Functional Analysis 1.2 Distance Space 02

Chen Gong

22 August 2020

目录

1 Introduction

在上一小节中我们在集合上引进了距离的概念,有了距离的概念之后随后就定义了极限,极限的定义为: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \leftrightarrow d(x_n, x_0) = 0$, 那么距离是从两个空间到实数空间上的一个映射: $\mathcal{X}\times\mathcal{X} \to \mathbb{R}$, 距离一定是一个数。在空间中定义了距离后，我们就可以在距离空间中引入极限的概率了。这就是我们的重要目的之一。而且，我们还介绍了距离空间点的收敛性，并给出了相应的证明。

2 距离空间函数的连续性

在这一节我们需要证明的是，距离空间可以看成是一个函数，而且是一个二元连续函数。

定理 2.1： $d(x,y)$ 是关于 x 和 y 的二元连续函数。即当 $x_n \to x, y_n \to y(n\to\infty)$ 时,

$$d(x_n, y_n) \to d(x,y)(n\to\infty)$$

如何给出这个证明呢? 大家好好想一想，在距离空间 (X,d) 中的任何两点 x,y 都有唯一确定的实数 $d(x,y)$ 与之相对应，这说明 $d(x,y)$ 是一个二元实函数。那么大家想想在之前，我们如何确定一个函数是否连续呢? 证明方法是 $f(x,y) \to f(x_0,y_0)(x\to x_0, y\to y_0)$。

而在实数空间中，距离是通常的绝对值距离，定理要证：在条件 $x_n \to x, y_n \to y(n\to\infty)$ 下，有

$$|d(x_n,y_n) - d(x,y)| \to 0 \ (n\to\infty) \tag{1}$$

证明： 由距离的三角不等式有:

$$d(x_n,y_n) \le d(x_n,x) + d(x,y) + d(y,y_n)$$

即

$$d(x_n,y_n) - d(x,y) \le d(x_n,x) + d(y,y_n)$$

同理有,

$$d(x,y) \le d(x,x_n) + d(x_n,y_n) + d(y_n,y)$$

即有,

$$d(x,y) - d(x_n,y_n) \le d(x,x_n) + d(y_n,y)$$

所以可以得到,

$$|d(x_n,y_n) - d(x,y)| \le d(x_n,x) + d(y,y_n) \to 0 \ (n\to\infty) \tag{2}$$

介绍其是一个函数，便于我们接下来介绍距离空间中收敛的“含义”。在上一小节中，我们介绍了一个集合中的元素都一样，然而定义不同的距离，得到的含义是不一样的。下面我们将在一些距离空间中，研究收敛的“具体含义”。

3 距离空间的具体含义

下面我们将从几个例子中逐步增加难度来分析距离空间的意义。

3.1 $\mathbb{R}^m$ 空间

$\mathbb{R}^m$ 空间，设

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x}_n=\left(\boldsymbol{\xi}_1^{(n)}, \boldsymbol{\xi}_2^{(n)}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_m^{(n)}\right) \quad(\boldsymbol{n}=1,2, \cdots), \\ \boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_m\right) \in \mathbb{R}^m \end{gathered} \tag{3}$$

则 $d(x_n,x)\rightarrow 0$，等价于，

$$\xi_i^{(n)} \rightarrow \xi_i(n \rightarrow \infty),\ i=1,2, \cdots, m. \tag{4}$$

在 $\mathbb{R}^m$ 空间中，等价于按坐标收敛。我们可以这样理解，将 $\boldsymbol{x}_n$ 看成是一个向量，那么向量中的每一个维度上的值都将收敛到与 x 上。大概就是这么个意思。

证明： $d(x_n,x)\rightarrow 0$，即

$$\sqrt{\left(\xi_1^{(n)}-\xi_1\right)^2+\cdots+\left(\varepsilon_m^{(n)}-\xi_m\right)^2} \rightarrow 0 .(n \rightarrow \infty) \tag{5}$$

首先我们来看第一个不等式，有

$$\begin{aligned} \left|\varepsilon_i^{(n)}-\xi_i\right| & \leq\left(\sum_{k=1}^m\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|^2\right)^{1 / 2} \\ & =d\left(x_n, x\right), i=1,2, \cdots, m \end{aligned} \tag{6}$$

