

单球驱动机器人 Ballbot 的建模与控制研究

Modeling and Control Design for A Ballbot

周爱国 洪 佳

(同济大学 机械与能源工程学院, 上海 201804)

摘 要: 动态平衡机器人相对静态的轮式机器人更易于与人类环境实现交流, 并具有更好的稳定性。针对能在地面任意方向运动且无转弯半径的单球驱动机器人, 简要设计出其机械结构, 根据拉格朗日方程推导出其完整的动力学模型。通过对机器人动力学模型线性化, 并分解为独立的 3 个状态方程, 设计带有比例积分控制器和线性二次最优控制器的多环控制方法。运用 Simulink 仿真模块进行仿真, 证明了控制策略可以实现机器人的稳定控制和轨迹跟踪控制, 并表现出较好的响应特性和稳健性。

关键词: 单球驱动机器人 跟踪控制 数学建模 拉格朗日方程

DOI: 10.3969/j.issn.1007-080x.2012.11.001

Abstract: Compared to statically-stable mobile robots, dynamic balance robot can be easier to communicate with the human environment, and has better stability. This paper designed the mechanical structure of the ballbot, which can move in any direction with zero turning radius, deduced its complete dynamic model based on the Lagrange equation. By linearizing the mathematical model, and decoupling it into three independent state equations, designed a two-loop controller. With simulation based on Simulink, the controller can make the robot stable and traceable for target, and showed a good response characteristics and robustness.

Key words: ballbot trace control mathematical model Lagrange's equations

0 引言

对于静态稳定的多轮驱动移动机器人, 它们有一个很明显并且经常被忽视的问题: 很容易在动力学上不稳定。如果机器人的重心很高, 或者快速地加速、减速, 或者在一个斜面上运行, 机器人可能会倾覆。机器人必须足够高才能同人类及其环境进行相互交流。另外机器人必须足够瘦长才能避免在人的环境中发生碰撞, 以便行动自如。为了使机器人具有抵抗倾覆的性能, 赋予机器人动态平衡的能力成为人们研究的热点。文献[1]设计出了一种可动态平衡的单球机器人。这

种机器人采用类似鼠标球的驱动结构, 它不仅像双轮自平衡小车那样可以保持动态平衡, 而且可以直接向任何一个方向运动, 且真正实现零转弯半径; 但机器人上体由于结构原因并不能实现自由转动。文献[2]针对单球驱动机器人运用牛顿欧拉法建立了机器人动力学模型, 并进行了滑模控制算法仿真。文献[3]巧妙地运用万向轮重新设计了一种结构更加简洁的单球驱动机器人。作为三维多自由度机器人, 其传感器仅采用二维加速度传感器和陀螺仪; 控制方法上在没有建立机器人整体动力学模型的基础上, 主要采用比例积分

作者简介: 周爱国 1973 年生, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为机器人动力学建模、嵌入式控制系统和气动控制技术。
洪 佳 1988 年生, 硕士研究生。研究方向为机器人动力学建模。

控制器。这都导致其控制效果有待改进,运动方向不准确。本文所设计的单球驱动机器人结构简洁,采用三维惯性测量单元(inertial measurement unit, IMU)作为机器人传感器,运用拉格朗日法建立了完整的机器人动力学模型,根据该模型设计出稳健的控制器,通过仿真验证了对机器人控制的准确和稳健性。

1 单球驱动机器人结构设计

如图1所示,机器人主要由直立杆、圆球和驱动系统三部分组成。其中直立杆中装有惯性测量单元 MPU-6050、微控制器、电池和电机驱动器。驱动系统包含微电机和万向轮。MPU-6050 为 InvenSense 公司生产的高精度 IMU,集成有 3 轴 MEMS 陀螺仪和 3 轴加速度计,通过它可以测出直立杆的各方向上的角速度和加速度,从而推导出圆球的位置及整个机器人的姿态。由微电机驱动的万向轮在水平面投影中各成

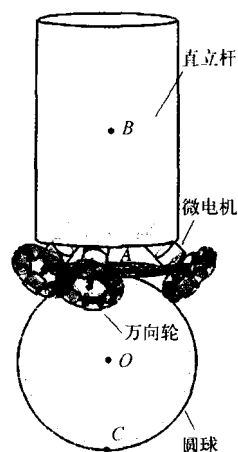


图1 Ballbot 结构示意图

120°角分部,轴向与竖直方向成 45°,万向轮中心、圆球中心以及它们的接触点共线。万向轮包含有圆周小轮和轮盘,圆周小轮通过微型球轴承和微轴连接到轮盘上并可以实现近似无摩擦的自由转动,故而万向轮在转动时仍然可以沿其轴向自由运动。微控制器在通过 IMU 检查到机器人的姿态后结合给予机器人的运动命令,通过微电机驱动万向轮作相应动作,使得机器人保持动态平衡并跟踪命令运动。

