# MAT244
# Aplicaciones de la Matemática en la Ingeniería

Sebastián Flores

22 de septiembre de 2014

### Unidad 1 Clase 2 Adimensionalización

¿Por qué esta clase?

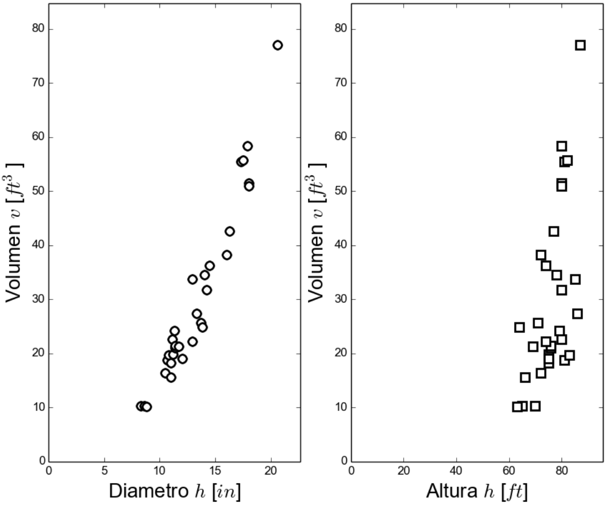
- Porque un ingeniero busca lo simple dentro de lo complejo.

## Motivación

Consideremos el conjunto de datos clásico “cherry tree dataset”: donde se cuenta con la altura (en pies), el volumen (en pies cúbicos) y el diámetro (en pulgadas) de 31 árboles de una misma especie.

# Análisis Dimensional

## Motivación



## Motivación

¿Que tipo de relación deberíamos buscar entre las variables $v$, $h$ y $d$?

- ¿$v = c_0 + c_1 h_1 + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 d + c_5 d^2 + c_6 d^3$?
- ¿$v = c_0 h d^2$?
- ¿$v = c_0 h^2 d$?
- ¿$v = c_0 \sqrt{h^3 d^3}$?
- ¿$v = c_0 + c_1 h^3 + c_2 d^3$?
- ¿$v = c_0 d^3 h^0 + c_{1/2} d^{5/2} h^{1/2} + ... + c_{5/2} d^{1/2} h^{5/2} + c_3 d^0 h^3$?

## Definición

Análisis Dimensional (Dimensional Analisis, DA) es una forma de simplificar un modelo físico utilizando la necesidad de homogeneidad dimensional para disminuir el número de variables.

## Razones

El Análisis Dimensional permite:

- Presentar e interpretar datos experimentales.
- Analizar problemas que no admiten solución teórica directa.
- Chequear de ecuaciones.
- Establecer la importancia relativa de distintos componentes de un fenómeno físico.
- Diseñar de experimentos de laboratorio o numéricos.

- Dimensión: tipo de cantidad física.
- Unidad: es la forma de asignar valor numérico a una cantidad.

Existen 7 dimensiones fundamentales, cuyas unidades básicas son definidas por el SI (Sistema Internacional de Unidades):

- $L$ Longitud. Unidad: metro, [m].
- $M$ Masa. Unidad: kilogramo, [kg].
- $T$ Tiempo. Unidad: segundo, [s].
- $\Theta$ Temperatura. Unidad: Kelvin, [K].
- $I$ Intensidad de Corriente Eléctrica. Unidad: Amperio, [A].
- $\mu$ Cantidad de Sustancia. Unidad: Mol, [mol].
- $Iv$ Intensidad Luminosa. Unidad: Candela, [cd].

| Variable | Símbolo | $M\ L\ T\ \Theta$ | $F\ L\ T\ \Theta$ |
|---|---|---|---|
| Largo | $L$ | $L$ | $L$ |
| Tiempo | $T$ | $T$ | $T$ |
| Temperatura | $\Theta$ | $\Theta$ | $\Theta$ |
| Masa | $M$ | $M$ | $F\ L^{-1}\ T^2$ |
| Fuerza | $F$ | $M\ L\ T^{-2}$ | $F$ |
| Velocidad | $V$ | $L\ T^{-1}$ | $L\ T^{-1}$ |
| Aceleración | $A$ | $L\ T^{-2}$ | $L\ T^{-2}$ |
| Momento | $M$ | $M\ L^2\ T^{-2}$ | $F\ L$ |
| Energía | $E$ | $M\ L^2\ T^{-2}$ | $F\ L$ |
| Presión | $p$ | $ML^2T^{-2}$ | $F\ L^{-2}$ |
| Flujo Volumen | $Q$ | $L^3\ T^{-1}$ | $L^3\ T^{-1}$ |
| Flujo Masa | $\dot{m}$ | $M\ T^{-1}$ | $F\ L\ T$ |

