Espacios vectoriales

Matemáticas para las ciencias aplicadas II

Aquino Chapa Armando Abraham y Merino Peña Kevin Ariel

23 de febrero de 2020

---

1. Escribe el vector cero en $M_{3x4}(\mathbb{R})$

Definición 1 (Matriz)**.** Una **Matriz** es un arreglo rectangular de elementos de un campo $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ de la forma

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

A los elementos $a_{i,j}$ con $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq i \leq m$ se les llama entradas de la matriz, a las matrices las denotamos por $\mathbb{A}$ *(letras mayúsculas)* y al conjunto de las matrices de mn se les denota por $M_{m\times n}(\mathbb{F})$

De esta manera tenemos que el vector cero de la matriz de 3 renglones por 4 columnas es aquella cuyas entradas (todas) son 0 *i. e.*

$$A_{3x4} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea V el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en $\mathbb{R}$. Muestre que V es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar para funciones.

Veamos que la derivada cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} (f(x)+g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)+g'(x) \end{aligned}$$

Así hemos probado que la derivada abre sumas

$$\begin{aligned} (cf(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

De esta manera queda conolidado que en la funciónd derivada, los escalares son sacados de la función

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto se vale para cualquier constante, en particular el 0

3. Prueba que el conjunto de las funciones pares en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial con suma y multiplicación por escalar usuales para funciones. Recuerde que una función es par si $\forall x \in Dom(f)$ entonces $f(-x)=f(x)$

Si tenemos en cuenta que $f(-t)+g(-t)=f(t)+g(t)$ y que si tenemos constantes siempre ocurre que $cf(-t)=cf(t)$ entonces ya hemos probado las dos primeras condiciones y para hallar el neutro basta con usar el 0 del cambo ($\mathbb{R}$) para notar que también lo manda al 0 vector.

4. Sea V el conjunto de pares ordenados de números reales. Si (a_1,a_2) y (b_1,b_2) son elementos de V y $\alpha \in \mathbb{R}$, definamos la suma y multiplicación escalar de la siguiente manera:

(i) $(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2b_2)$

(ii) $\alpha(a_1,a_2)=(\alpha a_1,a_2)$.

¿Es V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones?

No puede ser un espacio vectorial porque si tenemos que

$$0(a_1,a_2)=(0,a_2)$$

para cumplir el cero vector, entonces se compliría para cualquier a_2 lo cual no es posible pues contradice la unicidad del cero.

5. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$ bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar usual.

Definición 2. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto de $\mathcal{V}$ espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ decimos que $\mathcal{U}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$ si cumple lo siguiente

I) $\vec{0} \in \mathcal{U}$

II) $\forall \vec{u},\vec{v} \in \mathcal{U} \implies \vec{u}+\vec{v} \in \mathcal{U}$

III) Sea $\alpha \in \mathbb{F}, \vec{u} \in \mathcal{U} \implies \alpha \cdot \vec{u} \in \mathcal{U}$

a) $W_1=\{(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3 \big| a_1=3a_2 \text{ y } a_3=-a_2\}$

Veamos que W_1 contiene a $\vec{0}$ esto es que algún elemento en $W_1=(0,0,0)$ por lo que

$$\begin{aligned}
(0,0,0) &= (a_1,a_2,a_3) && \text{Por } \vec{0}\in\mathbb{R}^3\\
&= (3a_2,a_2,-a_2) && \text{Por } a_1=3a_2 \text{ y } a_3=-a_2\\
&= (3(0),(0),-(0)) && \text{Para cualquier } a_2\\
&= (0,0,0)
\end{aligned}$$

Por otra parte comprobemos que la suma está dentro de W_1

Sean $\hat{u}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\hat{v}(b_1,b_2,b_3)\in W_1$ la suma de vectores se realiza entrada a entrada por lo que

$$\begin{aligned}
(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3) &= (3a_2,a_2,-a_2)+(3b_2,b_2,-b_2)\\
&= (3a_2+3b_2,a_2+b_2,-a_2-b_2)\\
&= (3(a_2+b_2),(a_2+b_2),-(a_2+b_2))
\end{aligned}$$

Y como $a_1+b_2\in\mathbb{R}^3$ entonces $\hat{u}+\hat{v}\in W_1$ por lo que cumple $II)$

Finalmente veamos que si $k\in R, \hat{u}\in W_1 \implies k\hat{u}\in W_1$

$$\begin{aligned}
k(3a_2,a_2,-a_2)&\in W_1\\
(3ka_2,ka_2,-ka_2)&\in W_1
\end{aligned}$$

Por lo tanto cumple $III)$

$\therefore W_1$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

b) $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| a_1 = a_3 + 2\}$

Veamos si $\hat{0} \in W_2$ si esto ocurriera entonces $(0,0,0) \in W_2$ l que significaría lo siguiente

$$(0,0,0) = (a_3+2, a_2, a_3) \qquad \text{Por que deben ser iguales entrada a entrada}$$
$$0 = a_3 + 2$$
$$0 = a_2$$
$$0 = a_3$$

