

Espacios vectoriales

Matemáticas para las ciencias aplicadas II

Aquino Chapa Armando Abraham y Merino Peña Kevin Ariel

23 de febrero de 2020

1. Escribe el vector cero en $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$

Definición 1 (Matriz). Una **Matriz** es un arreglo rectangular de elementos de un campo $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ de la forma

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

A los elementos $a_{i,j}$ con $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq i \leq m$ se les llama entradas de la matriz, a las matrices las denotamos por \mathbb{A} (*letras mayúsculas*) y al conjunto de las matrices de $m \times n$ se les denota por $M_{m \times n}(\mathbb{F})$

De esta manera tenemos que el vector cero de la matriz de 3 renglones por 4 columnas es aquella cuyas entradas (todas) son 0 *i. e.*

$$A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea V el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en \mathbb{R} . Muestre que V es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar para funciones.

Veamos que la derivada cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Así hemos probado que la derivada abre sumas

$$\begin{aligned} (cf(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

De esta manera queda conolidado que en la función derivada, los escalares son sacados de la función

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto se vale para cualquier constante, en particular el 0

3. Prueba que el conjunto de las funciones pares en \mathbb{R} es un espacio vectorial con suma y multiplicación por escalar usuales para funciones. Recuerde que una función es par si $\forall x \in \text{Dom}(f)$ entonces $f(-x) = f(x)$

Si tenemos en cuenta que $f(-t) + g(-t) = f(t) + g(t)$ y que si tenemos constantes siempre ocurre que $cf(-t) = cf(t)$ entonces ya hemos probado las dos primeras condiciones y para hallar el neutro basta con usar el 0 del campo (\mathbb{R}) para notar que también lo manda al 0 vector.

4. Sea V el conjunto de pares ordenados de números reales. Si (a_1, a_2) y (b_1, b_2) son elementos de V y $\alpha \in \mathbb{R}$, definamos la suma y multiplicación escalar de la siguiente manera:

$$(i) \quad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(ii) \quad \alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2).$$

¿Es V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} con estas operaciones?

No puede ser un espacio vectorial porque si tenemos que

$$0(a_1, a_2) = (0, a_2)$$

para cumplir el cero vector, entonces se cumpliría para cualquier a_2 lo cual no es posible pues contradice la unicidad del cero.

5. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de \mathbb{R}^3 bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar usual.

Definición 2. Sea \mathcal{U} un subconjunto de \mathcal{V} espacio vectorial sobre \mathbb{F} decimos que \mathcal{U} es un subespacio vectorial de \mathcal{V} si cumple lo siguiente

$$I) \quad \vec{0} \in \mathcal{U}$$

$$II) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{U} \implies \vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{U}$$

$$III) \quad \text{Sea } \alpha \in \mathbb{F}, \vec{u} \in \mathcal{U} \implies \alpha \cdot \vec{u} \in \mathcal{U}$$

$$a) \quad W_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2\}$$

Veamos que W_1 contiene a $\vec{0}$ esto es que algún elemento en $W_1 = (0, 0, 0)$ por lo que

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (a_1, a_2, a_3) && \text{Por } \vec{0} \in \mathbb{R}^3 \\ &= (3a_2, a_2, -a_2) && \text{Por } a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2 \\ &= (3(0), (0), -(0)) && \text{Para cualquier } a_2 \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Por otra parte comprobemos que la suma está dentro de W_1

Sean $\hat{u} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\hat{v} = (b_1, b_2, b_3) \in W_1$ la suma de vectores se realiza entrada a entrada por lo que

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) &= (3a_2, a_2, -a_2) + (3b_2, b_2, -b_2) \\ &= (3a_2 + 3b_2, a_2 + b_2, -a_2 - b_2) \\ &= (3(a_2 + b_2), (a_2 + b_2), -(a_2 + b_2)) \end{aligned}$$

Y como $a_1 + b_1 \in \mathbb{R}^3$ entonces $\hat{u} + \hat{v} \in W_1$ por lo que cumple II)

Finalmente veamos que si $k \in \mathbb{R}, \hat{u} \in W_1 \implies k\hat{u} \in W_1$

$$\begin{aligned} k(3a_2, a_2, -a_2) &\in W_1 \\ (3ka_2, ka_2, -ka_2) &\in W_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto cumple III)

