Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Tarea Examen III

Kevin Ariel Merino Peña[1]

27 de mayo de 2020

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden la tarea-examen se entregan de manera individual.

1.Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Muestre que $u = f(y - \kappa x)$ es una solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Hagamos una observación sobre u, pues debemos costruir a dicha función con el mismo dominio que f, *i.e.*

$$u(x, y) = f(y - \kappa x)$$

ahora empleemos la composición de funciones para designar una función auxiliar $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como sigue $g(x, y) = y - \kappa x$;

$$u(x, y) = (f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$$

luego, tomemos la derivada de u como

$$Du(x, y) = Df(g(x, y))$$

Veamos que, como g es una función escalar, entonces su derivada es ∇g y por la **regla de la cadena** en funciones compuestas, tenemos que

$$D_u(x, y) = D_f(g(x, y))\nabla g \tag{♀}$$

donde $\nabla g(x, y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (-\kappa, 1)$, luego de ♀ tenemos que

$$\begin{aligned}
D_u(x, y) &= f'(g(x, y)) \cdot (-\kappa, 1) && \text{Reemplazando lo que sabemos del gradiente} \\
D_u(x, y) &= -f'(g(x, y))\kappa, f'(g(x, y)) && \text{Reemplazando lo que sabemos del gradiente} \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= -f'(g(x, y))\kappa && \text{Derivando con respecto a } x \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= f'(g(x, y)) && \text{Derivando con respecto a } y \\
\kappa \frac{\partial u}{\partial y} &= f'(g(x, y))\kappa && \text{Multiplicando ambos miembros por el mismo real}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = -f'(g(x, y))\kappa + f'(g(x, y))\kappa = 0$$

siguiendo la cadena de igualdades, tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \square$$

2.Muestre que si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tienen segundas parciales mixtas continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1b}$$

Entonces ambas son armónicas.

---

[1]Número de cuenta 317031326

Recuerde. *Una función $u = u(x, y)$ con segundas derivadas parciales continuas que satisface la ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

se dice que es una función armónica.

Veamos qué ocurre para u cuando obtenemos sus segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad \text{Por definición de segunda derivada}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad \text{Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \text{Volviendo a escribir la ecuación}$$

por otra parte

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad \text{Por definición de segunda derivada}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad \text{Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \qquad \text{Reescribiendo}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \text{Ya que por hipótesis } u \text{ es de clase } \mathcal{C}^2$$

de las últimas dos observaciones podemos concluir que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) \qquad \text{Sumando ambos miembros}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{Así sabemos que } u \text{ es armónica}$$

luego, hagamos algunas observaciones para v

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad \text{Por definición de segunda derivada}$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad \text{Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann}$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \qquad \text{Volviendo a escribir la ecuación}$$

por otra parte

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad \text{Por definición de segunda derivada}$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad \text{Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann}$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \qquad \text{Reescribiendo}$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \qquad \text{Ya que por hipótesis } v \text{ es de clase } \mathcal{C}^2$$

de las últimas dos observaciones podemos concluir que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) \qquad \text{Sumando ambos miembros}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{Así sabemos que } v \text{ es armónica}$$

$\therefore$ ambas ecuaciones son armónicas si satisfacen las ecuaciones de *Cauchy-Riemann* y son de clase $\mathcal{C}^2$(que sus segundas derivadas mixtas sean iguales)

3. Encontrar la expansión a segundo orden de Taylor para $f(x,y) = y^2 e^{-x^2}$ en $(1,1)$

primero hallemos las derivadas de f

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 e^{-x^2}\right) = -2xy^2 e^{-x^2} \qquad \text{Derivando con respecto a } x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 e^{-x^2}\right) = 2ye^{-x^2} \qquad \text{Derivando con respecto a } y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-2xy^2 e^{-x^2}\right) = \left(4x^2 - 2\right) y^2 e^{-x^2} \qquad \text{Derivando con respecto a } xx$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2y^2 e^{-x^2}\right) = 2e^{-x^2} \qquad \text{Derivando con respecto a } yy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-2xy^2 e^{-x^2}\right) = -4xye^{-x^2} \qquad \text{Derivando con respecto a } xy, yx$$

Luego, usando el teorema (visto en clase) sobre la expansión a segundo orden de Taylor para $x_0 = (1,1)$ está dada por

$$f(h_1,h_2) = f(1,1) + h_1 f_x(1,1) + h_2 f_y(1,1) + \frac{1}{2}\left(h_1^2 f_{xx}(1,1) + h_1h_2 f_{xy}(1,1) + h_1h_2 f_{yx}(1,1) + h_2^2 f_{yy}(1,1)\right)$$

$$f(x,y) = f(1,1) + x f_x(1,1) + y f_y(1,1) + \frac{1}{2}\left(h_1^2 f_{xx}(1,1) + h_1h_2 f_{xy}(1,1) + h_1h_2 f_{yx}(1,1) + h_2^2 f_{yy}(1,1)\right)$$

$$f(x,y) = f(1,1) + x\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)} + y\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)} + \frac{1}{2}\left(h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(1,1)} + h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)} + h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\Big|_{(1,1)} + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(1,1)}\right)$$

$$f(x,y) = 1^2 e^{-1^2} + x\left(-2xy^2e^{-x^2}\right)\Big|_{(1,1)} + y\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)} + \frac{1}{2}\left(h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(1,1)} + h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)} + h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\Big|_{(1,1)} + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(1,1)}\right)$$

$$f(x,y) = \frac{1}{e} - \frac{2h_1}{e} + \frac{2h_2}{e} + \frac{1}{2}\left(h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(1,1)} + h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)} + h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\Big|_{(1,1)} + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(1,1)}\right)$$

