



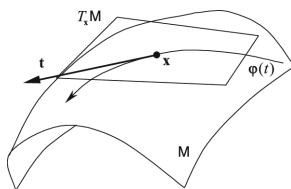
Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas para las ciencias aplicadas II

Tarea 1

Espacios vectoriales y Álgebra lineal



Profesor: M. en C. Pedro Porras Flores
Ayudante: Fís. Irving Hernández Rosas
Armando Abraham Aquino Chapa
Kevin Ariel Merino Peña

29 de marzo de 2020



Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que la tarea se entrega en equipos de a lo más tres integrantes.

Ejercicio 1

Escribe el vector cero en $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$

Definición 1 (Matriz). Una **Matriz** es un arreglo rectangular de elementos de un campo $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ de la forma

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

A los elementos $a_{i,j}$ con $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq i \leq m$ se les llama entradas de la matriz, a las matrices las denotamos por \mathbb{A} (*letras mayúsculas*) y al conjunto de las matrices de $m \times n$ se les denota por $M_{m \times n}(\mathbb{F})$

De esta manera tenemos que el vector cero de la matriz de 3 renglones por 4 columnas es aquella cuyas entradas (todas) son 0 *i. e.*

$$A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Sea V el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en \mathbb{R} . Muestre que V es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar para funciones.

Veamos que la derivada cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Así hemos probado que la derivada abre sumas

$$\begin{aligned} (cf(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

De esta manera queda conolidado que en la función derivada, los escalares son sacados de la función

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto se vale para cualquier constante, en particular el 0

Ejercicio 3

Prueba que el conjunto de las funciones pares en \mathbb{R} es un espacio vectorial con suma y multiplicación por escalar usuales para funciones. Recuerde que una función es par si $\forall x \in \text{Dom}(f)$ entonces $f(-x) = f(x)$

Si tenemos en cuenta que $f(-t) + g(-t) = f(t) + g(t)$ y que si tenemos constantes siempre ocurre que $cf(-t) = cf(t)$ entonces ya hemos probado las dos primeras condiciones y para hallar el neutro basta con usar el 0 del campo (\mathbb{R}) para notar que también lo manda al 0 vector.

Ejercicio 4

Sea V el conjunto de pares ordenados de números reales. Si (a_1, a_2) y (b_1, b_2) son elementos de V y $\alpha \in \mathbb{R}$, definamos la suma y multiplicación escalar de la siguiente manera:

$$(i) \quad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$$

$$(ii) \quad \alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, a_2).$$

¿Es V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} con estas operaciones?

No puede ser un espacio vectorial porque si tenemos que

$$0(a_1, a_2) = (0, a_2)$$

para cumplir el cero vector, entonces se cumpliría para cualquier a_2 lo cual no es posible pues contradice la unicidad del cero.

Ejercicio 5

Determinar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de \mathbb{R}^3 bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar usual.

Definición 2. Sea \mathcal{U} un subconjunto de \mathcal{V} espacio vectorial sobre \mathbb{F} decimos que \mathcal{U} es un subespacio vectorial de \mathcal{V} si cumple lo siguiente

$$I) \quad \vec{0} \in \mathcal{U}$$

$$II) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{U} \implies \vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{U}$$

$$III) \quad \text{Sea } \alpha \in \mathbb{F}, \vec{u} \in \mathcal{U} \implies \alpha \cdot \vec{u} \in \mathcal{U}$$

$$a) \quad W_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2\}$$

Veamos que W_1 contiene a $\vec{0}$ esto es que algún elemento en $W_1 = (0, 0, 0)$ por lo que

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (a_1, a_2, a_3) && \text{Por } \vec{0} \in \mathbb{R}^3 \\ &= (3a_2, a_2, -a_2) && \text{Por } a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2 \\ &= (3(0), (0), -(0)) && \text{Para cualquier } a_2 \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Por otra parte comprobemos que la suma está dentro de W_1

Sean $\hat{u} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\hat{v} = (b_1, b_2, b_3) \in W_1$ la suma de vectores se realiza entrada a entrada por lo que

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) &= (3a_2, a_2, -a_2) + (3b_2, b_2, -b_2) \\ &= (3a_2 + 3b_2, a_2 + b_2, -a_2 - b_2) \\ &= (3(a_2 + b_2), (a_2 + b_2), -(a_2 + b_2)) \end{aligned}$$

Y como $a_1 + b_1 \in \mathbb{R}^3$ entonces $\hat{u} + \hat{v} \in W_1$ por lo que cumple II)

Finalmente veamos que si $k \in R, \hat{u} \in W_1 \implies k\hat{u} \in W_1$

$$\begin{aligned} k(3a_2, a_2, -a_2) &\in W_1 \\ (3ka_2, ka_2, -ka_2) &\in W_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto cumple *III*)

$\therefore W_1$ es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

b) $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = a_3 + 2\}$

Veamos si $\hat{0} \in W_2$ si esto ocurriera entonces $(0, 0, 0) \in W_2$ lo que significaría lo siguiente

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (a_3 + 2, a_2, a_3) && \text{Por que deben ser iguales entrada a entrada} \\ 0 &= a_3 + 2 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= a_3 \end{aligned}$$

Podemos observar que en esta situación, $a_3 = -2 \wedge a_3 = 0$ lo cual no es posible, dicha contradicción vino de suponer que $\hat{0} \in W_2$

$$\therefore \hat{0} \notin W_2$$

por lo que W_2 **no** es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

c) $W_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0\}$

Notemos que en la declaración de los elementos de W_3 podemos deducir que

$$a_3 = 7a_2 - 2a_1$$

entonces $\hat{u} \in W_3 \implies \hat{u} = (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1)$

Veamos que para cumplir *I*) el vector cero debería estar en W_1 *i.e.*

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \\ 0 &= a_1 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= 7a_2 - 2a_1 \end{aligned}$$

lo anterior se cumple si $a_2 = 0 = a_1$

$$\therefore \hat{0} \in W_3$$

Ahora, sean $\hat{u}, \hat{v} \in W_3 \implies \hat{u} = (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \wedge \hat{v} = (b_1, b_2, 7b_2 - 2b_1)$ y probemos que $\hat{u} + \hat{v} \in W_3$

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) + (b_1, b_2, 7b_2 - 2b_1) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 7a_2 + 7b_2 - 2a_1 - 2b_1) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 7(a_2 + b_2) - 2(a_1 + b_1)) \end{aligned}$$

y como $a_1 + b_1 \in R$ también se encontrarán dentro de W_3 por lo que la suma es cerrada en el conjunto W_3

Por último veamos que si $k \in R, \hat{u} \in W_3 \implies k \cdot \hat{u} \in W_3$

$$\begin{aligned} k\hat{u} &= k(a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \\ k\hat{u} &= (ka_1, ka_2, 7ka_2 - 2ka_1) \end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir que cada uno de esos ka_1, ka_2 elementos estarán en R por lo que $k\hat{u}$ resultarán también estar en W_3

$\therefore W_3$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

d) $W_4 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 - 4a_2 - a_3 = 0\}$ De la definición de los elementos de W_4 se sigue que si \hat{u} es un elemento de este conjunto, tendrá la forma $\hat{u} = (4a_2 + a_3, a_2, a_3)$ Comencemos averiguando si W_4 tiene elemento neutro, *i. e.*

$$\begin{aligned}(0, 0, 0) &= (4a_2 + a_3, a_2, a_3) \\ 0 &= 4a_2 + a_3 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= a_3\end{aligned}$$

para ser iguales entrada a entrada

Lo anterior ocurre cuando $a_2 = a_3 = 0$ por lo que $\hat{0} \in W_4$ y así cumple la condición *I*)

Siguiendo con la comprobación de sus propiedades como subespacio vectorial, tenemos que: Sean $\hat{u}, \hat{v} \in W_4 \implies \hat{u} + \hat{v} \in W_4$ *i. e.*

$$\begin{aligned}\hat{u} + \hat{v} &= (4a_2 + a_3, a_2, a_3) + (4b_2 + b_3, b_2, b_3) \\ &= (4a_2 + 4b_2 + b_3 + a_3, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (4(a_2 + b_2) + (b_3 + a_3), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3))\end{aligned}$$

sumando entrada por entrada
asociatividad y distributividad en \mathbb{R}

y como $(a_2 + b_2) \in \mathbb{R}$ la suma de $\hat{u}, \hat{v} \in W_4$

Finalmente notemos que si $k \in \mathbb{R}, \hat{u} \in W_4 \implies k \cdot \hat{u} \in W_4$

$$\begin{aligned}k\hat{u} &= k(4a_2 + a_3, a_2, a_3) \\ &= (4ka_2 + ka_3, ka_2, ka_3)\end{aligned}$$

por distributividad

y $ka_2, ka_3 \in \mathbb{R}$ entonces $k \cdot \hat{u} \in W_4$

$\therefore W_4$ es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

Ejercicio 6

En cada caso diga si los vectores son generados por el conjunto S

Definición 3. Sea \mathcal{S} un subconjunto de un espacio vectorial \mathcal{V} decimos que \mathcal{S} genera a \mathcal{V} si $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos de \mathcal{S} al generado de \mathcal{S} se le denota como $span(\mathcal{S}), < \mathcal{S} >, gen(\mathcal{S})$

a) $(2, -1, 1), S = \{(1, 0, 2), (-1, 1, 1)\}$

Sea $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Entonces $(2, -1, 1) = \alpha_1(1, 0, 2) + \alpha_2(-1, 1, 1) = (\alpha_1, 0, 2\alpha_1) + (-\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2$.

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_2 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - (-1) &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1\end{aligned}$$

Al resolver el sistema, obtenemos:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 1 &= 1\end{aligned}$$

Entonces:

$$1(1, 0, 2) + (-1)(-1, 1, 1) = (1, 0, 2) + (1, -1, -1) = (2, -1, 1)$$

Cómo el sistema de ecuaciones si se satisface, el conjunto S SI genera al vector $(2, -1, -1)$

b) $(2, -1, 1, 3), S = \{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 1)\}$

Sea $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Entonces: $(2, -1, 1, 3) = \alpha_1(1, 0, 1, -1) + \alpha_2(0, 1, 1, 1) = (\alpha_1, 0, \alpha_1, -\alpha_1) + (0, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2$.

