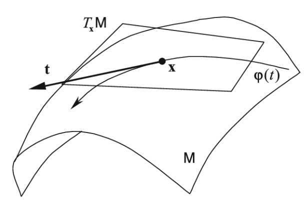
Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas para las ciencias aplicadas II

Tarea 1
Espacios vectoriales y Álgebra lineal



Profesor: M. en C. Pedro Porras Flores
Armando Abraham Aquino Chapa
Kevin Ariel Merino Peña

7 de marzo de 2020

Ejercicio 1

Escribe el vector cero en $M_{3x4}(\mathbb{R})$

Definición 1 (Matriz)**.** Una **Matriz** es un arreglo rectangular de elementos de un campo $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ de la forma

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

A los elementos $a_{i,j}$ con $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq i \leq m$ se les llama entradas de la matriz, a las matrices las denotamos por $\mathbb{A}$ *(letras mayúsculas)* y al conjunto de las matrices de mn se les denota por $M_{m\times n}(\mathbb{F})$

De esta manera tenemos que el vector cero de la matriz de 3 renglones por 4 columnas es aquella cuyas entradas (todas) son 0 *i. e.*

$$A_{3x4} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Sea V el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en $\mathbb{R}$. Muestre que V es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar para funciones.

Veamos que la derivada cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} (f(x)+g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)+g'(x) \end{aligned}$$

Así hemos probado que la derivada abre sumas

$$\begin{aligned} (cf(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

De esta manera queda conolidado que en la función derivada, los escalares son sacados de la función

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto se vale para cualquier constante, en particular el 0

Ejercicio 3

Prueba que el conjunto de las funciones pares en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial con suma y multiplicación por escalar usuales para funciones. Recuerde que una función es par si $\forall x \in Dom(f)$ entonces $f(-x) = f(x)$

Si tenemos en cuenta que $f(-t)+g(-t)=f(t)+g(t)$ y que si tenemos constantes siempre ocurre que $cf(-t)=cf(t)$ entonces ya hemos probado las dos primeras condiciones y para hallar el neutro basta con usar el 0 del cambo ($\mathbb{R}$) para notar que también lo manda al 0 vector.

Ejercicio 4

Sea V el conjunto de pares ordenados de números reales. Si (a_1,a_2) y (b_1,b_2) son elementos de V y $\alpha \in \mathbb{R}$, definamos la suma y multiplicación escalar de la siguiente manera:

(i) $(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2b_2)$

(ii) $\alpha(a_1,a_2)=(\alpha a_1,a_2)$.

¿Es V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones?

No puede ser un espacio vectorial porque si tenemos que

$$0(a_1,a_2)=(0,a_2)$$

para cumplir el cero vector, entonces se compliría para cualquier a_2 lo cual no es posible pues contradice la unicidad del cero.

Ejercicio 5

Determinar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$ bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar usual.

Definición 2. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto de $\mathcal{V}$ espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ decimos que $\mathcal{U}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$ si cumple lo siguiente

I) $\vec{0} \in \mathcal{U}$

II) $\forall \vec{u},\vec{v} \in \mathcal{U} \implies \vec{u}+\vec{v} \in \mathcal{U}$

III) Sea $\alpha \in \mathbb{F}, \vec{u} \in \mathcal{U} \implies \alpha \cdot \vec{u} \in \mathcal{U}$

a) $W_1=\{(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| a_1=3a_2 \text{ y } a_3=-a_2\}$
Veamos que W_1 contiene a $\vec{0}$ esto es que algún elemento en $W_1=(0,0,0)$ por lo que

$$\begin{aligned}
(0,0,0) &= (a_1,a_2,a_3) && \text{Por } \vec{0} \in \mathbb{R}^3\\
&= (3a_2,a_2,-a_2) && \text{Por } a_1=3a_2 \text{ y } a_3=-a_2\\
&= (3(0),(0),-(0)) && \text{Para cualquier } a_2\\
&= (0,0,0)
\end{aligned}$$

Por otra parte comprobemos que la suma está dentro de W_1
Sean $\hat{u}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\hat{v}(b_1,b_2,b_3) \in W_1$ la suma de vectores se realiza entrada a entrada por lo que

$$\begin{aligned}
(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3) &= (3a_2,a_2,-a_2)+(3b_2,b_2,-b_2)\\
&= (3a_2+3b_2,a_2+b_2,-a_2-b_2)\\
&= (3(a_2+b_2),(a_2+b_2),-(a_2+b_2))
\end{aligned}$$

Y como $a_1+b_2 \in \mathbb{R}^3$ entonces $\hat{u}+\hat{v} \in W_1$ por lo que cumple $II)$

Finalmente veamos que si $k \in R, \hat{u} \in W_1 \implies k\hat{u} \in W_1$

$$k(3a_2,a_2,-a_2) \in W_1$$
$$(3ka_2,ka_2,-ka_2) \in W_1$$

Por lo tanto cumple $III)$

$$\therefore W_1 \text{ es subespacio vectorial de } \mathbb{R}^3$$

b) $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| a_1 = a_3 + 2\}$

Veamos si $\hat{0} \in W_2$ si esto ocurriera entonces $(0,0,0) \in W_2$ l que significaría lo siguiente

$$\begin{aligned}(0,0,0) &= (a_3 + 2, a_2, a_3) && \text{Por que deben ser iguales entrada a entrada}\\ 0 &= a_3 + 2\\ 0 &= a_2\\ 0 &= a_3\end{aligned}$$

Podemos observar que en esta situación, $a_3 = -2 \wedge a_3 = 0$ lo cual no es posible, dicha contradicción vino de suponer que $\hat{0} \in W_2$

$$\therefore \hat{0} \notin W_2$$

$$\text{por lo que } W_2 \textbf{ no} \text{ es subespacio vectorial de } \mathbb{R}^3$$

c) $W_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| 2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0\}$

Notemos que en la declaración de los elementos de W_3 podemos deducir que

$$a_3 = 7a_2 - 2a_1$$

entonces $\hat{u} \in W_3 \implies \hat{u} = (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1)$

Veamos que para cumplir I) el vector cero debería estar en W_1 *i.e.*

$$\begin{aligned}(0,0,0) &= (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1)\\ 0 &= a_1\\ 0 &= a_2\\ 0 &= 7a_2 - 2a_1\end{aligned}$$

lo anterior se cumple si $a_2 = 0 = a_1$

$$\therefore \hat{0} \in W_3$$

Ahora, sean $\hat{u}, \hat{v} \in W_3 \implies \hat{u} = (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \wedge \hat{v} = (b_1, b_2, 7b_1 - 2b_1)$ y probemos que $\hat{u} + \hat{v} \in W_3$

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) + (b_1, b_2, 7b_1 - 2b_1) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 7a_2 + 7b_2 - 2a_1 - 2b_1)\\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 7(a_2 + b_2) - 2(a_1 + b_1))\end{aligned}$$

y como $a_1 + b_1 \in R$ también se encontrarán dentro de W_3 por lo que la suma es cerrada en el conjunto W_3

Por último veamos que si $k \in \mathbb{R}, \hat{u} \in W_3 \implies k \cdot \hat{u} \in W_3$

$$\begin{aligned}k\hat{u} &= k(a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1)\\ k\hat{u} &= (ka_1, ka_2, 7ka_2 - 2ka_1)\end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir que cada uno de esos ka_1, ka_2 elementos estarán en $\mathbb{R}$ por lo que $k\hat{u}$ resultarán también estar en W_3

$$\therefore W_3 \text{ es un subespacio vectorial de } \mathbb{R}^3$$

d) $W_4 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \big| a_1 - 4a_2 - a_3 = 0\}$ De la definición de los elementos de W_4 se sigue que si $\hat{u}$ es un elemento de este conjunto, tendrá la forma $\hat{u} = (4a_2 + a_3, a_2, a_3)$ Comencemos averiguando si W_4 tiene elemento neutro, *i. e.*

$$\begin{aligned}(0,0,0) &= (4a_2 + a_3, a_2, a_3)\\ 0 &= 4a_2 + a_3 && \text{para ser iguales entrada a entrada}\\ 0 &= a_2\\ 0 &= a_3\end{aligned}$$

Lo anterior ocurre cuando $a_2 = a_3 = 0$ por lo que $\hat{0} \in W_4$ y así cumple la condición *I)*

