Functional Analysis 1.4 Close Set Separability

Chen Gong

31 August 2020

目录

1 Introduction

上一节中，我们介绍了开集和连续映射的概念。本节讲述的是闭集，可分性和列紧性的内容。闭集的概念比开集的概念就难多了。本节的主要内容是，研究闭集的定义和性质，包含两个内容：

(1) 利用开集研究闭集。

(2) 从点集结构上研究闭集。

2 距离空间的闭集

2.1 闭集的定义

定义 2.1 闭集的定义设 X 是一个距离空间，若它的补集 $A^c = X \setminus A$ 是开的，集合 $A \subset X$ 称为闭的。
定理 2.1 设 X 是一个距离空间,则 $B(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) \leq r\}$ 和 $S(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) = r\}$ 是闭集。

而之前讲的开集是将上式中的 $\leq$ 换成 $<$。

那么现在要如何证明定义 2.1 呢？根据闭集的定义，只要证明一个集合的补集是开集即可，证明开集使用开集的定义即可。

我们可以将条件改写为，设 $y \in \bar{B}(x_0, r)^c$，要证 y 是 $\bar{B}(x_0, r)^c$ 的内点。根据条件可得，

$$d(y, x_0) = \alpha > r$$

那么令 $\beta = \alpha - r > 0$，对于 $\forall z \in B(y, \beta)$，有

$$\begin{aligned} d(x_0, z) &\geq d(y, x_0) - d(y, z) \\ &= \alpha - d(y, z) \\ &> \alpha - \beta \\ &= r \end{aligned} \tag{1}$$

所以对于 $\forall y \in \bar{B}(x_0, r)^c$，$\exists$ 邻域 $B(y, \beta)$，邻域中的点都是大于 r 的。从而推出 $B(y, \beta) \subset \bar{B}(x_0, r)^c$。所以 $\bar{B}(x_0, r)^c$ 是开的，于是 $\bar{B}(x_0, r)$ 是闭集。

由 $S\left(x_a, r\right)^c = B\left(x_0, r\right) \cup B\left(x_0, r\right)^c$ 是开的。(根据任意多个开集的并集是开集）因此 $S(x_0, r)$ 是闭集。

记 $\mathcal{F}$ 为距离空间 (X, d) 中全体闭集，利用关于补集的 De Morgan 公式，结合 (开集的性项，决定空间拓扑结构的三条性质)，得

定理 2.2 设 (X, d) 是一个距离空间，则

(1) 全空间与空集是闭集；

(2) 任意多个闭集的交是闭集；

(3) 有限多个闭集的并是闭集。

上面我们是从开集和补集的角度来说明什么是闭集，接下来我们将换个角度来思考。数学概念学习的角度当然不是单一的，概念的引出是多方面的，我们只有从多个角度全面的理解数学概念，才能学得更加的扎实。

2.2 闭集的结构

当时我们也讲了开集的结构，就是都是由内点组成的。刚刚上面给出的闭集的定义是说他的补集是开集的集合，大家可能没有什么感觉。

而闭集的结构相对比较复杂，这从 Cantor 集是闭集就可以反映出来。下面从点集的结构上进一步研究闭集。

定义 2.2 设 X 是一个距离空间，$A \subset X$，$x \in X$。如果对于 $\forall \epsilon > 0$，球 $B(x, \epsilon)$ 中都包含 A 中的点，即为

$$B(X, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \ (\forall \epsilon > 0) \tag{2}$$

则称 x 为 A 的接触点。这里和我们之前学的交集的思路很像，我们在这里做一个简单的类比。那么显然会有，A 中的点一定是 A 的接触点，A 的接触点可能属于 A 也可能不属于 A。类比一下交集就知道了。

定义 2.3 聚点： 设 X 是一个距离空间，$A \subset X$，$x \in X$。如果对于 $\forall \epsilon > 0$，球 $B(x, \epsilon)$ 中都包含 A 中不同于 x 的点，即

$$B(x, \epsilon) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset \tag{3}$$

