^{-2t})
\end{aligned}
$$

por otra parte, por el primer caso de la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(f\circ g)=\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}$$

entonces calculemos las siguientes derivadas

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}((x^2+y^2)\ln\sqrt{x^2+y^2})&=x(2\ln\sqrt{x^2+y^2}+1) && \text{Haciendo la parcial con } x\\
\frac{\partial f}{\partial y}((x^2+y^2)\ln\sqrt{x^2+y^2})&=y(2\ln\sqrt{x^2+y^2}+1) && \text{El caso anterior es homólogo con } y\\
\frac{dx}{dt}(e^t)&=e^t && \text{Por propiedades de la exponencial}\\
\frac{dy}{dt}(-e^t)&=-e^{-t} && \text{Por propiedades de la exponencial}
\end{aligned}
$$

Así, se tiene que

$$\frac{d}{dt}(f\circ g)=x(2\ln\sqrt{x^2+y^2}+1)\cdot e^t+y(2\ln\sqrt{x^2+y^2}+1)\cdot(-e^{-t})$$

y como $x=e^t$ y $y=e^{-t}$

$$\therefore\qquad \frac{d}{dt}(f\circ g)=(e^{2t}-e^{-2t})(2\ln\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}+1)$$

d) $f(x,y)=xe^{x^2+y^2}$, $\vec{\gamma}(t)=(t,-t)$.

Tenemos que $f\circ\gamma(t)=te^{2t^2}$ y su derivada es

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)=\frac{d}{dt}te^{2t^2} && \text{Planteando la derivada}\\
&\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)=t\frac{d}{dt}e^{2t^2}+e^{2t^2}\cdot\frac{d}{dt}t && \text{Por propiedades de la multiplicación}\\
&\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)=t\frac{d}{dt}e^{2t^2}+e^{2t^2}\cdot\frac{d}{dt}t && \text{Por propiedades de la multiplicación}\\
&\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)=t2e^{2t^2}\frac{d}{dt}t^2+e^{2t^2} && \text{La derivada de la exponencial es ella misma por la derivada de su argumento}\\
&\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)=4t^2e^{2t^2}+e^{2t^2} && \text{Derivando un monomio}\\
&\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)=e^{2t^2}(4t^2+1) && \text{Empleando factor común}
\end{aligned}
$$

por otra parte, por el primer caso de la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(f\circ g)=\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}$$

entonces calculemos las siguientes derivadas

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(xe^{x^2+y^2}) &= e^{x^2+y^2}(1+2x^2) && \text{Aplicando la parcial a la función}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(xe^{x^2+y^2}) &= 2xye^{x^2+y^2} && \text{Aplicando la parcial a la función}\\
\frac{dx}{dt}(t) &= 1 && \text{Derivando un termino lineal}\\
\frac{dy}{dt}(-t) &= -1 && \text{Derivando un término lineal}
\end{aligned}
$$

Así, se tiene que

$$\frac{d}{dt}(f\circ g) = e^{x^2+y^2}(1+2x^2) - 2xye^{x^2+y^2}$$

y como $x = t$ y $y = -t$

$$\therefore \qquad \frac{d}{dt}(f\circ g) = e^{2t^2}(1+4t^2)$$

2. Sea $f(u,v,w) = (e^{u-w}, \cos(u+v) + \sin(u+v+w))$ y $g(x,y) = (e^x, \cos(y-x), e^{-y})$. Calcule $f\circ g$ y $\mathbf{D}(f\circ g)(0,0)$.

La composición está dada por

$$(f\circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(e^x, cos(y-x), e^{-y})$$

si aplicamos la regla de correspondencia de f, esto es:

$$\left(e^{e^x - e^{-y}}, \cos(\cos(y-x) + e^x) + \sin(e^x + \cos(y-x+e^{-y}))\right)$$

Empleando la regla de la cadena para el segundo caso tenemos que

$$D(f\circ g)(x,y) = D_f(g(x,y))D_g(x,y)$$

ahora calculemos la derivada (matriz) de f como

$$D_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
Df(u,v,w) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \end{pmatrix}\\
Df(u,v,w) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}e^{u-w} & \frac{\partial}{\partial v}e^{u-w} & \frac{\partial}{\partial w}e^{u-w} \\ \frac{\partial}{\partial u}(\cos(u+v)+\sin(u+v+w)) & \frac{\partial}{\partial v}(\cos(u+v)+\sin(u+v+w)) & \frac{\partial}{\partial w}(\cos(u+v)+\sin(u+v+w)) \end{pmatrix}\\
Df(u,v,w) &= \begin{pmatrix} e^{u-w} & 0 & -e^{u-w} \\ -\sin(u+v)+\cos(u+v+w) & -\sin(u+v)+\cos(u+v+w) & \cos(u+v+w) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Hagamos el mismo procedimiento para la función g

