完备的距离空间的性质和应用

Chen Gong

15 January 2021

目录

1 Introduction

上一节讲到了，对于不完备的空间，我们可以想办法让它变得完备。那么为什么要在完备的空间下研究问题呢？有什么样的好处吗？这一节，将介绍完备空间的性质。让大家深刻理解，为什么要在完备的空间下研究问题呢？

2 闭球套定理

在距离空间中引入了开集，闭集的概率后，我们研究了空间中序列的收敛性，Cauchy 列，讨论了空间的列紧性，可分性，完备性。

在完备空间中，类似于数学分析中的区间套定理，也有闭球套定理。所谓，区间套定理，直观的来说就是一个区间套一个区间，被套住的区间大小比之前要小，这样不停地套下去，最终会收敛到一个点，而且这个点是唯一的。

~

定理 2．1 X 是完备的距离空间，$\bar{S}_n = \bar{S}(x_n, r_n)(n = 1, 2, \cdots)$ 是 X 中的一系列闭球集：

$$\bar{S}_1 \supset \bar{S}_2 \supset \cdots \supset \bar{S}_n \supset \cdots$$

且 $r_n \to 0(n \to \infty)$，则存在 X 中唯一的一点，

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{S}_n$$

此定理的证明过程，主要分三个步骤，1．找到这样的 x；2. 证明 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{S}_n$； 3．证明其唯一性。

证明：

1. 设 $\{x_n\}$ 是球心组成的点列，所以，有

$$d(x_n, x_m) < r_n \ (m > n)$$

这是由于第 m 个球，一定在第 n 个球里面。且，当 $r_n \to 0 \ (n \to \infty)$。所以，当 $n, m > N$ 时

$$d(x_n, x_m) < r_n < \epsilon \ (m > n > N)$$

根据 Cauchy 的定义，可得 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列。又因为X 是完备的，所以，$\{x_n\}$ 可以收敛到一点，使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$。

2．由于 $d(x_n, x_m) < r_n \ (m > n)$，根据距离的连续性，令 $m \to \infty$，根据第一步推出的结果，有 $d(x_n, x) \le r_n$，所以有 $x \in \bar{S}(x_n, r_n)$。且，$\bar{S}_n$ 是闭球集，那么点 x 肯定包含在所有的球中。于是我们有 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{S}_n$。

3．第三步则是证明此点唯一。如果，存在 $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{S}_n$。那么，对于任意的 x_n，都有

$$d(x_n, y) \le r_n,$$

令 $n \to \infty$，有 $d(x, y) \le 0$，由于距离的连续性，所以有 $x = y$。

3 压缩映射原理

终于系统的看到了压缩映射原理了，小编研究的是强化学习，压缩映射原理是非常重要的。因为，我们设计一种算法，往往需要迭代的方法来进行求解。并且，需要证明每一次迭代，数值解和真实解之间的距离都会更近，而且最终会收敛到一个不动点，这是算法的理论基础，证明不动点的存在非常重要，因为只有证明了这个点的存在，我们才能采用一些办法来逼近它。而不动点问题，是数学研究中的重要问题之一。

3.1 压缩映射定理的基本背景

本节主要介绍压缩映射原理，所谓一个映射 T 的不动点是指，T把这个点映射为自身，即有 $\mathrm{T}x = x$。实际上，机器学习中非常重要的一类方法即为迭代法解方程。而任何解方程的问题都可以转化为求不动点的问题：

$$F(x) = 0 \Longleftrightarrow F(x) + x = x$$

那么，可以令 $F_1(x) = F(x) + x = x$，令 $\mathrm{T}(x) = F_1(x)$。则解方程的问题转化为求不动点 $x : \mathrm{T}x = x$。因而研究不动点理论及其应用具有重要的理论意义及应用价值。我们数学上最重要的一类问题就是解方程的问题，不论是微分方程还是积分方程等。

