完备的距离空间

Chen Gong

03 October 2020

目录

1 Introduction

上一节主要介绍了空间的可分性，列紧性，这是距离空间中非常重要的性质。这节中将主要讲述距离空间的完备性，这将是距离空间中最重要的性质。

2 Cauchy（柯西）列

2.1 实数空间中的 Cauchy 列

之前在数学分析中就已经探讨过柯西列，所谓 Cauchy 列指对于一个数列 $\{x_n\}$，$\forall\epsilon > 0$，$\exists N$，$m, n > N$，有 $|x_n - x_m| < \epsilon$。

而在**全体有理数**组成的距离空间中，Cauchy 列不一定收敛。而在**全体实数**组成的距离空间中，Cauchy 列一定收敛。比如，一个数列收敛到 π，$\{3, 3.1, 3.14, \cdots\}$，他的极限不是有理数，是无理数。

而空间中的 Cauchy 列一定收敛，则反映了实数空间中非常重要的性质，即为**实数空间的完备性**。我们将把这个性质"类比"的推广到一般的距离空间中，从而得到空间的完备性。从上述实数的例子中可以得出，一个点列 $\{x_n\}$ 是否收敛，除了**点列自身构造性质**以外，和**空间的结构**有很大的关系。比如，上述例子中，首先这个点列最后要非常的密集的靠近一个区域，点列不能是发散的。第二空间要是实数空间，有理数就显然不行，因为最终收敛的极限 π 都不在空间中。

例 2.1 设 $X = (0, 1]$ 赋以实数空间通常的距离，$\frac{1}{n}$ 是 $X = (0, 1]$ 中的 Cauchy 列，但是它在 $X = (0, 1]$ 中不收敛，因为 $0 \notin X$。

上述表明，空间中的 Cauchy 列可能不收敛。问题在于这个空间可能存在"缺陷"，或者说距离空间中有一些"缝隙"。在**例 2.1** 中，问题产生于空间 $X = (0, 1]$ 中缺失了 0 点。如果我们加上这个点，则 $\{\frac{1}{n}\}$ 就收敛了。由此可以证明，在新的"更大的"空间中，$X_1 = (0, 1] \cup \{0\}$ 中每个 Cauchy 列都收敛。

2.2 一般空间中的 Cauchy 列

在实数空间中，点列收敛的充要条件是：**这个点列是 Cauchy 列**。类似于实数空间，在距离空间，我们也引入了 Cauchy 列，完备性这些概念。大家注意到，对于每个概念的定义，我们都是可以找到一个背景的，这样可以让抽象的泛函分析没那么抽象。

定义 2.1 设 (X, d) 是一个距离空间，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (X, d)$。若对于任意的 $\epsilon > 0$，存在正整数 N，当 $m, n \leq N$ 时，有

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \tag{1}$$

称 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列。实际上和实数空间中的 Cauchy 的定义基本一样。而性质也有很多是相似的。

命题 2.1 设 $\{X, d\}$ 是距离空间中的 Cauchy 列，则集合 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 是有界的。

这里采用 Cauchy 列的定义证明，和数学分析中的证明方法类似。

证明： 由 Cauchy 列的定义，对于 $\epsilon = 1$，存在 N，当 $n, m > N$ 时，有 $d(x_n, x_m) < 1$，令

$$\beta = \max\{d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), \cdots, d(x_1, x_{N+1})\}$$

结合三角不等式可得，对于任何的正整数 n，都有

$$d(x_1, x_n) < \beta + 1 \tag{2}$$

即为，集合 $\{x_1, x_2, \cdots\} \subset B(x_1, \beta + 1)$。根据有界集合的定义，命题成立。

命题 2.2 收敛的点列一定是 Cauchy 列。

我们可以用收敛列和 Cauchy 的定义来证明，与数学分析中的证明思路相似。

证明，设 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$，则对于 $\forall\epsilon > 0$，$\exists N$ 当 $n, m > N$ 时有，

$$d(x_n, x_0) < \frac{\epsilon}{2}, \quad d(x_m, x_0) < \frac{\epsilon}{2}$$

根据三角不等式有，

$$d(x_n, x_m) < d(x_n, x_0) + d(x_m, x_0) < \epsilon \tag{3}$$

所以，$\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列。而实际上在有限维空间中，列紧集合和有界之间是可以等价的，而在无穷维空间中这个就不成立了，列紧集合可以推出有界，而有界集合不能推出列紧。

