Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Tarea Examen III

Kevin Ariel Merino Peña[1]

31 de mayo de 2020

Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden la tarea-examen se entregan de manera individual.

1.Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Muestre que $u = f(y - \kappa x)$ es una solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Hagamos una observación sobre u, pues debemos costruir a dicha función con el mismo dominio que f, *i.e.*

$$u(x, y) = f(y - \kappa x)$$

ahora empleemos la composición de funciones para designar una función auxiliar $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como sigue $g(x, y) = y - \kappa x$;

$$u(x, y) = (f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$$

luego, tomemos la derivada de u como

$$Du(x, y) = Df(g(x, y))$$

Veamos que, como g es una función escalar, entonces su derivada es ∇g y por la **regla de la cadena** en funciones compuestas, tenemos que

$$D_u(x, y) = D_f(g(x, y))\nabla g \qquad (♀)$$

donde $\nabla g(x, y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (-\kappa, 1)$, luego de ♀ tenemos que

$$\begin{aligned}
D_u(x, y) &= f'(g(x, y)) \cdot (-\kappa, 1) && \text{Reemplazando lo que sabemos del gradiente} \\
D_u(x, y) &= -f'(g(x, y))\kappa, f'(g(x, y)) && \text{Reemplazando lo que sabemos del gradiente} \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= -f'(g(x, y))\kappa && \text{Derivando con respecto a } x \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= f'(g(x, y)) && \text{Derivando con respecto a } y \\
\kappa \frac{\partial u}{\partial y} &= f'(g(x, y))\kappa && \text{Multiplicando ambos miembros por el mismo real}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = -f'(g(x, y))\kappa + f'(g(x, y))\kappa = 0$$

siguiendo la cadena de igualdades, tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \square$$

2.Muestre que si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tienen segundas parciales mixtas continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad (1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (1b)$$

Entonces ambas son armónicas.

[1]Número de cuenta 317031326

Recuerde. *Una función $u = u(x, y)$ con segundas derivadas parciales continuas que satisface la ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

se dice que es una función armónica.

Veamos qué ocurre para u cuando obtenemos sus segundas derivadas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) && \text{Por definición de segunda derivada}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) && \text{Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} && \text{Volviendo a escribir la ecuación}
\end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) && \text{Por definición de segunda derivada}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) && \text{Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} && \text{Reescribiendo}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} && \text{Ya que por hipótesis } u \text{ es de clase } \mathcal{C}^2
\end{aligned}$$

de las últimas dos observaciones podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) && \text{Sumando ambos miembros}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 && \text{Así sabemos que } u \text{ es armónica}
\end{aligned}$$

luego, hagamos algunas observaciones para v

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) && \text{Por definición de segunda derivada}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) && \text{Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} && \text{Volviendo a escribir la ecuación}
\end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) && \text{Por definición de segunda derivada}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) && \text{Ya que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} && \text{Reescribiendo}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} && \text{Ya que por hipótesis } v \text{ es de clase } \mathcal{C}^2
\end{aligned}$$

de las últimas dos observaciones podemos concluir que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) \qquad \text{Sumando ambos miembros}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{Así sabemos que } v \text{ es armónica}$$

$\therefore$ ambas ecuaciones son armónicas si satisfacen las ecuaciones de *Cauchy-Riemann* y son de clase $\mathcal{C}^2$(que sus segundas derivadas mixtas sean iguales)

3. Encontrar la expansión a segundo orden de Taylor para $f(x,y) = y^2 e^{-x^2}$ en $(1,1)$

primero hallemos las derivadas de f

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 e^{-x^2}\right) = -2xy^2 e^{-x^2} \qquad \text{Derivando con respecto a } x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 e^{-x^2}\right) = 2ye^{-x^2} \qquad \text{Derivando con respecto a } y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-2xy^2 e^{-x^2}\right) = \left(4x^2 - 2\right) y^2 e^{-x^2} \qquad \text{Derivando con respecto a } xx$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2y^2 e^{-x^2}\right) = 2e^{-x^2} \qquad \text{Derivando con respecto a } yy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-2xy^2 e^{-x^2}\right) = -4xye^{-x^2} \qquad \text{Derivando con respecto a } xy, yx$$