~

例 3 .1 在实数范围内求解方程 $y = x^2 - 2x + 1 = 0$，令

$$\mathrm{T}x = x^2 - x + 1,$$

则求解一元二次方程的问题转化为了：什么时候 $\mathrm{T}x = x, x \in \mathbb{R}$，即为：映射 T 有没有不动点。

在代数方程、微分方程、积分方程及其它各类方程理论中解的存在性，唯一性以及近似解的收敛性都是很重要的课题，在许多关于存在唯一性的定理的证明中，“不动点”是一个有力的工具。可以说，不动点定理是泛函分析中最基本的一个存在性定理。分析中的许多存在性定理都是不动点定理的特例。不动点理论已发展成非线性泛函分析的重要内容之一。

3.2 压缩映射定理起源

多项式根的近似计算最显著的技巧是逐次迭代法，比如 Newton 迭代求根法，

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ k = 0, 1, 2, \cdots$$

如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$，我们有 $f(x^*) = 0$。这实际就是压缩映射的一种简单表现形式。而 $\mathrm{T}x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$。

首先将这个技巧应用于无穷维情形的是一个法国数学家 Liourville，他成功地利用这个技巧求解常微分方程初值问题，1922 年，Banach 把这个结果抽象化、用距离空间及压缩映射 (压缩映射是一种特殊的非线性映射) 等概念更一般地描述这个方法，这就是著名的 Banach 不动点定理，或压缩映像原理。

考虑微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t), t) \\ x|_{t=0} = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

对公式左右两边 $[0,\tau]$ 进行积分有，

$$x(t)-x(0)=\int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau$$
$$x(t)=x_0+\int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau$$

其中，$\int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau$ 是关于 $x(t)$ 的函数，记为 $\bar{x}(t)$。那么从泛函分析的角度来看，可以看成一个映射的问题，令

$$\mathrm{T}x=x_0+\int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau \tag{2}$$

其中，x 是一个函数 $x(t)$，经过映射 T 之后，得到一个新的函数 $\bar{x}(t)$，T 是函数到函数的映射。那么微分方程就转化成立这个积分算子 $\mathrm{T}x$ 是否有不动点的问题，即在空间 X 是否存在元素 x，满足 $\mathrm{T}x=x$。如果满足压缩映射定理，就有不动点。

3.3 压缩映射原理，Banach 不动点定理

设 (X,d) 是完备的距离空间，$\mathrm{T}:X\to X$。如果对于任意的 $x,y\in X$，不等式

$$d(\mathrm{T}x,\mathrm{T}y)\le\theta d(x,y) \tag{3}$$

成立，其中 $0<\theta<1$，则存在唯一的 $\bar{x}\in X$，使得

$$\mathrm{T}\bar{x}=\bar{x} \tag{4}$$

分析，首先找到 T 的不动点，然后证明其唯一性。由公式 (3) 可以看到，T 作用后两点间的距离成比例地压缩，是一压缩映射，希望用迭代法找到不动点。

任取 $x_0\in X$，令

$$x_1=\mathrm{T}x_0,\ x_2=\mathrm{T}x_1,\cdots,\ x_{n+1}=\mathrm{T}x_n,\ \cdots$$

需要证明

1. $x_n\to\bar{x}\ (n\to\infty)$，
2. T 连续，

则可以推出 $\bar{x}=\mathrm{T}\bar{x}$。而为什么需要这两个条件呢?我们最终希望得到 $x_{n+1}=\mathrm{T}x_n$，即有 $\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}x_n$，推出 $\bar{x}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}x_n$。右边，我们想得到，$\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}x_n=\mathrm{T}\lim_{n\to\infty}x_n=\bar{x}$。而这里要想交换 T 和 lim 运算，则需要保证 T 是连续的。

要想证明 1，由于空间是完备的，要证收敛，只需要证明 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列即可。对于证明 2，因为 T 是压缩映射，由连续映射的定义可知 T 是连续的。

