第一章习题课

Chen Gong

18 January 2021

目录

1 Introduction

俗话说，学习不刷题等于白学。所以，在学习完一章后，通过刷题来提高对知识点的理解是非常必要的。本次习题课老师主要讲解了七道习题，来帮助我们进一步提高对本章知识的理解。

2 第一题

在 $\mathbb{R}$ 上定义 $d(x,y)=\arctan|x-y|$，问 $(\mathbb{R},d)$ 是不是距离空间？

分析：我们只要一一验证，$d(x,y)$ 是否可以满足距离的四个条件就行。包括，非负性；严格正 $(d(x,y)=0\rightarrow x=y)$；对称性；满足三角不等式。一般来说前三条是比较好验证的，主要在于第四条的验证。

其中，前三个条件是显然成立的，下面验证第四个条件是否可以成立。

$$\arctan|x-y|\leq\arctan|x-z|+\arctan|z-y| \tag{1}$$

由于，$\arctan(\cdot)\in[0,\frac{\pi}{2})$，所以易得，

$$\begin{aligned}&\arctan|x-y|\in[0,\frac{\pi}{2})\\&\arctan|x-z|+\arctan|z-y|\in[0,\pi)\end{aligned} \tag{2}$$

显然，当 $\arctan|x-z|+\arctan|z-y|\in[\frac{\pi}{2},\pi)$ 的时候，是显然满足公式 (1) 的。那么，我们只需考虑另外一半情况，$\arctan|x-z|+\arctan|z-y|\in[0,\frac{\pi}{2}]$。

$$\begin{aligned}\tan\{\arctan|x-z|+\arctan|z-y|\}=&\frac{|x-z|+|z-y|}{1-|x-z||z-y|}\\\geq&|x-z|+|z-y|\\\geq&|x-y|=\tan\{\arctan|x-y|\ |\end{aligned} \tag{3}$$

由于，tan 还是是单调递增的函数，所以可以得出，$\arctan|x-z|+\arctan|z-y|\}>\arctan|x-y|$。有的小伙伴，可能会疑惑，为什么可以确定 $1-|x-z||z-y|\in(0,1]$。因为，可以确定 $\arctan|x-z|+\arctan|z-y|\in[0,\frac{\pi}{2}]$，这个区间的 tanh 值一定是正数。所以，$1-|x-z||z-y|$ 一定是大于零的，小于等于 1 是一件很显然的事情。那么，我们可以很简单的得出满足三角不等式。所以，$(\mathbb{R},d)$ 是距离空间。

一般的，对于 $\forall x,y\in\mathbb{R}$，他们之间的距离为 $|x-y|$，实数空间在这个距离下是无界的。本题在实数空间中定义了一个新的距离：$d(x,y)=\arctan|x-y|$。这样把实数空间 $\mathbb{R}$ 中一个无界的集合，转变成了有界的集合。所以，有界和无界是相对的概念，和空间定义的距离有关。

3 第二题

在 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中，对于

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

定义

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|x_i-y_i| \tag{4}$$

其中，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 n 个正数。证明，d 是 $\mathbb{R}^n$ 中的距离，并且按距离收敛等价于按坐标收敛。

按距离收敛等价于按坐标收敛，即有，

$$d(x_k,x)\to 0\ (k\to\infty) \tag{5}$$

其中，$x_k=\{x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}\}\in\mathbb{R}^n$，$x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\in\mathbb{R}^n$，

$$\Longleftrightarrow x_i^{(k)}\to x_i\ (k\to\infty),\ i=1,2,\cdots,n.$$

证明：

首先，需要证明 d 是 $\mathbb{R}^n$ 中的距离，很显然前三条条件是满足的，重点则是判断是否满足三角不等式，对于 $\forall x,y,z\in\mathbb{R}^n$，

$$\begin{aligned} d(x,y)&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left|x_i-y_i\right|=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left|x_i-z_i+z_i-y_i\right| \\ &\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\left|x_i-z_i\right|+\left|z_i-y_i\right|\right) \\ &=d(x,z)+d(z,y)\end{aligned} \tag{6}$$