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 &= 3\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2 - 1 &= 1 \\ -(-1) + 2 &= 3\end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 1 &= 1 \\ 3 &= 3\end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones verificamos si el conjunto S genera al vector. Entonces:

$$2(1, 0, 1, -1) + (-1)(0, 1, 1, 1) = (2, 0, 2, -2) + (0, -1, -1, -1) = (2, -1, -1, -3)$$

Como el producto de los escalares por los elementos del conjunto S no forman al vector, podemos concluir que S **NO** genera a $(2, -1, 1, 3)$.

c) $2x^3 - x^2 + x + 3, S = \{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1\}$

Sean α_1, α_2 y α_3 elementos del campo, si suponemos que $2x^3 - x^2 + x + 3$ es generado por S implicará que existen dichos 3 elementos $\cdot \ni \cdot$

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = \alpha_1(x^3 + x^2 + x + 1) + \alpha_2(x^2 + x + 1) + \alpha_3(x + 1)$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 \\ \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 \\ \alpha_3 x + \alpha_3\end{aligned}$$

Por lo que ocurre lo siguiente

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3$$

$$\begin{aligned}2x^3 - x^2 + x + 3 &= \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3 \\ &= x^3(\alpha_1) + x^2(\alpha_2 + \alpha_1) + x(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 - \alpha_1 \\ \alpha_2 &= -1 - 2 \\ \alpha_2 &= -3\end{aligned}$$

Ahora llegamos a una contradicción, puesto que el sistema de ecuaciones anterior implica que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3 = 1$ por lo que el conjunto S no genera $2x^3 - x^2 + x + 3$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Recordemos que la suma de matrices se hace entrada por entrada eso es, si se van a sumar 2 matrices $A + B$ se hace de la forma $a_{ij} + b_{ij} \forall i, j \in A, B$ de tal manera que existen $a_{ij} + b_{ij} \forall i, i \in A, B$ de tal manera que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + \gamma_{1,1} & \beta_{1,2} + \gamma_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Notemos que

$$-\alpha_{2,1} = -3 \implies \alpha = 3$$

y luego

$$\beta_{2,2} = 4 \implies \beta = 4$$

y finalmente

$$\gamma = 2 - \beta_{1,2} \implies \gamma = 4$$

Ejercicio 7

Determina cuando los siguientes conjuntos son linealmente dependientes o linealmente independientes.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -3\alpha_1 \\ -2\alpha_1 & 4\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\alpha_2 & 6\alpha_2 \\ 4\alpha_2 & -8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente renglón y columna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_2 & -3\alpha_1 + 6\alpha_2 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 & 4\alpha_1 - 8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ -3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0 \\ 4\alpha_1 - 8\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Multiplicamos dos veces el renglón 3 y lo sumamos al renglón 4. También multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 3.

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ -3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Por último multiplicamos tres veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 2:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = 2\alpha_2$.

Esto indica que α_1 depende de α_2 . Por lo tanto, el conjunto $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$ es **linealmente dependiente**.

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -2\alpha_1 \\ -\alpha_1 & 4\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_2 & \alpha_2 \\ 2\alpha_2 & -4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente renglón y columna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & -2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 & 4\alpha_1 - 4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \\ 4\alpha_1 - 4\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Multiplicamos cuatro veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 4. También sumamos el renglón 1 al renglón 2:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Tenemos que $\alpha_2 = 0$, Entonces lo sustituimos en las demás ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 0 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 0 &= 0\end{aligned}$$

Es claro notar que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$.

Cómo ambos valen 0, podemos concluir que el conjunto $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ es **linealmente independiente**.

c) $\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\} \in P_3(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

Tenemos que: $0x^3 + 0x^2 + 0x + d = \alpha_1(x^3 + 2x^2) + \alpha_2(-x^2 + 3x + 1) + \alpha_3(x^3 - x^2 + 2x - 1)$

$$x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = (\alpha_1 + \alpha_3)x^3 + (2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)x^2 + (3\alpha_2 + 2\alpha_3)x + (\alpha_2 - \alpha_3).$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Ahora multiplicamos -3 veces el renglón 4 y le sumamos el renglón 1:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Podemos obtener que $\alpha_3 = 0$. Entonces sustituimos este valor en las ecuaciones.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - 0 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

De lo anterior deducimos que $\alpha_1 = 0$, por tanto:

$$\begin{aligned}0 - \alpha_2 - 0 &= 0 \\ 0 + 3\alpha_2 + 0 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. Podemos que concluir que el conjunto $\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\} \in P_3(\mathbb{R})$ es **linealmente independiente**.

d) $\{(1, -1, 2), (1, -2, 1), (1, 1, 4)\} \in \mathbb{R}^3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Entonces:

$\alpha_1(1, -1, 2) + \alpha_2(1, -2, 1) + \alpha_3(1, 1, 4) = (0, 0, 0)$. Ahora:

$(\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (\alpha_2, -2\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, 4\alpha_3) = (0, 0, 0)$. Ordenamos los escalares:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3) = (0, 0, 0)$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos a "menos" el renglón 3. También sumamos el renglón 1 al renglón 2.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 2. Y al renglón 1 le sumamos el renglón 2.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Entonces nos queda el siguiente sistema.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

De esto podemos deducir que $\alpha_1 = -3\alpha_3$, $\alpha_2 = 2\alpha_3$ y $\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{2}$.

Entonces podemos concluir que el conjunto $\{(1, -1, 2), (1, -2, 1), (1, 1, 4)\} \in \mathbb{R}^3$ es **linealmente dependiente**.

$$\mathbf{e}\{(1, -1, 2), (2, 0, 1), (-1, 2, -1)\} \in \mathbb{R}^3$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\alpha_1(1, -1, 2) + \alpha_2(2, 0, 1) + \alpha_3(-1, 2, -1) &= (0, 0, 0) \\ (\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (2\alpha_2, 0\alpha_2, \alpha_2) + (-\alpha_3, 2\alpha_3, -\alpha_3) &= (0, 0, 0) \\ (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

Ahora

Ordenamos los escalares

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Primero multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 3. Luego sumamos el renglón 2 al renglón 1.

$$\begin{aligned}0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 1:

$$\begin{aligned}0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 5\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos que $\alpha_2 = 0$ y sustituimos en las demás ecuaciones.

$$\begin{aligned}0 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Es fácilmente apreciar que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 0$

Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto $(1, -1, 2), (2, 0, 1), (-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$ es **linealmente independiente**

Recuerde que $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \mid a_k \in \mathbb{R} \forall k = 0, 1, 2, \dots, n\}$

Ejercicio 8

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son bases para \mathbb{R}^3 ?

Definición 4. Una **base** β de \mathbb{V} espacio vectorial es un subconjunto de $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{V}$ genera a \mathbb{V} y β es linealmente independiente

a) $S = \{(1, 0, -1), (2, 5, 1), (0, -4, 3)\}$ En primer lugar veamos quién es el generado del conjunto S , recordemos que un conjunto genera a otro $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos de S

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 5, 1) + \gamma(0, -4, 3)$$

$$\begin{aligned} \alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 5, 1) + \gamma(0, -4, 3) &= (\alpha, 0, -\alpha) + (2\beta, 5\beta, \beta) + (0, -4\gamma, 3\gamma) \\ &= (\alpha + 2\beta, 5\beta - 4\gamma, -\alpha + \beta + 3\gamma) \end{aligned}$$

Necesitamos que cada uno de esos vectores pueda ser el valor de una posición de \mathbb{R}^3 por lo que debería verse como

$$\alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 5, 1) + \gamma(0, -4, 3) = \delta(1, 0, 0) + \epsilon(0, 1, 0) + \eta(0, 0, 1)$$

De esta manera podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + 0\gamma &= \delta + 0\epsilon + 0\eta \\ 0\alpha + 5\beta - 4\gamma &= 0\delta + \epsilon + 0\eta \\ -\alpha + \beta + 3\gamma &= 0\delta + 0\epsilon + \eta \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma \\ -\alpha & \beta & 3\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ 0\delta & 0\epsilon & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0\delta & 0\epsilon & \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0\delta & 0\epsilon & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta \end{pmatrix} \quad \text{1ra fila} + 2\text{da fila en } \mathbf{3ra \text{ fila}}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta \end{pmatrix} \quad \text{2da fila} \cdot \frac{1}{5} \text{ en } \mathbf{2da \text{ fila}}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & \delta & -\frac{3}{5}\epsilon & \eta \end{pmatrix} \quad \text{2da fila} \cdot -3 + 3^{ra} \text{ fila en } \mathbf{3ra \text{ fila}}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & \delta & -\frac{3}{5}\epsilon & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{pmatrix} \quad \text{3ra fila} \cdot \frac{5}{27} \text{ en } \mathbf{3ra \text{ fila}}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{pmatrix} \quad \left(3ra \text{ fila} \cdot \frac{4}{5}\right) + 2^{da} \text{ fila en } \mathbf{2da \text{ fila}}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{19}{27}\delta & -\frac{2}{9}\epsilon & -\frac{8}{27}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{pmatrix} \quad \left(2da \text{ fila} \cdot -2\right) + 1^a \text{ fila en } \mathbf{1ra \text{ fila}}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{19}{27}\delta & -\frac{2}{9}\epsilon & -\frac{8}{27}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{27} & -\frac{2}{9} & -\frac{8}{27} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{27} & \frac{1}{9} & \frac{4}{27} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{27} \end{pmatrix} \quad \text{Conservando sólo } \mathbf{coeficientes}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{19}{27}\delta - \frac{2}{9}\epsilon - \frac{8}{27}\eta \\ \beta &= \frac{4}{27}\delta + \frac{1}{9}\epsilon + \frac{4}{27}\eta \\ \delta &= \frac{5}{27}\delta - \frac{1}{9}\epsilon + \frac{5}{27}\eta\end{aligned}$$

$\therefore \mathcal{S}$ genera a \mathbb{R}^3

Ahora veamos si es linealmente independiente, lo cual ocurre si la única solución para

$$\alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 5, 1) + \gamma(0, -4, 3) = 0$$

es que

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta + 0\gamma &= 0 \\ 0\alpha + 5\beta - 4\gamma &= 0 \\ -\alpha + \beta + 3\gamma &= 0\end{aligned}$$