2 单球驱动机器人的动力学模型建立

首先定义惯性参考坐标系 $OXYZ(\{0\})$,如图2所示。原点位于球心 O , Z 轴与重力方向相反, XY 平面与水平面平行,坐标系符合右手定则。

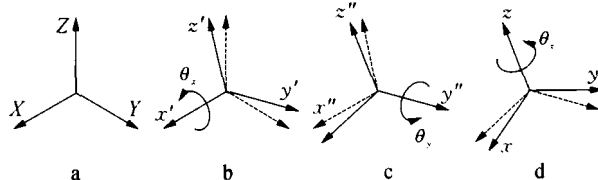


图2 单球驱动机器人自由度示意图

根据欧拉角,机器人上体分别绕转动后的动坐标系 X 轴, y' 轴, z'' 轴转动后得到新的坐标系 $Oxyz$ 。考虑到球体绕竖直轴旋转的摩擦较大,忽略球体绕 z 轴的转动。由欧拉角转换矩阵,球体坐标系 $\{1\}$ 和直立杆坐标系 $\{2\}$ 相对于惯性坐标系 $\{0\}$ 的旋转矩阵分别为

$${}^0R_1 = R_x(\theta_x)R_y(\theta_y)R_z(0) = \begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y \\ s\theta_x s\theta_y & c\theta_x & -c\theta_y s\theta_x \\ -c\theta_x s\theta_y & s\theta_x & c\theta_x c\theta_y \end{bmatrix}; \quad (1)$$

$${}^0R_2 = R_x(\phi_x)R_y(\phi_y)R_z(\phi_z) = \begin{bmatrix} c\phi_y c\phi_z & -c\phi_y s\phi_z & s\phi_y \\ c\phi_z s\phi_x s\phi_y + c\phi_x s\phi_z & c\phi_x c\phi_z - s\phi_x s\phi_y s\phi_z & -c\phi_y s\phi_x \\ s\phi_x s\phi_z - c\phi_x c\phi_z s\phi_y & c\phi_z s\phi_x + c\phi_x s\phi_y s\phi_z & c\phi_x c\phi_y \end{bmatrix}. \quad (2)$$

式中, c 和 s 分别代表余弦和正弦函数(下同)。

A 点的位置向量与速度向量可表示为

$$\mathbf{r}_A = {}^0R_1(0 \ 0 \ r)^T = [rs\theta_y \ -rs\theta_x c\theta_y \ rc\theta_x c\theta_y]^T; \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = [rs\dot{\theta}_y \ -rs\dot{\theta}_x c\theta_y + rc\theta_x \dot{\theta}_y \ rc\dot{\theta}_x c\theta_y]^T. \quad (4)$$

由参考文献[4]

$$S(\omega_b) = {}^0\dot{R}_1 \cdot {}^0R_1^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{bx} & \omega_{by} \\ \omega_{bx} & 0 & -\omega_{bz} \\ -\omega_{by} & \omega_{bz} & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

可得圆球和直立杆转速分别为

$$\omega_b = [\theta'_x \quad \theta'_y c \theta'_x \quad \theta'_y s \theta'_x]^T \quad (6)$$

$$\omega_B = [\phi'_x + s \phi_y \phi'_z \quad c \phi_x \phi'_y - s \phi_x c \phi_y \phi'_z \quad c \phi_x c \phi_y \phi'_z + s \phi_x \phi'_y]^T。$$

因此,球心 O 的速度为

$$v_o = \omega_b \times r_o = [rc \theta'_x \theta'_y \quad -r \theta'_x \quad 0]^T。$$

其中, $r_o = rk$ 为球心 O 相对于圆球与地面接触点 C 点的位置向量。

参考图 1, 设 l 为直立杆质心 B 到球心 O 的距离, 则 OB 位置向量为

$$r_{OB} = {}^0R_2^2 r_{OB} = (ls \phi_y \quad -ls \phi_x c \phi_y \quad lc \phi_x c \phi_y)^T;$$

整体直立杆的质心 B 点的速度为

$$v_B = v_o + \omega_B \times r_{OB};$$

各万向轮绕其中心轴的相对角速度向量(以坐标系 $\{2\}$ 表示)为

$${}^2\dot{\varphi}_i = \dot{\varphi}_i^2 A_i, i = 1, 2, 3。$$

其中, $\dot{\varphi}_i (i = 1, 2, 3)$ 为各万向轮绕其转轴的角速度, A_i 为各万向轮的轴向单位向量。

各万向轮与圆球相切点相对于其转轴中心点的位置单位向量分别为

$$\begin{aligned} {}^2r_{R1} &= r_R [-1/\sqrt{2} \quad 0 \quad -1/\sqrt{2}]^T; \\ {}^2r_{R2} &= r_R [\sqrt{2}/4 \quad -\sqrt{6}/4 \quad -1/\sqrt{2}]^T; \\ {}^2r_{R3} &= r_R [\sqrt{2}/4 \quad \sqrt{6}/4 \quad -1/\sqrt{2}]^T。 \end{aligned}$$