3 完备的距离空间

3.1 完备的距离空间的定义

其实大部分数学感觉学起来困难，原因就是对定义的背景和概念理解得不够完善。

收敛的点列一定是 Cauchy 列，但是在一般的空间中 Cauchy 不一定收敛。而 **"所有的 Cauchy 都收敛"，**这样的距离空间是非常重要的距离空间，同时也被称为完备空间。而完备性为什么会这么重要呢？因为有了完备性，极限运算（微积分）才能很好的进行，在一个完备的距离空间判断点列是否收敛，仅仅只需要判断它是否是 Cauchy 列。

例 3.1 设 $\mathbb{Q}$ 为全体有理数组成的集合，赋以通常的距离成为一个距离空间，但是它不完备。例如：以 π 的前 n 个数字组成的数列，

$$\{3, 3.1, 3.14, 3.141, \cdots\}$$

是一个 Cauchy 列，但是它在 $\mathbb{Q}$ 中不收敛，因为 π 不是有理数。

所以，根据以上例子可得：**"一个点列是不是 Cauchy 列由其本身的性质所决定的，但它是否为 Cauchy 列由这个点列自身的结构所决定的。"** 在例 3.1 中，由于无理数的缺失，点列不收敛。

命题 3.1 完备空间的任何一个闭子空间也是完备的。

证明步骤如下所示，设 X 是完备的，子空间 $X_1 \subset X$，且 X_1 是闭集（闭集的意思即为点列收敛的极限在此集合中，也就是极限运算是封闭的）。

要证明 X_1 是完备的，根据完备空间的定义，只需证明 X_1 中的任意 Cauchy 列都在 X_1 中收敛。设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$ 是任意一个 Cauchy 列，由于 X 是完备的，因此 $\{x_n\}$ 收敛到 x，$x \in X$。由于

X_1 是闭集，所以 X_1 中收敛点列的极限 x 属于 X_1，所以 X_1 是完备的。

列紧是泛函分析中非常重要的性质，因为有了这个性质，无穷点列就可以找到收敛的点列，然后极限运算就可以较好的考虑了。

命题 3.2 列紧的空间一定是完备的。

分析：设 $\{x_n\}$ 是列紧空间 X 中的任一 Cauchy 列，我们只要证明它是收敛的，则空间是完备的。**由空间的列紧性可得，**首先找到它的一个收敛的子列，再结合它本身是 Cauchy 列，证明这个 Cauchy 列在空间中收敛。证明思路大体上是这样的。

证明：设 $\{x_n\}$ 是列紧空间 X 中的任意 Cauchy 列。由 Cauchy 的定义，$\forall \epsilon > 0$，$\exists N$，当 $n, m > N$ 时，

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \tag{4}$$

由 X 是列紧的，可知存在 $\{x_k\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 及 $x_0 \in X$，

$$x_{n_k} \to x_0 \ (k \to \infty) \tag{5}$$

既然极限已经存在了，下一步则是证明 x_0 也是 x_n 在空间 X 中的极限。

令 $K = N$，当 $k > N$ 时，有 $n_k \leq k > K = N$，于是有

$$d(x_n, x_{n_k}) < \epsilon \ (n > N) \tag{6}$$

令 $k \to \infty$，由于 d 连续，我们有，

$$d(x_n, x_0) \leq \epsilon \ (n > N) \tag{7}$$

即为 $x_n \to x_0$，$x_0 \in X$，这证明 X 是完备的。从证明中可以看出，对于一个 Cauchy 列 $\{x_n\}$，只要他有一个子列收敛到 x_0，则有 $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$。

命题 3.3 设 X 是一个距离空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列，如果 $\{x_n\}$ 有一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 x_0，则 $\{x_n\}$ 也收敛到 x_0 $(n \to \infty)$。

这个命题可以从直观上去理解，Cauchy 的可以从直观上去理解，Cauchy 的尾部会收缩的非常的紧，那么如果有一个子列可以收敛到 x_0 的话，子列收敛点一定会在 Cauchy 列的尾部区间里，而这个区间内的所有点的距离都是小于 ϵ 的，所以 Cauchy 也会收敛到同样的 x_0 点。