Siguiendo con la comprobación de sus propiedades como subespacio vectorial, tenemos que: Sean $\hat{u}, \hat{v} \in W_4 \implies \hat{u} + \hat{v} \in W_4$ *i. e.*

$$\begin{aligned}
\hat{u} + \hat{v} &= (4a_2 + a_3, a_2, a_3) + (4b_2 + b_3, b_2, b_3) & \\
&= (4a_2 + 4b_2 + b_3 + a_3, a_2 + b_2, a_3 + b_3) & \text{sumando entrada por entrada} \\
&= (4(a_2 + b_2) + (b_3 + a_3), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3)) & \text{asociatividad y distributividad en } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

y como $(a_2 + b_2) \in \mathbb{R}$ la suma de $\hat{u}, \hat{v} \in W_4$

Finalmente notemos que si $k \in \mathbb{R}, \hat{u} \in W_4 \implies k \cdot \hat{u} \in W_4$

$$\begin{aligned}
k\hat{u} &= k(4a_2 + a_3, a_2, a_3) & \\
&= (4ka_2 + ka_3, ka_2, ka_3) & \text{por distributividad}
\end{aligned}$$

y $ka_2, k_3 \in \mathbb{R}$ entonces $k \cdot \hat{u} \in W_4$

$$\therefore W_4 \text{ es subespacio vectorial de } \mathbb{R}^3$$

Ejercicio 6

En cada caso diga si los vectores son generados por el conjunto S

Definición 3. Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ decimos que $\mathcal{S}$ genera a $\mathcal{V}$ si $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos de $\mathcal{S}$ al generado de s se le denota como $span(\mathcal{S}), < \mathcal{S} >, gen(\mathcal{S})$

a) $(2, -1, 1), S = \{(1, 0, 2), (-1, 1, 1)\}$
Sea $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
Entonces $(2, -1, 1) = \alpha_1(1, 0, 2) + \alpha_2(-1, 1, 1) = (\alpha_1, 0, 2\alpha_1) + (-\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2$.
Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 - \alpha_2 &= 2 \\
\alpha_2 &= -1 \\
2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1
\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 - (-1) &= 2 \\
\alpha_2 &= -1 \\
2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1
\end{aligned}$$

Al resolver el sistema, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 1 \\
\alpha_2 &= -1 \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

Entonces:
$1(1, 0, 2) + (-1)(-1, 1, 1) = (1, 0, 2) + (1, -1, -1) = (2, -1, 1)$
Cómo el sistema de ecuaciones si se satisface, el conjunto S SI genera al vector $(2, -1, -1)$

b) $(2, -1, 1, 3), S = \{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 1)\}$

Sea α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.
Entonces: $(2, -1, 1, 3) = \alpha_1(1, 0, 1, -1) + \alpha_2(0, 1, 1, 1) = (\alpha_1, 0, \alpha_1, -\alpha_1) + (0, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2$.
Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 &= 3 \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2 - 1 &= 1 \\ -(-1) + 2 &= 3 \end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 1 &= 1 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones verificamos si el conjunto S genera al vector. Entonces:

$$2(1, 0, 1, -1) + (-1)(0, 1, 1, 1) = (2, 0, 2, -2) + (0, -1, -1, -1) = (2, -1, -1, -3)$$

Como el producto de los escalares por los elementos del conjunto S no forman al vector, podemos concluir que S **NO** genera a $(2, -1, 1, 3)$.

c) $2x^3 - x^2 + x + 3, S = \{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1\}$

Sean α_1, α_2 y α_3 elementos del campo, si suponemos que $2x^3 - x^2 + x + 3$ es generado por S implicará que existen dichos 3 elementos $\cdot \ni \cdot$

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = \alpha_1(x^3 + x^2 + x + 1) + \alpha_2(x^2 + x + 1) + \alpha_3(x + 1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 \\ \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 \\ \alpha_3 x + \alpha_3 \end{aligned}$$

Por lo que ocurre lo siguiente

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3$$

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 + x + 3 &= \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3 \\ &= x^3(\alpha_3) + x^2(\alpha_2 + \alpha_1) + x(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 - \alpha_1 \\ \alpha_2 &= -1 - 2 \\ \alpha_2 &= -3 \end{aligned}$$

Ahora llegamos a una contradicción, puesto que el sistema de ecuaciones anterior implica que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3 = 1$ por lo que el conjunto S no genera $2x^3 - x^2 + x + 3$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Recordemos que la suma de matrices se hace entrada por entrada eso es, si se van a sumar 2 matrices $A + B$ se hace de la forma $a_{ij} + b_{ij} \forall i, j \in A, B$ de tal manera que existen $a_{ij} + b_{ij} \forall i, i \in A, B$ de tal manera que existen $\alpha, \beta, \gamma \quad \cdot \ni \cdot$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + \gamma_{1,1} & \beta_{1,2} + \gamma_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notemos que

$$-\alpha_{2,1} = -3 \implies \alpha = 3$$

y luego

$$\beta_{2,2} = 4 \implies \beta = 4$$

y finalmente

$$\gamma = 2 - \beta_{1,2} \implies \gamma = 4$$

Ejercicio 7

Determina cuando los siguientes conjuntos son linealmente dependientes o linealmente independientes.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -3\alpha_1 \\ -2\alpha_1 & 4\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\alpha_2 & 6\alpha_2 \\ 4\alpha_2 & -8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente reglón y columna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_2 & -3\alpha_1 + 6\alpha_2 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 & 4\alpha_1 - 8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ -3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0 \\ 4\alpha_1 - 8\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicamos dos veces el renglón 3 y lo sumamos al renglón 4. También multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 3.

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ -3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Por último multiplicamos tres veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 2:

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0$$
$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 = 0$$

Entonces $\alpha_1 = 2\alpha_2$.

Esto indica que α_1 depende de α_2. Por lo tanto, el conjunto $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \in M_{2x2}$ es **linealmente dependiente**.

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -2\alpha_1 \\ -\alpha_1 & 4\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_2 & \alpha_2 \\ 2\alpha_2 & -4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente reglón y columna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & -2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 & 4\alpha_1 - 4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$
$$-2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$-\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$$
$$4\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0$$

Multiplicamos cuatro veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 4. También sumamos el renglón 1 al renglón 2:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$
$$-2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$0\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 = 0$$

Tenemos que $\alpha_2 = 0$, Entonces lo sustituimos en las demás ecuaciones:

$$\alpha_1 - 0 = 0$$
$$-2\alpha_1 + 0 = 0$$

Es claro notar que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$.

Cómo ambos valen 0, podemos concluir que el conjunto $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ es **linealmente independiente**.

c) $\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\} \in P_3(\mathbb{R})$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

Tenemos que: $0x^3 + 0x^2 + 0x + d = \alpha_1(x^3 + 2x^2) + \alpha_2(-x^2 + 3x + 1) + \alpha_3(x^3 - x^2 + 2x - 1)$

$x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = (\alpha_1 + \alpha_3)x^3 + (2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)x^2 + (3\alpha_2 + 2\alpha_3)x + (\alpha_2 - \alpha_3)$.

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$
$$0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$
$$0\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

Ahora multiplicamos -3 veces el renglón 4 y le sumamos el renglón 1:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos obtener que $\alpha_3 = 0$. Entonces sustituimos este valor en las ecuaciones.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 0\alpha_2 + 0 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - 0 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

De lo anterior deducimos que $\alpha_1 = 0$, por tanto:

$$\begin{aligned} 0 - \alpha_2 - 0 &= 0 \\ 0 + 3\alpha_2 + 0 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Podemos que concluir que el conjunto $\{x^3+2x^2, -x^2+3x+1, x^3-x^2+2x-1\} \in P_3(\mathbb{R})$ es **linealmente independiente**.

d) $\{(1,-1,2),(1,-2,1),(1,1,4)\} \in \mathbb{R}^3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Entonces:
$\alpha_1(1,-1,2) + \alpha_2(1,-2,1) + \alpha_3(1,1,4) = (0,0,0)$. Ahora:

$(\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (\alpha_2, -2\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, 4\alpha_3) = (0,0,0)$. Ordenamos los escalares:

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3) = (0,0,0)$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos a ”menos.el renglón 3. También sumamos el renglón 1 al renglón 2.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 2. Y al renglón 1 le sumamos el renglón 2.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 0\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces nos queda el siguiente sistema.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

De esto podemos deducir que $\alpha_1 = -3\alpha_3$, $\alpha_2 = 2\alpha_3$ y $\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{2}$.