其中, r_R 为万向轮半径。

因圆球与地面接触点 C 的位置向量为

$$r_c = (0 \quad 0 \quad -r)^T,$$

故各万向轮中心点相对坐标原点 O 的位置向量为

$$r_{ic} = {}^0R_2^2 r_{ic}, i = 1, 2, 3;$$

各万向轮与圆球相切点相对于坐标原点 O 的位置为

$$r_{i'} = {}^0R_2^2 r_{i'}, i = 1, 2, 3。$$

其中, ${}^2r_{ic}$ 、 ${}^2r_{i'}$ 分别为各万向轮中心点以及万向轮与圆

球相切点相对直立杆坐标系统 $\{2\}$ 的位置向量。

由以上 3 式可得各万向轮中心点相对于瞬时转动中心 C 点的位置向量分别为

$$r_{i'/C} = {}^0R_2^2 r_{i'} + r_o, i = 1, 2, 3。$$

设各万向轮与圆球的直立杆侧接触点 $1', 2', 3'$, 由于直立杆绕球心 O 点转动所造成的速度向量为

$$v_{i'}^{BR} = \omega_B \times r_{i'}, i = 1, 2, 3,$$

因此,在直立杆这边,各万向轮与圆球的直立杆侧接触点 $1', 2', 3'$ 的绝对速度向量为

$$v_{i'}^B = v_{i'}^{BR} + {}^0R_i^2 (\dot{\varphi}_i \times {}^2r_{Ri}) + v_o, i = 1, 2, 3;$$

万向轮接触点速度方向在 $\{0\}$ 中的单位向量为

$$A_{vi} = {}^0R_2^2 A_{vi}, i = 1, 2, 3;$$

各万向轮与圆球的直立杆侧接触点 $1', 2', 3'$ 的绝对速度向量的切向速度为

$${}^0v_{i'}^B = v_{i'}^{B2} A_{vi}, i = 1, 2, 3。$$

由圆球这边来看,各万向轮与圆球的接触点 $1', 2', 3'$ (圆球侧)的绝对速度向量为

$$v_{i'}^b = \omega_b \times r_{i'/C}, i = 1, 2, 3。$$

由于单球驱动机器人采用万向轮进行驱动,万向轮的圆周小轮可自由转动,但在各万向轮与圆球的接触点上;圆球和直立杆侧的速度在切向方向上的投影相等(假设无切向滑动)。可建立方程组

$$v_{i'}^B A_{vi} = v_{i'}^b A_{vi}, i = 1, 2, 3。 \quad (7)$$

解方程组,可得各万向轮的转速为

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= -r[\theta'_x(c \phi_y c \phi_z - s \phi_y) + (s \phi_y - c \phi_y c \phi_z)\phi'_x - \\ &\quad s \phi_z \phi'_y + \phi'_z + \theta'_y[s(\phi_x - \theta_x)c(s \phi_y c \phi_z + c \phi_y) + \\ &\quad c(\phi_x - \theta_x)s \phi_z]]/(\sqrt{2}r_R); \\ \dot{\varphi}_2 &= r[\theta'_x[c \phi_y s(\phi_z + \pi/6) + s \phi_y] - [c \phi_y s(\phi_z + \pi/6) + \\ &\quad s \phi_y]\phi'_x + \theta'_y[s(\phi_x - \theta_x)(s \phi_y s(\phi_z + \pi/6) - c \phi_y) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c(\theta_x - \phi_x)s(\phi_z - \pi/3)] - s(\phi_z - \pi/3)\phi'_y - \\ & \phi'_z\} / (\sqrt{2}r_R) \\ \dot{\phi}_3 = & r\{\theta'_x[c\phi_y s(\pi/6 - \phi_z) + s\phi_y] + [c\phi_y s(\phi_z - \pi/6) - \\ & s\phi_y]\phi'_x + \theta'_y[s(\theta_x - \phi_x)c\phi_z(s\phi_y s(\phi_z - \pi/6) + \\ & c\phi_y) + c(\theta_x - \phi_x)s(\phi_z + \pi/3)] - \\ & s(\phi_z + \pi/3)\phi'_y - \phi'_z\} / (\sqrt{2}r_R)。 \end{aligned} \quad (8)$$

拉格朗日方程式中的广义力矩 $\tau_j (j = 1, 2, 3, 4,$

5) 可由下式推导:

$$\tau_i = \mathbf{B}(q)\tau_{mj} = \sum_{j=1}^3 \tau_{mj} \frac{\partial \dot{\phi}_j}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (9)$$

其中, $\tau_{mj} (j = 1, 2, 3)$ 为 3 个马达的驱动力矩; $\mathbf{q} = [\phi_x \ \phi_y \ \phi_z \ \theta_x \ \theta_y]$ 。所以

$$\mathbf{B}(q) = \frac{r}{\sqrt{2}r_R} \begin{bmatrix} c\phi_y c\phi_z - s\phi_y & -c\phi_y s(\phi_z + \pi/6) - s\phi_y & c\phi_y s(\phi_z - \pi/6) - s\phi_y \\ s\phi_z & s(\pi/3 - \phi_z) & -s(\phi_z + \pi/3) \\ -1 & -1 & -1 \\ s\phi_y - c\phi_y c\phi_z & c\phi_y s(\phi_z + \pi/6) + s\phi_y & c\phi_y s(\pi/6 - \phi_z) + s\phi_y \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} \end{bmatrix}; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} B_{51} &= s(\theta_x - \phi_x)(s\phi_y c\phi_z + c\phi_y) - c(\phi_x - \theta_x)s\phi_z; \\ B_{52} &= s(\theta_x - \phi_x)[c\phi_y - s\phi_y s(\phi_z + \pi/6)] + c(\theta_x - \phi_x)s(\phi_z - \pi/3); \\ B_{53} &= s(\phi_x - \theta_x)[s\phi_y s(\pi/6 - \phi_z) - c\phi_y] + c(\theta_x - \phi_x)s(\phi_z + \pi/3)。 \end{aligned}$$