Luego, usando el teorema (visto en clase) sobre la expansión a segundo orden de Taylor para $x_0 = (1,1)$ está dada por

$$f(h_1,h_2) = f(1,1) + h_1 f_x(1,1) + h_2 f_y(1,1) + \frac{1}{2}\left(h_1^2 f_{xx}(1,1) + h_1 h_2 f_{xy}(1,1) + h_1 h_2 f_{yx}(1,1) + h_2^2 f_{yy}(1,1)\right)$$

$$f(x,y) = f(1,1) + x f_x(1,1) + y f_y(1,1) + \frac{1}{2}\left(h_1^2 f_{xx}(1,1) + h_1 h_2 f_{xy}(1,1) + h_1 h_2 f_{yx}(1,1) + h_2^2 f_{yy}(1,1)\right)$$

$$f(x,y) = f(1,1) + x\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)} + y\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)} + \frac{1}{2}\left(h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(1,1)} + h_1 h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{(1,1)} + h_1 h_2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Big|_{(1,1)} + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(1,1)}\right)$$

$$f(x,y) = 1^2 e^{-1^2} + x\left(-2xy^2 e^{-x^2}\right)\Big|_{(1,1)} + y\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)} + \frac{1}{2}\left(h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(1,1)} + h_1 h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{(1,1)} + h_1 h_2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Big|_{(1,1)} + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(1,1)}\right)$$

$$f(x,y) = \frac{1}{e} - \frac{2h_1}{e} + \frac{2h_2}{e} + \frac{1}{2}\left(h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(1,1)} + h_1 h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{(1,1)} + h_1 h_2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Big|_{(1,1)} + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(1,1)}\right)$$

$$f(x,y) = \frac{1}{e} - \frac{2h_1}{e} + \frac{2h_2}{e} + \frac{1}{2}\left(h_1^2(2e^{-1}) + h_1 h_2(-4e^{-1}) + h_1 h_2(-4e^{-1}) + h_2^2(2e^{-1})\right)$$

$$f(x,y) = \frac{1}{e} - \frac{2h_1}{e} + \frac{2h_2}{e} + \frac{h_1^2 - 4h_1 h_2 + h_2^2}{e}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 - 4xy + y^2 + 4y - 1}{e}$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy + 5$. Encuentre los puntos críticos de f y determine si son: mínimos locales, máximos locales o puntos silla.
Para ello derivemos la función y localicemos los puntos críticos.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - y^2 - xy + 5\right) && \text{Derivando con respecto a } x \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y && \text{Aplicando la derivada} \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= -2y - x && \text{Aplicando la derivada con respecto a } y \text{ de } f
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= 2x - y && \text{Igualemos a 0} \\
0 &= -2y - x
\end{aligned}
$$

De la primera ecuación, obtenemos que $y = 2x$, sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos que $0 = -5x$, de esta manera sabemos que el único punto crítico que tiene f es $(x, y) = (0, 0)$. Ahora calculemos las segundas derivadas parciales para conocer el determinante del Hessiano

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -1 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -1 \\
D\Big|_{(0,0)} &= 2 \cdot (-2) - 1 = -5 < 0
\end{aligned}
$$

Entonces, usando el teorema visto en clase sobre el determinante del hessiano, ahora sabemos que $(0, 0)$ es un punto silla, es más es el único punto crítico de f.

5. Encuentre los valores máximos y mínimos absolutos de $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + 5$ sobre el disco unitario $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Primero calculemos la derivada de f e igualemos a 0 para encontrar los puntos críticos en el interior del disco.

$$
\begin{aligned}
f_x &= 2x + 3y && \text{Derivando con respecto a } x \\
f_y &= 2y + 3x && \text{Derivando con respecto a } y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= 2x + 3y && \text{Igualando a 0} \\
0 &= 2y + 3x && \text{Igualando a 0}
\end{aligned}
$$

$$
4\lambda^2 - 8\lambda - 5 = 5 \qquad \text{Ecuación para } \lambda
$$

De lo anterior concluimos que el único punto crítico es $\vec{x_0} = (0, 0)$, además notemos que $(0, 0) \in D$, ahora nombremos la función $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$, emplearemos multiplicadores de lagrange para resolver

$$
\begin{aligned}
\nabla g &= (2x, 2y) && \text{Calculando el gradiente de } g \\
\nabla f &= (2x + 3y, 3x + 3y) && \text{Calculando el gradiente de } g
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2x + 3y &= 2x\lambda && \text{Igualando la primera entrada} \\
3x + 2y &= 2y\lambda && \text{Igualando la segunda entrada} \\
x^2 + y^2 &= 1 && \text{La restricción dada}
\end{aligned}
$$