Resolviendo dicho sistema obtenemos que

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0 \\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) & \text{1ra fila} + 2\text{da fila en } \mathbf{3ra \text{ fila}} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) & \text{2da fila} \cdot \frac{1}{5} \text{ en } \mathbf{2da \text{ fila}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & 0\end{array}\right) & \text{2da fila} \cdot -3 + 3^{ra} \text{ fila en } \mathbf{3ra \text{ fila}} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0\end{array}\right) & \text{3ra fila} \cdot \frac{5}{27} \text{ en } \mathbf{3ra \text{ fila}} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0\end{array}\right) & \text{(3ra fila} \cdot \frac{4}{5}) + 2^{da} \text{ fila en } \mathbf{2da \text{ fila}} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 2\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0\end{array}\right) & \text{(2da fila} \cdot -2) + 1^a \text{ fila en } \mathbf{1ra \text{ fila}} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) & \text{Conservando sólo } \mathbf{coeficientes}\end{aligned}$$

De esta manera podemos concluir que \mathcal{S} es **linealmente independiente**

$\therefore \mathcal{S}$ es Base para \mathbb{R}^3

$$\text{b) } S = \{(2, -4, 1), (0, 3, -1), (6, 0, -1)\}$$

Veamos quién es el generador de S , un conjunto genera a otro si todo elemento del segundo conjunto puede ser expresado como una combinación lineal del primero, en este caso elementos de S

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(2, -4, 1) + \beta(0, 3, -1) + \gamma(6, 0, -1)$$

$$\begin{aligned}\alpha(2, -4, 1) + \beta(0, 3, -1) + \gamma(6, 0, -1) &= (2\alpha, -4\alpha, \alpha) + (0, 3\beta, -\beta) + (6\gamma, 0, -\gamma) \\ &= (2\alpha + 6\gamma, -4\alpha + 3\beta, \alpha - \beta - \gamma)\end{aligned}$$

Necesitamos que cada uno de dichos vectores pueda ser el valor de una posición en \mathbb{R}^3 por lo que debería de verse como

$$\alpha(2, -4, 1) + \beta(0, 3, -1) + \gamma(6, 0, -1) = \delta(1, 0, 0) + \xi(0, 1, 0) + \eta(0, 0, 1)$$

De esta manera obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}2\alpha + 0\beta + 6\gamma &= \delta + 0\xi + 0\eta \\ -4\alpha + 3\beta + 0\gamma &= 0\delta + \xi + 0\eta \\ \alpha - \beta - \gamma &= 0\delta + 0\xi + \eta\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & 0\beta & 6\gamma \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma \\ \alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\delta & \xi & 0\eta \\ 0\delta & 0\xi & \eta \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2\alpha & 0\beta & 6\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2\alpha & 0\beta & 6\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) \quad \text{1ra fila} \cdot \frac{1}{2} \text{ en 1a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & \gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) \quad \text{(1ra fila} \cdot 4) + 2\alpha \text{ fila en 2a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) \quad \text{3ra fila} - 1\text{ra fila en 3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) \quad \text{2fa fila} \cdot \frac{1}{3} \text{ en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{1}{6}\delta & \frac{1}{3}\xi & \eta \end{array} \right) \quad \text{3ra fila} - 2\alpha \text{ fila en 3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{1}{6}\delta & \frac{1}{3}\xi & \eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) \quad \text{3a fila} \cdot 6 \text{ en 3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) \quad \text{3a fila} \cdot -\frac{2}{3} + 2\alpha \text{ fila en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & 0\delta & -\xi & -3\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) \quad \text{3a fila} \cdot -\frac{1}{2} + 1\alpha \text{ fila en 1a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & 0\delta & -\xi & -3\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right) \quad \text{Conservando sólo coeficientes}$$

Notemos que para γ tenemos que tiene ceros en la parte izquierda y puede tener valores distintos de cero en la parte derecha, por lo tanto el sistema de ecuaciones es inconsistente y consecuentemente

S no genera a \mathbb{R}^3
 $\therefore S$ no es base de \mathbb{R}^3

c) $S\{(1, 2, -1), (1, 0, 2), (2, 1, 1)\}$

Comencemos por ver quien en es generado de S , recordemos que un conjunto genera a otro si $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos para \mathcal{S}

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(1, 2, -1) + \beta(1, 0, 2) + \gamma(2, 1, 1)$$

$$\begin{aligned}\alpha(1, 2, -1) + \beta(1, 0, 2) + \gamma(2, 1, 1) &= (\alpha, 2\alpha, -\alpha) + (\beta, 0\beta, 2\beta) + (2\gamma, \gamma, \gamma) \\ &= (\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha + 0\beta + \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma)\end{aligned}$$

Es menester que cada una de esas entradas represente una en \mathbb{R}^3 pues nos gustaría ver que S genera a \mathbb{R}^3 por lo que obtenemos la siguiente ecuación

$$(\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha + 0\beta + \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma) = \delta(1, 0, 0) + \xi(0, 1, 0) + \eta(0, 0, 1)$$

y así tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + 2\gamma &= \delta + 0\xi + 0\eta \\ 2\alpha + 0\beta + \gamma &= 0\delta + \xi + 0\eta \\ -\alpha + 2\beta + \gamma &= 0\delta + 0\xi + \eta\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 2\alpha & 0\beta & \gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\delta & 0\xi & 0\eta & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\delta & \xi & 0\eta & 0\delta & \xi & 0\eta \\ 0\delta & 0\xi & \eta & 0\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 2\alpha & 0\beta & \gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 2\alpha & 0\beta & \gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right) && \text{2a fila} - 2(1a \text{ fila}) \text{ en 2a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right) && \text{1a fila} + 3a \text{ fila en 3a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right) && \text{2a fila} \cdot -\frac{1}{2} \text{ en 2a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & -2\delta & \frac{3}{2}\xi & \eta\end{array}\right) && \text{2a fila} \cdot -3 + 3a \text{ fila en 3 fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & -2\delta & \frac{3}{2}\xi & \eta\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta\end{array}\right) && \text{3a fila} \cdot -\frac{2}{3} \text{ en 3a Fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta\end{array}\right) && \text{3a fila} \cdot -\frac{3}{2} + 2a \text{ fila en 2a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 0\gamma & -\frac{5}{3}\delta & 2\xi & \frac{4}{3}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta\end{array}\right) && (3a \text{ fila} \cdot -2) + 1a \text{ fila en 1a Fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & \beta & 0\gamma & -\frac{5}{3}\delta & 2\xi & \frac{4}{3}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 0\beta & 0\gamma & -\frac{2}{3}\delta & 1\xi & \frac{1}{3}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta\end{array}\right) && \text{1a fila} - 2a \text{ fila en 1a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 0\beta & 0\gamma & -\frac{2}{3}\delta & 1\xi & \frac{1}{3}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -1 & -\frac{2}{3}\end{array}\right) && \text{Manteniendo sólo coeficientes}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{2}{3}\delta + 1\xi + \frac{1}{3}\eta \\ \beta &= -\delta + \xi + \eta \\ \gamma &= \frac{4}{3}\delta - \xi - \frac{2}{3}\eta\end{aligned}$$

$\therefore S$ genera a \mathbb{R}^3

Ahora veamos si el linealmente independiente, lo cual ocurre si la única solución a la siguiente ecuación es que todos los coeficientes sean 0

$$\begin{aligned}\alpha(1, 2, -1) + \beta(1, 0, 2) + \gamma(2, 1, 1) &= 0 \\ (\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha + 0\beta + \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma) &= 0\end{aligned}$$

Lo cual permite formar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \\ 2\alpha + 0\beta + \gamma &= 0 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 2\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\end{array}\right) && \text{2a fila} - 2(1a \text{ fila}) \text{ en 2a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) && \text{1a fila} + 3a \text{ fila en 3a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) && \text{2a fila} \cdot -\frac{1}{2} \text{ en 2a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & 0\end{array}\right) && \text{2a fila} \cdot -3 + 3a \text{ fila en 3 fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0\end{array}\right) && \text{3a fila} \cdot -\frac{2}{3} \text{ en 3a Fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0\end{array}\right) && \text{3a fila} \cdot -\frac{3}{2} + 2a \text{ fila en 2a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0\end{array}\right) && (3a \text{ fila} \cdot -2) + 1a \text{ fila en 1a Fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & \beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0\end{array}\right) && \text{1a fila} - 2a \text{ fila en 1a fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) && \text{Manteniendo sólo coeficientes}\end{aligned}$$

Así podemos concluir que S es linealmente independiente

$\therefore S$ es base para \mathbb{R}^3

Ejercicio 9

Diga si los siguientes $x^3 - 2x^2 + 1, 4x^2 - x + 3y3x - 2$ generan a $P_3(\mathbb{R})$

Sea $ax^3 + bx^2 + cx + d \in (\mathbb{R})$.

Tomamos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in (\mathbb{R})$. Entonces:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (\alpha_1)x^3 + (-2\alpha_1 + 4\alpha_2)x^2 + (\alpha_2 + 3\alpha_3)x + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3)$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= b \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 &= c \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Sustituimos α_1 en las demás ecuaciones

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ -2a + 4\alpha_2 &= b \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 &= c \\ a + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Del renglón 2 es fácil apreciar cuál es el valor de α_2

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 &= c \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

De igual forma sustituimos α_2 en las demás ecuaciones.

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ -\left(\frac{b+2a}{4}\right) + 3\alpha_3 &= c \\ a + 3\left(\frac{b+2a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Observamos que tenemos 2 ecuaciones, en las cuáles sólo hay un valor a encontrar, entonces en estas dos ecuaciones procedemos a encontrar el valor de α_3 . Primero comenzaremos con el renglón 3.

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ 3\alpha_3 &= \frac{4c}{4} + \left(\frac{b+2a}{4}\right) \\ a + 3\left(\frac{b+2a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ \alpha_3 &= \frac{\frac{4c+b+2a}{4}}{3} \\ a + 3\left(\frac{b+2a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Obtenemos el primer valor de α_3 :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ \alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\ a + 3\left(\frac{b+2a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

Encontraremos el valor de α_3 en la ecuación cuatro.

