Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Tarea Examen II

Kevin Ariel Merino Peña[1]

14 de mayo de 2020

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden la tarea-examen se entregan de manera individual.

1. El volumen específico V, la presión P la temperatura T de un gas van der Waals están relacionados por

$$P = \frac{RT}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2}$$

donde α, β y R son constantes.

a) Encuentre $\dfrac{\partial T}{\partial P}, \dfrac{\partial P}{\partial V}$ y $\dfrac{\partial V}{\partial T}$.

Consideremos lo siguiente en función de la temperatura y el volumen como

$$P(T,V) = \frac{RT}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2} \tag{1}$$

observemos que la ecuación anterior tiene al menos una solución tal que $P(T,V) = 0$ pues como α es una constante podemos elegirla cero y R o T iguales a cero, (alguna otra podría ser que entre ambos sumandos se hagan inversos aditivos.Como cada variable puede ser considerada independiente entonces, podemos proceder a despejar T com variable independiente

$$\begin{aligned}
P &= \frac{RT}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2} && \text{Por la primera ecuación en el ejercicio} \\
P - \frac{RT}{V-\beta} &= -\frac{\alpha}{V^2} && \text{sumando en ambos miembros el inverso aditivo de } \frac{RT}{V-\beta} \\
-\frac{RT}{V-\beta} &= -P - \frac{\alpha}{V^2} && \text{sumando en ambos miembros el inverso aditivo de } P \\
\frac{RT}{V-\beta} &= P + \frac{\alpha}{V^2} && \text{Multiplicando ambos miembros por } -1 \\
RT &= \left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V-\beta) && \text{Multiplicando ambos miembros por el inverso multiplicativo de } V-\beta \\
T &= \left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V-\beta)\frac{1}{R} && \text{Multiplicando ambos miembros por } \frac{1}{R} \\
T &= \left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)\frac{V-\beta}{R} && \text{Reescribiendo la ecuación} \\
T(V,P) &= \left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)\frac{V-\beta}{R} && \text{Poniéndola en función de las variables}
\end{aligned}$$

$$T(V,P) = \left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)\frac{V-\beta}{R} \tag{2}$$

Por otro lado, es importante hacer una tercera observación

$$\begin{aligned}
P &= \frac{RT}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2} && \text{Por la primera ecuación en el ejercicio} \\
P &= \frac{RTV^2 - \alpha(V-\beta)}{V^2(V-\beta)} && \text{Empleando la regla de suma de fracciones} \\
V^2(V-\beta)P &= RTV^2 - \alpha(V-\beta) && \text{Multiplicando ambos miembros por } V^2(V-\beta) \\
(V^3 - V^2\beta)P &= RTV^2 - \alpha(V-\beta) && \text{Desarrolando el primer miembros por distributividad}
\end{aligned}$$

---

[1]Número de cuenta 317031326

$$(V-\beta)V^2P = RTV^2 - \alpha(V-\beta) \tag{3}$$

Empleando las dos observaciones anteriores podemos ver que

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V-\beta}{R} \qquad \text{Por la segunda observación, donde despejamos } T \tag{4}$$

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{-RT}{(V-\beta)^2} - \frac{2\alpha}{V^3} \qquad \text{Por la función original} \tag{5}$$

Para obtener la derivada del volumen con respecto a la temperatura, tomemos a P como una constante y derivemos con respecto a T obtenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial T}V^2P - 2(V-\beta)V\frac{\partial V}{\partial T}P = RV^2 + 2RTV\frac{\partial V}{\partial T} - \alpha\frac{\partial V}{\partial T} \qquad \text{Despejando en (2) para } \frac{\partial V}{\partial T}$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{(V-\beta)\left(\frac{RT}{(V-\beta)^2} - \frac{2\alpha}{V^3}\right)} \qquad \text{Finalmente obtenemos} \tag{6}$$

Identifique qué variables son constantes e interprete físicamente cada derivada parcial.

En (4) tenemos que si $R > 0$, entonces $\frac{\partial T}{\partial P}$ también será postivia, esto significa que la temperatura T está creciendo con respecto a la presión P cuando el volúmen V es $V > \beta$ y ésta disminuirá en otro caso. Cuando $R < 0$ lo contrario ocurre.