Notemos, de la primera ecuación que $x \neq 0$ porque eso implicaría que $y = 0$ lo cual no podría pasar por la restricción dada, entonces despejando λ obtenemos que

$$\lambda = \frac{2x + 3y}{2x}$$

reemplazando en cualquier ecuación obtendremos que $x^2 = y^2 \implies x = \pm y$, ahora ocupemos esto en la restricción para obtener que $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, así tenemos que los puntos críticos son

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= 7 + \frac{1}{2} \\
f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= 4 + \frac{1}{2} \\
f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= 4 + \frac{1}{2} \\
f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= 7 + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

por lo tanto, el máximo absoluto es $7 + \frac{1}{2}$, en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

El mínimo absoluto es $4 + \frac{1}{2}$, en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6. Suponga que un pentágono está compuesto por un rectángulo coronado por un triángulo isósceles (ver Figura 1). Si la longitud del perímetro es fija, encuentre el área máxima posible.

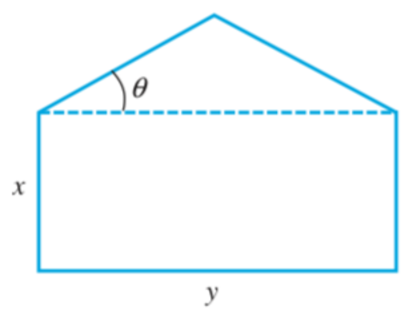

Figura 1: Maximizar el área para un perímetro dado.

Sea z la longitud de una de los lados del triángulo isóceles sobre el rectángulo en la figura. Sea p el perímetro del pentágono

$$p = 2x + y + 2z$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
z\cos(\theta) &= \frac{1}{2}y && \text{Tomando el angulo del la mitad del triangulo iscóceles como referencia} \\
z &= \frac{y}{2\cos(\theta)} && \text{Multiplicando ambos lados por } \frac{1}{\cos(\theta)} && ♃ \\
2z &= \frac{y}{\cos(\theta)} && \text{Multiplicando ambos lados por } 2 && ♂
\end{aligned}$$

Sea a el área del pentágono dada por la suma del rectángulo formado por los lados x, y y el triángulo superior, entonces

$$\begin{aligned}
a &= x \cdot y + \frac{1}{2} yz \sin(\theta) && \text{obteniendo la altura del triangulo con identidades trigonométricas} \\
a &= xy + \frac{y^2 \sin(\theta)}{4\cos(\theta)} && \text{Sustituyendo el resultado de ♃}
\end{aligned}$$

Observemos que de esta última ecuación, se nos proporcionan algunas restricciones puesto que el área siempre debe ser positivo y al menos mayor que cero para este ejercicio, por lo que $0 < x$, $0 < y$ y $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Luego, volvamos al perímetro y sustituyamos el valor de z

$$\begin{aligned}
p &= 2x + y\frac{y}{\cos(\theta)} && \text{Sustituyendo 2z de ♂} \\
x &= \frac{1}{2}\left(p - y - \frac{y}{\cos(\theta)}\right) && \text{Despejando a } x
\end{aligned}$$

Ahora pongamos al área en función de y y del ángulo

$$\begin{aligned}
a(y,\theta) &= xy + \frac{y^2 \sin(\theta)}{4\cos(\theta)} && \text{De lo construido anteriormente} \\
a(y,\theta) &= \frac{1}{2}py - \frac{1}{2}y^2 - \frac{y^2}{2\cos(\theta)} + \frac{y^2\sin(\theta)}{4\cos(\theta)} && \text{Sustituyendo el valor de } x
\end{aligned}$$

Ahora, al calcular $\frac{\partial a}{\partial \theta} = 0$ y $\frac{\partial a}{\partial y} = 0$ podemos observar que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial y} &= \frac{p}{2} - y - \frac{y}{\cos(\theta)} + \frac{y\sin(\theta)}{2\cos(\theta)} \\
0 &= \frac{p}{2} - y - \frac{y}{\cos(\theta)} + \frac{y\sin(\theta)}{2\cos(\theta)} \\
\frac{p}{2} &= y\left(1 + \frac{1}{\cos(\theta)} - \frac{\sin(\theta)}{2\cos(\theta)}\right) \\
\frac{p}{2} &= y\left(\frac{2 + 2\cos(\theta) - \sin(\theta)}{2\cos(\theta)}\right) \\
y &= \frac{p\cos(\theta)}{2 + 2\cos(\theta) - \sin(\theta)}
\end{aligned}$$