$\therefore W_1$ es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

b) $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = a_3 + 2\}$

Veamos si $\hat{0} \in W_2$ si esto ocurriera entonces $(0, 0, 0) \in W_2$ lo que significaría lo siguiente

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (a_3 + 2, a_2, a_3) && \text{Por que deben ser iguales entrada a entrada} \\ 0 &= a_3 + 2 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= a_3 \end{aligned}$$

Podemos observar que en esta situación, $a_3 = -2 \wedge a_3 = 0$ lo cual no es posible, dicha contradicción vino de suponer que $\hat{0} \in W_2$

$$\therefore \hat{0} \notin W_2$$

por lo que W_2 **no** es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

c) $W_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0\}$

Notemos que en la declaración de los elementos de W_3 podemos deducir que

$$a_3 = 7a_2 - 2a_1$$

$$\text{entonces } \hat{u} \in W_3 \implies \hat{u} = (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1)$$

Veamos que para cumplir $I)$ el vector cero debería estar en W_1 *i.e.*

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \\ 0 &= a_1 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= 7a_2 - 2a_1 \end{aligned}$$

lo anterior se cumple si $a_2 = 0 = a_1$

$$\therefore \hat{0} \in W_3$$

Ahora, sean $\hat{u}, \hat{v} \in W_3 \implies \hat{u} = (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \wedge \hat{v} = (b_1, b_2, 7b_2 - 2b_1)$ y probemos que $\hat{u} + \hat{v} \in W_3$

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) + (b_1, b_2, 7b_2 - 2b_1) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 7a_2 + 7b_2 - 2a_1 - 2b_1) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 7(a_2 + b_2) - 2(a_1 + b_1)) \end{aligned}$$

y como $a_1 + b_1 \in \mathbb{R}$ también se encontrarán dentro de W_3 por lo que la suma es cerrada en el conjunto W_3

Por último veamos que si $k \in \mathbb{R}, \hat{u} \in W_3 \implies k \cdot \hat{u} \in W_3$

$$\begin{aligned} k\hat{u} &= k(a_1, a_2, 7a_2 - 2a_1) \\ k\hat{u} &= (ka_1, ka_2, 7ka_2 - 2ka_1) \end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir que cada uno de esos ka_1, ka_2 elementos estarán en \mathbb{R} por lo que $k\hat{u}$ resultarán también estar en W_3

$\therefore W_3$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

d) $W_4 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 | a_1 - 4a_2 - a_3 = 0\}$ De la definición de los elementos de W_4 se sigue que si \hat{u} es un elemento de este conjunto, tendrá la forma $\hat{u} = (4a_2 + a_3, a_2, a_3)$ Comencemos averiguando si W_4 tiene elemento neutro, *i. e.*

$$\begin{aligned}(0, 0, 0) &= (4a_2 + a_3, a_2, a_3) \\ 0 &= 4a_2 + a_3 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= a_3\end{aligned}$$

para ser iguales entrada a entrada

Lo anterior ocurre cuando $a_2 = a_3 = 0$ por lo que $\hat{0} \in W_4$ y así cumple la condición *I*)

Siguiendo con la comprobación de sus propiedades como subespacio vectorial, tenemos que: Sean $\hat{u}, \hat{v} \in W_4 \implies \hat{u} + \hat{v} \in W_4$ *i. e.*

$$\begin{aligned}\hat{u} + \hat{v} &= (4a_2 + a_3, a_2, a_3) + (4b_2 + b_3, b_2, b_3) \\ &= (4a_2 + 4b_2 + b_3 + a_3, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (4(a_2 + b_2) + (b_3 + a_3), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3))\end{aligned}$$

sumando entrada por entrada
asociatividad y distributividad en \mathbb{R}

y como $(a_2 + b_2) \in \mathbb{R}$ la suma de $\hat{u}, \hat{v} \in W_4$

Finalmente notemos que si $k \in \mathbb{R}, \hat{u} \in W_4 \implies k \cdot \hat{u} \in W_4$

