



# Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores  
Ayud. Irving Hernández Rosas

## Tarea Examen III

Kevin Ariel Merino Peña<sup>1</sup>

31 de mayo de 2020



Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden la tarea-examen se entregan de manera individual.

1. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Muestre que  $u = f(y - \kappa x)$  es una solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Hagamos una observación sobre  $u$ , pues debemos construir a dicha función con el mismo dominio que  $f$ , *i.e.*

$$u(x, y) = f(y - \kappa x)$$

ahora empleemos la composición de funciones para designar una función auxiliar  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  como sigue  $g(x, y) = y - \kappa x$ ;

$$u(x, y) = (f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$$

luego, tomemos la derivada de  $u$  como

$$Du(x, y) = Df(g(x, y))$$

Veamos que, como  $g$  es una función escalar, entonces su derivada es  $\nabla g$  y por la **regla de la cadena** en funciones compuestas, tenemos que

$$Du(x, y) = Df(g(x, y)) \nabla g \quad (\varphi)$$

donde  $\nabla g(x, y) = \left( \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) = (-\kappa, 1)$ , luego de  $\varphi$  tenemos que

$$Du(x, y) = f'(g(x, y)) \cdot (-\kappa, 1)$$

Reemplazando lo que sabemos del gradiente

$$Du(x, y) = -f'(g(x, y))\kappa, f'(g(x, y))$$

Reemplazando lo que sabemos del gradiente

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -f'(g(x, y))\kappa$$

Derivando con respecto a  $x$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(g(x, y))$$

Derivando con respecto a  $y$

$$\kappa \frac{\partial u}{\partial y} = f'(g(x, y))\kappa$$

Multiplicando ambos miembros por el mismo real

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = -f'(g(x, y))\kappa + f'(g(x, y))\kappa = 0$$

siguiendo la cadena de igualdades, tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \square$$

2. Muestre que si  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  tienen segundas parciales mixtas continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1b)$$

Entonces ambas son armónicas.

<sup>1</sup>Número de cuenta 317031326

---

**Recuerde.** Una función  $u = u(x, y)$  con segundas derivadas parciales continuas que satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

se dice que es una función armónica.

Veamos qué ocurre para  $u$  cuando obtenemos sus segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Por definición de segunda derivada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Volviendo a escribir la ecuación

por otra parte

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Por definición de segunda derivada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

Reescribiendo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Ya que por hipótesis  $u$  es de clase  $\mathcal{C}^2$

de las últimas dos observaciones podemos concluir que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left( -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)$$

Sumando ambos miembros

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Así sabemos que  $u$  es armónica

luego, hagamos algunas observaciones para  $v$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Por definición de segunda derivada

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Volviendo a escribir la ecuación

por otra parte

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Por definición de segunda derivada

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Reescribiendo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Ya que por hipótesis  $v$  es de clase  $\mathcal{C}^2$

de las últimas dos observaciones podemos concluir que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left( -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)$$

Sumando ambos miembros

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

Así sabemos que  $v$  es armónica

$\therefore$  ambas ecuaciones son armónicas si satisfacen las ecuaciones de *Cauchy-Riemann* y son de clase  $\mathcal{C}^2$  (que sus segundas derivadas mixtas sean iguales)

3. Encontrar la expansión a segundo orden de Taylor para  $f(x, y) = y^2 e^{-x^2}$  en  $(1, 1)$

primero hallemos las derivadas de  $f$

$$\frac{\partial}{\partial x} (y^2 e^{-x^2}) = -2xy^2 e^{-x^2}$$

Derivando con respecto a  $x$

$$\frac{\partial}{\partial y} (y^2 e^{-x^2}) = 2ye^{-x^2}$$

Derivando con respecto a  $y$

$$\frac{\partial}{\partial x} (-2xy^2 e^{-x^2}) = (4x^2 - 2) y^2 e^{-x^2}$$

Derivando con respecto a  $xx$

$$\frac{\partial}{\partial y} (2ye^{-x^2}) = 2e^{-x^2}$$

Derivando con respecto a  $yy$

$$\frac{\partial}{\partial y} (-2xy^2 e^{-x^2}) = -4xy e^{-x^2}$$

Derivando con respecto a  $xy, yx$

Luego, usando el teorema (visto en clase) sobre la expansión a segundo orden de Taylor para  $x_0 = (1, 1)$  está dada por

