Поправка к старшему члену асимптотики в задаче о подсчете числа точек, движущихся по графу

А. А. Толченников[*], В. Л. Чернышев[†]

3 октября 2017 г.

Аннотация

В задаче об асимптотике числа точек, движущихся по графу, найдено полиномиальное приближение, использующее многочлены Бернулли–Барнса. Найдено выражение для второго слагаемого асимптотического разложения.

1 Введение и постановка задачи

Пусть Γ — неориентированный, связный, локально–конечный граф (возможно, с петлями и кратными ребрами). Мы предполагем, что ребра e_i имеют длины, соответственно, t_i, и эти числа линейно независимы над $\mathbb{Q}$, что соответствует ситуации общего положения.

Буквой s везде далее будет обозначаться фиксированная вершина $s \in V(\Gamma)$, которую будем называть *источником*.

Рассмотрим следующую динамическую систему (см. [1, 4]), изучение которой мотивировано задачей исследования поведения волновых пакетов, в начальный момент времени локализованных в малой окрестности одной точки и эволюционирующих на метрических графах или гибридных пространствах (см. статьи [5, 6] и ссылки в них). В начальный момент времени из источника s по всем ребрам, инцидентным s, выходят точки, которые движутся с единичной скоростью. В тот момент времени, когда k точек, где k может принимать значения от 1 до валентности v вершины v_j, приходят в вершину графа, появляются v точек, которые выходят по всем ребрам, инцидентным вершине v_j. Пусть $N(T)$ — число точек, которые движутся по графу к моменту времени T. Функция $N(T)$ является кусочно–постоянной. Будем считать, что значение $N(T)$ в точках разрыва равно полусумме пределов слева и справа.

Старшая часть асимптотики $N(T)$ при $T \to \infty$ для произвольного конечного метрического графа с несоизмеримыми длинами ребер была найдена ранее ([2, 5]).

В работе [3] было дано полиномиальное прриближение для конечных деревьев, была написана поправка к старшему члену и показано, что если мы знаем поправку как функцию от длин ребер, то дерево и источник восстанавливаются однозначно.

[*]Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Институт проблем механики РАН, Московский физико–технический институт, tolchennikovaa@gmail.com

[†]Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, vchernyshev@hse.ru

В данной статье мы находим общую формулу для $N(T)$ и, в случае произвольного конечного графа, находим полиномиальное приближения к $N(T)$ и в явном виде выписываем первые два члена этого приближения.

2 Необходимые обозначения и определения

Далее везде в тексте буквой G будем обозначать некоторый конечный связный подграф графа Γ, содержащий вершину s. Для подграфа $G \subset \Gamma$ множество вершин будем обозначать $V(G)$, а множество ребер $E(G)$.

Для $v \in V(G)$ за $\rho(G, v)$ будем обозначать степень вершины v в подграфе G.

Определение 1. *Вершина v называется висячей в подграфе G, если $\rho(G, v) = 1$. Тогда единственное ребро $e \in E(G)$ называется висячим ребром.*

Определение 2. *Ребро $e \in E(G)$ называется перешейком, если после удаления этого ребра граф G распадается на две компоненты связности.*

Определение 3. *Маршрутом из s в v будем называть конечную последовательность вида $\mu = (s, e_{i_1}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{m-1}}, e_{i_m}, v)$, где слева и справа от каждого ребра стоят два его конца. Ребра и вершины могут повторяться в этой последовательсти.*

Определение 4. *Кратностью прохождения маршрута μ по ребру e_i будем называть число $k_i(\mu)$, равное числу раз, сколько это ребро встречается в последовательности μ.*

Определение 5. *Набором кратностей маршрута μ будем называть набор $k(\mu) = (k_i(\mu))_{e_i \in E(G)}$, где G — связный подграф графа Γ, состоящий из всех ребер, входящих в маршрут μ.*

Определение 6. *Для заданного набора чисел $k = (k_i)_{e_i \in E(G)}$, индексируемых ребрами G, определим граф G_k, который получается из G добавлением в каждому ребру $e_i \in E(G)$ еще $k_i - 1$ ребер (то есть каждому ребру e_i в G соответствуют ребра $e_i^1, \ldots, e_i^{k_i}$ в графе G_k).*

В частности, k может являться набором кратностей некоторого маршрута μ, и тогда будем писать $G_{k(\mu)}$. Очевидно, что граф $G_{k(\mu)}$ уникурсальный.

Определение 7. *Временем прохождения маршрута μ называется число $\sum_{e_i \in E(G)} k_i(\mu) t_i$, где G — связный подграф графа Γ, состоящий из всех ребер, входящих в маршрут μ.*

Определение 8. *Простой цепью будем называть маршрут, у которого все вершины и ребра различны.*

Определение 9. *Циклом будем называть маршрут, у которого все ребра различны, а начальная и конечная вершина совпадают.*

Определение 10. *Простым циклом будем называть цикл, не проходящий дважды через одну вершину.*

Ребра любого маршрута составляют конечный связный подграф Γ. Зафиксируем некоторый конечный связный подграф $G \subset \Gamma$, содержащий вершину s. Зафиксируем также некоторую вершину $v \in V(G)$ (возможно, $v = s$) и найдем времена прохождения всех маршрутов из s в v, которые проходят только по ребрам G и по каждому ребру G проходят хотя бы один раз. Множество таких маршрутов обозначим $U_{G,v}$.

