



# Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores  
Ayud. Irving Hernández Rosas

## Tarea-examen I

Kevin Ariel Merino Peña<sup>1</sup>



Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que la tarea-examen se entrega individual.

1. Muestre que  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \{c + bx + ax^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ , es un espacio vectorial con la suma usual y la multiplicación por escalar usual, es decir:

$$\begin{aligned} +: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\ (a_1x^2 + b_1x + c_1, a_2x^2 + b_2x + c_2) &\mapsto (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2). \\ \mu: \mathbb{R} \times \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\ (\alpha, (a_1x^2 + b_1x + c_1)) &\mapsto (\alpha a_1)x^2 + (\alpha b_1)x + (\alpha c_1). \end{aligned}$$

**Definición 1.** Sea  $\mathbb{V}$  un conjunto no vacío con 2 operaciones definidas  $(+, \mu)$  y un campo  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  que cumple

- Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$ , entonces  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- Sean  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{V}$ , entonces  $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- Existe  $\vec{0} \in \mathbb{V}$  tal que  $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ ,  $\forall \vec{x} \in \mathbb{V}$
- Para todo  $\vec{x} \in \mathbb{V}$  existe  $\vec{y} \in \mathbb{V}$  tal que  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$
- Para todo  $\vec{x} \in \mathbb{V}$  se cumple que  $\vec{1}\vec{x} = \vec{x}$  donde  $\vec{1}$  es el neutro multiplicativo de  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$
- Para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  y  $\vec{x} \in \mathbb{V}$  se cumple  $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
- Para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  y  $\vec{x} \in \mathbb{V}$  entonces  $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$
- Sea  $\alpha \in \mathbb{F}$  y  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$ , entonces  $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , por demostrar  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ , como los elementos de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  son de la forma  $c + ax + bx^2$ , entonces digamos que

$$\begin{aligned} \vec{x} &= a_1 + a_2x + a_3x^2 \\ \vec{y} &= b_1 + b_2x + b_3x^2 \end{aligned}$$

$\vec{x} + \vec{y} = (a_1 + a_2x + a_3x^2) + (b_1 + b_2x + b_3x^2)$	Por definición de los vectores
$\vec{x} + \vec{y} = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3)x^2$	Por definición de la suma
$\vec{x} + \vec{y} = (b_1 + a_1) + (b_2 + a_2)x + (b_3 + a_3)x^2$	Porque los elementos en $\mathbb{R}$ conmutan
$\vec{x} + \vec{y} = (b_1 + b_2x + b_3x^2) + (a_1 + a_2x + a_3x^2)$	Por la definición de +
$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$	Por definición de los vectores

$\therefore$  los elementos de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  conmutan, i.e.  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

Sean  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{V}$  por demostrar  $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$  como los elementos de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  son de la forma  $c + ax + bx^2$ , entonces digamos que

$$\begin{aligned} \vec{x} &= a_1 + a_2x + a_3x^2 \\ \vec{y} &= b_1 + b_2x + b_3x^2 \\ \vec{z} &= c_1 + c_2x + c_3x^2 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>317031326

$$\begin{aligned}
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= (a_1 + a_2x + a_3x^2 + b_1 + b_2x + b_3x^2) + c_1 + c_2x + c_3x^2 && \text{Por definición de los vectores} \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= ((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3)x^2) + c_1 + c_2x + c_3x^2 && \text{Por definición de los } + \text{ en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= ((a_1 + b_1) + c_1) + ((a_2 + b_2) + c_2)x + ((a_3 + b_3) + c_3)x^2 && \text{Por definición de los } + \text{ en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= (a_1 + (b_1 + c_1)) + (a_2 + (b_2 + c_2))x + (a_3 + (b_3 + c_3))x^2 && \text{Porque en } \mathbb{R} \text{ la suma es asociativa} \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= a_1 + (b_1 + c_1) + a_2x + (b_2 + c_2)x + a_3x^2 + (b_3 + c_3)x^2 && \text{Emplendo la definición de suma} \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= a_1 + (b_1 + c_1) + a_2x + (b_2x + c_2x) + a_3x^2 + (b_3x^2 + c_3x^2) && \text{Aplicando distributividad} \\
(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) && \text{Definiendo la suma en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

$\therefore$  la suma es asociativa en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Por demostrar:  $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ . Proponemos  $\vec{0} = 0 + 0x + 0x^2$ .