$$f(x,y) = \frac{1}{e} - \frac{2h_1}{e} + \frac{2h_2}{e} + \frac{1}{2}\left(h_1^2(2e^{-1}) + h_1h_2(-4e^{-1}) + h_1h_2(-4e^{-1}) + h_2^2(2e^{-1})\right)$$

$$f(x,y) = \frac{1}{e} - \frac{2h_1}{e} + \frac{2h_2}{e} + \frac{h_1^2 - 4h_1h_2 + h_2^2}{e}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 - 4xy + y^2 + 4y - 1}{e}$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy + 5$. Encuentre los puntos críticos de f y determine si son: mínimos locales, máximos locales o puntos silla.
Para ello derivemos la función y localicemos los puntos críticos.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - y^2 - xy + 5\right) && \text{Derivando con respecto a } x\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y && \text{Aplicando la derivada}\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= -2y - x && \text{Aplicando la derivada con respecto a } y \text{ de } f\\
\\
0 &= 2x - y && \text{Igualemos a 0}\\
0 &= -2y - x
\end{aligned}$$

De la primera ecuación, obtenemos que $y = 2x$, sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos que $0 = -5x$, de esta manera sabemos que el único punto crítico que tiene f es $(x, y) = (0, 0)$. Ahora calculemos las segundas derivadas parciales para conocer el determinante del Hessiano

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -1\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -1\\
D\Big|_{(0,0)} &= 2 \cdot (-2) - 1 = -5 < 0
\end{aligned}$$

Entonces, usando el teorema visto en clase sobre el determinante del hessiano, ahora sabemos que $(0, 0)$ es un punto silla, es más es el único punto crítico de f.

5. Encuentre los valores máximos y mínimos absolutos de $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + 5$ sobre el disco unitario $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Primero calculemos la derivada de f e igualemos a 0 para encontrar los puntos críticos en el interior del disco.

$$\begin{aligned}
f_x &= 2x + 3y && \text{Derivando con respecto a } x\\
f_y &= 2y + 3x && \text{Derivando con respecto a } y\\
\\
0 &= 2x + 3y && \text{Igualando a 0}\\
0 &= 2y + 3x && \text{Igualando a 0}\\
\\
4\lambda^2 - 8\lambda - 5 &= 5 && \text{Ecuación para } \lambda
\end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que el único punto crítico es $\vec{x_0} = (0, 0)$, además notemos que $(0, 0) \in D$, ahora nombremos la función $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$, emplearemos multiplicadores de lagrange para resolver

$$\begin{aligned}
\nabla g &= (2x, 2y) && \text{Calculando el gradiente de } g\\
\nabla f &= (2x + 3y, 3x + 3y) && \text{Calculando el gradiente de } g\\
\\
2x + 3y &= 2x\lambda && \text{Igualando la primera entrada}\\
3x + 2y &= 2y\lambda && \text{Igualando la segunda entrada}\\
x^2 + y^2 &= 1 && \text{La restricción dada}
\end{aligned}$$

Notemos, de la primera ecuación que $x \neq 0$ porque eso implicaría que $y = 0$ lo cual no podría pasar por la restricción dada, entonces despejando λ obtenemos que

$$\lambda = \frac{2x+3y}{2x}$$

reemplazando en cualquier ecuación obtendremos que $x^2 = y^2 \implies x = \pm y$, ahora ocupemos esto en la restricción para obtener que $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, así tenemos que los puntos críticos son

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 7 + \frac{1}{2}$$
$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 + \frac{1}{2}$$
$$f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 + \frac{1}{2}$$
$$f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 7 + \frac{1}{2}$$

por lo tanto, el máximo absoluto es $7 + \frac{1}{2}$, en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

El mínimo absoluto es $4 + \frac{1}{2}$, en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6. Suponga que un pentágono está compuesto por un rectángulo coronado por un triángulo isósceles (ver Figura 1). Si la longitud del perímetro es fija, encuentre el área máxima posible.

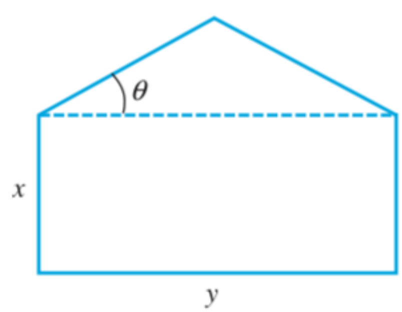

Figura 1: Maximizar el área para un perímetro dado.

7. Analice el comportamiento de las funciones en los puntos indicados. En la parte b el análisis depende de la constante C.

a) $z = x^2 - y^2 + 3xy$ en $(0, 0)$.

b) $z = x^2 - y^2 + Cxy$ en $(0, 0)$.

8. a) Encuentre la distancia mínima del origen en $\mathbb{R}^2$ a la superficie $z = \sqrt{x^2 - 1}$.

b) Haga lo mismo para la superficie $z = 6xy + 7$

9. Encuentre los puntos y valores críticos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones:

a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$, restringido a $x^2 + y^2 = 1$.

b) $f(x,y) = \cos(x^2 - y^2)$, restringido a $x^2 + y^2 = 1$.

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, restringido a $x + y = 1$.

d) $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, restringido a $x + y = \frac{\pi}{4}$.

10. Encuentre el máximo de la función $f(x,y) = xy$ sobre la curva $(x+1)^2 + y^2 = 1$

11. Encuentre la distancia más cercana del punto $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ al plano cuya ecuación está dada por: $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$, donde $(b_1, b_2, b_3) \neq 0$

12. Encuentre el punto sobre la linea de intersección de los planos $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ y $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ que es más cercano al origen.