3 Множество времен прохождения маршрутов из $U_{G,v}$

Мы каждому $\mu \in U_{G,v}$ сопоставим набор меток на ребрах подграфа G: $c = (c_i)_{e_i \in E(G)}$, где $c_i = 2 - (k_i(\mu) \mod 2)$.

Определим множество всех различных меток для всех маршрутов из $U_{G,v}$:

$$C_{G,v} = \cup_{\mu \in U_{G,v}} \{c(\mu)\}.$$

Определим множество всех возможных кратностей маршрутов из $U_{G,v}$:

$$K_{G,v} = \cup_{\mu \in U_{G,v}} \{k(\mu)\}$$

Утверждение 1.

$$K_{G,v} = \cup_{c \in C_{G,v}} \{(c_i + 2n_i)_{e_i \in G} | n_i \geq 0\}$$

Доказательство. Включение левого множества в правое очевидно следует из определения множества меток $C_{G,v}$. Докажем включение в обратную сторону.

1) Докажем, что для любого $c \in C_{G,v}$ существует маршрут $\mu \in U_{G,v}$ такой, что $k(\mu) = c$. По определению, найдется такой маршрут $\mu_1 \in U_{G,v}$ такой, что $k(\mu_1) = (c_i + 2n_i)_{e_i \in E(G)}$ для некоторых $n_i \geq 0$. Рассмотрим граф $G_{k(\mu_1)}$ (см определение 6). Все вершины графа $G_{k(\mu_1)}$, за исключением s и v имеют четную степень. Если $s = v$, то s тоже имеет четную степень. Если $s \neq v$, то s и v имеют нечетную степень. Для каждого $e_i \in E(G)$ удалим $2n_i$ ребер из кратных ребер $e_i^1, \ldots, e_i^{c_i + 2n_i}$ графа $G_{k(\mu_1)}$: останется два кратных ребра e_i^1, e_i^2 при $c_i = 2$, либо одно ребро e_i^1 при $c_i = 1$. Получим новый граф, который является уникурсальным и маршрут из s в v в этом графе как раз определяет маршрут μ в G с $k(\mu) = c$.

2) Теперь для любого $e_i \in E(G)$ и любого $n_i \geq 0$ к построенному в пункте 1 маршруту μ мы можем добавить $2n_i$–кратные проходы вперед–назад по ребру e_i и получим маршрут с набором кратностей $(c_i + 2n_i)_{e_i \in E(G)}$. □

Поскольку все времена прохождения ребер линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то получаем

Утверждение 2.

$$T_{G,v} = \{t(\mu) | \mu \in U_{G,v}\} = \sqcup_{c \in C_{G,v}} \left\{ \sum_{e_i \in E(G)} (c_i + 2n_i) t_i | n_i \geq 0 \right\}$$

Теперь найдем сколько всего различных меток подграфа G.

Утверждение 3. $\# C_{G,v} = 2^{\beta_1(G)}$

Доказательство. Будем говорить, что два маршрута μ_1 и μ_2, начинающиеся в вершине s и заканчивающиеся в вершине v, *дискретно гомотопны*, если один из другого получен применением конечного числа операций вставки или удаления последовательности вида $(v_i, e_j, v_l, e_j, v_i)$ (то есть двойного прохода вперед-назад по ребру). Очевидно, что маршруты дискретно гомотопны тогда и только тогда, когда соответствующие им непрерывные пути гомотопны как пути с общими концами. Для двух дискретно гомотопных путей μ_1 и μ_2: $c(\mu_1) = c(\mu_2)$.

Выберем в графе G максимальное дерево с корнем в вершине s. Любой маршрут $\mu \in U_{G,v}$ мы можем дискретно прогомотопировать в маршрут μ_1 из s в v, который уже не обязательно проходит по всем ребрам G, но который состоит из объединения простых циклов, каждый из которых содержит только одну перемычку, и, возможно, простой цепи, которая по ребрам максимального дерева идет из s в v. Тогда $c(\mu_1)$ однозначно определяется четностью прохождений маршрута μ_1 по перемычкам. А четности кратностей прохождения по перемычкам можно задать $2^{\beta_1(G)}$ способами. $\square$

3.1 Формула для N(T)

Функция $N(T)$ кусочно–постоянная и скачок этой функции может происходить только во времена вида $T_{G,v}$ для некоторого подграфа G и $v \in V(G)$.

Чтобы узнать скачок функции $N(T)$ в момент времени $t_0 \in T_{G,v}$, нам надо знать по каким ребрам заканчиваются маршруты с временем прохождения t_0. Пусть маршруты могут заканчиваться по l ребрам из $E(G)$, инцидентным v. Это означает, что в момент времени t_0 в вершину v зашло l точек, а в момент $t_0 + \varepsilon$ вышло $\rho(\Gamma, v)$ точек. Значит, скачок функции $N(T)$ в точке t_0 равен $\delta = \rho(\Gamma, v) - l$.

Для удобства разобьем $\delta = \delta' + \delta'$, где $\delta' = \rho(\Gamma, v) - \rho(G, v)$, а $\delta'' = \rho(G, v) - l$. В следующем утверждении мы покажем, что δ'' может равняться 0 или 1.

Теперь найдем по каким ребрам могут заканчиваться маршруты с фиксированным временем прохождения $t_0 \in T_{G,v}$ или, что то же самое, маршруты с фиксированным набором кратностей прохождения $k \in K_{G,v}$.