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ \alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\ a + \left(\frac{b+2a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ \alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\ 2\alpha_3 &= a + \left(\frac{3b+6a}{4}\right) - d\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ \alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\ 2\alpha_3 &= \frac{4a}{4} + \left(\frac{3b+6a}{4}\right) - \frac{4d}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ \alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\ \alpha_3 &= \frac{\frac{3b+10a-4d}{4}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ \alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\ \alpha_3 &= \frac{3b+10a-4d}{8}\end{aligned}$$

Una vez que encontramos los valores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, para ver que el conjunto dado genera a cualquier polinomio de grado tres, damos algún polinomio y este tendrá que poder escribirse como combinación lineal los elementos del conjunto y los escalares.

Elegimos el polinomio $5x^3 + 2x^2x + 2$. Ahora encontraremos los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ para poder escribirlo de la manera:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (\alpha_1)x^3 + (-2\alpha_1 + 4\alpha_2)x^2 + (\alpha_2 + 3\alpha_3)x + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3)$$

Utilizando los resultados del sistema de ecuaciones tenemos que:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 5 \\ \alpha_2 &= 3 \\ \alpha_3 &= 6 \\ \alpha_3 &= \frac{20}{12}\end{aligned}$$

Como podemos apreciar los valores de α_3 no son los mismos, y esto es debido a que originalmente teníamos un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas, entonces el sistema tiene diversas soluciones y al encontrar que los resultados de las ecuaciones de α_3 no son el mismo, podemos concluir que el conjunto $x^3 - 2x^2 + 1, 4x^2 - x + 3y3x - 2$ **NO** generan a $P_3(\mathbb{R})$

Ejercicio 10

Prueba que las siguientes transformaciones T son lineales y encuentra el núcleo $Nu(T)$ y la imagen $Im(T)$

Definición 5. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, la **imagen** de una transformación T es $Im(T) = \{T(\hat{x}) | \hat{x} \in V\}$

Definición 6. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, el **núcleo** de una transformación T es $Nu(T) = \{\hat{x} \in V | T(\hat{x}) = \hat{0}_W\}$

a) $\{T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2\}$ definida por $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, 2a_3)$ Para ver que una transformación es lineal, debe cumplir que **abra sumas y saque escalares**

Sean $\hat{a}_1, \hat{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ y $\xi \in \mathbb{R}$ entonces

$\xi a_1 + a_2 = \xi(x_1, y_1, z_1) + (x_1, y_2, z_2)$	Por definición de a_1 y a_2
$\xi a_1 + a_2 = (\xi x_1, \xi y_1, \xi z_1) + (x_2, y_2, z_2)$	Por distributividad de los \mathbb{R}
$\xi a_1 + a_2 = (\xi x_1 + x_2, \xi y_1 + y_2, \xi z_1 + z_2)$	Sumando entrada por entrada
$T(\xi a_1 + a_2) = T(\xi x_1 + x_2, \xi y_1 + y_2, \xi z_1 + z_2)$	Aplicando T
$T(\xi a_1 + a_2) = ((\xi x_1 + x_2) - (\xi y_1 + y_2), 2(\xi z_1 + z_2))$	Siguiendo la regla de T
$T(\xi a_1 + a_2) = (\xi x_1 + x_2 - \xi y_1 - y_2, 2\xi z_1 + 2z_2)$	Por asociatividad
$T(\xi a_1 + a_2) = (\xi x_1 - \xi y_1 + x_2 - y_2, 2\xi z_1 + 2z_2)$	Por conmutatividad
$T(\xi a_1 + a_2) = ((\xi x_1 - \xi y_1) + (x_2 - y_2), 2\xi z_1 + 2z_2)$	Asociatividad nuevamente
$T(\xi a_1 + a_2) = (\xi x_1 - \xi y_1, 2\xi z_1) + (x_2 - y_2, 2z_2)$	Asociatividad entre elementos en \mathbb{R}^2
$T(\xi a_1 + a_2) = \xi(x_1 - y_1, 2z_1) + (x_2 - y_2, 2z_2)$	Por distributividad de ξ
$T(\xi a_1 + a_2) = \xi T(a_1) + T(a_2)$	Por definición de T

$\therefore T$ es transformación lineal

Ahora veamos quién es el núcleo de la transformación igualando a $\hat{0}_{\mathbb{R}^2}$ sea $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$

$T(\hat{x}) = \hat{0}_{\mathbb{R}^2}$	Planteando la igualdad
$T(\hat{x}) = (0, 0)$	Por definición del neutro aditivo en \mathbb{R}^2
$T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)$	Porque $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$
$(x_1 - x_2, 2x_3) = (0, 0)$	Por definición de T
$x_1 - x_2 = 0$	Obtenemos el siguiente sistema
$2x_3 = 0$	
$x_3 = 0$	Por lo que tenemos
$x_1 = x_2$	y por otra parte

\therefore el núcleo de la transformación son todos los elementos cuya primera y segunda coordenada son la misma y la tercera 0.

$$i.e. Nu(T) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | (x_1, x_1, 0)\}$$

Finalmente observemos que la imagen de la transformación es:

Sean $\hat{y} \in \mathbb{R}^2$ y $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$ veamos que

$T(\hat{x}) = \hat{y}$	Para ver la forma de los elementos en la imagen
$T(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2)$	Por definición de \hat{y}, \hat{x}
$(x_1 - x_2, 2x_3) = (y_1, y_2)$	Usando la regla de correspondencia de T
$x_1 - x_2 = y_1$	Obtenemos que y_1 es de esa forma
$2x_3 = y_2$	y que y_2 se obtiene de esta manera

Es menester mencionar que la suma (diferencia) entre elementos de \mathbb{R} es algún otro elemento en \mathbb{R} por lo que la imagen de T es todo \mathbb{R}^2

b) $\{T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ definida por $(a_1, a_2) \mapsto (a_1 + a_2, 0, 2a_1 - a_2)$ Para ver que una transformación es lineal, debe cumplir que **abra sumas y saque escalares**

Sean $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^3$ y $\theta \in \mathbb{R}$ entonces

$\theta\hat{x} + \hat{y} = \theta(a, b) + (c, d)$	Por definición de \hat{x}, \hat{y}
$\theta\hat{x} + \hat{y} = (\theta a, \theta b) + (c, d)$	Distributividad en \mathbb{R}
$\theta\hat{x} + \hat{y} = (\theta a + c, \theta b + d)$	Sumando entrada a entrada
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = T(\theta a + c, \theta b + d)$	Aplicando T en ambos lados
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = ((\theta a + c) + (\theta b + d), 0, 2(\theta a + c) - (\theta b + d))$	Aplicando la regla de correspondencia
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = (\theta a + \theta b + c + d, 0, 2\theta a + 2c - \theta b - d)$	Asociatividad en \mathbb{R}
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = ((\theta a + \theta b) + (c + d), 0, (2\theta a - \theta b) + (2c - d))$	Asociatividad y distributividad en \mathbb{R}
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = (\theta a + \theta b, 0, 2\theta a - \theta b) + (c + d, 0, 2c - d)$	Asociatividad
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = \theta(a + b, 0, 2a - b) + (c + d, 0, 2c - d)$	Distributividad <i>inversa</i>
$T(\theta\hat{x} + \hat{y}) = \theta T(\hat{x}) + T(\hat{y})$	Definición de T

$\therefore T$ es transformación lineal

Revisemos cuál es el núcleo de la transformación lineal, tomando un elemento en el dominio y viendo qué forma tienen los elementos que irán al neutro aditivo de su codominio.

Sea $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ entonces

$T(\hat{x}) = \hat{0}_{\mathbb{R}^3}$	Planteando la igualdad
$T(x_1, x_2) = \hat{0}_{\mathbb{R}^3}$	Por la forma de \hat{x}
$T(x_1, x_2) = (0, 0, 0)$	Por la forma de $\hat{0}_{\mathbb{R}^3}$
$(x_1 + x_2, 0, 2x_1 - x_2) = (0, 0, 0)$	Aplicando la regla de correspondencia de T

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 \\ 2x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Deducimos lo siguiente

Y la única manera de que eso ocurra es que

$$x_1 = x_2 = 0$$

\therefore el núcleo de la transformación es $(0, 0)$

Finalmente notemos que la imagen de la transformación está dada por lo siguiente.

Sea $\hat{y} \in \mathbb{R}^3$ y $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ de la forma

$$\hat{y} = (y_1, y_2, y_3) \quad \hat{x} = (x_1, x_2)$$

entonces

$T(\hat{x}) = \hat{y}$	Para ver de qué forma son los elementos
$T(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3)$	Usando su representación
$(x_1 + x_2, 0, 2x_1 - x_2) = (y_1, y_2, y_3)$	Por la regla de correspondencia de T

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= y_1 \\ 0 &= y_2 \\ 2x_1 - x_2 &= y_3 \end{aligned}$$

Igualamos entrada a entrada

Obteniendo lo siguiente

Se deduce de lo anterior

Es importante mencionar que la suma de elementos en \mathbb{R} es algún elemento en \mathbb{R} pues la suma es cerrada en dicho conjunto. Por lo que podemos deducir que la imagen de T es

$$Im(T) = \{(x_1, 0, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

c) $\{T : M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})\}$ definido por

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sean $A, B \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A + B = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \quad \text{Por definición de A y B}$$

$$\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \quad \text{Distributividad de } \lambda$$

$$\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + b_{11} & \lambda a_{12} + b_{12} & \lambda a_{13} + b_{13} \\ \lambda a_{21} + b_{21} & \lambda a_{22} + b_{22} & \lambda a_{23} + b_{23} \end{pmatrix} \quad \text{Definición de } + \text{ en } M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

$$T(\lambda A + B) = T \left(\begin{pmatrix} \lambda a_{11} + b_{11} & \lambda a_{12} + b_{12} & \lambda a_{13} + b_{13} \\ \lambda a_{21} + b_{21} & \lambda a_{22} + b_{22} & \lambda a_{23} + b_{23} \end{pmatrix} \right) \quad \text{Aplicando T en ambos miembros}$$

$$T(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} 2(\lambda a_{11} + b_{11}) - (\lambda a_{12} + b_{12}) & \lambda a_{13} + b_{13} + 2(\lambda a_{12} + b_{12}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Siguiendo la regla de transformación de T}$$

$$T(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} 2\lambda a_{11} + 2b_{11} - \lambda a_{12} - b_{12} & \lambda a_{13} + b_{13} + 2\lambda a_{12} + 2b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Distributividad}$$

$$T(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} (2\lambda a_{11} - \lambda a_{12}) + (2b_{11} - b_{12}) & (\lambda a_{13} + 2\lambda a_{12}) + (b_{13} + 2b_{12}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Asociatividad en } \mathbb{R}$$

$$T(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} 2\lambda a_{11} - \lambda a_{12} & \lambda a_{13} + 2\lambda a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_{11} - b_{12} & b_{13} + 2b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Asociatividad en } M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

$$T(\lambda A + B) = \lambda \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_{11} - b_{12} & b_{13} + 2b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Distributividad inversa en } \lambda$$

$$T(\lambda A + B) = \lambda T(A) + T(B) \quad \text{Definición de } T(A), T(B)$$

$\therefore T$ es transformación lineal

Veamos cuál es el núcleo de la transformación.