$$f(h_1, h_2) = f(1, 1) + h_1 f_x(1, 1) + h_2 f_y(1, 1) + \frac{1}{2} (h_1^2 f_{xx}(1, 1) + h_1 h_2 f_{xy}(1, 1) + h_1 h_2 f_{yx}(1, 1) + h_2^2 f_{yy}(1, 1))$$

$$f(x, y) = f(1, 1) + x f_x(1, 1) + y f_y(1, 1) + \frac{1}{2} (h_1^2 f_{xx}(1, 1) + h_1 h_2 f_{xy}(1, 1) + h_1 h_2 f_{yx}(1, 1) + h_2^2 f_{yy}(1, 1))$$

$$f(x, y) = f(1, 1) + x \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,1)} + y \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,1)} + \frac{1}{2} \left( h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(1,1)} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(1,1)} \right)$$

$$f(x, y) = 1^2 e^{-1^2} + x (-2xy^2 e^{-x^2}) \Big|_{(1,1)} + y \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,1)} + \frac{1}{2} \left( h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(1,1)} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(1,1)} \right)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{e} - \frac{2h_1}{e} + \frac{2h_2}{e} + \frac{1}{2} \left( h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(1,1)} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(1,1)} \right)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{e} - \frac{2h_1}{e} + \frac{2h_2}{e} + \frac{1}{2} (h_1^2 (2e^{-1}) + h_1 h_2 (-4e^{-1}) + h_1 h_2 (-4e^{-1}) + h_2^2 (2e^{-1}))$$

$$f(x, y) = \frac{1}{e} - \frac{2h_1}{e} + \frac{2h_2}{e} + \frac{h_1^2 - 4h_1 h_2 + h_2^2}{e}$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 4xy + y^2 + 4y - 1}{e}$$

4. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 5$ . Encuentre los puntos críticos de  $f$  y determine si son: mínimos locales, máximos locales o puntos silla.

Para ello derivemos la función y localicemos los puntos críticos.

---

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^2 - xy + 5)$	Derivando con respecto a $x$
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$	Aplicando la derivada
$\frac{\partial f}{\partial x} = -2y - x$	Aplicando la derivada con respecto a $y$ de $f$
$0 = 2x - y$	Igualemos a 0
$0 = -2y - x$	

De la primera ecuación, obtenemos que  $y = 2x$ , sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos que  $0 = -5x$ , de esta manera sabemos que el único punto crítico que tiene  $f$  es  $(x, y) = (0, 0)$ . Ahora calculemos las segundas derivadas parciales para conocer el determinante del Hessiano

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -1 \\ D\Big|_{(0,0)} &= 2 \cdot (-2) - 1 = -5 < 0\end{aligned}$$

Entonces, usando el teorema visto en clase sobre el determinante del hessiano, ahora sabemos que  $(0, 0)$  es un punto silla, es más es el único punto crítico de  $f$ .

5. Encuentre los valores máximos y mínimos absolutos de  $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + 5$  sobre el disco unitario  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Primero calculemos la derivada de  $f$  e igualemos a 0 para encontrar los puntos críticos en el interior del disco.

$f_x = 2x + 3y$	Derivando con respecto a $x$
$f_y = 2y + 3x$	Derivando con respecto a $y$
$0 = 2x + 3y$	Igualemos a 0
$0 = 2y + 3x$	Igualemos a 0

$4\lambda^2 - 8\lambda - 5 = 5$	Ecuación para $\lambda$
---------------------------------	-------------------------

De lo anterior concluimos que el único punto crítico es  $\vec{x}_0 = (0, 0)$ , además notemos que  $(0, 0) \in D$ , ahora nombremos la función  $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ , emplearemos multiplicadores de lagrange para resolver