3.2 完备与不完备距离空间的例子

3.2.1 $C[a,b]$ 是完备的

$C[a,b]$ 这个空间前面已经讨论了很多次了，第一次给出了什么是 $C[a,b]$ 空间；然后描述了它的性质是怎样的，它的收敛性怎么样；讲了它是不是列紧的等等。为什么要反复分析了，因为我们现在数学研究最重要的还是连续函数。

分析：设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C[a,b]$ 中的任一 Cauchy 列。要证明 $C[a,b]$ 是完备的，需要做到以下三点：

1. 找出 $x(t)$ (即 $\{x_n\}$ 的极限)；
2. 证明 $x(t) \in C[a,b]$；
3. 证明 $x_n(t) \to x(t)$ $(n \to \infty)$ (按 $C[a,b]$ 空间中的距离收敛)。

这三点的逻辑是这样的，首先我们需要构造出一个极限，然后要得到这个极限在 $C[a,b]$ 中，最后一步则是证明任一 Cauchy 的极限会收敛到构造出的这个极限。这样就可以满足完备空间中，所有的 Cauchy 都收敛的条件。

证明：

1. 由 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 列。那么对于 $\forall\epsilon > 0$，$\exists n, m > N$ 时，

$$d(x_n, x_m) < \epsilon$$

即：

$$\max_{a\leq t\leq b} |x_n(t) - x_m(t)| < \epsilon \tag{8}$$

注意这里 x_n 代表的是函数列，而 $x_n(t)$ 表示函数 x_n 在 t 点的取值，所以是一个数。所以，$\forall t \in [a,b]$，$|x_n(t) - x_m(t)| < \epsilon$ $(n, m > N)$。而 $\{x_n(t)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 空间中的数列，由于 $\mathbb{R}$ 是完备空间，存在 $x(t)$，使得，

$$x_n(t) \to x(t)\ (n \to \infty) \tag{9}$$

2. 下一步则是证明，$x(t) \in C[a,b]$。当 $n, m \geq N$ 时，有

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \epsilon,\ \forall t \in [a,b] \tag{10}$$

对于固定的 t，令 $m \to \infty$，有

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \epsilon\ (n \geq N),\ \forall t \in [a,b] \tag{11}$$

这里的逻辑是，距离函数 $|x_n(t) - x_m(t)|$ 是连续函数，所以可以令 $\lim_{m\to\infty} |x_n(t) - x_m(t)| = |x_n(t) - \lim_{m\to\infty} x_m(t)|$。同样，也可以这样来证明：

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq \epsilon \to -\epsilon \leq x_n(t) - x_m(t) \leq \epsilon \to \lim_{m\to\infty} -\epsilon \leq \lim_{m\to\infty} x_n(t) - x_m(t) \leq \lim_{m\to\infty} \epsilon$$
$$\leq \epsilon x_n(t) - x(t) \leq \epsilon \to |x_n(t) - x(t)| \leq \epsilon$$

根据上述公式，可以推出 $x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$，即为 $x(t)$ 是连续的，即为：$x(t) \in C[a,b]$。

3. 最后一步则是证明，按在 $C[a,b]$ 空间中的距离收敛。已证得：

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \epsilon,\ \forall t \in [a,b] \tag{12}$$

所以，有

$$\max_{a\leq t\leq b} |x_n(t) - x(t)| \leq \epsilon \tag{13}$$

即为 $d(x_n, x) < \epsilon$，$(n \geq N)$，所以 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$。

3.3 l^∞ 是完备的

l^∞ 表示全体有界的数列。设 $\{x_n\}$ 是 l^∞ 中的任意一个 Cauchy 列，其中 $x_n = \left\{\xi_k^{(n)}\right\}_{k=1}^{\infty}$，同样的思路，只需要证明以下三点：

