



Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Proyecto III

Kevin Ariel Merino Peña¹



Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que estos proyectos se entregan de manera individual en la plataforma de google classroom.

1. Muestre que los siguientes conjuntos del plano son abiertos:

Definición 1. Sea $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $r \in \mathbb{R}^+$, la **bola** de radio r y centro en \vec{x}_0 es definida por el conjunto de todos los puntos \vec{x} tal que $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r$.

Este conjunto es denotado como $Br(\vec{x}_0)$ es el conjunto de los puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ cuya distancia de \vec{x}_0 es menor que r

Definición 2. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que U es **conjunto abierto** si para cada \vec{x}_0 , existe algún $r > 0$ tal que $Br(\vec{x}_0)$ está totalmente contenida en U , $Br(\vec{x}_0) \subset U$

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$ Sea $\vec{u} \in A$, entonces dicho vector tiene la siguiente forma $\vec{u} = (x_0, y_0)$,

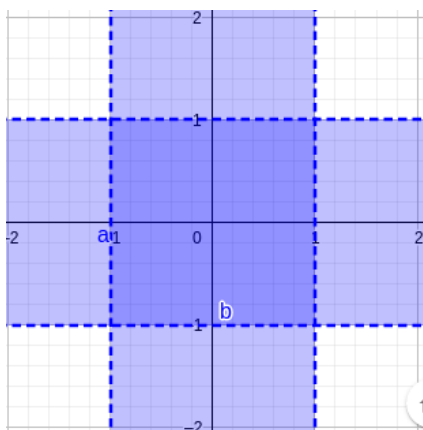


Figura 1: En el plano sólo la intersección es el conjunto A

además por ser elemento de A sus coordenadas cumplen lo siguiente

$$-1 < x_0 < 1 \quad (\eta)$$

$$-1 < y_0 < 1 \quad (\vartheta)$$

Tomemos en cuenta los siguientes valores que serán de ayuda para calcular el radio de la Bola abierta

$$r_x = \min\{1 - x_0, 1 + x_0\} \quad (\delta)$$

$$r_y = \min\{1 - y_0, 1 + y_0\} \quad (\xi)$$

Lyego, de η tenemos que

$$x_0 < 1 \implies 0 < 1 - x_0$$

Tomando la segunda parte de la desigualdad

$$-1 < x_0 \implies 0 < 1 + x_0$$

Tomando la primera parte de la desigualdad

y por ϑ se obtiene

$$y_0 < 1 \implies 0 < 1 - y_0$$

Tomando la segunda parte de la desigualdad

$$-1 < y_0 \implies 0 < 1 + y_0$$

Tomando la primera parte de la desigualdad

Por lo tanto, decidimos tomar el radio de la bola como $r = \min\{r_x, r_y\}$ así aseguraremos que siempre se encuentre dentro del conjunto A -

¹317031326

Ahora mostremos que $B_r(\vec{u})$ está contenida en A , para ello sea $\vec{x} \in B_r(\vec{u})$ entonces dicho vector tendrá coordenadas digamos $\vec{x} = (x, y)$

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - \vec{u}\| &< r \\ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &< r \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &< r^2 \end{aligned}$$

Por la definición del radio dichos puntos distan menos que r
Empleando la definición de norma
Pues la raíz es continua

De la implicación anterior podemos concluir

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 &< r^2 \\ \sqrt{(x - x_0)^2} &< \sqrt{r^2} \\ |x - x_0| &< r \\ |x - x_0| &< r \leq r_x \\ |x - x_0| &< r_x \\ -r_x &< x - x_0 < r_x \end{aligned}$$

Por lo anterior y propiedad de la desigualdad en sumas
Pues la raíz es continua
Definición de valor absoluto
Construcción de r_x
Transitividad de la desigualdad
Teorema de la desigualdad

(\mathfrak{A})

y también observemos que

$$\begin{aligned} r_x &\leq 1 - x_0 & 1 + x_0 &> r_x \\ r_x &\leq 1 - x_0 & -1 - x_0 &\leq -r_x \end{aligned}$$

Por la elección del radio
Multiplicando ambos lados de la segunda desigualdad por -1