$$\begin{aligned}k\hat{u} &= k(4a_2 + a_3, a_2, a_3) \\ &= (4ka_2 + ka_3, ka_2, ka_3)\end{aligned}$$

por distributividad

y $ka_2, ka_3 \in \mathbb{R}$ entonces $k \cdot \hat{u} \in W_4$

$\therefore W_4$ es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

6. En cada caso diga si los vectores son generados por el conjunto S

Definición 3. Sea \mathcal{S} un subconjunto de un espacio vectorial \mathcal{V} decimos que \mathcal{S} genera a \mathcal{V} si $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos de \mathcal{S} al generado de \mathcal{S} se le denota como $span(\mathcal{S}), <\mathcal{S}>, gen(\mathcal{S})$

a) $(2, -1, 1), S = \{(1, 0, 2), (-1, 1, 1)\}$

Sea $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Entonces $(2, -1, 1) = \alpha_1(1, 0, 2) + \alpha_2(-1, 1, 1) = (\alpha_1, 0, 2\alpha_1) + (-\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2$.

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_2 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - (-1) &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 1\end{aligned}$$

Al resolver el sistema, obtenemos:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 1 &= 1\end{aligned}$$

Entonces:

$$1(1, 0, 2) + (-1)(-1, 1, 1) = (1, 0, 2) + (1, -1, -1) = (2, -1, 1)$$

Cómo el sistema de ecuaciones si se satisface, el conjunto S SI genera al vector $(2, -1, -1)$

b) $(2, -1, 1, 3), S = \{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 1)\}$

Sea $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Entonces: $(2, -1, 1, 3) = \alpha_1(1, 0, 1, -1) + \alpha_2(0, 1, 1, 1) = (\alpha_1, 0, \alpha_1, -\alpha_1) + (0, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2$.

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 &= 3\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 2 - 1 &= 1 \\ -(-1) + 2 &= 3\end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \\ 1 &= 1 \\ 3 &= 3\end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones verificamos si el conjunto S genera al vector. Entonces:

$$2(1, 0, 1, -1) + (-1)(0, 1, 1, 1) = (2, 0, 2, -2) + (0, -1, -1, -1) = (2, -1, -1, -3)$$

Como el producto de los escalares por los elementos del conjunto S no forman al vector, podemos concluir que S **NO** genera a $(2, -1, 1, 3)$.

c) $2x^3 - x^2 + x + 3, S = \{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1\}$

Sean α_1, α_2 y α_3 elementos del campo, si suponemos que $2x^3 - x^2 + x + 3$ es generado por S implicará que existen dichos 3 elementos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = \alpha_1(x^3 + x^2 + x + 1) + \alpha_2(x^2 + x + 1) + \alpha_3(x + 1)$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 \\ \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 \\ \alpha_3 x + \alpha_3\end{aligned}$$

Por lo que ocurre lo siguiente

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3$$

$$\begin{aligned}
2x^3 - x^2 + x + 3 &= \alpha_1 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3 \\
&= x^3(\alpha_3) + x^2(\alpha_2 + \alpha_1) + x(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= 2 \\
\alpha_2 &= -1 - \alpha_1 \\
\alpha_2 &= -1 - 2 \\
\alpha_2 &= -3
\end{aligned}$$

Ahora llegamos a una contradicción, puesto que el sistema de ecuaciones anterior implica que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3 = 1$ por lo que el conjunto S no genera $2x^3 - x^2 + x + 3$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Recordemos que la suma de matrices se hace entrada por entrada eso es, si se van a sumar 2 matrices $A + B$ se hace de la forma $a_{ij} + b_{ij} \forall i, j \in A, B$ de tal manera que existen $a_{ij} + b_{ij} \forall i, i \in A, B$ de tal manera que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + \gamma_{1,1} & \beta_{1,2} + \gamma_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Notemos que

$$-\alpha_{2,1} = -3 \implies \alpha = 3$$

y luego

$$\beta_{2,2} = 4 \implies \beta = 4$$

y finalmente

$$\gamma = 2 - \beta_{1,2} \implies \gamma = 4$$

7. Determina cuando los siguientes conjuntos son linealmente dependientes o linealmente independientes.

$$\text{a) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -3\alpha_1 \\ -2\alpha_1 & 4\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\alpha_2 & 6\alpha_2 \\ 4\alpha_2 & -8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente renglón y columna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_2 & -3\alpha_1 + 6\alpha_2 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 & 4\alpha_1 - 8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\
-3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0 \\
-2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0 \\
4\alpha_1 - 8\alpha_2 &= 0
\end{aligned}$$

Multiplicamos dos veces el renglón 3 y lo sumamos al renglón 4. También multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 3.