Утверждение 4. *Пусть $k \in K_{G,v}$ и e_j — ребро из G, инцидентное v. Следующие высказывания равносильны:*

A) Не существует маршрута из $U_{G,v}$ с набором кратностей прохождения k такого, что e_j — последнее ребро маршрута.

B) $k_j = 1$ и e_j — такой перешеек графа G, что после его удаления вершины v и s находятся в разных компонентах связности и вершина v не становится изолированной.

Доказательство. $B \Rightarrow A$. Пусть после удаления e_j появилось две компоненты связности: G', которая содержит s, и G'', которая содержит v и хотя бы одно ребро. Тогда, пройдя один раз по ребру e_j из G' в G'', мы не сможем закончить маршрут по ребру e_j, поскольку в G'' есть хотя бы одно ребро, по которому надо еще пройти.

$A \Rightarrow B$. Во-первых, докажем, что $v \neq s$. Допустим, что $v = s$, тогда в графе G_k все вершины имеют четную степень. Тогда в нем существует эйлеров цикл. В эйлеровом цикле есть последовательность вида $e_j^1, v, \ldots$. Разрезаем этот цикл в месте, где стоит вершина v и получаем маршрут в G, который заканчивается по ребру e_j. Противоречие с условием A.

Во-вторых, докажем, что $k_j = 1$. Допустим, что $k_j > 1$ и рассмотрим два случая: a) $e_j = (v, s)$, b) $e_j \neq (v, s)$. В случае a) удалим из графа G_k ребро e_j^1. Получившийся граф будет по–прежнему связным и все его вершины будут иметь четную степень. В нем построим эйлеров цикл из s в s и добавим к нему ребро e_j. Получим маршрут в G, который заканчивается по ребру e_j. Противоречие. В случае b) мы к графу G_k добавим ребро $g = (v, s)$, а затем ребра g и e_j^1 отклеим от вершины v и склеим в новой вершине v'. Получивший граф будет связным, все вершины будут иметь четную степень. Строим эйлеров цикл.

В эйлеровом цикле будет последовательность вида e_j^1, v', g, s. Разрезаем цикл в месте вершины v', удаляем ребро g и получаем маршрут в G вида $(s, \dots, e_j, v)$, что противоречит условию А.

В–третьих, докажем, что e_j — перешеек. Допустим, что после удаления ребра e_j вершины v и s находятся в одной компоненте связности. Рассмотрим два случая: a) $e_j = (v, s)$, b) $e_j \neq (v, s)$. В случае a) из графа G_k удалим ребро e_j^1 и получим связный граф, у которого все вершины будут иметь четную степень. Берем эйлеров цикл в этом графе, разрезаем в месте вершины s и добавляем в конец ребро e_j. Получаем маршрут из s в v, который заканчивается по ребру e_j. В случае b) из графа G_k удаляем e_j^1 и получаем связный граф, у которого только две вершины s и v имеют нечетную степень. Значит, существует маршрут из s в v, и если мы к нему в конец добавим ребро e_j, то получим маршрут в графе G из s в v, который заканчивается по ребру e_j. Противоречие.

В–четвертых, покажем, что после удаления ребра e_j вершины v и s должны оказаться в разных компонентах связности. Допустим, что они после удаления ребра e_j оказались в одной компоненте связности. Тогда по ребру e_j надо пройти хотя бы два раза, что противоречит тому, что $k_j = 1$.

В–пятых, покажем, что после удаления ребра e_j вершина v не может оказаться изолированной вершиной. Действительно, это бы означало, что v — висячая вершина в графе G. Тогда любой маршрут с кратностью прохождения $k_j = 1$ обязан заканчиваться в вершине v, что противоречит А. $\square$

Следствие 1. *Скачок δ'' может равняться только 0 или 1, поскольку при заданных v, G существует не более одного ребра, определяемого условием B.*

В соответствии с разбиением скачка на два слагаемых $\delta = \delta' + \delta''$ мы разобьем $N(T) = N'(T) + N''(T)$ на два слагаемых, в которых будут подсчитываться соответствующие скачки.

Если мы теперь просуммируем по всем связным подграфам G, содержащим s, вершинам $v \in V(G)$ и просуммируем по всем временам прохождения маршрутов $T_{G,v}$, то получим

Теорема 1. *Для локально конечного графа с длинами ребер, линейно независимыми над $\mathbb{Q}$, считающая функция имеет вид $N(T) = N'(T) + N''(T)$, где*

$$N'(T) = \sum_{G \subset \Gamma}^{(1)} \sum_{v \in V(G)} (\rho(\Gamma, v) - \rho(G, v)) \sum_{c \in C_{G,v}} \# \left\{ \sum_{e_i \in E(G)} (c_i + 2n_i) t_i \le T \,|\, n_i \ge 0 \right\},$$

где сумма $\sum^{(1)}$ берется по всем связным конечным подграфам $G \subset \Gamma$, содержащим вершину s.

$$N''(T) = \sum_{G \subset \Gamma}^{(1)} \sum_{v \in V(G)}^{(2)} \sum_{c \in C_{G,v}} \# \left\{ \sum_{e_i \in E(G), i \neq j} (c_i + 2n_i) t_i + t_j \le T \,|\, n_i \ge 0 \right\},$$

где сумма $\sum^{(1)}$ берется по всем связным конечным подграфам G, содержащим s, а сумма $\sum^{(2)}$ берется по всем невисячим вершинам $v \in V(G)$, таким, что v является концом некоторого перешейка e_j и при удалении e_j вершины v и s располагаются в разных компонентах связности.