Si juntamos la observación anterior y (\mathfrak{A})

$$\begin{aligned} -1 - x_0 &\leq -r_x < x - x_0 < r_x < 1 - x_0 \\ -1 - x_0 &< x - x_0 < 1 - x_0 \\ -1 &< x < 1 \end{aligned}$$

Empleando ambas desigualdades
Tomando sólo los valores adecuados
Sumamos en ambos lados x_0

Haciendo lo mismo para y

$$\begin{aligned} (y - y_0)^2 &< r^2 \\ \sqrt{(y - y_0)^2} &< \sqrt{r^2} \\ |y - y_0| &< r \\ |y - y_0| &< r \leq r_y \\ |y - y_0| &< r_y \\ -r_y &< y - y_0 < r_y \end{aligned}$$

Por lo anterior y propiedad de la desigualdad en sumas
Pues la raíz es continua
Definición de valor absoluto
Construcción de r_y
Transitividad de la desigualdad
Teorema de la desigualdad

(\mathfrak{B})

y también observemos que

$$\begin{aligned} r_y &\leq 1 - y_0 & 1 + y_0 &> r_y \\ r_y &\leq 1 - y_0 & -1 - y_0 &\leq -r_y \end{aligned}$$

Por la elección del radio
Multiplicando ambos lados de la segunda desigualdad por -1

Si juntamos la observación anterior y (\mathfrak{B})

$$\begin{aligned} -1 - y_0 &\leq -r_y < y - y_0 < r_y < 1 - y_0 \\ -1 - y_0 &< y - y_0 < 1 - y_0 \\ -1 &< y < 1 \end{aligned}$$

Empleando ambas desigualdades
Tomando sólo los valores adecuados
Sumamos en ambos lados y_0

De esta manera, en cualquier caso tenemos que $\vec{x} \in A \therefore B_r(\vec{u}) \subset A$
 $\therefore A$ es abierto.

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y\}$ Sean $(x, y) \in B$ y $r > 0$, por demostrar $B_r(x, y) \subset B$.

La bola de radio más grande que podemos dar es $r = y$ y como $(x, y) \in B$, entonces $y > 0$.

Ahora queremos mostrar que

$$(x_1, y_1) \in B_r(x, y) \implies (x_1, y_1) \in B$$

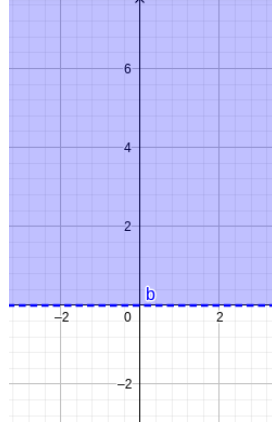


Figura 2: En el plano, los cuadrantes 1 y 2, son el conjunto B

Sea $(x_1, y_1) \in Br(x, y)$, entonces

$$\begin{aligned}
 |y_1 - y| &= \sqrt{(y_1 - y)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} \leq r \\
 |y_1 - y| &= \sqrt{(y_1 - y)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} \leq y \\
 |y_1 - y| &\leq y \\
 -y &< y_1 - y < y \\
 0 &< y_1 < 2y
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $0 < y_1 \implies (x_1, y_1) \in B$, así que $Br(x, y) \subset B$,
 $\therefore B$ es abierto.

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < x^2 + y^2 < 4\}$

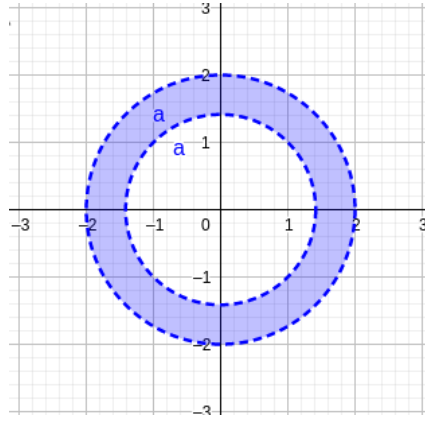


Figura 3: En el plano sólo la parte azul es el conjunto C

Sea $\vec{p}_0 = (x_0, y_0) \in C$, que \vec{p}_0 esté en el conjunto C eso es

$$\begin{aligned}
 2 &< \|\vec{p}_0\|^2 < 4 \\
 \sqrt{2} &< \|\vec{p}_0\| < 2
 \end{aligned}$$