所以，d 是 $\mathbb{R}^n$ 上的距离。

2. 首先需要证明的是，按距离收敛可以推出按坐标收敛。回顾一下，什么是按坐标收敛，按坐标收敛即为向量中的每一个值都收敛。则要证明，$\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中按距离收敛于 x，即

$$d(x_k,x)\to 0\ (k\to\infty)$$

对 $\forall\epsilon>0$，$\exists K(\epsilon)\in Z$，当且仅当 $k>K(\epsilon)$ 时，有

$$d(x_k,x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left|x_i^{(k)}-x_i\right|<\lambda\epsilon \tag{7}$$

其中，$\lambda=\min\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}>0$。而对于每一个 i，有

$$\lambda_i\left|x_i^{(k)}-x_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left|x_i^{(k)}-x_i\right|<\lambda\epsilon \tag{8}$$

所以，有

$$\left|x_i^{(k)}-x_i\right|<\frac{\lambda}{\lambda_i}\epsilon\Longleftrightarrow\epsilon,\ i=1,2,\cdots,n$$

这表明 $\{x_k\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中按坐标收敛于 x。

3. 第三步则是证明充分性，反之，设 $\{x_k\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中按坐标收敛于 x，则对于每一个 i，对 $\forall\epsilon>0$，$\exists K_i\in Z$，使得当 $k>K_i$，时

$$|x_i^{(k)}-x_i|<\frac{\epsilon}{n\lambda} \tag{9}$$

其中，$\lambda=\max\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}>0$。令 $K=\max\{K_1,K_2,\cdots,K_n\}$，当 $k>K$ 时，则对于每个 i 有，

$$|x_i^{(k)}-x_i|<\frac{\epsilon}{n\lambda}$$

于是，

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left|x_i^{(k)}-x_i\right|<\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}{n\lambda}\epsilon<\epsilon.$$

故 $d(x_k,x)\to 0\ (k\to\infty)$，即 $\{x_k\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中按距离收敛于 x。

4　第三题

设 X 是一个距离空间，$A \subset X, x \in X$，称，

$$d(x, A) = \inf\{d(x, \omega) | \omega \in A\} \tag{10}$$

为点 x 到集合 A 的距离，证明

$$\bar{A} = \{x | d(x, A) = 0\}. \tag{11}$$

且 $\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集。

实际上，大家自己画画就会觉得这是显然的。那么，我们证明，$A \subset \bar{A} \wedge \bar{A} \subset A$，对于任意一个 A 中的点都属于 $\bar{A}$，且任意一个 $\bar{A}$ 中的点都属于 A 即可。

本题中需要使用到几个简单的数学概念，1. 下确界的定义，(下确界是最大下界，1. 集合中的任何点都比下确界 X 大；而且对于任意的 $\epsilon > 0$，都存在点 x_0，有 $X + \epsilon > x_0$)；2. 闭包的定义，(A 的接触点全体称为 A 的闭包，记为 $\bar{A}$)；3. 接触点的定义：$x \in X$，如果对于 $\forall \epsilon > 0$，

$$B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$$

则称 x 为 A 的接触点。那么，如何来证明呢？首先想到的即为，$\bar{A} \subset$ 任意的接触点的集合。用数学的符号表达即为：

令 $B = \{x | d(x, A) = 0\}$，先证明 $B \in \bar{A}$。若 $x_0 \in B$，即，

$$d(x_0, A) = \inf\{d(x_0, \omega) | \omega \in A\} \tag{12}$$

由下确界的定义，对于 $\forall \epsilon > 0$，$\exists \omega \in A$，使得：

$$d(x_0, \omega) < \epsilon,$$

即 $B(x_0, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \to x_0 \in A$。

反之，若 $x_0 \in \bar{A}$，即 x_0 是 A 的接触点。那么，对于 $\forall \epsilon > 0$，

$$B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$$

即存在，$\omega \in A$，使得，

$$d(x_0, \omega) < \epsilon \to \inf\{d(x_0, \omega) | \omega \in A\} \leq \epsilon \tag{13}$$

