Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Tarea-examen I

Kevin Ariel Merino Peña[1]

1. Conjuntos abiertos

Teorema 1.1. *Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea $\theta \in \mathbb{R}$, donde $0 \leq \theta < \pi$ el ángulo entre ellos, entonces*

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

Demostración. Consideremos el triángulo formado por los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ de la ley de cosenos tenemos

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta \tag{Υ}$$

Por otro lado calculemos $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ esto es

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &=< \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} > && \text{Por la definición de } \|x\| \\
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &=< \vec{u}, \vec{u} - \vec{v} > + < -\vec{v}, \vec{u} - \vec{v} > \\
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &=< \vec{u}, \vec{u} - \vec{v} > - < -\vec{v}, \vec{u} - \vec{v} > \\
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &=< \vec{u}, \vec{u} > + < \vec{u}, -\vec{v} > - < \vec{v}, \vec{u} > - < \vec{v}, \vec{v} > \\
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &=< \vec{u}, \vec{u} > + < \vec{u}, -\vec{v} > - < \vec{u}, \vec{v} > + < \vec{v}, \vec{v} > \\
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 < \vec{u}, \vec{v} > && (\Omega)
\end{aligned}$$

Comparemos Υ con Ω

$$-2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta = -2 < \vec{u}, \vec{v} > \Longrightarrow < \vec{u}, \vec{v} >= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta \quad \forall 0 \leq \theta < \pi$$

□

Corolario 1.2 (Desigualdad Cauchy-Schwarz)**.** *Para cualesquiera dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se tiene que*

$$|< \vec{u}, \vec{v} >| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$$

La igualdad se da si y sólo si $\vec{u}$ es múltiplo escalar de $\vec{v}$ o uno de los vectores es 0

Demostración. Supongamos que $\vec{u}$ no es múltiplo escalar de $\vec{v}$ y viceversa y que además ni $\vec{u}$ ni $\vec{v}$ son cero. Sabemos que

$$|\cos| \leq 1 \quad \forall 0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{1}$$

Por otro lado, sabemos que $< \vec{u}, \vec{v} >= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$, tomando el valor absoluto, tenemos:

$$|< \vec{u}, \vec{v} >| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\cos\theta|$$

si multiplicamos a (1) por $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$, entonces tenemos

$$|< \vec{u}, \vec{v} >| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\cos\theta| \leq (1)\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$$

Por lo tanto $|< \vec{u}, \vec{v} >| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ □

[1] 317031326

[1] Por nuestro curso de Matemáticas para las ciencias aplicadas I

Teorema 1.3 (Desigualdad del triángulo)**.** *Sean* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$*, entonces* $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Demostración. De la desigualdad de *Cauchy-Schwarz* tenemos que,

$$\begin{aligned}
|\vec{u},\vec{v}| &\leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| && \text{Por el corolario anterior}\\
2|\vec{u},\vec{v}| &\leq 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| && \text{como } 2>0\\
2<\vec{u},\vec{v}> &\leq 2|<\vec{u},\vec{v}>| && \text{Puesto que } <\vec{u},\vec{v}>\leq |<\vec{u},\vec{v}>|\\
2<\vec{u},\vec{v}> &\leq 2|<\vec{u},\vec{v}>| \leq 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| && \text{Por los dos últimos resltados}\\
2<\vec{u},\vec{v}> &\leq 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| && \text{Por transitividad de la desigualdad}\\
\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2<\vec{u},\vec{v}> &\leq \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| && \text{Sumando en ambos lados } \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2
\end{aligned} \tag{2}$$

Para concluir, observemos que

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2<\vec{u},\vec{v}>$$

Luego, de $(2),(1)$ tenemos: $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$, ahora tenemos

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &\leq (\|\vec{u}\|+\|v\|)^2 && \text{factorizando el trinomio cuadrado pefecto}\\
\|\vec{u}+\vec{v}\| &\leq \|\vec{u}\|+\|v\| && \text{Tomando la raíz cuadrada}
\end{aligned}$$

□

Corolario 1.4. *Sean* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$*, muestre que* $\|\vec{u}-\vec{v}\| \geq |\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\||$

2. Bola abierta

Definición 1 (Bola abierta)**.** Sea $\vec{x_0}$ y sea $r \in \mathbb{R}^+$, la bola de radio r y centro en $\vec{x_0}$ es definida por el conjunto de todos los punros $\vec{x}$ tal que $\|\vec{x}-\vec{x_0}\| < r$.
Este conjunto es denotado como $Br(\vec{x_0})$, es el conjunto de todos los puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ cuya distancia de $\vec{x_0}$ es menor que r

$$Br(\vec{x_0}) = \{\|\vec{x}-\vec{x_0}\| < r \quad | \quad \vec{x}, \vec{x_0} \in \mathbb{R}^n \quad r>0\}$$

Definición 2 (Conjunto abierto)**.** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que U es un conjunto abierto si para cada $\vec{x_0} \in U$, existe algún $r>0$ tal que $Br(\vec{x_0})$ está totalmente contenida en U, $Br(\vec{x_0}) \subseteq U$

Teorema 2.1. *Para cada* $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$ *y* $r>0$*,* $Br(\vec{x_0})$ *es un conjunto abierto*

Demostración. Para mostrar que $Br(\vec{x_0})$ es abierto, debemos mostrar que para cualquier punto $\vec{x} \in Br(\vec{x_0})$ podemos dar una bola con centro en $\vec{x}$ y algún radio, además que dicha bola esté totalmente contenida en $Br(\vec{x_0})$, a continuación mostraremos un bosquejo que ayuda a la prueba