$\nabla g = (2x, 2y)$	Calculando el gradiente de $g$
$\nabla f = (2x + 3y, 3x + 3y)$	Calculando el gradiente de $g$
$2x + 3y = 2x\lambda$	Igualemos la primera entrada
$3x + 2y = 2y\lambda$	Igualemos la segunda entrada
$x^2 + y^2 = 1$	La restricción dada

Notemos, de la primera ecuación que  $x \neq 0$  porque eso implicaría que  $y = 0$  lo cual no podría pasar por la restricción dada, entonces despejando  $\lambda$  obtenemos que

$$\lambda = \frac{2x + 3y}{2x}$$

reemplazando en cualquier ecuación obtendremos que  $x^2 = y^2 \implies x = \pm y$ , ahora ocupemos esto en la restricción para obtener que  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ , así tenemos que los puntos críticos son

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 7 + \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 + \frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 + \frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 7 + \frac{1}{2}$$

por lo tanto, el máximo absoluto es  $7 + \frac{1}{2}$ , en  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  y  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

El mínimo absoluto es  $4 + \frac{1}{2}$ , en  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  y en  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6. Suponga que un pentágono está compuesto por un rectángulo coronado por un triángulo isósceles (ver Figura 1). Si la longitud del perímetro es fija, encuentre el área máxima posible.

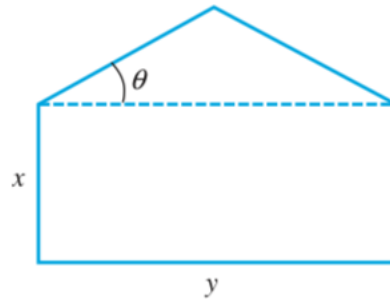


Figura 1: Maximizar el área para un perímetro dado.

Sea  $z$  la longitud de una de los lados del triángulo isósceles sobre el rectángulo en la figura. Sea  $p$  el perímetro del pentágono

$$p = 2x + y + 2z$$

Observemos que

$$z \cos(\theta) = \frac{1}{2}y$$

$$z = \frac{y}{2 \cos(\theta)}$$

$$2z = \frac{y}{\cos(\theta)}$$

Tomando el ángulo de la mitad del triángulo isósceles como referencia

Multiplicando ambos lados por  $\frac{1}{\cos(\theta)}$

Multiplicando ambos lados por 2

24

♂

Sea  $a$  el área del pentágono dada por la suma del rectángulo formado por los lados  $x$ ,  $y$  y el triángulo superior, entonces

$$a = x \cdot y + \frac{1}{2}yz \sin(\theta) \quad \text{obteniendo la altura del triángulo con identidades trigonométricas}$$

$$a = xy + \frac{y^2 \sin(\theta)}{4 \cos(\theta)} \quad \text{Sustituyendo el resultado de 7}$$

Observemos que de esta última ecuación, se nos proporcionan algunas restricciones puesto que el área siempre debe ser positivo y al menos mayor que cero para este ejercicio, por lo que  $0 < x$ ,  $0 < y$  y  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Luego, volvamos al perímetro y sustituyamos el valor de  $z$

$$p = 2x + y \frac{y}{\cos(\theta)} \quad \text{Sustituyendo } 2z \text{ de } \sigma$$

$$x = \frac{1}{2} \left( p - y - \frac{y}{\cos(\theta)} \right) \quad \text{Despejando a } x$$

Ahora pongamos al área en función de  $y$  y del ángulo

$$a(y, \theta) = xy + \frac{y^2 \sin(\theta)}{4 \cos(\theta)} \quad \text{De lo construido anteriormente}$$

$$a(y, \theta) = \frac{1}{2}py - \frac{1}{2}y^2 - \frac{y^2}{2 \cos(\theta)} + \frac{y^2 \sin(\theta)}{4 \cos(\theta)} \quad \text{Sustituyendo el valor de } x$$