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ -3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Por último multiplicamos tres veces el renglón 1 y lo sumamos al renglón 2:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = 2\alpha_2$.

Esto indica que α_1 depende de α_2 . Por lo tanto, el conjunto $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$ es **linealmente dependiente**.

$$\text{b) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -2\alpha_1 \\ -\alpha_1 & 4\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_2 & \alpha_2 \\ 2\alpha_2 & -4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumamos cada elemento de las matrices al correspondiente renglón y columna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & -2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 & 4\alpha_1 - 4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \\ 4\alpha_1 - 4\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Multiplicamos cuatro veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 4. También sumamos el renglón 1 al renglón 2:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Tenemos que $\alpha_2 = 0$, Entonces lo sustituimos en las demás ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - 0 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 0 &= 0\end{aligned}$$

Es claro notar que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$.

Cómo ambos valen 0, podemos concluir que el conjunto $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ es **linealmente independiente**.

$$\text{c) } \{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\} \in P_3(\mathbb{R})$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

Tenemos que: $0x^3 + 0x^2 + 0x + d = \alpha_1(x^3 + 2x^2) + \alpha_2(-x^2 + 3x + 1) + \alpha_3(x^3 - x^2 + 2x - 1)$

$$x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = (\alpha_1 + \alpha_3)x^3 + (2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)x^2 + (3\alpha_2 + 2\alpha_3)x + (\alpha_2 - \alpha_3).$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Ahora multiplicamos -3 veces el renglón 4 y le sumamos el renglón 1:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Podemos obtener que $\alpha_3 = 0$. Entonces sustituimos este valor en las ecuaciones.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - 0 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

De lo anterior deducimos que $\alpha_1 = 0$, por tanto:

$$\begin{aligned}0 - \alpha_2 - 0 &= 0 \\ 0 + 3\alpha_2 + 0 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. Podemos que concluir que el conjunto $\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\} \in P_3(\mathbb{R})$ es **linealmente independiente**.

$$\text{d) } \{(1, -1, 2), (1, -2, 1), (1, 1, 4)\} \in \mathbb{R}^3$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\alpha_1(1, -1, 2) + \alpha_2(1, -2, 1) + \alpha_3(1, 1, 4) = (0, 0, 0). \text{ Ahora:}$$

$(\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (\alpha_2, -2\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, 4\alpha_3) = (0, 0, 0)$. Ordenamos los escalares:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3) = (0, 0, 0)$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo sumamos a "menos" el renglón 3. También sumamos el renglón 1 al renglón 2.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 2. Y al renglón 1 le sumamos el renglón 2.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 0\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Entonces nos queda el siguiente sistema.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

De esto podemos deducir que $\alpha_1 = -3\alpha_3$, $\alpha_2 = 2\alpha_3$ y $\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{2}$.

Entonces podemos concluir que el conjunto $\{(1, -1, 2), (1, -2, 1), (1, 1, 4)\} \in \mathbb{R}^3$ es **linealmente dependiente**.

$$\mathbf{e}\{(1, -1, 2), (2, 0, 1), (-1, 2, -1)\} \in \mathbb{R}^3$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

$$\alpha_1(1, -1, 2) + \alpha_2(2, 0, 1) + \alpha_3(-1, 2, -1) = (0, 0, 0). \text{ Ahora:}$$

$(\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (2\alpha_2, 0\alpha_2, \alpha_2) + (-\alpha_3, 2\alpha_3, -\alpha_3) = (0, 0, 0)$. Ordenamos los escalares:

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Primero multiplicamos dos veces el renglón 1 y lo restamos al renglón 3. Luego sumamos el renglón 2 al renglón 1.

$$\begin{aligned}0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Ahora al renglón 3 le sumamos el renglón 1:

$$\begin{aligned}0\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 5\alpha_2 - 0\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos que $\alpha_2 = 0$ y sustituimos en las demás ecuaciones.

$$\begin{aligned}0 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Es fácilmente apreciar que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 0$

Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto $(1, -1, 2), (2, 0, 1), (-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$ es **linealmente independiente**

Recuerde que $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \mid a_k \in \mathbb{R} \forall k = 0, 1, 2, \dots, n\}$

8. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son bases para \mathbb{R}^3 ?