1. T 是连续的 (一致连续的)。

事实上，$\forall\epsilon>0$，取 $\delta=\epsilon>0$，当 $d(x,y)<\delta$ 时，

$$d(\mathrm{T}x,\mathrm{T}y)\le\theta d(x,y)<\delta=\epsilon$$

2. 用迭代法求 x，

任取 $x_0\in X$，令

$$x_1=\mathrm{T}x_0,\ x_2=\mathrm{T}x_1,\cdots,\ x_{n+1}=\mathrm{T}x_n,\ \cdots$$

下面的目标则是证明 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列，由于对任意的自然数 p，

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+p}) &\le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\
&\le \theta^n d(x_0, \mathrm{T}x_0) + \theta^{n+1} d(x_0, \mathrm{T}x_0) + \cdots + \theta^{n+p-1} d(x_0, \mathrm{T}x_0) \\
&< \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0, \mathrm{T}x_0)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

因为 $0 < \theta < 1$，所有当 $n \to \infty$ 时，必然有 $\frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0, \mathrm{T}x_0) \to 0$。所以，$\{x_n\}$ 是 Cauchy 列。而由于 (X, d) 是完备的，所有存在 $\bar{x}$，使得 $x_n \to \bar{x}(n \to \infty)$，由于 T 是连续的，所以有，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}x_n = \mathrm{T} \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x},$$

由迭代公式，$x_{n+1} = \mathrm{T}x_n$，我们得到：$\bar{x} = \mathrm{T}\bar{x}$。

3．唯一性：若存在 $\bar{y}$ 使得，$\mathrm{T}\bar{y} = \bar{y}$，则

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\mathrm{T}\bar{x}, \mathrm{T}\bar{y}) \le \theta d(\bar{x}, \bar{y})$$

由于 $\theta \in (0, 1)$，所以只有可能 $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$，故 $\bar{x} = \bar{y}$。

~

存在这样一种情况，开始不是压缩映射，后来就变成压缩映射了。也就是映射做一次并不是压缩映射，而做了多次以后，变成了压缩映射。

设 (X, d) 是完备的距离空间，T 是 X 到 X 的映射，如果存在正整数 n_0，使得对所有的 $x, y \in X$，

$$d(\mathrm{T}^{n_0}x, \mathrm{T}^{n_0}x) \le \theta d(x, y) \tag{6}$$

其中，$\theta \in (0, 1)$，则 T 有唯一的不动点。

分折：由（6）式，我们看到 T^{n_0} 满足不动点定理的条件，存在唯一不动点 $\bar{x}$。要证 T 有唯一不动点，考虑 T^{n_0} 的不动点是否就是 T 的不动点?

证明：

因为 T^{n_0} 满足不动点定理，顾存在唯一的 $\bar{x}$，使得 $\mathrm{T}^{n_0}\bar{x} = \bar{x}$。因为，

$$\mathrm{T}^{n_0}(\mathrm{T}\bar{x}) = \mathrm{T}(\mathrm{T}^{n_0}\bar{x}) = \mathrm{T}\bar{x}$$

所以，观察第一项和第三项可得，$\mathrm{T}\bar{x}$ 也是 T^{n_0} 的不动点。又因为 T^{n_0} 的不动点是唯一的，所以，

$$\mathrm{T}\bar{x} = \bar{x}.$$

所以，$\bar{x}$ 是 T 的不动点。

唯一性：反证法（小编发现，证明唯一性，非常喜欢用反证法！）

假设，x_1 也是 T 的不动点，则有，

$$\mathrm{T}^{n_0}\bar{x}_1 = \mathrm{T}^{n_0-1}(\mathrm{T}\bar{x}_1) = \mathrm{T}^{n_0-1}(\bar{x}_1) = \cdots = \bar{x}_1$$

所以，$\bar{x}_1$ 也是 T^{n_0-1} 的不动点，由于 T^{n_0-1} 不动点的唯一性，我们有 $\bar{x} = \bar{x}_1$。

4 不动点定理

满足压缩映射的是不动点，而满足压缩映射的情况有很多，从而就衍生出了一系列的不动点定理。比较出名的有以下几个，

定理 4 .1(Brouwer) 设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭单位球。设 $\mathrm{T}: B \to B$ 是一个连续映射，则 T 必有一个不动点 $x \in B$。

