Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Tarea Examen III

Kevin Ariel Merino Peña[1]

25 de mayo de 2020

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden la tarea-examen se entregan de manera individual.

1.Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Muestre que $u = f(y - \kappa x)$ es una solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Hagamos una observación sobre u, pues debemos costruir a dicha función con el mismo dominio que f, *i.e.*

$$u(x, y) = f(y - \kappa x)$$

, ahora empleemos la composición de funciones para designar una función auxiliar en f como sigue $t(x, y) = y - \kappa x$;

$$u(x, y) = f(t(x, y))$$

2.Muestre que si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tienen segundas parciales mixtas continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1b}$$

Entonces ambas son armónicas.

Recuerde. *Una función $u = u(x, y)$ con segundas derivadas parciales continuas que satisface la ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

se dice que es una función armónica.

3. Encontrar la expansión a segundo orden de Taylor para $f(x, y) = y^2 e^{-x^2}$ en $(1, 1)$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 5$. Encuentre los puntos críticos de f y determine si son: mínimos locales, máximos locales o puntos silla.

5. Encuentre los valores máximos y mínimos absolutos de $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + 5$ sobre el disco unitario $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

6. Suponga que un pentágono está compuesto por un rectángulo coronado por un triángulo isósceles (ver Figura 1). Si la longitud del perímetro es fija, encuentre el área máxima posible.

7. Analice el comportamiento de las funciones en los puntos indicados. En la parte b el análisis depende de la constante C.

a) $z = x^2 - y^2 + 3xy$ en $(0, 0)$.

b) $z = x^2 - y^2 + Cxy$ en $(0, 0)$.

8. a) Encuentre la distancia mínima del origen en $\mathbb{R}^2$ a la superficie $z = \sqrt{x^2 - 1}$.

b) Haga lo mismo para la superficie $z = 6xy + 7$

9. Encuentre los puntos y valores críticos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones:

---

[1]Número de cuenta 317031326

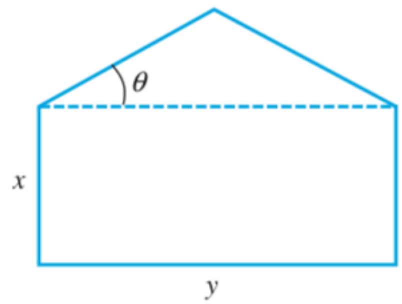

Figura 1: Maximizar el área para un perímetro dado.

a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$, restringido a $x^2 + y^2 = 1$.

b) $f(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$, restringido a $x^2 + y^2 = 1$.

c) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, restringido a $x + y = 1$.

d) $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, restringido a $x + y = \frac{\pi}{4}$.

10. Encuentre el máximo de la función $f(x, y) = xy$ sobre la curva $(x + 1)^2 + y^2 = 1$

11. Encuentre la distancia más cercana del punto $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ al plano cuya ecuación está dada por: $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$, donde $(b_1, b_2, b_3) \neq 0$

12. Encuentre el punto sobre la linea de intersección de los planos $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ y $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ que es más cercano al origen.