Ahora, al calcular  $\frac{\partial a}{\partial \theta} = 0$  y  $\frac{\partial a}{\partial y} = 0$  podemos observar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial y} &= \frac{p}{2} - y - \frac{y}{\cos(\theta)} + \frac{y \sin(\theta)}{2 \cos(\theta)} \\ 0 &= \frac{p}{2} - y - \frac{y}{\cos(\theta)} + \frac{y \sin(\theta)}{2 \cos(\theta)} \\ \frac{p}{2} &= y \left( 1 + \frac{1}{\cos(\theta)} - \frac{\sin(\theta)}{2 \cos(\theta)} \right) \\ \frac{p}{2} &= y \left( \frac{2 + 2 \cos(\theta) - \sin(\theta)}{2 \cos(\theta)} \right) \\ y &= \frac{p \cos(\theta)}{2 + 2 \cos(\theta) - \sin(\theta)} \end{aligned}$$

Por otra parte, buscando los puntos críticos con el ángulo conseguimos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \theta} &= -\frac{y^2}{2} \left( \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \right) + \frac{y^2}{4} \left( \frac{1}{\cos^2(\theta)} \right) \\ 0 &= -\frac{y^2}{2} \left( \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \right) + \frac{y^2}{4} \left( \frac{1}{\cos^2(\theta)} \right) \\ \frac{y^2}{2 \cos^2(\theta)} \sin(\theta) &= \frac{y^2}{2 \cos^2(\theta)} \cdot \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{1}{2} \\ \theta &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Una vez hallado el ángulo, podemos evaluar el coseno en ese punto y sustituirlo en la  $y$ , la última ecuación que hayamos para encontrar quién es  $x$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y &= \frac{p \cos(\theta)}{2 + 2 \cos(\theta) - \sin(\theta)} \\ y &= \frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

luego, de una ecuación para  $x$

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} \left( p - y - \frac{y}{\cos(\theta)} \right) \\ x &= \frac{1}{2} \left( p - \frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} - \frac{2p}{3 + 2\sqrt{3}} \right) \\ x &= \frac{p}{2} \left( \frac{3 + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2}{3 + 2\sqrt{2}} \right) \\ x &= \frac{p(1 + \sqrt{3})}{2(3 + 2\sqrt{3})}\end{aligned}$$

Como ya tenemos quienes son  $x, y$ , sustituyamos en la ecuación del área

$$\begin{aligned}a \left( \frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6} \right) &= xy + \frac{y^2 \sin(\theta)}{4 \cos(\theta)} \\ a \left( \frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6} \right) &= \frac{p(1 + \sqrt{3})}{2(3 + 2\sqrt{3})} \cdot \frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4} \left( \frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \\ a \left( \frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6} \right) &= \frac{p^2(3 + \sqrt{3})}{2(9 + 12\sqrt{3} + 12)} + \frac{\sqrt{3}}{12} \left( \frac{3p^2}{9 + 12\sqrt{3} + 12} \right) \\ a \left( \frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6} \right) &= p^2 \frac{18 + 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{12(21 + 12\sqrt{3})} \\ a \left( \frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6} \right) &= p^2 \frac{9(2 + \sqrt{3})}{12 \cdot 3(7 + 4\sqrt{3})} \\ a \left( \frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6} \right) &= \frac{p^2}{4} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área máxima con un perímetro fijo del pentágono presentado está dado por

$$\frac{p^2}{4} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}}$$

7. Analice el comportamiento de las funciones en los puntos indicados. En la parte  $b$  el análisis depende de la constante  $C$ .

a)  $z = x^2 - y^2 + 3xy$  en  $(0, 0)$ .

---

Para ello calculemos el gradiente de dicha función

$$\begin{aligned}\nabla f &= \left( \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2 + 3xy), \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2 + 3xy) \right) \\ \nabla f &= (2x + 3y, -2y + 3x) \\ (0, 0) &= (2x + 3y, -2y + 3x) \\ 0 &= 2x + 3y \\ 0 &= -2y + 3x\end{aligned}$$

Así podemos concluir que  $(0, 0)$  es un punto crítico para nuestra función. Luego calculemos las segundas derivadas parciales para determinar el comportamiento del determinante del Hessiano

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f &= 2 \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f &= -2 \\ \frac{\partial^2}{\partial xy} f &= 3 = \frac{\partial^2}{\partial yx}\end{aligned}$$

$$D\Big|_{(0,0)} = 2 \cdot (-2) - 9 = -13 < 0$$

Así podemos concluir que  $(0, 0)$  es un punto silla de  $f$

b)  $z = x^2 - y^2 + Cxy$  en  $(0, 0)$ .

