

## Espacios vectoriales

# Matemáticas para las ciencias aplicadas II

Aquino Chapa Armando Abraham y Merino Peña Kevin Ariel

13 de febrero de 2020

1. Escribe el vector cero en  $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$

**Definición 0.1** (Matriz). Una **Matriz** es un arreglo rectangular de elementos de un campo  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$  de la forma

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

A los elementos  $a_{i,j}$  con  $1 \leq j \leq n$  y  $1 \leq i \leq m$  se les llama entradas de la matriz, a las matrices las denotamos por  $\mathbb{A}$  (*letras mayúsculas*) y al conjunto de las matrices de  $m \times n$  se les denota por  $M_{m \times n}(\mathbb{F})$

De esta manera tenemos que el vector cero de la matriz de 3 renglones por 4 columnas es aquella cuyas entradas (todas) son 0 *i. e.*

$$A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea  $V$  el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en  $\mathbb{R}$ . Muestre que  $V$  es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar para funciones.

Veamos que la derivada cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Así hemos probado que la derivada abre sumas

$$\begin{aligned} (cf(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

De esta manera queda conolidado que en la función derivada, los escalares son sacados de la función

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto se vale para cualquier constante, en particular el 0

3. Prueba que el conjunto de las funciones pares en  $\mathbb{R}$  es un espacio vectorial con suma y multiplicación por escalar usuales para funciones. Recuerde que una función es par si  $\forall x \in \text{Dom}(f)$  entonces  $f(-x) = f(x)$

Si tenemos en cuenta que  $f(-t) + g(-t) = f(t) + g(t)$  y que si tenemos constantes siempre ocurre que  $cf(-t) = cf(t)$  entonces ya hemos probado las dos primeras condiciones y para hallar el neutro basta con usar el 0 del campo ( $\mathbb{R}$ ) para notar que también lo manda al 0 vector.

4. Sea  $V$  el conjunto de pares ordenados de números reales. Si  $(a_1, a_2)$  y  $(b_1, b_2)$  son elementos de  $V$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , definamos la suma y multiplicación escalar de la siguiente manera:

$$(i) \quad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$$

$$(ii) \quad \alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, a_2).$$

¿Es  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  con estas operaciones?

No puede ser un espacio vectorial porque si tenemos que

$$0(a_1, a_2) = (0, a_2)$$

para cumplir el cero vector, entonces se cumpliría para cualquier  $a_2$  lo cual no es posible pues contradice la unicidad del cero.

5. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de  $\mathbb{R}^3$  bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar usual.

Basta con revisar si en cada caso se encuentra cerrado bajo la multiplicación escalar y bajo la adición, además que siempre contenga al 0

$$a) \quad W_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2\}$$

Sí es lineal porque lo satisface  $t(3, 1, -1)$

$$b) \quad W_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = a_3 + 2\}$$

NO es lineal porque no contiene al elemento neutro dentro del espacio vectorial.

$$c) \quad W_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0\}$$

Sí es lineal pues lo satisface  $(2, -7, 1)$

$$d) \quad W_4 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 - 4a_2 - a_3 = 0\}$$

Sí es lineal pues lo satisface  $(1, -4, -1)$

6. En cada caso diga si los vectores son generados por el conjunto  $S$

$$a) \quad (2, -1, 1), S = \{(1, 0, 2), (-1, 1, 1)\}$$

$$b) \quad (2, -1, 1, 3), S = \{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 1)\}$$

$$c) \quad 2x^3 - x^2 + x + 3, S = \{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1\}$$

$$d) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$