机器人拉格朗日项 L 为

$$\mathbf{M}(q)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(q, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(q) = \mathbf{B}(q)\tau_m。 \quad (12)$$

$$L = K - V = K_b + K_B - (V_b + V_B) + K_{mi}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

其中, $\mathbf{B}(q)$ 如式(10)所示;

$$\mathbf{M}(q) = [m_{ij}(q)]_{4 \times 4} = \mathbf{M}^T(q), \quad (13)$$

其中, $V_b = 0$ 为圆球位能; $V_B = glm_B \cos \phi_x \cos \phi_y$ 为直立杆位能;

$K_b = m_b \mathbf{v}_b^T \mathbf{v}_b / 2 + \omega_b^{T0} \mathbf{R}_1 (2m_b r^2 I_{3 \times 3} / 5)^0 \mathbf{R}_1^T \omega_b / 2$ 为圆球动能;

$K_B = m_B \mathbf{v}_B^T \mathbf{v}_B / 2 + \omega_B^{T0} \mathbf{R}_2 I_B^0 \mathbf{R}_2^T \omega_B / 2$ 为直立杆动能, 其中 $\mathbf{v}_{ic} = \omega_B \times \mathbf{r}_{ic} + \mathbf{v}_O$, $i = 1, 2, 3$ 为各万向轮中心的速度, 内部所有构件的直立杆惯性张量为

$$\mathbf{I}_B = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}。$$

由拉格朗日方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

推导整理, 并将 τ 转化 $\mathbf{B}(q)\tau_m$ (其中), 可得圆球驱动机器人系统的运动方程式为

$$\begin{aligned} m_{11} = & \frac{1}{8r_R^2} \{ c(2\phi_y)[3m_R r_R^2 (r + r_R)^2 - 3r^2 I_R + \\ & 2r_R^2 (I_{xx} + I_{yy} - 2I_{zz})] + 15m_R r^2 r_R^2 + 30m_R r r_R^3 + \\ & 15m_R r_R^4 + 9r^2 I_R + r_R^2 (I_{xx} - I_{yy})c(2\phi_y - 2\phi_z) + \\ & r_R^2 I_{xx} c[2(\phi_y + \phi_z)] + 2r_R^2 I_{xz} c(2\phi_z) - \\ & 2r_R^2 I_{xy} s[2(\phi_y - \phi_z)] + 2r_R^2 I_{xy} s[2(\phi_y + \phi_z)] + \\ & 4r_R^2 I_{xy} s(2\phi_z) - 4r_R^2 I_{xz} s(2\phi_y - \phi_z) - \\ & 4r_R^2 I_{xz} s(2\phi_y + \phi_z) - r_R^2 I_{yy} c[2(\phi_y + \phi_z)] - \\ & 2r_R^2 I_{yy} c(2\phi_z) + 4r_R^2 I_{yz} c(2\phi_y - \phi_z) - \\ & 4r_R^2 I_{yz} c(2\phi_y + \phi_z) + 2r_R^2 I_{xx} + 2r_R^2 I_{yy} + 4r_R^2 I_{zz} \} ; \\ \mathbf{C}(q, \dot{q}) = & [c_1(q, \dot{q}) \quad c_2(q, \dot{q}) \quad c_3(q, \dot{q}) \quad c_4(q, \dot{q}) \quad c_5(q, \dot{q})]^T, \end{aligned} \quad (14)$$

$$c_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{8r_R^2} \{ -2\phi'_x \phi'_y [3m_R r^2 r_R^2 s(2\phi_y) +$$

$$\begin{aligned}
& 6m_R r r_R^3 s(2\phi_y) + 3m_R r_R^4 s(2\phi_y) - \\
& 3r^2 I_R s(2\phi_y) + 2r^2 (I_{xx} - I_{yy}) s(2\phi_y) c^2 \phi_z + \\
& 8r^2 I_{yz} s^2 \phi_y s \phi_z - 4r^2 I_{zz} s(2\phi_y) - \\
& 2r^2 I_{xx} s(2\phi_y) s^2 \phi_z + 2r^2 I_{xx} s(2\phi_y) + \\
& 4r^2 I_{xy} s(2\phi_y) s(2\phi_z) + 2r^2 I_{yy} s(2\phi_y) + \\
& 8r^2 c^2 \phi_y (I_{xz} c \phi_z - I_{yz} s \phi_z) - 8r^2 I_{xz} s^2 \phi_y c \phi_z + \\
& 2r^2 I_{yy} s(2\phi_y) s^2 \phi_z + 8\phi_x' \phi_z' r_R^2 [s(2\phi_y) (I_{xz} s \phi_z + \\
& I_{yz} c \phi_z) + c^2 \phi_y ((I_{yy} - I_{xx}) s(2\phi_z) + \\
& 2I_{xy} c(2\phi_z))] + 4\phi_y' \phi_z' c \phi_y [3m_R r^2 r_R^2 + \\
& 6m_R r r_R^3 + 3m_R r_R^4 + 3r^2 I_R + 2r^2 (I_{xx} - \\
& I_{yy}) c(2\phi_z) + 4r^2 I_{xy} s(2\phi_z) + 2r^2 I_{zz}] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8(\phi_z')^2 r_R^2 c \phi_y (I_{xz} s \phi_z + I_{yz} c \phi_z) - \\
& 6r^2 I_R s(2\phi_y) \theta_x' \phi_y' + 4(\phi_y')^2 r_R^2 [s \phi_y ((I_{yy} - \\
& I_{xx}) s(2\phi_z) + 2I_{xy} c(2\phi_z)) - 2\cos \phi_y (I_{xz} s \phi_z + \\
& I_{yz} c \phi_z)] + 3r^2 I_R c^2 \phi_y (\theta_y')^2 s(2(\theta_x - \phi_x)) + \\
& 12r^2 I_R \theta_y' (s^2 \phi_y \phi_y' s(\theta_x - \phi_x) - \\
& c \phi_y \phi_z' c(\theta_x - \phi_x)) \} ;
\end{aligned}$$