Para ello tomemos como base el ejercicio anterior y observemos qué ocurre en el determinante del Hessiano, pues

$$D\Big|_{(0,0)} = 2 \cdot (-2) - C^2 = D < 0$$

como hay un signo negativo para el cuadrado de  $C$ , siempre se tendrá que no importando el valor de dicha constante siempre será negativo, por lo que siempre será un punto silla :)

8. a) Encuentre la distancia mínima del origen en  $\mathbb{R}^2$  a la superficie  $z = \sqrt{x^2 - 1}$ .

Describamos los puntos de la superficie de la siguiente forma

$$(x, y, \sqrt{x^2 - 1})$$

Tenemos algunas restricciones para que dicha raíz pueda existir en los reales

$$\begin{aligned}x^2 - 1 &\geq 0 \\ x &\geq 1 \\ x &\leq -1\end{aligned}$$

Luego, definamos una función distancia como sigue:

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{x^2 + y^2 + \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2} \\ d &= \sqrt{x^2 + y^2 + (x^2 - 1)} \\ d &= \sqrt{x^2 + y^2 + x^2 - 1} \\ d &= \sqrt{2x^2 + y^2 - 1}\end{aligned}$$



Para hacer más sencillas las cuentas, trabajaremos con el cuadrado de  $d$ , en clase hicimos lo mismo pues vimos que es válido pues  $d^2$  tendrá el mismo punto mínimo que  $d$ . Sea  $f := 2x^2 + y^2 - 1$  nuestra función a minimizar. Es fácil observar que para  $y$  no tenemos ninguna restricción dada, por lo que puede ser arbitrario, entonces observemos qué pasa cuando  $y = 0$ , tendríamos que  $f = 2x^2 - 1$  y por una observación que hicimos al principio del ejercicio sabemos que  $x^2 \geq 1$ , así, el mínimo valor que tendría nuestra función  $f$  sería 1 pues  $f(\pm 1, 0) = 2(\pm 1)^2 - 1 = 1$

$\therefore$  el valor mínimo que tendrá la distancia del origen a la superficie es 1

b) Haga lo mismo para la superficie  $z = 6xy + 7$

Veamos que todos los puntos sobre dicha superficie tendrán la siguiente forma  $(x, y, (6xy + 7)^2)$ , ahora definamos la función distancia como sigue

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + (6xy + 7)^2}$$

y trabajaremos sin la raíz, por lo que definiremos la función  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$f := d^2 = x^2 + y^2 + (6xy + 7)^2$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + (6xy + 7)^2$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 6^2 x^2 y^2 + 2 \cdot 6xy \cdot 7 + 7^2$$

$$f(x, y) = 36x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 48xy + 49$$

Veamos que en el caso hipotético de que  $x^2 + y^2 = 0$  el valor más bajo que  $f(x, y)$  tendría es 49, por lo tanto, la distancia mínima es 7, pero derivemos para encontrar los demás puntos críticos.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 36x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 48xy + 49$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 72xy^2 + 2x + 48y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 36x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 48xy + 49$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 72x^2 y + 2y + 48x$$

ahora igualemos ambas ecuaciones a 0 y obtengamos

$$72x^2 y + 2y + 48x = 0$$

$$72xy^2 + 2x + 48y = 0$$

$$72x^2 y + 2y + 48x - (72xy^2 + 2x + 48y) = 0$$

$$72xy(x - y) + 82x - 82y = 0$$

$$(x - y)(72xy + 82) = 0$$

Como el producto de dos reales es cero y si y sólo si algunos de los dos es cero, entonces

$$x = y \vee 72xy + 82 = 0$$

Sustituamos la primera ecuación en  $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 72x^2 + 2x + 48x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x(72x^2 + 82)$$

$$0 = x(72x^2 + 82)$$

debido a que  $72x^2 + 84$  siempre será positivo en la última ecuación, entonces  $x = 0 = y$  y si sustituimos en la ecuación que se nos proporcionó al principio del problema, obtendremos que

$$z = 6 \cdot 0 \cdot 0 + 7 \implies z = 7$$

entonces el punto crítico que hallamos es  $(0, 0, 7)$  lo que nos regala  $d = \sqrt{0^2 + 0^2 + 7^2} = 7$ .

