Matemáticas para las Ciencias II
Semestre 2020-2
Prof. Pedro Porras Flores
Ayud. Irving Hernández Rosas
Tarea-examen I
Kevin Ariel Merino Peña[1]

1. Conjuntos abiertos

Teorema 1.1. *Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea $\theta \in \mathbb{R}$, donde $0 \leq \theta < \pi$ el ángulo entre ellos, entonces*

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

Demostración. Consideremos el triángulo formado por los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ de la ley de cosenos tenemos

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta \tag{Υ}$$

Por otro lado calculemos $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ esto es

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &=< \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} > && \text{Por la definición de } \|x\| \\
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &=< \vec{u}, \vec{u} - \vec{v} > + < -\vec{v}, \vec{u} - \vec{v} > \\
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &=< \vec{u}, \vec{u} - \vec{v} > - < -\vec{v}, \vec{u} - \vec{v} > \\
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &=< \vec{u}, \vec{u} > + < \vec{u}, -\vec{v} > - < \vec{v}, \vec{u} > - < \vec{v}, \vec{v} > \\
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &=< \vec{u}, \vec{u} > + < \vec{u}, -\vec{v} > - < \vec{u}, \vec{v} > + < \vec{v}, \vec{v} > \\
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 < \vec{u}, \vec{v} > && (\Omega)
\end{aligned}$$

Comparemos Υ con Ω

$$-2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta = -2 < \vec{u}, \vec{v} > \Longrightarrow < \vec{u}, \vec{v} >= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta \quad \forall 0 \leq \theta < \pi$$

□

Corolario 1.2 (Desigualdad Cauchy-Schwarz)**.** *Para cualesquiera dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se tiene que*

$$|< \vec{u}, \vec{v} >| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$$

La igualdad se da si y sólo si $\vec{u}$ es múltiplo escalar de $\vec{v}$ o uno de los vectores es 0

Demostración. Supongamos que $\vec{u}$ no es múltiplo escalar de $\vec{v}$ y viceversa y que además ni $\vec{u}$ ni $\vec{v}$ son cero. Sabemos que

$$|\cos| \leq 1 \quad \forall 0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{1}$$

Por otro lado, sabemos que $< \vec{u}, \vec{v} >= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$, tomando el valor absoluto, tenemos:

$$|< \vec{u}, \vec{v} >| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\cos\theta|$$

si multiplicamos a (1) por $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$, entonces tenemos

$$|< \vec{u}, \vec{v} >| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\cos\theta| \leq (1)\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$$

Por lo tanto $|< \vec{u}, \vec{v} >| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ □

[1] 317031326
[1] Por nuestro curso de Matemáticas para las ciencias aplicadas I

Teorema 1.3 (Desigualdad del triángulo)**.** *Sean* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$*, entonces* $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Demostración. De la desigualdad de *Cauchy-Schwarz* tenemos que,

$$\begin{aligned}
|\vec{u},\vec{v}| &\leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| && \text{Por el corolario anterior}\\
2|\vec{u},\vec{v}| &\leq 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| && \text{como } 2>0\\
2<\vec{u},\vec{v}> &\leq 2|<\vec{u},\vec{v}>| && \text{Puesto que } <\vec{u},\vec{v}>\leq |<\vec{u},\vec{v}>|\\
2<\vec{u},\vec{v}> &\leq 2|<\vec{u},\vec{v}>| \leq 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| && \text{Por los dos últimos resltados}\\
2<\vec{u},\vec{v}> &\leq 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| && \text{Por transitividad de la desigualdad}\\
\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2<\vec{u},\vec{v}> &\leq \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| && \text{Sumando en ambos lados } \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Para concluir, observemos que

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2<\vec{u},\vec{v}>$$

Luego, de $(2), (1)$ tenemos: $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$, ahora tenemos

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &\leq (\|\vec{u}\|+\|v\|)^2 && \text{factorizando el trinomio cuadrado pefecto}\\
\|\vec{u}+\vec{v}\| &\leq \|\vec{u}\|+\|v\| && \text{Tomando la raíz cuadrada}
\end{aligned}$$

□

Corolario 1.4. *Sean* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$*, muestre que* $\|\vec{u}-\vec{v}\| \geq |\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\||$

Definición 1 (Bola abierta)**.** Sea $\vec{x_0}$ y sea $r \in \mathbb{R}^+$, la bola de radio r y centro en $\vec{x_0}$ es definida por el conjunto de todos los punros $\vec{x}$ tal que $\|\vec{x}-\vec{x_0}\| < r$.
Este conjunto es denotado como $Br(\vec{x_0})$, es el conjunto de todos los puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ cuya distancia de $\vec{x_0}$ es menor que r

$$Br(\vec{x_0}) = \{\|\vec{x}-\vec{x_0}\| < r \quad | \quad \vec{x}, \vec{x_0} \in \mathbb{R}^n \quad r>0\}$$

Definición 2 (Conjunto abierto)**.** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que U es un conjunto abierto si para cada $\vec{x_0} \in U$, existe algún $r>0$ tal que $Br(\vec{x_0})$ está totalmente contenida en U, $Br(\vec{x_0}) \subseteq U$

Teorema 1.5. *Para cada* $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$ *y* $r>0$*,* $Br(\vec{x_0})$ *es un conjunto abierto*

Demostración. Para mostrar que $Br(\vec{x_0})$ es abierto, debemos mostrar que para cualquier punto $\vec{x} \in Br(\vec{x_0})$ podemos dar una bola con centro en $\vec{x}$ y algún radio, además que dicha bola esté totalmente contenida en $Br(\vec{x_0})$, a continuación mostraremos un bosquejo que ayuda a la prueba

Observemos que el radio para la bola con centro en $\vec{x}$, debe ser

$$s = r - \|\vec{x}-\vec{x_0}\| \tag{1}$$

Ahora sólo mostraremos que $Br(\vec{x}) \subset Br(\vec{x_0})$. Para esto debemos mostrar que para cualquier $\vec{y} \in Br(\vec{x})$, entonces $\vec{y} \in Br(\vec{x_0})$. Esto es

$$\|\vec{y}-\vec{x}\| < s \implies \|\vec{y}-\vec{x_0}\| < s$$

Hagamos una observación, como $\vec{y} \in Br(\vec{x})$ entonces

$$\|\vec{y}-\vec{x}\| < s \tag{2}$$

esto anterior, por la definición de bola.

En resumen, debemos de mostrar que $\|\vec{y}-\vec{x_0}\| < r$, para ello consideremos:

$$\begin{aligned}
\|\vec{y}-\vec{x_0}\| &= \|\vec{y}+\vec{0}-\vec{x_0}\| && \text{Sumando el neutro aditivo}\\
\|\vec{y}-\vec{x_0}\| &= \|\vec{y}+\vec{x}-\vec{x}-\vec{x_0}\| && \text{Por definición del neutro aditivo}\\
\|\vec{y}-\vec{x_0}\| &= \|(\vec{y}-\vec{x})+(\vec{x}-\vec{x_0})\| && \text{Por definición del neutro aditivo}
\end{aligned}$$

□