Functional Analysis 1.1 Introduction 01

Chen Gong

27 July 2020

目录

小编的主要课题是做人工智能的,人工智能中脱离不开泛函分析的知识,经常会由于泛函中的一些知识不熟悉而卡壳。一直就想系统的学习一个泛函分析了,小编终于开始好好看看泛函分析了。课程使用的是哔哩哔哩上内蒙古大学,孙炯老师的泛函分析课程。参考书籍为 Erwin Kreyszig 写的"泛函分析导论及应用"的译本。PDF 版本的地址为,https://github.com/2019ChenGong/Functional-Analysis。

1 Background

泛函分析这门课的主要目的是:**了解和掌握空间理论 (包括距离空间、赋范空间、内积空间) 和线性算子理论 (包括线性算子空间、线性算子谱分析) 中的基本概念和基本理论**。小编在机器学习中经常会遇到一些很装逼的名词，比如希尔伯特空间，紧集等，后来发现这些名词都是泛函分析，所以决定要好好学学泛函分析。

下面从分析、代数、微分方程中的一些例子展开讨论，1. 学习如何从问题中抽象出泛函分析中的一些基本概念和基本理论；2. 学习如何使用类比、联想等方法, 从问题中归纳出一些基本的数学思想方法，进而去解决未知的问题。个人觉得这个数学思路非常的重要。其实我们之前看线性代数，解析几何，好像之间没有什么关系，实际上他们之间是有着潜在的联系。**泛函分析正是从这些类似的东西中探寻一般的、真正属于本质的东西，把它们抽象化并加以统一处理**。

1.1 泛函分析的研究对象和方法

我们的数学研究中，主要可以分成以下两个部分。

1. 函数 $\rightarrow$ 映射。函数可以表示为: $x \in X \rightarrow f(x) \in Y$。进一步可以表示为，一个空间 X 到另一个空间 Y 的映射。

2. 运算 (算子)。我们之前学的微分，积分都是运算。而且其都具有可加性，所以也可称为线性运算。运算实际就是一种映射，比如，通过以下运算，可以将一个函数映射为另一个函数。

$$\begin{aligned} \sin x \underset{'}{\rightarrow} \cos x \\ \cos x \underset{\int}{\rightarrow} \sin x \end{aligned} \tag{1}$$

所以，可以看到，**函数和运算其实都是一种映射**。这样我们就可以用统一的观点来看待函数和运算，$X \rightarrow Y$。所以，综上所述，**泛函研究的对象有两个，函数和运算**。函数用来描述一个对象，而运算则建立了函数之间的关系。

泛函分析研究的方法:

泛函分析是 20 世纪初从变分法、微分方程、积分方程、函数论、量子物理等研究中发展起来的一门数学分支学科。

1. 泛函分析综合分析、代数、几何的观点和方法来研究**无穷维空间**上的函数、算子和极限理论,处理和解决数学研究中最关心的一些基本问题。我们之前研究的问题，线性代数等都是位于有限维度的空间中，而泛函研究的问题都是位于无穷维度中。

2. 泛函分析的特点是它不但把古典分析的基本概念和方法一般化了，而且还把这些概念和方法几何化了。之所以几何化是把问题给具体化，将函数和图像结合起来，使问题变得更简单。随着笛卡尔

坐标系的建立，解析几何的创立，人们把代数问题几何化，把几何问题代数化，为初等数学的许多问题开辟了全新的研究模式。例如，$x^2+y^2=a^2$ 可以转换成，平面以原点为中心，以 a 为半径的圆。

1.2 泛函问题的建立过程

而在泛函分析中，往往将解决几何问题的模式进行推广，

1. 建立一个新的空间框架。包含，**空间中的元素，**$x \to f(x)$**；定义在函数上的运算** $X \to Y$。而且，以后特别要注意的是空间中的元素是什么，空间是什么样的结构 (距离、范数、内积)？因为元素不会是简单的堆积到一起，它肯定有结构，我理解就是元素之间关系。

而之后，我们可能建立一个空间，空间中的元素是函数，比如 $\sin x, \cos x, e^x$ 等等。而空间的结构就是这些函数之间的距离，范数，内积等等。我们参照的方法就是平面解析几何。

2. 在新的空间框架下，研究解决分析、代数、几何中的问题。(把分析中的问题结合几何、代数的方法加以处理。)