Если мы имеем бесконечный граф, но такой, что множество длин ребер отделенно от нуля ($t_i > C > 0\ \forall i$), то для каждого фиксированного T в сумме по подграфам $G \subset \Gamma$ будет лишь конечное число ненулевых слагаемых.

Чтобы формулу для $N(T)$ преобразовать к более явному виду, нужно иметь формулу для числа целых точек в расширяющемся симплексе. Этому вопросу будет посвящен следующий параграф.

3.2 Число натуральных точек симплекса с действительными вершинами.

Определим функцию $N_k(\lambda\,|\,w_1,\ldots,w_k)$, равную числу неотрицательных целочисленных решений $(n_1,\ldots,n_k)$ неравенства $\sum_{i=1}^k n_i w_i \le \lambda$ (при этом число решений уравнения $\sum_{i=1}^k n_i w_i = \lambda$ берется с весом $\frac{1}{2}$). Тогда для почти всех $w_1,\ldots,w_k$ функция $N_k(\lambda)$ с точностью до степени логарифма приближается многочленом (см. [8, 9]). А именно: $N_k(\lambda) - R_k(\lambda) = O((\log\lambda)^{k+\varepsilon})(\lambda\to\infty)\ \forall\varepsilon > 0$, где

$$R_k(\lambda) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k w_i}\sum_{s=0}^k \frac{\lambda^k}{k!} td_{k-s}(w_1,\ldots,w_k), \tag{1}$$

где td_i — многочлены Тодда ([11]), определяемые равенством

$$\prod_{i=1}^k \frac{w_i z}{1-e^{-w_i z}} = \sum_{s=0}^\infty z^s td_s(w_1,\ldots,w_k).$$

$$R_k(\lambda\,|\,w_1,\ldots,w_k) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k w_i}\left(\frac{\lambda^k}{k!} + \frac{1}{2}(w_1+\ldots+w_k)\,\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right) + o(\lambda^{k-1}). \tag{2}$$

Этот многочлен (см. [10, 8, 12, 13]) называется многочленом Бернулли–Барнса.

Заметим, что для того, чтобы $N(\lambda)$ можно было приблизить первыми двумя степенями, достаточно, чтобы нашлось хотя бы два несоизмеримых числа w_i, w_j (см. [9]).

3.3 Полиномиальное приближение для $N(T)$

Везде далее будем считать, что граф Γ конечный. Тогда можно применить результат Спенсера ([8]) и получить:

Теорема 2. *Для конечного графа с длинами ребер $t_1,\ldots,t_E$, линейно независимыми над $\mathbb{Q}$, считающая функция имеет полиномиальное приближение $R(T)$ такое, что $N(T) - R(T) = O((\log T)^{E-1})$. Многочлен $R(T) = R'(T) + R''(T)$, где*

$$R'(T) = \sum_{G\subset\Gamma}^{(1)}\sum_{v\in V(G)}(\rho(\Gamma,v)-\rho(G,v))\sum_{c\in C_{G,v}} R_{|E(G)|}\left(T + \sum_{c_i=1} t_i \,\middle|\, \{2t_i\}_{e_i\in E(G)}\right),$$

где сумма $\sum^{(1)}$ берется по всем связным конечным подграфам $G\subset\Gamma$, содержащим вершину s.

$$R''(T) = \sum_{G\subset\Gamma}^{(1)}\sum_{v\in V(G)}^{(2)}\sum_{c\in C_{G,v}} R_{|E(G)|-1}\left(T + \sum_{c_i=1, i\neq j} t_i - t_j \,\middle|\, \{2t_i\}_{e_i\in E(G), i\neq j}\right),$$

где сумма $\sum^{(1)}$ берется по всем связным конечным подграфам G, содержащим s, а сумма $\sum^{(2)}$ берется по всем невисячим вершинам $v \in V(G)$, таким, что v является концом некоторого перешейка e_j и при удалении e_j вершины v и s располагаются в разных компонентах связности.

3.4 Старший коэффициент $N(T)$ для конечного графа

Если в выражении для $N'(T)$ положить $G = \Gamma$, то $\rho(\Gamma, v) - \rho(G, v) = 0$, поэтому старшая часть $N'(T)$ определяется теми связными подграфами G, для которых $|E(G)| = E - 1$, то есть $N'(T) = N_1'T^{E-1} + o(T^{E-1})$. А вот старшая часть $N''(T)$ определяется слагаемым с $G = \Gamma$ и $N''(T) = N_1''T^{E-1} + o(T^{E-1})$. Найдем коэффициенты N_1', N_2' и $N_1 = N_1' + N_1''$.

Для простоты будем считать, что s не является висячей вершиной, иначе можно сдвинуть аргумент $N(T)$ на время прохождения ребра, инцидентного s и считать, что источник находится в соседней вершине.

1) Найдем N_1'. Для этого переберем все связные подграфы G такие, что $|E(G)| = E - 1$. Это означает, что G получается из Γ либо удалением висячего ребра e_j и изолированной вершины, либо удалением ребра e_j, входящего в цикл. В первом случае только для одной вершины v $\rho(\Gamma, v) - \rho(G, v) \neq 0$, а $\beta_1(G) = \beta_1(\Gamma)$. Во втором случае для двух вершин $\rho(\Gamma, v) - \rho(G, v) \neq 0$, а $\beta_1(G) = \beta_1(\Gamma) - 1$. Получаем

$$N_1' = \sum_{e_j}^{(1)} 2^{\beta_1(\Gamma)} \frac{1}{\prod_{i \neq j} 2t_i (E-1)!} + \sum_{e_j}^{(2)} 2 \cdot 2^{\beta_1(\Gamma \setminus e_j)} \frac{1}{\prod_{i \neq j} 2t_i (E-1)!},$$

где $\sum^{(1)}$ берется по висячим ребрам, $\sum^{(2)}$ берется по ребрам, входящим в циклы.