例 4 .1 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的连续函数，且其值域包含 $[-1, 1]$ 中，则存在 $\bar{x} \in [-1, 1]$，使得：$f(\bar{x}) = \bar{x}$。

定理 4 .2(Schauder) 设 C 是线性赋范空间 X 中的一个闭凸子集，$\mathrm{T}: C \to C$，连续且 $T(C)$ 列紧，则 T 在 C 上必有一个不动点。

5 压缩映射原理的应用

例 5.1

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t), t) \\ x|_{t=0} = x_0 \end{cases} \tag{7}$$

其中 $f(x, t)$ 在平面上连续，且对于变量 x 满足 Lipschitz 条件：

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| \leq K|x_1 - x_2| \tag{8}$$

这个条件非常的好，把右边的 $|x_1 - x_2|$ 除过来有，

$$\frac{f(x_1, t) - f(x_2, t)|}{|x_1 - x_2|} \leq K \tag{9}$$

对于二元函数 $f(x, t)$，可以保证 x 是连续的，这个很好判断，但是并不能保证可导。所以，Lipschitz 是介于偏导数存在和连续之间的一个条件。如果满足此条件，则有方程 (9) 在 $t = 0$ 的某个邻域中有唯一解。

分析，和 3.2 中的做法一样，把微分运算换成积分运算，大家都知道，微分运算和积分运算是互为逆运算的。

$$\mathrm{T}x = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau \tag{10}$$

我们先证明这个积分运算是压缩映射，然后利用不动点存在定理得出方程有唯一解。那么如何证明积分运算是压缩映射呢？压缩映射有以下几个条件，1. X 要是个完备的距离空间；2. 满足压缩映射的条件； 3 . 得到条件，一定存在不动点。所以，我们首先要意识到，我们在哪个空间上研究这个问题。

证明：

1. 确立距离空间，建立映射；

考虑连续距离空间 $C \in [-\delta, \delta]$ 上的如下映射 (积分算子)：

$$\mathrm{T}x = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau$$

则 T 是从 $C \in [-\delta, \delta]$ 到 $C \in [-\delta, \delta]$ 自身的映射。

2. 验证映射满足不动点定理的条件。

$$
\begin{aligned}
d(\mathrm{T}x,\mathrm{T}y)= & \max_{-\delta\le t\le\delta}\left|\int_0^t |f(x(\tau),\tau)-f(y(\tau),\tau)|d\tau\right| \\
\le & K\max_{-\delta\le t\le\delta}\left|\int_0^t |x(\tau)-y(\tau)d\tau\right| \\
\le & K\delta\max_{-\delta\le t\le\delta}|x(t)-y(t)| \\
= & K\delta d(x,y)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

我们肯定可以找到一个 δ 令 $0<K\delta<1$ 的，这个可以放心，且 $C[-\delta,\delta]$ 是完备的。由压缩映射定理可得，方程必有唯一解。而为什么我们要将微分运算变成积分运算呢?

这里老师提出了一种直观的理解方法，我们知道积分运算和微分运算是互逆的。比如，a 和 $\frac{1}{a}$ 是互逆的，那么当 a 越来越大，则 $\frac{1}{a}$ 则会越来越小。所以类比过来，积分运算每一次运算会导致距离会越来越小，而微分运算每一次运算会导致距离会越来越大。那么，在微分运算中，其实达不到压缩映射的要求，而在积分运算中可以证明是压缩映射。那么，可以证明积分方程可以收敛到唯一的解，所以反向得出，微分方程也可以收敛到唯一的解。而我们已经证明了，积分运算是压缩映射，而微分运算是积分运算的逆运算，所以理论上，微分方程是肯定做不到这一点的。所以，数学中经常将微分方程转化为积分方程。