其中,i 是 $i=1,2,\cdot m$ 中的任意一个数。这个等式是显然成立的,$\left|\varepsilon_i^{(n)}-\xi_i\right|$ 只是 $\left(\sum_{k=1}^m\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|^2\right)^{1/2}$ 中的一项。从第一个式子中，我们可以得到在按坐标收敛中，如果距离收敛，则每一个坐标都将收敛。而同样的思路我们可以得到第二个不等式，要证明每一个坐标都收敛，则可以得到距离收敛。这就是我们证明的整体思路。

$$\begin{aligned} d\left(x_n, x\right)= & \left(\sum_{k=1}^m\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|^2\right)^{1 / 2} \\ \leq & \sqrt{\left(\left|\varepsilon_1^{(n)}-\xi_1\right|+\left|\varepsilon_2^{(n)}-\xi_2\right|+\cdots+\left|\varepsilon_m^{(n)}-\xi_m\right|\right)^2} \\ \leq & \left|\varepsilon_1^{(n)}-\xi_1\right|+\left|\varepsilon_2^{(n)}-\xi_2\right|+\cdots+\left|\varepsilon_m^{(n)}-\xi_m\right| \end{aligned} \tag{7}$$

而从第二个公式中可以得出，如果每个分量都趋近于 0，而他们的和当然也是趋近于 0 的。那么我们可以得出 $d(x_n,x)\rightarrow 0$，等价于 $\xi_i^{(n)} \rightarrow \xi_i(n \rightarrow \infty)$，$i=1,2,\cdots,m.$。即可得到结论 (空间中点列的收敛，等价于按坐标收敛)。从这个简单的例子中，我们大致导出了距离空间中的收敛的它的含义是什么。下一步将讲述更复杂的例子。

3.2 连续函数空间 $C[a,b]$

3.2.1 在 $C[a,b]$ 中考虑

在连续函数空间 $C[a,b]$ 中的元素都是连续函数。空间中的距离定义为：$d(x,y)=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|$。而且，$C[a,b]$ 中的收敛性是函数列在 $[a,b]$ 上的一致收敛。一致收敛是我们数学分析中一个非常重要的概念。设 $x_n(t)$ $(n=1,2,\cdots)$，$x(t)\in C[a,b]$，且 $d(x_n,x)\rightarrow 0$，即为

$$\max_{a \leq t \leq b}\left|x_n(t)-x(t)\right| \rightarrow 0(n \rightarrow \infty) \tag{8}$$

那么这个公式 (8) 趋近 0 是什么意思呢？实际上就是距离趋近 0。注意，这里的 $x_n(t)$ 代表的是一个数列，关于 n 取不同的值，$x_n(t)$ 会得到不同的结果。所以，这里实际上是一个数列的极限。于是，我们可以用 $\epsilon - N$ 的语言来描述数列的收敛，

于是对 $\forall \epsilon \leq 0, \exists N,$ 当$n \leq N$时，对$\forall t \in [a,b]$，有

$$|x_n(t) - x(t)| < \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| < \epsilon \tag{9}$$

即：$x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$。请注意这里为什么是一致收敛？我们从逻辑上要非常关注 $n \leq N$ 和 $\forall t$ 的顺序。在这里，我们是先定义的 N，然后才是 $\forall t$，所以 N 是和 t 没有关系的，而仅仅只和 ϵ 有关。也就对于 $[a,b]$ 上任意一个点，都可以用同一个 ϵ 来约束。这样我们从直观的角度去理解，我们可以保证所有的 $|x_n(t) - x(t)|$ 的值不能无限大，那么这样就很好的控制了收敛的速度，说明在这个区间上函数收敛的速度是一样的。

这就是我对一致收敛的理解，而收敛中的定义为，对 $\forall \epsilon \leq 0, \exists N,$ 对$\forall t \in [a,b]$有$n \leq N$，

$$|x_n(t) - x(t)| < \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| < \epsilon \tag{10}$$