2) Найдем N_1''. Старшее слагаемое получится, если положить $G = \Gamma$ и взять сумму по всем перешейкам, которые не являются висячими ребрами. Тогда $\beta_1(G) = \beta_1(\Gamma)$.

$$N_1'' = \sum_{e_j} 2^{\beta_1(\Gamma)} \frac{1}{\prod_{i \neq j} 2t_i (E-1)!}.$$

3) В итоге

$$N_1 = N_1' + N_1'' = 2^{\beta_1(\Gamma)} \frac{\sum_{i=1}^{E} t_i}{2^{E-1}(E-1)! \prod_{i=1}^{E} t_i} = \frac{1}{2^{V-2}(E-1)!} \frac{\sum_{i=1}^{E} t_i}{\prod_{i=1}^{E} t_i}$$

Заметим, что этот коэффициент впервые был найден из других соображений в статье [7].

3.5 Поправка к старшему коэффициенту для конечного графа

Коэффициент N_2' получается как сумма $N_{2,1}' + N_{2,2}'$, где $N_{2,1}'$ получается из слагаемых с $|E(G)| = E - 1$, $N_{2,2}'$ получается из слагаемых с $|E(G)| = E - 2$.

1) $N_{2,1}'$ — это коэффициент при T^{E-2} в разложении

$$\sum_{e_j}^{(1)} \sum_{v \in V(G)} (\rho(\Gamma, v) - \rho(G, v)) \sum_{c \in C_{G,v}} \# \left\{ \sum_{e_i \in E(G)} 2n_i t_i \leq T + \sum_{c_i = 1} t_i \,|\, n_i > 0 \right\},$$

где суммирование $\sum^{(1)}$ ведется по всем ребрам e_j, которые являются либо висячим ребром, либо ребром, входящим в циклы. За $G = \Gamma \setminus e$ обозначен граф, который получается удалением из Γ ребра e_j и изолированных вершин.

$$\#\left\{\sum_{e_i\in E(G)} 2n_it_i \le T + \sum_{c_i=1} t_i \,|\, n_i>0\right\} = \frac{1}{\prod_{e_i\in G} 2t_i}\left(\frac{(T+\sum_{c_i=1}t_i)^{E-1}}{(E-1)!}\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\sum_{e_i\in G} 2t_i\frac{T^{E-2}}{(E-2)!} + o(T^{E-2})\right)$$

Откуда коэффициент при T^{E-2} равен

$$-\frac{1}{2^{E-1}(E-2)!}\frac{1}{\prod_{i=1}^{E} t_i}\sum_{c_i=2, i\neq j} t_jt_i$$

Получаем, что $N'_{2,1}$ равен

$$N'_{2,1} = \frac{1}{2^{E-2}(E-2)!}\frac{1}{\prod_i t_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{e_j=(u,v)}^{(1)}\sum_{c\in C_{G,u}\cup C_{G,v}, c_i=2} t_jt_i - \frac{1}{2}\sum_{e_j=(u,v)}^{(2)}\sum_{c\in C_{G,v}, c_i=2} t_jt_i\right),$$

где суммирование $\sum^{(1)}$ ведется по всем ребрам e_j графа Γ, входящим в циклы, а суммирование $\sum^{(2)}$ ведется по висячим ребрам $e_j=(u,v)$, где u обозначает висячую вершину.

2) Коэффициент $N'_{2,2}$ получается из тех слагаемых в сумме по G, для которых $\#E(G) = E-2$:

$$N'_{2,2} = \frac{1}{2^{E-2}(E-2)!}\frac{1}{\prod_{i=1}^{E} t_i}\sum_{\{e_j,e_l\}}^{(1)}\sum_{v\in V(G)}(\rho(\Gamma,v)-\rho(G,v))2^{\beta_1(G)}t_jt_l,$$

где суммирование $\sum^{(1)}$ ведется по всем неупорядоченным парам ребер $\{e_j, e_l\}$ таким, что после удаления этих двух ребер из графа Γ и изолированных вершин мы получим граф G, который содержит вершину s и является связным.

Теперь заметим, что величину $\sum_{v\in V(G)}(\rho(\Gamma,v)-\rho(G,v))$ можно выразить через число изолированных точек, которые образовались после удаления из графа Γ двух ребер e_i, e_j. И мы получаем

$$N'_{2,2} = \frac{1}{2^{E-2}(E-2)!}\frac{1}{\prod_{i=1}^{E} t_i}\left(\sum_{\{e_j,e_l\}}^{(1)}(4-m)2^{\beta_1(G)}t_jt_l - \sum_{\{e_j,e_l\}}^{(2)}2^{\beta_1(G)}t_jt_l\right),$$

где сумма $\sum^{(1)}$ берется по всем неупорядоченным парам ребер $\{e_j, e_l\}$ таким, что после удаления этих двух ребер из графа Γ мы получим граф, состоящий из m изолированных вершин и графа G, который содержит вершину s и является связным. Сумма $\sum^{(2)}$ берется по всем неупорядоченным парам ребер $\{e_j, e_l\}$, которые инцидентны вершине степени 2, не совпадающей с s.