$$G(q) = [-glmBs\phi_x c\phi_y - glmBc\phi_x s\phi_y, 0, 0, 0]^T.$$

(15)

3 单球机器人控制器设计

根据单球驱动机器人的拉格朗日方程可以解算出关于 $\phi_x, \phi_y, \phi_z, \theta_x, \theta_y$ 的高度非线性化方程组

$$\begin{cases}
\ddot{\phi}_x = f_1(\phi_x, \phi_y, \phi_z, \theta_x, \theta_y, \dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_z, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y, \tau_{m1}, \tau_{m2}, \tau_{m3}) \\
\ddot{\phi}_y = f_2(\phi_x, \phi_y, \phi_z, \theta_x, \theta_y, \dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_z, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y, \tau_{m1}, \tau_{m2}, \tau_{m3}) \\
\ddot{\phi}_z = f_3(\phi_x, \phi_y, \phi_z, \theta_x, \theta_y, \dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_z, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y, \tau_{m1}, \tau_{m2}, \tau_{m3}) \\
\ddot{\theta}_x = f_4(\phi_x, \phi_y, \phi_z, \theta_x, \theta_y, \dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_z, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y, \tau_{m1}, \tau_{m2}, \tau_{m3}) \\
\ddot{\theta}_y = f_5(\phi_x, \phi_y, \phi_z, \theta_x, \theta_y, \dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_z, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y, \tau_{m1}, \tau_{m2}, \tau_{m3})
\end{cases} \quad (16)$$

定义状态变量 $x = [\phi_x, \phi_y, \phi_z, \theta_x, \theta_y, \dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_z, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y]^T$, 输入为 $u = [\tau_{m1}, \tau_{m2}, \tau_{m3}]^T$. 选取 $X_e = [x^T, u^T]^T = \theta_{13 \times 1}$ 作为机器人线性化的平衡点。对以上高度非线性化的方程进行线性化可得机器人状态微分方程中状态矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{5 \times 5} \\ A^* & 0 \end{bmatrix}_{10 \times 10}, \text{ 输出矩阵为 } B = \begin{bmatrix} \theta_{5 \times 3} \\ B^* \end{bmatrix}_{10 \times 3}.$$

考虑到机器人直立杆具有高度对称性, 可以推出 $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$. 代入状态矩阵和输出矩阵, 并注意发现各式的关系, 可得矩阵元素如下:

$$a_{6,1} = 4glm_B(28m_B r_R^2 + 20m_B r_R^2 + 60m_R r_R^2 + 15I_R)/\vartheta(I_{xx});$$

$$a_{7,2} = 4glm_B(28m_B r_R^2 + 20m_B r_R^2 + 60m_R r_R^2 + 15I_R)/\vartheta(I_{yy});$$

$$a_{9,1} = -60glm_B[2\sqrt{2}m_R r_R^2(1 + r_R/r) - I_R]/\vartheta(I_{xx});$$

$$a_{10,2} = -60glm_B[2\sqrt{2}m_R r_R^2(1 + r_R/r) - I_R]/\vartheta(I_{yy});$$

$$b_{6,2} = b_{6,3} = -b_{6,1}/2 = -4r_R[7\sqrt{2}m_B r + 5\sqrt{2}m_B r +$$

$$15m_R(\sqrt{2}r + r + r_R)]/\vartheta(I_{xx});$$

$$b_{7,2} = -b_{7,3} = 4\sqrt{3}r_R[7\sqrt{2}m_B r + 5\sqrt{2}m_B r + 15m_R(\sqrt{2}r + r + r_R)]/\vartheta(I_{yy});$$

$$b_{8,1} = b_{8,2} = b_{8,3} = -\sqrt{2}rr_R/(3m_R r_R^2(r + r_R)^2 + 3r^2 I_R + 2r^2 I_{xz});$$

$$b_{9,2} = b_{9,3} = -b_{9,1}/2 = 5\sqrt{2}r_R\{3m_R(r + r_R)[(3 + 2\sqrt{2})r + 3r_R] + 4I_{xx}\}/r/\vartheta(I_{xx});$$