Entonces podemos concluir que el conjunto $\{(1,-1,2),(1,-2,1),(1,1,4)\} \in \mathbb{R}^3$ es **linealmente dependiente**.

e)$\{(1,-1,2),(2,0,1),(-1,2,-1)\} \in \mathbb{R}^3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \alpha_1(1,-1,2) + \alpha_2(2,0,1) + \alpha_3(-1,2,-1) &= (0,0,0) && \text{Ahora} \\ (\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (2\alpha_2, 0\alpha_2, \alpha_2) + (-\alpha_3, 2\alpha_3, -\alpha_3) &= (0,0,0) && \text{Ordenamos los escalares} \\ (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Primero multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 3. Luego sumamos el renglón 2 al renglón 1.

$$\begin{aligned} 0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 1:

$$\begin{aligned} 0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 5\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos que $\alpha_2 = 0$ y sustituimos en las demás ecuaciones.

$$\begin{aligned} 0 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Es fácilmente apreciar que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 0$

Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto $(1,-1,2),(2,0,1),(-1,2,-1) \in \mathbb{R}^3$ es **linealmente independiente**

Recuerde que $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \big| a_k \in \mathbb{R}\, \forall k = 0,1,2,\ldots n\}$

Ejercicio 8

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son bases para $\mathbb{R}^3$?

Definición 4. Una **base** β de $\mathcal{V}$ espacio vectorial es un subconjunto de $\mathcal{V}$ $\cdot \ni \cdot$ β genera a $\mathcal{V}$ y β es linealmente independiente

a) $S = \{(1,0,-1),(2,5,1),(0,-4,3)\}$ En primer lugar veamos quién es el generado del conjunto S, recordemos que un conjunto genera a otro $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos de $\mathcal{S}$

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(1,0,-1) + \beta(2,5,1) + \gamma(0,-4,3)$$

$$\begin{aligned}\alpha(1,0,-1) + \beta(2,5,1) + \gamma(0,-4,3) &= (\alpha, 0, -\alpha) + (2\beta, 5\beta, \beta) + (0, -4\gamma, 3\gamma)\\ &= (\alpha + 2\beta, 5\beta - 4\gamma, -\alpha + \beta + 3\gamma)\end{aligned}$$

Necesitamos que cada uno de esos vectores pueda ser el valor de una posición de $\mathbb{R}^3$ por lo que debería verse como

$$\alpha(1,0,-1) + \beta(2,5,1) + \gamma(0,-4,3) = \delta(1,0,0) + \epsilon(0,1,0) + \eta(0,0,1)$$

De esta manera podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta + 0\gamma &= \delta + 0\epsilon + 0\eta\\ 0\alpha + 5\beta - 4\gamma &= 0\delta + \epsilon + 0\eta\\ -\alpha + \beta + 3\gamma &= 0\delta + 0\epsilon + \eta\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & 2\beta & 0\gamma\\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma\\ -\alpha & \beta & 3\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\delta & \epsilon & 0\eta\\ 0\delta & 0\epsilon & \eta\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta\\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0\delta & 0\epsilon & \eta\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta\\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0\delta & 0\epsilon & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta\end{array}\right) \quad \text{1ra fila + 2da fila en } \textbf{3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta\end{array}\right) \quad \text{2da fila} \cdot \frac{1}{5} \text{ en } \textbf{2da fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & \delta & -\frac{3}{5}\epsilon & \eta\end{array}\right) \quad \text{2da fila} \cdot -3 + 3^{ra} \text{ fila en } \textbf{3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & \delta & -\frac{3}{5}\epsilon & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right) \quad \text{3ra fila} \cdot \frac{5}{27} \textbf{ en 3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right) \quad (\text{3ra fila} \cdot \frac{4}{5}) + 2^{da} \text{ fila } \textbf{en 2da fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{19}{27}\delta & -\frac{2}{9}\epsilon & -\frac{8}{27}\eta\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right) \quad (\text{2da fila} \cdot -2) + 1^{a} \text{ fila } \textbf{en 1ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{19}{27}\delta & -\frac{2}{9}\epsilon & -\frac{8}{27}\eta\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{19}{27} & -\frac{2}{9} & -\frac{8}{27}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{27} & \frac{1}{9} & \frac{4}{27}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{27}\end{array}\right) \quad \text{Conservando sólo } \textbf{coeficientes}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{19}{27}\delta - \frac{2}{9}\epsilon - \frac{8}{27}\eta\\ \beta &= \frac{4}{27}\delta + \frac{1}{9}\epsilon + \frac{4}{27}\eta\\ \delta &= \frac{5}{27}\delta - \frac{1}{9}\epsilon + \frac{5}{27}\eta\end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{S} \text{ genera a } \mathbb{R}^3$$

Ahora veamos si es linealmente independiente, lo cual ocurre si la única solución para

$$\alpha(1,0,-1)+\beta(2,5,1)+\gamma(0,-4,3)=0$$

es que

$$\alpha=\beta=\gamma=0$$

$$\begin{aligned} \alpha+2\beta+0\gamma&=0\\ 0\alpha+5\beta-4\gamma&=0\\ -\alpha+\beta+3\gamma&=0 \end{aligned}$$

Resolviendo dicho sistema obtenemos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0\\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0\\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) \qquad \text{1ra fila + 2da fila en } \textbf{3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0\\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0\\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) \qquad \text{2da fila} \cdot \frac{1}{5} \text{ en } \textbf{2da fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0\\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0\\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & 0 \end{array}\right) \qquad \text{2da fila} \cdot -3+3^{ra} \text{ fila en } \textbf{3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma 0 & \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0\\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) \qquad \text{3ra fila} \cdot \frac{5}{27} \textbf{ en 3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0\\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) \qquad (\text{3ra fila} \cdot \frac{4}{5})+2^{da} \text{ fila } \textbf{en 2da fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2\beta & 0\gamma & 0\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0\beta & 0\gamma & 0\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) \qquad (\text{2da fila} \cdot -2)+1^{a} \text{ fila } \textbf{en 1ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0\beta & 0\gamma & 0\\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0\\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{Conservando sólo } \textbf{coeficientes}$$

De esta manera podemos concluir que $\mathcal{S}$ es **linealmente independiente**

$$\therefore \mathcal{S} \text{ es Base para } \mathbb{R}^3$$

b) $S=\{(2,-4,1),(0,3,-1),(6,0,-1)\}$
Veamos quién es el generado de S, un conjunto genera a otro si todo elemento del segundo conjunto puede ser expresado como una combinación lineal del primero,en este caso elementos de S

Sean $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(2,-4,1)+\beta(0,3,-1)+\gamma(6,0,-1)$$

$$\begin{aligned} \alpha(2,-4,1)+\beta(0,3,-1)+\gamma(6,0,-1)&=(2\alpha,-4\alpha,\alpha)+(0,3\beta,-\beta)+(6\gamma,0,-\gamma)\\ &=(2\alpha+6\gamma,-4\alpha+3\beta,\alpha-\beta-\gamma) \end{aligned}$$

Necesitamos que cada uno de dichos vectores pueda ser el valor de una posición en $\mathbb{R}^3$ por lo que debería de verse como

$$\alpha(2,-4,1)+\beta(0,3,-1)+\gamma(6,0,-1)=\delta(1,0,0)+\xi(0,1,0)+\eta(0,0,1)$$

