



Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores
Ayud. Irving Hernández Rosas

Proyecto V

Kevin Ariel Merino Peña¹



Realice los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento claramente. Y recuerden que estos proyectos se entregan de manera individual en la plataforma de google classroom.

1. Verifique el primer caso de la regla de la cadena de la composición $f \circ \vec{\gamma}$ para cada uno de los siguientes casos, esto es primero haga la composición y derive, y le luego use la regla de la cadena y vea que se llega al mismo resultado.

Teorema 1 (Regla de la cadena). Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos, $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $f : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ dos funciones tales que g manda a U en V i.e. $f \circ g$. Supongamos que g es diferenciable en \vec{x}_0 y $D(f \circ g)(\vec{x}_0) = Df(g(\vec{x}_0))Dg(\vec{x}_0)$.

■ Primer caso de la regla de la cadena

Supongamos $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una trayectoria diferenciable y $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $h(t) = f(\vec{\gamma})(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ donde $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Entonces

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

esto es:

$$\frac{dh}{dt} = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)$$

donde $\vec{\gamma}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

■ Segundo caso de la regla de la cadena

Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Escribimos

$$g(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) \quad y \quad h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

a) $f(x, y, z) = xyz$, $\vec{\gamma}(t) = (e^t, \cos(t))$.

Tenemos que $f \circ \gamma(t) = e^t \cos(t)$ y su derivada es

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = \frac{d}{dt} e^t \cos(t)$$

Planteando la derivada

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = e^t \frac{d}{dt} \cos(t) + \cos(t) \frac{d}{dt} e^t$$

Por la regla del producto en derivadas

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = e^t (-\sin(t)) + \cos(t) e^t$$

Por nuestro curso de Cálculo I

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = e^t \cos(t) - e^t \sin(t)$$

Conmutando la suma de funciones

por otra parte, por el primer caso de la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(f \circ g) = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dt}$$

¹Número de cuenta 317031326

entonces calculemos las siguientes derivadas

$\frac{df}{dx}(xy) = y$	Por la regla del producto
$\frac{df}{dy}(xy) = x$	Por la regla del producto
$\frac{dx}{dt}(e^t) = e^t$	Por propiedades de la exponencial
$\frac{dy}{dt}(\cos(t)) = -\sin(t)$	Por características de las trigonométricas

Así, se tiene que

$$\frac{d}{dt}(f \circ g) = ye^t - x \sin(t)$$

y como $x = e^t$ y $y = \cos(t)$

$$\therefore \frac{d}{dt}(f \circ g) = \cos(t)e^t - e^t \sin(t)$$

b) $f(x, y) = xy$, $\vec{\gamma}(t) = (3t^2, t^3)$.

Tenemos que $f \circ \gamma(t) = e^{(3t^2)(t^3)} = e^{3t^5}$ y su derivada es

$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = \frac{d}{dt}e^{3t^5}$	Planteando la derivada
$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = e^{3t^5} \frac{d}{dt} 3t^5$	Por la regla de la derivada para la exponencial
$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = e^{3t^5} (15t^4)$	Derivando un monomio
$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = 15t^4 e^{3t^5}$	Derivando un monomio

por otra parte, por el primer caso de la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(f \circ g) = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dt}$$

entonces calculemos las siguientes derivadas

$\frac{df}{dx}(e^{xy}) = ye^{xy}$	Por la regla de la exponencial
$\frac{df}{dy}(e^{xy}) = xe^{xy}$	Por la regla de la exponencial
$\frac{dx}{dt}(3t^2) = 6t$	Por propiedades de la derivada en exponentes
$\frac{dy}{dt}(t^3) = 3t^2$	Por propiedades de la derivada en exponentes

Así, se tiene que

$$\frac{d}{dt}(f \circ g) = ye^{xy}(6t) - xe^{xy}(3t^2)$$

y como $x = 3t^2$ y $y = t^3$

$$\therefore \frac{d}{dt}(f \circ g) = 15t^4 e^{3t^5}$$

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $\vec{\gamma}(t) = (e^t, e^{-t})$.

-
- d) $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$, $\vec{\gamma}(t) = (t, -t)$.
2. Sea $f(u, v, w) = (e^{u-w}, \cos(u+v) + \sin(u+v+w))$ y $g(x, y) = (e^x, \cos(y-x), e^{-y})$. Calcule $f \circ g$ y $\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0)$.
3. Calcule la derivada direccional de las siguientes funciones en el punto y la dirección dada:
- a) $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$ y $\vec{v} = \frac{3}{5}\hat{e}_1 + \frac{4}{5}\hat{e}_2$.
- b) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$ y $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$.
- c) $f(x, y) = e^x \cos(\pi y)$, $(x_0, y_0) = (0, -1)$ y $\vec{v} = -\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\hat{e}_1 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\hat{e}_2$.
- d) $f(x, y) = xy^2 + x^3y$, $(x_0, y_0) = (4, -2)$ y $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\hat{e}_1 + \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\hat{e}_2$.
4. Encuentre un vector que sea normal a la curva $x^3 + xy + y^3 = 11$ en $(1, 2)$.
5. El Capitán Ralphis se encuentra en problemas cerca del lado soleado de Mercurio. La temperatura del casco del barco cuando está en la ubicación (x, y, z) estará dada por $T(x, y, z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$, donde x, y, z se miden en metros. Actualmente está en $(1, 1, 1)$.
- a) ¿En qué direcciones debería proceder para disminuir la temperatura más rápidamente?
- b) Si el barco viaja a e^8 metros por segundo, ¿qué tan rápido será la disminución de la temperatura si avanza en esa dirección?
- c) Desafortunadamente, el metal del casco se romperá si se enfría a una velocidad superior a $\sqrt{14}e^2$ grados por segundo. Describa el conjunto de posibles direcciones en las que puede proceder a bajar la temperatura a no más de esa tasa.
-