Matemáticas para las Ciencias I

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosa

Tarea I

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que la tarea se entrega en equipos de a lo más tres integrantes.

1. Escribe el vector cero en $M_{3x4}(\mathbb{R})$

2. Sea V el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en $\mathbb{R}$. Muestre que V es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar para funciones.

3. Prueba que el conjunto de las funciones pares en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial con suma y multiplicación por escalar usuales para funciones. Recuerde que una función es par si $\forall x \in Dom(f)$ entonces $f(-x) = f(x)$

4. Sea V el conjunto de pares ordenados de números reales. Si (a_1, a_2) y (b_1, b_2) son elementos de V y $\alpha \in \mathbb{R}$, definamos la suma y multiplicación escalar de la siguiente manera:

   (i) $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$

   (ii) $\alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, a_2)$.

   ¿Es V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones?

5. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$ bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar usual.

   a) $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2\}$

   b) $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| a_1 = a_3 + 2\}$

   c) $W_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| 2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0\}$

   d) $W_4 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| a_1 - 4a_2 - a_3 = 0\}$

6. En cada caso diga si los vectores son generados por el conjunto S

   a) $(2, -1, 1), S = \{(1, 0, 2), (-1, 1, 1)\}$

   b) $(2, -1, 1, 3), S = \{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 1)\}$

   c) $2x^3 - x^2 + x + 3, S = \{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1\}$

   d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

7. Determina cuando los siguientes conjuntos son linealmente dependientes o linealmente independientes.

   a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

   b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

   c) $\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\} \in P_3(\mathbb{R})$

   d) $\{(1, -1, 2), (1, -2, 1), (1, 1, 4)\} \in \mathbb{R}^3$

   e) $\{(1, -1, 2), (2, 0, 1), (-1, 2, -1)\} \in \mathbb{R}^3$

   Recuerde que $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \big| a_k \in \mathbb{R}\, \forall k = 0, 1, 2, \ldots n\}$

8. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son bases para $\mathbb{R}^3$?

   a) $\{(1, 0, -1), (2, 5, 1), (0, -4, 3)\}$

   b) $\{(2, -4, 1), (0, 3, -1), (6, 0, -1)\}$

   c) $\{(1, 2, -1), (1, 0, 2), (2, 1, 1)\}$

9. Diga si los siguientes $x^3 - 2x^2 + 1$, $4x^2 - x + 3$ y $3x - 2$ generan a $P_3(\mathbb{R})$

10. Prueba que las siguientes tranformaciones T son lineales y encuentra el núcleo $Nu(T)$ y la imagen $Im(T)$

    a) $\{T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, 2a_3)$

    b) $\{T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, 0, 2a_1 - a_2)$

    c) $\{T : M_{2x3}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2x2}(\mathbb{R})$ definido por

    $$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    d) $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})$ definida por $T(f(x)) = xf(x) + f'(x)$.

11. Sean β y γ las bases estándar para $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Para cada transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ encontrar su representación matricial.

    a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(a_1, a_2) = (2a_1 - a_2, 3a_1 + 4a_2, a_1)$

    b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 + 3a_2 - a_3, a_1 + a_3)$

    c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $T(a_1, a_2, a_3) = 2a_1 + a_2 - 3a_3$

    d) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(a_1, a_2, a_3) = (2a_2 + a_3, -a_1 + 4a_2 + 5a_3, a_1 + a_3)$

12. Para cada uno de los siguientes pares de bases β y β' para $\mathbb{R}^2$, encuentra la matriz de cambio de coordenadas que cambia las coordenadas de β' en las de β.

    a) $\beta = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ y $\beta' = \{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\}$

    b) $\beta = \{(-1, 3), (2, -1)\}$ y $\beta' = \{(0, 10), (5, 0)\}$

    c) $\beta = \{(2, 5), (-1, -3)\}$ y $\beta' = \{e_1, e_2\}$

    d) $\beta = \{(-4, 3), (2, -1)\}$ y $\beta' = \{(2, 1), (-4, 1)\}$

13. Encontrar la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan de las siguientes matrices

    a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

14. Calcular el determinante de las siguientes matrices

    a) $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

15. Para cada par de vectores u y v en $\mathbb{R}^2$, calcula el área del paralelogramo determinado por u y v.

    a) $\vec{u} = (3, -2)$ y $\vec{v} = (2, 5)$ b) $\vec{u} = (1, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 1)$ c) $\vec{u} = (4, -1)$ y $\vec{v} = (-6, -2)$

16. Para cada una de las siguientes matrices $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ determine los valores propios de A y para cada valor propio λ de A, encontrar el conjunto de vectores propios correspondientes a A

    a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

17. Encuentre los ejes principales de la siguiente superficie $x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 8xz - 36 = 0$ y con ello construya una matriz de rotación de tal manera que los ejes principales de la superficie coincidan con los con los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$. ¿Qué superficie es?

18. Aplique el proceso de Gram-Schmidt para construir una base ortonormal en cada caso

    a) $\{(1, 1), (1, 2)\}$ b) $\{(3, -3), (3, 1)\}$

    c) $\{(1, -1, -1), (0, 3, 3), (3, 2, 4)\}$ d) $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$

19. Encuentre la distancia de punto $(2, 1, -1)$ al plano $x - 2y + 2z + 5 = 0$

20. Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos $(3, 2, -1)$ $(1, -1, 2)$ que es paralelo a la recta $\ell = (1, -1, 0) + t(3, 2, -2)$