在解析几何、线性代数中，研究的是：有限维 (n 维) 空间中的运动和映射：从 n 维空间到 m 维空间的线性运算。

在泛函分析 (线性泛函分析) 中，主要研究的是：从无穷维空间到无穷维空间的线性运算。主要是泛函研究的集合中的元素是函数，函数的性质比较复杂，你不能用几个特征来描述一个函数，想想之前学的 Taylor 展开，我们使用无穷级数来近似函数，所以通常需要无穷维向量来描述一个函数。

于是大家想想，泛函中无穷维空间和有限维会是一样的吗？废话，肯定是不一样的，要是一样的还学什么泛函？它们肯定有一样的地方，也肯定有不一样的地方。我们希望可以类比一样的地方，并未解决不同的地方提供思路。

于是要特别关注，无穷维空间的性质，与有限维空间的区别：。

1. **无穷维空间的收敛性问题** (加法与无穷级数的区别)。比如三个数 $a+b+c=d$ 这必然是收敛的。而 $x_1+x_2+\cdots$ 这个是收敛的吗？真不好说。

2. 相同点在于其都是线性空间，大家不知道还记不记得线性空间的重要特征，就是可加性和数乘。

2 有限维空间的坐标分解和算子分解

我们通过一些熟悉的例子，研究和探讨如何类比地建立起这样的空间框架。我们刚刚泛泛的讲了，**泛函分析的目的是什么，是研究无穷空间中的元素，无穷空间中的运算**。我们希望借助过去的东西来学习，这种借鉴是非常重要的。

我们希望把有限维空间的研究方法和结论自然地推广到无穷维空间。从分析、代数中的问题出发，引出泛函分析研究的思想方法。这些例子都是我们熟悉的，我们希望从中领悟到数学处理问题的基本思路。进而把他们推广到我们未知的领域上去。数学研究中最忌讳的就是从一个概念钻到另一个概率，从而忽略本身需要解决的问题。

我们首先对简单的问题建立空间框架。之后，我们要对函数和运算建立空间框架，我们看看有限维空间框架的建立会不会对无限维建立有影响。

2.1 $\mathbb{R}^3$(三维实空间) 中的向量分解.

1. 在 $\mathbb{R}^3$ 维空间建立正交坐标系,

$$\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0),\vec{k}=(0,0,1)$$

2. 建立了空间中的结构,

$$a\cdot\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

其中, $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, 且

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

这样我们就定义出了角度的概率。于是对于空间中的任意一个向量 $a\in\mathbb{R}^3$, 用三个有序的数字表示,

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3) \tag{2}$$

其中, $a_1=(\vec{a},\vec{i}),a_2=(\vec{a},\vec{j}),a_3=(\vec{a},\vec{k})$。现在内积不仅仅表示一种运算, 而且表示一种投影。**投影的概念非常的重要, 我们以后要将其引申到一般的函数空间或者算子空间上去**。于是, $\vec{a}$ 可以写成,

$$\begin{aligned}\vec{a}&=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\\&=(\vec{a},\vec{i})\vec{i}+(\vec{a},\vec{j})\vec{j}+(\vec{a},\vec{k})\vec{k}\end{aligned} \tag{3}$$

并且其模长, 或者说是范数等于投影的平方和。

$$|\vec{a}|^2=|(\vec{a},\vec{i})|^2+|(\vec{a},\vec{j})|^2+|(\vec{a},\vec{k})|^2 \tag{4}$$

那么扩展到 n 维欧几里得空间中, 我们也可以得到类似的结果,

$$\begin{aligned}\vec{a}=&(a_1,a_2,\cdots,a_n)\\\vec{a}=&a_1\vec{e}_1+\cdots+a_n\vec{e}_n\\=&(\vec{a},\vec{e}_1)\,\vec{e}_1+\cdots+(\vec{a},\vec{e}_n)\,\vec{e}_n\\|\vec{a}|^2=&\sum_{i=1}^{n}|(\vec{a},\vec{e}_i)|^2\end{aligned} \tag{5}$$

其中, $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$, 而且 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 空间中的一组标准正交基。我们刚刚将空间中的向量投影到三个正交向量上去, 实际上是使问题变简单了。可能大家还没有深刻的感受到问题哪里变简单了。这样的方法同样可以类推到线性变换 (映射) 中, 大家就可以深刻感受一下了。

