Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Proyecto III

Kevin Ariel Merino Peña[1]

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que estos proyectos se entregan de manera individual en la plataforma de google classroom.

1. Muestre que los siguientes conjuntos del plano son abiertos:

Definición 1. Sea $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $r \in \mathbb{R}^+$, la **bola** de radio r y centro en $\vec{x}_0$ es definida por el conjunto de todos los puntos $\vec{x}$ tal que $||\vec{x} - \vec{x}_0|| < r$.
Este conjunto es denotado como $Br(\vec{x}_0)$ es el conjunto de los puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ cuya distancia de $\vec{x}_0$ es menor que r

Definición 2. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que U es **conjunto abierto** si para cada $\vec{x}_0$, existe algún $r > 0$ tal que $Br(\vec{x}_0)$ está totalmente contenida en U, $Br(\vec{x}_0) \subset U$

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$ Sea $\vec{u} \in A$, entonces dicho vector tiene la siguiente forma $\vec{u} = (x_0, y_0)$,

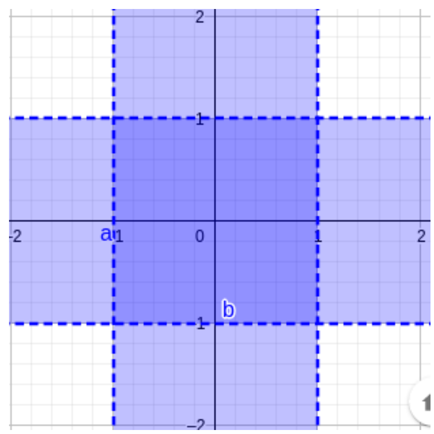

Figura 1: En el plano sólo la intersección es el conjunto A

además por ser elemento de A sus coordendas cumplen lo siguiente

$$-1 < x_0 < 1 \tag{♄}$$
$$-1 < y_0 < 1 \tag{♃}$$

Tomemos en cuenta los siguientes valores que serán de ayuda para calcular el radio de la Bola abierta

$$r_x = min\{1 - x_0, 1 + x_0\} \tag{δ}$$
$$r_y = min\{1 - y_0, 1 + y_0\} \tag{ξ}$$

Lyego, de ♄ tenemos que

$$x_0 < 1 \implies 0 < 1 - x_0 \qquad \text{Tomando la segunda parte de la desigualdad}$$
$$-1 < x_0 \implies 0 < 1 - x_0 \qquad \text{Tomando la primera parte de la desigualdad}$$

y por ♃ se obtiene

$$y_0 < 1 \implies 0 < 1 - y_0 \qquad \text{Tomando la segunda parte de la desigualdad}$$
$$-1 < y_0 \implies 0 < 1 - y_0 \qquad \text{Tomando la primera parte de la desigualdad}$$

Por lo tanto, decidimos tomar el radio de la bola como $r = min\{r_x, r_y\}$ así aseguraremos que siempre se encuentre dentro del conjunto A-

[1]317031326

Ahora mostremos que $B_r(\vec{u})$ está contenida en A, para ello sea $\vec{x} \in B_r(\vec{u})$ entonces dicho vector tendrá coordenadas digamos $\vec{x} = (x, y)$

$$\begin{aligned}
||\vec{x} - \vec{u}|| &< r && \text{Por la definición del radio dichos puntos distan menos que r} \\
\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} &< r && \text{Empleando la definición de norma} \\
(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 &< r^2 && \text{Pues la raíz es continua}
\end{aligned}$$

De la implicación anterior podemos concluir

$$\begin{aligned}
(x-x_0)^2 &< r^2 && \text{Por lo anterior y propiedad de la desigualdad en sumas} \\
\sqrt{(x-x_0)^2} &< \sqrt{r^2} && \text{Pues la raíz es continua} \\
|x-x_0| &< r && \text{Definición de valor absoluto} \\
|x-x_0| &< r \leq r_x && \text{Construcción de } r_x \\
|x-x_0| &< r_x && \text{Transitividad de la desigualdad} \\
-r_x < x - x_0 &< r_x && \text{Teorema de la desigualdad} \qquad (\wp)
\end{aligned}$$

y también observemos que

$$\begin{aligned}
r_x &\leq 1 - x_0 & 1 + x_0 &> r_x && \text{Por la elección del radio} \\
r_x &\leq 1 - x_0 & -1 - x_0 &\leq -r_x && \text{Multiplicando ambos lados de la segunda desigualdad por } -1
\end{aligned}$$