Sea $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$

$$T(A) = \hat{0}_{M_{2 \times 2}} \quad \text{Planteando la igualdad}$$

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Planteando la igualdad}$$

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Por la regla de correspondencia de T}$$

$$2a_{11} - a_{12} = 0 \quad \text{Obtenemos esto}$$

$$a_{13} + 2a_{12} = 0$$

$$a_{11} = \frac{a_{12}}{2} \quad \text{Finalmente conseguimos}$$

$$a_{13} = -2a_{12}$$

\therefore El **núcleo** de T son todas las matrices en $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que $a_{11} = \frac{a_{12}}{2}$ y que $a_{13} = -2a_{12}$ sin importar las entradas a_{21}, a_{22}, a_{23}

Para ver quién es la imagen de T tomemos un elemento en el dominio e igualémoslo con un elemento del codominio *i.e.* Sea $\hat{B} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y $\hat{A} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$

$$T(\hat{A}) = \hat{B}$$

Planteando la igualdad

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Planteando la igualdad

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Por la regla de correspondencia de T

$$2a_{11} - a_{12} = b_{11}$$

$$a_{13} + 2a_{12} = b_{12}$$

$$0 = b_{21} = b_{22}$$

Obtenemos esto

$$a_{11} = \frac{a_{12}}{2}$$

$$a_{13} = -2a_{12}$$

Finalmente conseguimos

veamos que $2a_{11} - a_{12} \in \mathbb{R}$, $a_{13} + 2a_{12} \in \mathbb{R}$
 Por lo que podemos concluir que la **imagen** de T son todas las matrices en $M_{22}(\mathbb{R})$ $\cdot \ni \cdot$ $b_{21} = b_{22} = 0$

d) $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})$ definida por $T(f(x)) = xf(x) + f'(x)$. Para ver que una transformación es lineal, debe cumplir que **abra sumas y saque escalares**
 Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{R}^3$ y $\psi \in \mathbb{R}$ donde

$$p(x) = a + bx + cx^2 \quad q(x) = d + ex + fx^2$$

entonces

$$\psi p(x) + q(x) = \psi(a + bx + cx^2) + (d + ex + fx^2)$$

Definición de $p(x), q(x)$

$$\psi p(x) + q(x) = (\psi a + \psi bx + \psi cx^2) + (d + ex + fx^2)$$

Distributividad de ψ

$$\psi p(x) + q(x) = (\psi a + d + \psi bx + ex + \psi cx^2 + fx^2)$$

Asociatividad

$$T(\psi p(x) + q(x)) = T(\psi a + d + \psi bx + ex + \psi cx^2 + fx^2)$$

Aplicando T en ambos miembros

$$T(\psi p(x) + q(x)) = \psi ax + dx + \psi bx^2 + ex^2 + \psi cx^3 + fx^3 + \psi b + e + \psi 2cx + 2fx$$

Usando la regla de correspondencia

$$T(\psi p(x) + q(x)) = \psi ax + \psi b + \psi bx^2 + \psi cx^2 + \psi 2cx + e + dx + ex^2 + fx^3 + 2fx$$

Conmutatividad en \mathbb{R}

$$T(\psi p(x) + q(x)) = (\psi ax + \psi b + \psi bx^2 + \psi cx^3 + \psi 2cx) + (e + dx + ex^2 + fx^3 + 2fx)$$

Asociatividad en \mathbb{R}

$$T(\psi p(x) + q(x)) = \psi(ax + b + bx^2 + cx^3 + 2cx) + (e + dx + ex^2 + 2fx + fx^2)$$

Distributividad *inversa* en \mathbb{R}

$$T(\psi p(x) + q(x)) = \psi T(p(x)) + T(q(x))$$

Definición de $T(p(x)), T(q(x))$

$\therefore T$ es transformación lineal

Veamos quien es el núcleo de la transformación para lo que necesitaremos tomar un $f(x) \in P_2(\mathbb{R})$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Por la forma de $f(x)$

$$T(f(x)) = x(a_0 + a_1x + a_2x^2) + a_1 + 2a_2x$$

Aplicando la regla de correspondencia

$$T(f(x)) = a_1 + a_0x + 2a_2x + a_1x^2 + a_2x^3$$

Distributividad

$$T(f(x)) = a_1 + (a_0 + 2a_2)x + a_1x^2 + a_2x^3$$

Distributividad *inversa* y asociatividad

y ahora igualemos este resultado con $\hat{0}_{P_3(\mathbb{R})}$

$$a_1 + (a_0 + 2a_2)x + a_1x^2 + a_2x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \quad \text{igualemos entrada a entrada}$$

$$\begin{array}{ll} a_1 = 0 & \text{Primera entrada} \\ a_0 + 2a_2 = 0 & \text{Segunda entrada} \\ a_1 = 0 & \text{Tercera entrada} \\ a_2 = 0 & \text{Cuarta entrada} \end{array}$$

Por lo tanto el **núcleo** de la transformación es el polinomio en $P_2(\mathbb{R})$ $\cdot \ni \cdot$ $a_2 = a_1 = a_0 = 0$

Por último veamos quién es la imagen de la transformación lineal.

Sea $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \in P_3(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ll} T(f(x)) = q(x) & \text{Planteamos la igualdad} \\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 & \text{Por definición de } f(x) \text{ y } q(x) \\ a_1 + (a_0 + 2a_2)x + a_1x^2 + a_2x^3 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 & \text{Por la regla de correspondencia de T} \end{array}$$

Notemos que el término constante y el cuadrático son el mismo por lo que la imagen de la transformación son todos los polinomios en

$$p(x) \in P_3(\mathbb{R}) \quad \cdot \ni \cdot \quad p(x) = a + (c + 2b)x + ax^2 + bx^3$$

Ejercicio 11

Sean β y γ las bases estándar para \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m respectivamente. Para cada transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ encontrar su representación matricial.

Definición 7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y β una base ordenada de V si $\vec{x} \in V$ entonces existen

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \cdot \ni \cdot \quad \vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots$$

donde $\vec{v}_i \in \beta$ entonces definimos al vector de coordenadas de \vec{x} con respecto a la base β como

$$[\vec{x}]_\beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Definición 8. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y β, γ sus respectivas bases. Además consideremos $T : V \rightarrow W$ transformación lineal, entonces definimos a la matriz asociada a la función T de la base β en la base γ como

$$[T]_\beta^\gamma$$

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(a_1, a_2) = (2a_1 - a_2, 3a_1 + 4a_2, a_1)$

Tomemos en cuenta que las bases estándar de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ son respectivamente, las siguientes

$$\beta = \{(1, 0), (0, 1)\} \quad \gamma = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Ahora, con el primer elemento de la base β apliquemos la transformación lineal

$$\begin{array}{ll} T(1, 0) = (2(1) - 0, 3(1) + 4(0), 1) & \text{Usando la regla de correspondencia} \\ T(1, 0) = (2, 3, 1) & \text{Por neutro aditivo y multiplicativo} \end{array}$$

Luego, escribamos a $(2, 3, 1)$ como combinación lineal de γ

$$\begin{aligned}(2, 3, 1) &= \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) && \text{Coeficientes en el campo} \\(2, 3, 1) &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) && \text{Distribuyendo y sumando} \\2 &= \alpha_1 && \text{Valores resultantes} \\3 &= \alpha_2 && \text{Valores resultantes} \\1 &= \alpha_3 && \text{Valores resultantes}\end{aligned}$$

Con lo que ahora tenemos podemos construir

$$[T(1, 0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Empleemos el segundo elemento de la base β para aplicarle la transformación lineal

$$\begin{aligned}T(0, 1) &= (2(0) - 1, 3(0) + 4(1), 0) && \text{Por la regla de correspondencia de T} \\T(0, 1) &= (-1, 4, 0) && \text{Distributividad, neutro aditivo y multiplicativo}\end{aligned}$$

Ahora escribamos a $(-1, 4, 0)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned}(-1, 4, 0) &= \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) && \text{Coeficientes en el campo} \\(-1, 4, 0) &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) && \text{Distribuyendo y sumando entrada a entrada} \\-1 &= \alpha_1 && \text{Valor del coeficiente} \\4 &= \alpha_2 && \text{Valor del coeficiente} \\0 &= \alpha_3 && \text{Valor del coeficiente}\end{aligned}$$

Entonces el vector de coordenadas asociado a $(0, 1)$ es

$$[T(0, 1)]_\gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz asociada a la transformación T es

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 + 3a_2 - a_3, a_1 + a_3)$

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \quad \gamma = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

Tomemos el primer elemento de la base canónica β para aplicar la transformación lineal T

$$\begin{aligned}T(1, 0, 0) &= (2(1) + 3(0) - (0), (1) + (0)) && \text{Usando la regla de correspondencia} \\T(1, 0, 0) &= (2, 1) && \text{Por neutro aditivo, neutro multiplicativo}\end{aligned}$$

Ahora veamos a $(2, 1)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned}(2, 1) &= \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) && \text{Donde } \alpha_1, \alpha_2 \text{ son coeficientes del campo} \\(2, 1) &= (\alpha_1, \alpha_2) && \text{Distribuyendo y sumando vectores} \\2 &= \alpha_1 && \text{Igualando entrada a entrada} \\1 &= \alpha_2 && \text{Igualando entrada a entrada}\end{aligned}$$