Ahora veamos qué ocurre con  $xy = -\frac{41}{36}$  y substituyamos en la ecuación del problema  $z = 6(-\frac{41}{36}) + 7 \implies -\frac{41}{6} + \frac{42}{6} = \frac{1}{6}$   
de  $xy = -\frac{41}{36}$  despejemos a  $x$  para usar  $x = -\frac{41}{36y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 72xy^2 + 2x + 84y \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 72\left(-\frac{41}{36y}\right)y^2 + 2\left(-\frac{41}{36y}\right) + 84y \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= -82y - \frac{82}{36y} + 84y \\ 0 &= 2y - \frac{82}{36y} \\ 2y &= \frac{41}{18y} \\ 36y^2 &= 41 \\ y &= \sqrt{\frac{41}{36}} \\ y &= \frac{\sqrt{41}}{6}\end{aligned}$$

Substituyamos en  $x = -\frac{41}{36y}$

$$\begin{aligned}x &= -\frac{41}{36y} \\ x &= -\frac{41}{36 \cdot \frac{\sqrt{41}}{6}} \\ x &= -\frac{\sqrt{41}}{6}\end{aligned}$$

Con ambos valores sólo basta calcular  $z$  en la ec. del ejercicio

$$z = 6 \cdot \frac{\sqrt{41}}{6} \cdot \left(-\frac{\sqrt{41}}{6}\right) + 7 = \frac{41}{6} + \frac{42}{6} = \frac{1}{6}$$

Ahora substituyamos en la ecuación de la distancia

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ d &= \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{41}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{41}}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} \\ d &= \sqrt{\frac{41}{36} + \frac{41}{36} + \frac{1}{6}} \\ d &= \frac{83}{6}\end{aligned}$$

---

Entre nuestros dos puntos hallados  $\frac{83}{6}$  es el mínimo :)

9. Encuentre los puntos y valores críticos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones:

a)  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ , restringido a  $x^2 + y^2 = 1$ .

b)  $f(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$ , restringido a  $x^2 + y^2 = 1$ .

c)  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ , restringido a  $x + y = 1$ .

d)  $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ , restringido a  $x + y = \frac{\pi}{4}$ .

10. Encuentre el máximo de la función  $f(x, y) = xy$  sobre la curva  $(x+1)^2 + y^2 = 1$ , definamos una función  $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  como  $g(x, y) = (x+1)^2 + y^2 = 1$

$$\nabla g = (x - 1, 2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$y = \lambda(x - 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$x = \lambda 2y$$

$$g(x, y) = 1$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 1$$

luego, despejemos  $x, y$ , de

$$x = 2y\lambda$$

$$y = \frac{x}{2\lambda}$$

$$\lambda = \frac{x}{2y}$$

$$y = (2x+2)\lambda$$

$$y = (2x+2)\left(\frac{x}{2y}\right)$$

$$2y^2 = 2x^2 + 2x$$

$$0 = 2x^2 + 2x - 2y^2$$

$$0 = x^2 + x - y^2$$

(10a)

de la restricción podemos ver que

$$(x+1)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 1$$

$$x^2 + 2x + y^2 = 0$$

(10b)

---

Si resolvemos  $10a$  y  $10b$

$$\begin{aligned}x^2 + x - y^2 &= 0 \\x^2 + 2x + y^2 &= 0 \\2x^2 + 3x &= 0 \\x(2x + 3) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\x_2 &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Si sustituimos en  $x = 2\lambda y$  obtendremos que si  $x = 0$  entonces  $y = 0$ , y si  $x = -\frac{3}{2}$  entonces  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  ( de  $x^2 + y^2 + 2x = 0$ )

