Espacios vectoriales

Matemáticas para las ciencias aplicadas II

Aquino Chapa Armando Abraham y Merino Peña Kevin Ariel
23 de febrero de 2020

---

1. Escribe el vector cero en $M_{3x4}(\mathbb{R})$

Definición 1 (Matriz)**.** Una **Matriz** es un arreglo rectangular de elementos de un campo $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ de la forma

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

A los elementos $a_{i,j}$ con $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq i \leq m$ se les llama entradas de la matriz, a las matrices las denotamos por $\mathbb{A}$ *(letras mayúsculas)* y al conjunto de las matrices de mn se les denota por $M_{m\times n}(\mathbb{F})$

De esta manera tenemos que el vector cero de la matriz de 3 renglones por 4 columnas es aquella cuyas entradas (todas) son 0 *i. e.*

$$A_{3x4} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea V el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en $\mathbb{R}$. Muestre que V es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar para funciones.

Veamos que la derivada cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} (f(x)+g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)+g'(x) \end{aligned}$$

Así hemos probado que la derivada abre sumas

$$\begin{aligned} (cf(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

De esta manera queda conolidado que en la función derivada, los escalares son sacados de la función

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto se vale para cualquier constante, en particular el 0

3. Prueba que el conjunto de las funciones pares en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial con suma y multiplicación por escalar usuales para funciones. Recuerde que una función es par si $\forall x \in Dom(f)$ entonces $f(-x) = f(x)$

Si tenemos en cuenta que $f(-t) + g(-t) = f(t) + g(t)$ y que si tenemos constantes siempre ocurre que $cf(-t) = cf(t)$ entonces ya hemos probado las dos primeras condiciones y para hallar el neutro basta con usar el 0 del cambo ($\mathbb{R}$) para notar que también lo manda al 0 vector.

4. Sea V el conjunto de pares ordenados de números reales. Si (a_1, a_2) y (b_1, b_2) son elementos de V y $\alpha \in \mathbb{R}$, definamos la suma y multiplicación escalar de la siguiente manera:

(i) $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$

(ii) $\alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, a_2)$.

¿Es V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones?

No puede ser un espacio vectorial porque si tenemos que

$$0(a_1, a_2) = (0, a_2)$$

para cumplir el cero vector, entonces se compliría para cualquier a_2 lo cual no es posible pues contradice la unicidad del cero.

5. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$ bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar usual.

Definición 2. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto de $\mathcal{V}$ espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ decimos que $\mathcal{U}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$ si cumple lo siguiente

I) $\vec{0} \in \mathcal{U}$

II) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{U} \implies \vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{U}$

III) Sea $\alpha \in \mathbb{F}, \vec{u} \in \mathcal{U} \implies \alpha \cdot \vec{u} \in \mathcal{U}$

a) $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2\}$

Veamos que W_1 contiene a $\vec{0}$ esto es que algún elemento en $W_1 = (0, 0, 0)$ por lo que

$$\begin{aligned}
(0,0,0) &= (a_1, a_2, a_3) && \text{Por } \vec{0} \in \mathbb{R}^3 \\
&= (3a_2, a_2, -a_2) && \text{Por } a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2 \\
&= (3(0), (0), -(0)) && \text{Para cualquier } a_2 \\
&= (0,0,0)
\end{aligned}$$

Por otra parte comprobemos que la suma está dentro de W_1

Sean $\hat{u} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\hat{v}(b_1, b_2, b_3) \in W_1$ la suma de vectores se realiza entrada a entrada por lo que

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) &= (3a_2, a_2, -a_2) + (3b_2, b_2, -b_2) \\
&= (3a_2 + 3b_2, a_2 + b_2, -a_2 - b_2) \\
&= (3(a_2 + b_2), (a_2 + b_2), -(a_2 + b_2))
\end{aligned}$$

Y como $a_1 + b_2 \in \mathbb{R}^3$ entonces $\hat{u} + \hat{v} \in W_1$ por lo que cumple $II)$

Finalmente veamos que si $k \in R, \hat{u} \in W_1 \implies k\hat{u} \in W_1$

$$\begin{aligned}
k(3a_2, a_2, -a_2) &\in W_1 \\
(3ka_2, ka_2, -ka_2) &\in W_1
\end{aligned}$$

Por lo tanto cumple $III)$

$\therefore W_1$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

b) $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| a_1 = a_3 + 2\}$

Veamos si $\hat{0} \in W_2$ si esto ocurriera entonces $(0,0,0) \in W_2$ l que significaría lo siguiente

$$\begin{aligned} (0,0,0) &= (a_3+2, a_2, a_3) && \text{Por que deben ser iguales entrada a entrada} \\ 0 &= a_3 + 2 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= a_3 \end{aligned}$$

