

## Espacios vectoriales

# Matemáticas para las ciencias aplicadas II

Aquino Chapa Armando Abraham y Merino Peña Kevin Ariel

23 de febrero de 2020

---

1. Escribe el vector cero en  $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$

**Definición 1** (Matriz). Una **Matriz** es un arreglo rectangular de elementos de un campo  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$  de la forma

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

A los elementos  $a_{i,j}$  con  $1 \leq j \leq n$  y  $1 \leq i \leq m$  se les llama entradas de la matriz, a las matrices las denotamos por  $\mathbb{A}$  (*letras mayúsculas*) y al conjunto de las matrices de  $m \times n$  se les denota por  $M_{m \times n}(\mathbb{F})$

De esta manera tenemos que el vector cero de la matriz de 3 renglones por 4 columnas es aquella cuyas entradas (todas) son 0 *i. e.*

$$A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea  $V$  el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en  $\mathbb{R}$ . Muestre que  $V$  es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar para funciones.

Veamos que la derivada cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Así hemos probado que la derivada abre sumas

$$\begin{aligned} (cf(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

De esta manera queda conolidado que en la función derivada, los escalares son sacados de la función

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto se vale para cualquier constante, en particular el 0

3. Prueba que el conjunto de las funciones pares en  $\mathbb{R}$  es un espacio vectorial con suma y multiplicación por escalar usuales para funciones. Recuerde que una función es par si  $\forall x \in \text{Dom}(f)$  entonces  $f(-x) = f(x)$

Si tenemos en cuenta que  $f(-t) + g(-t) = f(t) + g(t)$  y que si tenemos constantes siempre ocurre que  $cf(-t) = cf(t)$  entonces ya hemos probado las dos primeras condiciones y para hallar el neutro basta con usar el 0 del campo ( $\mathbb{R}$ ) para notar que también lo manda al 0 vector.

4. Sea  $V$  el conjunto de pares ordenados de números reales. Si  $(a_1, a_2)$  y  $(b_1, b_2)$  son elementos de  $V$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , definamos la suma y multiplicación escalar de la siguiente manera:

$$(i) \quad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(ii) \quad \alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2).$$

¿Es  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  con estas operaciones?

No puede ser un espacio vectorial porque si tenemos que

$$0(a_1, a_2) = (0, a_2)$$

para cumplir el cero vector, entonces se cumpliría para cualquier  $a_2$  lo cual no es posible pues contradice la unicidad del cero.

5. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de  $\mathbb{R}^3$  bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar usual.

**Definición 2.** Sea  $\mathcal{U}$  un subconjunto de  $\mathcal{V}$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$  decimos que  $\mathcal{U}$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{V}$  si cumple lo siguiente

$$I) \quad \vec{0} \in \mathcal{U}$$

$$II) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{U} \implies \vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{U}$$

$$III) \quad \text{Sea } \alpha \in \mathbb{F}, \vec{u} \in \mathcal{U} \implies \alpha \cdot \vec{u} \in \mathcal{U}$$

$$a) \quad W_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2\}$$

Veamos que  $W_1$  contiene a  $\vec{0}$  esto es que algún elemento en  $W_1 = (0, 0, 0)$  por lo que

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (a_1, a_2, a_3) && \text{Por } \vec{0} \in \mathbb{R}^3 \\ &= (3a_2, a_2, -a_2) && \text{Por } a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2 \\ &= (3(0), (0), -(0)) && \text{Para cualquier } a_2 \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Por otra parte comprobemos que la suma está dentro de  $W_1$

Sean  $\hat{u} = (a_1, a_2, a_3)$  y  $\hat{v} = (b_1, b_2, b_3) \in W_1$  la suma de vectores se realiza entrada a entrada por lo que

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) &= (3a_2, a_2, -a_2) + (3b_2, b_2, -b_2) \\ &= (3a_2 + 3b_2, a_2 + b_2, -a_2 - b_2) \\ &= (3(a_2 + b_2), (a_2 + b_2), -(a_2 + b_2)) \end{aligned}$$

Y como  $a_1 + b_1 \in \mathbb{R}^3$  entonces  $\hat{u} + \hat{v} \in W_1$  por lo que cumple  $II$ )

