Espacios vectoriales

Matemáticas para las ciencias aplicadas II

Aquino Chapa Armando Abraham y Merino Peña Kevin Ariel
12 de febrero de 2020

---

1. Definición de espacio vectorial

Definición 1.1. Definimos $\mathbb{R}^2$ como el conjunto de pares ordenados (x, y) tal que x es un real y y es un real.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

Definición 1.2. Campo, conjunto no vacío con operaciones binarias (+,*) $\cdot \ni \cdot$ cumplen las siguientes 11 propiedades

(I) Cerrado bajo la suma
$$x, y \in \mathbb{R} \implies x + y \in \mathbb{R}$$

(II) Cerrado bajo el producto
$$x, y \in \mathbb{R} \implies x \cdot y \in \mathbb{R}$$

(III) Conmutatividad para la suma
$$x, y \in \mathbb{R} \implies x + y = y + x$$

(IV) Conmutatividad para el producto
$$x, y \in \mathbb{R} \implies x \cdot y = y \cdot x$$

(V) Asociatividad para el producto
$$x, y, z \in \mathbb{R} \implies x \cdot y = y \cdot x$$

(VI) Asociatividad para la suma
$$x, y, z \in \mathbb{R} \implies x + (y + z) = y + (x + z)$$

(VII) Neutro aditivo
$$\exists 0 \in \mathbb{R} \quad \cdot \ni \cdot \quad x + 0 = x$$

(VIII) Neutro multiplicativo
$$\exists 1 \in \mathbb{R} \quad \cdot \ni \cdot \quad x \cdot 1 = x$$

(IX) Inverso aditivo
$$\exists n \in \mathbb{R} \quad \cdot \ni \cdot \quad x + n = 0$$

(X) Inverso multiplicativo
$$\exists n \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \quad \cdot \ni \cdot \quad x \cdot n = 1$$

(XI) Distributividad
$$x, y, z \in \mathbb{R} \quad \cdot \ni \cdot \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Definición 1.3. Espacio vectorial Sea $\mathbb{V}$ un conjunto no vacío, con dos operaciones binarias y $\mathbb{F}$ un campo, diremos que $\mathbb{V}$ es espacio vectorial si cumple

(i) Conmutatividad para la suma
$$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V} \implies \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

(ii) Asociatividad para la suma
$$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{V} \implies (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = (\vec{z} + \vec{y}) + \vec{x}$$

(III) Neutro Aditivo

$$\exists \vec{0} \in \mathbb{V} \quad \cdot \ni \cdot \quad \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$$

(IV) Inverso aditivo

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{V} \quad \exists \vec{y} \in \mathbb{V} \quad \cdot \ni \cdot \quad \vec{x} + \vec{y} = 0$$

(V) Neutro multiplicativo

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{V} \implies 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

(VI) Asociatividad para la multiplicación

$$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}\ \wedge\ \vec{x} \in \mathbb{V} \implies (\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$$

(VII) Distributividad entre escalares y vectores

$$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}\ \wedge\ \vec{x} \in \mathbb{V} \implies (\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$$

(VIII) Distributividad entre vectores y escalares

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{F}\ \wedge\ \vec{x} \in \mathbb{V} \implies \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$$

1.1. Definición de las operaciones binarias en espacios vectoriales

Definición 1.4. Una **Matriz** es un arreglo rectangular de elementos de un campo $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ de la forma

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

A los elementos $a_{i,j}$ con $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq i \leq m$ se les llama entradas de la matriz, a las matrices las denotamos por $\mathbb{A}$ *(letras mayúsculas)* y al conjunto de las matrices de mn se les denota por $M_{m\times n}(\mathbb{F})$