(1) 找出 x (即 $\{x_n\}$ 的极限)；

(2) $x \in l^\infty$；

(3) $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ (按照 l^∞ 空间中的距离收敛)。

证明：

1. 设 $\{x_n\}$ 是 l^∞ 中的任意一个 Cauchy 列，其中 $x_n = \left\{\xi_k^{(n)}\right\}_{k=1}^{\infty}$。由 Cauchy 的定义，对于 $\forall\epsilon > 0$，$\exists n, m > N$ 时，
$$d(x_n, x_m) < \epsilon$$
即为：$\sup_k \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}\right| < \epsilon$。对任意的 k，$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| < \epsilon\ (n, m \geq N)$。注意，这里需要清晰一下符号的意义，$\xi$ 的上标 n 表示第 n 条有界实数列，而下标 k 表示有界实数列中的第 k 个元素。即 $\left\{\xi_k^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列。由于 $\mathbb{R}$ 的完备性，存在 ξ_k，使得 $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k$。(**这里谈一点个人的理解，这个有界数列极限就是对于一个 Cauchy 列中所有的有界数列，都去取他们的极限 $\xi_1^\infty, \xi_2^\infty, \xi_3^\infty, \cdots$ 得来的。**)

2. 令 $x = \{\xi_k\}$，第二步则是验证 $x \in l^\infty$。方法是一样的，由于，$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| < \epsilon\ (n, m \geq N)$，令 $m \to \infty$，有
$$\left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right| \leq \epsilon\ (n \geq N)$$
我们的目标是要证 $\forall\xi_k$ 都有 $|\xi_k| < M$，其中 M 是一个定值。运用一下三角不等式，对 $\forall k$，
$$|\xi_k| = |\xi_k - \xi_k^{(N)} + \xi_k^{(N)}| \leq |\xi_k^{(N)} - \xi_k| + |\xi_k^{(N)}| \leq \epsilon + |\xi_k^{(N)}| \tag{14}$$
由于 $\xi_k^{(N)}$ 是 l^∞ 中的元素，他们是必然有界的，所以 $\{\xi_k\}$ 是有界数列，$\{\xi_k\} \in l^\infty$。而这里我们为什么会想到使用三角不等式呢？因为 ξ_k 有没有界，不知道，而 $\xi_k^{(N)}$ 是必然有界的。通过三角不等式的方式，可以成功的将两者结合起来来，证明 l^∞ 有界。

3. 且 $n \geq N$ 时，对于 $\forall k$，有
$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k| \leq \epsilon$$
即为：
$$d(x_n, x) = \sup_k \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right| \leq \epsilon\ (n \leq N)$$
这就是极限的定义，所以 $x_n \to x = \{\xi_k\}$。所以，l^∞ 是完备的。

3.4 不完备的例子

在距离空间 $C[0,T]$ 中，$P[0,T]$ 记为定义在 $[0,T]$ 上的全体多项式，显然 $P[0,T] \subsetneq C[0,T]$，且 $P[0,T]$ 是 $C[0,T]$ 一个子空间。**距离空间 $C[0,T]$ 是完备的，但是 $P[0,T]$ 在 $C[0,T]$ 中并不完备**。事实上，
$$\left\{1, 1+t, 1+t+\frac{1}{2!}t^2, 1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3, \cdots\right\}$$
在 $C[0,T]$ 中收敛到 e^t (一致收敛，因为区间是有限的)，但 $e^t \notin P[0,T]$，即 $P[0,T]$ 不是 $C[0,T]$ 中的闭集。而
$$\left\{1, 1+t, 1+t+\frac{1}{2!}t^2, 1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3, \cdots\right\}$$
一定是 Cauchy 列 (收敛的点列一定都是 Cauchy 列)，但是它极限不在子空间 $P[0,T]$ 中，所以 $P[0,T]$ 在距离：
$$d(p_1, p_2) = \max_{0\leq t\leq T} |p_1(t) - p_2(t)| \tag{15}$$
下不完备。说明这个空间中有缝隙，收敛出去了。

下面再来看一个例子。连续函数换一个距离也不是完备的。

设 X 是全体在 $[0,1]$ 上定义的连续函数，在 X 上定义距离

$$d(x,y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt \tag{16}$$

X 是一个距离空间，但不完备。下面我们构造一个这个空间中的 Cauchy 列，但它在这个空间中不收敛的例子。考虑连续函数列 $\{x_n(t)\}$ $(n>2)$:

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}\\ 1, & \dfrac{1}{2}\le t\le 1\\ \text{直线连接}, & \text{else}\end{cases} \tag{17}$$

$\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列，事实上

$$\begin{aligned}d(x_n,x_m)=&\int_0^1 |x_m(t)-x_n(t)|dt\\ =&\frac{1}{2}\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|\to 0\ (m,n\to\infty)\end{aligned} \tag{18}$$