则称 x 是 A 的聚点。而且聚点一定是接触点，而反过来则不一定。也就是 x 的去心领域在 A 中。下面来举个简单的例子，

例 2.2.1，a 点和 b 点是开区间 (a, b) 上的聚点（也是接触点），但不属于开区间 (a, b)，而闭区间 $[a, b]$ 的聚点全部都在 $[a, b]$ 中。

例 2.2.2，设在连续函数空间 $X = C[0, T]$ 中，且 $A = \{x(t) \mid x(0) = 0, \text{且} |x(t)| < 1 (0 \leq t \leq T)\}$。我们可以注意到 $x_0(t) = 1$ 不是 A 的接触点。因为对于所有的 $x \in A$，其中都有 $d(x_0, x) \leq 1$（这里用到的是无穷阶的距离）。所以没有点会落到 A 里面，必然不是接触点。

例 2.2.3，设 X 表示由 $[0, T]$ 上的全体连续函数组成的集合，定义为，

$$d_2(x, y) = \left\{ \int_0^T |x(t) - y(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$$

集合还是 2.2.2 中的那个集合，$A = \{x(t) \mid x(0) = 0, \text{且} |x(t)| < 1 (0 \leq t \leq T)\}$。则可以证明 $x_0(t) = 1$ 是 A 的接触点（也是 A 的聚点），这个证明就很简单了，此距离求的是两个函数之间的平均距离。所以可以看到，一个点是否是一个集合的接触点和空间的距离有关。而在实际应用中，我们需要根据不同的问题来定义不同的距离空间。

2.2.1 从接触点的定义上定义闭集

下面将从结构上，用接触点来定义闭集的概念。

定义 2.4 设 X 是一个距离空间，$A \subset X$，A 的接触点的全体称为 A 的闭包，记为 $\bar{A}$。又因为 A 中的点一定是 A 的接触点，所以 $A \subset \bar{A}$。

定理 2.3 设 X 是一个距离空间，$A \subset X$，A 是闭集当且仅当 $A = \bar{A}$。

下面我们将给出其证明过程，第一步是证明其必要性：由 $A = \bar{A} \Rightarrow A$ 是闭集。思路比较简单，即为证明 A^c 是开的。

令 $x \in A^c$，由于 $A = \bar{A}$，所以 x 不是 A 的接触点，必然存在 ϵ 使得，

$$B(x, \epsilon) \cap A = \emptyset \tag{4}$$

且，A 表示为所有接触点的集合，那么 A^c 表示为所有的非接触点，而根据公式 (4) 可得，x 的一个领域中都是非接触点。则有 $B(x,\epsilon)\subset A^c$，因此 A^c 是开集，即 A 是闭集。

下一步则是证明充分性，即为证明 "A 是闭集，$A\subset X$，$A\Rightarrow A=\bar{A}$"。其中 $\bar{A}$ 是 A 的全体接触点的集合。要证 $A=\bar{A}$，由于有 $A\subset\bar{A}$（因为 A 中的点一定是 A 的接触点），下一步则是得到 $\bar{A}\subset A$ 即可。

这里的思路采用反证法来证明，令 $x\in\bar{A}$，假若有 $x\bar{\in}A$，即有 x 属于开集 A^c（这是因为 A 是闭集）。于是存在 ϵ_0，使得 $B(x,\epsilon_0)\subset A^c$，也就是，

$$B(x,\epsilon_0)\cap A=\emptyset \tag{5}$$

那么，x 不是 A 的接触点，这与 $x\in\bar{A}$ 相互矛盾。所以原证明成立！

2.2.2 从极限的角度来定义闭集

之所以从不同的角度来反复的定义"闭集"，是要从多方面理解闭集的性质。这一部分将从极限的角度来定义闭集。

定理 2.4 设 X 是一个距离空间，$A\subset X$，A 是闭集当且仅当 A 中收敛点列 $\{x_n\}\subset A$ 的极限属于 A。这句话可以理解为**在闭集里极限运算是封闭的**。

证明思路还是一样，我们需要从充分性和必要性两个角度来证明。首先是充分性条件的证明，**设 A 是闭的，且 $\{x_n\}\subset A$ 收敛，$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$，要证明** $x_0\in A$。那么这个证明思路是怎样的呢?