Si juntamos la observación anterior y $(\wp)$

$$\begin{aligned}
-1 - x_0 \leq -r_x < x - x_0 < r_x < 1 - x_0 && \text{Empleando ambas desigualdades} \\
-1 - x_0 < x - x_0 < 1 - x_0 && \text{Tomando sólo los valores adecuados} \\
-1 < x < 1 && \text{Sumamos en ambos lados } x_0
\end{aligned}$$

Haciendo lo mismo para y

$$\begin{aligned}
(y-y_0)^2 &< r^2 && \text{Por lo anterior y propiedad de la desigualdad en sumas} \\
\sqrt{(y-y_0)^2} &< \sqrt{r^2} && \text{Pues la raíz es continua} \\
|y-y_0| &< r && \text{Definición de valor absoluto} \\
|y-y_0| &< r \leq r_y && \text{Construcción de } r_y \\
|y-y_0| &< r_y && \text{Transitividad de la desigualdad} \\
-r_y < y - y_0 &< r_y && \text{Teorema de la desigualdad} \qquad (\vartheta)
\end{aligned}$$

y también observemos que

$$\begin{aligned}
r_y &\leq 1 - y_0 & 1 + y_0 &> r_y && \text{Por la elección del radio} \\
r_y &\leq 1 - y_0 & -1 - y_0 &\leq -r_y && \text{Multiplicando ambos lados de la segunda desigualdad por } -1
\end{aligned}$$

Si juntamos la observación anterior y (ϑ)

$$\begin{aligned}
-1 - y_0 \leq -r_y < y - y_0 < r_y < 1 - y_0 && \text{Empleando ambas desigualdades} \\
-1 - y_0 < y - y_0 < 1 - y_0 && \text{Tomando sólo los valores adecuados} \\
-1 < y < 1 && \text{Sumamos en ambos lados } y_0
\end{aligned}$$

De esta manera, en cualquier caso tenemos que $\vec{x} \in A \therefore B_r(\vec{u}) \subset A$
$\therefore A$ es abierto.

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, 0 < y\}$ Sean $(x,y) \in B$ y $r > 0$, por demostrar $Br(x,y) \subset B$.
La bola de radio más grande que podemos dar es $r = y$ y como $(x,y) \in B$, entonces $y > 0$.
Ahora queremos mostrar que

$$(x_1, y_1) \in Br(x,y) \implies (x_1, y_1) \in B$$

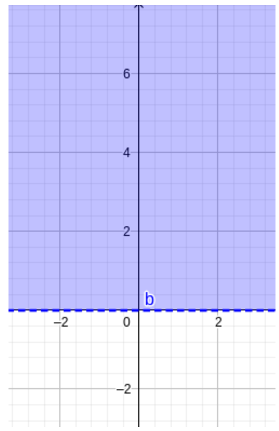

Figura 2: En el plano, los cuadrantes 1 y 2, son el conjunto B

Sea $(x_1, y_1) \in Br(x, y)$, entonces

$$\begin{aligned}
|y_1 - y| &= \sqrt{(y_1-y)^2} \leq \sqrt{(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2} \leq r \\
|y_1 - y| &= \sqrt{(y_1-y)^2} \leq \sqrt{(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2} \leq y \\
|y_1 - y| &\leq y \\
-y < y_1 - y &< y \\
0 < y_1 &< 2y
\end{aligned}$$

Por lo tanto $0 < y_1 \implies (x_1, y_1) \in B$, así que $Br(x, y) \subset B$,
$\therefore$ B es abierto.