Podemos observar que en esta situación, $a_3 = -2 \wedge a_3 = 0$ lo cual no es posible, dicha contradicción vino de suponer que $\hat{0} \in W_2$

$$\therefore \hat{0} \notin W_2$$

por lo que W_2 **no** es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

c) $W_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| 2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0\}$

Notemos que en la declaración de los elementos de W_3 podemos deducir que

$$a_3 = 7a_2 - 2a_1$$

entonces $\hat{u} \in W_3 \implies \hat{u} = (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1)$

Veamos que para cumplir I) el vector cero debería estar en W_1 *i.e.*

$$\begin{aligned} (0,0,0) &= (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \\ 0 &= a_1 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= 7a_2 - 2a_1 \end{aligned}$$

lo anterior se cumple si $a_2 = 0 = a_1$

$\therefore \hat{0} \in W_3$

Ahora, sean $\hat{u}, \hat{v} \in W_3 \implies \hat{u} = (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \wedge \hat{v} = (b_1, b_2, 7b_1 - 2b_1)$ y probemos que $\hat{u} + \hat{v} \in W_3$

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) + (b_1, b_2, 7b_1 - 2b_1) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 7a_2 + 7b_2 - 2a_1 - 2b_1) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 7(a_2 + b_2) - 2(a_1 + b_1)) \end{aligned}$$

y como $a_1 + b_1 \in R$ también se encontrarán dentro de W_3 por lo que la suma es cerrada en el conjunto W_3

Por último veamos que si $k \in \mathbb{R}, \hat{u} \in W_3 \implies k \cdot \hat{u} \in W_3$

$$\begin{aligned} k\hat{u} &= k(a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \\ k\hat{u} &= (ka_1, ka_2, 7ka_2 - 2ka_1) \end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir que cada uno de esos ka_1, ka_2 elementos estarán en $\mathbb{R}$ por lo que $k\hat{u}$ resultarán también estar en W_3

$\therefore W_3$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

d) $W_4 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| a_1 - 4a_2 - a_3 = 0\}$ De la definición de los elementos de W_4 se sigue que si $\hat{u}$ es un elemento de este conjunto, tendrá la forma $\hat{u} = (4a_2 + a_3, a_2, a_3)$ Comencemos averiguando si W_4 tiene elemento neutro, *i. e.*

$$\begin{aligned} (0,0,0) &= (4a_2 + a_3, a_2, a_3) \\ 0 &= 4a_2 + a_3 && \text{para ser iguales entrada a entrada} \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= a_3 \end{aligned}$$

Lo anterior ocurre cuando $a_2 = a_3 = 0$ por lo que $\hat{0} \in W_4$ y así cumple la condición *I)*

Siguiendo con la comprobación de sus propiedades como subespacio vectorial, tenemos que: Sean $\hat{u}, \hat{v} \in W_4 \implies \hat{u}+\hat{v} \in W_4$ *i. e.*

$$\begin{aligned} \hat{u} + \hat{v} &= (4a_2 + a_3, a_2, a_3) + (4b_2 + b_3, b_2, b_3) \\ &= (4a_2 + 4b_2 + b_3 + a_3, a_2 + b_2, a_3 + b_3) && \text{sumando entrada por entrada} \\ &= (4(a_2 + b_2) + (b_3 + a_3), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3)) && \text{asociatividad y distributividad en } \mathbb{R} \end{aligned}$$

y como $(a_2 + b_2) \in \mathbb{R}$ la suma de $\hat{u}, \hat{v} \in W_4$

Finalmente notemos que si $k \in \mathbb{R}, \hat{u} \in W_4 \implies k \cdot \hat{u} \in W_4$

$$\begin{aligned} k\hat{u} &= k(4a_2 + a_3, a_2, a_3) \\ &= (4ka_2 + ka_3, ka_2, ka_3) && \text{por distributividad} \end{aligned}$$

y $ka_2, k_3 \in \mathbb{R}$ entonces $k \cdot \hat{u} \in W_4$

$\therefore W_4$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

6. En cada caso diga si los vectores son generados por el conjunto S

Definición 3. Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ decimos que $\mathcal{S}$ genera a $\mathcal{V}$ si $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos de $\mathcal{S}$ al generado de s se le denota como $span(\mathcal{S}), < \mathcal{S} >, gen(\mathcal{S})$