由于 ϵ 是任意的，我们有，

$$\inf\{d(x_0, \omega) | \omega \in A\} = 0$$

即 $x_0 \in B = \{x | d(x, A) = 0\}$。综上可得，

$$\bar{A} = \{x | d(x, A) = 0\} \tag{14}$$

下面则是证明 $\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集，设 M 为包含 A 的任意闭集，$A \subseteq M$。对 $\forall x \in \bar{A}$，存在 $\{x_0\} \subseteq A \subseteq M$ 使得，

$$\lim_{n \to \infty} d(x, x_0) = 0. \tag{15}$$

由 M 闭可知 $x \in M$。因此，$\bar{A} \subset M$。这也证明了 $\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集。通过这个题，非常详细的刻画了 A 的闭包的几何特征，其描述的是到 A 距离等于 0 的所有的点构成的集合。

5 第四题

设 X 按照距离 d 为距离空间，$A \subset X$ 非空，令，

$$f(x) = \inf_{y \in A} d(x,y) \qquad (\forall x \in X). \tag{16}$$

证明，$f(x)$ 是 X 上的连续函数。分析：这里的 $f(x)$ 是定义在 X 上的非负的实值函数。由连续函数的定义可知，需证明对 $\forall x_0 \in X$，对 $\forall \epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $d(x, x_0) < \delta$ 时有，

$$d_1(f(x), f(x_0)) = |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \tag{17}$$

此证明比较容易，需要用到距离定义中的三角不等式。实际上，此证明过程相对简单。我们已知的有 $d(x, x_0) < \delta$，是不是想办法构建 $d(x, x_0)$ 和 $d_1(f(x), f(x_0))$ 之间的关系就可以了。首先有，

$$\begin{aligned} d(x,y) &\le d(x,x_0) + d(x_0,y) \\ d(x_0,y) &\le d(x,x_0) + d(x,y) \end{aligned} \tag{18}$$

左右两边都对 $y \in A$ 取下界有，

$$\begin{aligned} \inf_{y\in A} d(x,y) &\le d(x,x_0) + \inf_{y\in A} d(x_0,y) \\ \inf_{y\in A} d(x_0,y) &\le d(x,x_0) + \inf_{y\in A} d(x,y) \end{aligned} \tag{19}$$

将公式 (16) 代入即可得，

$$|f(x) - f(x_0)| \le d(x,x_0) < \delta = \epsilon \tag{20}$$

所以，可以证明，$f(x)$ 为连续函数。

6 第五题

证明集合 $M = \{\sin nx | n = 1, 2, \cdots\}$ 在空间 $C[0,\pi]$ 中是有界集，但不是列紧集。

什么是列紧集呢？$C[a,b]$ 中的子集 A 是列紧的当且仅当 A 中的函数是一致有界和等度连续的。

什么是一致有界呢？即存在 $K > 0$，使得对于每一点 $t \in [a,b]$ 及一切的 $x \in A$，有

$$|x(t)| \le K$$

通俗的讲，是所有的函数都有共同的界。而什么又是等度连续呢？对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|t_1 - t_2| < \epsilon$ 时，$|x(t_1) - x(t_2)| < \epsilon \quad (\forall x \in A)$。

分析：$C[0,\pi]$ 中的子集 M 是列紧的当且仅当 M 中的函数是一致有界和等度连续的。显然集合 M 是一致有界的（因为 $\sin(\cdot)$ 是一定 $\in [0,1]$ 的。），要证明 M 不是列紧集，则证明 M 不是等度连续的。在此题中，即为，