若空间完备，则存在 X 中的连续函数 $y(t)$，使得 $d(x_n,y)\to 0$，$(n\to\infty)$。考虑

$$x(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le \dfrac{1}{2}\\ 1, & \dfrac{1}{2}\le t\le 1\\ \dfrac{1}{2}, & t=\dfrac{1}{2}\end{cases} \tag{19}$$

由三角不不等式得:

$$\begin{aligned}&\int_0^1 |x(t)-y(t)|\,dt\\ &\le \int_0^1 |x(t)-x_n(t)|\,dt+\int_0^1 |x_n(t)-y(t)|\,dt\\ &=\frac{1}{2n}+d(x_n,y)\to 0\end{aligned} \tag{20}$$

因此,

$$\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt=0 \tag{21}$$

即 $x(t)$ 几乎处处等于 $y(t)$，因为 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]$ 上连续，两个连续函数几乎处处相等，即为点点相等。于是在 $[0,\frac{1}{2})$ 上 $y(t)=x(t)=0$，在 $(\frac{1}{2},1]$ 上 $y(t)=x(t)=1$，这显然与 $y(t)$ 连续的假设是相违背的。所以此空间是不完备的。这里不是 Cauchy 没有极限，而是空间有缝隙，极限跑出去了。上述的例子中，很好的描述了**组成空间的元素一样，但是空间中定义的距离不一样，空间 X 的完备性不一样**。

4 距离空间的完备化

4.1 距离空间的完备化的定义

从前面的例子中我们看到了有的空间是完备的，有的空间并不完备。但是我们可以将不完备的空间完备化。**事实上任意一个空间都可以完备化，**这是本节要证明的重要结论。

为了方便理解，下面做出一些直观性的解释。设 (X,d) 是完备距离空间，$(X_0,d)\subset(X,d)$ 是一子空间。

(1). 如果 X_0 在 (X,d) 中是闭的 (对极限运算是封闭的)，则 (X,d) 是完备的。

(2). 如果 X_0 不是闭集，我们知道 X_0 在 (X,d) 中是闭的，且 $\widetilde{X}_0$ 在 (X,d) 中是闭的，且是包含 X_0 的最小闭集。因此 $(\widetilde{X}_0,d)$ 是完备的，且 X_0 在 $(\widetilde{X}_0,d)$ 中稠密。

大家可能看起来会觉得,非常难以理解。而通俗的来说,之前在空间中不完备的原因是有的 Cauchy 列不在空间中收敛，就是因为空间中有缝隙。从 (X_0,d) 到 $(\widetilde{X}_0,d)$ 的过程，就是**填满**了原来 (X_0,d) 中存在的“缝隙”，使之成为一个完备空间。

举个例子：有理数全体组成的空间 $\mathbb{Q}$ 是不完备的，即：存在有理数组成的 Cauchy 列，收敛的极限不是有理数。而实数空间 $\mathbb{R}$ 是一个完备的距离空间。而我们可以通过“做闭包”的方法，把 $\mathbb{Q}$ 扩展为完备的实数空间 $\mathbb{R}$，或者是说把 $\mathbb{Q}$ 嵌入到另一个完备空间 $\mathbb{R}$ 中，也就是将 $\mathbb{Q}$ 作为 $\widetilde{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ 这时就空间就完备了。比如有理数列 $\{3,3.1,3.14,3.141,\cdots\}$，最终收敛到 π，并不是一个有理数，那我们就把这个数补进去。

这意味着：

1) $\mathbb{Q}$ 中的元素的距离不变（等距离嵌入）;

2) $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$，$\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密；

3) $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的完备化空间。

一般的距离空间 (X,d)，如果 X 不完备，我们可以使用类似的方法，把 X 嵌入到一个完备的距离空间中，或者说把 X 扩充进一些元素，使之完备。

加进去的“点”就是 X 闭包中不属于 X 的那些点。这是我们下面要证明的距离空间完备化定理的基本含义,。

最大的问题在于如何用 X 的元素来刻画新加进去的点，这些点原来是没有的。比如，无理数的粗略说法是无限不循环小数，说实话这是无法验证的，因为算都算不完，怎么知道从当前计算的下一位开始会不会循环起来。而我们现在只有有理数，没有无理数。那么想要将空间完备化的话，就需要用已有的有理数来刻画无理数，问题就是怎么用有理数来定义出无理数。

