Functional Analysis 1.1 Introduction 02

Chen Gong

August 2020

目录

1 Introduction

在上一小节中，我们讲了泛函分析的一些重点的问题。以及泛函分析问题的主要来源。在数学研究中，非常重要的是将一类问题中的共同点抽象出来形成定义，从而把复杂的问题简单化。在上一小节中，讲了二维空间中的坐标分解，四维空间中的一个矩阵的分解，还有对函数的傅里叶函数分解。在这一小节中，我们再把无穷维空间的线性算子 (微分运算) 与有限维空间的线性算子相对照，进而研究线性算子的分解问题。

而我们上一小节中介绍的矩阵分解，对一个矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 可以求得特征值，进而求得特征向量。特征向量可以产生一个坐标系，而在这个坐标系下 A 成为对角矩阵。而不同的对称矩阵可以产生不同的坐标系。

而在上节中，我们利用 Fourier 级数可以展开到一个正交坐标系下，

$$(1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos kx, \sin kx, \cdots)$$

但是 Fourier 级数只是求得了一个函数的正交坐标系。那么我们先想想是否也可以想矩阵的运算一样，将一些运算 (算子，比如微分运算) 按矩阵分解那样一样进行分解? 将函数变换到一个坐标系下，从而使得函数被分解得更加的简单。下面首先将用一个 Sturm Liouville 问题来进行描述。

2 Sturm Liouville 问题

2.1 Sturm Liouville 问题通解计算

$$\begin{cases} -y''(t) = \lambda y(t), \quad -\pi < t \leqslant \pi \\ y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi) \end{cases} \tag{1}$$

这是一个二阶的常微分方程，加上两个边界条件 (周期边界条件) 限制。**微分是一种运算，边界条件给出了它的定义域**。我们可以把 $\mathcal{T}y = -y''$（比如令 $y = e^x$，$\mathcal{T}y = e^x$）看成一种运算，而边界条件对运算的定义域加以适当的限制，使之成为一个“对称”算子。为什么是对称的呢，这里的这个含义不做过多的研究（后面会讲）。而这里的对称和前面的对称矩阵对应起来，这个含义是基本类似的。

而对应到线性代数中，$Ax = y$ 中 A 是一个变换矩阵，作用到 x 上得到一个 y。这里 $\mathcal{T}$ 是一个算子，作用在函数 y 上得到一个新的函数。只不过前者是在有限维空间上的运算，而后者是在无限维空间的运算。

在绪论中我们希望可以比较这些类似的例子，然后抽象出本质的东西。**在数学研究中对于概念本质的认识是非常重要的，而认识不清晰很有可能会在后面将概念搞糊涂**。

于是，这样在 Sturm Lioville(S- L) 问题上 $\mathcal{T}y = \lambda y$ 与 $Ax = \lambda y$ 形式上相似。当然 $\mathcal{T}y = \lambda y$ 中的 λ 不再是特征值了，而是特征元素或者特征函数。这样我们将一个很简单的东西，而无穷维空间中函数的概念对应了起来，可以帮助我们去认识新的概念。当然不是所有的函数都有特征元素，就和线性代数里一样，要想矩阵由特征值，必须保证 $x \neq 0$。有解的那些 λ，称为 S-L 问题的特征值。那么下一步则是对这个问题进行求解。求出 $-y''(t) = \lambda y(t), \quad -\pi < t \leqslant \pi$ 的通解，

1. 当 $\lambda > 0$ 时，有 $y(t) = A\cos\sqrt{\lambda}t + B\sin\sqrt{\lambda}t$。这里是将复数用欧拉公式展开的。然后代入边界条件 $y(-\pi) = y(\pi)$ 可以得到，

$$
\begin{gathered}
A\cos\sqrt{\lambda}\pi - B\sin\sqrt{\lambda}\pi = A\cos\sqrt{\lambda}\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\pi \\
\Rightarrow 2B\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0
\end{gathered}
$$

而两边代入边界条件 $y'(-\pi) = y'(\pi)$，可以得到，

$$
\begin{gathered}
-A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi \\
= A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi \\
\Rightarrow A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0
\end{gathered}
$$