Finalmente veamos que si  $k \in \mathbb{R}, \hat{u} \in W_1 \implies k\hat{u} \in W_1$

$$\begin{aligned} k(3a_2, a_2, -a_2) &\in W_1 \\ (3ka_2, ka_2, -ka_2) &\in W_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto cumple  $III$ )

$\therefore W_1$  es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$

b)  $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = a_3 + 2\}$

Veamos si  $\hat{0} \in W_2$  si esto ocurriera entonces  $(0, 0, 0) \in W_2$  lo que significaría lo siguiente

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (a_3 + 2, a_2, a_3) && \text{Por que deben ser iguales entrada a entrada} \\ 0 &= a_3 + 2 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= a_3 \end{aligned}$$

Podemos observar que en esta situación,  $a_3 = -2 \wedge a_3 = 0$  lo cual no es posible, dicha contradicción vino de suponer que  $\hat{0} \in W_2$

$$\therefore \hat{0} \notin W_2$$

por lo que  $W_2$  **no** es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$

c)  $W_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0\}$

Notemos que en la declaración de los elementos de  $W_3$  podemos deducir que

$$a_3 = 7a_2 - 2a_1$$

entonces  $\hat{u} \in W_3 \implies \hat{u} = (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1)$

Veamos que para cumplir  $I)$  el vector cero debería estar en  $W_1$  *i.e.*

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \\ 0 &= a_1 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= 7a_2 - 2a_1 \end{aligned}$$

lo anterior se cumple si  $a_2 = 0 = a_1$

$$\therefore \hat{0} \in W_3$$

Ahora, sean  $\hat{u}, \hat{v} \in W_3 \implies \hat{u} = (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \wedge \hat{v} = (b_1, b_2, 7b_2 - 2b_1)$  y probemos que  $\hat{u} + \hat{v} \in W_3$

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) + (b_1, b_2, 7b_2 - 2b_1) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 7a_2 + 7b_2 - 2a_1 - 2b_1) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 7(a_2 + b_2) - 2(a_1 + b_1)) \end{aligned}$$

y como  $a_1 + b_1 \in \mathbb{R}$  también se encontrarán dentro de  $W_3$  por lo que la suma es cerrada en el conjunto  $W_3$

Por último veamos que si  $k \in \mathbb{R}, \hat{u} \in W_3 \implies k \cdot \hat{u} \in W_3$

$$\begin{aligned} k\hat{u} &= k(a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \\ k\hat{u} &= (ka_1, ka_2, 7ka_2 - 2ka_1) \end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir que cada uno de esos  $ka_1, ka_2$  elementos estarán en  $\mathbb{R}$  por lo que  $k\hat{u}$  resultarán también estar en  $W_3$

$\therefore W_3$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$

d)  $W_4 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 - 4a_2 - a_3 = 0\}$  De la definición de los elementos de  $W_4$  se sigue que si  $\hat{u}$  es un elemento de este conjunto, tendrá la forma  $\hat{u} = (4a_2 + a_3, a_2, a_3)$  Comencemos averiguando si  $W_4$  tiene elemento neutro, *i. e.*

$$\begin{aligned}(0, 0, 0) &= (4a_2 + a_3, a_2, a_3) \\ 0 &= 4a_2 + a_3 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= a_3\end{aligned}$$

para ser iguales entrada a entrada

Lo anterior ocurre cuando  $a_2 = a_3 = 0$  por lo que  $\hat{0} \in W_4$  y así cumple la condición *I*)

Siguiendo con la comprobación de sus propiedades como subespacio vectorial, tenemos que: Sean  $\hat{u}, \hat{v} \in W_4 \implies \hat{u} + \hat{v} \in W_4$  *i. e.*

$$\begin{aligned}\hat{u} + \hat{v} &= (4a_2 + a_3, a_2, a_3) + (4b_2 + b_3, b_2, b_3) \\ &= (4a_2 + 4b_2 + b_3 + a_3, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (4(a_2 + b_2) + (b_3 + a_3), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3))\end{aligned}$$

sumando entrada por entrada  
asociatividad y distributividad en  $\mathbb{R}$

y como  $(a_2 + b_2) \in \mathbb{R}$  la suma de  $\hat{u}, \hat{v} \in W_4$

Finalmente notemos que si  $k \in \mathbb{R}, \hat{u} \in W_4 \implies k \cdot \hat{u} \in W_4$

$$\begin{aligned}k\hat{u} &= k(4a_2 + a_3, a_2, a_3) \\ &= (4ka_2 + ka_3, ka_2, ka_3)\end{aligned}$$

por distributividad

y  $ka_2, ka_3 \in \mathbb{R}$  entonces  $k \cdot \hat{u} \in W_4$

$\therefore W_4$  es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$

**6.** En cada caso diga si los vectores son generados por el conjunto  $S$

**a)**  $(2, -1, 1), S = \{(1, 0, 2), (-1, 1, 1)\}$

Sea  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ .

Entonces  $(2, -1, 1) = \alpha_1(1, 0, 2) + \alpha_2(-1, 1, 1) = (\alpha_1, 0, 2\alpha_1) + (-\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2$ .

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_2 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - (-1) &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1\end{aligned}$$

Al resolver el sistema, obtenemos:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 1 &= 1\end{aligned}$$

Entonces:

$$1(1, 0, 2) + (-1)(-1, 1, 1) = (1, 0, 2) + (1, -1, -1) = (2, -1, 1)$$

Cómo el sistema de ecuaciones si se satisface, el conjunto  $S$  SI genera al vector  $(2, -1, -1)$

**b)**  $(2, -1, 1, 3), S = \{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 1)\}$

Sea  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ .

Entonces:  $(2, -1, 1, 3) = \alpha_1(1, 0, 1, -1) + \alpha_2(0, 1, 1, 1) = (\alpha_1, 0, \alpha_1, -\alpha_1) + (0, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2$ .

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 &= 3\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2 - 1 &= 1 \\ -(-1) + 2 &= 3\end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 1 &= 1 \\ 3 &= 3\end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones verificamos si el conjunto  $S$  genera al vector. Entonces:

$$2(1, 0, 1, -1) + (-1)(0, 1, 1, 1) = (2, 0, 2, -2) + (0, -1, -1, -1) = (2, -1, -1, -3)$$

Como el producto de los escalares por los elementos del conjunto  $S$  no forman al vector, podemos concluir que  $S$  NO genera a  $(2, -1, 1, 3)$ .

**c)**  $2x^3 - x^2 + x + 3, S = \{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1\}$

Sean  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$  elementos del campo, si suponemos que  $2x^3 - x^2 + x + 3$  es generado por  $S$  implicará que existen dichos 3 elementos  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = \alpha_1(x^3 + x^2 + x + 1) + \alpha_2(x^2 + x + 1) + \alpha_3(x + 1)$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 \\ \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 \\ \alpha_3 x + \alpha_3\end{aligned}$$

Por lo que ocurre lo siguiente

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3$$

$$\begin{aligned}
2x^3 - x^2 + x + 3 &= \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3 \\
&= x^3(\alpha_3) + x^2(\alpha_2 + \alpha_1) + x(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= 2 \\
\alpha_2 &= -1 - \alpha_1 \\
\alpha_2 &= -1 - 2 \\
\alpha_2 &= -3
\end{aligned}$$

Ahora llegamos a una contradicción, puesto que el sistema de ecuaciones anterior implica que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3 = 1$  por lo que el conjunto S no genera  $2x^3 - x^2 + x + 3$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Recordemos que la suma de matrices se hace entrada por entrada eso es, si se van a sumar 2 matrices  $A + B$  se hace de la forma  $a_{ij} + b_{ij} \forall i, j \in A, B$  de tal manera que existen  $a_{ij} + b_{ij} \forall i, i \in A, B$  de tal manera que existen  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + \gamma_{1,1} & \beta_{1,2} + \gamma_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Notemos que

$$-\alpha_{2,1} = -3 \implies \alpha = 3$$

y luego

$$\beta_{2,2} = 4 \implies \beta = 4$$

y finalmente

$$\gamma = 2 - \beta_{1,2} \implies \gamma = 4$$

7. Determina cuando los siguientes conjuntos son linealmente dependientes o linealmente independientes.

$$\text{a) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

Sean  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ . Entonces:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -3\alpha_1 \\ -2\alpha_1 & 4\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\alpha_2 & 6\alpha_2 \\ 4\alpha_2 & -8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente renglón y columna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_2 & -3\alpha_1 + 6\alpha_2 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 & 4\alpha_1 - 8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\
-3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0 \\
-2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0 \\
4\alpha_1 - 8\alpha_2 &= 0
\end{aligned}$$

Multiplicamos dos veces el renglón 3 y lo sumamos al renglón 4. También multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 3.