# Teorema Π

## Teorema Π o Teorema Buckingham

Sean $q_1$, $q_2$, .., $q_n$ $n$ variables dimensionales que son físicamente relevantes a un problema, y que se relacionan mediante una ecuación:

$$F(q_1, q_2, .., q_n) = 0$$

Si $k$ es el número de dimensiones fundamentales requeridas para describir las $n$ variables, habrán entonces $k$ variables fundamentales y las restantes $n - k$ variables pueden representarse de manera adimensional en grupos $\Pi_1$, $\Pi_1$, ..., $\Pi_{n-k}$.
La relación funcional entre las variables puede por tanto reducirse a:

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, .., \Pi_{n-k}) = 0$$

## Teorema Π, versión reducida

Si un problema requiere

- n variables dimensionales
- k dimensiones independientes

Entonces puede reducirse a una relación entre $n - k$ parámetros no dimensionales $\Pi_1$, $\Pi_1$, ..., $\Pi_{n-k}$.

Para construir estos parámetros no-dimensionales:

1. Elegir $k$ variables dimensionalmente distintas (scaling variables): $s_1$, ..., $s_k$.
2. Para cada una de las restantes $n - k$ variables $v_i$ construir una variable adimensional $\Pi_i$ de la forma

$$\Pi_i = v_i (s_1)^{l_1} (s_2)^{l_2} ... (s_k)^{l_k}$$

   donde $l_1$, $l_2$, ... $l_k$ se eligen para hacer cada $\Pi_i$ adimensional.

- La elección de las variables “base” $s_i$ no es única.
- El teorema permite determinar cuales serán los parámetros adimensionales, a pesar que la ecuación sea todavía desconocida.

# Ejemplo 1

## Ejemplo 1: Cherry Tree dataset

Volumen $v$, diámetro $d$ y altura $h$ tienen dimensiones de largo.

- Se tienen 3 variables y 1 dimensión, por lo que se tendrán $3 - 1 = 2$ variables adimensionales.
- Utilizaremos $h$ como la variable base de escalamiento.
- Para que $\Pi_1 = vh^x$ sea adimensional, $x = -3$. Por tanto $\Pi_1 = \frac{v}{h^3}$.
- Para que $\Pi_2 = dh^x$ sea adimensional, $x = -1$. Por tanto $\Pi_2 = \frac{d}{h}$.
- El teorema de Buckingham permite por tanto establecer la siguiente relación:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2), \text{ esto es, } \frac{v}{h^3} = f\left(\frac{d}{h}\right)$$

# Ejemplo 1

El teorema de Buckingham establece la siguiente relación:

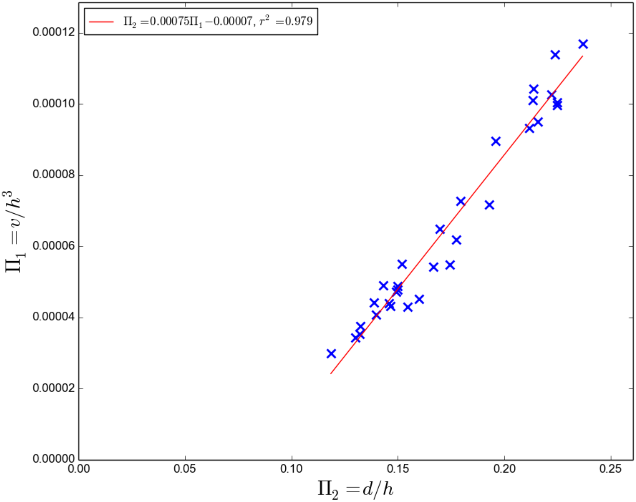
$$\Pi_1 = f(\Pi_2), \text{ esto es, } \frac{v}{h^3} = f\left(\frac{d}{h}\right)$$

Pero nada más. Si suponemos que la relación es lineal,

$$\Pi_1 = m\Pi_2 + b, \text{ esto es, } \frac{v}{h^3} = m\frac{d}{h} + b$$

Podemos realizar una regresión lineal y obtener los coeficientes $m$ y $b$.

