Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Tarea-examen I

Kevin Ariel Merino Peña[1]

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que la tarea-examen se entrega individual.

1. Muestre que $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \{c + bx + ax^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, es un espacio vectorial con la suma usual y la multiplicación por escalar usual, es decir:

$$
\begin{aligned}
+ \colon & \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
& (a_1x^2 + b_1x + c_1, a_2x^2 + b_2x + c_2) \mapsto (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2). \\
\mu \colon & \mathbb{R} \times \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
& (\alpha, (a_1x^2 + b_1x + c_1)) \mapsto (\alpha a_1)x^2 + (\alpha b_1)x + (\alpha c_1).
\end{aligned}
$$

Definición 1. Sea $\mathbb{V}$ un conjunto no vacío con 2 operaciones definidas $(+, \mu)$ y un campo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ que cumple

1. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$, entonces $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
2. Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{V}$, entonces $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
3. Existe $\vec{0} \in \mathbb{V} \quad \cdot \ni \cdot \quad \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}, \qquad \forall \vec{x} \in \mathbb{V}$
4. Para todo $\vec{x} \in \mathbb{V}$ existe $\vec{y} \in \mathbb{V}$ tal que $\vec{x} + \vec{y} = 0$
5. Para todo $\vec{x} \in \mathbb{V}$ se cumple que $\vec{1}\vec{x} = \vec{x}$ donde $\vec{1}$ es el neutro multiplicativo de $\mathbb{F}(\mathbb{R})$
6. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $\vec{x} \in \mathbb{V}$ se cumple $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
7. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $\vec{x} \in \mathbb{V}$ entonces $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$
8. Sea $\alpha \in \mathbb{F}$ y $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$, entonces $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, por demostrar $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$, como los elementos de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ son de la forma $c + ax + bx^2$, entonces digamos que

$$\vec{x} = a_1 + a_2x + a_3x^2$$
$$\vec{y} = b_1 + b_2x + b_3x^2$$

$$
\begin{aligned}
\vec{x} + \vec{y} &= (a_1 + a_2x + a_3x^2) + (b_1 + b_2x + b_3x^2) && \text{Por definición de los vectores} \\
\vec{x} + \vec{y} &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3)x^2 && \text{Por definición de la suma} \\
\vec{x} + \vec{y} &= (b_1 + a_1) + (b_2 + a_2)x + (b_3 + a_3)x^2 && \text{Porque los elementos en } \mathbb{R} \text{ conmutan} \\
\vec{x} + \vec{y} &= (b_1 + b_2x + b_3x^2) + (a_1 + a_2x + a_3x^2) && \text{Por la definición de } + \\
\vec{x} + \vec{y} &= \vec{y} + \vec{x} && \text{Por definición de los vectores}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ los elementos de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ conmutan, *i.e.* $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{V}$ por demostrar $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ como los elementos de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ son de la forma $c + ax + bx^2$, entonces digamos que

$$\vec{x} = a_1 + a_2x + a_3x^2$$
$$\vec{y} = b_1 + b_2x + b_3x^2$$
$$\vec{z} = c_1 + c_2x + c_3x^2$$

---

[1] 317031326

$$
\begin{aligned}
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= (a_1+a_2x+a_3x^2+b_1+b_2x+b_3x^2)+c_1+c_2x+c_3x^2 && \text{Por definición de los vectores}\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= ((a_1+b_1)+(a_2+b_2)x+(a_3+b_3)x^2)+c_1+c_2x+c_3x^2 && \text{Por definición de los + en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= ((a_1+b_1)+c_1)+((a_2+b_2)+c_2)x+((a_3+b_3)+c_3)x^2 && \text{Por definición de los + en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= (a_1+(b_1+c_1))+(a_2+(b_2+c_2))x+(a_3+(b_3+c_3))x^2 && \text{Porque en } \mathbb{R} \text{ la suma es asociativa}\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= a_1+(b_1+c_1)+a_2x+(b_2+c_2)x+a_3x^2+(b_3+c_3)x^2 && \text{Emplendo la definición de suma}\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= a_1+(b_1+c_1)+a_2x+(b_2x+c_2x)+a_3x^2+(b_3x^2+c_3x^2) && \text{Aplicando distrubutividad}\\
(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} &= \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) && \text{Definiendo la suma en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \text{la suma es asociativa en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

Por demostrar: $\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$. Proponemos $\vec{0}=0+0x+0x^2$.
Sea $\vec{x}\in\mathbb{V}$, entonces $\vec{x}$ es de la forma

$$\vec{x}=a_1+a_2x+a_3x^2$$

$$
\begin{aligned}
\vec{0}+\vec{x} &= (0+0x+0x^2)+(a_1+a_2x+a_3x^2) && \text{Por definición de } \vec{x},\vec{0}\\
\vec{0}+\vec{x} &= (0+a_1)+(0+a_2)x+(0+a_3)x^2 && \text{Por definición de + en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
\vec{0}+\vec{x} &= a_1+a_2x+a_3x^2 && \text{Porque los elementos en } \mathbb{R} \text{ tienen neutro aditivo}\\
\vec{0}+\vec{x} &= \vec{x} && \text{Por definición de } \vec{x}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad 0+0x+0x^2 \text{ es el neutro adivito en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