那么这里的 N 和 ϵ 和 t 都是相关的。那么，在不同的点，ϵ 实际上是不一样的，所以没有那个一致的概念在里面。一致收敛是指在收敛中和区间上的点没有关系。

因为要证两个关系的等价性，所以又需要反过来证明一遍。$x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$ 可以推出 $d(x_n, x) \to 0$；事实上，$x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$，可以得出，

对 $\forall \epsilon \leq 0, \exists N,$ 当$n \leq N$时，对$\forall t \in [a,b]$，有

$$|x_n(t) - x(t)| < \epsilon \tag{11}$$

上述公式两边同时对 $t \in [a,b]$ 取最大值，则有

$$\max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| \leq \max_{a \leq t \leq b} \epsilon = \epsilon \tag{12}$$

其中，$max_{a \leq t \leq b}|x_n(t) - x(t)|$ 就是关于距离的定义，那么可以说明 $x_n \to x (n \to \infty)$。

通过以上的证明，我们可以充分的说明，$C[a,b]$ 中的收敛是函数列在 $[a,b]$ 上的一致收敛。

当然我们还可以定义其他的距离，比如

$$d_2(x,y) = \left\{ \int_0^1 |x(t) - y(t)|^2 \mathrm{d}t \right\}^{1/2} \tag{13}$$

这个距离是非常重要的，在这个距离空间下我们可以定义内积，角度，长度等概念。但是这个是距离我们还没有给出证明，这个会在第二章中给出证明。在之前我们分析过了，集合中的元素还是一样的，都是连续函数，而定义的距离不一样，则反映的客观现实是不一样的。

比如，考虑 (X, d_2) 中的点列 $\{x_n\}$，

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & 0 \leq t \leq 1/n \\ 0, & 1/n < t \leq 1 \end{cases} \tag{14}$$

则 $\{x_n\}$ 收敛到 $x_0=0$，这个函数列实际上是一根直线。事实上，

$$\begin{aligned} d_2\left(x_n, x_0\right) &= \left\{\int_0^1 \left|x_n(t)-x_0(t)\right|^2 \mathrm{d} t\right\}^{1/2} \\ &= \left\{\int_0^{1/n} (1-nt)^2 \mathrm{d} t\right\}^{1/2} = (3n)^{-1/2} \rightarrow 0 \end{aligned} \tag{15}$$

这个东西是会趋近 0 的。和之前公式 (8) 中直接取最大值的做法，公式 (15) 中的距离明显要更平均一些。

收敛性和空间中的距离有很大的关系，就算空间中的元素都一样，定义的距离不一样，那么它的意义会有很大的区别，而且收敛性也有很大的区别。

注 1，上述 $\{x_n\}$ 在下列距离下也可以收敛到 x_0，

$$d(x,y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt \tag{16}$$

这个的证明同样也非常的简单，和公式 (15) 中的证明方法是一样的。而在公式 (8) 中给的距离不是一致收敛到 x_0，甚至 $\{x_n\}$ 并不点点收敛（所谓点点收敛就是函数上 $\forall t, x_n(t) \rightarrow x(t)$）到 x_0。因为 $x_n(0)=1$ 是恒成立的。大家把这个函数列画一下就知道，他们之间的距离肯定是等于 1 的。

这说明定义在不同的距离空间下的点列 (函数列) 的收敛与 $C[a,b]$ 中点列的收敛在 “具体意义” 下有很大的不同。

3.2.2 在 $C[0,1]$ 中考虑

如果在 $C[0,1]$ 中我们重新考虑上面的例子。再使用距离为公式 (8) 的情况下，由于对 $\forall n$，都有 $d(x_n,x_0)=1$，于是 $\{x_n\}$ 不收敛于 x_0。但是初学者可能会认为 $\{x_n\}$ 趋近于 y_0，其中，

$$y_0(t)=\begin{cases} 1, & t=0 \\ 0, 0<t<1 \end{cases} \tag{17}$$

但是，这有什么问题呢？问题就是这个函数不是连续函数。都不属于这个空间了，这肯定是不行的。

3.3 空间 s

设 $s=\{\{\xi_n\}\}$，是全体实数列（实数组成的数列）组成的集合，定义，

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|} \tag{18}$$

其中，$x=\{\xi_k\}$，$y=\{\eta_k\}$，则

(1) s 为距离空间。

(1) s 中的收敛按坐标收敛。

下面我们将给出相关的证明。首先可以得知，$d(x,y)$ 中的每一项都比必然是小于 $\frac{1}{2^k}$，所以加起来必然是小于 1 的。那么这样可以保证 $d(x,y)$ 一定是一个数，通常我们在确定距离空间，第一步就是判断其是否是一个数。