# Ejemplo 1


$\Pi_2 = 0.00075\Pi_1 - 0.00007$, $r^2 = 0.979$
0.00000
0.00002
0.00004
0.00006
0.00008
0.00010
0.00012
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
$\Pi_1 = v/h^3$
$\Pi_2 = d/h$

# Ejemplo 1

¿Es lo mejor que podemos hacer?
Si suponemos que la relación es una potencia,

$$\Pi_1 = k(\Pi_2)^n, \text{ esto es, } \frac{v}{h^3} = k\left(\frac{d}{h}\right)^n$$

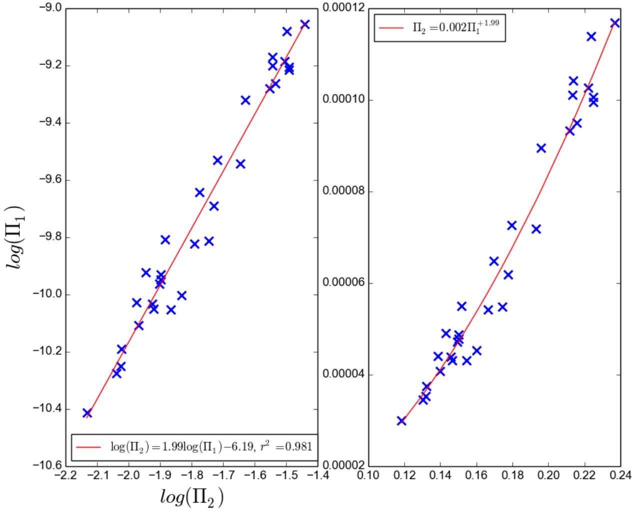
Podemos aplicar logaritmo a ambos lados,

$$\log \Pi_1 = \log k + n \log \Pi_2 = b + n \log \Pi_2$$

y realizar una regresión lineal y obtener los coeficientes $n$ y $b = \log k$.

# Teorema Π

## Ejemplo 1



# Ejemplo 1

Nuestro análisis parece indicar que

$$\Pi_1 = k(\Pi_2)^2$$

es decir, que

$$\frac{v}{h^3} = k\frac{d^2}{h^2}$$

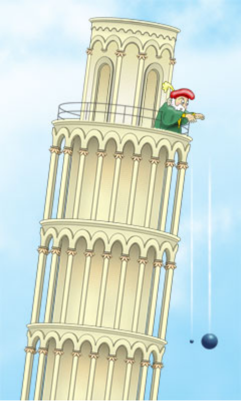
por lo que se tiene

$$v = kd^2h$$

lo cual a posteriori parece bastante lógico.

## Ejemplo 2

Consideremos el caso de la caída libre de un objeto.



### Ejemplo 2

¿Cuales son las variables físicas involucradas?

- Masa del objeto: $m$
- Altura de la caída: $h$
- Tiempo de caída: $t$
- Constante de gravedad: $g$

Dimensiones

- $[m]$: $M$
- $[h]$: $L$
- $[t]$: $T$
- $[g]$: $L/T^2$

La masa no puede relacionarse con las otras variables, pues no sería posible adimensionalizarla.

- 3 variables: $h$, $t$, $g$
- 2 dimensiones: $L$ y $T$
- 2 variables escalamiento: $g$, $t$
- 3-1 variables adimensionales:
  $\Pi_1$ basado en la adimensionalización de $h$.

Variables adimensionales:

$$\Pi_1 = hg^x t^y$$

$$[\Pi_1] = [h][g]^x[t]^y = L\ \left(\frac{L}{T^2}\right)^x\ T^y$$

$$= L^{1+x}T^{-2x+y} = L^0T^0$$

Por tanto se tiene para las incógnitas el sistema

$$1 + x = 0$$

$$-2x + y = 0$$

Se obtiene: $x = -1$ e $y = -2$, con lo cual $\Pi_1 = hg^{-1}t^{-2} = \frac{h}{gt^2}$.