Por lo que ya podemos ver que

$$[T(1, 0, 0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Empleemos la transformación lineal con el segundo elemento de la base β

$$T(0, 1, 0) = (2(0) + 3(1) - 0, 0 + 1)$$

$$T(0, 1, 0) = (3, 1)$$

Usando la regla de correspondencia de T
Multiplicando y sumando neutros aditivos

Ahora veamos como combinación lineal de elementos de la base γ a $(3, 1)$

$$(3, 1) = \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1)$$

$$(3, 1) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Distribuyendo y sumando entrada con entrada

$$3 = \alpha_1$$

$$1 = \alpha_2$$

Igualando las entradas

Igualando las entradas

Y así podemos construir

$$[T(0, 1, 0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por último tomemos el tercer elemento de la base β para aplicar la transformación lineal

$$T(0, 0, 1) = (2(0) + 3(0) - 1, 0 + 1)$$

$$T(0, 0, 1) = (-1, 1)$$

Por la regla de correspondencia de T

Sumando y multiplicando respectivamente

Ahora veamos a $(-1, 1)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$(-1, 1) = \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1)$$

$$(-1, 1) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Distribuyendo y sumando

$$-1 = \alpha_1$$

$$1 = \alpha_2$$

Igualamos entrada correspondiente

Igualamos entrada correspondiente

De tal forma que el vector de coordenadas asociado a $T(0, 0, 1)$ es

$$[T(0, 0, 1)]_\gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y ahora que contamos con todos los coeficientes podemos construir la matriz asociada a la transformación lineal T como

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $T(a_1, a_2, a_3) = 2a_1 + a_2 - 3a_3$

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \quad \gamma = \{1\}$$

En este ejercicio tenemos un caso un tanto trivial pues la base estándar de \mathbb{R} es el neutro multiplicativo, así que sólo bastará con aplicar la transformación lineal a elementos de β para obtener los coeficientes de la matriz asociada a dicha

transformación.

$$T(1, 0, 0) = 2(1) + 0 - 3(0)$$

Por la regla de correspondencia

$$T(1, 0, 0) = 2$$

Operando

$$T(0, 1, 0) = 2(0) + 1 - 3(0)$$

Por la regla de correspondencia

$$T(0, 1, 0) = 1$$

Simplificando

$$T(0, 0, 1) = 2(0) + 0 - 3(1)$$

Por la regla de correspondencia

$$T(0, 0, 1) = -3$$

Efectuando los productos

Finalmente la matriz asociada a esta transformación es

$$[T]_{\beta}^{\gamma} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

d) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(a_1, a_2, a_3) = (2a_2 + a_3, -a_1 + 4a_2 + 5a_3, a_1 + a_3)$

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \quad \gamma = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Tomemos el primer elemento de la base β y apliquemos la transformación lineal

$$T(1, 0, 0) = (2(0) + (0), -(1) + 4(0) + 5(0), (1) + (0))$$

Usando la regla de correspondencia

$$T(1, 0, 0) = (0, -1, 1)$$

Ahora veamos a $(0, -1, 1)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$(0, -1, 1) = \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1)$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$(0, -1, 1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

Distribuyendo y sumando

$$0 = \alpha_1$$

Igualando entradas

$$-1 = \alpha_2$$

Igualando entradas

$$1 = \alpha_3$$

Igualando entradas

De esta manera podemos construir el vector de coordenadas asociado

$$[T(1, 0, 0)]_{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomemos el segundo elemento de la base β y apliquemos la transformación lineal

$$T(0, 1, 0) = (2(1) + (0), -(0) + 4(1) + 5(0), (0) + (0))$$

Usando la regla de correspondencia

$$T(0, 1, 0) = (2, 4, 0)$$

Ahora veamos a $(2, 4, 0)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$(2, 4, 0) = \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1)$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$(2, 4, 0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

Distribuyendo y sumando

$$2 = \alpha_1$$

Igualando entradas

$$4 = \alpha_2$$

Igualando entradas

$$0 = \alpha_3$$

Igualando entradas

De esta manera podemos construir el vector de coordenadas asociado

$$[T(0, 1, 0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tomemos el tercer elemento de la base β y apliquemos la transformación lineal

$$\begin{aligned} T(0, 0, 1) &= (2(0) + (1), -(0) + 4(0) + 5(1), (0) + (1)) \\ T(0, 0, 1) &= (1, 5, 1) \end{aligned} \quad \text{Usando la regla de correspondencia}$$

Ahora veamos a $(1, 5, 1)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned} (1, 5, 1) &= \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) \\ (1, 5, 1) &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Donde } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \\ \text{Distribuyendo y sumando} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 & \text{Igualando entradas} \\ 5 &= \alpha_2 & \text{Igualando entradas} \\ 1 &= \alpha_3 & \text{Igualando entradas} \end{aligned}$$

De esta manera podemos construir el vector de coordenadas asociado

$$[T(0, 0, 1)]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por último construyamos la matriz asociada a la transformación T

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 12

Para cada uno de los siguientes pares de bases β y β' para \mathbb{R}^2 , encuentra la matriz de cambio de coordenadas que cambia las coordenadas de β' en las de β .

a) $\beta = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ y $\beta' = \{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\}$

Veamos a la base $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de tal manera que

$$\begin{aligned} (1, 0) &= \alpha_1(a_1, a_2) + \alpha_2(b_1, b_2) \\ (1, 0) &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1, \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1 \\ 0 &= \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (0, 1) &= \alpha_1(a_1, a_2) + \alpha_2(b_1, b_2) \\ (0, 1) &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1, \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1 \\ 1 &= \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 \end{aligned}$$

Finalmente la matriz de cambio de base es

) (

b) $\beta = \{(-1, 3), (2, -1)\}$ y $\beta' = \{(0, 10), (5, 0)\}$

Veamos al primer elemento de la base β como combinación lineal de elementos de la base β'

$$(-1, 3) = \alpha_1(0, 10) + \alpha_2(5, 0)$$

$$(-1, 3) = (0, 10\alpha_1) + (5\alpha_2, 0)$$

$$(-1, 3) = 5\alpha_2, 10\alpha_1)$$

$$-1 = 5\alpha_2$$

$$3 = 10\alpha_1$$

$$\frac{3}{10} = \alpha_1$$

$$-\frac{1}{5} = \alpha_2$$

Hagamos lo mismo para el segundo elemento en la base β

$$(2, -1) = \alpha_1(0, 10) + \alpha_2(5, 0)$$

$$(2, -1) = (0, 10\alpha_1) + (5\alpha_2, 0)$$

$$(2, -1) = 5\alpha_2, 10\alpha_1)$$

$$2 = 5\alpha_2$$

$$-1 = 10\alpha_1$$

$$-\frac{1}{10} = \alpha_1$$

$$\frac{2}{5} = \alpha_2$$

Finalmente la matriz de cambio de base es

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

c) $\beta = \{(2, 5), (-1, -3)\}$ y $\beta' = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$

Encontremos la combinación lineal de elementos de la base β' para el primer elemento de la base β

$$(2, 5) = \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1)$$

$$(2, 5) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

$$2 = \alpha_1$$

$$5 = \alpha_2$$

Ahora hagamos lo mismo con el otro elemento de la base β

$$(-1, -3) = \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1)$$

$$(-1, -3) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

$$-1 = \alpha_1$$

$$-3 = \alpha_2$$

Por lo tanto, la matriz de cambio de base es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

d) $\beta = \{(-4, 3), (2, -1)\}$ y $\beta' = \{(2, 1), (-4, 1)\}$

Veamos al primer vector de la base β como combinación lineal de la base β'

$$(-4, 3) = \alpha_1(2, 1) + \alpha_2(-4, 1)$$

$$(-4, 3) = (2\alpha_1, \alpha_1) + (-4\alpha_2, \alpha_2)$$

$$(-4, 3) = (2\alpha_1 - 4\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$-4 = 2\alpha_1 - 4\alpha_2$$

$$3 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\frac{4}{3} = \alpha_1$$

$$\frac{5}{3} = \alpha_2$$

Hagamos lo mismo con el segundo vector

$$(2, -1) = \alpha_1(2, 1) + \alpha_2(-4, 1)$$

$$(2, -1) = (2\alpha_1, \alpha_1) + (-4\alpha_2, \alpha_2)$$

$$(2, -1) = (2\alpha_1 - 4\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$2 = 2\alpha_1 - 4\alpha_2$$

$$-1 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$-\frac{1}{3} = \alpha_1$$

$$-\frac{2}{3} = \alpha_2$$

Finalmente la matriz de cambio de base es

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13

Encontrar la matriz inversa por el método de *Gauss-Jordan* de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Adjuntemos la matriz I_2 de tal manera que obtengamos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{lcl} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) & \text{1a Fila} \cdot -1 + 2\text{a Fila en 2a Fila} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) & \text{2a Fila} \cdot -1 \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) & \text{2a Fila} \cdot -2 + 1\text{a Fila en 1a Fila} \end{array}$$

\therefore la inversa de la matriz dada es $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Adjuntamos la matriz I_2 de tal manera que obtengamos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) && \text{1a Fila} \cdot -2 + 2^a \text{ en 2a Fila} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) && \text{2a Fila} \cdot -\frac{1}{2} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) && \text{2a Fila} \cdot -1 + 1a \text{ fila en 1a fila} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2 \implies \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ Es singular}$$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Adjuntamos la matriz I_3 de tal manera que obtengamos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) && \text{1a fila} \cdot -1 + 2^a \text{ fila en 2a Fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) && \text{1a fila} \cdot -2 + 3a \text{ fila} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) && \text{2a fila} + 3a \text{ fila en 3a fila} \end{aligned}$$

Observemos que

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_3 \implies \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ Es singular}$$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Adjuntamos la matriz I_3 de tal manera que obtengamos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{Intercambiar la 1a fila por la 2a} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{1a fila} \cdot -2 + 3^a \text{ Fila en 3a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{Multiplicar 2a fila} \cdot -\frac{1}{2} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{2a fila} \cdot -2 + 3^a \text{ fila en 3a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{3a fila} \cdot 2 + 2^a \text{ fila en 2a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{3a fila} + 1^a \text{ fila en 1a fila} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{2a fila} \cdot -1 + 1^a \text{ fila en 1a fila} \\
\therefore \left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{2} & 3 & -1 \\ \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \text{ es la inversa de } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{array}\right)
\end{array}$$