而空间完备化的定义直观的理解还比较简单，而在数学书上用规范的语言来描述就变得很复杂了。这也是数学学习的难点,所以大家在数学学习的过程中,一定要注意定义的背景和它所解决的问题,而不是死记硬背定义本身。

所谓距离空间的完备化，是将不完备的空间 $\widetilde{X}$，定义 $\widetilde{\widetilde{X}}$ 是完备的，其 $\widetilde{X}\subsetneq\widetilde{\widetilde{X}}$，并且用 $\widetilde{X}$ 定义出 $\widetilde{\widetilde{X}}$ 中的元素。

那么，我们怎么用当前的元素来刻画新的元素呢？从 Cauchy 列入手，**这个逻辑是这样的。因为距离空间不完备本就是由其中的 Cauchy 列不收敛造成了，那么将这些 Cauchy 列的极限补进去就好了。**

4.2 距离空间的完备化

定义 4.1 任何距离空间 (X,d)，都存在一个完备的距离空间 $(\widetilde{X}.\widetilde{d})$，使得 (X,d) 和 $(\widetilde{X}.\widetilde{d})$ 的一个子空间等距，且在等距的意义下，这样的空间 $(\widetilde{X}.\widetilde{d})$ 是唯一的。称 $(\widetilde{X}.\widetilde{d})$ 为 (X,d) 的完备化空间。

这个定义，现在看起来非常的抽象，我们同样可以用有理数和实数的例子来理解它。大家一定要记住实数这个例子，有了这个例子可以让大家头脑中有个清晰的认识，对概念有更好的理解。有理数空间并不完备，通过将缝隙填满以后，可以完备成一维实数空间。那么可不可以完备成二维的平面呢？不行的，太大了导致有理数在其中不是稠密的，所以稠密等距就是来限制完备化空间的大小的。

分析：证明可以分为四步：

(1) 先构造空间 $\widetilde{X}$ 和距离 $\widetilde{d}$；

(2) 证明 (X,d) 与 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 中的一个稠子集等距；

(3) $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 完备，这个空间 $\widetilde{X}$ 就是我们需要的空间；

(4) 在等距的意义下，完备化空间是唯一的。

第一步是非常困难的，我们之前就分析了如何用当前的元素来构造未知的元素是一个难点，之前想到了用 Cauchy 列作为媒介来解决。下面来看有理数中具体的例子，现在有两个数列：

$$\begin{aligned}&(3,3.1,3.14,\cdots,\pi)\\&(1,1.4,1.41,\cdots,\sqrt{2})\end{aligned} \tag{22}$$

显然这两个数列收敛的极限都不属于有理数空间，那么我们令 $x_n=(3,3.1,3.14,\cdots)=\pi$，$y_n=(1,1.4,1.41,\cdots)=\sqrt{2}$，记为：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\pi,\ \lim_{n\to\infty}y_n=\sqrt{2} \tag{23}$$

在等距的要求下，显然有：

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=d(\pi,\sqrt{2})=\left|\pi-\sqrt{2}\right| \tag{24}$$

显然这样我们就定义出了完备化空间 $\widetilde{X}$，用规范化的语言描述即为：对于当前空间 X 中任意一个 Cauchy 列，$\{x_n\}\to\widetilde{x}$，$\{y_n\}\to\widetilde{y}$，距离为 $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})$，(注意，新空间 $\widetilde{X}$ 中的元素都是 Cauchy 列。)。这样就构造空间 $\widetilde{X}$ 和距离 $\widetilde{d}$，下一步就理所当然的要证明 (X,d) 与 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 中的一个稠子集等距了。有了这样一个具体的例子之后，可以让抽象的概念变得没那么复杂，所以数学学习中一定要注意问题提出的背景。

证明：

1. 构造距离空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$；

   (a) 构造集合 $\widetilde{X}$；

   把 (X,d) 中的 Cauchy 列 $\widetilde{x}=\{x_n\}$，$\widetilde{y}=\{y_n\}$，满足：

$$\lim_{n\to\infty}d(x_0,y_0)=0 \tag{25}$$

   则称他们为 $\widetilde{X}$ 中的同一元素，即为 $\widetilde{x}=\widetilde{y}$。为什么要这样定义呢？比如趋近 π 的数列有很多个比如：$\{4,3.5,3.2,3.15,\cdots\}$，如果没有这个等价的定义，数列太多了，会乱套。