Observemos que el radio para la bola con centro en $\vec{x}$, debe ser

$$s = r - \|\vec{x}-\vec{x_0}\| \tag{1}$$

Ahora sólo mostraremos que $Br(\vec{x}) \subset Br(\vec{x_0})$. Para esto debemos mostrar que para cualquier $\vec{y} \in Br(\vec{x})$, entonces $\vec{y} \in Br(\vec{x_0})$. Esto es

$$\|\vec{y}-\vec{x}\| < s \implies \|\vec{y}-\vec{x_0}\| < s$$

Hagamos una observación, como $\vec{y} \in Br(\vec{x})$ entonces

$$\|\vec{y}-\vec{x}\| < s \tag{2}$$

esto anterior, por la definición de bola.

En resumen, debemos de mostrar que $\|\vec{y} - \vec{x_0}\| < r$, para ello consideremos:

$$\begin{aligned}
\|\vec{y} - \vec{x_0}\| &= \|\vec{y} + \vec{0} - \vec{x_0}\| && \text{Sumando el neutro aditivo} \\
\|\vec{y} - \vec{x_0}\| &= \|\vec{y} + \vec{x} - \vec{x} - \vec{x_0}\| && \text{Por definición del neutro aditivo} \\
\|\vec{y} - \vec{x_0}\| &= \|(\vec{y} - \vec{x}) + (\vec{x} - \vec{x_0})\| && \text{Por definición del neutro aditivo} \\
\|\vec{y} - \vec{x_0}\| &= \|(\vec{y} - \vec{x}) + (\vec{x} - \vec{x_0})\| \leq \|\vec{y} - \vec{x}\| + \|\vec{x} - \vec{x_0}\| && \text{Por la desigualdad del triángulo} \\
\|\vec{y} - \vec{x_0}\| &= \|(\vec{y} - \vec{x}) + (\vec{x} - \vec{x_0})\| \leq \|\vec{y} - \vec{x}\| + \|\vec{x} - \vec{x_0}\| < s + \|\vec{x} + \vec{x_0}\| && \text{Por la observación 2 } \|\vec{y} - \vec{x}\| < s
\end{aligned}$$

Finalmente por (1)

$$\|\vec{y} - \vec{x_0}\| < r$$

□

Ejemplo

Mostrar $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$ es un conjunto abierto

Demostración. Sean $(x, y) \in A$ y $r > 0$, por mostrar que $Br(x, y) \subset A$. Observamos que la bola más grande que podemos dar con centro en (x, y) es la que tenga un radio $r = x$, pues como $(x, y) \in A$, entonces $x > 0$.

Ahora queremos mostrar que si tomamos $(x_1, y_1) \in Br(x, y)$ entonces $(x_1, y_1) \in A$.

Si $(x_1, y_1) \in Br(x, y)$, entonces

$$\begin{aligned}
|x_1 - x| &= \sqrt{(x_1 - x)^2} && \text{Por definición de valor absoluto} \\
|x_1 - x| &= \sqrt{(x_1 - x)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} < r = x && \text{Por construcción} \\
|x_1 - x| &< x && \text{Transitividad de la desigualdad} \\
-x &< x_1 - x < x && \text{Propiedad del valor absoluto} \\
0 &< x_1 < 2x && \text{Sumando en todos lados } x \\
0 &< x_1 && \text{Tomando sólo esa parte de la desigualdad}
\end{aligned}$$

$$0 < x_1 \implies (x_1, y_1) \in A \implies Br(x, y) \subset A$$

$$\therefore \text{A es abierto}$$

□

El concepto de bola en $\mathbb{R}^n$ permite extender el concepto de vecidad qe teníamos en $\mathbb{R}$, la cual fue fundamental para definir conceptos como límite y continiudad

3. Frontera

A continuación introducimos el concepto de frontera.

Definición 3 (Punto frontera)**.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Un punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, es llamado punto frontera de A si para cada vecindad de $\vec{x}$, ésta contiene al menos un punto de A y punto que no está en A, la frontera de A son todos sus puntos frontera.

Ejemplo

Sea $A = (a, b) \in \mathbb{R}$, entonces los puntos frontera de A son a y b.

Mostremos que a es un punto frontera, para esto observemos que la bola más grande que podemos dar es aquella cuyo radio sea $|b - a|$.Sea

$$Br(a) = \{|x - a| < r | r < |b - a|\}$$

y como $a < b$, entonces $0 < b - a$ por lo que $|b - a| = b - a > 0$

$$Br(a) = \{-r < x - a < r | r < b - a\}$$

Por otra parte, observemos lo siguiente

$$r < b - a \implies -r > -(b - a) \implies -r > a - b$$

Así obtenemos que

$$-r > a - b \implies Br(a) = \{a - b < x - a < b - a | a < b\}$$

$$Br(a) = \{a - b < x - a < b - a | a < b\} \implies Br(a) = \{2a - b < x < b\}$$

Observemos lo siguiente, como $a < b \implies a - b < 0 \implies a + a - b < a \implies 2a - b < a$. Por lotanto, hay x tal que $2a - b < x < a$, es decir, x es un punto que no está en A y por otro lado como $x < b$ también hay al menos un punto que sí lo está, por lo tanto a es punto frontera. Análogo para b.