Por otra parte, buscando los puntos críticos con el ángulo conseguimos lo siquiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial \theta} &= -\frac{y^2}{2}\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}\right) + \frac{y^2}{4}\left(\frac{1}{\cos^2(\theta)}\right) \\
0 &= -\frac{y^2}{2}\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}\right) + \frac{y^2}{4}\left(\frac{1}{\cos^2(\theta)}\right) \\
\frac{y^2}{2\cos^2(\theta)}\sin(\theta) &= \frac{y^2}{2\cos^2(\theta)} \cdot \frac{1}{2} \\
\sin(\theta) &= \frac{1}{2} \\
\theta &= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Una vez hallado el ángulo, podemos evaluar el coseno en ese punto y sustituirlo en la y, la última ecuación que hayamos para encontrar quién es x

$$\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = \frac{p\cos(\theta)}{2 + 2\cos(\theta) - \sin(\theta)}$$
$$y = \frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}$$

luego, de una ecuación para x

$$x = \frac{1}{2}\left(p - y - \frac{y}{\cos(\theta)}\right)$$
$$x = \frac{1}{2}\left(p - \frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} - \frac{2p}{3 + 2\sqrt{3}}\right)$$
$$x = \frac{p}{2}\left(\frac{3 + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2}{3 + 2\sqrt{2}}\right)$$
$$x = \frac{p(1 + \sqrt{3})}{2(3 + 2\sqrt{3})}$$

Como ya tenemos quienes son x, y, sustituyamos en la ecuación del área

$$a\left(\frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6}\right) = xy + \frac{y^2\sin(\theta)}{4\cos(\theta)}$$
$$a\left(\frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{p(1 + \sqrt{3})}{2(3 + 2\sqrt{3})} \cdot \frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4}\left(\frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$a\left(\frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{p^2(3 + \sqrt{3})}{2(9 + 12\sqrt{3} + 12)} + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{3p^2}{9 + 12\sqrt{3} + 12}\right)$$
$$a\left(\frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6}\right) = p^2\frac{18 + 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{12(21 + 12\sqrt{3})}$$
$$a\left(\frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6}\right) = p^2\frac{9(2 + \sqrt{3})}{12 \cdot 3(7 + 4\sqrt{3})}$$
$$a\left(\frac{p\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{p^2}{4} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}}$$

Por lo tanto, el área máxima con un perímetro fijo del pentágono presentado está dado por

$$\frac{p^2}{4} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}}$$

7. Analice el comportamiento de las funciones en los puntos indicados. En la parte b el análisis depende de la constante C.

   a) $z = x^2 - y^2 + 3xy$ en $(0, 0)$.

Para ello calculemos el gradiente de dicha función

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2 + 3xy), \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2 + 3xy)\right) \\
\nabla f &= (2x + 3y, -2y + 3x) \\
(0, 0) &= (2x + 3y, -2y + 3x) \\
0 &= 2x + 3y \\
0 &= -2y + 3x
\end{aligned}$$

Así podemos concluir que $(0, 0)$ es un punto crítico para nuestra función. Luego calculemos las segundas derivadas parciales para determinal el comportamiento del detnerminante del Hessiano

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = 2 \\
&\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = -2 \\
&\frac{\partial^2}{\partial xy} f = 3 = \frac{\partial^2}{\partial yx}
\end{aligned}$$

$$D\Big|_{(0,0)} = 2 \cdot (-2) - 9 = -13 < 0$$

Así podemos conluir que $(0, 0)$ es un punto silla de f

b) $z = x^2 - y^2 + Cxy$ en $(0, 0)$.
Para ello tomemos como base el ejercicio anterior y observemos qué ocurre en el determinante del Hessiano, pues

$$D\Big|_{(0,0)} = 2 \cdot (-2) - C^2 = D < 0$$

como hay un un signo negativo para el cuadrado de C, siempre se tendrá que no importando el valor de dicha constante siempre será negativo, por lo que siempre será un punto silla :)

8. a) Encuentre la distancia mínima del origen en $\mathbb{R}^2$ a la superficie $z = \sqrt{x^2 - 1}$.