3) Коэффициент $N''_{2,1}$. Положим $G=\Gamma$. Коэффициент $N''_{2,1}$ — это коэффициент при T^{E-2} в разложении для

$$\sum_{e_j}^{(1)}\sum_{c\in C_{\Gamma,v}}\#\left\{\sum_{e_i\in E(\Gamma), i\neq j} 2n_it_i \le T + \sum_{c_i=1, i\neq j} t_i - t_j \,\Big|\, n_i>0\right\}$$

где сумма $\sum^{(1)}$ берется по всем невисячим перешейкам $e_j = (v, u)$ таким, что после удаления ребра e_j вершины v и s лежат в разных компонентах связности. Коэффициент при T^{E-2} в разложении

$$\#\left\{ \sum_{e_i \in E(\Gamma), i \neq j} 2n_i t_i \leq T + \sum_{c_i=1, i\neq j} t_i - t_j \,\Big|\, n_i > 0 \right\}$$

равен

$$\frac{1}{2^{E-1}(E-2)!}\frac{1}{\prod_{i\neq j} t_i}\left(\sum_{c_i=1,i\neq j} t_i - t_j - \sum_{i\neq j} t_i\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2^{E-2}(E-2)!}\frac{1}{\prod_{i=1}^{E} t_i}\left(\sum_{c_i=2} t_i t_j + t_j^2\right)$$

$$N''_{2,1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{2^{E-2}(E-2)!}\frac{1}{\prod_i t_i}\sum_{v\in V(\Gamma)}^{(1)}\sum_{c\in C_{\Gamma,v}}\left(\sum_{c_i=2} t_i t_j + t_j^2\right)$$

где сумма $\sum^{(1)}$ берется по всем невисячим перешейкам $e_j = (v, u)$ таким, что после удаления ребра e_j вершины v и s лежат в разных компонентах связности.

4) Коэффициент $N''_{2,2}$. Это коэффициент при T^{E-2} в разложении слагаемого, который соответствует $|E(G)| = G - 1$.

$$N''_{2,2} = \frac{1}{2^{E-2}(E-2)!}\frac{1}{\prod_i t_i}\sum_{e_j}^{(1)}\sum_{e_l}^{(2)} 2^{\beta_1(\Gamma\setminus e_j)} t_j t_l,$$

где $\sum^{(1)}$ берется по ребрам e_j, которые являются висячими или входят в циклы (напомним, мы считаем, что s не является висячей вершиной), а сумма $\sum^{(2)}$ берется по всем перешейкам e_l в графе $\Gamma \setminus e_j$ таким, что после их удаления компонента, не содержащая s, содержит хотя бы одно ребро.

Заметим, что в $N'_{2,1}$ сумма берется по висячим и цикловым ребрам графа Γ, а в выражении для $N''_{2,1}$ сумма берется по невисячим перешейкам. Это можно объединить в единую сумму по всем ребрам.

$$N'_{2,1}+N''_{2,1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{2^{E-2}(E-2)!}\frac{1}{\prod_i t_i}\left(\sum_{e_j\in E(\Gamma)} t_j \sum_{c\in\mathbf{C}}\sum_{c_i=2} t_i + 2^{\beta_1(\Gamma)}\sum_{e_j\text{–невисячий перешеек}} t_j^2\right),$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{cases} C_{\Gamma\setminus e_j,u}, & \text{если } e_j \text{ — висячее ребро с невисячим концом } u \\ C_{\Gamma\setminus e_j,u}\cup C_{\Gamma\setminus e_j,v}, & \text{если } e_j = (u,v) \text{ — циклическое ребро} \\ C_{\Gamma,v}, & \text{если } e_j \text{ — невисячий перешеек, а } v \text{ тот конец ребра, который дальше от } s \end{cases}$$

Это выражение далее можно упростить

Утверждение 5.

$$\sum_{e_j\in E(\Gamma)} t_j \sum_{c\in\mathbf{C}}\sum_{c_i=2} t_i = \sum_{j=1}^{E}\sum_{i=1,i\neq j}^{E} t_j t_i \gamma_{i,j} 2^{\beta_1(\Gamma\setminus e_i)},$$

где $\gamma_{i,j} = 1$, если после удаления ребра e_i ребро e_j и вершина s будут лежать в одной компоненте связности, и $\gamma_{i,j} = 0$ в противном случае.

Доказательство. Для каждой упорядоченной пары ребер (e_j, e_i) найдем число меток из $\mathbf{C}$ таких, что ребро e_i имеет метку 2. Рассмотрим 9 случаев в зависимости от того, является ли каждое ребро из пары висячим, цикловым или невисячим перешейком.

1) e_j, e_i — висячие ребра. Тогда в любую разметку ребер e_i входит с меткой 2. То есть этот случай дает вклад $2^{\beta_1(\Gamma)}t_j t_i = t_j t_i \gamma_{i,j} 2^{\beta_1(\Gamma\setminus e_i)}$.

2) e_j — висячее ребро, e_i — цикловое. Число разметок с меткой 2 на ребре e_i равно $2^{\beta_1(\Gamma)-1} = \gamma_{i,j}2^{\beta_1(\Gamma\setminus e_i)}$.