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ -3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Por último multiplicamos tres veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 2:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Entonces  $\alpha_1 = 2\alpha_2$ .

Esto indica que  $\alpha_1$  depende de  $\alpha_2$ . Por lo tanto, el conjunto  $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$  es **linealmente dependiente**.

b)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \in \mathbb{R}$ . Entonces:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -2\alpha_1 \\ -\alpha_1 & 4\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_2 & \alpha_2 \\ 2\alpha_2 & -4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente renglón y columna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & -2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 & 4\alpha_1 - 4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \\ 4\alpha_1 - 4\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Multiplicamos cuatro veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 4. También sumamos el renglón 1 al renglón 2:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Tenemos que  $\alpha_2 = 0$ , Entonces lo sustituimos en las demás ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 0 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 0 &= 0\end{aligned}$$

Es claro notar que  $\alpha_1 = 0$  y  $\alpha_2 = 0$ .

Cómo ambos valen 0, podemos concluir que el conjunto  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  es **linealmente independiente**.

$$\text{c) } \{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\} \in P_3(\mathbb{R})$$

Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ .

Tenemos que:  $0x^3 + 0x^2 + 0x + d = \alpha_1(x^3 + 2x^2) + \alpha_2(-x^2 + 3x + 1) + \alpha_3(x^3 - x^2 + 2x - 1)$

$$x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = (\alpha_1 + \alpha_3)x^3 + (2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)x^2 + (3\alpha_2 + 2\alpha_3)x + (\alpha_2 - \alpha_3).$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Ahora multiplicamos -3 veces el renglón 4 y le sumamos el renglón 1:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Podemos obtener que  $\alpha_3 = 0$ . Entonces sustituimos este valor en las ecuaciones.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - 0 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

De lo anterior deducimos que  $\alpha_1 = 0$ , por tanto:

$$\begin{aligned}0 - \alpha_2 - 0 &= 0 \\ 0 + 3\alpha_2 + 0 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Entonces  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ . Podemos que concluir que el conjunto  $\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\} \in P_3(\mathbb{R})$  es **linealmente independiente**.

$$\text{d) } \{(1, -1, 2), (1, -2, 1), (1, 1, 4)\} \in \mathbb{R}^3$$

Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ . Entonces:

$$\alpha_1(1, -1, 2) + \alpha_2(1, -2, 1) + \alpha_3(1, 1, 4) = (0, 0, 0). \text{ Ahora:}$$



$(\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (\alpha_2, -2\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, 4\alpha_3) = (0, 0, 0)$ . Ordenamos los escalares:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3) = (0, 0, 0)$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos a "menos" el renglón 3. También sumamos el renglón 1 al renglón 2.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 2. Y al renglón 1 le sumamos el renglón 2.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Entonces nos queda el siguiente sistema.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

De esto podemos deducir que  $\alpha_1 = -3\alpha_3$ ,  $\alpha_2 = 2\alpha_3$  y  $\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{2}$ .

Entonces podemos concluir que el conjunto  $\{(1, -1, 2), (1, -2, 1), (1, 1, 4)\} \in \mathbb{R}^3$  es **linealmente dependiente**.

$$\mathbf{e}\{(1, -1, 2), (2, 0, 1), (-1, 2, -1)\} \in \mathbb{R}^3$$

Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ .

$$\alpha_1(1, -1, 2) + \alpha_2(2, 0, 1) + \alpha_3(-1, 2, -1) = (0, 0, 0). \text{ Ahora:}$$

$(\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (2\alpha_2, 0\alpha_2, \alpha_2) + (-\alpha_3, 2\alpha_3, -\alpha_3) = (0, 0, 0)$ . Ordenamos los escalares:

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Primero multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 3. Luego sumamos el renglón 2 al renglón 1.

$$\begin{aligned}0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 1:

$$\begin{aligned}0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 5\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos que  $\alpha_2 = 0$  y sustituimos en las demás ecuaciones.

$$\begin{aligned}0 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Es fácilmente apreciar que  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$  y  $\alpha_3 = 0$

Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto  $(1, -1, 2), (2, 0, 1), (-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$  es **linealmente independiente**

Recuerde que  $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_k \in \mathbb{R} \forall k = 0, 1, 2, \dots, n\}$