Porque está en el conjunto C

Sacando la raíz en todos lados de la desigualdad

Entonces tomemos el radio de la bola como

$$0 < r < \min\{\|\vec{p}_0\| - \sqrt{2}, 2 - \|\vec{p}_0\|\}$$

y tomemos $\vec{q} \in B_r(\vec{p}_0)$ ahora mostremos que $B_r(\vec{p}_0) \subset C$ para ello, basta ver que $\vec{q} \in C$, esto es $\sqrt{2} < \|\vec{q}\| < 2$. Observemos que

$$\|\vec{q}\| - \|\vec{p}_0\| < \|\vec{q} - \vec{p}_0\|$$

Por definición, debe distar menos que ello

Como $\vec{q} \in B_r(\vec{p}_0)$, entonces

$$\begin{aligned} \|\vec{q} - \vec{p}_0\| &< r \\ \|\vec{q}\| - \|\vec{p}_0\| &\leq \|\vec{q} - \vec{p}_0\| < r \\ \|\vec{q}\| - \|\vec{p}_0\| &\leq \|\vec{q} - \vec{p}_0\| < r < 2 - \|\vec{p}_0\| \\ \|\vec{q}\| - \|\vec{p}_0\| &< 2 - \|\vec{p}_0\| \\ \|\vec{q}\| &< 2 \\ \|\vec{q}\| &< 2 \end{aligned}$$

Por definición del radio

Por la desigualdad del triángulo

Por la conición anterior

Tomando una parte de la inequidad

Sumando en todos lados $\|\vec{p}_0\|$

Así el punto cumple la condición de estar en C

En otro caso, si pasa que $r < \|\vec{p}_0\| - \sqrt{2}$, entonces tendríamos

$$\begin{aligned} \|\vec{q} - \vec{p}_0\| &< r \\ \|\vec{q}\| - \|\vec{p}_0\| &\leq \|\vec{q} - \vec{p}_0\| < r \\ \|\vec{q}\| - \|\vec{p}_0\| &\leq \|\vec{q} - \vec{p}_0\| < r < \|\vec{p}_0\| - \sqrt{2} \\ \|\vec{q}\| - \|\vec{p}_0\| &< \|\vec{p}_0\| - \sqrt{2} \\ \|\vec{q}\| &< \sqrt{2} \\ \|\vec{q}\| &< \sqrt{2} \end{aligned}$$

Por definición del radio

Por la desigualdad del triángulo

Por la conición anterior

Tomando una parte de la inequidad

Sumando en todos lados $\|\vec{p}_0\|$

Así el punto cumple la condición de estar en C

Así, hemos visto que en cualquier caso $\vec{q} \in C$ por lo tanto $B_r(\vec{p}_0) \subset C$
 $\therefore C$ es un conjunto abierto

2. Calcule los siguientes. límites si existen:

Definición 3. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\vec{x}_0 \in A$, un punto de acumulación de A . Entonces se dice que el límite de $f(\vec{x})$, cuando \vec{x} tiende a \vec{x}_0 , es $\vec{l} \in \mathbb{R}^m$ y se denota

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} = \vec{l} \quad \text{o} \quad f(\vec{x}) \rightarrow \vec{l}$$

Si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 y^2}$

Resultará conveniente recordar de nuestro curso de Matemáticas para las ciencias aplicadas I que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\cos(\alpha) - 1}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}$$

. Entonces tomemos el siguiente cambio de variable $\alpha = xy$ y por el recordatorio anterior, tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 y^2} = -\frac{1}{2}$$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$

Para este segundo ejercicio, tomemos un cambio de variable $y = \sqrt{r}$ y $x = \sqrt{r}$ entonces $xy = r$ por lo que

b) $\lim_{(r \rightarrow 0)} \frac{\sin(r)}{r}$

Y de nuestro curso de Matemáticas para las ciencias aplicadas I tenemos que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$, por lo tanto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2, e^x)$

Tenemos un teorema enunciado en clase sobre las propiedades de los límites, una de ellas dice:

Definición 4. Si $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$ donde $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, m\}$ son las componentes de la función de f , entonces

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = (l_1, l_2, \dots, l_m)$$

si y sólo si

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = l_i$$

para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

entonces si

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2, e^x) &= \left(\lim_{x \rightarrow 1} x^2, \lim_{x \rightarrow 1} e^x \right) \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x^2, e^x) &= ((1)^2, e^1) \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x^2, e^x) &= (1, e) \end{aligned}$$

3. Usando la formulación ϵ - δ muestre:

a) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$

Sea $\epsilon > 0$, notemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} - 0 \right| &= \left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \right| \leq \left| \frac{xyz}{xy} \right| = |z| \\ \left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} - 0 \right| &\leq \sqrt{(z)^2} \\ \left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} - 0 \right| &\leq \sqrt{(z)^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

También observemos que $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 + z^2$, entonces $0 \leq \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{1}{x^2}$.