De esta manera obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2\alpha+0\beta+6\gamma &= \delta+0\xi+0\eta \\ -4\alpha+3\beta+0\gamma &= 0\delta+\xi+0\eta \\ \alpha-\beta-\gamma &= 0\delta+0\xi+\eta \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & 0\beta & 6\gamma \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma \\ \alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\delta & \xi & 0\eta \\ 0\delta & 0\xi & \eta \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2\alpha & 0\beta & 6\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2\alpha & 0\beta & 6\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) \qquad \text{1ra fila} \cdot \frac{1}{2} \text{ en 1a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ -4\alpha & 3\beta & 0\gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & \gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) \qquad \text{(1ra fila} \cdot 4\text{)+2a fila en 2a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) \qquad \text{3ra fila - 1ra fila en 3ra fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 12\gamma & 2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) \qquad \text{2fa fila} \cdot \frac{1}{3} \text{ en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -\beta & -4\gamma & -\frac{1}{2}\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{1}{6}\delta & \frac{1}{3}\xi & \eta \end{array}\right) \qquad \text{3ra fila -2a fila en 3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{1}{6}\delta & \frac{1}{3}\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array}\right) \qquad \text{3a fila} \cdot 6 \text{ en 3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & \frac{2}{3}\delta & \frac{1}{3}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array}\right) \qquad \text{3a fila} \cdot -\frac{2}{3} + \text{2a fila en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & \frac{1}{2}\delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & 0\delta & -\xi & -3\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array}\right) \qquad \text{3a fila} \cdot -\frac{1}{2} + \text{1a fila en 1a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 3\gamma & 0\delta & -\xi & -3\eta \\ 0\alpha & \beta & 4\gamma & 0\delta & -\xi & -4\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 0\gamma & \delta & 2\xi & 6\eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \qquad \text{Conservando sólo coeficientes}$$

Notemos que para γ tenemos que tiene ceros en la parte izquierda y puede tener valores distintos de cero en la parte derecha, por lo tanto el sistema de ecuaciones es inconsistente y consecuentemente

$$S \text{ **no** genera a } \mathbb{R}^3$$
$$\therefore S \text{ **no** es base de } \mathbb{R}^3$$

c) $S\{(1,2,-1),(1,0,2),(2,1,1)\}$

Comencemos por ver quien en es generado de S, recordemos que un conjunto genera a otro si $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos para $\mathcal{S}$

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(1,2,-1) + \beta(1,0,2) + \gamma(2,1,1)$$

$$\begin{aligned} \alpha(1,2,-1) + \beta(1,0,2) + \gamma(2,1,1) &= (\alpha, 2\alpha, -\alpha) + (\beta, 0\beta, 2\beta) + (2\gamma, \gamma, \gamma) \\ &= (\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha + 0\beta + \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma) \end{aligned}$$

Es menester que cada una de esas entradas represente una en $\mathbb{R}^3$ pues nos gustaría ver que S genera a $\mathbb{R}^3$ por lo que obtenemos la siguiente ecuación

$$(\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha + 0\beta + \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma) = \delta(1,0,0) + \xi(0,1,0) + \eta(0,0,1)$$

y así tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 2\gamma &= \delta + 0\xi + 0\eta \\ 2\alpha + 0\beta + \gamma &= 0\delta + \xi + 0\eta \\ -\alpha + 2\beta + \gamma &= 0\delta + 0\xi + \eta \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 2\gamma \\ 2\alpha & 0\beta & \gamma \\ -\alpha & 2\beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\delta & \xi & 0\eta \\ 0\delta & 0\xi & \eta \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 2\alpha & 0\beta & \gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 2\alpha & 0\beta & \gamma & 0\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) \qquad \text{2a fila - 2(1a fila) en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) \qquad \text{1a fila + 3a fila en 3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & -2\delta & \xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) \qquad \text{2a fila} \cdot -\frac{1}{2} \text{ en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 1\delta & 0\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & -2\delta & \frac{3}{2}\xi & \eta \end{array}\right) \qquad \text{2a fila} \cdot -3 + \text{3a fila en 3 fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & -2\delta & \frac{3}{2}\xi & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array}\right) \qquad \text{3a fila} \cdot -\frac{2}{3} \text{ en 3a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 1\delta & -\frac{1}{2}\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array}\right) \qquad \text{3a fila} \cdot -\frac{3}{2} + \text{2a fila en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 2\gamma & \delta & 0\xi & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 0\gamma & -\frac{5}{3}\delta & 2\xi & \frac{4}{3}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array}\right) \qquad \text{(3a fila} \cdot -2) + 1a fila en 1a Fila$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & 0\gamma & -\frac{5}{3}\delta & 2\xi & \frac{4}{3}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 0\gamma & -\frac{2}{3}\delta & 1\xi & \frac{1}{3}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array}\right) \qquad \text{1a fila - 2a fila en 1a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0\beta & 0\gamma & -\frac{2}{3}\delta & 1\xi & \frac{1}{3}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & -1\delta & 1\xi & 1\eta \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & \frac{4}{3}\delta & -1\xi & -\frac{2}{3}\eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \qquad \text{Manteniendo sólo coeficientes}$$

$$\alpha = -\frac{2}{3}\delta + 1\xi + \frac{1}{3}\eta$$
$$\beta = -\delta + \xi + \eta$$
$$\gamma = \frac{4}{3}\delta - \xi - \frac{-2}{3}\eta$$

$$\therefore S \text{ genera a } \mathbb{R}^3$$

Ahora veamos si el linealmente independiente, lo cual ocurre si la única solución a la siguiente ecuación es que todos los coeficientes sean 0

$$\alpha(1,2,-1) + \beta(1,0,2) + \gamma(2,1,1) = 0$$
$$(\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha + 0\beta + \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma) = 0$$

Lo cual permite formar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\alpha + \beta + 2\gamma = 0$$
$$2\alpha + 0\beta + \gamma = 0$$
$$-\alpha + 2\beta + \gamma = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 2\alpha & 0\beta & \gamma & 0 \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) \quad \text{2a fila - 2(1a fila) en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ -\alpha & 2\beta & \gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) \quad \text{1a fila + 3a fila en 3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & -2\beta & -3\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) \quad \text{2a fila} \cdot -\frac{1}{2} \text{ en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & 0 \end{array}\right) \quad \text{2a fila} \cdot -3 + \text{3a fila en 3 fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & -\frac{3}{2}\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array}\right) \quad \text{3a fila} \cdot -\frac{2}{3} \text{ en 3a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & \frac{3}{2}\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array}\right) \quad \text{3a fila} \cdot -\frac{3}{2} + \text{2a fila en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 2\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array}\right) \quad \text{(3a fila} \cdot -2) + \text{1a fila en 1a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array}\right) \quad \text{1a fila - 2a fila en 1a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & 0 \\ 0\alpha & 0\beta & 1\gamma & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{Manteniendo sólo coeficientes}$$

Así podemos concluir que S es linealmente independiente

$$\therefore S \text{ es base para } \mathbb{R}^3$$

Ejercicio 9

Diga si los siguientes $x^3 - 2x^2 + 1, 4x^2 - x + 3y3x - 2$ generan a $P_3(\mathbb{R})$

Sea $ax^3 + bx^2 + cx + d \in (\mathbb{R})$.

Tomamos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in (\mathbb{R})$. Entonces:
$ax^3 + bx^2 + cx + d = (\alpha_1)x^3 + (-2\alpha_1 + 4\alpha_2)x^2 + (\alpha_2 + 3\alpha_3)x + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3)$
Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= b \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 &= c \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 &= d \end{aligned}$$

Sustituimos α_1 en las demás ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a \\ -2a + 4\alpha_2 &= b \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 &= c \\ a + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 &= d \end{aligned}$$

Del renglón 2 es fácil apreciar cuál es el valor de α_2

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 &= c \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 &= d \end{aligned}$$

De igual forma sustituimos α_2 en las demás ecuaciones.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ -\left(\frac{b+2a}{4}\right) + 3\alpha_3 &= c \\ a + 3\left(\frac{b+2a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d \end{aligned}$$

Observamos que tenemos 2 ecuaciones, en las cuáles sólo hay un valor a encontrar, entonces en estas dos ecuaciones procedemos a encontrar el valor de α_3. Primero comenzaremos con el renglón 3.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\ 3\alpha_3 &= \frac{4c}{4} + \left(\frac{b+2a}{4}\right) \\ a + 3\left(\frac{b+2a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a \\
\alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\
\alpha_3 &= \frac{\frac{4c+b+2a}{4}}{3} \\
a + 3\left(\frac{b+2a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d
\end{aligned}$$

Obtenemos el primer valor de α_3:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a \\
\alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\
\alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\
a + 3\left(\frac{b+2a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d
\end{aligned}$$

Encontraremos el valor de α_3 en la ecuación cuatro.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a \\
\alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\
\alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\
a + \left(\frac{b+2a}{4}\right) - 2\alpha_3 &= d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a \\
\alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\
\alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\
2\alpha_3 &= a + \left(\frac{3b+6a}{4}\right) - d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a \\
\alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\
\alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\
2\alpha_3 &= \frac{4a}{4} + \left(\frac{3b+6a}{4}\right) - \frac{4d}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a \\
\alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\
\alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\
\alpha_3 &= \frac{\frac{3b+10a-4d}{4}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a \\
\alpha_2 &= \frac{b+2a}{4} \\
\alpha_3 &= \frac{4c+b+2a}{12} \\
\alpha_3 &= \frac{3b+10a-4d}{8}
\end{aligned}$$

Una vez que encontramos los valores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, para ver que el conjunto dado genera a cualquier polinomio de grado tres, damos algún polinomio y este tendrá que poder escribirse como combinación lineal los elementos del conjunto y los escalares.