~

例 5.2 考虑线性方程组

$$
\xi_i-\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j=b_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{12}
$$

其中，

$$
\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2<1 \tag{13}
$$

证明，此方程组有唯一解。

分析：考虑将方程组转化为映射的不动点问题。假定 $x=\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，并定义 $\mathrm{T}x$，使得其第 i 个分量的作用形式为 $\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j+b_i$，则方程组可转化为 $\mathbb{R}^n$ 空间上 $\mathrm{T}x=x$ 的不动点问题。

证明：

1．建立映射：设，

$$
(\mathrm{T}x)_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j+b_i, \quad (i=1,2,3,\cdots). \tag{14}
$$

$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$，则 T 是 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的一个映射。

2. 验证映射满足不动点定理条件。由于，

$$
\begin{aligned}
d(Tx_1,Tx_2) &= \left\{\sum_{i=1}^n\left[\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j^{(1)}+b_i\right)-\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j^{(2)}+b_i\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{\sum_{i=1}^n\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}\left(\xi_j^{(1)}-\xi_j^{(2)}\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

而，

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\xi_j^{(1)} \quad -\xi_j^{(2)}\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j^{(1)}-\xi_j^{(2)}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j^{(1)}-\xi_j^{(2)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

$$= \theta d\left(x_1, x_2\right)$$

其中，

$$\theta = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < 1 \tag{17}$$

根据压缩映射原理，方程组有唯一解。

~

例 5.3 在上例中，若将条件改为：

$$\alpha = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right| < 1 \tag{18}$$

通过这一系列例子，我们希望看到不同的空间中，对于压缩映射定理不同的处理方法。其解决问题的思路和方法同上。事实上，如果 n 维向量空间的距离定义为：

$$d(x,y) = \max_{1\leq i\leq n}\left|\xi_i-\eta_i\right| \tag{19}$$

其中，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$。

1．建立映射：设，

$$(\mathrm{T}x)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + b_i, \quad (i=1,2,3,\cdots). \tag{20}$$

$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$，则 T 是 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的一个映射。

2.

$$d\left(\mathrm{T}x_1,\mathrm{T}x_2\right) = \max_{1\leq i\leq n}\left|\left(\sum_{j=1} a_{ij}\xi_j^{(1)}+b_i\right)-\left(\sum_{j=1} a_{ij}\xi_j^{(2)}+b_i\right)\right|$$

$$= \max_{1\leq i\leq n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\xi_j^{(1)}-\varepsilon_j^{(2)}\right)\right| \tag{21}$$

$$= \max_{1\leq j\leq n}\left|\xi_j^{(1)}-\xi_j^{(2)}\right|\cdot\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$$

$$= \alpha d\left(x_1,x_2\right)$$

同样是完备的距离空间，满足压缩映射的条件，所有有唯一的解。这两个例题充分描述了，根据研究问题的不同，我们可以选择不同的距离空间，只要是完备的就行。

例 5.4 Fredhom 积分方程

$$x(t)=\varphi(t)+\mu\int_a^b k(t,s)x(s)ds \tag{22}$$

其中，$k(t,s),\varphi(t)$ 是 $a\leq t\leq b,a\leq s\leq b$ 上的连续函数，则当 $|\mu||b-a|M<1$ 时，方程存在唯一解，其中，

$$M=\max_{a\leq t\leq b,a\leq s\leq b}|k(t,s)| \tag{23}$$

证明，1.

$$\mathrm{T}t=\varphi(t)+\mu\int_a^b k(t,s)x(s)ds \tag{24}$$

T 是从 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的映射。

2. 对任意的 $x,y\in C[a,b]$，有

$$\begin{aligned}d\left(Tx_1,Tx_2\right)&=\max_{a\leq t\leq b}|\mu|\left|\int_a^b\left[k(t,s)\left(x_1(s)-x_2(s)\right)\right]\mathrm{d}s\right|\\&\leq|\mu||b-a|M\max_{a\leq t\leq b}|x_1(t)-x_2(t)|\\&=|\mu||b-a|\,\mathrm{Md}\left(x_1,x_2\right)\end{aligned} \tag{25}$$