a) $(2, -1, 1), S = \{(1, 0, 2), (-1, 1, 1)\}$
Sea α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.
Entonces $(2, -1, 1) = \alpha_1(1, 0, 2) + \alpha_2(-1, 1, 1) = (\alpha_1, 0, 2\alpha_1) + (-\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2$.
Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - (-1) &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema, obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Entonces:
$1(1,0,2)+(-1)(-1,1,1)=(1,0,2)+(1,-1,-1)=(2,-1,1)$
Cómo el sistema de ecuaciones si se satisface, el conjunto S SI genera al vector $(2,-1,-1)$

b) $(2,-1,1,3), S=\{(1,0,1,-1),(0,1,1,1)\}$
Sea α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.
Entonces: $(2,-1,1,3)=\alpha_1(1,0,1,-1)+\alpha_2(0,1,1,1)=(\alpha_1,0,\alpha_1,-\alpha_1)+(0,\alpha_2,\alpha_2,\alpha_2)=\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_1+\alpha_2$.
Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2\\ \alpha_2 &= -1\\ \alpha_1+\alpha_2 &= 1\\ -\alpha_1+\alpha_2 &= 3\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2\\ \alpha_2 &= -1\\ 2-1 &= 1\\ -(-1)+2 &= 3\end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2\\ \alpha_2 &= -1\\ 1 &= 1\\ 3 &= 3\end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones verificamos si el conjunto S genera al vector. Entonces:

$$2(1,0,1,-1)+(-1)(0,1,1,1)=(2,0,2,-2)+(0,-1,-1,-1)=(2,-1,-1,-3)$$

Como el producto de los escalares por los elementos del conjunto S no forman al vector, podemos concluir que S **NO** genera a $(2,-1,1,3)$.

c) $2x^3-x^2+x+3, S=\{x^3+x^2+x+1, x^2+x+1, x+1\}$

Sean α_1, α_2 y α_3 elementos del campo, si suponemos que $2x^3-x^2+x+3$ es generado por S implicará que existen dichos 3 elementos $\cdot \ni \cdot$

$$2x^3-x^2+x+3=\alpha_1(x^3+x^2+x+1)+\alpha_2(x^2+x+1)+\alpha_3(x+1)$$

$$\begin{aligned}\alpha_1x^3+\alpha_1x^2+\alpha_1x+\alpha_1\\ \alpha_2x^2+\alpha_2x+\alpha_2\\ \alpha_3x+\alpha_3\end{aligned}$$

Por lo que ocurre lo siguiente

$$2x^3-x^2+x+3=\alpha_1x^3+\alpha_1x^2+\alpha_1x+\alpha_1+\alpha_2x^2+\alpha_2x+\alpha_2+\alpha_3x+\alpha_3$$

$$
\begin{aligned}
2x^3 - x^2 + x + 3 \quad &= \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3 \\
&= x^3(\alpha_3) + x^2(\alpha_2 + \alpha_1) + x(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_3 &= 2 \\
\alpha_2 &= -1 - \alpha_1 \\
\alpha_2 &= -1 - 2 \\
\alpha_2 &= -3
\end{aligned}
$$

Ahora llegamos a una contradicción, puesto que el sistema de ecuaciones anterior implica que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3 = 1$ por lo que el conjunto S no genera $2x^3 - x^2 + x + 3$

d)

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, S = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}
$$

Recordemos que la suma de matrices se hace entrada por entrada eso es, si se van a sumar 2 matrices $A + B$ se hace de la forma $a_{ij} + b_{ij} \forall i, j \in A, B$ de tal manera que existen $a_{ij} + b_{ij} \forall i, i \in A, B$ de tal manera que existen $\alpha, \beta, \gamma \quad \cdot \ni \cdot$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + \gamma_{1,1} & \beta_{1,2} + \gamma_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$
-\alpha_{2,1} = -3 \implies \alpha = 3
$$

y luego

$$
\beta_{2,2} = 4 \implies \beta = 4
$$

y finalmente

$$
\gamma = 2 - \beta_{1,2} \implies \gamma = 4
$$

7. Determina cuando los siguientes conjuntos son linealmente dependientes o linealmente independientes.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \in \mathbb{R}$. Entonces:

$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ahora:

$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -3\alpha_1 \\ -2\alpha_1 & 4\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\alpha_2 & 6\alpha_2 \\ 4\alpha_2 & -8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente reglón y columna:

$$
\begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_2 & -3\alpha_1 + 6\alpha_2 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 & 4\alpha_1 - 8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\
-3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0 \\
-2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0 \\
4\alpha_1 - 8\alpha_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Multiplicamos dos veces el renglón 3 y lo sumamos al renglón 4. También multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 3.

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ -3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Por último multiplicamos tres veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 2:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = 2\alpha_2$.