Elegimos el polinomio $5x^3 + 2x^2x + 2$.Ahora encontraremos los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ para poder escribirlo de la manera:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (\alpha_1)x^3 + (-2\alpha_1 + 4\alpha_2)x^2 + (\alpha_2 + 3\alpha_3)x + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3)$$

Utilizando los resultados del sistema de ecuaciones tenemos que:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 5 \\
\alpha_2 &= 3 \\
\alpha_3 &= 6 \\
\alpha_3 &= \frac{20}{12}
\end{aligned}$$

Como podemos apreciar los valores de α_3 no son los mismos, y esto es debido a que originalmente teníamos un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas, entonces el sistema tiene diversas soluciones y al encontrar que los resultados de las ecuaciones de α_3 no son el mismo, podemos concluir que el conjunto $x^3 - 2x^2 + 1, 4x^2 - x + 3y3x - 2$ **NO** generan a $P_3(\mathbb{R})$

Ejercicio 10

Prueba que las siguientes transformaciones T son lineales y encuentra el núcleo $Nu(T)$ y la imagen $Im(T)$

Definición 5. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, la **imagen** de una trasformación T es $Im(T) = \{T(\hat{x}) | \hat{x} \in V\}$

Definición 6. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, el **núcleo** de una trasformación T es $Nu(T) = \left\{\hat{x} \in V | T(\hat{x}) = \hat{0}_W\right\}$

a) $\{T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2\}$ definida por $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, 2a_3)$ Para ver que una transformación es lineal, debe cumplir que **abra sumas y saque escalares**

Sean $\hat{a_1}, \hat{a_2} \in \mathbb{R}^3$ y $\xi \in \mathbb{R}$ entonces

$\xi a_1 + a_2 = \xi(x_1, y_1, z_1) + (x_1, y_2, z_2)$	Por definición de a_1 y a_2
$\xi a_1 + a_2 = (\xi x_1, \xi y_1, \xi z_1) + (x_2, y_2, z_2)$	Por distributividad de los $\mathbb{R}$
$\xi a_1 + a_2 = (\xi x_1 + x_2, \xi y_1 + y_2, \xi z_1 + z_2)$	Sumando entrada por entrada
$T(\xi a_1 + a_2) = T(\xi x_1 + x_2, \xi y_1 + y_2, \xi z_1 + z_2)$	Aplicando T
$T(\xi a_1 + a_2) = ((\xi x_1 + x_2) - (\xi y_1 + y_2), 2(\xi z_1 + z_2))$	Siguiendo la regla de T
$T(\xi a_1 + a_2) = (\xi x_1 + x_2 - \xi y_1 - y_2, 2\xi z_1 2z_2)$	Por asociatividad
$T(\xi a_1 + a_2) = (\xi x_1 - \xi y_1 + x_2 - y_2, 2\xi z_1 2z_2)$	Por conmutatividad
$T(\xi a_1 + a_2) = ((\xi x_1 - \xi y_1) + (x_2 - y_2), 2\xi z_1 2z_2)$	Asociatividad nuevamente
$T(\xi a_1 + a_2) = (\xi x_1 - \xi y_1, 2\xi z_1) + (x_2 - y_2, 2z_2)$	Asociatividad entre elementos en $\mathbb{R}^2$
$T(\xi a_1 + a_2) = \xi(x_1 - y_1, 2z_1) + (x_2 - y_2, 2z_2)$	Por distributividad de ξ
$T(\xi a_1 + a_2) = \xi T(a_1) + T(a_2)$	Por definición de T

$$\therefore T \text{ es transformación lineal}$$

Ahora veamos quién es el núcleo de la transformación igualando a $\hat{0}_{\mathbb{R}^2}$ sea $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$

$T(\hat{x}) = \hat{0}_{\mathbb{R}^2}$	Planteando la iguladad
$T(\hat{x}) = (0, 0)$	Por definición del neutro aditivo en $\mathbb{R}^2$
$T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)$	Porque $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$
$(x_1 - x_2, 2x_3) = (0, 0)$	Por definición de T
$x_1 - x_2 = 0$	Obtenemos el siguiente sistema
$2x_3 = 0$	
$x_3 = 0$	Por lo que tenemos
$x_1 = x_2$	y por otra parte

$\therefore$ el núcleo de la transformación son todos los elementos cuya primera y segunda coordenada son la misma y la tercera 0.

$$i.e.\ Nu(T) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | (x_1, x_1, 0)\}$$

Finalmente observemos que la imagen de la transformacion es:
Sean $\hat{y} \in \mathbb{R}^2$ y $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$ veamos que

$T(\hat{x}) = \hat{y}$	Para ver la forma de los elementos en la imgaen
$T(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2)$	Por definición de $\hat{y}, \hat{x}$
$(x_1 - x_2, 2x_3) = (y_1, y_2)$	Usando la regla de correspondencia de T
$x_1 - x_2 = y_1$	Obtenemos que y_1 es de esa forma
$2x_3 = y_2$	y que y_2 se obtiene de esta manera

Es menester mencionar que la suma (diferencia) entre elementos de $\mathbb{R}$ es algún otro elemento en $\mathbb{R}$ por lo que la imagen de T es todo $\mathbb{R}^2$

b) $\{T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3\}$ definida por $(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, 0, 2a_1 - a_2)$ Para ver que una transformación es lineal, debe cumplir que **abra sumas y saque escalares**
Sean $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^3$ y $\theta \in \mathbb{R}$ entonces

$$
\begin{aligned}
\theta\hat{x}+\hat{y} &= \theta(a,b)+(c,d) && \text{Por definición de } \hat{x},\hat{y}\\
\theta\hat{x}+\hat{y} &= (\theta a,\theta b)+(c,d) && \text{Distributividad en } \mathbb{R}\\
\theta\hat{x}+\hat{y} &= (\theta a+c,\theta b+d) && \text{Sumando entrada a entrada}\\
T(\theta\hat{x}+\hat{y}) &= T(\theta a+c,\theta b+d) && \text{Aplicando T en ambos lados}\\
T(\theta\hat{x}+\hat{y}) &= ((\theta a+c)+(\theta b+d),0,2(\theta a+c)-(\theta b+d) && \text{Aplicando la regla de correspondencia}\\
T(\theta\hat{x}+\hat{y}) &= (\theta a+\theta b+c+d,0,2\theta a+2c-\theta b-d) && \text{Asociatividad en } \mathbb{R}\\
T(\theta\hat{x}+\hat{y}) &= ((\theta a+\theta b)+(c+d),0,(2\theta a-\theta b)+(2c-d) && \text{Asociativiad y distributividad en } \mathbb{R}\\
T(\theta\hat{x}+\hat{y}) &= (\theta a+\theta b,0,2\theta a-\theta b)+(c+d,0,2c-d) && \text{Asociativiad}\\
T(\theta\hat{x}+\hat{y}) &= \theta(a+b,0,2a-b)+(c+d,0,2c-d) && \text{Distributividad } \textit{inversa}\\
T(\theta\hat{x}+\hat{y}) &= \theta T(\hat{x})+T(\hat{y}) && \text{Definición de T}
\end{aligned}
$$

$$\therefore T \text{ es transformación lineal}$$

Revisemos cuál es el núcleo de la transformación lineal, tomando un elemento en el dominio y viendo qué forma tienen los elementos que irán al neutro aditivo de su codominio.
Sea $\hat{x}\in\mathbb{R}^2$ entonces

$$
\begin{aligned}
T(\hat{x}) &= \hat{0}_{\mathbb{R}^3} && \text{Planteando la igualdad}\\
T(x_1,x_2) &= \hat{0}_{\mathbb{R}^3} && \text{Por la forma de } \hat{x}\\
T(x_1,x_2) &= (0,0,0) && \text{Por la forma de } \hat{0}_{\mathbb{R}^3}\\
(x_1+x_2,0,2x_1-x_2) &= (0,0,0) && \text{Aplicando la regla de correspondencia de T}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2 &= 0 && \text{Obtenemos el siguiente sistema}\\
0 &= 0\\
2x_1-x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -x_2 && \text{Deducimos lo siguiente}\\
2x_1 &= x_2
\end{aligned}
$$