Describamos los puntos de la superficie de la siguiente forma

$$(x, y, \sqrt{x^2 - 1})$$

Tenemos algunas restricciones para que dicha raíz pueda existir en los reales

$$\begin{aligned}
x^2 - 1 &\geq 0 \\
x &\geq 1 \\
x &\leq -1
\end{aligned}$$

Luego, definamos una función distancia como sigue:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{x^2 + y^2 + \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2} \\
d &= \sqrt{x^2 + y^2 + +x^2 - 1} \\
d &= \sqrt{2x^2 + y^2 - 1}
\end{aligned}$$

Para hacer más sencillas las cuentas, trabajaremos con el cuadrado de d, en clase hicimos lo mismo pues vimos que es válido pues d^2 tendrá el mismo punto mínimo que d. Sea $f := 2x^2 + y^2 - 1$ nuestra función a minimizar. Es fácil observar que para y no tenemos ninguna restricción dada, por lo que puede ser arbitrario, entonces observemos qué pasa cuando $y = 0$, tendríamos que $f = 2x^2 - 1$ y por una observación que hicimos al principio del ejericicio sabemos que $x^2 \geq 1$, así, el minimo valor que tedría nuestra función f sería 1 pues $f(\pm 1, 0) = 2(\pm 1)^2 - 1 = 1$

$$\therefore \text{ el valor mínimo que tendrá la distancia del origen a la superficie es } 1$$

b) Haga lo mismo para la superficie $z = 6xy + 7$

Veamos que todos los puntos sobre dicha superficie tendrán la siguiente forma $(x, y, (6xy + 7)^2)$, ahora definamos la función distancia como sigue

$$d = \sqrt{x^2 + y^3 + (6xy + 7)^2}$$

y trabajaremos sin la raíz, por lo que definiremos la función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

$$f := d^2 = x^2 + y^2 + (6xy + y)^2$$

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= x^2 + y^2 + (6xy + y)^2 \\
f(x, y) &= x^2 + y^2 + 6^2x^2y^2 + 2 \cdot 6xy \cdot 7 + 7^2 \\
f(x, y) &= 36x^2y^2 + x^2 + y^2 + 48xy + 49
\end{aligned}$$

Veamos que en el caso hipotético de que $x^2 + y^2 = 0$ el valor más bajo que $f(x, y)$ tendría es 49, por lo tanto, la distancia mínima es 7, pero derivemos para encontrar los demás puntos críticos.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 36x^2y^2 + x^2 + y^2 + 48xy + 49 \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 72xy^2 + 2x + 84y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= 36x^2y^2 + x^2 + y^2 + 48xy + 49 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 72x^2y + 2y + 84x
\end{aligned}$$

ahora igualemos amboas ecuaciones a 0 y obtengamos

$$\begin{aligned}
72x^2y + 2y + 84x &= 0 \\
72xy^2 + 2x + 84y &= 0 \\
72x^2y + 2y + 84x - (72xy^2 + 2x + 84y) &= 0 \\
72xy(x - y) + 82x - 82y &= 0 \\
(x - y)(72xy + 82) &= 0
\end{aligned}$$

Como el producto de dos reales es cero y si y sólo si algunos de los dos es cero, entonces

$$x = y \vee 72xy = -82$$

Sustituyamos la priera ecuación en $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 72xx^2 + 2x + 84x \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= x(72x^2 + 84) \\
0 &= x(72x^2 + 84)
\end{aligned}$$

debido a que $72x^2 + 84$ siempre será positivo en la última ecuación, entonces $x = 0 = y$ y si sustituimos en la ecuación que se nos proporcinó al principio del problema, obtendremos que

$$z = 6 \cdot 0 \cdot 0 + 7 \implies z = 7$$

entonces el punto crítico que hallamos es $(0, 0, 7)$ lo que nos regala $d = \sqrt{0^2 + 0^2 + 7^2} = 7$.