Definición 4. Una **base** β de \mathcal{V} espacio vectorial es un subconjunto de \mathcal{V} tal que β genera a \mathcal{V} y β es linealmente independiente

a) $S = \{(1, 0, -1), (2, 5, 1), (0, -4, 3)\}$ En primer lugar veamos quién es el generado del conjunto S , recordemos que un conjunto genera a otro $\forall \hat{x} \in \mathcal{V}$ es una combinación lineal de elementos de S

Sean $\alpha_1, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 5, 1) + \gamma(0, -4, 3)$$

$$\begin{aligned}\alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 5, 1) + \gamma(0, -4, 3) &= (\alpha, 0, -\alpha) + (2\beta, 5\beta, \beta) + (0, -4\gamma, 3\gamma) \\ &= (\alpha + 2\beta, 5\beta - 4\gamma, -\alpha + \beta + 3\gamma)\end{aligned}$$

Necesitamos que cada uno de esos vectores pueda ser el valor de una posición de \mathbb{R}^3 por lo que debería verse como

$$\alpha(1, 0, -1) + \beta(2, 5, 1) + \gamma(0, -4, 3) = \delta(1, 0, 0) + \epsilon(0, 1, 0) + \eta(0, 0, 1)$$

De esta manera podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta + 0\gamma &= \delta + 0\epsilon + 0\eta \\ 0\alpha + 5\beta - 4\gamma &= 0\delta + \epsilon + 0\eta \\ -\alpha + \beta + 3\gamma &= 0\delta + 0\epsilon + \eta\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma \\ -\alpha & \beta & 3\gamma \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ 0\delta & 0\epsilon & \eta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0\delta & 0\epsilon & \eta \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ -\alpha & \beta & 3\gamma & 0\delta & 0\epsilon & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta\end{array}\right)$$

1ra fila + 2da fila en **3ra fila**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 5\beta & -4\gamma & 0\delta & \epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta\end{array}\right)$$

2da fila $\cdot \frac{1}{5}$ en **2da fila**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 3\beta & 3\gamma & \delta & 0\epsilon & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & \delta & -\frac{3}{5}\epsilon & \eta\end{array}\right)$$

2da fila $\cdot -3 + 3^{ra}$ fila en **3ra fila**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \frac{27}{5}\gamma & \delta & -\frac{3}{5}\epsilon & \eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right)$$

3ra fila $\cdot \frac{5}{27}$ en **3ra fila**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & -\frac{4}{5}\gamma & 0\delta & \frac{1}{5}\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right)$$

(3ra fila $\cdot \frac{4}{5}$) + 2^{da} fila en **2da fila**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 2\beta & 0\gamma & \delta & 0\epsilon & 0\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{19}{27}\delta & -\frac{2}{9}\epsilon & -\frac{8}{27}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right)$$

(2da fila $\cdot -2$) + 1^a fila en **1ra fila**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 0\beta & 0\gamma & \frac{19}{27}\delta & -\frac{2}{9}\epsilon & -\frac{8}{27}\eta \\ 0\alpha & 1\beta & 0\gamma & \frac{4}{27}\delta & \frac{1}{9}\epsilon & \frac{4}{27}\eta \\ 0\alpha & 0\beta & \gamma & \frac{5}{27}\delta & -\frac{1}{9}\epsilon & \frac{5}{27}\eta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{19}{27} & -\frac{2}{9} & -\frac{8}{27} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{27} & \frac{1}{9} & \frac{4}{27} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{27}\end{array}\right)$$

Conservando sólo **coeficientes**

b) $\{(2, -4, 1), (0, 3, -1), (6, 0, -1)\}$ c) $\{(1, 2, -1), (1, 0, 2), (2, 1, 1)\}$