Y la única manera de que eso ocurra es que

$$x_1=x_2=0$$

$$\therefore \text{el núcleo de la transformación es } (0,0)$$

Finalmente notemos que la imagen de la transformación está dada por lo siguiente.
Sea $\hat{y}\in\mathbb{R}^3$ y $\hat{x}\in\mathbb{R}^2$ de la forma

$$\hat{y}=(y_1,y_2,y_3) \qquad \hat{x}=(x_1,x_2)$$

entonces

$$
\begin{aligned}
T(\hat{x}) &= \hat{y} && \text{Para ver de que forma son los elementos}\\
T(x_1,x_2) &= (y_1,y_2,y_3) && \text{Usando su representación}\\
(x_1+x_2,0,2x_1-x_2) &= (y_1,y_2,y_3) && \text{Por la regla de correspondencia de T}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2 &= y_1 && \text{Igualamos entrada a entrada}\\
0 &= y_2 && \text{Obteniendo lo siguiente}\\
2x_1-x_2 &= y_3 && \text{Se deduce de lo anterior}
\end{aligned}
$$

Es importante mencionar que la suma de elementos en $\mathbb{R}$ es algún elemento en $\mathbb{R}$ pues la suma es cerrada en dicho conjunto. Por lo que podemos deducir que la imagen de T es

$$Im(T)=\{(x_1,0,x_2)|x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$$

c) $\{T : M_{2x3}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2x2}(\mathbb{R})\}$ definido por

$$T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sean $A, B \in M_{2x3}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$ y que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A + B = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \qquad \text{Por definición de A y B}$$

$$\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \qquad \text{Distributividad de } \lambda$$

$$\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + b_{11} & \lambda a_{12} + b_{12} & \lambda a_{13} + b_{13} \\ \lambda a_{21} + b_{21} & \lambda a_{22} + b_{22} & \lambda a_{23} + b_{23} \end{pmatrix} \qquad \text{Definición de + en } M_{2x3}(\mathbb{R})$$

$$T(\lambda A + B) = T\left(\begin{pmatrix} \lambda a_{11} + b_{11} & \lambda a_{12} + b_{12} & \lambda a_{13} + b_{13} \\ \lambda a_{21} + b_{21} & \lambda a_{22} + b_{22} & \lambda a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}\right) \qquad \text{Aplicando T en ambos miembros}$$

$$T(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} 2(\lambda a_{11} + b_{11}) - (\lambda a_{12} + b_{12}) & \lambda a_{13} + b_{13} + 2(\lambda a_{12} + b_{12}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Siguiendo la regla de transformación de T}$$

$$T(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} 2\lambda a_{11} + 2b_{11} - \lambda a_{12} - b_{12} & \lambda a_{13} + b_{13} + 2\lambda a_{12} + 2b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Distributividad}$$

$$T(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} (2\lambda a_{11} - \lambda a_{12}) + (2b_{11} - b_{12}) & (\lambda a_{13} + 2\lambda a_{12}) + (b_{13} + 2b_{12}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Asociatividad en } \mathbb{R}$$

$$T(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} 2\lambda a_{11} - \lambda a_{12} & \lambda a_{13} + 2\lambda a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_{11} - b_{12} & b_{13} + 2b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Asociatividad en } M_{2x3}(\mathbb{R})$$

$$T(\lambda A + B) = \lambda \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_{11} - b_{12} & b_{13} + 2b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Distributividad } \textit{inversa} \text{ en } \lambda$$

$$T(\lambda A + B) = \lambda T(A) + T(B) \qquad \text{Definición de } T(A), T(B)$$

$$\therefore T \text{ es transformación lineal}$$

Veamos cuál es el núcleo de la transformación.
Sea $A \in M_{2x3}(\mathbb{R})$

$$T(A) = \hat{0}_{M_{2x2}} \qquad \text{Planteando la igualdad}$$

$$T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Planteando la igualdad}$$

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Por la regla de correspondencia de T}$$

$$2a_{11} - a_{12} = 0 \qquad \text{Obtenemos esto}$$
$$a_{13} + 2a_{12} = 0$$

$$a_{11} = \frac{a_{12}}{2} \qquad \text{Finalmente conseguimos}$$
$$a_{13} = -2a_{12}$$

$\therefore$ El **núcleo** de T son todas las matrices en $M_{2x3}(\mathbb{R})$ tal que $a_{11} = \dfrac{a_{12}}{2}$ y que $a_{13} = -2a_{12}$ sin importar las entradas a_{21}, a_{22}, a_{23}

Para ver quién es la imagen de T tomemos un elemento en el dominio e igualémoslo con un elemento del codominio *i.e.*
Sea $\hat{B} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ y $\hat{A} \in M_{2x3}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
T(\hat{A}) &= \hat{B} && \text{Planteando la igualdad} \\
T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} && \text{Planteando la igualdad} \\
\begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} && \text{Por la regla de correspondencia de T}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2a_{11} - a_{12} &= b_{11} && \text{Obtenemos esto} \\
a_{13} + 2a_{12} &= b_{12} \\
0 &= b_{21} = b_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{a_{12}}{2} && \text{Finalmente conseguimos} \\
a_{13} &= -2a_{12}
\end{aligned}$$

veamos que $2a_{11} - a_{12} \in \mathbb{R},\ a_{13} + 2a_{12} \in \mathbb{R}$
Por lo que podemos concluir que la **imagen** de T son todas las matrices en $M_{22}(\mathbb{R}) \quad \cdot \ni \cdot \quad b_{21} = b_{22} = 0$

d) $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})\}$ definida por $T(f(x)) = xf(x) + f'(x)$. Para ver que una transformación es lineal, debe cumplir que **abra sumas y saque escalares**
Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{R}^3$ y $\psi \in \mathbb{R}$ donde

$$p(x) = a + bx + cx^2 \qquad q(x) = d + ex + fx^2$$

entonces

$$\begin{aligned}
\psi p(x) + q(x) &= \psi(a + bx + cx^2) + (d + ex + fx^2) && \text{Definición de } p(x), q(x) \\
\psi p(x) + q(x) &= (\psi a + \psi bx + \psi cx^2) + (d + ex + fx^2) && \text{Distributividad de } \psi \\
\psi p(x) + q(x) &= (\psi a + d + \psi bx + ex + \psi cx^2 + fx^2) && \text{Asociatividad} \\
T(\psi p(x) + q(x)) &= T(\psi a + d + \psi bx + ex + \psi cx^2 + fx^2) && \text{Aplicando T en ambos miembros} \\
T(\psi p(x) + q(x)) &= \psi ax + dx + \psi bx^2 + ex^2 + \psi cx^3 + fx^3 + \psi b + e + \psi 2cx + 2fx && \text{Usando la regla de correspondencia} \\
T(\psi p(x) + q(x)) &= \psi ax + \psi b + \psi bx^2 + \psi cx^2 + \psi 2cx + e + dx + ex^2 + fx^3 + 2fx && \text{Conmutatividad en } \mathbb{R} \\
T(\psi p(x) + q(x)) &= (\psi ax + \psi b + \psi bx^2 + \psi cx^3 + \psi 2cx) + (e + dx + ex^2 + fx^3 + 2fx) && \text{Asociativiad en } \mathbb{R} \\
T(\psi p(x) + q(x)) &= \psi(ax + b + bx^2 + cx^3 + 2cx) + (e + dx + ex^2 + 2fx + fx^2) && \text{Distributividad \textit{inversa} en } \mathbb{R} \\
T(\psi p(x) + q(x)) &= \psi T(p(x)) + T(q(x)) && \text{Definición de } T(p(x)), T(q(x))
\end{aligned}$$