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, 2 < x^2 + y^2 < 4\}$

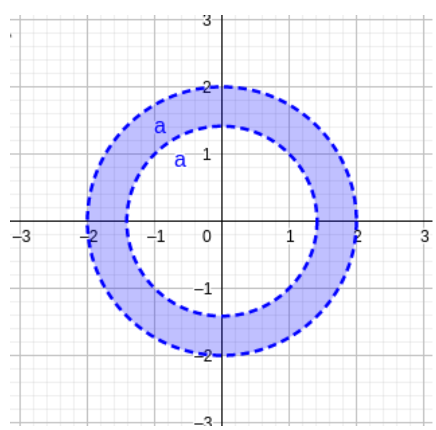

Figura 3: En el plano sólo la parte azul es el conjunto A

2. Calcule los siguientes. límites si existen:

Definición 3. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\vec{x}_0 \in A$, un punto de acumulación de A. Entonces se dice qe el límite de $f(\vec{x})$, cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{x}_0$, es $\vec{l} \in \mathbb{R}^m$ y se denota

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} = \vec{l} \qquad \text{o} \qquad f(\vec{x}) \to \vec{l}$$

Si $\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0$ tal que $\vec{x} \to \vec{x}_0$

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 y^2}$

Resultará conveniente recordar de nuestro curso de Matemáticas para las ciencias aplicadas I que

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{cos(\alpha)-1}{\alpha^2}=-\frac{1}{2}$$

. Entonces tomemos el siguiente cambio de variable $\alpha = xy$ y por el recordatorio anterior, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(xy)-1}{x^2y^2}=-\frac{1}{2}$$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}$

Para este segundo ejercicio, tomemos un cambio de variable $y=\sqrt{r}$ y $x=\sqrt{r}$ entonces $xy=r$ por lo que

$$\text{b)}\ \lim_{(r\to 0}\frac{\sin(r)}{r}$$

Y de nuestro curso de Matemáticas para las ciencias aplicadas I tenemos que $\lim_{\alpha\to 0}\frac{sin(\alpha)}{\alpha}=1$, por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}=1$$

c) $\lim_{x\to 1}(x^2,e^x)$

Tenemos un teorema enunciado en clase sobre las propiedades de los límites, una de ellas dice:

Definición 4. Si $f(\vec{x})=(f_1(\vec{x}),\ldots,f_m(\vec{x}))$ donde $f_i:A\to\mathbb{R}$, $i\in\{1,\ldots,m\}$ son las componentes de la función de f, entonces

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}f(\vec{x})=(l_1,l_2,\ldots,l_m)$$

si y sólo si

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}f_i(\vec{x})=l_i$$

para cada $i\in\{1,2,\ldots,m\}$

entonces si

$$\lim_{x\to 1}(x^2,e^x)=\left(\lim_{x\to 1}x^2,\lim_{x\to 1}e^x\right)$$
$$\lim_{x\to 1}(x^2,e^x)=\left((1)^2,e^1\right)$$
$$\lim_{x\to 1}(x^2,e^x)=(1,e)$$

3. Usando la formulación ϵ-δ muestre:

a) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}=0$

Sea $\epsilon>0$, notemos que

$$\left\|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}-0\right\|=\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right|\le\left|\frac{xyz}{xy}\right|=|z|$$
$$\left\|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}-0\right\|\le\sqrt{(z)^2}$$
$$\left\|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}-0\right\|\le\sqrt{(z)^2}\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

También observemos que $0 \leq x^2 \leq x^2+y^2+z^2$, entonces $0 \leq \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} \leq \dfrac{1}{z^2}$.
Así, también veamos qe $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = ||(x,y,z)||$ entonces

$$\left|\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} - 0\right|\right| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\left|\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} - 0\right|\right| \leq ||(x,y,z)||$$

Por lo que basta con tomar $\delta = \epsilon$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

Sea $\epsilon > 0$, consideremos

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right|\right| &= \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \\ &= \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

Por otro lado, veamos que $0 \leq |xy| \leq x^2+y^2$, entonces $0 < \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$0 < \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$0 < \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$0 < \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq ||(x,y)|| < \epsilon$$