由于 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$，根据极限的定义，$\forall\epsilon>0$，都存在 x_n 满足 $d(x_n,x_0)<\epsilon$。这句话翻译一下就是 $x_n\in B(x_0,\epsilon)$，这表明 x_0 是 A 的接触点（x_n 是 A 中的点），有 $x_0\in\bar{A}$。由于，A 是闭集，所以 $A=\bar{A}$，$x_0\in A$。

这一段的逻辑性非常的强，根据极限的定义得出 x_0 是接触点，根据 $\bar{A}=A$ 得出 $x_0\in A$。

下一步则是证明必要性，假定每个收敛点列的极限都属于 A，要证 A 是闭集。根据定理 2.3 中给出的条件，只要证明 $A=\bar{A}$，即由 $x_0\in\bar{A}$ 推出 $x_0\in A$。

令 $x_0\in A$，根据闭包的定义（闭包是全体接触点），对 $\forall n\in N$，在 $B(x_0,\frac{1}{n})\cap A$ 中至少存在一点 x_n，显然

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0 \tag{6}$$

由已知得出，$x_0\in A$，因此 A 是闭的。

3 可分的距离空间

上述文章中，我们已经比较全面的分析了什么是闭集。本章中将可分的概念从一般实数空间，推广到一般空间中。

实数空间中，有理数是稠密的，有理数是可数的（可列可数的概念相信大家都有较好的认识了）。而任意一个实数都可以用有理数列来逼近。我们希望把这样的性质推广到一般空间中。**重点：理解稠密集的定义，由其定义可分距离空间；判断稠密性，距离空间的可分性**。

定义 3.1（稠密集）：设 A,B 是距离空间 X 中的点集，如果 $A\subset\bar{B}$，则称 B 在 A 中稠密。

而如果用 $\epsilon-\delta$ 语言描述即为，$\forall x\in A,\because x\in\bar{B},\therefore\forall\epsilon>0,B(x,\epsilon)\cap B\neq\emptyset$，即为存在 $y\in B$，使得 $d(x,y)<\epsilon$。

也就是说 A 中的每一个点都可以用 B 中的点来逼近：

$$\forall x \in A,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists y \in B,\ \text{s.t. } d(x,y) \leq \epsilon$$

注意，定义并没有要求 $B \subset A$。下面举两个例子：

例 3.1 $A = [0,1]$，B 是 $[0,1]$ 中全体有理数。$\bar{B} = [0,1]$，$A \subset \bar{B}$。所以 B 在 A 中稠密，这里的 $B \subset A$ 且 $B \neq A$。

例 3.2 如果 A 是 $[0,1]$ 中全体无理数，B 是 $[0,1]$ 中的全体有理数，我们有 $A \subset \bar{B}$，即有 $\bar{B}$ 在 A 中稠密，但是 $\bar{A} \cap A = \emptyset$。

显然有理数是一个稠密的，并且它还是可数的，这个性质非常的不错（比如说实数空间中的一点 π，可以用一个可数的有理数数列来逼近：$\{3, 3.1, 3.14, 3.141, \cdots\}$）。我们可以类似的将可数的特点推广到一般的空间中。

定义 3.2（可分距离空间）：设 X 是距离空间，如果 X 中存在一个可数稠密子集，则称 X 是可分的。即为，对于子集 $A \subset X$，如果 X 中存在可数子集 B，使得 B 在 A 中稠密，则称 A 是可分的。