Sea  $\vec{x} \in \mathbb{V}$ , entonces  $\vec{x}$  es de la forma

$$\vec{x} = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

$$\begin{aligned}
\vec{0} + \vec{x} &= (0 + 0x + 0x^2) + (a_1 + a_2x + a_3x^2) && \text{Por definición de } \vec{x}, \vec{0} \\
\vec{0} + \vec{x} &= (0 + a_1) + (0 + a_2)x + (0 + a_3)x^2 && \text{Por definición de } + \text{ en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
\vec{0} + \vec{x} &= a_1 + a_2x + a_3x^2 && \text{Porque los elementos en } \mathbb{R} \text{ tienen neutro aditivo} \\
\vec{0} + \vec{x} &= \vec{x} && \text{Por definición de } \vec{x}
\end{aligned}$$

$\therefore$   $0 + 0x + 0x^2$  es el neutro aditivo en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Sea  $\vec{x} \in \mathbb{V}$ , por demostrar, existe  $\vec{y} \in \mathbb{V}$  tal que  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ , sabemos que los elementos de  $\mathbb{V}$  tienen la siguiente forma

$$\vec{x} = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

proponemos

$$\vec{y} = -a_1 - a_2x - a_3x^2$$

$$\begin{aligned}
\vec{x} + \vec{y} &= (a_1 + a_2x + a_3x^2) + (-a_1 - a_2x - a_3x^2) && \text{Por definición de los vectores} \\
\vec{x} + \vec{y} &= (a_1 - a_1) + (a_2 - a_2)x + (a_3 - a_3)x^2 && \text{Por definición de la suma en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
\vec{x} + \vec{y} &= (0) + (0)x + (0)x^2 && \text{Los elementos del campo tienen inverso aditivo} \\
\vec{x} + \vec{y} &= \vec{0} && \text{Por definición del neutro aditivo}
\end{aligned}$$

$\therefore$   $-a_1 - a_2x - a_3x^2$  es el inverso aditivo de  $\vec{x}$

Sea  $\vec{x} \in \mathbb{V}$ , por demostrar  $\vec{1} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Proponemos  $\vec{1} = 1$

$$\begin{aligned}
1 \cdot \vec{x} &= 1(a_1 + a_2x + a_3x^2) && \text{Por definición de los elementos de } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
1 \cdot \vec{x} &= (1 \cdot a_1) + (1 \cdot a_2)x + (1 \cdot a_3)x^2 && \text{Por definición del producto en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
1 \cdot \vec{x} &= a_1 + a_2x + a_3x^2 && \text{Puesto que los elementos del campo tienen neutro multiplicativo} \\
1 \cdot \vec{x} &= \vec{x} && \text{Por la definición de } \vec{x}
\end{aligned}$$

$\therefore$   $\vec{1}$  es el neutro multiplicativo en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}(\mathbb{F} = \mathbb{R})$  y  $\vec{x} \in \mathbb{V}$ , por demostrar que  $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)\vec{x} &= (\alpha\beta)(a_1 + a_2x + a_3x^2) && \text{Por definición de los elementos en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
(\alpha\beta)\vec{x} &= ((\alpha\beta)a_1) + ((\alpha\beta)a_2)x + ((\alpha\beta)a_3)x^2 && \text{Por definición del producto en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
(\alpha\beta)\vec{x} &= \alpha(\beta a_1) + \alpha(\beta a_2)x + \alpha(\beta a_3)x^2 && \text{Porque los elementos del campo asocian} \\
(\alpha\beta)\vec{x} &= \alpha(\beta\vec{x}) && \text{Aplicando la definición del producto}
\end{aligned}$$

$\therefore$  en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  se cumple que  $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$

Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}(\mathbb{F} = \mathbb{R})$  y  $\vec{x} \in \mathbb{V}$ , por demostrar que  $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

$(\alpha + \beta)\vec{x} = (\alpha + \beta)(a_1 + a_2x + a_3x^2)$	Definición de elementos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha a_1 + \beta a_1 + \alpha a_2x + \beta a_2x + \alpha a_3x^2 + \beta a_3x^2$	Pues los elementos del campo tienen distributividad
$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha a_1 + \alpha a_2x + \alpha a_3x^2 + \beta a_1 + \beta a_2x + \beta a_3x^2$	Reordenando
$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha(a_1 + a_2x + a_3x^2) + \beta(a_1 + a_2x + a_3x^2)$	Por definición del producto
$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$	Por definición de los elementos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