而按坐标收敛的意思是，设 $x_n=\left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_k^{(n)}, \cdots\right) \in s, x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots) \in s$。则 $d\left(x_n, x\right) \rightarrow 0(n \rightarrow \infty) \Longleftrightarrow \forall k, \xi_k^{(n)} \rightarrow \xi_k(n \rightarrow \infty)$。大致意思就是 $x_n \rightarrow x$ 就需要 x 中的每个维度上的坐标都要趋近于 x_n。

3.3.1 性质 1 的证明

下面我们给出性质 1 的证明，s 为距离空间。

要证 s 为距离空间，只要证明在 s 中所定义的距离 d 满足距离定义的 4 条即可。其中 (1)，(2)，(3）显然成立，只要验证 (4) 三角不等式成立，即

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \tag{19}$$

设 $x = \{\xi_k\}$，$y = \{\eta_k\}$，$z = \{\zeta_k\}$，我们要证明的目标是，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|} \tag{20}$$

而对此公式进一步化简可得我们的证明目标为。

$$\frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \leq \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|} \tag{21}$$

注意到 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 上下同加一个正数，这个值会越来越大，我们高中数学老师用了一句话来介绍为：“糖水加糖更甜。” 并且根据三角不等式可得，$|\xi_k - \eta_k| \leq |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|$。

$$\begin{aligned}
\frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} &\leq \frac{|\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} \\
&= \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} \\
&\leq \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + + |\zeta_k - \eta_k|}
\end{aligned} \tag{22}$$

所以，可以证明 $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$，我们把这个距离空间记为 s。

3.3.2 性质 2 的证明

要证明的是 $d(x_n, x) \to 0 \Longleftrightarrow \forall k, \epsilon_k^{(n)} \to \xi_k$。这个问题我们要从必要性和充分性两个角度来证明。首先是给出必要性证明。必要性要证，对于任意给定的 $k_0 \in N$，要做到：

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, 有 |\xi_{k_0}^{(n)} - \xi_{k_0}| < \epsilon$$

对于任意给定的 k_0，对于 $\forall \epsilon > 0$，令 $\epsilon_0 = \frac{1}{2^{k_0}} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} > 0$，由于 $d(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$，对于这个 $\epsilon_0 > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，有 $d(x_n, x) < \epsilon$，即为

$$d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right|}{1 + \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right|} < \epsilon_0 = \frac{1}{2^{k_n}} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \tag{23}$$

由于每一项都是正数，于是我们有，

$$\frac{1}{2^{k_n}} \frac{\left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right|}{1 + \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right|} < \epsilon_0 = \frac{1}{2^{k_n}} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \tag{24}$$

从而可以推出，

$$\frac{\left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right|}{1 + \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right|} < \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \tag{25}$$

结合 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 是单调递增函数可得，

$$\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|<\epsilon$$

即为

$$\xi_k^{(n)} \to \xi_k \ (n\to\infty) \tag{26}$$

在上面我们已经证明了必要性，下一步则是证明充分性，充分性我们要证，

$$\forall k, \xi_k^{(n)} \to \xi_k(n\to\infty) \Longrightarrow d\left(x_n,x\right)\to 0 \ (n\to\infty) \tag{27}$$

即要证明 $d(x_n,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}\to 0 \ (n\to\infty)$

注意到收敛的级数，充分靠后面的无穷多项的和可任意小。对于前面的有限项，由条件可以找到共同的 N，当 $n>N$ 时级数中的这些项都一致很小。也就是无穷级数求和的问题非常的麻烦，由于每一项都是无穷小的，而无穷项加起来并不一定是无穷小的。所以，我们的思路是希望得到后面无穷项加起来是无穷小的，然后证明前面有限项是无穷小的，那么就可以将无穷级数求和的问题转换为有限项求和的问题，难度一定会减小很多。

证明:

对于 $\forall\epsilon>0,\exists K$，使得，$\sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\frac{1}{2}\epsilon$。这个必然是可以成立的，高中学过等差数列求和的同学都知道。

由于 $\xi_k^{(n)}\to\xi_k(n\to\infty)$ $(k=1,2,\cdots,K)$。所以存在 N，当 $n>N$ 时，

$$|\xi_k^{(n)}\to\xi_k|<\frac{\epsilon}{2} \ (k=1,2,\cdots,K) \tag{28}$$

那么这样我们就把一个无穷相加的问题，变成了一个有限的问题，把后面一部分都给甩掉了，问题证明起来就会变得比较简单了。

于是当 $n\geq N$ 时，

$$\begin{aligned} d\left(x_n,x\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}{1+\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|} \\ &= \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{2^k}\frac{\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}{1+\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}+\sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}{1+\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|} \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\varepsilon \end{aligned} \tag{29}$$

所以，$\{x_n\}$ 在 s 中可以收敛到 x。在这里老师介绍了一个证明中的通用性思路，由级数的收敛性，由于后面项的和“很小”，所以可以把后面的项加起来，证明其是收敛的。再对前面的有限项进行估计，这是很常用的办法。

3.4 空间 S

S 中的元素为 E 上全体几乎处处有限的可测函数。其中 $E\subset R$ 是一个 Lebesgue 可测集，且 $mE<\infty$。这个 Lebesgue 可测集这一堆复杂的概念是什么意思呢？这里并没有必要做过多的理解，很

多时候数学中掺杂这些很生涩的词汇，会让很多同学直接望而止步。这里理解成一个连续函数就行了，可测的目的是为了可积。

对于 $x=x(t),y=y(t)\in S$，定义

$$d(x,y)=\int_E \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\mathrm{d}t \tag{30}$$

这里的定义是不是和我们公式 (18) 直接的定义很类似。一般来说级数和积分的区别就在于，级数是可数的，而积分是不可数的。

则其中，

(1) S 为距离空间；（这个证明和 3.3.1 中的证明几乎一模一样，这里不做过多的说明，大家自己去争，证明一下就行。）

(2) S 中的收敛是依测度收敛。即为 $d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$ 等价于 $x_n \underset{m}{\Rightarrow} x(n\to\infty)$(依测度收敛，其中 m 是代表依测度收敛的意思，metric 的首字母)。

首先需要了解什么出测度，非正式的说，测度把每个集合映射到非负实数来规定这个集合的大小。对于一个集合 E 就有一个数与之对应，这个数就是集合的测度，记为 mE。这个集合必须要有良好的性质，不能是随便什么集合都可以定义测度，所以就有了可测集的概念。而可测集具有可加性这样良好的性质，因为我们需要对集合进行测量，可加性是一个很重要的性质，$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}=\sum_{n=1}^{\infty} mE_n\right)$。概率也是一种测量，并且所有集合的测度和等于 1。

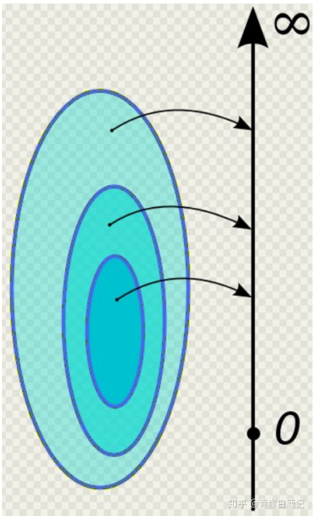

图 1: 依测度收敛的具体意义

下面我们详细的定义一下依测度收敛的定义，

$x_n \overset{m}{\to} x(n\to\infty) \Longleftrightarrow$ 对于 $\forall\sigma>0$，有 $m\{t\in E||x_n(t)-x(t)|\geq\sigma\}\to 0(n\to\infty)$

即对于 $\forall\sigma>0$, $\forall\epsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，

$$m\{t\in E||x_n(t)-x(t)|\geq\sigma\}<\varepsilon$$

证明方法是，我们可以将集合 E 分成两个部分：对于任意给定的 $\sigma>0$ 和自然数 n，令

$$\begin{gathered}E_1=\{t\in E||x_n(t)-x(t)|<\sigma\}\\ E_2=\{t\in E||x_n(t)-x(t)|\geq\sigma\}\\ E=E_1\cup E_2\end{gathered} \tag{31}$$