# Teorema $\Pi$

## Ejemplo 2

El teorema de Buckingham nos dice que existe por tanto una relación del tipo:

$$\Phi(\Pi_1) = 0$$

es decir, $\Pi_1$ debe ser una constante:

$$\Pi_1 = \frac{h}{gt^2} = c$$

Es posible establecer las siguientes relaciones:

$$h = c\,gt^2$$

$$g = \frac{1}{c}\frac{t^2}{h}$$

$$t = \sqrt{\frac{1}{c}\frac{h}{g}}$$

# Ejemplo 3

## Distancia de detención

### Ejemplo 3

Consideremos la distacia de detención de un vehículo.

## Ejemplo 3

Consideremos la distacia de detención de un vehículo.
¿Cuales son las variables físicas involucradas?

- Distancia de detención: $d$
- Velocidad del vehículo: $v$
- Masa del vehículo: $m$
- Tiempo de reacción: $t$
- Fuerza de frenado: $f$
- Coeficiente fricción de frenos: $\mu$

Dimensiones

- $[d]$: $L$
- $[v]$: $L/T$
- $[m]$: $M$
- $[t]$: $T$
- $[f]$: $ML/T^2$
- $[\mu]$: 1

El coeficiente de fricción ya es adimensional y participa en la relación entre las variables.

- 6 variables: $d$, $v$, $m$, $t$, $f$, $\mu$.
- 3 dimensiones: $L$, $T$, $M$.
- 3 variables escalamiento: $m$, $t$, $v$.
- 6-3 variables adimensionales.

Variable adimensional asignada a $d$:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= d\ m^x t^y v^z \\
[\Pi_1] &= [d][m]^x[t]^y[v]^z = L\, M^x\ T^y\ \left(\frac{L}{T}\right)^z \\
&= M^x L^{1+z} T^{y-z} = M^0 L^0 T^0
\end{aligned}
$$

Por tanto se tiene para las incógnitas el sistema

$$
\begin{aligned}
x &= 0 \\
1 + z &= 0 \\
y - z &= 0
\end{aligned}
$$

Se obtiene: $x = 0$ e $y = z = -1$, con lo cual $\Pi_1 = \frac{d}{vt}$.

# Teorema Π

## Ejemplo 3

Variable adimensional asignada a $f$:

$$
\begin{aligned}
\Pi_2 &= f\ m^x t^y v^z \\
[\Pi_2] &= [f][m]^x[t]^y[v]^z = \left(M\frac{L}{T^2}\right)\ M^x\ T^y\ \left(\frac{L}{T}\right)^z \\
&= M^{1+x}L^{1+z}T^{y-z-2} = M^0L^0T^0
\end{aligned}
$$

Por tanto se tiene para las incógnitas el sistema

$$
\begin{aligned}
1 + x &= 0 \\
1 + z &= 0 \\
y - z - 2 &= 0
\end{aligned}
$$

Se obtiene: $x = -1$, $y = 1$ y $z = -1$, con lo cual $\Pi_2 = \frac{f\ t}{mv}$.

# Teorema $\Pi$

## Ejemplo 3

Variable adimensional asignada a $\mu$:

$$\Pi_3 = \mu m^x t^y v^z$$

$$[\Pi_3] = [\mu][m]^x[t]^y[v]^z = 1 \; M^x \; T^y \; \left(\frac{L}{T}\right)^z$$

$$= M^x L^z T^{y-z} = M^0 L^0 T^0$$

Por tanto se tiene para las incógnitas el sistema

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

Se obtiene: $x = y = z = 0$, con lo cual $\Pi_3 = \mu$.

# Teorema $\Pi$

## Ejemplo 3

El teorema de Buckingham nos dice que existe por tanto una relación del tipo:

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0$$

es decir, $\Pi_1$ es función de los otros 2 parámetros adimensionales:

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3)$$

Volviendo a las variables dimensionales, se tiene

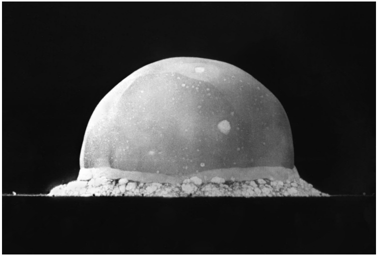
$$\frac{d}{vt} = \phi\left(\frac{f\ t}{mv}, \mu\right)$$

Por tanto

$$d = vt\phi\left(\frac{f\ t}{mv}, \mu\right)$$

## Ejemplo 4

Consideremos la explosión de una bomba atómica.