Ejercicio 14

Calcular el determinante de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Definición 9. Definimos a $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ como el espacio vectorial de las matrices de 2×2 con coeficientes en los \mathbb{R} de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Definición 10. Sea $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \quad \cdot \cdot \cdot \quad a = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Entonces el determinante de A está definido como $\det(A) = ad - bc$ por la definición de determinante tenemos que

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (6)(4) - (-3)(2) \\
\det(A) &= 24 + 6 \\
\therefore \det(A) &= 30
\end{aligned}$$

b) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

Por la definición de determinante tenemos que

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-5)(1) - (-3)(2) \\
\det(A) &= (-5) - (-6) \\
\det(A) &= -5 + 6 \\
\det(A) &= 1
\end{aligned}$$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Definición 11. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ si $n < 1$ entonces $A = (A_{11})$ entonces $\det(A) = A_{11}$ para $n \geq 2$ definimos el determinante de manera recursiva como

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n(\text{dimen.})} (-1)^{1+j} A_{1j} \det(\hat{A}_{1j})$$

Y así, por la definición de $\det(A)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^3 A_{1j} \det(\hat{A}_{1j}) \\ \det(A) &= (-1)^2 A_{11} \det(\hat{A}_{11}) + (-1)^3 A_{12} \det(\hat{A}_{12}) + (-1)^4 A_{13} \det(\hat{A}_{13}) \\ \det(A) &= A_{11} \det(\hat{A}_{11}) - A_{12} \det(\hat{A}_{12}) + A_{13} \det(\hat{A}_{13}) \\ \det(A) &= (0) \det(\hat{A}_{11}) - (-1) \det(\hat{A}_{12}) + (2) \det(\hat{A}_{13}) \\ \det(A) &= -\det(\hat{A}_{12}) + 2 \det(\hat{A}_{13}) \end{aligned}$$

Por la definición de determinantes en $M_{2 \times 2}$

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}_{12}) &= ad - bc \\ \det(\hat{A}_{12}) &= (-1)(0) - (-3)(2) \\ \det(\hat{A}_{12}) &= 6 \end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}_{13}) &= ad - bc \\ \det(\hat{A}_{13}) &= (-1)(3) - (0)(2) \\ \det(\hat{A}_{13}) &= -3 \end{aligned}$$

Sustituyendo del $\det(\hat{A}_{12})$ y $\det(\hat{A}_{13})$ en $\det(A)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \det(A) &= -1(6) + 2(-3) \\ \det(A) &= -6 - 6 \\ \therefore \det(A) &= -12 \end{aligned}$$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Por la definición de determinante en $M_{n \times n}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^4 (-1)^{1+j} A_{1j} \det(\hat{A}_{1j}) \\ \det(A) &= (-1)^2 A_{11} \det(\hat{A}_{11}) + (-1)^3 A_{12} \det(\hat{A}_{12}) + (-1)^4 A_{13} \det(\hat{A}_{13}) + (-1)^5 A_{14} \det(\hat{A}_{14}) \\ \det(A) &= A_{11} \det(\hat{A}_{11}) - A_{12} \det(\hat{A}_{12}) + A_{13} \det(\hat{A}_{13}) - A_{14} \det(\hat{A}_{14}) \\ \det(A) &= (0) \det(\hat{A}_{11}) - 2 \det(\hat{A}_{12}) + \det(\hat{A}_{13}) - 3 \det(\hat{A}_{14}) \\ \det(A) &= -2 \det(\hat{A}_{12}) + \det(\hat{A}_{13}) - 3 \det(\hat{A}_{14}) \end{aligned}$$

Sea $\hat{A}_{12} = B$

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} B_{1j} \det(\hat{B}_{1j}) \\ \det(B) &= (-1)^2 B_{11} \det(\hat{B}_{11}) + (-1)^3 B_{12} \det(\hat{B}_{12}) + (-1)^4 B_{13} \det(\hat{B}_{13}) \\ \det(B) &= (1)(1) \det(\hat{B}_{11}) + (-1)(-2) \det(\hat{B}_{12}) + (1)(2) \det(\hat{B}_{13}) \\ \det(B) &= \det(\hat{B}_{11}) + 2 B_{12} \det(\hat{B}_{12}) + 2 \det(\hat{B}_{13}) \end{aligned}$$

Como $\hat{B}_{11}, \hat{B}_{12}, \hat{B}_{13} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ usaremos la definición para calcular el determinante en este tipo de matrices por lo que

$$\det(\hat{B}_{11}) = ad - bc = 0(0) - (1)(2) = -2$$

$$\det(\hat{B}_{12}) = ad - bc = 3(0) - (1)(-1) = 1$$

$$\det(\hat{B}_{13}) = ad - bc = 3(2) - (0)(-1) = 6$$

Por lo que

$$\det(B) = -2 + 2(1) + 2(6)$$

$$\det(B) = -2 + 2 + 12$$

$$\det(B) = 12$$

Por otro lado sea $\hat{A}_{13} = C$ entonces

$$\det(C) = \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} C_{1j} \det(\hat{C}_{1j})$$

$$\det(C) = (-1)^2 C_{11} \det(\hat{C}_{11}) + (-1)^3 C_{12} \det(\hat{C}_{12}) + (-1)^4 C_{13} \det(\hat{C}_{13})$$

$$\det(C) = (1) \det(\hat{C}_{11}) + (-1)(0) \det(\hat{C}_{12}) + (1)(2) \det(\hat{C}_{13})$$

$$\det(C) = \det(\hat{C}_{11}) + 2 \det(\hat{C}_{13})$$

y como $\hat{C}_{11}, \hat{C}_{13} \in M_{2 \times 2}$ entonces

$$\det(\hat{C}_{11}) = ad - bc = (-1)(0) - (1)(1)$$

$$\det(\hat{C}_{11}) = ad - bc = -1$$

$$\det(\hat{C}_{13}) = ad - bc = (3)(1) - (-1)(-1)$$

$$\det(\hat{C}_{13}) = ad - bc = 2$$

$$\det(B) = -1 + 2(2) = 3$$

Ahora, sea $\hat{A}_{14} = D$

$$\det(D) = \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} D_{1j} \det(\hat{D}_{1j})$$

$$\det(D) = (-1)^2 D_{11} \det(\hat{D}_{11}) + (-1)^3 D_{12} \det(\hat{D}_{12}) + (-1)^4 D_{13} \det(\hat{D}_{13})$$

$$\det(D) = (1) \det(\hat{D}_{11}) + (-1)(0) \det(\hat{D}_{12}) + (1)(-2) \det(\hat{D}_{13})$$

$$\det(D) = \det(\hat{D}_{11}) - 2 \det(\hat{D}_{13})$$

Y como $\hat{D}_{11}, \hat{D}_{13} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ entonces

$$\det(\hat{D}_{11}) = ad - bc = (-1)(2) - (-1)(0) = -2$$

$$\det(\hat{D}_{13}) = ad - bc = (3)(1) - (-1)(-2) = 2$$

$$\det(D) = -2 - (2)(2) = -6$$

Finalmente tenemos que

$$\det(A) = -2(12) + 3 - 3(-6)$$

$$\det(A) = -24 + 3 + 18 = -3$$

$$\therefore \det(A) = -3$$

Ejercicio 15

Para cada par de vectores u y v en \mathbb{R}^2 , calcula el área del paralelogramo determinado por u y v .

a) $\vec{u} = (3, -2)$ y $\vec{v} = (2, 5)$

Definición 12. Sea $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ entonces $\det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} \right| &= \begin{vmatrix} (3, -2) \\ (2, 5) \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ \left| \det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} \right| &= |(3)(5) - (-2)(2)| = 15 + 4 = 19 \end{aligned}$$

\therefore El área del paralelogramo es 19 con orientación positiva

b) $\vec{u} = (1, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 1)$

Entonces

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} &= \left| \det \begin{pmatrix} (1, 3) \\ (-3, 1) \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ \det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} &= |(1)(1) - (3)(-3)| = |1 - 9| = |-8| = 8 \end{aligned}$$

\therefore El área del paralelogramo es 8 con orientación negativa

c) $\vec{u} = (4, -1)$ y $\vec{v} = (-6, -2)$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} \right| &= \left| \det \begin{pmatrix} (4, -1) \\ (-6, -2) \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \right| \\ \left| \det \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} \right| &= |(4)(-2) - (-1)(-6)| = |-8 - 6| = |-14| = 14 \end{aligned}$$

\therefore El área del paralelogramo es 14 con orientación negativa

Ejercicio 16

Para cada una de las siguientes matrices $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ determine los valores propios de A y para cada valor propio λ de A, encontrar el conjunto de vectores propios correspondientes a A.

Definición 13. Sea T un operador lineal sobre V, donde V es de dimensión finita y $\vec{x} \in V$ tal que \vec{x} no es 0. Decimos que \vec{x} es vector propio de T si $T(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema. Sean $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces λ es un valor propio de A si y sólo si $\det(A - \lambda I_n) = 0$

Proposición. Si Q es la matriz formada por los vectores propios asociados a sus respectivos valores propios de $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces $D = Q^{-1}AQ$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Por el teorema mencionado, para encontrar los valores propios de A, primero calculemos:

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Usando la definición de determinante en $M_{2 \times 2}$ tenemos que:

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda) - (3)(2) = 0$$

Simplificando la expresión;

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$$

Al resolver la ecuación por factorización, concluimos que los **valores propios de A** son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$. Ahora calculemos el conjunto de vectores propios. Tenemos que sustituir λ_1 y λ_2 en $(A - \lambda Id_n)(\vec{v}) = \vec{0}$. Primero hagamos el cálculo para $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 - (-1) & 2 \\ 3 & 2 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones;

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicamos 3 veces el renglón 1, -2 veces el renglón 3 y sumamos el renglón 1 al renglón 2.

$$6x_1 + 6x_2 = 0$$

Es fácil apreciar que $x_1 = -x_2$. Entonces como x_1 depende de x_2 , el sistema tiene tantas soluciones como \mathbb{R} , menos "0" por definición. Por tanto tomamos $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$

$$\therefore \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora hagamos el cálculo para $\lambda_2 = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 - 4 & 2 \\ 3 & 2 - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones;

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sumamos el renglón 1 al renglón 2.