$\therefore$  en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  se cumple distributividad cuando un elemento se multiplica por la suma de dos escalares

Sea  $\alpha \in \mathbb{V}$ ,  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$ , por demostrar que  $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha((a_1 + a_2x + a_3x^2) + (b_1 + b_2x + b_3x^2))$	Por definición de los elementos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3)x^2)$	Por definición de la suma en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(a_1 + b_1) + \alpha(a_2 + b_2)x + \alpha(a_3 + b_3)x^2$	Por definición del producto en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = (\alpha a_1 + \alpha b_1) + (\alpha a_2 + \alpha b_2)x + (\alpha a_3 + \alpha b_3)x^2$	Porque los elementos del campo tienen distributividad
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(a_1 + a_2x + a_3x^2) + \alpha(b_1 + b_2x + b_3x^2)$	Agrupando de manera conveniente
$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(\vec{x}) + \alpha(\vec{y})$	Por definición de dichos elementos

$\therefore$  en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  se cumple que  $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

2. Muestre que el conjunto  $\beta = \{1, x, x^2\}$  es base de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

**Definición 2.** Sea  $\mathcal{S}$  un subconjunto de un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  decimos que  $\mathcal{S}$  genera a  $\mathcal{V}$  si  $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$  es una combinación lineal de elementos de  $\mathcal{S}$  al generado de  $\mathcal{S}$  se le denota como  $span(\mathcal{S}), <\mathcal{S}>, gen(\mathcal{S})$

**Definición 3.** Una **base**  $\beta$  de  $\mathbb{V}$  espacio vectorial es un subconjunto de  $\mathbb{V}$  tal que  $\beta$  genera a  $\mathbb{V}$  y  $\beta$  es linealmente independiente

Diremos que el conjunto  $\beta$  genera a  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  si ocurre que

$$\alpha_1(p_1(x)) + \alpha_2(p_2(x)) + \alpha_3(p_3(x)) = \beta_1(1 + 0x + 0x^2) + \beta_2(0 + 1x + 0x^2) + \beta_3(0 + 0x + 1x^2)$$

donde  $p_1, p_2, p_3 \in \beta$  por lo que, sean  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1(1 + 0x + 0x^2) + \alpha_2(0 + x + 0x^2) + \alpha_3(0 + 0x + x^2) = \beta_1(1 + 0x + 0x^2) + \beta_2(0 + x + 0x^2) + \beta_3(0 + 0x + x^2)$$

$$(\alpha_1 + 0\alpha_1x + 0\alpha_1x^2) + (0\alpha_2 + x\alpha_2 + 0\alpha_2x^2) + (0\alpha_3 + 0\alpha_3x + \alpha_3x^2) = (\beta_1 + 0\beta_1x + 0\beta_1x^2) + (0\beta_2 + \beta_2x + 0\beta_2x^2) + (0\beta_3 + 0\beta_3x + \beta_3x^2)$$

$$(\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3) + (0\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3)x + (0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3)x^2 = (\beta_1 + 0\beta_2 + 0\beta_3) + (0\beta_1 + \beta_2 + 0\beta_3)x + (0\beta_1 + 0\beta_2 + \beta_3)x^2$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0\alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & \alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & 0\alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0\beta_2 & 0\beta_3 \\ 0\beta_1 & \beta_2 & 0\beta_3 \\ 0\beta_1 & 0\beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \quad \text{Agrupando cada uno de los elementos en una matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Manteniendo sólo coeficientes}$$

De esta manera ha quedado claro que dichos coeficientes  $\beta$  existen, es más, podemos afirmar que son:

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \alpha_3 = \beta_3$$

$$\therefore <\beta> = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

Ahora veamos si  $\beta$  es linealmente independiente para lo que debe ocurrir

**Definición 4.** Sea  $\mathbb{S}$  un subconjunto de  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial, decimos que  $\mathbb{S}$  es linealmente independiente si la única solución para  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_n \vec{s}_n = 0$$

es que todos los coeficientes  $\alpha_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$  sean todos 0

Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1(1 + 0x + 0x^2) + \alpha_2(0 + x + 0x^2) + \alpha_3(0 + 0x + x^2) = \vec{0} \quad \beta \text{ como combinación lineal}$$

$$\alpha_1(1 + 0x + 0x^2) + \alpha_2(0 + x + 0x^2) + \alpha_3(0 + 0x + x^2) = 0 + 0x + 0x^2 \quad \text{Por definición de } \vec{0} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

$$(1\alpha_1 + 0\alpha_1x + 0\alpha_1x^2) + (0\alpha_2 + \alpha_2x + 0\alpha_2x^2) + (0\alpha_3 + 0\alpha_3x + \alpha_3x^2) = 0 + 0x + 0x^2 \quad \text{Distribuyendo}$$

$$(\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3) + (0\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3)x + (0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3)x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \quad \text{Agrupando}$$

Finalmente igualemos entrada con entrada

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0\alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & \alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & 0\alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Igulemos entrada por entrada}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Mateniendo sólo coeficientes}$$

Finalmente es fácil observar que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

e  $\therefore \beta$  es linealmente independiente

$\therefore \beta$  es base para  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

3. Muestre que la siguiente transformación es lineal.

$$T: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

$$T(f(x)) \mapsto xf'(x) + xf(2) + f(3).$$

Como el dominio de  $T$  es  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , entonces sean  $p(x), q(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , y  $\xi \in \mathbb{R}$  recordemos que los elementos de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  tienen la forma

$$p(x) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2$$

$$q(x) = \delta_1 + \delta_2x + \delta_3x^2$$

$$\xi p(x) + q(x) = \xi(\alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2) + (\delta_1 + \delta_2x + \delta_3x^2) \quad \text{Por definición de } p(x), q(x)$$

$$\xi p(x) + q(x) = (\xi\alpha_1 + \xi\alpha_2x + \xi\alpha_3x^2) + (\delta_1 + \delta_2x + \delta_3x^2) \quad \text{Distribuyendo } \xi$$

$$\xi p(x) + q(x) = (\xi\alpha_1 + \delta_1) + (\xi\alpha_2 + \delta_2)x + (\xi\alpha_3 + \delta_3)x^2 \quad \text{Por definición de la suma en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

$$T(\xi p(x) + q(x)) = T((\xi\alpha_1 + \delta_1) + (\xi\alpha_2 + \delta_2)x + (\xi\alpha_3 + \delta_3)x^2) \quad \text{Aplicando en ambos lados T}$$

$$= (\xi\alpha_1 + \delta_1) + (\xi\alpha_2 + \delta_2)x + (\xi\alpha_3 + \delta_3)x^2 + ((\xi\alpha_1 + \delta_1) + (\xi\alpha_2 + \delta_2)(2) + (\xi\alpha_3 + \delta_3)(2)^2) + ((\xi\alpha_1 + \delta_1) + (\xi\alpha_2 + \delta_2)(3) + (\xi\alpha_3 + \delta_3)(3)^2)$$

$$= 0 + (\xi\alpha_2 + \delta_2) + 2(\xi\alpha_3 + \delta_3)x + (\xi\alpha_1 + \delta_1) + 2(\xi\alpha_2 + \delta_2) + 4(\xi\alpha_3 + \delta_3) + (\xi\alpha_1 + \delta_1) + 3(\xi\alpha_2 + \delta_2) + 9(\xi\alpha_3 + \delta_3)$$

$$= \xi\alpha_2 + \delta_2 + 2\xi\alpha_3x + 2\delta_3x + \xi\alpha_1 + \delta_1 + 2\xi\alpha_2 + 2\delta_2 + 4\xi\alpha_3 + 4\delta_3 + \xi\alpha_1 + \delta_1 + 3\xi\alpha_2 + 3\delta_2 + 9\xi\alpha_3 + 9\delta_3$$

$$= \xi\alpha_2 + 2\xi\alpha_3x + \xi\alpha_1 + 2\xi\alpha_2 + 4\xi\alpha_3 + \xi\alpha_1 + 3\xi\alpha_2 + 9\xi\alpha_3 + \delta_2 + 2\delta_3x + \delta_1 + 2\delta_2 + 4\delta_3 + \delta_1 + 3\delta_2 + 9\delta_3$$

$$= \xi(\alpha_2 + 2\alpha_3x + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3) + \delta_2 + 2\delta_3x + \delta_1 + 2\delta_2 + 4\delta_3 + \delta_1 + 3\delta_2 + 9\delta_3$$

$$= \xi(2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 13\alpha_3 + 2\alpha_3x) + \delta_2 + 2\delta_3x + \delta_1 + 2\delta_2 + 4\delta_3 + \delta_1 + 3\delta_2 + 9\delta_3$$

$$= \xi(2\alpha_1 + 6\alpha_2 + \alpha_3(13 + 2x)) + 2\delta_1 + 6\delta_2 + \delta_3(13 + 2x)$$

$$= \xi T(p(x)) + T(q(x))$$

$\therefore$   $T$  es transformación lineal, pues hemos visto que saca escalares  $(\xi)$  y abre sumas  $p(x) + q(x)$