3) e_j — висячее ребро, e_i — невисячий перешеек. На ребре e_i стоит метка 2, если после удаления e_i ребро e_j и источник s лежат в одной компоненте связности. В противном случае на ребре e_i стоит метка 1. Поэтому число разметок с меткой 2 на ребре e_i равно $\gamma_{i,j}2^{\beta_1(\Gamma)} = \gamma_{i,j}2^{\beta_1(\Gamma\setminus e_i)}$.

4) e_j — цикловое ребро, e_i — висячее. Число разметок с меткой 2 на ребре e_i равно $2^{\beta_1(\Gamma)} = \gamma_{i,j}2^{\beta_1(\Gamma\setminus e_i)}$.

5) $e_j \neq e_i$ — цикловые ребра. Число разметок с меткой 2 на ребре e_i равно $2^{\beta_1(\Gamma)-1} = \gamma_{i,j}2^{\beta_1(\Gamma\setminus e_i)}$.

6) e_j — цикловое, e_i — невисячий перешеек. На ребре e_i может стоять метка 2 только в случае, если после удаления e_i вершина s и ребро e_j лежат в одной компоненте связности. Число разметок с меткой 2 на ребре e_i равно $2^{\beta_1(\Gamma)} = \gamma_{i,j}2^{\beta_1(\Gamma\setminus e_i)}$.

7) e_j — невисячий перешеек, e_i — висячее ребро. Число разметок с меткой 2 на ребре e_i равно $2^{\beta_1(\Gamma)} = \gamma_{i,j}2^{\beta_1(\Gamma\setminus e_i)}$.

8) e_j — невисячий перешеек, e_i — цикловое ребро. Число разметок с меткой 2 на ребре e_i равно $2^{\beta_1(\Gamma)-1} = \gamma_{i,j}2^{\beta_1(\Gamma\setminus e_i)}$.

9) $e_j \neq e_i$ — невисячие перешейки. Число разметок с меткой 2 на ребре e_i равно $\gamma_{i,j}2^{\beta_1(\Gamma)} = \gamma_{i,j}2^{\beta_1(\Gamma\setminus e_i)}$.

□

Аналогично доказывается

Утверждение 6.

$$N'_{2,2}+N''_{2,2} = \frac{1}{2^{E-2}(E-2)!\prod_{l=1}^{E} t_l}\left[\sum_{\{e_i,e_j\}}^{(1)} (4-m)2^{\beta_1(G)}t_i t_j + \sum_{\{e_i,e_j\}}^{(2)} 2^{\beta_1(G)+\delta_{i,j}}t_i t_j - \sum_{\{e_i,e_j\}}^{(3)} 2^{\beta_1(G)}t_i t_j\right],$$

где $\sum^{(1)}$ берется по всем неупорядоченным парам ребер $\{e_i, e_j\}$ таким, что после удаления этих двух ребер граф $G = \Gamma\setminus\{e_i, e_j\}$ состоит из m изолированных вершин и еще одной связной компоненты. Сумма $\sum^{(2)}$ берется по всем неупорядоченным парам ребер $\{e_i, e_j\}$ таким, что после удаления изолированных вершин из графа $G = \Gamma\setminus\{e_i, e_j\}$, получается 2 компоненты связности. Сумма $\sum^{(3)}$ берется по всем неупорядоченным парам ребер $\{e_i, e_j\}$ таким, что они инцидентны вершине степени 2 (и где опять обозначено $G = \Gamma\setminus\{e_i, e_j\}$).

В частности, $N'_{2,2} + N''_{2,2}$ не зависит от s.

Собирая вместе все 4 слагаемых получаем

Теорема 3. *Пусть конечный граф Γ имеет длины ребер $t_1, \ldots, t_E$, линейно независимые над $\mathbb{Q}$, и источник s не является висячей вершиной, тогда считающая функция имеет разложение $N(T) = N_1 T^{E-1} + N_2 T^{E-2} + o(T^{E-2})$,* *где*

$$N_2 = \frac{1}{2^{E-2}(E-2)!\prod_{i=1}^{E} t_i}\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{E}\sum_{i=1,i\neq j}^{E} t_j t_i \gamma_{i,j} 2^{\beta_1(\Gamma\setminus e_i)} - 2^{\beta_1(\Gamma)-1}\sum_{e_j}^{(1)} t_j^2\right.$$

$$\left.+\sum_{\{e_i,e_j\}}^{(2)}(4-m)2^{\beta_1(G)}t_i t_j + \sum_{\{e_i,e_j\}}^{(3)} 2^{\beta_1(G)+\delta_{i,j}}t_i t_j - \sum_{\{e_i,e_j\}}^{(4)} 2^{\beta_1(G)}t_i t_j\right]$$

где $\sum^{(1)}$ *берется по невисячим перешейкам* e_j*. Сумма* $\sum^{(2)}$ *берется по всем неупорядоченным парам ребер* $\{e_i, e_j\}$ *таким, что после удаления этих двух ребер граф* $G = \Gamma \setminus \{e_i, e_j\}$ *состоит из* m *изолированных вершин и еще одной связной компоненты. Сумма* $\sum^{(3)}$ *берется по всем неупорядоченным парам ребер* $\{e_i, e_j\}$ *таким, что после удаления изолированных вершин из графа* $G = \Gamma \setminus \{e_i, e_j\}$*, получается 2 компоненты связности. Сумма* $\sum^{(4)}$ *берется по всем неупорядоченным парам ребер* $\{e_i, e_j\}$ *таким, что они инцидентны вершине степени 2 (и где опять обозначено* $G = \Gamma \setminus \{e_i, e_j\}$*).*