## Ejemplo 4

¿Cuales son las variables físicas involucradas?

- Energía de la Bomba: $E$
- Radio de la explosión: $r$
- Tiempo : $t$
- Densidad del medio: $\rho$

Dimensiones

- $[E]$: $ML^2/T^2$
- $[r]$: $L$
- $[t]$: $T$
- $[\rho]$: $M/L^3$

Necesitamos la densidad pues de otra forma no podemos adimensionalizar la energía.

- 4 variables: $E$, $r$, $t$ y $\rho$
- 3 dimensiones: $M$, $L$ y $T$
- 3 variables escalamiento: $r$, $t$, $\rho$
- 4-3 = 1 variable adimensional basada en $E$.

Variable adimensional basada en $E$:

$$\Pi_1 = E\, r^x t^y \rho^z$$

$$[\Pi_1] = [E]\,[r]^x[t]^y[\rho]^z = \left(M\frac{L^2}{T^2}\right)\, L^x\; T^y\; \left(\frac{M}{L^3}\right)^z$$

$$= M^{1+z}L^{2+x-3z}T^{-2+y} = M^0L^0T^0$$

Por tanto se tiene para las incógnitas el sistema

$$\begin{aligned} 1+z &= 0 \\ 2+x-3z &= 0 \\ -2+y &= 0 \end{aligned}$$

Se obtiene: $x=-5$, $y=2$ y $z=-1$, con lo cual $\Pi_1 = \frac{Et^2}{r^5\rho}$.

# Teorema $\Pi$

## Ejemplo 4

El teorema de Buckingham nos dice que existe por tanto una relación del tipo:

$$\Phi(\Pi_1) = 0$$

es decir, $\Pi_1$ debe ser una constante:

$$\Pi_1 = \frac{Et^2}{r^5\rho} = c$$

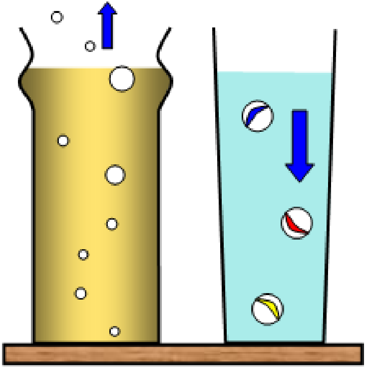
Por tanto

$$E = c_E \frac{r^5\rho}{t^2}$$

$$r = c_r \left(\frac{Et^2}{\rho}\right)^{1/5}$$

## Ejemplo 5

Consideremos la velocidad terminal de una partícula en un fluido.



## Ejemplo 5

Consideremos la velocidad terminal de una partícula en un fluido. ¿Cuales son las variables físicas involucradas?

- Velocidad terminal de la partícula: $v$
- Radio de la partícula: $r$
- Densidad de la partícula: $\rho_p$
- Densidad del fluido: $\rho_f$
- Viscosidad del fluído : $\mu_f$
- Constante de gravedad: $g$

Dimensiones

- $[v]$: $L/T$
- $[r]$: $L$
- $[\rho_p]$: $M/L^3$
- $[\rho_f]$: $M/L^3$
- $[\mu_f]$: $M/LT$
- $[g]$: $L/T^2$

- 6 variables: $v$, $r$, $\rho_p$, $\rho_f$, $\mu_f$, $g$.
- 3 dimensiones: $L$, $T$, $M$.
- 3 variables escalamiento: $r$, $g$, $\mu_f$.
- $6 - 3 = 3$ variables adimensionales.

# Teorema $\Pi$

## Ejemplo 5

Variable adimensional asignada $v$:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= v\ r^x g^y \mu^z \\ [\Pi_1] &= [v][r]^x[g]^y[\mu_f]^z = \frac{L}{T}\, L^x \left(\frac{L}{T^2}\right)^y \left(\frac{M}{LT}\right)^z \\ &= M^z L^{1+x+y-z} T^{-1-2y-z} = M^0 L^0 T^0 \end{aligned}$$

Por tanto se tiene para las incógnitas el sistema

$$\begin{aligned} 1 + x + y - z &= 0 \\ -1 - 2y - z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Se obtiene: $x = y = -1/2$ y $z = 0$, con lo cual $\Pi_1 = \frac{v}{\sqrt{rg}}$.