Esto indica que α_1 depende de α_2. Por lo tanto, el conjunto $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \in M_{2x2}$ es **linealmente dependiente**.

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \in \mathbb{R}$. Entonces:

$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ahora:

$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -2\alpha_1 \\ -\alpha_1 & 4\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_2 & \alpha_2 \\ 2\alpha_2 & -4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente reglón y columna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & -2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 & 4\alpha_1 - 4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \\ 4\alpha_1 - 4\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicamos cuatro veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 4. También sumamos el renglón 1 al renglón 2:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos que $\alpha_2 = 0$, Entonces lo sustituimos en las demás ecuaciones:

$$\alpha_1 - 0 = 0$$
$$-2\alpha_1 + 0 = 0$$

Es claro notar que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$.
Cómo ambos valen 0, podemos concluir que el conjunto $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ es **linealmente independiente**.

c) $\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\} \in P_3(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.
Tenemos que: $0x^3 + 0x^2 + 0x + d = \alpha_1(x^3 + 2x^2) + \alpha_2(-x^2 + 3x + 1) + \alpha_3(x^3 - x^2 + 2x - 1)$

$x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = (\alpha_1 + \alpha_3)x^3 + (2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)x^2 + (3\alpha_2 + 2\alpha_3)x + (\alpha_2 - \alpha_3)$.
Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora multiplicamos -3 veces el renglón 4 y le sumamos el renglón 1:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos obtener que $\alpha_3 = 0$. Entonces sustituimos este valor en las ecuaciones.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 0\alpha_2 + 0 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - 0 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

De lo anterior deducimos que $\alpha_1 = 0$, por tanto:

$$\begin{aligned} 0 - \alpha_2 - 0 &= 0 \\ 0 + 3\alpha_2 + 0 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Podemos que concluir que el conjunto $\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\} \in P_3(\mathbb{R})$ es **linealmente independiente**.

d) $\{(1, -1, 2), (1, -2, 1), (1, 1, 4)\} \in \mathbb{R}^3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Entonces:
$\alpha_1(1, -1, 2) + \alpha_2(1, -2, 1) + \alpha_3(1, 1, 4) = (0, 0, 0)$. Ahora:

$(\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (\alpha_2, -2\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, 4\alpha_3) = (0,0,0)$. Ordenamos los escalares:

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3) = (0,0,0)$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0\\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0\\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos a "menos.[el] renglón 3. También sumamos el renglón 1 al renglón 2.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0\\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0\\ 0\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 2. Y al renglón 1 le sumamos el renglón 2.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0\\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0\\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Entonces nos queda el siguiente sistema.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 3\alpha_3 &= 0\\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

De esto podemos deducir que $\alpha_1 = -3\alpha_3$, $\alpha_2 = 2\alpha_3$ y $\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{2}$.

Entonces podemos concluir que el conjunto $\{(1,-1,2),(1,-2,1),(1,1,4)\} \in \mathbb{R}^3$ es **linealmente dependiente**.

e)$\{(1,-1,2),(2,0,1),(-1,2,-1)\} \in \mathbb{R}^3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.
$\alpha_1(1,-1,2) + \alpha_2(2,0,1) + \alpha_3(-1,2,-1) = (0,0,0)$. Ahora:

$(\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (2\alpha_2, 0\alpha_2, \alpha_2) + (-\alpha_3, 2\alpha_3, -\alpha_3) = (0,0,0)$. Ordenamos los escalares:

$(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = (0,0,0)$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= 0\\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0\\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Primero multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 3. Luego sumamos el renglón 2 al renglón 1.

$$
\begin{aligned}
0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\
-\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\
0\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 1:

$$
\begin{aligned}
0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\
-\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\
0\alpha_1 + 5\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0
\end{aligned}
$$

De lo anterior obtenemos que $\alpha_2 = 0$ y sustituimos en las demás ecuaciones.

$$
\begin{aligned}
0 + \alpha_3 &= 0 \\
-\alpha_1 + 2\alpha_3 &= 0 \\
\alpha_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Es fácilmente apreciar que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 0$

Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto $(1,-1,2), (2,0,1), (-1,2,-1) \in \mathbb{R}^3$ es **linealmente independiente**

Recuerde que $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \big| a_k \in \mathbb{R}\, \forall k = 0, 1, 2, \ldots n\}$

8. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son bases para $\mathbb{R}^3$?