Entonces sólo basta tomar $\delta = \epsilon$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(3x, x^2) = (6,4)$

Por lo mencionado anteriormente, $\lim_{x\to 2}(3x, x^2) = (6,4)$ puede expresarse como

$$(\lim_{x\to 2} 3x, \lim_{x\to 2} x^2) = (6,4)$$

por lo tanto, para el primer caso.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, consideremos

$$\begin{aligned}|f(x) - l| &= |3x-6| \\ |f(x) - l| &= 3\,|x-2|\end{aligned}$$

Observemos que $|x-a| = |x-2|$

Así, basta tomar $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$ □

Luego, para el segundo valor

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, veamos que

$$\begin{aligned}|f(x) - l| &= \left|x^2 - 4\right| \\ |f(x) - l| &= |x-2|\,|x+2|\end{aligned}$$

Por otra parte, sea $\delta_0 = 1$

$$\begin{aligned} |x-2| &< 1 \\ -1 < x-2 &< 1 \\ 3 < x+2 &< 5 \\ |x+2| &< 5 \end{aligned}$$

De esta manera basta tomar $\delta = min\left\{1, \frac{\epsilon}{5}\right\}$ $\square$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{|x|^3+y^2} & : \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Muestre que f es continua en $(0,0)$ Para averiguar quién es el límite, tomémonos traectorias distintas.
Deifinimos $y = g(x) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,g(x)) \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0) \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2y}{|x|^3+y^2} \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(0)}{|x|^3+(0)^2} \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Por otra parte, definamos $y = g(x) = x$ por lo que

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,g(x)) \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x) \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{|x|^3 + x^2} \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2\left(\frac{|x|^3}{x^2} + 1\right)} \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{|x|^3}{x^2} + 1} \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \frac{\lim_{x\to 0} x}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{|x|^3}{x^2} + 1\right)} \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \frac{\lim_{x\to 0} x}{\lim_{x\to 0} \frac{3\,|x|^2\,|x|'}{2x} + 1} && \text{Aplicando ley de L'Hôpital} \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \frac{\lim_{x\to 0} x}{\frac{3}{2}\lim_{x\to 0} \frac{|x|^2}{x} \cdot \lim_{x\to 0} |x|' + 1} && \text{Por la regla del producto} \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \frac{\lim_{x\to 0} x}{\frac{3}{2} \cdot 0\{-1,1\} + 1} && \text{Por definición de la derivada del valor absoluto} \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \frac{\lim_{x\to 0} x}{1} \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= 0
\end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$, consideremos $||f(x,y) - l||$, donde $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{|x|^3 + y^2}$ y $l = 0$, entonces

$$\left|\left|\frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2} - 0\right|\right| = \left|\frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2}\right| \leq \left|\frac{x^2 y}{x^2}\right|$$

luego, veamos que $\left|\dfrac{x^2y}{x^2}\right| = |y| = \sqrt{y^2}$ y como $0 \leq y^2 \leq y^2 + x^2$ tenemos que

$$\left|\frac{x^2y}{|x|^3+y^2}\right| \leq |y| = \sqrt{y^2} \qquad \text{Definición de valor absoluto}$$

$$\left|\frac{x^2y}{|x|^3+y^2}\right| \leq \sqrt{y^2} \qquad \text{Por la igualdad planteada arriba}$$

$$\left|\frac{x^2y}{|x|^3+y^2}\right| \leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{Por la observación del inicio}$$

$$\left|\frac{x^2y}{|x|^3+y^2}\right| \leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{Puesto que } \sqrt{x^2+y^2} = ||(x,y)||$$

$$\left|\frac{x^2y}{|x|^3+y^2}\right| \leq \sqrt{y^2} \leq ||(x,y)|| < \epsilon \qquad \text{Por hipótesis}$$

$$\left|\frac{x^2y}{|x|^3+y^2}\right| \leq ||(x,y)|| < \epsilon$$

Por lo tanto, basta tomar $\delta = \epsilon$:)