2.2 线性变换 A 按坐标分解

其中, A 是从 $\mathbb{R}^4$ 到 ^{4} 的线性变换。并且 A 是一个对称矩阵,

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix} \tag{6}$$

其中，$x, y \in \mathbb{R}^4$，

$$A : x \to Ax, \quad Ax = y$$

并且，A 具有以下几条良好的性质，

1. A 是对称的线性变换，

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2$$

   我们可以看到，A 具有分配律和数乘交换律等良好的性质，这在泛函分析里是非常重要的性质。

2. 对称矩阵的特征值都是实数。

3. A 的属于不同特征值的特征向量相互正交。

4. A 可以换成对角矩阵。对称矩阵一定正交相似于一个对角矩阵。

大家注意线性代数是什么，**线性代数是研究线性运算最基本的方式**。而特征值往往反映了矩阵运算最基本的特征。而对矩阵做一些相似的变换，矩阵的特征值是肯定不变的。而我们为什么做相似变换，其实就是希望把矩阵变得简单一些。

具体做法，

1. $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3)$。$\lambda = -3, +1$ 是特征值，其中 $\lambda = +1$ 是三重特征值，$\lambda = -3$ 是单重特征值。

2. $\lambda = +1$ 时，求其基础解系如下:

$$a_1 = (1, 1, 0, 0)$$
$$\alpha_2 = (1, 0, 1, 0)$$
$$\alpha_3 = (-1, 0, 0, 1)$$

3. 该基础解系不正交，将其单位正交化 (施密特正交法):

$$\beta_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$$
$$\beta_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)$$
$$\beta_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{3}{\sqrt{12}}\right)$$

   当 $\lambda = -3$ 时，可得: $\beta_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$。而 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 就是 $\mathbb{R}^4$ 中的一组标准正交基了。在这个正交基下，A 就成对角矩阵了，

$$A \sim A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$T = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)_{4\times 4} \tag{8}$$

$$T^{-1}AT = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

那么原矩阵和这个对角矩阵是相似的，大家是不是感觉到，这个矩阵多简单呀。

注 1，在新的坐标系 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ 下，线性变换 A 有最简单的标准型。

注 2，在每一个特征子空间上 (新的坐标系对应的一维子空间上)，**A 作用的形式是最简单的（放大、缩小特征值的倍数)**。

$$A\beta_1 = \beta_1, A\beta_2 = \beta_2, A\beta_3 = \beta_3, A\beta_4 = -3\beta_4$$

详细讲到这里，大家对特征值的概念有了更加清晰的认识了。**特征值就是矩阵在基向量上放大或缩小的倍数，和二维空间中的在坐标系上的投影长度一样**。

4. 在空间中构建一组新的标准正交基为 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$，则

$$\vec{x} = (a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\beta_4$$

其中，

$$\begin{aligned} a_1 &= (x, \beta_1), a_2 = (x, \beta_2) \\ a_3 &= (x, \beta_3), a_4 = (x, \beta_4) \end{aligned}$$

是 $\vec{x}$ 在 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ 上的投影。那么有

$$\begin{aligned} Ax &= A(a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + q_4\beta_4) \\ &= a_1A\beta_1 + a_2A\beta_2 + a_3A\beta_3 + a_4A\beta_4 \\ &= a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 - 3a_4\beta_4 \\ &= y = (a_1, a_2, a_3, -3a_4) \end{aligned} \tag{10}$$

那么，我们就得到了新的向量在新空间中的表示方法。实际上和三维空间中是一样的，特征值就代表了在正交基向量上的长度。

5. 矩阵 A 确定了一组标准正交基 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$。只要知道了 $\vec{x}$ 在 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ 上的投影 $(a_1, a_2, a_3, -3a_4)$，到 A 的作用方式就一目了然了。

$$\begin{aligned} Ax &= (\lambda_1a_1, \lambda_2a_2, \lambda_3a_3, \lambda_4a_4) \\ &= (a_1, a_2, a_3, -3a_4) \end{aligned}$$

假设 (P_1, P_2, P_3, P_4) 是在 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ 上的投影算子。投影向量合上放缩大小，就可以得到新坐标下的向量。则有，

$$\begin{aligned} A &= P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4 \\ &= \lambda_1P_2 + \lambda_2P_2 + \lambda_3P_3 + \lambda_4P_4 \end{aligned}$$

其中，$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -3$。这样我们就将线性变换 A 分解成 4 个投影变换 (算子) 的线性组合。通过以上的步骤，我们就把一个很复杂的变换，在这个特征值特征向量下变得非常简单了。而**数学处理问题的原则就是把复杂的问题简单化**。

