# Functional Analysis 1.2 Distance Space 01

Chen Gong

16 August 2020

## 目录

# 1 Introduction

从本章开始将正式进入泛函分析的课程学习中。首先回顾一下高等数学中引入的最重要的概念“极限”，为什么说极限很重要呢?

1. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数很多重要的性质是由极限来刻画的。

2. 连续，微分，积分，无穷级数都是由极限定义的。

3. 极限是研究函数的重要工具。

那么我们就想可不可以将极限这一概念推广到更加一般的空间。这里的集合指的是具有用一类性质的东西，统一的放在一起来看。而在我们研究无穷维空间的问题上“极限”同样也很重要，无穷维空间的收敛性问题，无穷个元素进行叠加，或者无穷次的迭代，没有极限的概念肯定是玩不下去的，有限中无法刻画这个概念。而所谓空间指的是集合上加上一定的“结构”，那么在空间上加上怎样的结构才能得到“极限”这一概念呢？下面来举几个例子看看，我们希望从简单的问题出发，把它推广到一般的问题上去。

一维空间：数列的极限为 $x_n \to x(n \to \infty)$。如果对于 $\forall \epsilon > 0$，$\exists \mathbb{N}$，当 $n \leq N$ 时，有 $|x_n - x| < \epsilon$，则称 $x_n \to x(n \to \infty)$。在这里 $|x_n - x|$ 即为 $x_n$ 和 $x$ 之间的距离 $d(x_n, x)$。那么这个概念我们可以换句话说，当 $n$ 充分大的时候，$x_n$ 和 $x$ 之间的距离 $d(x_n, x)$ 可以任意小，则称数列 $x_n \to x(n \to \infty)$。

二维的情况：我们可以类似地定义点列的极限，所不同的是 $x_n$ 和 $x$ 之间的距离是平面上两点之间的距离。点列 $x_n = (\xi_n, \eta_n) \to x = (\xi, \eta)(n \to \infty)$ 的定义为：

如果对于 $\forall \epsilon > 0, \exists$ 正整数 $N$，当 $n > \leq N$ 时有，

$$d(x_n, x) = \sqrt{(\xi_n - \xi)^2 + (\eta_n - \eta)^2} < \epsilon \tag{1}$$

则称点列 $x_n = (\xi_n, \eta_n) \to x = (\xi, \eta)(n \to \infty)$。一般地，我们可以定义 $n$ 维空间中点列的极限，所不同的只是距离 $d(x_n, x)$ 的具体表示形式。所以，大家可以感觉到“极限”的概念和“距离”的定义密不可分。

而在泛函分析中，我们将研究更一般的“空间”以及在这些“空间”上定义的“函数”、“映射”等概念，并且将进一步讨论与它们相关的极限和运算。要在更加一般的“空间”上建立极限的概念，即在一个集合上定义两点之间的“距离”，使之成为我们所说的距离空间。定义距离是定义极限的关键。有了距离，我们就可以定义相应的极限。引进了极限这一概念 (运算)，进而可以研究一般“空间”中的元素 (函数、算子) 的性质。所以，第一课首先要介绍的就是距离，我们希望定义空间中两个元素离得的远近。

本节的内容：

(1) 距离空间的定义；

(2) 距离空间的例；

(3) 距离空间中的收敛性。

首先讲的是距离空间的定义，定义完了距离空间的概念，下一步就是通过很多的例子来强化我们的概念，给出概念所在的一个背景。给出了距离，定义了极限，下一步当然就是考虑收敛性的问题了，这个思路过程是比较流畅的。

## 2 距离的定义

如何定义距离的概念，实际上就是如何抽象出极限的本质特征？我们希望可以从二维情况出发，去类推出一般空间中的复杂概念。

设 $x,y$ 是平面上两点：$x=(x_1,x_2)$,$y=(y_1,y_2)$。两点间的距离为：

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

那么什么是距离呢？它应该满足以下四个条件，

1. 距离是非负的：$d(x,y)\leq 0$；
2. 距离是严格正的：$d(x,y)=0$，当且仅当 $x=y$；
3. 距离是对称的：$d(x,y)=d(y,x)$；
4. 距离满足三角不等式（两边之和大于第三边）。

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$

于是，我们把具有这些性质的从平面上的点到实数的二元映射 $\{\mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathbb{R}\}$ 定义为距离。现在重新说明一下，什么是一个集合，集合就是具有一类性质的东西放在一起，比如可以是一堆数，一堆向量，一推矩阵，一堆函数，甚至是一堆运算都可以。那么接下来我们就可以定义距离空间：

定义 1.1.1（距离空间定义）设 $X$ 是任一以非空集合，对于 $X$ 中的任意两个元素 $x,y$，均有一个实数 $d(x,y)$ 与它对应，且满足：

1. $d(x,y)\leq 0$（非负性）；
2. $d(x,y)=0$，当且仅当 $x=y$（严格正）；
3. $d(x,y)=d(y,x)$（对称性）；
4. $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$（三角不等式）。

则称 $d(x,y)$ 为 $X$ 中的一个距离，定义了距离 $d$ 的集合称为一个距离空间，记为 $(X,d)$, 简记为 $X$。

总结概念我们就要抽象出其中最根本的性质。这个性质不能多也不能少，少了肯定不能完整的表达概率的意义，而多了也不行，会概括出元素本身特有的性质。所以总结概念，往往需要作者有较高的水平，对问题的本质理解的比较透彻，是一件很困难的事情。而在距离的定义中，我们保留了实数空间 $\mathbb{R}^n,(n\in\mathbb{N})$ 中距离的最基本性质。从一些具体实例中抽象出问题的本质特征，加以概括，给出在一般意义下的定义，使之能够运用于更加广阔的范围，这是数学研究中的非常重要的方法。