$\therefore T$ es transformación lineal

Veamos quien es el núcleo de la transformación para lo que necesitaremos tomar un $f(x) \in P_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 && \text{Por la forma de } f(x) \\
T(f(x)) &= x(a_0 + a_1x + a_2x^2) + a_1 + 2a_2x && \text{Aplicando la regla de correspondencia} \\
T(f(x)) &= a_1 + a_0x + 2a_2x + a_1x^2 + a_2x^3 && \text{Distributividad} \\
T(f(x)) &= a_1 + (a_0 + 2a_2)x + a_1x^2 + a_2x^3 && \text{Distributividad \textit{inversa} y asociatividad}
\end{aligned}$$

y ahora igualemos este resultado con $\hat{0}_{P_3(\mathbb{R})}$

$$a_1 + (a_0 + 2a_2)x + a_1x^2 + a_2x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \qquad \text{igualemos entrada a entrada}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 && \text{Primera entrada} \\ a_0 + 2a_2 &= 0 && \text{Segunda entrada} \\ a_1 &= 0 && \text{Tercera entrada} \\ a_2 &= 0 && \text{Cuarta entrada} \end{aligned}$$

Por lo tanto el **núcleo** de la transformación es el polinomio en $P_2(\mathbb{R}) \quad \cdot \ni \cdot \quad a_2 = a_1 = a_0 = 0$

Por último veamos quién es la imagen de la transformación lineal.
Sea $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \in P_3(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} T(f(x)) &= q(x) && \text{Planteamos la igualdad} \\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 && \text{Por definición de } f(x) \text{ y } q(x) \\ a_1 + (a_0 + 2a_2)x + a_1x^2 + a_2x^3 &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 && \text{Por la regla de correspondencia de T} \end{aligned}$$

Notemos que el término constante y el cuadrático son el mismo por lo que la imagen de la transformación son todos los polinomios en

$$p(x) \in P_3(\mathbb{R}) \quad \cdot \ni \cdot \quad p(x) = a + (c + 2b)x + ax^2 + bx^3$$

Ejercicio 11

Sean β y γ las bases estándar para $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Para cada transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ encontrar su representación matricial.

Definición 7. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y β una base ordenada de $\mathbb{V}$ si $\vec{x} \in \mathbb{V}$ entonces existen

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \cdot \ni \cdot \quad \vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots$$

donde $\vec{v}_i \in \beta$ entonces definimos al vector de coordenadas de $\vec{x}$ con respecto a la base β como

$$[\vec{x}]_\beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Definición 8. Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita y β, γ sus respectivas bases. Además consideremos $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ transformación lineal, entonces definimos a la matriz asociada a la función T de la base β en la base γ como

$$[T]_\beta^\gamma$$

a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(a_1, a_2) = (2a_1 - a_2, 3a_1 + 4a_2, a_1)$
Tomemos en cuenta que las bases estándar de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ son respectivamente, las siguientes

$$\beta = \{(1,0), (0,1)\} \quad \gamma = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

Ahora, con el primer elemento de la base β apliquemos la transformación lineal

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (2(1) - 0, 3(1) + 4(0), 1) && \text{Usando la regla de correspondencia} \\ T(1,0) &= (2,3,1) && \text{Por neutro aditivo y multiplicativo} \end{aligned}$$

Luego, escribamos a $(2,3,1)$ como combinación lineal de γ

$$\begin{aligned}
(2,3,1) &= \alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1) && \text{Coeficientes en el campo}\\
(2,3,1) &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) && \text{Distribuyendo y sumando}\\
2 &= \alpha_1 && \text{Valores resultantes}\\
3 &= \alpha_3 && \text{Valores resultantes}\\
1 &= \alpha_3 && \text{Valores resultantes}
\end{aligned}$$

Con lo que ahora tenemos podemos construir

$$[T(1,0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 2\\ 3\\ 1 \end{pmatrix}$$

Empleemos el segundo elemento de la base β para aplicarle la transformación lineal

$$\begin{aligned}
T(0,1) &= (2(0)-1, 3(0)+4(1), 0) && \text{Por la regla de correspondencia de T}\\
T(0,1) &= (-1,4,0) && \text{Distributividad,neutro aditivo y multiplicativo}
\end{aligned}$$

Ahora escribamos a $(-1,4,0)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned}
(-1,4,0) &= \alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1) && \text{Coeficientes en el campo}\\
(-1,4,0) &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) && \text{Disstribuyendo y sumando entrada a entrada}\\
\\
-1 &= \alpha_1 && \text{Valor del coeficiente}\\
4 &= \alpha_2 && \text{Valor del coeficiente}\\
0 &= \alpha_2 && \text{Valor del coeficiente}
\end{aligned}$$

Entonces el vector de coordenadas asociado a $(0,1)$ es

$$[T(0,1)]_\gamma = \begin{pmatrix} -1\\ 4\\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz asociada a la transformación T es

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ 3 & 4\\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(a_1,a_2,a_3) = (2a_1+3a_2-a_3, a_1+a_3)$

$$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \quad \gamma = \{(1,0),(0,1)\}$$

Tomemos el primer elemento de la base canónica β para aplicar la transformación lineal T

$$\begin{aligned}
T(1,0,0) &= (2(1)+3(0)-(0), (1)+(0)) && \text{Usando la regla de correspondencia}\\
T(1,0,0) &= (2,1) && \text{Por neutro aditivo, neutro multiplicativo}
\end{aligned}$$

Ahora veamos a $(2,1)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned}
(2,1) &= \alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1) && \text{Donde } \alpha_1,\alpha_2 \text{ son coeficientes del campo}\\
(2,1) &= (\alpha_1,\alpha_2) && \text{Distribuyendo y sumando vectores}\\
2 &= \alpha_1 && \text{Igualando entrada a entrada}\\
1 &= \alpha_2 && \text{Igualando entrada a entrada}
\end{aligned}$$

Por lo que ya podemos ver que

$$[T(1,0,0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Empleemos la transformación lineal con el segundo elemento de la base β

$$\begin{aligned} T(0,1,0) &= (2(0)+3(1)-0, 0+1) && \text{Usando la regla de correspondencia de T} \\ T(0,1,0) &= (3,1) && \text{Multiplicando y sumando neutros aditivos} \end{aligned}$$

Ahora veamos como combinación lineal de elementos de la base γ a $(3,1)$

$$\begin{aligned} (3,1) &= \alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1) && \text{Donde } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ (3,1) &= (\alpha_1, \alpha_2) && \text{Distribuyendo y sumando entrada con entrada} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha_1 && \text{Igualando las entradas} \\ 1 &= \alpha_2 && \text{Igualando las entradas} \end{aligned}$$

Y así podemos construir

$$[T(0,1,0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por último tomemos el tercer elemento de la base β para aplicar la transformación lineal

$$\begin{aligned} T(0,0,1) &= (2(0)+3(0)-1, 0+1) && \text{Por la regla de correspondencia de T} \\ T(0,0,1) &= (-1,1) && \text{Sumando y multiplicando respectivamente} \end{aligned}$$

Ahora veamos a $(-1,1)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned} (-1,1) &= \alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1) && \text{Donde } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ (-1,1) &= (\alpha_1, \alpha_2) && \text{Distribuyendo y sumando} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 &= \alpha_1 && \text{Igualamos entrada correspondiente} \\ 1 &= \alpha_2 && \text{Igualamos entrada correspondiente} \end{aligned}$$

De tal forma que el vector de coordenadas asociado a $T(0,0,1)$ es

$$[T(0,0,1)]_\gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y ahora que contamos con todos los coeficientes podemos construir la matriz asociada a la transformación lineal T como

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $T(a_1, a_2, a_3) = 2a_1 + a_2 - 3a_3$

$$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \quad \gamma = \{1\}$$

En este ejercicio tenemos un caso un tanto trivial pues la base estándar de $\mathbb{R}$ es el neutro multiplicativo, así que sólo bastará con aplicar la transformación lineal a elementos de β para obtener los coeficientes de la matriz asociada a dicha transformación.

$$\begin{aligned}
T(1,0,0) &= 2(1)+0-3(0) && \text{Por la regla de correspondencia}\\
T(1,0,0) &= 2 && \text{Operando}\\
\\
T(0,1,0) &= 2(0)+1-3(0) && \text{Por la regla de correspondencia}\\
T(0,1,0) &= 1 && \text{Simplificando}\\
\\
T(0,0,1) &= 2(0)+0-3(1) && \text{Por la regla de correspondencia}\\
T(0,0,1) &= -3 && \text{Efectuando los productos}
\end{aligned}$$