(b) 定义距离

对任何 $\widetilde{x}=\{x_n\}$, $\widetilde{y}=\{y_n\}\in\widetilde{X}$ 定义

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n) \tag{26}$$

这样距离就定义完了，下一步则是考虑距离的合理性，它是距离吗？

(c) 验证距离的合理性。$\{d(x_n,y_n)\}$ 要是一个数。

由于 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列，

对于 $\forall\epsilon>0$, $\exists N$, 当 $m,n>N$ 时，

$$d(x_n,x_m)<\frac{\epsilon}{2},\text{ 且 } d(y_n,y_m)<\frac{\epsilon}{2} \tag{27}$$

由三角不等式可得：

$$|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)|\leq d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m)<\epsilon \tag{28}$$

由此可得 $\{d(x_n,y_n)\}$ 是实数空间 $\mathbb{R}$ 中的一个 Cauchy 数列。

(d) 证明 $\widetilde{X}$ 中定义的 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x},\widetilde{y}$ 想对应的 Cauchy 列的选择无关。并且容易验证 $\widetilde{d}$ 的非负，恒正，对称等性质。

2. 验证 (X,d) 与 $\widetilde{X},\widetilde{d}$ 中的一个稠子空间等距。

(a) 构造稠子空间，等距映射

设 $\widetilde{X}_0$ 是全体由 X 中元素作成的常驻列 $\{x\}$。什么意思呢？回到之前有理数的例子，新的空间 $\widetilde{X}$ 中的所有元素都是 Cauchy 列，那么就将原来的有理数元素都变成常数 Cauchy 列，比如：$3=\{3,3,3,3,\cdots\}$, $4=\{4,4,4,4,\cdots\}$。这样在新的距离 $\widetilde{d}$ 下，两个元素间的距离也是一样的。

即为 $\widetilde{X}_0\subset\widetilde{X}$, $\widetilde{X}_0$ 是 $\widetilde{X}$ 的一个子空间。令 $T:(X,d)\to(\widetilde{X},\widetilde{d})$, $x\in X$, $T(x)=(x,x,x,\cdots)$。

(b) 验证等距映射。

显然 $Tx\in\widetilde{X}$，任何 $x,y\in X$，$\widetilde{x}=(x,x,x,\cdots)$, $\widetilde{y}=(y,y,y,\cdots)$,

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}=d(x,y) \tag{29}$$

即为：$T:X\to\widetilde{X}$ 是等距映射。

(c) 证明 $TX=\widetilde{X}_0$ 在 $\widetilde{X}$ 中稠密。

对于 $\forall\widetilde{x}=\{x_n\}\in\widetilde{X}$，令 $\widetilde{x}_k=(x_k,x_k,\cdots,x_k,\cdots)$。显然有 $\widetilde{x}_k\in\widetilde{X}_0$ 是 X 中的 Cauchy 列，存在 N，当 $k,n>N$ 时，$d(x_n,x_k)<\epsilon$。即为：

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{x}_k)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_k)\leq\epsilon\ (k\geq N) \tag{30}$$

所以 $(\widetilde{X}_0,\widetilde{d})$ 在 $\widetilde{X},\widetilde{d}$ 中稠密，即为 TX 在 $\widetilde{X}$ 中稠密。核心就是在 $\widetilde{X}$ 中找到一个数列来逼近 $\widetilde{X}_0$ 中的数列。

3. 第三步则是证明，新得到的空间 $\widetilde{X}$ 是完备的。

4. 第四步证明，在等距意义下完备化空间是唯一的。

数学有的时候定义的东西很简单，但是由于符号的表达，概念的证明等等一套很复杂的东西交织在一起会让大家觉得很难。只有知道了问题的背景，才知道问题是怎么来的，才能很好的理解数学抽象的概念。上述过程结合有理数的完备化这一具体的背景，可以帮助大家更好的理解空间完备化的知识点。