我们还可以换个角度来以换个角度来思考一下。距离空间 (X,d) 是可分的，当且仅当存在一个具有下列性质的可数集 $\{x_n\}$：

$\forall x \in X$ 和 $\forall \epsilon > 0$，至少存在一个 $x_k \in \{x_n\}$，$s.t.$

$$d(x_k, x) < \epsilon$$

即为，可分空间中的任意一点可通过一个可数集来近似逼近，并且对于 $\forall \epsilon > 0$，$\bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, \epsilon) = X$。**在数学中，大家可以深刻感受到，同一个问题，我们从不同的角度来思考，得到的感受是完全不一样的。所以，将一个问题放在不同的背景下去琢磨是非常有必要的，可以帮助我们加深对一个概念的理解，更好的掌握这个知识点。**

上面我们介绍了什么是可分空间，接下来则将用几个例子来强化记忆。

例 3.2 $\mathbb{R}^n$ 是可分的。

$\mathbb{R}^n$ 中的有理点（各个坐标都是有理数）是可数集，且在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密。这个很显然可以由一维的数轴推广到有限维空间中，还是比较简单的。

例 3.3 $C[a,b]$ 是可分的。我们已经在有限维的实数空间中探究了可分的问题了，下一步则是将其推广到无穷维的空间中。

只要找到 $C[a,b]$ 中的可数稠密子集 $\{x_n(t)\}$ 即可。其中 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$ 上的连续函数。根据定义 3.2 中判断可分距离空间的方法，我们需要找到 $\{x_n(t)\}$ 应满足：对于 $\forall x(t) \in C[a,b]$ 和 $\forall \epsilon > 0$，至少存在一个 $x_n(t)$，使得

$$d(x_n, x) < \epsilon$$

我们要类比在有限维空间中的证明方法，想想在无穷维的函数空间中如何证明可数稠密子集，其思路为任何一个点，都可以用有理点数列来逼近。借鉴有限维空间中的方法，在函数空间中证明思路为，**连续函数用多项式逼近（类似于泰勒公式），多项式可以用有理多项式来逼近，即为任何一个连续函数，可以用一个系数为有理数的多项式函数列来近似**。全体有理系数多项式是 $C[a,b]$ 中的可数子集，所以 $C[a,b]$ 可分。

证明，由 Weierstrass 逼近定理，对于 $\forall x(t) \in C[a,b]$，存在多项式 $P_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$。（这部分证明，参阅 P.M. Fitzpatriclc 《Advanced Calculus》 p.188）。

即对于 $\forall x(t) \in C[a,b]$，当 $n \to \infty$，$\forall \epsilon > 0$，存在

$$P_n(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

其中 $a_i \in \mathbb{R}(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$，

$$|P_n(t) - x(t)| < \epsilon \qquad (\forall t \in [a,b])$$

上面得到了每一个连续函数可以用多项式函数列来逼近，而下一步则是得出，每一个多项式函数列可以用系数为有理数的函数列来逼近。则为：$P_n(t)$ 又可以用 $P_n^r(t)$ 一致逼近，其中 $P_n^r(t) = r_0 + r_1 t + \cdots + r_n t^n$，其中 $r_0, \cdots, r_n$ 是有理数。

就可以得出 $\{P_n(t)\}$ 是可数的，$C[a,b]$ 是可分的。

例 3.4 l^∞ 是不可分的。

分析：用反证法来证明。

证明：$l^\infty = \{$全体有界的实数列$\}$。

$$x = \{\xi_k\},\ y = \{\eta_k\} \in l^\infty$$

$$d(x,y) = \sup_k |\xi_k - \eta_k|$$

设 $x = \{\xi_k\}$，其中 $\xi_k = 0/1$。这样的 x 的全体记为 A，而且 A 是连续势（x 可看成无限的由 0/1 组成的数列，而实数空间中 $[0,1]$ 的每一个数的小数部分都可以用二进制数来表示，显然有 $A \subset l^\infty$，并且 A 与实数空间 $[0,1]$ 中的每一个数都对应，所有简单思考可知 A 是不可数的）。而且，$\forall x, y \in A$，$x \neq y$，则