4. Determine el núcleo y la imagen de  $T$ .

**Definición 5.** Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal, la **imagen** de una transformación  $T$  es  $Im(T) = \{T(\hat{x}) | \hat{x} \in V\}$

**Definición 6.** Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal, el **núcleo** de una transformación  $T$  es  $Nu(T) = \{\hat{x} \in V | T(\hat{x}) = \hat{0}_W\}$

Veamos quién es el núcleo de la transformación, para lo que seap  $p(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  y  $\vec{0}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}$  entonces

$T(p(x)) = \vec{0}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}$	Por definición de núcleo
$T(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) = \vec{0}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}$	$p(x)$ tiene esa forma
$(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2)' + (\alpha_1 + \alpha_2(2) + \alpha_3(2)^2) + (\alpha_1 + \alpha_2(3) + \alpha_3(3)^2) = \vec{0}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}$	Regla de correspondencia de T
$\alpha_2 + 2\alpha_3 x + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3 = \vec{0}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}$	Desarrollando
$2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 13\alpha_3 + 2\alpha_3 x = \vec{0}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}$	Agrupando términos semejantes
$2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 13\alpha_3 + 2\alpha_3 x = 0 + 0x + 0x^2$	Por definición de neutro aditivo en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 13\alpha_3 = 0$	Obtenemos las siguientes ecuaciones
$2\alpha_3 x = 0x$	Igualamos entradas

Luego como  $\alpha_3 = 0$  si sustituimos en la primera ecuación, obtenemos que

$2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 13\alpha_3 = 0$	De lo anterior
$2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 13(0) = 0$	Por la segunda ecuación resultante
$2\alpha_1 + 6\alpha_2 = 0$	Propiedades de los números reales
$2\alpha_1 = -6\alpha_2$	Sumando el inverso aditivo de $6\alpha_1$
$\alpha_1 = -3\alpha_2$	Multiplicando por el inverso multiplicativo de 2

$\therefore$  el **Núcleo** de T es de la siguiente forma  $-3\alpha + \alpha x$ , resulta importante observar que como  $\alpha_3 = 0$  entonces no tendrá término cuadrático, sólo lineal y además estará dado en términos del término constante

Para ver quién es la imgaen de  $T$ , tomemos un elemento en el dominio, apliquemos la tranformación lineal y veamos qué forma tiene el resultante.

Sean  $p(x), q(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , entonces tienen la siguiente forma

$$p(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$

$$p(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$$

$T(p(x)) = q(x)$	Planteando la igualdad
$T(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$	Por la forma de sus elementos
$2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 13\alpha_3 + 2\alpha_3 x = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$	Aplicando la regla de correspondencia
$2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 13\alpha_3 = \beta_1$	Igualamos entradas
$2\alpha_3 x = \beta_2 x$	Por el término lineal

De lo anterior podemos concluir que la imagen de  $T$  son todos los elementos cuyo término constante sea un elemento en  $\mathbb{R}$ , también que el término lineal puede tener cualquier real, pero no habrá término cuadrático.

$$\therefore Im(T) = \beta_1 + \beta_2 x$$

- 
5. Encuentre la matriz asociada a  $T$  con respecto a la base  $\beta$ , esto es  $[T]_{\beta}$ .
  6. ¿Cuál es el rango de  $[T]_{\beta}$ ?
  7. La matriz  $[T]_{\beta}$  es invertible, si sí muéstrela, si no argumente porque.
  8. ¿Cuales son los valores propios asociados a  $[T]_{\beta}$ ?
  9. Determine los vectores propios asociados a cada valor propio.
  10. Muestre que el conjunto de los vectores propios es una base ordenada.
  11. Determine  $Q \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ , tal que  $Q^{-1}[T]_{\beta}Q = D$ , donde  $D$  es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son valores propios.
  12. Muestre que  $\beta' = \{-3 + x, -3 - 13x + 4x^2, 1 + x\}$ , es una base para  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  y además determine  $[T]_{\beta'}$ .