4 Примеры

4.1 Граф K_n, $n \geq 3$

Для графа K_n (для которого $V = n, E = n(n-1)/2$) первые два члена разложения $N(T)$ не зависят от положения источника и равны

$$N(T) = \frac{T^{E-1}}{2^{V-2}(E-1)!}\frac{\sum_{i=1}^{E} t_i}{\prod_{i=1}^{E} t_i} + \frac{T^{E-2}}{2^{V-2}(E-2)!}\frac{\sum_{1\leq i<j\leq E} t_i t_j}{\prod_{i=1}^{E} t_i} + o(T^{E-2})$$

4.2 Цикл C_n на n вершинах

Для цикла на n вершинах ($V = n, E = n$) первые два члена разложения $N(T)$ не зависят от положения источника и равны

$$N(T) = \frac{T^{n-1}}{2^{n-2}(n-1)!}\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\prod_{i=1}^{n} t_i} + \frac{T^{n-2}}{2^{n-2}(n-2)!}\frac{\sum_{1\leq i<j\leq n} t_i t_j}{\prod_{i=1}^{n} t_i} + o(T^{n-2})$$

4.3 $n \geq 3$ кратных ребер между двумя вершинами

Рассмотрим граф, у которого $V = 2, E = n \geq 3$. Тогда

$$N(T) = \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\prod_{i=1}^{n} t_i} + \frac{T^{n-2}}{(n-2)!}\frac{\sum_{1\leq i<j\leq n} t_i t_j}{\prod_{i=1}^{n} t_i} + o(T^{n-2})$$

4.4 Треугольник с хвостом из двух ребер

Рассмотрим треугольник, состоящий из ребер e_1, e_2, e_3, и в вершину, где сходятся ребра e_1, e_2 приклеим ребро e_4, а затем к висячему концу ребра e_4 приклеим висячее ребро e_5. Источник s располагается в вершине степени 3, где сходятся e_1, e_2, e_4. Тогда

$$N(T) = \frac{T^4}{192}\frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{\prod_{i=1}^{5} t_i} + \frac{T^3}{48\prod_{i=1}^{5} t_i}\Big(t_1(t_2 + t_3 - \frac{1}{2}t_4 + \frac{3}{2}t_5) + t_2(t_3 - \frac{1}{2}t_4 + \frac{3}{2}t_5)$$

$$+t_3(-\frac{1}{2}t_4+\frac{3}{2}t_5)+t_4(-t_4+t_5)\Big)+o(T^3)$$

Список литературы

[1] Chernyshev V. L, Tolchennikov A. A. Asymptotic estimate for the counting problems corresponding to the dynamical system on some decorated graphs. Ergodic Theory and Dynamical Systems. Cambridge University Press. 2017. pp 1-12. doi:10.1017/etds.2016.102.

[2] Chernyshev V. L., Shafarevich A. I., Statistics of gaussian packets on metric and decorated graphs, Philosophical transactions of the Royal Society A., Volume: 372, Issue: 2007, Article number: 20130145, 2014. DOI: 10.1098/rsta.2013.0145.

[3] Chernyshev V. L., Tolchennikov A. A., Correction to the leading term of asymptotics in the problem of counting the number of points moving on a metric tree, Russian Journal of Mathematical Physics Volume 24, Issue 3, 2017, pp 290–298

[4] Chernyshev V. L., Tolchennikov A. A., How the permutation of edges of a metric graph affects the number of points moving along the edges / Working papers by Series math-ph "arxiv.org"./2014/10. No.1410.5015. http://arxiv.org, 2014. – 12 P.

[5] Чернышев В. Л. Нестационарное уравнение Шрёдингера: статистика распространения гауссовых пакетов на геометрическом графе. Труды Математического Института имени В. А. Стеклова. – 2010. – Т. 270. С. 249–265.

[6] Chernyshev V. L., Tolchennikov A. A., Shafarevich A. I., Behavior of Quasi-particles on Hybrid Spaces. Relations to the Geometry of Geodesics and to the Problems of Analytic Number Theory, Regular and Chaotic Dynamics, vol. 21, no. 5, 2016. pp. 531–537. DOI:10.1134/S156035471605004X.

[7] Chernyshev V. L., Tolchennikov A.A. The properties of the distribution of Gaussian packets on a spatial network, electronic journal “Science and Education”, No 10, 2011. arXiv:1111.3945 [math-ph]

[8] Spencer D. C., The Lattice Points of Tetrahedra, Journal of Mathematics and Physics, 21, 1942. doi: 10.1002/sapm1942211189.

[9] Lehmer, D. H. The lattice points of an n–dimensional tetrahedron. Duke Math. J. 7, no. 1, 341–353. , 1940. doi:10.1215/S0012-7094-40-00719-0.

[10] Barnes, E. W., On the theory of the multiple gamma function, Trans. Cambridge Philos. Soc., 19, 1904. 374–425.

[11] Barvinok A., Integer points in polyhedra. European Mathematical Society, 2008. 199 pages.

[12] Carlitz L., Note on Nørlund’s Polynomial $B_n^{(z)}$, Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 11, No. 3, 1960. pp. 452-455.

[13] Beck M., Bayad A., Relations for Bernoulli–Barnes numbers and Barnes zeta functions, International Journal of Number Theory 10 (2014), 1321-1335.