



Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores
Ayud. Irving Hernández Rosas

Proyecto III

Kevin Ariel Merino Peña¹



Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que estos proyectos se entregan de manera individual en la plataforma de google classroom.

1. Muestre que los siguientes conjuntos del plano son abiertos:

Definición 1. Sea $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $r \in \mathbb{R}^+$, la **bola** de radio r y centro en \vec{x}_0 es definida por el conjunto de todos los puntos \vec{x} tal que $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r$.

Este conjunto es denotado como $Br(\vec{x}_0)$ es el conjunto de los puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ cuya distancia de \vec{x}_0 es menor que r

Definición 2. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que U es **conjunto abierto** si para cada \vec{x}_0 , existe algún $r > 0$ tal que $Br(\vec{x}_0)$ está totalmente contenida en U , $Br(\vec{x}_0) \subset U$

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$

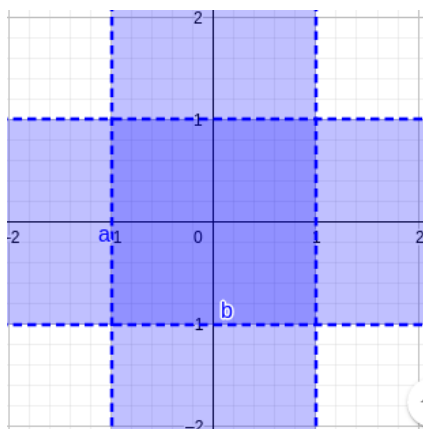


Figura 1: En el plano sólo la intersección es el conjunto A

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y\}$ Sean $(x, y) \in B$ y $r > 0$, por demostrar $Br(x, y) \subset B$.

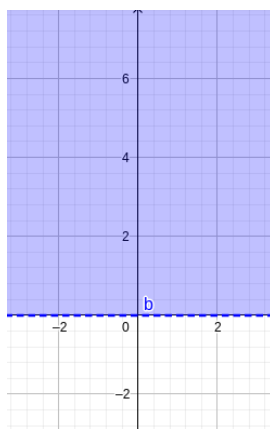


Figura 2: En el plano, los cuadrantes 1 y 2, son el conjunto B

La bola de radio más grande que podemos dar es $r = y$ y como $(x, y) \in B$, entonces $y > 0$. Ahora queremos mostrar que

$$(x_1, y_1) \in Br(x, y) \implies (x_1, y_1) \in B$$

¹317031326

Sea $(x_1, y_1) \in Br(x, y)$, entonces

$$\begin{aligned} |y_1 - y| &= \sqrt{(y_1 - y)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} \leq r \\ |y_1 - y| &= \sqrt{(y_1 - y)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} \leq y \\ |y_1 - y| &\leq y \\ -y &< y_1 - y < y \\ 0 &< y_1 < 2y \end{aligned}$$

Por lo tanto $0 < y_1 \implies (x_1, y_1) \in B$, así que $Br(x, y) \subset B$, $\therefore B$ es abierto

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < x^2 + y^2 < 4\}$

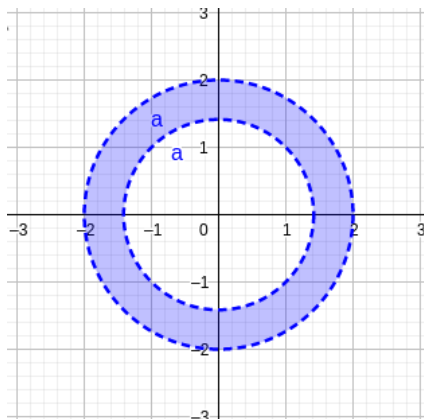


Figura 3: En el plano sólo la parte azul es el conjunto A

2. Calcule los siguientes. límites si existen:

Definición 3. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\vec{x}_0 \in A$, un punto de acumulación de A . Entonces se dice que el límite de $f(\vec{x})$, cuando \vec{x} tiende a \vec{x}_0 , es $\vec{l} \in \mathbb{R}^m$ y se denota

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} = \vec{l} \quad \text{o} \quad f(\vec{x}) \rightarrow \vec{l}$$

Si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 y^2}$

Resultará conveniente recordar de nuestro curso de Matemáticas para las ciencias aplicadas I que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\cos(\alpha) - 1}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}$$

. Entonces tomemos el siguiente cambio de variable $\alpha = xy$ y por el recordatorio anterior, tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 y^2} = -\frac{1}{2}$$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$

Para este segundo ejercicio, tomemos un cambio de variable $y = \sqrt{r}$ y $x = \sqrt{r}$ entonces $xy = r$ por lo que

b) $\lim_{(r \rightarrow 0)} \frac{\sin(r)}{r}$

Y de nuestro curso de Matemáticas para las ciencias aplicadas I tenemos que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$, por lo tanto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2, e^x)$

Tenemos un teorema enunciado en clase sobre las propiedades de los límites, una de ellas dice:

Definición 4. Si $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$ donde $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, m\}$ son las componentes de la función de f , entonces

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = (l_1, l_2, \dots, l_m)$$

si y sólo si

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = l_i$$

para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

entonces si

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2, e^x) &= \left(\lim_{x \rightarrow 1} x^2, \lim_{x \rightarrow 1} e^x \right) \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x^2, e^x) &= ((1)^2, e^1) \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x^2, e^x) &= (1, e) \end{aligned}$$

3. Usando la formulación ϵ - δ muestre:

a) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$

Sea $\epsilon > 0$, notemos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} - 0 \right\| &= \left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \right| \leq \left| \frac{xyz}{xy} \right| = |z| \\ \left\| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} - 0 \right\| &\leq \sqrt{(z)^2} \\ \left\| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} - 0 \right\| &\leq \sqrt{(z)^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

También observemos que $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 + z^2$, entonces $0 \leq \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{1}{z^2}$.

Así, también veamos que $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|(x, y, z)\|$ entonces

$$\begin{aligned} \left\| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} - 0 \right\| &\leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \left\| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} - 0 \right\| &\leq \|(x, y, z)\| \end{aligned}$$

Por lo que basta con tomar $\delta = \epsilon$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

Sea $\epsilon > 0$, consideremos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right\| &= \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \\ &= \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

Por otro lado, veamos que $0 \leq |xy| \leq x^2 + y^2$, entonces $0 < \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 0 &< \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 &< \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \|(x, y)\| < \epsilon \end{aligned}$$

Entonces sólo basta tomar $\delta = \epsilon$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x, x^2) = (6, 4)$

Por lo mencionado anteriormente, $\lim_{x \rightarrow 2} (3x, x^2) = (6, 4)$ puede expresarse como

$$(\lim_{x \rightarrow 2} 3x, \lim_{x \rightarrow 2} x^2) = (6, 4)$$

por lo tanto, para el primer caso.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, consideremos

$$\begin{aligned} |f(x) - l| &= |3x - 6| \\ |f(x) - l| &= 3|x - 2| \end{aligned} \qquad \text{Observemos que } |x - a| = |x - 2|$$

Así, basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{2}$

□

Luego, para el segundo valor

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, veamos que

$$\begin{aligned} |f(x) - l| &= |x^2 - 4| \\ |f(x) - l| &= |x - 2| |x + 2| \end{aligned}$$

Por otra parte, sea $\delta_0 = 1$

$$\begin{aligned} |x - 2| &< 1 \\ -1 &< x - 2 < 1 \\ 3 &< x + 2 < 5 \\ |x + 2| &< 5 \end{aligned}$$

De esta manera basta tomar $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{5} \right\}$

□

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2} & : \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Muestre que f es continua en $(0, 0)$ Para averiguar quién es el límite, tomémonos traectorias distintas.

Definimos $y = g(x) = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, g(x)) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, 0) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(0)}{|x|^3 + (0)^2} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= 0\end{aligned}$$

Por otra parte, definamos $y = g(x) = x$ por lo que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, g(x)) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, x) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{|x|^3 + x^2} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 \left(\frac{|x|^3}{x^2} + 1 \right)} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{|x|^3}{x^2} + 1} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{|x|^3}{x^2} + 1 \right)} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3|x|^2|x'|}{2x} + 1} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^2}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} |x'| + 1} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{\frac{3}{2} \cdot 0 \{-1, 1\} + 1} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{1} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= 0\end{aligned}$$

Aplicando ley de L'Hôpital

Por la regla del producto

Por definición de la derivada del valor absoluto

Sea $\epsilon > 0$, consideremos $\|f(x,y) - l\|$, donde $f(x,y) = \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2}$ y $l = 0$, entonces

$$\left\| \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2} - 0 \right\| = \left| \frac{x^2 y}{|x|^3 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2} \right|$$

luego, veamos que $\left| \frac{x^2 y}{x^3 + y^2} \right| = |y| = \sqrt{y^2}$ y como $0 \leq y^2 \leq y^2 + x^2$ tenemos que

$$\left| \frac{x^2 y}{x^3 + y^2} \right| \leq |y| = \sqrt{y^2}$$

Definición de valor absoluto

$$\left| \frac{x^2 y}{x^3 + y^2} \right| \leq \sqrt{y^2}$$

Por la igualdad planteada arriba

$$\left| \frac{x^2 y}{x^3 + y^2} \right| \leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Por la observación del inicio

$$\left| \frac{x^2 y}{x^3 + y^2} \right| \leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Puesto que $\sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$

$$\left| \frac{x^2 y}{x^3 + y^2} \right| \leq \sqrt{y^2} \leq \|(x, y)\| < \epsilon$$

Por hipótesis

$$\left| \frac{x^2 y}{x^3 + y^2} \right| \leq \|(x, y)\| < \epsilon$$

Por lo tanto, basta tomar $\delta = \epsilon$:)