对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时，

$$|\sin n \cdot t_2 - \sin n \cdot t_1| < \epsilon \qquad (\forall n \in Z^+)$$

我们的目标是要证伪这个命题，即为得到命题的否命题。否命题即为，$\exists \epsilon > 0$，$\forall \delta > 0$，$\exists n_0 \in Z^+$，虽然 $\exists t_1, t_2 \in [0,\pi]$，且 $|t_1 - t_2| < \delta$，但是，$|\sin n \cdot t_2 - \sin n \cdot t_1| \ge \epsilon$。实际上，我们的主要目标是找 t_1, t_2 和 n_0。实际上证伪，只需要找到一个反例就行。

为了简单起见，我们令 $t_1 = 0$，令 $t_2 = \frac{\pi}{2n_0} \in [0, \pi]$。想要，

$$|t_1 - t_2| < \delta \to n_0 > \frac{\pi}{\delta} > \frac{\pi}{2\delta}$$

且，n_0 要求为整数，所以，令 $n_0 = [\frac{\pi}{2\delta}] + 1$，于是就可以顺理成章的得到，

$$|t_1 - t_2| < \frac{\pi}{2n_0} \leq \frac{\pi\delta}{4} < \delta$$

而，

$$|\sin n \cdot t_2 - \sin n \cdot t_1| = \sin \frac{\pi}{2} = 1 = \epsilon_0$$

由此可得，$M = \{\sin nx | n = 1, 2, \cdots\}$ 是非等度连续。通过这个题，非常形象的描述了，有限维空间和无穷维空间的区别。在有限维空间中，有界就一定列紧，而无限维空间中则是不一定。非常有可能是非等度连续的。

7 第六题

设 D 是 $[0, 1]$ 区间上具有连续导数的实函数全体，在 D 上定义，

$$d(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t) - y'(t)| \tag{21}$$

(1) 证明 D 是距离空间;

(2) 指出 D 中点列按距离收敛的意义;

(3) 证明 D 是完备的.

要证明 D 是完备的，即为证明 D 中的每一个 Cauchy 列是收敛的。这个证明流程，大致分为三步，1. 需要找一个 $x_0(t)$；2. 确定 $x_0(t) \in C[a, b]$；3. 确定 $x_n(t) \to x_0(t)$ $(n \to \infty)$。但是，空间 D 是 $C[0, 1]$ 空间的一个真子空间，但是在其上定义的距离不同。

(1) 要证明 D 是距离空间，只要证明在 D 中所定义的距离 d 满足距离的定义的四条即可。其主要为验证三角不等式成立。

设 $x, y \in D$，则 $\forall t \in [0, 1]$，有，

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \\ |x'(t) - y'(t)| &\leq |x'(t) - z'(t)| + |z'(t) - y'(t)| \end{aligned} \tag{22}$$

二式对 $t \in [0, 1]$ 取最大值并相加得:

$$d(x, y) < d(x, z) + d(z, y)$$

(2) D 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 的充要条件的 $\{x_n(t)\}$ 在 [0,1] 上一致收敛于 $x(t)$ 且 $\{x_n'(t)\}$ 在 [0,1] 上一致收敛于 $x'(t)$。

证明：必要性：设 $x_n(t)$ $(n = 1, 2, \cdots)$，$x(t) \in D$。且 $d(x_n, x) \to 0$。于是对，$\forall \epsilon > 0, \exists N$，当 $n > N$ 时，$d(x_n, x) < \epsilon$，即:

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n'(t) - x'(t)| < \epsilon \tag{23}$$

于是对 $\forall t \in [0,1]$，有

$$
\begin{aligned}
|x_n(t) - x(t)| &\le \max_{0\le t\le 1} |x_n(t) - x(t)| < \epsilon \\
|x_n'(t) - x'(t)| &\le \max_{0\le t\le 1} |x_n'(t) - x'(t)| < \epsilon
\end{aligned}
\tag{24}
$$