根据测度的可测性，可得 $mE = mE_1 + mE_2$，并且 $mE > mE_1$，$mE > mE_2$。利用函数 $\frac{t}{1+t}$ 的单调性来证明，

$$m\left\{t \in E || x_n(t) - x(t) | \geq \sigma\right\} \to 0 \ (n \to \infty) \tag{32}$$

实际上这个证明并不是很难，而其关键是理解什么是依测度收敛。对于任意给定的 $\sigma > 0$，由

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \int_E \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} \mathrm{d}t \\ &\geq \int_{\{t \in E || x_n(t) - x(t)| \geq \sigma\}} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{33}$$

因为 $\frac{t}{1+t}$ 单增，而 $|x_n(t) - x(t)| \geq \sigma$，于是有，

$$\begin{aligned} & d\left(x_n, x\right) \geq \textstyle\int_{\{t \in E || x_n(t) - x(t)| \geq \sigma\}} \frac{\sigma}{1+\sigma} dt \\ & = \tfrac{\sigma}{1+\sigma} m\left\{t \in E || x_n(t) - x(t) | \geq \sigma\right\} \end{aligned} \tag{34}$$

由于 $d(x_n, x) \to 0 \ (n \to \infty)$，$\sigma$ 给定，由不等式

$$d\left(x_n, x\right) \geq \frac{\sigma}{1+\sigma} m\left\{t \in E || x_n(t) - x(t) | \geq \sigma\right\} \tag{35}$$

推出

$$m\left\{t \in E || x_n(t) - x(t) | \geq \sigma\right\} \to 0 \ (n \to \infty) \tag{36}$$

反过来呢，我们要从 $x_n \underset{m}{\Rightarrow} x(n \to \infty)$ 推出 $d(x_n, x) \to 0 \ (n \to \infty)$。事实上，

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \int_E \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} \mathrm{d}t \\ &= \int_{E_1} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} \mathrm{d}t + \int_{E_2} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} \mathrm{d}t \\ &\leq \int_{E_1} \frac{\sigma}{1+\sigma} dt + \int_{E_2} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} \mathrm{d}t \\ &= \frac{\sigma}{1+\sigma} mE_1 + mE_2 \\ &\leq \frac{\sigma}{1+\sigma} mE + mE_2 \end{aligned} \tag{37}$$

对于 $\forall \epsilon > 0$，取 $\sigma_0 mE < \frac{\epsilon}{2}$，对于此 $\sigma_0 > 0$，上式成立。存在 N，当 $n > N$ 时，$mE_2 < \frac{\epsilon}{2}$。这里用到了依测度收敛。

于是

$$\begin{aligned} d\left(x_n, x\right) &\leq \frac{\sigma_0}{1+\sigma_0} mE + mE_2 \\ &< \sigma_0 mE + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned} \tag{38}$$

即为 $d(x_n, x) \to 0 \ (n \to \infty)$。

4 小结

本小节主要通过几个例子介绍了，距离空间中收敛的含义，简单的描述了点点收敛，一致收敛和依测度收敛的意思。1. 说明了收敛性和空间中的距离有很大的关系，就算空间中的元素都一样，定义

的距离不一样，那么它的意义会有很大的区别，而且收敛性也有很大的区别。2. 在有限维实数空间中，证明了距离空间等于 0 等价于点点收敛；在连续函数空间中，证明了证明了距离空间等于 0 等价于一致收敛 (收敛的速度一样)；在全体实数列空间中，证明了距离空间等于 0 等价于点点收敛；在可测函数空间中，证明了距离空间等于 0 等价于依测度收敛。在证明等价性的过程中，需要分别证明其充分性和必要性。

通过本小节的介绍，我们充分的感受到了距离空间的定义和极限之间的关系，从而通过极限定义连续，连续的定义基本离不开距离空间，距离是泛函分析中一个非常重要的概念。小编本身不是数学系出身，在深刻理解点点收敛，一致收敛，依坐标收敛和依测度收敛方面还有所欠缺，之后会好好加强。