由于 $\lambda > 0$, 其 A, B 不能同时为 0, 所有我们可以得到, $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$。所以, $\lambda = n^2(n = 1, 2, \cdots,)$ 时，可以满足两个边界条件。

2. 而当 $\lambda = 0$ 时，可得 $-y'' = 0$。在满足边界条件的情况下，可得 $y = 1$。

3. 而当 $\lambda < 0$，比较容易可以解得 $y = Ce^{\pm\sqrt{-\lambda}t}$。但是这个解并不能满足边界条件。

综上所述，我们可以求解出特征元素为，$\{\lambda_n\} = \{0, 1^2, 2^2, \cdots, n^2, \cdots\}$。将此结果代入到第一步计算出的通解中进行求解，并且把 $\mathcal{T}y = -y''$ 看成是一种运算，可以得到其对应的特征函数为，

$$
\{e_n\} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}
$$

这样我们就得到一个特征函数系。然而，这恰好就是 **Fourier 展开中的正交坐标系（乘以系数可使之单位化）**。我们在这似乎找到了结合点，下面将线性代数中有限维算子的分解，和无穷维函数算子的分解做一个对比。

2.2 有限维算子和无限维算子对比

在这一小节中，我们将 $\mathcal{T}y = -y''$ 看成一种运算（自共轭（对称）算子）。再一小节中，将 $\mathcal{T}y_n = \lambda_n y_n$ 与 $Ay_n = \lambda_n y_n$ 进行对比。在线性代数中，我们可以将运算分解为在一个正交坐标系中 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 投影的形式，而我们下一个问题就是在无限维的函数算子上，是不是也可以得到类似的结论。这就是我们泛函分析的一个基本问题，而实际上是可以做如下的分解的，

$$
\begin{gathered}
A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n; \quad (\text{有限维}) \\
\mathcal{T} = (?)\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n + \cdots; \quad (\text{无限维})
\end{gathered}
\tag{2}
$$

其中 P 是其在特征元素上的投影算子，而也可以被称为是无穷维空间上线性算子的一种分解（谱分解）。而接下来的问题就是，这个无限维的东西加在一起是什么东西，它已经不再是一个数了。那么通过上述的分解，我们将两个看似无关的东西，联系在了一起，由简单的东西推广到复杂的东西，在数学研究中是非常重要的。

并且，我们希望在新的函数空间下，函数 f 可以分解为，

$$
f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, e_i)\, e_i \tag{3}
$$

其中，e_i 是 $\mathcal{T}$ 关于 λ 的特征函数，$\mathcal{T}e_i=\lambda_i e_i$，比如 $\mathcal{T}\sin 2x=4\sin 2x$。所以 S-L 算子 $\mathcal{T}$ 作用在 f 上，是否可以有:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}f &= \mathcal{T}\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)\,e_i = (?)\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)\,\mathcal{T}e_i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)\,\lambda_i e_i
\end{aligned}
\tag{4}
$$

红色标记问号的地方，有一个运算次序是否可以交换的问题。

在有限维空间，可以有不同的正交系 (它们可以由不同的对称矩阵产生)，在无穷维空间是否也可以有不同的正交系，它们可以由不同的算子产生？答案是肯定的。

3 勒让德（Legendre）多项式

3.1 勒让德多项式特征值和特征函数分析

Legendre 多项式，考虑 Legendre 方程，

$$
\begin{cases}
-\left(1-x^2\right)y''+2xy'=\lambda y, & (-1<x<1)\\
y(1)<\infty \\
y(-1)<\infty
\end{cases}
\tag{5}
$$

而方程可以化简为，

$$
-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(1-x^2\right)y'\right)=\lambda y \tag{6}
$$

它是对称的微分算子，可以求出特征值为 $\lambda_n=n(n+1)$。而特征函数为：$y_n=\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2-1\right)^n$。