$$d(x,y) = \sup_k |\xi_k - \eta_k| = 1 \tag{7}$$

这里是为什么呢？因为两个二进制数列肯定都是不一样的，那么必然存在两个数位是不同的，而此次采用的距离是取每个数位上的最大差值，所以距离恒等于 1。如果 l^∞ 是可分的，则必然存在可数的稠密子集 E，对于 $\forall x \in E$，作开球 $B(x, \frac{1}{3})$，有 $l^\infty = \bigcup_{x \in E} B(x, \frac{1}{3})$。因此可以得到关系为：

$$A \subset l^\infty = \bigcup_{x \in E} B(x, \frac{1}{3})$$

由于 l^∞ 是可数的，而 A 是不可数的。则必有在某开球内含有 A 中一定可以找到两个不同的点（抽屉原理），$x, y \in A$，使得 $x, y \in B(x_0, \frac{1}{3})$，其中 $x_0 \in E$。所以

$$d(x,y) < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

这显然与 $d(x,y) = 1$ 矛盾，所以是不可分的。有同学可能会疑问，为什么要取 $\frac{1}{3}$？实际上取任意一个小于 $\frac{1}{2}$ 的数都行，都可以形成与 $d(x,y) = 1$ 的矛盾。**这个例题的证明思路即为找到一个反例来说明 l^∞ 是不可分的。**

下面的例子将说明，距离空间是否可分，与空间上距离的定义密切相关。这个大家应该比较好理解。

例 3.5 空间 s 可分，其中 s 是全体实数列组成的集合，其上距离为，

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|} \tag{8}$$

证明 s 可分，就要找出 s 中的可数稠密子集。那么就来构建一个可数子集，令 $s_0\{(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,0,\cdots)\}$（我其实想知道，后面这堆零是怎么想到的，有什么用吗？前面的有理数我还能想到理由），其中 $r_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是有理数，有理数必然是可数的，所有 s_0 是可数的。下面的重点则为证明 s_0 是 s 的稠子集。

根据稠密集的定义，要证明一个可数集是稠密性，要找到一个具有下列性质的可数集 $\{x_n\}$：$\forall x\in X$ 和 $\forall\epsilon>0$，至少存在一个 $x_k\in\{x_n\}$，s.t. $d(x_k,x)<\epsilon$。那么在此例题中，对 $\forall x\in s$，$x=(\xi_1,\cdots,\xi_j,\cdots)$，对于每一个 $\xi_j(j=1,2,\cdots)$，存在 $r_j^{(n)}\to\xi_j(n\to\infty)$。这个逻辑是这样的，**对于任何一个 $x_n\in s$ 中的元素，我们都能找到一个 $x\in s_0$，使得在距离空间 d 中 $x_n\to x$。**

其中，$r_j^{(n)}$ 是有理数，令

$$x_n=\{r_1^{(n)},r_2^{(n)},\cdots,r_j^{(n)},\cdots,r_n^{(n)},0,\cdots\}$$

也就是说随着 n 的增大，x_n 中非零元素的个数也在增大，且等于 n，所以说 x_n 收敛到 x。则 $x_n\to x$，且 $x_n\in s_0$，所以 s 是可分的。

注 l^∞ 是全体有界的实数列，从集合的角度来看，l^∞ 是 s 的一个子集。但作为距离空间的 l^∞ 不可分，而 s 可分。那么距离空间的定义，对其是不是一个稠密集非常的重要，大家可以直观的想象一下，要想存在一个可数的稠密集，是不是需要距离空间将其元素“压”得比较紧，而如果距离空间比较松的话就不行了，公式 (7) 和公式 (8) 中的举例，就比较好的验证了我们的想法。