Entonces tenemos los siguientes puntos

$$(0, 0), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Evaluemos en todos ellos

$$\begin{aligned}f(0, 0) &= xy = 0 \\f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= xy = \frac{3\sqrt{3}}{4} \\f\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= xy = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

Podemos concluir que el máximo valor es  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

11. Encuentre la distancia más cercana del punto  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  al plano cuya ecuación está dada por:  $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ , donde  $(b_1, b_2, b_3) \neq 0$

Sea  $D(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2$  sujeto a la restricción  $g(x_1, y_1, z_1) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$  con  $(b_1, b_2, b_3) \neq 0$ . Calculemos el gradiente de  $D$  y  $g$

$$\begin{aligned}\nabla D(x_1, x_2, x_3) &= (2x_1 - 2a_1, 2x_2 - 2a_2, 2x_3 - 2a_3) \\ \nabla g(x_1, x_2, x_3) &= (b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)\end{aligned}$$

Ahora podemos obtener las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\lambda b_1 &= 2x_1 - 2a_1 \\ \lambda b_2 &= 2x_2 - 2a_2 \\ \lambda b_3 &= 2x_3 - 2a_3 \\ 0 &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0\end{aligned}$$

Para ello emplearemos el método de *Gauss-Jordan*

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \\ 2a_3 \\ -b_0 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -b_3 \\ 0 & b_2 & b_3 & \frac{b_1^2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \\ 2a_3 \\ -b_0 - b_1a_1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -b_3 \\ 0 & 0 & b_3 & \frac{b_1^2}{2} + \frac{b_2^2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \\ 2a_3 \\ -b_0 - b_1a_1 - b_2a_2 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -b_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b_1^2}{2} + \frac{b_2^2}{2} + \frac{b_3^2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \\ 2a_3 \\ -b_0 - b_1a_1 - b_2a_2 - b_3a_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

si despejamos lambda de la última fila  $\therefore \lambda = \frac{-2(b_0 + b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3)}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

$$\begin{aligned}
 2x_3 - b_3\lambda &= 2a_3 \\
 x_3 &= \frac{2a_3 + b_3\lambda}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2x_2 - b_2\lambda &= 2a_2 \\
 x_2 &= \frac{2a_2 + b_2\lambda}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2x_1 - b_1\lambda &= 2a_1 \\
 x_1 &= \frac{2a_1 + b_1\lambda}{2}
 \end{aligned}$$

Ahora, veamos el hessiano de la función

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 D}{\partial x_1^2} &= 2 \\
 \frac{\partial^2 D}{\partial x_2^2} &= 2 \\
 \frac{\partial^2 D}{\partial x_3^2} &= 2 \\
 \frac{\partial^2 D}{\partial x_1 x_2} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 D}{\partial x_2 x_3} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 D}{\partial x_1 x_3} &= 0
 \end{aligned}$$

entonces el arreglo quedaría

$$HD(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Así que  $H_1 = |2| > 0$ ,  $H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$  y finalmente  $H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$ , eso nos permite concluir que el punto crítico en cuestión es un mínimo local, ahora evaluemos

$$\begin{aligned} D\left(\frac{2a_1 + b_1\lambda}{2}, \frac{2a_2 + b_2\lambda}{2}, \frac{2a_3 + b_3\lambda}{2}\right) &= \left(\frac{2a_1 + b_1\lambda}{2} - a_1\right)^2 + \left(\frac{2a_2 + b_2\lambda}{2} - a_2\right)^2 + \left(\frac{2a_3 + b_3\lambda}{2} - a_3\right)^2 \\ D\left(\frac{2a_1 + b_1\lambda}{2}, \frac{2a_2 + b_2\lambda}{2}, \frac{2a_3 + b_3\lambda}{2}\right) &= \left(\frac{b_1\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_2\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_3\lambda}{2}\right)^2 \\ D\left(\frac{2a_1 + b_1\lambda}{2}, \frac{2a_2 + b_2\lambda}{2}, \frac{2a_3 + b_3\lambda}{2}\right) &= \frac{\lambda^2}{4} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \end{aligned}$$