Sea $\vec{x}\in\mathbb{V}$, por demostrar, existe $\vec{y}\in V \quad \cdot\ni\cdot \quad \vec{x}+\vec{y}=\vec{0}$, sabemos que los elementos de $\mathbb{V}$ tienen la siguiente forma

$$\vec{x}=a_1+a_2x+a_3x^2$$

proponemos

$$\vec{y}=-a_1-a_2x-a_3x^2$$

$$
\begin{aligned}
\vec{x}+\vec{y} &= (a_1+a_2x+a_3x^2)+(-a_1-a_2x-a_3x^2) && \text{Por definición de los vectores}\\
\vec{x}+\vec{y} &= (a_1-a_1)+(a_2-a_2)x+(a_3-a_3)x^2 && \text{Por definición de la suma en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
\vec{x}+\vec{y} &= (0)+(0)x+(0)x^2 && \text{Los elementos del campo tienen inverso aditivo}\\
\vec{x}+\vec{y} &= \vec{0} && \text{Por definición del neutro aditivo}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad -a_1-a_2x-a_3x^2 \text{ es el inverso aditivo de } \vec{x}$$

Sea $\vec{x}\in\mathbb{V}$, por demostrar $\vec{1}\cdot\vec{x}=\vec{x}$
Proponemos $\vec{1}=1$

$$
\begin{aligned}
1\cdot\vec{x} &= 1(a_1+a_2x+a_3x^2) && \text{Por definición de los elementos de } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
1\cdot\vec{x} &= (1\cdot a_1)+(1\cdot a_2)x+(1\cdot a_3)x^2 && \text{Por definición del producto en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
1\cdot\vec{x} &= a_1+a_2x+a_3x^2 && \text{Puesto que los elementos del campo tienen neutro multiplicativo}\\
1\cdot\vec{x} &= \vec{x} && \text{Por la definición de } \vec{x}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \vec{1} \text{ es el neutro multiplicativo en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{F}(\mathbb{F}=\mathbb{R})$ y $\vec{x}\in\mathbb{V}$, por demostrar que $(\alpha\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\vec{x})$

$$
\begin{aligned}
(\alpha\beta)\vec{x} &= (\alpha\beta)(a_1+a_2x+a_3x^2) && \text{Por definición de los elementos en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
(\alpha\beta)\vec{x} &= ((\alpha\beta)a_1)+((\alpha\beta)a_2)x+((\alpha\beta)a_3)x^2 && \text{Por definición del producto en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\\
(\alpha\beta)\vec{x} &= \alpha(\beta a_1)+\alpha(\beta a_2)x+\alpha(\beta a_3)x^2 && \text{Porque los elementos del campo asocian}\\
(\alpha\beta)\vec{x} &= \alpha(\beta\vec{x}) && \text{Aplicando la definición del producto}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \qquad \text{en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \text{ se cumple que } (\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{F}(\mathbb{F} = \mathbb{R})$ y $\vec{x} \in \mathbb{V}$, por demostrar que $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

$(\alpha+\beta)\vec{x} = (\alpha+\beta)(a_1 + a_2x + a_3x^2)$	Definición de elementos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$(\alpha+\beta)\vec{x} = \alpha a_1 + \beta a_1 + \alpha a_2 x + \beta a_2 x + \alpha a_3 x^2 + \beta a_3 x^2$	Pues los elementos del campo tienen distributividad
$(\alpha+\beta)\vec{x} = \alpha a_1 + \alpha a_2 x + \alpha a_3 x^2 + \beta a_1 + \beta a_2 x + \beta a_3 x^2$	Reordenando
$(\alpha+\beta)\vec{x} = \alpha(a_1 + a_2x + a_3x^2) + \beta(a_1 + a_2x + a_3x^2)$	Por definición del producto
$(\alpha+\beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$	Por definición de los elementos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

$$\therefore \qquad \text{en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \text{ se cumple distributividad cuando un elemento se multiplica por la suma de dos escalares}$$

Sea $\alpha \in \mathbb{V}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$, por demostrar que $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

$\alpha(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha((a_1 + a_2x + a_3x^2) + (b_1 + b_2x + b_3x^2))$	Por definición de los elementos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$\alpha(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3)x^2)$	Por definición de la suma en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$\alpha(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha(a_1 + b_1) + \alpha(a_2 + b_2)x + \alpha(a_3 + b_3)x^2$	Por definición del producto en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$\alpha(\vec{x}+\vec{y}) = (\alpha a_1 + \alpha b_1) + (\alpha a_2 + \alpha b_2)x + (\alpha a_3 + \alpha b_3)x^2$	Porque los elementos del campo tienen distributividad
$\alpha(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha(a_1 + a_2x + a_3x^2) + \alpha(b_1 + b_2x + b_3x^2)$	Agrupando de manera conveniente
$\alpha(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha(\vec{x}) + \alpha(\vec{y})$	Por definición de dichos elementos

$$\therefore \qquad \text{en } \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \text{ se cumple que } \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$$