3 无穷维空间的类比和联想

泛函分析要研究的对象是函数、运算。微分、积分运算，它们作用的对象是函数。微分、积分运算与 $\mathbb{R}^n$ 空间中线性变换 A 相比较，

1. 相同之处: 线性运算;

2. 不同之处: A 把一个 n 维向量变成 n 维 (或 m 维) 向量。微 (积) 分把一个函数映射成另一个函数。

3. 函数数不能用有限个数刻画，可能可以用无穷多个数。而函数实际上可以看成是一个无穷维的向量。我们希望通过"类比和联想"，把有限维空间处理问题的这种方式推广到更一般的空间 (无穷维空间) 中。

参照有限维空间中的情况，我们将考虑无穷维空间中需要具体讨论的问题。

3.1 无穷空间中的几何结构

1. 是否存在坐标系 $(e_1, \cdots, e_n, \cdots)$?

2. 是否具有正交性?

3. 无穷维空间中的向量 x 能不能分解?

$$\begin{gathered}\vec{x} = (a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots) \\ = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + \cdots \\ \|x\|^2 = \textstyle\sum_i |a_i|^2 ?\end{gathered} \tag{11}$$

其中，$a_i = (x, e_i), i = 1, 2, \cdots$。这些都还能不能成立呢？这些都是问题了，不是我们已有的结论。

3.2 线性算子的特征和结构

1. 线性算子的性质，有没有对称算子？比如积分微分什么样的叫对称的。

2. 线性算子 T 能不能分解？有限维的可以分解，而无穷维的可不可以分解呢?

$$\begin{gathered}A = P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4 \\ T ? = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \cdots\end{gathered} \tag{12}$$

其中，$P_1, P_2, \cdots$ 是在 $e_1, e_2, \cdots$ 上的投影算子。注由于式中有无穷项相加，于是存在是不是收敛的问题，如果收敛, 是在什么意义下的收敛？这些问题都是我们泛函分析中要讨论的问题，但是这些问题的提出都是很自然的。

3.3 无穷维空间的坐标分解

为了考虑算子的分解，首先要研究函数的分解，函数可以用无穷多个数形成的数组来刻画。为什么考虑这个问题, 因为我们知道在之前讲的矩阵运算的分解, 我们可以用特征值和特征向量来分解。很自然我们想到无穷维空间是不是也可以用一样的方法来刻画。比如，Taylor 展开，

3.3.1 Taylor 展开

如果函数满足很好的性质，则在它的收敛半径内，有，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \tag{13}$$

即函数可以和一个可数无穷数列一一对应，也就是

$$f(x)\sim\left(f(0),\frac{f'(0)}{1!},\frac{f''(0)}{2!},\ldots,\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ldots\right)$$

实际上这和一个向量在 n 维空间的展开没有什么不同。最大的区别就在于，$(x^0,x^1,x^2,\cdots)$ 不是正交基。实际上泰勒展开是比较方便的，有一一对应的概念在里面，可以的是没有几何概念（垂直，正交这些类似的概念）在里面。那么计算起来就有一定的问题在里面。下面我们熟知的 Fourier 展开就是一种在正交系中的展开。

3.3.2 Fourier 级数展开

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

其中，$\frac{9y}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx, a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx$。那么，$f$ 就可以由无穷多个数来一一对应了，

$$f(x)\sim\left(\frac{a_0}{2},a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n,\cdots\right)$$

之前在 Taylor 展开中很遗憾没有正交的几何关系，在这里我们希望引入。大家可以看到其坐标系为，

$$\begin{array}{l}e_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},e_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,e_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,e_3=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x\\ e_4=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\cdots,e_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx,e_{2k}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx,\cdots\end{array}$$

而 $\left(\frac{a_0}{2},a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n,\cdots\right)$ **为函数 f 在** $(e_0,e_1,\cdots,)$ **下的坐标**。类似于 $\mathbb{R}^n$ 我们可以在函数空间 $L^2(-\pi,\pi)$ 上定义内积，

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx \tag{14}$$

这个是怎么来的呢，我在`https://zhuanlan.zhihu.com/p/92648889` 中将函数看成无穷维向量做出过详细的解读。什么是内积，其满足四条性质，1. 正定；2. 交换；3. 分配；4. 可数乘。大学数学学习一定要从一般化的东西里抽象出最基本的本质性的东西，再形成定义。