4.3 有理数空间完备化详细流程

$\pi, \sqrt{2}$ 对应的 Cauchy 数列“代表元”可以是，

$$\begin{aligned} &(3, 3.1, 3.14, \cdots) \\ &(1, 1.4, 1.41, \cdots) \end{aligned} \tag{31}$$

$(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ 就是由这样的一些 Cauchy 列组成的 ($\widetilde{X}$ 实际上就是全体实数) 距离的定义方式：

$$d(\{3, 3, 1, 3.14, 3, 141, \cdots\}, \{1, 1.4, 1.41, 1.414, \cdots\})$$

是数列

$$\{3-1, 3.1-1.4, 3.14-1.41, 3.141-1.414, \cdots\}$$

的极限，等于 $\pi - \sqrt{2}$。

$$\begin{aligned} &\{3, 3, \cdots\}, \{3.1, 3.1, \cdots\}, \{3.14, 3.14, \cdots\}, \cdots \\ &\{1, 1, \cdots\}, [1, 4, 1, 4, \cdots\}, \{1.41, 1.41, \cdots\}, \cdots \end{aligned}$$

这个是 $(\widetilde{X}_0, \widetilde{d})$ 中与其相关的常值 Cauchy 列 ($\widetilde{X}_0$ 实际上是全体有理数)。

从形式上看，完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 是个全新的空间，但应注意完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 包含了一个稠子空间 $\widetilde{X}_0$ 与原来的空间 (X, d) 等距同构，也就是说 X 嵌入到 $\widetilde{X}$ 中，作为它的一个稠子集。

注：完备化以后的空间是原来空间的一种“闭扩张”，不能仅仅理解为是一个由 Cauchy 列组成的一个十分抽象的的新空间。就像有理数的例子一样，我们之所以把其中的元素都变成 Cauchy 列，是我们用有理数不好去描述无理数。

设 X 是一个不完备的距离空间，X_i 是一个完备的距离空间，如果满足:

1. $X \subset X_1$，

2. X 在 X_1 中稠密，

那么，X_1 是 X 的完备化空间。例如实数空间就是有理数空间的完备化空间，L^2 空间 (平方可积函数空间) 就是全体连续函数在距离

$$d(x, y) = \left\{ \int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \tag{32}$$

下的完备化空间。

4.4 空间完备化的意义

距离空间完备化后，空间中的 Cauchy 列都收敛。从另一个角度说，空间 X 被适度地扩大为 $\widetilde{X}$。原来的“缝隙”已经被全部填满。这点是十分重要的。以后我们会看到，这使得一些在原空间 X 中无

解的问题 (例如微分方程)，在新的扩大了的空间 $\widetilde{X}$ 中就可以有“较弱”意义下的解，运算就可以进行了，这也是完备化的意义所在。比如我们高中学习的 $x^2=-1$ 在实数域上无解，但是我们扩充到复数域上，就有解了。

5 小结

本节主要介绍的是完备的距离空间等相关的知识。首先介绍了最重要的 Cauchy 列，因为空间完备的定义就是空间中所有的 Cauchy 列都收敛。其中讲到了点列是否收敛和点列自身的构造性质和空间的结构都有关。

然后介绍了完备空间的定义，举了连续函数空间是完备的，全体有界数列空间是完备的，和一个不完备的例子来帮助大家理解空间完备的概念。用直观的感觉去理解，即为完备的空间是没有缝隙的，所有的 Cauchy 列都在此空间中收敛。

最后一部分介绍的是空间的完备化，这使得一些在原空间 X 中无解的问题 (例如微分方程)，在新的扩大了的空间 $\widetilde{X}$ 中就可以有“较弱”意义下的解，运算就可以进行了，这也是完备化的意义所在。全程我们都引入了有理数空间完备成实数空间的例子，通过这个例子来帮助我们理解空间完备化的过程。这个例子非常的重要，数学很多时候太难了，实际上就是太抽象了，而直观的理解并不困难。所谓完备化，即为将其中 Cauchy 列收敛的极限给补上，即为构造一个新的空间，使之与原空间形成等距映射，而且原空间是新空间的等距稠子集。其中较难解决的问题是如何用当前的元素来构造未知的元素是一个难点，可以用 Cauchy 列作为媒介来解决。将原空间中的元素映射为常驻列，未知的元素用原空间的元素组成的 Cauchy 表示。逻辑比较清晰!