Ahora veamos qué ocurre con $xy = -\frac{41}{36}$ y sustituyamos en la ecuación del problema $z = 6(-\frac{41}{36}) + 7 \implies \frac{-41}{6} + \frac{42}{6} = \frac{1}{6}$ de $xy = -\frac{41}{36}$ despejemos a x para usar $x = -\frac{41}{36y}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 72xy^2 + 2x + 84y \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 72\left(\frac{-41}{36y}\right)y^2 + 2\left(-\frac{41}{36y}\right) + 84y \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= -82y - \frac{82}{36y} + 84y \\
0 &= 2y - \frac{82}{36y} \\
2y &= \frac{41}{18y} \\
36y^2 &= 41 \\
y &= \sqrt{\frac{41}{36}} \\
y &= \frac{\sqrt{41}}{6}
\end{aligned}$$

Sistituyamos en $x = -\frac{41}{36y}$

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{41}{36y} \\
x &= -\frac{41}{36 \cdot \frac{\sqrt{41}}{6}} \\
x &= -\frac{\sqrt{41}}{6}
\end{aligned}$$

Con ambos valores sólo basta calcular z en la ec. del ejecicio

$$z = 6 \cdot \frac{\sqrt{41}}{6} \cdot (-\frac{\sqrt{41}}{6}) + 7 = \frac{41}{6} + \frac{42}{6} = \frac{1}{6}$$

Ahora susituyamos en la ecuación de la distancia

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
d &= \sqrt{(-\frac{\sqrt{41}}{6})^2 + (\frac{\sqrt{41}}{6})^2 + (\frac{1}{6})^2} \\
d &= \sqrt{\frac{41}{36} + \frac{41}{36} + \frac{1}{6}} \\
d &= \frac{83}{6}
\end{aligned}$$

Entre nuestos dos puntos hallados $\dfrac{83}{6}$ es el mínimo :)

9. Encuentre los puntos y valores críticos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones:

a) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$, restringido a $x^2 + y^2 = 1$.

b) $f(x,y) = \cos(x^2 - y^2)$, restringido a $x^2 + y^2 = 1$.

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, restringido a $x + y = 1$.

d) $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, restringido a $x + y = \frac{\pi}{4}$.

10. Encuentre el máximo de la función $f(x,y) = xy$ sobre la curva $(x+1)^2+y^2 = 1$, definamo suna función $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $g(x,y) = (x+1)^2 + y^2 = 1$

$$\nabla g = (x - 1, 2y)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= y = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\\ y &= \lambda(x-1)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}\\ x &= \lambda 2y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(x,y) &= 1\\ (x+1)^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

luego, despejemos x, y, de

$$x = 2y\lambda \qquad y = \frac{x}{2\lambda} \qquad \lambda = \frac{x}{2y}$$

$$\begin{aligned}y &= (2x+2)\lambda\\ y &= (2x+2)(\frac{x}{2y})\\ 2y^2 &= 2x^2 + 2x\\ 0 &= 2x^2 + 2x - 2y^2\\ 0 &= x^2 + x - y^2 \qquad (10a)\end{aligned}$$

de la restricción podemos ver que

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + y^2 &= 1\\ x^2 + 2x + 1 + y^2 &= 1\\ x^2 + 2x + y^2 &= 0 \qquad (10b)\end{aligned}$$

Si resolvemos $10a$ y $10b$

$$\begin{aligned}x^2 + x - y^2 &= 0\\ x^2 + 2x + y^2 &= 0\\ 2x^2 + 3x &= 0\\ x(2x+3) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= 0\\ x_2 &= \frac{-3}{2}\end{aligned}$$

Si sustituimos en $x = 2\lambda y$ obtendremos que si $x = 0$ entonces $y = 0$, y si $x = -\dfrac{3}{2}$ entonces $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (de $x^2 + y^2 + 2x = 0$)

Entonces tenemos lo siguientes puntos

$$(0,0), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Evaluemos en todos ellos

$$\begin{aligned}f(0,0) &= xy = 0\\ f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= xy = \frac{3\sqrt{3}}{4}\\ f\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= xy = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

Podemos concluir que el máximo valor es $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

11. Encuentre la distancia más cercana del punto $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ al plano cuya ecuación está dada por: $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$, donde $(b_1, b_2, b_3) \neq 0$

Sea $D(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2$ sujeto a la restricción $g(x_1, y_1, z_1) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ con $(b_1, b_2, b_3) \neq 0$. Calculemos el gradiente de D y g

$$\begin{aligned}\nabla D(x_1, x_2, x_2) &= (2x_1 - 2a_1, 2x_2 - 2a_2, 2x_3 - 2a_3)\\ \nabla g(x_1, x_2, x_2) &= (b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0)\end{aligned}$$