luego, podemos emplear que  $\lambda = \frac{-2(b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

$$D\left(\frac{2a_1 + b_1\lambda}{2}, \frac{2a_2 + b_2\lambda}{2}, \frac{2a_3 + b_3\lambda}{2}\right) = \frac{(b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Como habiamos tomado a D como la función distnacia pero al cuadrado ahora podemos ver que la **mínima** distnacia está dada por

$$\sqrt{D\left(\frac{2a_1 + b_1\lambda}{2}, \frac{2a_2 + b_2\lambda}{2}, \frac{2a_3 + b_3\lambda}{2}\right)} = \frac{|b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

12. Encuentre el punto sobre la linea de intersección de los planos  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$  y  $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$  que es más cercano al origen.

Sean  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  y  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  los vectores de la distancia, tomemos una función  $D$  como el cuadrado de la distancia (para no trabajar con raices)

$$\begin{aligned} D(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2 + (x_3 - 0)^2 \\ D(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

Sujetas a las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, x_3) &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ g_2(x_1, x_2, x_3) &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0 \end{aligned}$$

Primero supongamos que  $\nabla g_1 \neq 0$  y  $\nabla g_2 \neq 0$  entonces

$$\begin{aligned} \nabla D &= (2x_1, 2x_2, 2x_3) \\ \nabla g_1 &= (a_1, a_2, a_3) \\ \nabla g_2 &= (b_1, b_2, b_3) \end{aligned}$$

Así se nos permite plantear el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 \tag{1}$$

$$2x_2 = \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 \tag{2}$$

$$2x_3 = \lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 \tag{3}$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \tag{4}$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = -b_0 \tag{5}$$

resolvamos por el método de *Gauss-Jordan*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -b_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ 0 & a_2 & a_3 & \frac{a_1^2}{2} & \frac{a_1 b_1}{2} \\ 0 & b_2 & b_3 & \frac{a_1 b_1}{2} & \frac{b_1^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ 0 & a_2 & a_3 & \frac{a_1^2}{2} & \frac{a_1 b_1}{2} \\ 0 & b_2 & b_3 & \frac{a_1 b_1}{2} & \frac{b_1^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ 0 & 0 & a_3 & \frac{(a_1^2 + a_2^2)}{2} & \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{2} \\ 0 & 0 & b_3 & \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{2} & \frac{(b_1^2 + b_2^2)}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ 0 & 0 & a_3 & \frac{(a_1^2 + a_2^2)}{2} & \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{2} \\ 0 & 0 & b_3 & \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{2} & \frac{(b_1^2 + b_2^2)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{2} & \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)}{2} & \frac{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{2} & \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)}{2} & \frac{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{2} & \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}{2} - \frac{(a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

entonces tenemos que

$$2x_1 - \lambda_1 a_1 - \lambda_2 b_1 = 0 \quad (1)$$

$$2x_2 - \lambda_1 a_2 - \lambda_2 b_2 = 0 \quad (2)$$

$$2x_3 - \lambda_1 a_3 - \lambda_2 b_3 = 0 \quad (3)$$

$$\left( \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} \right) \lambda_1 + \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)}{2} \lambda_2 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}{2} \lambda_2 - \frac{(a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} \lambda_2 = -b_0 \quad (5)$$

Observemos que si asumimos a  $b_0 = 0$  entonces en (5) tendríamos que  $\lambda_2 = 0$ , también por (4),  $\lambda_1 = 0$  y así sabríamos que por (1), (2), (3)  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  lo que significaría que  $(0, 0, 0)$  es la intersección de los planos y además es la distancia más cercana al origen. Entonces asumamos que  $b_0 \neq 0$  entonces  $\lambda_2 \neq 0$ , reescribamos (4) y (5) para hacerlos más claros

$$(\vec{a} \cdot \vec{a}) \lambda_1 + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \lambda_2 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\lambda_2}{2} \left( \vec{b} \cdot \vec{b} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \right) = -b_0 \quad (5)$$