Así, también veamos que $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|(x, y, z)\|$ entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} - 0 \right| &\leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} - 0 \right| &\leq \|(x, y, z)\| \end{aligned}$$

Por lo que basta con tomar $\delta = \epsilon$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

Sea $\epsilon > 0$, consideremos

$$\begin{aligned} \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| &= \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \\ &= \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

Por otro lado, veamos que $0 \leq |xy| \leq x^2 + y^2$, entonces $0 < \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 0 &< \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 &< \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \|(x, y)\| < \epsilon \end{aligned}$$

Entonces sólo basta tomar $\delta = \epsilon$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x, x^2) = (6, 4)$

Por lo mencionado anteriormente, $\lim_{x \rightarrow 2} (3x, x^2) = (6, 4)$ puede expresarse como

$$(\lim_{x \rightarrow 2} 3x, \lim_{x \rightarrow 2} x^2) = (6, 4)$$

por lo tanto, para el primer caso.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, consideremos

$$\begin{aligned} |f(x) - l| &= |3x - 6| \\ |f(x) - l| &= 3|x - 2| \end{aligned}$$

Observemos que $|x - a| = |x - 2|$

Así, basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{2}$

□

Luego, para el segundo valor

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, veamos que

$$\begin{aligned} |f(x) - l| &= |x^2 - 4| \\ |f(x) - l| &= |x - 2| |x + 2| \end{aligned}$$

Por otra parte, sea $\delta_0 = 1$

$$\begin{aligned} |x - 2| &< 1 \\ -1 &< x - 2 < 1 \\ 3 &< x + 2 < 5 \\ |x + 2| &< 5 \end{aligned}$$

De esta manera basta tomar $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{5} \right\}$

□

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2} & : \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Muestre que f es continua en $(0, 0)$ Para averiguar quién es el límite, tomémonos traectorias distintas.

Definimos $y = g(x) = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, g(x)) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, 0) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(0)}{|x|^3 + (0)^2} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= 0\end{aligned}$$

Por otra parte, definamos $y = g(x) = x$ por lo que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, g(x)) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, x) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{|x|^3 + x^2} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 \left(\frac{|x|^3}{x^2} + 1 \right)} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{|x|^3}{x^2} + 1} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{|x|^3}{x^2} + 1 \right)} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3|x|^2|x'|}{2x} + 1} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^2}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} |x'| + 1} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{\frac{3}{2} \cdot 0\{-1, 1\} + 1} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{1} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= 0\end{aligned}$$

Aplicando ley de L'Hôpital

Por la regla del producto

Por definición de la derivada del valor absoluto

Sea $\epsilon > 0$, consideremos $\|f(x,y) - l\|$, donde $f(x,y) = \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2}$ y $l = 0$, entonces

$$\left\| \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2} - 0 \right\| = \left| \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2} \right|$$

luego, veamos que $\left| \frac{x^2 y}{x^3 + y^2} \right| = |y| = \sqrt{y^2}$ y como $0 \leq y^2 \leq y^2 + x^2$ tenemos que

$$\left| \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2} \right| \leq |y| = \sqrt{y^2}$$

Definición de valor absoluto

$$\left| \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2} \right| \leq \sqrt{y^2}$$

Por la igualdad planteada arriba

$$\left| \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2} \right| \leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Por la observación del inicio

$$\left| \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2} \right| \leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Puesto que $\sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$

$$\left| \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2} \right| \leq \sqrt{y^2} \leq \|(x, y)\| < \epsilon$$

Por hipótesis

$$\left| \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2} \right| \leq \|(x, y)\| < \epsilon$$

Por lo tanto, basta tomar $\delta = \epsilon$:)