2. Muestre que el conjunto $\beta = \{1, x, x^2\}$ es base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Definición 2. Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ decimos que $\mathcal{S}$ genera a $\mathcal{V}$ si $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos de $\mathcal{S}$ al generado de s se le denota como $span(\mathcal{S}), < \mathcal{S} >, gen(\mathcal{S})$

Definición 3. Una **base** β de $\mathbb{V}$ espacio vectorial es un subconjunto de $\mathbb{V}$ $\cdot \ni \cdot$ β genera a $\mathbb{V}$ y β es linealmente independiente

Diremos que el conjunto β genera a $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ si ocurre que

$$\alpha_1(p_1(x)) + \alpha_2(p_2(x)) + \alpha_3(p_3(x)) = \beta_1(1 + 0x + 0x^2) + \beta_2(0 + 1x + 0x^2) + \beta_3(0 + 0x + 1x^2)$$

donde $p_1, p_2, p_2 \in \beta$ por lo que, sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1(1 + 0x + 0x^2) + \alpha_2(0 + x + 0x^2) + \alpha_3(0 + 0x + x^2) = \beta_1(1 + 0x + 0x^2) + \beta_2(0 + x + 0x^2) + \beta_3(0 + 0x + x^2)$$

$$(\alpha_1 + 0\alpha_1 x + 0\alpha_1 x^2) + (0\alpha_2 + x\alpha_2 + 0\alpha_2 x^2) + (0\alpha_3 + 0\alpha_3 x + \alpha_3 x^2) = (\beta_1 + 0\beta_1 x + 0\beta_1 x^2) + (0\beta_2 + \beta_2 x + 0\beta_2 x^2) + (0\beta_3 + 0\beta_3 x + \beta_3 x^2)$$

$$(\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3) + (0\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3)x + (0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3)x^2 = (\beta_1 + 0\beta_2 + 0\beta_3) + (0\beta_1 + \beta_2 + 0\beta_3)x + (0\beta_1 + 0\beta_2 + \beta_3)x^2$$

$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0\alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & \alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & 0\alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0\beta_2 & 0\beta_3 \\ 0\beta_1 & \beta_2 & 0\beta_3 \\ 0\beta_1 & 0\beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$	Agrupando cada uno de los elementos en una matrix
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Manteniendo sólo coeficientes

De esta manera ha quedado claro que dichos coeficientes β existen, es más, podemos afirmar que son:

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \alpha_3 = \beta_3$$

$$\therefore \qquad < \beta >= \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

Ahora veamos si β es linealmente independiente para lo que debe ocurrir

Definición 4. Sea $\mathbb{S}$ un subconjunto de $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, decimos que $\mathbb{S}$ es linealmente independiente si la única solución para $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1\vec{s}_1 + \alpha_2\vec{s}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{s}_n = 0$$

es que todos los coeficientes $\alpha_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sean todos 0

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\alpha_1(1+0x+0x^2) + \alpha_2(0+x+0x^2) + \alpha_3(0+0x+x^2) &= \vec{0} && \beta \text{ como combinación lineal} \\
\alpha_1(1+0x+0x^2) + \alpha_2(0+x+0x^2) + \alpha_3(0+0x+x^2) &= 0+0x+0x^2 && \text{Por definición de } \vec{0} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
(1\alpha_1 + 0\alpha_1 x + 0\alpha_1 x^2) + (0\alpha_2 + \alpha_2 x + 0\alpha_2 x^2) + (0\alpha_3 + 0\alpha_3 x + \alpha_3 x^2) &= 0+0x+0x^2 && \text{Distribuyendo} \\
(\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3) + (0\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3)x + (0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3)x^2 &= 0+0x+0x^2 && \text{Agrupando}
\end{aligned}$$

Finalmente igualemos entrada con entrada

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0\alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & \alpha_2 & 0\alpha_3 \\ 0\alpha_1 & 0\alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{Igualemos entrada por entrada} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{Mateniendo sólo coeficientes}
\end{aligned}$$

Finalmente es fácil observar que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{e} \therefore \quad & \beta \text{ es linealmente independiente} \\
\therefore \quad & \beta \text{ es base para } \mathbb{P}_2(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

3. Muestre que la siguiente transformación es lineal.

$$\begin{aligned}
T \colon \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\
T(f(x)) &\mapsto xf^{'}(x) + xf(2) + f(3).
\end{aligned}$$

4. Determine el núcleo y la imagen de T.
5. Encuentre la matriz asociada a T con respecto a la base β, esto es $[T]_\beta$.
6. ¿Cuál es el rango de $[T]_\beta$?
7. La matriz $[T]_\beta$ es invertible, si sí muéstrelo, si no argumente porque.
8. ¿Cuales son los valores propios asociados a $[T]_\beta$?
9. Determine los vectores propios asociados a cada valor propio.
10. Muestre que el conjunto de los vectores propios es una base ordenada.
11. Determine $Q \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$, tal que $Q^{-1}[T]_\beta Q = D$, donde D es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son valores propios.
12. Muestre que $\beta^{'} = \{-3+x, -3-13x+4x^2, 1+x\}$, es una base para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y además determine $[T]_{\beta'}$.