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial x} & \dfrac{\partial g_3}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \text{Planteando la jacobiana de la función } g$$

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} e^x & \dfrac{\partial}{\partial y} e^x \\ \dfrac{\partial}{\partial x} \cos(y-x) & \dfrac{\partial}{\partial y} \cos(y-x) \\ \dfrac{\partial}{\partial x} e^{-y} & \dfrac{\partial}{\partial y} e^{-y} \end{pmatrix} \qquad \text{Reemplazando los valores de } g_1, g_2, g_3$$

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ \sin(y-x) & -\sin(y-x) \\ 0 & -e^{-y} \end{pmatrix} \qquad \text{Aplicando las derivadas parciales}$$

Ahora evaluemos $Df(g(0,0)) =$, para ello veamos que

$$g(0,0) = (e^0, \cos(0-0), e^{-0}) \qquad \text{Por la regla de correspondencia}$$
$$g(0,0) = (1,1,1) \qquad \text{Evaluando dichos valores}$$

entonces evaluaremos $Df(1,1,1)$, esto es:

$$Df(1,1,1) = \begin{pmatrix} e^{1-1} & 0 & -e^{1-1} \\ -\sin(1+1) + \cos(1+1+1) & -\sin(1+1) + \cos(1+1+1) & \cos(1+1+1) \end{pmatrix}$$

$$Df(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\sin(2) + \cos(3) & -\sin(2) + \cos(3) & \cos(3) \end{pmatrix}$$

también evaluemos $Dg(0,0)$, *i.e.*

$$Dg(0,0) \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ \sin(0-0) & -\sin(0-0) \\ 0 & -e^{-0} \end{pmatrix} \qquad \text{Planteando la evaluación en la matriz de derivadas}$$

$$Dg(0,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Dando valor a las entradas}$$

Finalmente por el segundo caso de la regla de la cadena, sólo tenemos que multiplicar las matrices anteriores

$$D(f\circ g)(0,0) = D_f(g(0,0))D_g(0,0) \qquad \text{Por la regla de la cadena}$$

$$D(f\circ g)(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \\ -\sin(2)+\cos(3) & -\sin(2)+\cos(3) & \cos(3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Sustituyendo los valores correspondientes}$$

$$D(f\circ g)(0,0) = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+1 \\ \\ -\sin(2)+\cos(3)+0+0 & 0+0+\cos(3) \end{pmatrix} \qquad \text{Efectuando multiplicación de matrices}$$

$$D(f\circ g)(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \\ -\sin(2)+\cos(3) & \cos(3) \end{pmatrix} \qquad \text{Eliminando los 0}$$

3. Calcule la derivada direccional de las siguientes funciones en el punto y la dirección dada:

a) $f(x,y) = x + 2xy - 3y^2$, $(x_0,y_0) = (1,2)$ y $\vec{v} = \frac{3}{5}\hat{e}_1 + \frac{4}{5}\hat{e}_2$.

b) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0) = (1,0)$ y $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$.

c) $f(x,y) = e^x\cos(\pi y)$, $(x_0,y_0) = (0,-1)$ y $\vec{v} = -\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\hat{e}_1 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\hat{e}_2$.

d) $f(x,y) = xy^2 + x^3y$, $(x_0,y_0) = (4,-2)$ y $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\hat{e}_1 + \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\hat{e}_2$.

4. Encuentre un vector que sea normal a la curva $x^3 + xy + y^3 = 11$ en $(1,2)$.

5. El Capitán Ralphis se encuentra en problemas cerca del lado soleado de Mercurio. La temperatura del casco del barco cuando está en la ubicación (x,y,z) estará dada por $T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$, donde x,y,z se miden en metros. Actualmente está en $(1,1,1)$.

a) ¿En qué direcciones debería proceder para disminuir la temperatura más rápidamente?

b) Si el barco viaja a e^8 metros por segundo, ¿qué tan rápido será la disminución de la temperatura si avanza en esa dirección?

c) Desafortunadamente, el metal del casco se romperá si se enfría a una velocidad superior a $\sqrt{14}e^2$ grados por segundo. Describa el conjunto de posibles direcciones en las que puede proceder a bajar la temperatura a no más de esa tasa.