$$b_{10,3} = -b_{10,2} = 5\sqrt{6}(r_R/r)\{3m_R(r + r_R)[(3 + 2\sqrt{2})r + 3r_R] + 4I_{yy}\}/\vartheta(I_{yy});$$

$$\begin{aligned}
\vartheta(I) = & 4(7m_B + 5m_B)[9m_R r_R^2(r + r_R)^2 + 3r^2 I_R + 4r_R^2 I] + \\
& 15\{12m_R^2 r_R^2(r + r_R)^2 + m_R[3(7 + 4\sqrt{2})r^2 I_R + \\
& 6(3 + 2\sqrt{2})rr_R I_R + r_R^2(9I_R + 16I)] + 4I_R I\}.
\end{aligned}$$

其中状态矩阵与输出矩阵未列出项皆为零。

鉴于状态矩阵和输出矩阵的特殊性, 可将其分解为分别代表 x, y, z 方向控制维度的三组状态微分方程:

$$\dot{x}_x = A_x x_x + B_x u_x =$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_y &= \mathbf{A}_y \mathbf{x}_y + \mathbf{B}_y \mathbf{u}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{6,1} & 0 & 0 & 0 \\ a_{9,1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \theta_x \\ \dot{\phi}_x \\ \dot{\theta}_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{6,3} \\ b_{9,3} \end{bmatrix} (u_3 + u_2 - 2u_1); \\ \dot{\mathbf{x}}_z &= \mathbf{A}_z \mathbf{x}_z + \mathbf{B}_z \mathbf{u}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{7,2} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10,2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_y \\ \theta_y \\ \dot{\phi}_y \\ \dot{\theta}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{7,3} \\ b_{10,3} \end{bmatrix} (u_3 - u_2); \\ \dot{\mathbf{x}}_z &= \mathbf{A}_z \mathbf{x}_z + \mathbf{B}_z \mathbf{u}_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_z \\ \dot{\phi}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{8,3} \end{bmatrix} (u_1 + u_2 + u_3). \end{aligned}$$

代入如表 1 所示的机器人的设计参数即可计算出机器人的状态矩阵和输出矩阵。

表 1 Ballbot 机器人设计参数

符号	取值	单位	物理意义
r_R	0.06	m	万向轮半径
r	0.13	m	圆球半径
m_R	0.5	kg	万向轮质量
m_b	33.1	kg	圆球质量
m_B	45	kg	直立杆(包括万向轮)质量
T_{xx}	10.8	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	直立杆绕 x 轴转动惯量
T_{yy}	10.8	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	直立杆绕 y 轴转动惯量
T_{zz}	2.7	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	直立杆绕 z 轴转动惯量
T_R	0.001 8	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	万向轮绕中心轴转动惯量
g	9.81	m/s^2	重力加速度
l	0.6	m	直立杆与圆球质心距离

将机器人的所有角度变量作为输出变量,即有

$$\mathbf{C}_x = \mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_z = [1 \quad 0]。$$

由状态方程可控性和可观性判据可证其既可控又可观。

4 单球驱动机器人 Simulink 控制仿真及分析

作为移动机器人,单球驱动机器人不仅需要实现稳定控制,更应该实现跟踪控制,即可以稳定地按照给定的线路精确运动。一般来说,单纯的状态反馈控制并不能实现机器人的位置跟踪阶跃响应,故在此采用如图 3 所示多环控制系统。

该线性化控制框图中包括 x 、 y 、 z 3 个坐标方向的控制模块。给控制模块包括全状态反馈的线性二次最优(LQR)控制器和以机器人位置角度(θ_x , ϕ_y , ϕ_z)作为反馈量的比例积分(PI)控制器。其中 PI 控制的比例系数 K_p 和积分系数 K_i 通过多次调试而选定,以使得机器人可以跟踪目标位置。该控制环可以补偿机器人位置跟踪控制的时变摩擦力矩,从而减少由于动力性模型中未考虑的静摩擦和动摩擦。LQR 控制的主要目的是选取状态反馈系数 $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]$,使得性能指标函数

$$J = \int [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{R} \mathbf{u}(t)^2] dt。 \quad (17)$$

取得最小值。其中 \mathbf{Q} 为正定(或半正定)厄米特或者实对称矩阵; \mathbf{R} 为正定厄米特或实对称矩阵。该方程右边第二项是考虑到控制能量的损耗而引进的,矩阵 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 确定了误差和能量损耗的相对重要性。为了使机器人控制性能达到最佳状态,经过多次仿真和调试,选定如下控制参数: $\mathbf{Q}_x = \mathbf{Q}_y = \text{diag}[100 \quad 40 \quad 4 \quad 4]$, $\mathbf{Q}_z = \text{diag}[10 \quad 0.1]$, $\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_y = [0.004]$, $\mathbf{R}_z = [0.001]$ 。可得反馈增益系数 \mathbf{K}_x , \mathbf{K}_y , \mathbf{K}_z 。而比例积分控制器中的参数数选定为 $K_{px} = 30$, $K_{ix} = 10$, $K_{py} = 45$, $K_{iy} = 10$, $K_{pz} = 3$, $K_{iz} = 1$ 。根据以上参数在 Simulink 中进行仿真,可以得到较为理想的跟踪控制效果。