Finalmente la matriz asociada a esta transformación es

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

d) $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(a_1,a_2,a_3) = (2a_2+a_3, -a_1+4a_2+5a_3, a_1+a_3)$

$$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \quad \gamma = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

Tomemos el primer elemento de la base β y apliquemos la transformación lineal

$$\begin{aligned}
T(1,0,0) &= (2(0)+(0), -(1)+4(0)+5(0), (1)+(0)) && \text{Usando la regla de correspondencia}\\
T(1,0,0) &= (0,-1,1)
\end{aligned}$$

Ahora veamos a $(0,-1,1)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned}
(0,-1,1) &= \alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1) && \text{Donde } \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}\\
(0,-1,1) &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) && \text{Distribuyendo y sumando}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_1 && \text{Igualanado entradas}\\
-1 &= \alpha_2 && \text{Igualanado entradas}\\
1 &= \alpha_3 && \text{Igualanado entradas}
\end{aligned}$$

De esta manera podemos construir el vector de coordenadas asociado

$$[T(1,0,0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomemos el segundo elemento de la base β y apliquemos la transformación lineal

$$\begin{aligned}
T(0,1,0) &= (2(1)+(0), -(0)+4(1)+5(0), (0)+(0)) && \text{Usando la regla de correspondencia}\\
T(0,1,0) &= (2,4,0)
\end{aligned}$$

Ahora veamos a $(2,4,0)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned}
(2,4,0) &= \alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1) && \text{Donde } \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}\\
(2,4,0) &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) && \text{Distribuyendo y sumando}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 &= \alpha_1 && \text{Igualanado entradas}\\
4 &= \alpha_2 && \text{Igualanado entradas}\\
0 &= \alpha_3 && \text{Igualanado entradas}
\end{aligned}$$

De esta manera podemos construir el vector de coordenadas asociado

$$[T(0,1,0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tomemos el tercer elemento de la base β y apliquemos la transformación lineal

$$\begin{aligned} T(0,0,1) &= (2(0)+(1), -(0)+4(0)+5(1), (0)+(1)) && \text{Usando la regla de correspondencia} \\ T(0,0,1) &= (1,5,1) \end{aligned}$$

Ahora veamos a $(1,5,1)$ como combinación lineal de elementos de la base γ

$$\begin{aligned} (1,5,1) &= \alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1) && \text{Donde } \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R} \\ (1,5,1) &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) && \text{Distribuyendo y sumando} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 && \text{Igualanado entradas} \\ 5 &= \alpha_2 && \text{Igualanado entradas} \\ 1 &= \alpha_3 && \text{Igualanado entradas} \end{aligned}$$

De esta manera podemos construir el vector de coordenadas asociado

$$[T(0,0,1)]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por último construyamos la matriz asociada a la transformación T

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 12

Para cada uno de los siguientes pares de bases β y β' para $\mathbb{R}^2$, encuentra la matriz de cambio de coordenadas que cambia las coordenadas de β' en las de β.

a)$\beta = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ y $\beta' = \{(a_1,a_2),(b_1,b_2)\}$
b)$\beta = \{(-1,3),(2,-1)\}$ y $\beta' = \{(0,10),(5,0)\}$
c)$\beta = \{(2,5),(-1,-3)\}$ y $\beta' = \{e_1, e_2\}$
d)$\beta = \{(-4,3),(2,-1)\}$ y $\beta' = \{(2,1),(-4,1)\}$

Ejercicio 13

Encontrar la matriz inversa por el método de *Gauss-Jordan* de las siguientes matrices

a)$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Adjuntemos la matriz I_2 de tal manera que obtengamos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) && \text{1a Fila} \cdot -1 + \text{2a Fila en 2a Fila} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) && \text{2a Fila} \cdot -1 \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) && \text{2a Fila} \cdot -2 + \text{1a Fila en 1a Fila} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ la inversa de la matriz dada es } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Adjuntemos la matriz I_2 de tal manera que obtengamos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{1a Fila} \cdot -2 + 2^a \text{ en 2a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad \text{2a Fila} \cdot -\frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad \text{2a Fila} \cdot -1 + \text{1a fila en 1a fila}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2 \implies \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ Es singular}$$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Adjuntemos la matriz I_3 de tal manera que obtengamos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{1a fila} \cdot -1 + 2^a \text{ fila en 2a Fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{1a fila} \cdot -2 + \text{3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{2a fila} + \text{3a fila en 3a fila}$$

Observemos que

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_3 \implies \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ Es singular}$$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Adjuntemos la matriz I_3 de tal manera que obtengamos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{Intercambiar la 1a fila por la 2a}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{1a fila} \cdot -2 + 3^a \text{ Fila en 3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{Multiplicar 2a fila} \cdot -\frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{2a fila} \cdot -2 + 3^a \text{ fila en 3a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{3a fila} \cdot 2 + 2^a \text{ fila en 2a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{3a fila + 1a fila en 1a fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{2a fila} \cdot -1 + 1^a \text{ fila en 1a fila}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & -1 \\ \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ es la inversa de } \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14

Calcular el determinante de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Definición 9. Definimos a $M_{2x2}(\mathbb{R})$ como el espacio vectorial de las matrices de $2x2$ con coeficientes en los $\mathbb{R}$ de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Definición 10. Sea $A \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \quad \cdot \ni \cdot \quad a = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Entonces el determinante de A está definido como $det(A) = ad - bc$

por la definición de determinante tenemos que

$$\begin{aligned} det(A) &= (6)(4) - (-3)(2) \\ det(A) &= 24 + 6 \\ \therefore \quad det(A) &= 30 \end{aligned}$$

b) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

Por la definición de determinante tenemos que

$$\begin{aligned} det(A) &= (-5)(1) - (-3)(2) \\ det(A) &= (-5) - (-6) \\ det(A) &= -5 + 6 \\ det(A) &= 1 \end{aligned}$$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Definición 11. Sea $A \in M_{nxn}(\mathbb{F})$ si $n < 1$ entonces $A = (A_{11})$ entonces $det(A) = A_{11}$ para $n \geq 2$ definimos el determinante de manera recursiva como

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n(dimen.)} (-1)^{1+j} A_{1j} det(\hat{A}_{1j})$$

Y así, por la definición de $det(A)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
det(A) &= \sum_{j=1}^{3} A_{1j} det(\hat{A}_{1j}) \\
det(A) &= (-1)^2 A_{11} det(\hat{A}_{11}) + (-1)^3 A_{12} det(\hat{A}_{12}) + (-1)^4 A_{13} det(\hat{A}_{13}) \\
det(A) &= A_{11} det(\hat{A}_{11}) + -A_{12} det(\hat{A}_{12}) + A_{13} det(\hat{A}_{13}) \\
det(A) &= (0) det(\hat{A}_{11}) + -(-1) det(\hat{A}_{12}) + (2) det(\hat{A}_{13}) \\
det(A) &= det(\hat{A}_{12}) + 2 det(\hat{A}_{13})
\end{aligned}$$

Por la definición de determinantes en M_{2x2}

$$\begin{aligned}
det(\hat{A}_{12}) &= ad - bc \\
det(\hat{A}_{12}) &= (-1)(0) - (-3)(2) \\
det(\hat{A}_{12}) &= 6
\end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
det(\hat{A}_{13}) &= ad - bc \\
det(\hat{A}_{13}) &= (-1)(3) - (0)(2) \\
det(\hat{A}_{13}) &= -3
\end{aligned}$$

Sustituyendo del $det(\hat{A}_{12})$ y $det(\hat{A}_{13})$ en $det(A)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
& det(A) = 1(6) + 2(-3) \\
& det(A) = 6 - 6 \\
\therefore \quad & det(A) = 0
\end{aligned}$$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Por la definición de determinante en M_{nxn} tenemos que

$$\begin{aligned}
det(A) &= \sum_{j=1}^{4} (-1)^{1+j} A_{1j} det(\hat{A}_{1j}) \\
det(A) &= (-1)^2 A_{11} det(\hat{A}_{11}) + (-1)^3 A_{12} det(\hat{A}_{12}) + (-1)^4 A_{13} det(\hat{A}_{13}) + (-1)^5 A_{14} det(\hat{A}_{14}) \\
det(A) &= A_{11} det(\hat{A}_{11}) - A_{12} det(\hat{A}_{12}) + A_{13} det(\hat{A}_{13}) - A_{14} det(\hat{A}_{14})
\end{aligned}$$