4 列紧的距离空间

在数学分析中，闭区间上的连续函数有着良好的性质。

1. 闭区间满足有限覆盖定理；
2. 进一步说，平面上的有界闭集也有这样的性质；
3. 我们有具有这样的性质的集合，抽象为紧集（紧空间）。

而紧性的刻画，可以从不同的角度给出几种定义，**1. 序紧列（Weierstrass 定理：$\{x_n\}$ 有界，一定存在收敛的子列。）；2. Borel 紧（有限覆盖定理：即为一个闭集可以找到有限个开集来覆盖整个区间。）；3. 完全有界**。

表面上看，序紧列和 Borel 紧似乎没有什么关系。序紧列是从子列的角度来定义紧列的，而 Borel 紧是从有限个开集的角度来定义，小伙伴们似乎有点懵逼。我想了一会儿也没有想出来，但是数学家们发现了序紧列和 Borel 紧之间是紧密的联系的（这或许就是我不是数学家的原因吧）。**将这两者联系起来在数学上是非常具有意义的，这样可以将两个看似没有关联的概念联系起来。**

在数学分析中国，根据 Bolzano-Weierstrass 定理我们可以知道，实数域中每个有界的无穷点集至少有一个聚点，下面将在一般的距离空间中研究这种性质。

定义 4.1 设 A 是距离空间 X 中的一个子集，如果 A 中的每一个无穷点列都有一个收敛的子列，则称为 A 是列紧的集合，闭的列紧集称为是自列紧集（所以根据定义，一个集合 A 的自列紧的，则要

求收敛子列的极限必须在 A 中)。这是对于集合来说的，如果对于空间来说则是，距离空间 X 称为是列紧的，如果 X 中的每一个无穷点列都有一个收敛的子列。

而我们的目标则是把 Weierstrass 定理推广到一般空间中。

定理 4.1 设 X 是一个距离空间，$A \subset X$ 是列紧集的，则 A 是有界集。

证明：假设 A 是无界的。于是可以从 A 中选取一个点列 $\{y_n\}$，使得 $d(y_n, a) > n$，其中 a 是 X 中的一个点。由于这个点列的任意子列都是无界的，所以这个点列没有收敛的子列（因为收敛的点列是有界的)。这显然与列紧相矛盾，所以 A 有界。

注 1，自列紧集是有界闭集；因为自列集就是闭集，而紧集是有界集。而自列紧集即为有界闭集。

注 2，在一般的距离空间中，有界的闭集不一定是列紧的。这是无穷维空间中，最重要的性质之一。注 1 反过来就不行了。而且，这个和有限维中的情况不一样了。在有限维的情况下，对于闭集，通常可以找到一个子列收敛的。比如：

$$\begin{aligned} &1, 0, 0, \cdots) \\ &(0, 1, 0, \cdots) \\ &(0, 0, 1, \cdots) \\ &\cdots \end{aligned} \tag{9}$$

定理 4.2 设 f 是定义在列紧的距离空间 (X, d) 上的实值连续函数。则 f 是有界的，即为，

$$\begin{aligned} M &= \sup\{f(x)|x \in X\} \\ m &= \inf\{f(x)|x \in X\} \end{aligned} \tag{10}$$

是有限的，进一步，存在点 $x_{\max}$ 和点 $x_{\min}$ 使得，

$$f(x_{\max}) = M, \quad f(x_{min}) = N$$

实际上这里讲的非常抽象，我们可以类比到一维连续函数闭区间上去类比理解，一维连续函数的闭区间上是必然有界的，而且可以取到最大最小值。而实际上，在无穷维空间中，仅仅是有界闭集是不够的，而将有限维空间中有界的条件推广到无穷维空间，还需要列紧的概念。我们为什么要得到列紧的空间呢?因为列紧的性质是最好的，字面上理解就是列紧就是空间被压得很紧，便于研究上下界和收敛性。