4.1 稳定性控制效果

在机器人控制中直立杆摆角的控制是实现机器人跟踪控制的基础。由于机器人的非线性、强耦合特性,如果机器人的直立杆的摆角过大,会导致机器人脱离稳定区域而使得控制策略无法保持机器人稳定运行,最终发生倾倒。在 Simulink 仿真中,机器人在初始倾

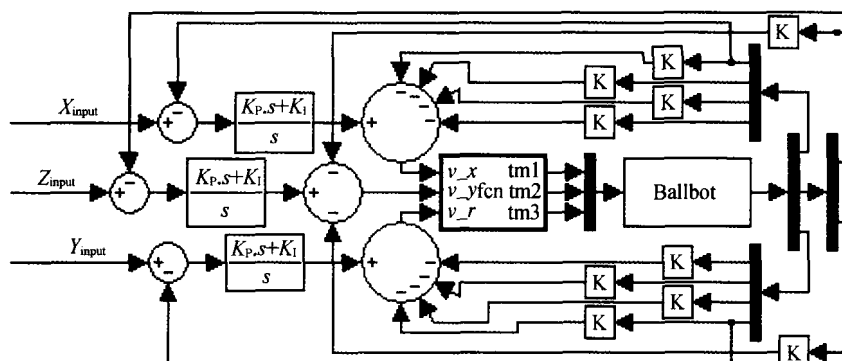


图3 Ballbot 控制器框图

角下可以快速响应,在 0.4 s 以内达到稳定状态,表现了机器人具有较强的稳健性(见图 4)。

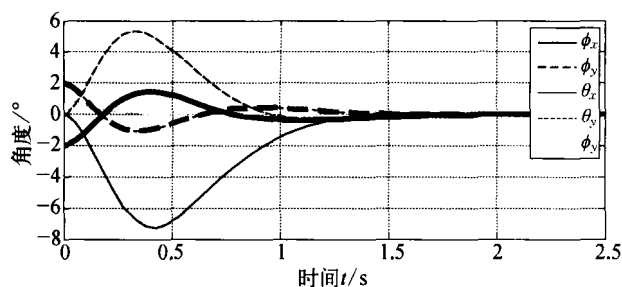


图4 Ballbot 初始误差下的响应曲线

4.2 机器人跟踪控制效果

仿真中命令机器人在 4~5 s 的时间内由原点运动到点(-0.12, 0.12),并在 16 s 时回到原点。其控制效果如图 5 所示。可见机器人在接收到正向的斜坡参考输入,在其响应过程中机器人先反向运动一段距离,使得直立杆由于惯性作用而向正向倾斜,然后机器人再向正向快速运动到接近目标位置而开始减速,此时直立杆再次在惯性作用下由偏向负方向的状态回到平衡位置。

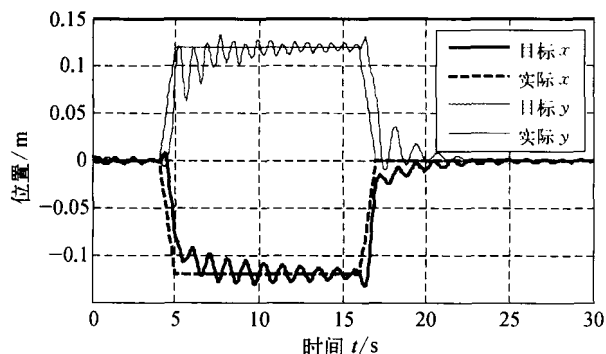


图5 Ballbot 位置跟踪的响应曲线

4.3 机器人轨迹跟踪控制的效果

在机器人轨迹跟踪实验中给机器人的轨迹命令较为复杂,可以是直线、圆弧或者它们的组合。当命令机器人在 40 s 内完成 1 个周长为 5.2 m 的方形轨迹时,机器人表现出较好的跟踪精度和准确的方向性,行走时的位置误差在 5% 以内(见图 6)。

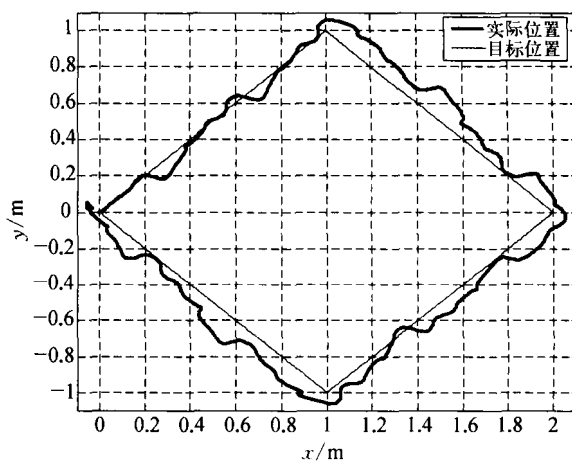


图6 Ballbot 在地面上的跟踪轨迹

5 结束语

本文介绍了单球机器人的结构设计,并运用拉格朗日方程建立全自由度的动力学模型。通过将机器人动力学模型线性化,并分解成为在三维坐标方向上独立的状态方程,提出了带有比例积分控制器和线性二次最优控制器的多环控制方法。运用 Simulink 仿真模块进行了仿真,证明了控制策略可以实现机器人的稳定控制和轨迹跟踪控制,并表现出较好的响应特性和稳定性。