Ahora podemos obtener las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\lambda b_1 &= 2x_1 - 2a_1\\ \lambda b_2 &= 2x_2 - 2a_2\\ \lambda b_3 &= 2x_3 - 2a_3\\ 0 &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0\end{aligned}$$

Para ello emplearemos el método de *Gauss-Jordan*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \\ 2a_3 \\ -b_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -b_3 \\ 0 & b_2 & b_3 & \frac{b_1^2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \\ 2a_3 \\ -b_0 - b_1 a_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -b_3 \\ 0 & 0 & b_3 & \frac{b_1^2}{2} + \frac{b_2^2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \\ 2a_3 \\ -b_0 - b_1 a_1 - b_2 a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -b_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b_1^2}{2} + \frac{b_2^2}{2} + \frac{b_3^2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \\ 2a_3 \\ -b_0 - b_1 a_1 - b_2 a_2 - b_3 a_3 \end{pmatrix}$$

si despejamos lambda de la última fila $\therefore \lambda = \dfrac{-2(b_0 + b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3)}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

$$2x_3 - b_3\lambda = 2a_3$$
$$x_3 = \frac{2a_3 + b_3\lambda}{2}$$

$$2x_2 - b_2\lambda = 2a_2$$
$$x_2 = \frac{2a_2 + b_2\lambda}{2}$$

$$2x_1 - b_1\lambda = 2a_1$$
$$x_1 = \frac{2a_1 + b_1\lambda}{2}$$

Ahora, veamos el hessiano de la función

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x_1^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 D}{\partial x_2^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 D}{\partial x_3^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 D}{\partial x_1 x_2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 D}{\partial x_2 x_3} = 0$$
$$\frac{\partial^2 D}{\partial x_1 x_3} = 0$$

entonces el arreglo quedaría

$$HD(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Así que $H_1 = |2| > 0$, $H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ y finalmente $H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$, eso nos permite concluir que el punto crítico en cuestíon es un mínimo local, ahora evaluemos

$$D\left(\frac{2a_1 + b_1\lambda}{2}, \frac{2a_2 + b_2\lambda}{2}, \frac{2a_3 + b_3\lambda}{2}\right) = \left(\frac{2a_1 + b_1\lambda}{2} - a_1\right)^2 + \left(\frac{2a_2 + b_2\lambda}{2} - a_2\right)^2 + \left(\frac{2a_3 + b_3\lambda}{2} - a_3\right)^2$$
$$D\left(\frac{2a_1 + b_1\lambda}{2}, \frac{2a_2 + b_2\lambda}{2}, \frac{2a_3 + b_3\lambda}{2}\right) = \left(\frac{b_1\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_2\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_3\lambda}{2}\right)^2$$
$$D\left(\frac{2a_1 + b_1\lambda}{2}, \frac{2a_2 + b_2\lambda}{2}, \frac{2a_3 + b_3\lambda}{2}\right) = \frac{\lambda^2}{4}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)$$

luego, podemos emplear que $\lambda = \dfrac{-2(b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_2b_3)}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

$$D\left(\frac{2a_1 + b_1\lambda}{2}, \frac{2a_2 + b_2\lambda}{2}, \frac{2a_3 + b_3\lambda}{2}\right) = \frac{(b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Como habiamos tomado a D como la función distnacia pero al cuadrado ahora podemos ver que la **mínima** distnacia está dada por

$$\sqrt{D\left(\frac{2a_1 + b_1\lambda}{2}, \frac{2a_2 + b_2\lambda}{2}, \frac{2a_3 + b_3\lambda}{2}\right)} = \frac{|b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

12. Encuentre el punto sobre la linea de intersección de los planos $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ y $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ que es más cercano al origen.