所以，下面将研究在具体空间中什么样的集合是列紧的。

例 4.1 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集是自列闭集。例如闭区间 $[a, b]$ 是自列紧集。这个还是比较容易想到的。

定理 4.3 Arzela 定理：$C[a, b]$ 中的子集 A 是列紧的当且仅当 A 中的函数是**一致有界和等度连续**的。

什么是一致有界的定义？及存在 $K > 0$，使得对于每一点 $t \in [a, b]$ 以及一切的 $x \in A$，都有

$$|x(t)| < K \tag{11}$$

可以理解为集合内的所有连续函数的上界都是同一个。什么是等度连续呢？对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时，

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \epsilon \qquad (\forall x \in A) \tag{12}$$

此连续的定义和一致连续很像，一致连续和区间内具体的点无关，用来控制收敛的速度。而等度连续中将 $(\forall x \in A)$ 去掉就是一致连续。等度连续就是空间中所有的连续函数，对于任何的 $\epsilon > 0$，都可以找到一个共同的 δ，使得公式 (12) 成立。**这是什么意思呢？就是空间中所有的连续函数都是一致连续的，而且所有函数收敛的速度都是一致的**。

大家是不是可以深刻感受到空间列紧的强大之处了，是空间中好的性质。列紧是距离空间中来考虑的，跳出了实数空间。什么是函数集合列紧呢？列紧即为对于任意一个无穷点列都可以找到一个函数子列，这个函数子列是收敛的。并且集合中的还是是有界连续和等度收敛的。

例 4.2 $A = \{x(t) \in C^1[a,b] \mid |x(t)| \leq M, |x'(t)| \leq M_1\}$。集合中的元素是连续的，而且一阶导数也是连续的，而且函数值有界，导数值也有界。则 A 是 $C[a,b]$ 中的列紧集。($C^1[a,b]$ 是在 $[a,b]$ 中全体连续可微的函数)。

首先看是不是一致有界的，集合中的条件 $|x(t)| \leq M$ 已经可以满足了。

等度连续：可以由中值定理得，$\forall x \in A$，$\forall t_1, t_2 \in [a,b]$，存在 $\theta \in (0,1)$，使得

$$\begin{aligned} |x(t_1) - x(t_2)| =& |x'(\theta t_1 + (1-\theta)t_2)(t_1 - t_2)| \\ \leq& M_1 |t_2 - t_1| \end{aligned} \tag{13}$$

所以 A 中的函数等度连续，且一致有界，所以是列紧的。

5 本章小结

本节中，首先介绍了闭集的定义，从三个角度来介绍了闭集的定义，1. 闭集的补集是开集；2. 从结构的角度说，集合中所有的点都是接触点，则是闭集。3. 从极限的角度思考闭集，在闭集里极限运算是封闭的。在数学中，大家可以深刻感受到，同一个问题，我们从不同的角度来思考，得到的感受是完全不一样的。所以，将一个问题放在不同的背景下去琢磨是非常有必要的，可以帮助我们加深对一个概念的理解，更好的掌握这个知识点。

有了闭集的定义，下一步将可分的概念从一般实数空间推广到一般空间中。首先定义了稠密集的概念，稠密集是可以简单理解为集合中的每一个点都可以用另一个集合中的点来逼近。有了稠密集的概念则进一步定义了可分距离空间的定义，即为空间中存在可数稠密子集则为可分空间。

最后，则是介绍了列紧空间，列紧空间定义为，距离空间的子集中的每一个无穷点列都有一个收敛的子集，则为列紧的集合，闭的列紧集为自列紧集。为什么要有列紧的概念呢？在无穷维的空间中，有界的闭集不一定是列紧的，列紧的性质更好，字面上理解就是列紧就是空间被压得很紧，便于研究上下界和收敛性。而且，函数空间是列紧的，其中的函数是等度连续和一致有界的。