而且我们在数学分析里学了，

$$\begin{array}{l}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mxdx=\left\{\begin{array}{ll}0, & n\neq m\\ 1, & n=m\end{array}\right.\\ \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mxdx=\left\{\begin{array}{ll}0, & n\neq m\\ 1, & n=m\end{array}\right.\\ \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mxdx=0\end{array} \tag{15}$$

即，

$$\int_{-\pi}^{\pi}e_ie_jdx=(e_i,e_j)=\left\{\begin{array}{ll}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{array}\right. \tag{16}$$

所以 $\{e_i\}$ 形成空间中的一组标准正交基。这些都是我们从之前知道的基础知识中推导得出的。

4 n 维空间与无穷维空间的对照

在 $\mathbb{R}^n$ 的空间中，$\forall x \in \mathbb{R}^n$，

$$\vec{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots \tag{17}$$

其中，$x_1 = (x, e_1), x_2 = (x, e_2), \cdots, x_n = (x, e_n)$。对于函数 f，我们有，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} e_0 + a_1 e_1 + b_1 e_2 + \cdots + a_k e_{2k-1} + b_k e_{2k} + \cdots \tag{18}$$

那么我们的下一个问题就是，

$$\begin{aligned} &\frac{a_0}{2} = (f, e_0) \\ &a_1 = (f, e_1), b_1 = (f, e_2), \cdots \\ &a_k = (f, e_{2k-1}), b_k = (f, e_{2k}), \cdots \end{aligned} \tag{19}$$

那么系数是否等于 (f, e_i)?

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} (f(x), 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} (f(x), \cos kx) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \right) \\ b_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right) \end{aligned} \tag{20}$$

很显然是成立的，那么我们可以将傅里叶级数换个方式表达，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= \left(f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx + \right. \\ &\left. \left(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (f, e_n) e_{n-} \end{aligned} \tag{21}$$

其中，$(\cdot)$ 表示的就是内积。这样在函数空间建立了一个正交坐标系。每一个函数和一组 (可数的) 数一一对应。

$$f(x) \sum_{i=1}^{\infty} (f, e_i) e_i \tag{22}$$

其中，系数是 $f(x)$ 和 e_i 内积，即 $f(x)$ 是 e_i 上的投影。对照，

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \ x \in \mathbb{R}^n \tag{23}$$

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \tag{24}$$

二者之间的区别是什么? $\mathbb{R}^n$ 是有限维空间，而函数空间是无穷维的。无穷维求和是一个求极限的过程。无穷维肯定和有限维的情况不一样，不然我们就没有研究的意义了。

$$\begin{array}{c} f(x) = (?) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (f, e_k)\, e_k \\ \|f(x)\|^2 = (?) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2 \end{array} \tag{25}$$

我们需要考虑函数项组数 (Fourier 组数) 是否收放的问题。如果收敛，在什么意义下收做？这都是我们要研究的问题。

$$f(x) = (?) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (f, e_k)\, e_k \tag{26}$$

根据数学分析中的结论有，$f(x)$ 逐段可微，则其 Fourier 级数收敛，且收敛到，

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

我们要在无穷维空间研究收敛性 (在什么意义下收做)，即要引进极限等概念。这里的极限将不再是三维空间中的简单极限了，而是函数的极限，算子的极限那些。

在 Fourier 级数中，有 Riemann 引理，

$$\begin{array}{c} \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x = 0 \\ \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x = 0 \\ \text{即:}\ \lim_{k\to\infty} (f(x), e_k) = 0, \forall f(x) \end{array} \tag{27}$$

黎曼引理是傅里叶级数中最重要的一部分，没有黎曼引理的话，没法证明那个收敛性。以后我们将看到这是 e_k 弱收敛到 0。所以，在泛函中，我们以后要讨论什么，强收敛，弱收敛，一致收敛等等。**所以，数学学习中很重要的一点就是，我们不仅仅要考虑问题本身，而且要考虑问题是从哪来的**。

5 泛函研究的重点

通过上面的步步描述，我们最终得到了泛函分析的重点：

1. 空间的概念 (无穷维空间)；
2. 空间的结构: 距离，长度，内积；
3. 空间中的收做性 (强，弱，一致收敛等)。

这些问题的引出都是非常自然的，我们从简单的情况一步步向困难的问题中进行扩展。自然而然的引出了这些问题，大家一定有清楚问题从哪来的，我们为什么要解决它。这样会让大家对数学有一个更清晰的认识。