Luego, por (5) podemos vemis que $\frac{\partial P}{\partial V} > 0$ si $\frac{RT}{(V-\beta)^2} > \frac{2\alpha}{V^3}$, lo que significa que la presión P crecerá con respecto al volumen V. Además, entre más crezca V el volúmen, la presión se volverá cada vez más grande, vemos que si $\frac{\partial P}{\partial V}$ tiende a 0 es porque la presión se vuelve muy cercana a una constante (cuando incrementamos el volumen V).

b) Verifique $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right) = -1$

Primero veamos que tenemos una manera distinta de escribir a (5) como:

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{-RTV^3 + 2\alpha(V-\beta)^2}{V^3(V-\beta)^2}$$

ahora tomemos (4), (5) y la ultimoa ecuación reescrita para hacer el siguiente producto

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = \left(\frac{(V-\beta)}{R}\right)\cdot\left(\frac{-RTV^3 + 2\alpha(V-\beta)^2}{V^3(V-\beta)^2}\right)\cdot\left(\frac{R}{(V-\beta)\left(\frac{RT}{(V-\beta)^2} - \frac{2\alpha}{V^3}\right)}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = (V-\beta)\cdot\left(\frac{-RTV^3 + 2\alpha(V-\beta)^2}{V^3(V-\beta)^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{(V-\beta)\left(\frac{RT}{(V-\beta)^2} - \frac{2\alpha}{V^3}\right)}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = \left(\frac{-RTV^3 + 2\alpha(V-\beta)^2}{V^3(V-\beta)^2}\right)\cdot\left(\frac{V-\beta}{(V-\beta)\left(\frac{RT}{(V-\beta)^2} - \frac{2\alpha}{V^3}\right)}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = \left(\frac{-RTV^3 + 2\alpha(V-\beta)^2}{V^3(V-\beta)^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\left(\frac{RT}{(V-\beta)^2} - \frac{2\alpha}{V^3}\right)}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{-RTV^3 + 2\alpha(V-\beta)^2}{V^3(V-\beta)^2\left(\dfrac{RT}{(V-\beta)^2} - \dfrac{2\alpha}{V^3}\right)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{-RTV^3 + 2\alpha(V-\beta)^2}{\dfrac{V^3(V-\beta)^2 RT}{(V-\beta)^2} - \dfrac{2V^3\alpha(V-\beta)^2}{V^3}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{-RTV^3 + 2\alpha(V-\beta)^2}{V^3RT - 2\alpha(V-\beta)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = -1$$

2. Considere una función de temperatura $T(x,y) = x\sin(y)$ Trazar algunas curvas de nivel. Calcula ∇T y explique su significado.

3. Encuentre el plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1,-2,5)$. Explica el significado geométrico para esta superficie del gradiente de $f(x,y) = x^2 + y^2$

4. Un bicho se encuentra en un entorno tóxico. El nivel de toxicidad está dado por $T(x,y) = 2x^2 - 4y^2$. Si el bicho está en $(-1,2)$. ¿En qué dirección debería moverse para reducir la toxicidad más rápido.

5. El desplazamiento en el tiempo t y la posición horizontal en la recta x de una cierta cuerda de violín, está dada por

$$u(x,t) = \sin(x-6t) + \sin(x+6t)$$

Calcule la velocidad de la cuerda en $x = 1$ cuando $t = \dfrac{1}{3}$.

6. La altura h del volcán hawaiano Mauna Loa se describe (aproximadamente) por la función

$$H(x,y) = 2.59 - 0.00024y^2 - 0.00065x^2$$

donde h es la altura sobre el nivel del mar en millas y x e y se miden de **este** a **oeste** y de **norte** a **sur**, también en millas desde la cima de la montaña. En $(x,y) = (-2,-4)$:

a) ¿Qué tan rápido amenta la altura en la dirección $(1,1)$(es decir, hacia el noreste)? Exprese su respuesta en millas de altura por milla de distancia horizontal recorrida.

b) ¿En qué dirección es el camino ascendente más empinado?