显然可以得出结论！

充分性：即 $\{x_n(t)\}$，$\{x_n'(t)\}$ 在 [0,1] 上分别一致收敛到 $x(t)$，$x'(t)$。反之，$\{x_n(t)\}$，$\{x_n'(t)\}$ 在 [0,1] 上分别一致收敛到 $x(t)$，$x'(t)$。对 $\forall \epsilon > 0, \exists N$，当 $n > N$ 时，对 $\forall t \in [0,1]$，有

$$
|x_n(t) - x(t)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |x_n'(t) - x'(t)| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{25}
$$

上两式分别对 $t \in [0,1]$ 取最大值，并相加得：

$$
\max_{0\le t\le 1} |x_n(t) - x(t)| + \max_{0\le t\le 1} |x_n'(t) - x'(t)| < \epsilon \tag{26}
$$

说明 $x_n \to x$ $(n \to \infty)$。即 D 中的收敛是函数列和函数的导数列在 [0,1] 上的一致收敛。

(3) 证明 D 是完备空间，需要用到 Cauchy 列的定义，已经完备空间的性质，之前都分析过了。设 $\{x_n(t)\}$ 是 D 中的任意一个 Cauchy 列，要证明存在 $x_0(t) \in D$，使得 $\{x_n(t)\}$ 按 D 中的距离收敛到 $x_0(t)$，即：

$$
\max_{0\le t\le 1} |x_n(t) - x_0(t)| + \max_{0\le t\le 1} |x_n'(t) - x_0'(t)| \to 0 \ (n \to \infty) \tag{27}
$$

证明中应当注意以下三点：

1. 首先证明存在 $x_0(t)$，$\{x_n(t)\}$ 一致收敛到 $x_0(t)$；
2. 首先证明存在 $y_0(t)$，$\{x_n'(t)\}$ 一致收敛到 $y_0(t)$；
3. 关键说明：$y_0(t) = x_0'(t)$，这说明 $\{x_n(t)\}$ 按 D 中的距离收敛到 $x_0(t)$。

8 第七题

证明存在闭区间 [0,1] 上的连续函数 $x(t)$，使得

$$
x(t) = \frac{1}{2}\sin x(t) - a(t) \tag{28}
$$

其中，$a(t)$ 是给定的 $[0,1]$ 上的连续函数。完备空间中的重要应用就是，压缩映射定理。

证明，在空间 $C[0,1]$ 上考虑如下映射：

$$
\mathrm{T}x(t) = \frac{1}{2}\sin x(t) - a(t)
$$

显然，T 是 $C[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 自身的映射，证明目标是得到：$d(\mathrm{T}x, \mathrm{T}y) < \theta d(x,y)$。对于 $\forall x, y \in C[0,1]$，$\forall t \in [0,1]$，有，

$$
\begin{aligned}
|Tx(t) - Ty(t)| &= \left| \left(\frac{1}{2}\sin x(t) - a(t)\right) - \left(\frac{1}{2}\sin y(t) - a(t)\right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2}\sin x(t) - \frac{1}{2}\sin y(t) \right| \\
&= \frac{1}{2}\left| 2\cos\frac{x(t)+y(t)}{2} \sin\frac{x(t)-y(t)}{2} \right| \\
&\le \left| \sin\frac{x(t)-y(t)}{2} \right| \\
&\le \frac{1}{2}|x(t) - y(t)|
\end{aligned}
\tag{29}
$$

所以，

$$
\begin{aligned}
d(Tx,Ty) &= \max_{\ell\in 0,1}|Tx(t)-Ty(t)| \\
&\le \max_{t\in 0,1}\frac{1}{2}|x(t)-y(t)| = \frac{1}{2}d(x,y).
\end{aligned} \tag{30}
$$

由压缩映射原理知存在唯一的 $x_0 \in C[0,1]$ 使得：

$$
Tx_0 = x_0 \tag{31}
$$

即为：

$$
x(t) = \frac{1}{2}\sin x(t) - a(t) \tag{32}
$$