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, b_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ los vectores de la distancia, tomemos una función D como el cuadrado de la distancia (para no trabajar con raices)

$$D(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2 + (x_3 - 0)^2$$
$$D(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Sujetas a las siguientes restricciones

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = a_1x_2 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$
$$g_2(x_1, x_2, x_3) = b_1x_2 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$$

Primero supongamos que $\nabla g_1 \neq 0$ y $\nabla g_2 \neq 0$ entonces

$$\nabla D = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$$
$$\nabla g_1 = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\nabla g_2 = (b_1, b_2, b_3)$$

Así se nos permite plantear el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 \tag{1}$$
$$2x_2 = \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 \tag{2}$$
$$2x_3 = \lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 \tag{3}$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \tag{4}$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = -b_0 \tag{5}$$

resolvamos por el método de *Gauss-Jordan*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -b_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ 0 & a_2 & a_3 & \frac{a_1^2}{2} & \frac{a_1b_1}{2} \\ 0 & b_2 & b_3 & \frac{a_1b_1}{2} & \frac{b_1^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ 0 & a_2 & a_3 & \frac{a_1^2}{2} & \frac{a_1b_1}{2} \\ 0 & b_2 & b_3 & \frac{a_1b_1}{2} & \frac{b_1^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ 0 & 0 & a_3 & \frac{(a_1^2+a_2^2)}{2} & \frac{(a_1b_1+a_2b_2)}{2} \\ 0 & 0 & b_3 & \frac{(a_1b_1+a_2b_2)}{2} & \frac{(b_1^2+b_2^2)}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ 0 & 0 & a_3 & \frac{(a_1^2+a_2^2)}{2} & \frac{(a_1b_1+a_2b_2)}{2} \\ 0 & 0 & b_3 & \frac{(a_1b_1+a_2b_2)}{2} & \frac{(b_1^2+b_2^2)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)}{2} & \frac{(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)}{2} & \frac{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)}{2} & \frac{(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)}{2} & \frac{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 2 & -a_3 & -b_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)}{2} & \frac{(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}{2} - \dfrac{(a_1b_2+a_2b_2+a_3b_3)^2}{2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

entonces tenemos que

$$2x_1 - \lambda_1 a_1 - \lambda_2 b_1 = 0 \tag{1}$$

$$2x_2 - \lambda_1 a_2 - \lambda_2 b_2 = 0 \tag{2}$$

$$2x_3 - \lambda_1 a_3 - \lambda_2 b_3 = 0 \tag{3}$$

$$\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}\right)\lambda_1 + \frac{(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)}{2}\lambda_2 = 0 \tag{4}$$

$$\frac{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}{2}\lambda_2 - \frac{(a_1b_2+a_2b_2+a_3b_3)^2}{2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)}\lambda_2 = -b_0 \tag{5}$$

Observemos que si asumimos a $b_0 = 0$ entonces en (5) tendríamos que $\lambda_2 = 0$, también por (4), $\lambda_1 = 0$ y así sabríamos que por $(1), (2), (3)$ $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ lo que significaría que $(0,0,0)$ es la interseccion de los planos y además es la distancia más cercana al origen. Entonces asumamos que $b_0 \neq 0$ entonces $\lambda_2 \neq 0$, reescribamos (4) y (5) para hacerlos más claros

$$(\vec{a}\cdot\vec{a})\lambda_1 + (\vec{a}\cdot\vec{b})\lambda_2 = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\lambda_2}{2}\left(\vec{b}\cdot\vec{b} - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\right) = -b_0 \tag{5}$$

Si sustituimos en (4) tendremos que

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{a}\lambda_1 &= -(\vec{a}\cdot\vec{b})\lambda_2 \\
\vec{a}\cdot\vec{a}\lambda_1 &= 2b_0\left(\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{a})}{(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\right) \\
\lambda_1 &= 2b_0\left(\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\right)
\end{aligned}
$$

Tomemos $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ y de $(1),(2),(3)$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
2\vec{x} &= \lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b} \\
\vec{x} &= \frac{\lambda_1}{2}\vec{a}+\frac{\lambda_2}{2}\vec{b} \\
\vec{x} &= b_0\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\right)\vec{a}+b_0\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\right)\vec{b} \\
\vec{x} &= \frac{b_0}{(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\Big((\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b}\Big)
\end{aligned}
$$

Hagamos una observación en

$$
\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos(\theta) \qquad \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \qquad \vec{b}\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|^2
$$

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})^2 &= |\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2-|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2(\theta) \\
(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})^2 &= |\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2(1-\cos^2(\theta)) \\
(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})^2 &= |\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2\sin^2(\theta) \\
(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})^2 &= \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2
\end{aligned}
$$

Así tenemos que

$$
\vec{x}=\frac{b_0}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2}\Big((\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b}\Big)
$$

Entonces $\vec{x}$ está en la intersección de los dos planos y es el más cercano al origen.