其中，

$$M=\max_{a\leq t\leq b,a\leq s\leq b}|k(t,s)| \tag{26}$$

且因为，$|\mu||b-a|\,\mathrm{M}\in(0,1)$，所以，满足压缩映射条件，方程有唯一解。

例 5.5 Volterra 积分方程

$$x(t)=\varphi(t)+\mu\int_a^t k(t,s)x(s)ds \tag{27}$$

其中，$k(t,s),\varphi(t)$ 是 $a\leq t\leq b,a\leq s\leq b$ 上的连续函数，则方程存在唯一解。这个 Volterra 方程和前面的 Fredhom 方程最大的区别即为，不再是定积分，而是变限积分函数。和前面一样，首先要确定完备的距离空间，并确立映射关系。

1.

$$\mathrm{T}x=\varphi(t)+\mu\int_a^t k(t,s)x(s)ds \tag{28}$$

T 是从 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的映射。

2. 对任意的 $x,y\in C[a,b]$，有

$$\begin{aligned}|Tx_1-Tx_2|&=|\mu|\left|\int_a^t k(t,s)\left[x_1(s)-x_2(s)\right]\mathrm{d}s\right|\\&\leq|\mu|M(t-a)\max_{a<t\leq b}|x_1(t)-x_2(t)|\end{aligned} \tag{29}$$

其中，$M=\max_{a\leq t\leq b,a\leq s\leq b}|k(t,s)|$。

3. 进一步的有

$$
\begin{aligned}
\left|T^2x_1 - T^2x_2\right| =& \left|T\left(Tx_1\right) - T\left(Tx_2\right)\right| \\
\leq& |\mu|^2 M^2 \int_a^t (\tau - a) \max_{a\leq t\leq b} |x_1(\tau) - x_2(\tau)| \,\mathrm{d}\tau \\
=& |\mu|^2 M^2 \frac{(t-a)^2}{2} \max_{a\leq t\leq b} |x_1(t) - x_2(t)|
\end{aligned}
\tag{30}
$$

4. 一般来说，

$$
|T^n x_1 - T^n x_2| \leq |\mu|^n M'' \frac{(t-a)^n}{n!} \max_{a\leq t\leq b} |x_1(t) - x_2(t)| \tag{31}
$$

5. 所以，

$$
d(\mathrm{T}^n x_1, \mathrm{T}^n x_2) \leq |\mu|^n M'' \frac{(t-a)^n}{n!} d(x_1, x_2) \tag{32}
$$

由于，

$$
|\mu|^n M'' \frac{(t-a)^n}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty)
$$

所以，

$$
|\mu|^n M'' \frac{(t-a)^n}{n!} \in (0, 1)
$$

由 3.3 节的描述，可以得出有此积分方程有唯一解。而此证明过程，放大的比较细致，所以对条件的要求比较少；放大的越粗糙，当然对条件的要求会比较高。

上述这些对于求解方程的例子，都是通过把原来的问题转化为不动点问题解决的。压缩映射原理在隐函数存在性定理。研究各类方程解的存在性、唯一性以及近似解的收敛性等理论中起到了十分重要的作用。

6 本章小结

本章主要介绍的是完备空间中的应用，压缩映射定理。压缩映射原理在隐函数存在性定理，研究各类方程解的存在性、唯一性以及近似解的收敛性等理论中起到了十分重要的作用。也是小编研究的强化学习中非常重要的定理。本章首先对压缩定理进行了证明，然后举了一些例子来讲述压缩映射定理在其中的应用。压缩映射的使用步骤整体为两步，第一步证明是在完备的举例空间中，第二步验证是否满足压缩映射定理的条件。其中，学习到了放缩是数学中最重要的技巧之一，放缩的方法有很多，而往往越精细的方法得到的结果会越好。