Podemos obsevar que en esta situación, $a_3 = -2 \wedge a_3 = 0$ lo cual no es posible, dicha contradicción vino de suponer que $\hat{0} \in W_2$

$$\therefore \hat{0} \notin W_2$$

por lo que W_2 **no** es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

c) $W_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| 2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0\}$

Notemos que en la declaración de los elementos de W_3 podemos deducir que

$$a_3 = 7a_2 - 2a_1$$

entonces $\hat{u} \in W_3 \implies \hat{u} = (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1)$

Veamos que para complir $I)$ el vector cero debería estar en W_1 *i.e.*

d) $W_4 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| a_1 - 4a_2 - a_3 = 0\}$

Sí es linear pues lo satisface $(1, -4, -1)$

6. En cada caso diga si los vectores son generados por el conjunto S

a) $(2, -1, 1), S = \{(1,0,2), (-1,1,1)\}$

Sea $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Entonces $(2,-1,1) = \alpha_1(1,0,2) + \alpha_2(-1,1,1) = (\alpha_1, 0, 2\alpha_1) + (-\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2$.

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2$$
$$\alpha_2 = -1$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

Ahora:

$$\alpha_1 - (-1) = 2$$
$$\alpha_2 = -1$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

Al resolver el sistema, obtenemos:

$$\alpha_1 = 1$$
$$\alpha_2 = -1$$
$$1 = 1$$

Entonces:

$1(1,0,2) + (-1)(-1,1,1) = (1,0,2) + (1,-1,-1) = (2,-1,1)$

Cómo el sistema de ecuaciones si se satisface, el conjunto S SI genera al vector $(2,-1,-1)$

b) $(2,-1,1,3), S=\{(1,0,1,-1),(0,1,1,1)\}$

Sea $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Entonces: $(2,-1,1,3)=\alpha_1(1,0,1,-1)+\alpha_2(0,1,1,1)=(\alpha_1,0,\alpha_1,-\alpha_1)+(0,\alpha_2,\alpha_2,\alpha_2)=\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_1+\alpha_2$.
Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1&=2\\ \alpha_2&=-1\\ \alpha_1+\alpha_2&=1\\ -\alpha_1+\alpha_2&=3\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\alpha_1&=2\\ \alpha_2&=-1\\ 2-1&=1\\ -(-1)+2&=3\end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned}\alpha_1&=2\\ \alpha_2&=-1\\ 1&=1\\ 3&=3\end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones verificamos si el conjunto S genera al vector. Entonces:

$$2(1,0,1,-1)+(-1)(0,1,1,1)=(2,0,2,-2)+(0,-1,-1,-1)=(2,-1,-1,-3)$$

Como el producto de los escalares por los elementos del conjunto S no forman al vector, podemos concluir que S NO genera a $(2,-1,1,3)$.

c) $2x^3-x^2+x+3, S=\{x^3+x^2+x+1, x^2+x+1, x+1\}$

Sean α_1, α_2 y α_3 elementos del campo, si suponemos que $2x^3-x^2+x+3$ es generado por S implicará que existen dichos 3 elementos $\cdot \ni \cdot$

$$2x^3-x^2+x+3=\alpha_1(x^3+x^2+x+1)+\alpha_2(x^2+x+1)+\alpha_3(x+1)$$

$$\begin{aligned}\alpha_1x^3+\alpha_1x^2+\alpha_1x+\alpha_1\\ \alpha_2x^2+\alpha_2x+\alpha_2\\ \alpha_3x+\alpha_3\end{aligned}$$

Por lo que ocurre lo siguiente

$$2x^3-x^2+x+3=\alpha_1x^3+\alpha_1x^2+\alpha_1x+\alpha_1+\alpha_2x^2+\alpha_2x+\alpha_2+\alpha_3x+\alpha_3$$

$$\begin{aligned}2x^3-x^2+x+3\quad&=\alpha_1x^3+\alpha_1x^2+\alpha_1x+\alpha_1+\alpha_2x^2+\alpha_2x+\alpha_2+\alpha_3x+\alpha_3\\ &=x^3(\alpha_3)+x^2(\alpha_2+\alpha_1)+x(\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1)+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\end{aligned}$$

$$\alpha_3 = 2$$
$$\alpha_2 = -1 - \alpha_1$$
$$\alpha_2 = -1 - 2$$
$$\alpha_2 = -3$$

Ahora llegamos a una contradicción, puesto que el sistema de ecuaciones anterior implica que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3 = 1$ por lo que el conjunto S no genera $2x^3 - x^2 + x + 3$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, S = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

Recordemos que la suma de matrices se hace entrada por entrada eso es, si se van a sumar 2 matrices $A + B$ se hace de la forma $a_{ij} + b_{ij} \forall i, j \in A, B$ de tal manera que existen $a_{ij} + b_{ij} \forall i, i \in A, B$ de tal manera que existen $\alpha, \beta, \gamma \quad \cdot \ni \cdot$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + \gamma_{1,1} & \beta_{1,2} + \gamma_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$-\alpha_{2,1} = -3 \implies \alpha = 3$$

y luego

$$\beta_{2,2} = 4 \implies \beta = 4$$

y finalmente

$$\gamma = 2 - \beta_{1,2} \implies \gamma = 4$$