(下转第 83 页)

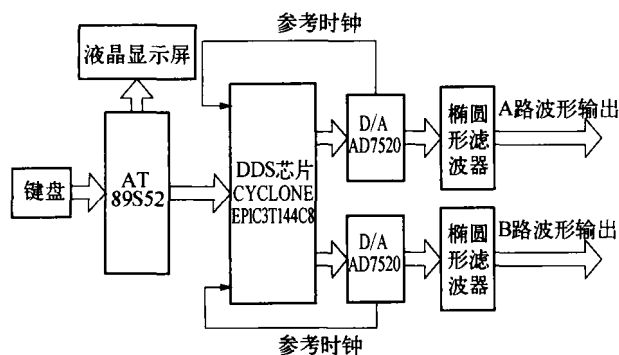


图5 信号发生器的系统框图

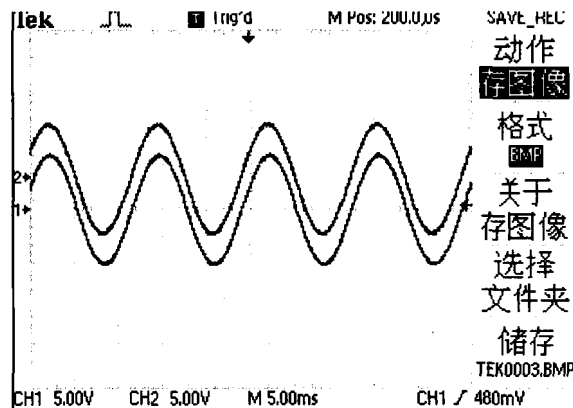


图7 产生波形(69 Hz, 5.76°)

3 实验验证

运用本设计生成了两路正弦波,通过示波器观察同频有相位差的输出波形,如图6、图7所示。从波形图可以看出,生成的正弦波相位和频率可调。

4 结束语

本系统通过单片机和 FPGA 相结合的方法,使用 VHDL 语言实现了基于 DDS 技术,双通道相位、频率可

调的信号发生器。本设计生成的两路信号具有较高的稳定性,相位和频率精度较高并且易于控制和调节。

参考文献

- [1] 常铁原,胡重九,陈小静. 相位可控双路同频信号源的 FPGA 设计部分与实现[J]. 微计算机信息, 2010, 26(4): 134-137.
- [2] 姚益武,袁秋晨,王筱萌,等. 基于 FPGA 的正弦信号发生器设计[J]. 微型机与应用, 2010, 13(5): 87-90.
- [3] 潘志浪. 基于 FPGA 的 DDS 信号源的设计[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2007.
- [4] 李志鹏,郭勇,沈军. 基于 DDS 技术实现信号发生器[J]. 传感器与仪器仪表, 2007, 23(7): 175-178.
- [5] 刘志宇,宋立新. 基于 DDS 技术的双通道波形发生器[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2008, 13(5): 18-21.
- [6] 杨晓慧,杨旭. FPGA 系统设计与实例[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2010.

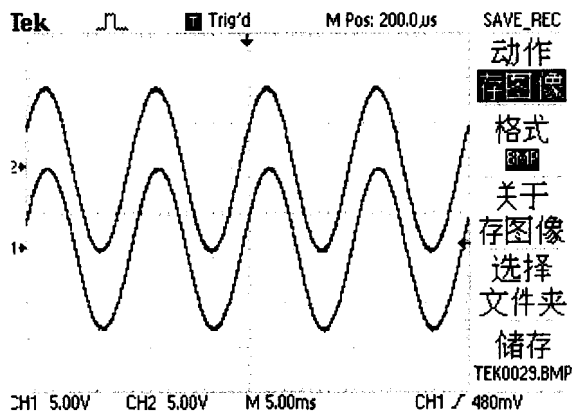


图6 产生波形(80 Hz, 8.64°)

(上接第19页)

参考文献

- [1] LAUWERS T B, KANTOR G A, HOLLIS R L. A Dynamically Stable Single-Wheeled Mobile Robot with Inverse Mouse-Ball Drive [J]. ICRA, 2006 (5): 2884-2889.
- [2] TSAI CHING-CHIH, JUANG MING-HAN, CHAN CHENG-KAI, et al. Self-Balancing and Position Control Using Multi-Loop Approach for Ball Robots [J]. ICSSE, 2010(8): 251-256.
- [3] MASA AKI KUMAGAI, TAKAYA OCHIAI. Development of a Robot Balancing on a Ball [J]. International Conference on Control, Automation and Systems 2008(10): 433-438.
- [4] CRAIG J J. Introduction to Robotics: Mechanics and Control [M]. 3rd Ed. Addison-Wesley, Reading, MA, 2005.
- [5] DORF R C, BISHOP R H. 现代控制系统 [M]. 11 版. 北京: 电子工业出版社, 2011.
- [6] 刘金琨. 先进 PID 控制 Matlab 仿真 [M]. 3 版. 北京: 电子工业出版社, 2011.