Variable adimensional asignada a $\rho_p$:

$$
\begin{aligned}
\Pi_2 &= \rho_p\, r^x g^y \mu^z \\
[\Pi_2] &= [\rho_p][r]^x[g]^y[\mu_f]^z = \frac{M}{L^3}\, L^x \left(\frac{L}{T^2}\right)^y \left(\frac{M}{LT}\right)^z \\
&= M^{1+z} L^{-3+x+y-z} T^{-2y-z} = M^0 L^0 T^0
\end{aligned}
$$

Por tanto se tiene para las incógnitas el sistema

$$
\begin{aligned}
-3 + x + y - z &= 0 \\
-2y - z &= 0 \\
1 + z &= 0
\end{aligned}
$$

Se obtiene: $x = 3/2$, $y = -1/2$ y $z = -1$, con lo cual $\Pi_2 = \frac{\rho_p r \sqrt{rg}}{\mu_f}$.

Variable adimensional asignada a $\rho_f$:

$$
\begin{aligned}
\Pi_3 &= \rho_f \; r^x g^y \mu^z \\
[\Pi_3] &= [\rho_f][r]^x[g]^y[\mu_f]^z = \frac{M}{L^3}\; L^x \; \left(\frac{L}{T^2}\right)^y \; \left(\frac{M}{LT}\right)^z \\
&= M^{1+z} L^{-3+x+y-z} T^{-2y-z} = M^0 L^0 T^0
\end{aligned}
$$

Por tanto se tiene para las incógnitas el sistema

$$
\begin{aligned}
-3 + x + y - z &= 0 \\
-2y - z &= 0 \\
1 + z &= 0
\end{aligned}
$$

Se obtiene: $x = 3/2$, $y = -1/2$ y $z = -1$, con lo cual $\Pi_3 = \frac{\rho_f r \sqrt{rg}}{\mu_f}$.

El teorema de Buckingham nos dice que existe por tanto una relación del tipo:

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0$$

es decir, $\Pi_1$ es función de los otros 2 parámetros adimensionales:

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3)$$

Volviendo a las variables dimensionales, se tiene

$$\frac{v}{\sqrt{rg}} = \phi\left(\frac{\rho_p r\sqrt{rg}}{\mu_f}, \frac{\rho_f r\sqrt{rg}}{\mu_f}\right)$$

La función correcta es $\phi(\Pi_2, \Pi_3) = \frac{2}{9}(\Pi_2 - \Pi_3)$ y la relación correcta es

$$v = \frac{2}{9}\frac{(\rho_p - \rho_f)gr^2}{\mu_f}$$

Esta relación es conocida como la ley de Stokes

$$v = \frac{2}{9}\frac{(\rho_p - \rho_f)gr^2}{\mu_f}$$

Expresado de otra forma, esto es:

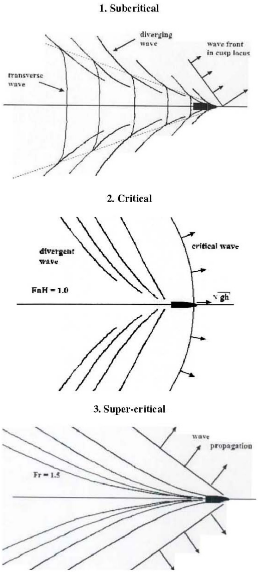
$$\mu = \frac{2}{9}\frac{(\rho_p - \rho_f)gr^2}{v}$$

Significa que podemos medir la viscosidad del fluido a través de un simple experimento.
Ejemplo: `https://www.youtube.com/watch?v=977wNbFiYlc`

- $Fr = \Pi_1 = \frac{v}{\sqrt{rg}}$: Número de Froude.
  Para $Fr << 1$ el flujo es subcrítico, y para $Fr >> 1$ el flujo es supercrítico.
- $Re = \frac{\Pi_3}{\Pi_1} = \frac{\rho_f v r}{\mu_f}$: Número de Reynolds.
  Para $Re << 1$ el flujo es laminar, y para $Re >> 1$ el flujo se vuelve turbulento.

OBS: Cualquier producto de variables adimensionales sigue siendo adimensional.

# Numero de Froude



# Numero de Reynolds