Definición 4. Una **base** β de $\mathcal{V}$ espacio vectorial es un subconjunto de $\mathcal{V} \quad \cdot \ni \cdot \quad \beta$ genera a $\mathcal{V}$ y β es linealmente independiente

a) $S = \{(1,0,-1), (2,5,1), (0,-4,3)\}$ En primer lugar veamos quién es el generado del conjunto S, recordemos que un conjunto genera a otro $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos de $\mathcal{S}$

Sean $\alpha_1, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(1,0,-,) + \beta(2,5,1) + \gamma(0,-4,3)$$

$$
\begin{aligned}
\alpha(1,0,-1) + \beta(2,5,1) + \gamma(0,-4,3) &= (\alpha, 0, -\alpha) + (2\beta, 5\beta, \beta) + (0, -4\gamma, 3\gamma) \\
&= (\alpha + 2\beta, 5\beta - 4\gamma, -\alpha + \beta + 3\gamma)
\end{aligned}
$$

Necesitamos que cada uno de esos vectores pueda ser el valor de una posición de $\mathbb{R}^3$ por lo que debería verse como

$$\alpha(1,0,-1) + \beta(2,5,1) + \gamma(0,-4,3) = \delta(1,0,0) + \epsilon(0,1,0) + \eta(0,0,1)$$

De esta manera podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
\alpha + 2\beta + 0\gamma &= \delta + 0\epsilon + 0\eta \\
0\alpha + 5\beta - 4\gamma &= 0\delta + \epsilon + 0\eta \\
-\alpha + \beta + 3\gamma &= 0\delta + 0\epsilon + \eta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma \\ -\alpha & \beta & 3\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ 0\delta & 0\epsilon & \eta \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0\delta & 0\epsilon & \eta \end{array}\right)
$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0\delta & 0\epsilon & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta \end{array}\right) \qquad \text{1ra fila + 2da fila en } \textbf{3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta \end{array}\right) \qquad \text{2da fila} \cdot \frac{1}{5} \text{ en } \textbf{2da fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & \delta & -\frac{3}{5}\epsilon & \eta \end{array}\right) \qquad \text{2da fila} \cdot -3 + 3^{ra} \text{ fila en } \textbf{3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & \delta & -\frac{3}{5}\epsilon & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{array}\right) \qquad \text{3ra fila} \cdot \frac{5}{27} \textbf{ en 3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{array}\right) \qquad (\text{3ra fila} \cdot \frac{4}{5}) + 2^{da} \text{ fila } \textbf{en 2da fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{19}{27}\delta & -\frac{2}{9}\epsilon & -\frac{8}{27}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{array}\right) \qquad (\text{2da fila} \cdot -2) + 1^{a} \text{ fila } \textbf{en 1ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{19}{27}\delta & -\frac{2}{9}\epsilon & -\frac{8}{27}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{27} & -\frac{2}{9} & -\frac{8}{27} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{27} & \frac{1}{9} & \frac{4}{27} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{27} \end{array}\right) \qquad \text{Conservando sólo } \textbf{coeficientes}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{19}{27}\delta - \frac{2}{9}\epsilon - \frac{8}{27}\eta \\ \beta &= \frac{4}{27}\delta + \frac{1}{9}\epsilon + \frac{4}{27}\eta \\ \delta &= \frac{5}{27}\delta - \frac{1}{9}\epsilon + \frac{5}{27}\eta \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{S} \text{ genera a } \mathbb{R}^3$$

Ahora veamos si es linealmente independiente, lo cual ocurre si la única solución para

$$\alpha(1,0,-1) + \beta(2,5,1) + \gamma(0,-4,3) = 0$$

es que

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + 0\gamma &= 0 \\ 0\alpha + 5\beta - 4\gamma &= 0 \\ -\alpha + \beta + 3\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo dicho sistema obtenemos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0 \\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) \qquad \text{1ra fila + 2da fila en } \textbf{3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) \qquad \text{2da fila} \cdot \frac{1}{5} \text{ en } \textbf{2da fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & 0 \end{array}\right)$$

2da fila $\cdot -3 + 3^{ra}$ fila en **3ra fila**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma 0 & \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right)$$

3ra fila $\cdot \dfrac{5}{27}$ **en 3ra fila**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right)$$

(3ra fila $\cdot \dfrac{4}{5}) + 2^{da}$ fila **en 2da fila**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right)$$

(2da fila $\cdot -2) + 1^{a}$ fila **en 1ra fila**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Conservando sólo **coeficientes**

De esta manera podemos concluir que $\mathcal{S}$ es **linealmente independiente**

$$\therefore \mathcal{S} \text{ es Base para } \mathbb{R}^3$$

b) $\{(2,-4,1),(0,3,-1),(6,0,-1)\}$
c) $\{(1,2,-1),(1,0,2),(2,1,1)\}$