这里的求解比较的复杂，在这里不做过多的解释，之后的学习中大家自然会遇到的。这里的特征函数是一个多项式，比之前的前面的三角函数为特征函数，显然多项式要简单很多。并且，我们定义内积运算，

$$
(y_n,y_m)=\int_{-1}^{1}y_n(x)y_m(x)\,dx
$$

其中，我们将此函数定义为内积。很显然这满足内积的定义，非负性，正定性，数乘性质和乘法分配率。很显然还是可以满足那四条，可以称之为内积运算。很显然，我们定义的特征函数可以满足，

$$
\int_{-1}^{1}y_n(x)y_m(x)dx=0(m\neq n) \tag{7}
$$

它们是 $L_2[-1,1]$ 上的正交系 (对称线性算子的特征函数系)。其中，

$$
\begin{aligned}
&y(x)=1, \quad y_3(x)=\tfrac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)\\
&y_1(x)=x, \quad y_3(x)=\tfrac{1}{8}\left(35x^4-30x+3\right)\\
&y_2(x)=\tfrac{1}{2}\left(3x^2-1\right), \quad y_5(x)=\tfrac{1}{8}\left(63x^3-70x^3+15x\right)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

那么他们可以称之为正交特征函数，可以类比思考为一个正交系。**这组特征多项式和 Fourier 级数展开得到的特征向量是同一种性质的东西，他们都是正交系**。而勒让德多项式特征函数图像，如下所示，

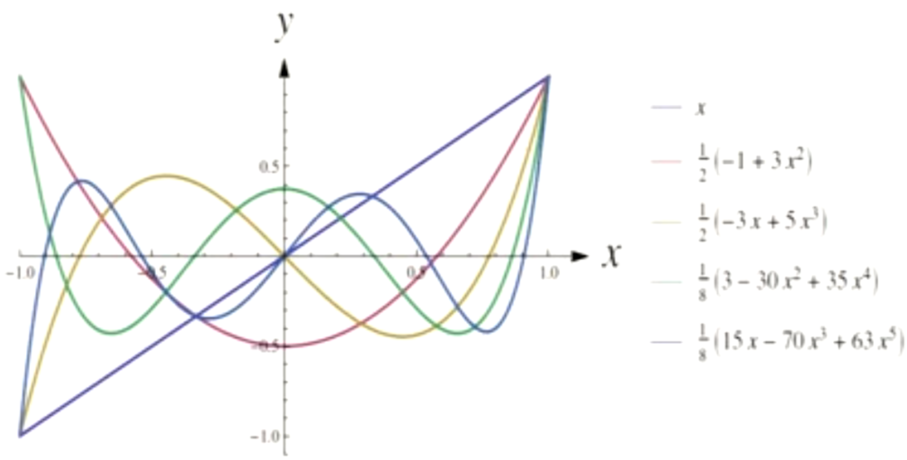

图 1: 勒让德多项式特征函数图像

通过上述几个例子，我们似乎找到了无穷维分解和有穷维分解直接的联系。**在数学研究中，我们经常这样来思考问题。通过特例来发现一些规律或者猜想，大胆的假设猜想是成立的，然后给出普适性的证明。**

3.2 Fourier 特征函数与特征多项式对比

不知道大家有没有注意到 Fourier 特征函数与特征多项式有没有什么相似的地方。大家发现，好像这个 n 值越大，他们和 x 轴的交点都是越来越多，这个零点越来越多也就意味着震动的频率越来越大。而且随着 n 的增大他们的函数图像很像。那么这又可以给我们怎样的启发呢?

不论我们是用什么样的方式去分解一个微分算子，得到其特征值和特征函数，而特征函数都有非常好的震动性。这都是我们观察到的，那他们到底对不对呢?

4 无穷维空间线性算子的性质上的区别

我们线性泛函分析主要研究两个问题，一个是空间，其中包括函数空间，算子的空间；还有一个就是线性算子，包括微分，积分这些东西。

微分和积分是高等数学研究的主要对象。

共同点：它们都是线性运算:

不同点：粗略地说微分可能把函数“放大”，积分可能把函数“变小”。

例如函数，$y=x^n, x\in[0,1]$，则有，

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1} \\ \int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1} \end{array} \tag{9}$$

当然这只是我们直观的一种感觉形式。下面这个例子我们将可以看得更加清晰。

4.1 函数级数项分析

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 满足：

1. $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在函数 $[a,b]$ 上连续。
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $S(x)$；

则 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且满足

$$\int_0^b S(x)\cdot dx=\int_a^b \sum_{a=1}^{\infty} u_m(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^4 u_a(x)dx \tag{10}$$