$$3x_1 - 2x_2 = 0$$

Es fácil apreciar que $x_1 = \frac{2x_2}{3}$. Como en el caso pasado, el sistema tiene tantas soluciones como \mathbb{R} . Entonces tomamos $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

$$\therefore \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por último calcularemos la matriz diagonal, pero primero calcularemos Q^{-1} con la proposición:

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(Q) = (1)(3) - (-1)(2) = 5$$

Ahora calculemos la matriz diagonal:

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$\therefore \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ es la matriz diagonal.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Usando el teorema enunciado, encontramos los valores propios de A :

$$A - \lambda Id_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos $\det(A - \lambda Id_n)$ usando la definición 11:

$$\det(A - \lambda Id_n) = \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} A_{1j} \det(\hat{A}_{1j}) = A_{11} \det(\hat{A}_{11}) - A_{12} \det(\hat{A}_{12}) + A_{13} \det(\hat{A}_{13})$$

$$\det(A - \lambda Id_n) = (1 - \lambda) \det(\hat{A}_{11}) + 2 \det(\hat{A}_{13})$$

$$\det(\hat{A}_{11}) = (1 - \lambda)(1 - \lambda) - (1)(0) = (1 - \lambda)^2$$

$$\det(\hat{A}_{13}) = (-1)(0 - (1 - \lambda)(2)) = -2 + 2\lambda$$

Sustituyendo:

$$\det(A - \lambda Id_n) = (1 - \lambda)(1 - \lambda)^2 + 2(-2 + 2\lambda) = (1 - \lambda)^3 - 4(1 - \lambda) = 0$$

Obtenemos los valores de λ mediante factorización:

$$(1 - \lambda)[(1 - \lambda)(1 - \lambda) - 4] = (1 - \lambda)[\lambda^2 - 2\lambda - 3] = (1 - \lambda)[(\lambda - 3)(\lambda + 1)] = 0$$

Es fácil notar que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$, los cuales son los **valores propios**.

Ahora calcularemos el conjunto de vectores propios. Tenemos que sustituir $(A - \lambda Id_n)(\vec{v}) = \vec{0}$.

Primero hagamos el cálculo para $\lambda_1 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 2 \\ -1 & 1-1 & 1 \\ 2 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2X_3 &= 0 \\ -X_1 + 0X_2 + X_3 &= 0 \\ 2X_1 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos notar que $X_1 = 0$ y $X_3 = 0$. Y X_2 puede tomar cualquier valor en \mathbb{R} ya que $0X_2$ siempre es 0. Entonces tomamos $X_2 = 1$.

$$\therefore \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora hagamos el cálculo para $\lambda_2 = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 2 \\ -1 & 1-3 & 1 \\ 2 & 0 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sumamos el renglón 3 al renglón 1.

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sumamos el renglón 2 a dos veces el renglón 1.

$$\begin{aligned} -4x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

De esto podemos concluir que $x_1 = x_3$ y $x_2 = 0$. Como x_1 depende de x_3 . Tomamos $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$.

$$\therefore \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por último hagamos el cálculo para $\lambda_3 = -1$.

$$\begin{pmatrix} 1 - (-1) & 0 & 2 \\ -1 & 1 - (-1) & 1 \\ 2 & 0 & 1 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Cómo tenemos repetida una ecuación la podemos eliminar.

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sumamos el renglón 2 a dos veces el renglón 1.

$$\begin{aligned} 4x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

De esto obtenemos que $x_1 = -x_3$ y $x_2 = -x_3$. Entonces $x_1 = x_2 = -x_3$. Como x_1 y x_2 dependen de x_3 . Tomamos $x_1 = -1$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 1$.

$$\therefore \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces: } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último calcularemos la matriz diagonal de A , pero primero tenemos que calcular Q^{-1} con la proposición $Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)}(\text{cof}(Q^T))$

Es fácil apreciar que $\det(A) = -2$ y $\text{cof}(A^T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora encontremos la matriz diagonal utilizando la proposición que se encuentra al inicio del ejercicio.

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Comencemos por hallar los **valores propios** de la matriz

$$\begin{aligned} A - \lambda Id_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & -3 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por el teorema enunciado al inicio del ejercicio

Multiplicación por un escalar

Adición entrada a entrada

Ahora obtengamos el determinante de esa matriz

$$\det(A - \lambda Id_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & -3 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

Sustituyendo lo que ya calculamos

$$\det(A - \lambda Id_3) = \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} A_{1j} \det(\hat{A}_{1j})$$

Por la definición de determinante

$$\det(A - \lambda Id_3) = (-\lambda) \det(\hat{A}_{11}) + 2 \det(\hat{A}_{12}) - 3 \det(\hat{A}_{13})$$

Usando los valores A_{1j}

Por otra parte calculemos el determinante de \hat{A}_{11}

$$\det(\hat{A}_{11}) = (1-\lambda)(5-\lambda) - (-1)(2)$$

Por definición determinante de 2x2

$$\det(\hat{A}_{11}) = (1-\lambda)(5-\lambda) + 2$$

Multiplicando el segundo sumando

$$\det(\hat{A}_{11}) = (5-\lambda-5\lambda+\lambda^2) + 2$$

Desarrollando el primer sumando

$$\det(\hat{A}_{11}) = -6\lambda + \lambda^2 + 7$$

Sumando terminos semejantes

Hagamos lo mismo para encontrar el determinante de \hat{A}_{12}

$$\det(\hat{A}_{12}) = -(5-\lambda) - (-1)(2)$$

Por definición del determinante en $M(\mathbb{F})_{2 \times 2}$

$$\det(\hat{A}_{12}) = -(5-\lambda) + 2$$

Operando signos

Por último esto ocurre al resolver el determinante de \hat{A}_{13}

$$\det(\hat{A}_{11}) = (-1)(2) - (1 - \lambda)(2)$$

Definición de determinante en 2x2

$$\det(\hat{A}_{11}) = -2 - (1 - \lambda)(2)$$

Efectuando operación en signos

$$\det(\hat{A}_{11}) = -2(2 - \lambda)$$

Por factorización de 2

Recordemos, de los pasos anteriores que:

$$\det(A - \lambda Id_3) = (-\lambda)\det(\hat{A}_{11}) + 2\det(\hat{A}_{12}) - 3\det(\hat{A}_{13})$$

$$\det(A - \lambda Id_3) = (-\lambda)(-6\lambda + \lambda^2 + 7) + 2(-5 - \lambda) + 2 - 3(-2(2 - \lambda))$$

Por lo anterior

$$\det(A - \lambda Id_3) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 1\lambda + 6$$

Agrupando términos semejantes

$$\det(A - \lambda Id_3) = -(\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

Factorizando adecuadamente

$$\therefore \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

Encontremos el conjunto de vectores propios haciendo uso de la proposición enunciada al inicio de este ejercicio

$$(A - \lambda Id_3)(\vec{v}) = \vec{0}$$

Tomemos el caso en el que $\lambda_1 = 1$

$$(A - \lambda_1 Id_3)(\vec{v}_1) = \vec{0}$$

Planteemos la ecuación

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & 1-1 & -1 \\ 2 & 2 & 5-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por el resultado anterior

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando los elementos de la matriz

Así obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \quad (1)$$

$$-x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \quad (2)$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \quad (3)$$

Si sumamos (1) + (3) obtendremos que $x_1 = -x_3$ y sustituyendo en (2) obtenemos que $x_2 = -x_3$ tomemos $x_3 = 1$ entonces $x_2 = x_1 = -1$ Así, el vector que obtenemos es

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomemos el caso en el que $\lambda_2 = 2$

$$(A - \lambda_2 Id_3)(\vec{v}_2) = \vec{0}$$

Planteemos la ecuación

$$\begin{pmatrix} 0-2 & -2 & -3 \\ -1 & 1-2 & -1 \\ 2 & 2 & 5-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por el resultado anterior

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando los elementos de la matriz

Así obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones, no incluimos la 1ª fila, pues es muy evidente que se trata de la 3ª fila multiplicada por -1

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \quad (4)$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 = 0 \quad (5)$$

Sumando ambas obtenemos que $x_3 = 0$ y que $x_2 = -x_1$ sea $x_2 = 1$ entonces $x_1 = -1$ Así, el vector que obtenemos es

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tomemos el caso en el que $\lambda_3 = 3$

$$(A - \lambda_1 Id_3)(\vec{v}_3) = \vec{0} \quad \text{Planteemos la ecuación}$$

$$\begin{pmatrix} 0-3 & -2 & -3 \\ -1 & 1-3 & -1 \\ 2 & 2 & 5-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Por el resultado anterior}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Operando los elementos de la matriz}$$

$$-3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \quad (6)$$

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \quad (7)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (8)$$

Si sumamos (7) + (8) sabremos que $x_2 = 0$ y sustituyendo en (8) obtenemos que $x_3 = -x_1$ Sea $x_3 = 1$ entonces $x_1 = -1$ Así, el vector que obtenemos es

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo anterior podemos concluir que la matriz de vectores propios es

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora resta invertir dicha matriz, lo haremos de la siguiente manera

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)}(\text{cof}(Q^T))$$

Calculemos el determinante de Q de la siguiente manera

$$\det(Q) = \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} Q_{1j} \det(\hat{Q}_{1j}) \quad \text{Mostrado en clase}$$

$$\det(Q) = (-1)((-1) - 0) - (-1)(0 - (-1)) + (-1)(0 - 1) \quad \text{Aplicando dicha definición}$$

$$\det(Q) = -1 + 1 + 1$$

$$\det(Q) = 1$$

Y como la definición de una matriz *Transpuesta* es cambiar renglones por columnas tenemos que

$$Q^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Construyamos la matriz de cofactores para la que necesiaremos

Definición 13. Sea $Q \in M(\mathbb{F})_{3 \times 3}$, tenemos que la matriz de cofactores de Q denotada por

$$\text{cof}(Q) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{n1} & & & C_{nm} \end{pmatrix}$$

donde $C_{nm} = (-1)^{(n+m)} \cdot \det(\hat{C}_{nm})$

De esta manera podemos concluir que

$$\text{cof} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = Q^{-1}$$

Finalmente hallemos la matriz diagonal como $D = Q^{-1}AQ$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Por la definición de diagonal}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Realizando el primer producto}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Matriz diagonal}$$