即在一致收敛的条件下，积分运算可以与无穷级数运算交换顺序。这个证明在数学分析中已经有了，这里不再做过多的说明。

1. $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在函数 $[a,b]$ 上连续可导；
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上点点收敛到 $S(x)$；
3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $\sigma(x)$；

那么，在这三个条件下，我们可以得出 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可导的。并且，

$$\frac{d}{dx}S(x)=\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}u_n(x) \tag{11}$$

即求导运算可以与无穷级数运算交换顺序，但是微分与级数运算交换顺序比积分与级数运算交换顺序多了一个条件 (3)。

以后我们看到积分算子是有界 (连续) 线性算子；微分算子是无界线性算子，但是它是闭算子。所以他们两者都可以和级数运算交换顺序。而有界算子可以简单的理解为收敛的，无界算子则是非收敛的。所以，有界线性算子与无界线性算子运算性质有很大差别。这也是我们泛函分析的重点。

5 总结

上述数学分析、线性代数、微分方程的一些例子中，在处理问题上有许多相似的方法，包括：问题和元素更一般化 (抽象化)，空间中的元素 (向量) 可以是函数或运算 (矩阵运算、微分运算、积分运算，级数 (极限) 运算。而且我们都建立一种空间的框架，把元素 (可以是函数或运算) 进行坐标分解。我们希望通过类比等方法把它们推广到 (结果可能会有差异) 泛函分析的研究中去，应用几何、代数和分析的综合手段研究解决问题，研究无限维线性空间上的泛函和算子理论。这就是我们研究的主要问题，也是我们下面要研究的泛函分析的主要内容，。

在绪论中，我们希望从问题本身出发，发现问题，解决问题。而不是直接引入公理系统，这样有助于大家理解问题。

而本系列课程的主要内容如下所示：

1. 首先引入**空间，极限**这些概念，讨论它们的性质。包括第一到第三章：距离空间；线性赋范空间；内积空间。这是怎样一个逻辑呢？我们引入内积的概率以后就可以定义长度和距离，自然就有了距离空间和线性赋范空间。

2. 研究线性算子 (线性算子空间) 的性质。包括第四到第五章：有界线性算子，有界线性算子的重要性质；共轭空间；特别是 Hilbert 空间的共轭空间和共轭算子。**重要定理包括：一致有界原则；开映射定理、逆算子定理；闭图像定理；线性泛函的延拓定理 (Hahn Banach 定理)。这是最核心也是最难的部分**。

3. 最后两章是线性算子的谱理论，什么是谱理论呢？实际上就是特征值问题。**谱分解从结构上展示了线性算子的基本运特征，特别是紧的自共轭算子的谱分解和有限维空间对称矩阵的分解十分相似（这里的共轭实际就和对称是非常相似的，紧和有限维空间是非常相似的）**。

而本系列课程的学习目标如下所示：

1. 理解为什么会有泛面分析，明白泛函分析在做什么；
   (a) 最基本的概念 (概念的来源和背景)；
   (b) 数学研究的基本方法: 化归、类比、归纳、联想。
   (c) 一定的抽象思维的能力，**概念清楚，思维清晰**。

2. 感悟数学的美。

老师这里有一句话非常的重要，“泛函分析学习的过程中，一定要牢记类比简单的二维或三维情况，它们都有着类似的地方。如果将这些概念脱离问题背景本身去看是非常复杂，生涩的。而结合其问题背景就会变得很好理解了。”

绪论结束语:

1. 要把数学看成客观世界的简单化。

2. 要从整体上了解数学, 才能培养良好的数学素质。数学知识重要的是，可以用数学抽象出来的观点来看待客观世界，解决实际问题。

3. 要从具体的实例中感悟数学的思想方法.

“数学决不应成为一门十分费解的科学”。

我们借用张恭庆院士等在他的泛函分析序言中的一段话来结。

我们认为要真正理解泛函分析中的一些重要的概念和理论，灵活运用这一强有力的工具，**其唯一的途径就是深入了解它们的来源和背景**，注意研究一些重要的、一般性定理的深刻的、具体的含义。不然的话，如果只是从概念到概念，纯形式地理解抽象定理证明的推演，那么学习泛函分析的结果只能是“如入宝山而空返”，一无所获。