**注 1.** 运用数学归纳法，可把三角不等式推广为：

$$d(x_1,x_n)\leq d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1},x_n) \tag{2}$$

这个公式的推导非常的简单，这里不做过多的证明了。

**注 2.** 设 $(X,d)$ 是一个距离空间，由三角不等式可证，对于任意的 $x,y,z\in X$，有

$$|d(x,y)-d(y,z)|\leq d(x,z) \tag{3}$$

即：两边之差小于第三边。

事实上，由

$$
\begin{aligned}
&d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,y)\Rightarrow d(x,y)-d(y,z)\leq d(x,z);\\
&d(x,z)+d(x,y)\geq d(y,z)=d(y,z)-d(x,y)\leq d(x,z)
\end{aligned} \tag{4}
$$

实际上这里还用到了距离的对称性。那为什么这条我们不放在定义里面呢？因为这个不是距离空间概念中最原始的定义，他可以由其他的公理导出来。我们数学上希望把定义当成最重要的问题来研究。

# 3 距离空间的例子

## 3.1 $n$ 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$

在 $n$ 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中，定义

$$
d(x,y)=\left(\sum_{h=1}^{n}\left(\xi_k-\eta_k\right)^2\right)^{1/2} \tag{5}
$$

其中，$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$，则 $(\mathbb{R}^n,d)$ 是一个距离空间。

这个问题如何证明呢？要证明 $(\mathbb{R}^n,d)$ 是一个距离空间很简单，我们只需要判断其满足距离的四个公理就行了。前面三条，非负，正定，对称是显然成立的，那么我们的目标就是判断其是否满足三角不等式即可。证明中主要利用到了柯西（Cauchy）不等式。

柯西不等式为：

$$
\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{b}_k\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{1/2} \tag{6}
$$

然后将柯西不等式进行变形可得，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2&=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\\
&\leq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{1/2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\\
&=\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_k^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{1/2}\right)^2
\end{aligned} \tag{7}
$$

整理一下就是，

$$
\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\right)^{1/2}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_k^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{1/2} \tag{8}
$$

为什么这样变形呢？显然这样变形让我们看到了成功证明的希望，因为求解目标就是两个和的形式。那么设 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$，$z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意三点，可以得到，

$$
\begin{aligned}
d(x,y)+d(y,z)&=\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k-\eta_k\right)^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\eta_k-\zeta_k\right)^2\right)^{1/2}\\
&\geq\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k-\zeta_k\right)^2\right)^{1/2}=d(x,z)
\end{aligned} \tag{9}
$$

得证!! 那么我们可以同样作此猜想，是不是有在 $n$ 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中，定义

$$d(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^n\right)^{1/n} \tag{10}$$

其中，$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$，则 $(\mathbb{R}^n,d)$ 是一不是一个距离空间呢？这就是类比的方法。在一个集合上可以定义不同的距离，从而得到不同的距离空间。

## 3.2 一阶范数和无穷范数距离的证明

同样在 $\mathbb{R}^n$ 中，可以分别定义，

$$\begin{aligned} d_1(x,y)&=\textstyle\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k| \\ d_\infty(x,y)&=\max\{|\xi_1-\eta_1|\cdots\cdots|\xi_n-\eta_n|\} \end{aligned} \tag{11}$$

和上一个问题一样，我们验证前三个问题是很简单的，主要就是如何证明第四个三角不等式。同样设 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$，$z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意三点，我个人看了一下，觉得证明思路非常的简单，把每一项拆开使用绝对不等式分别比较，比如很显然 $|\xi_1-\eta_1|+|\eta_1-\zeta_1|\leq|\xi_1-\zeta_1|$ 然后进行 $n$ 项都进行合并即可。

## 3.3 序列空间 $l^\infty$

上面有限维的我们都介绍完了，接下来就是分析无穷维上的问题了。令

$$l^\infty=\{x=(\xi_j)\mid|\xi_j|\leq c_x\} \tag{12}$$

其中，$x$ 是一个有界的无穷维数列。其中 $c_x$ 与 $j$ 无关，即为 $l^\infty$ 是全体有界数列，那么这个集合中的元素就是每一个有界数列了。在 $l^\infty$ 中定义了，

$$d(x,y)=\sup_{j\in\mathbb{N}}\{|\xi_j-\eta_j|\} \tag{13}$$

其中，$x=(\xi_j),y=(\eta_j)\in l^\infty$。这里的 $l^\infty$ 仍然是一个距离空间，证明方法和前面那个无穷范数的证明思路是一样的。由于数列是有界的，公式 (13) 中的上确界是必然存在的。首先就要验证是一个数，因为距离必然是一个数，数都不是怎么是距离呢？而为什么我们这里可以得到是一个数呢？因为上确界存在，数列是有界的。

注 $l^\infty$ 可看作是 $C^n$ 由 (13) 式定义的距离 $d_\infty(x,y)$ 产生的距离空间 $(C^n,d_\infty)$ 的推广，由于是无穷序列，max 被 sup 所代替。因为这里的最大值不一定是一个数，他有可能是一个范围，而上确界是必然存在的，而且是一个数，我们要注意这里的区别。

## 3.4 连续函数空间

连续函数空间 $C[a,b]$ 是我们泛函分析中最重要的一个函数空间了。其中的元素代表的是，区间 $[a,b]$ 上的全体连续函数。我们定义，

$$d(x,y)=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)| \tag{14}$$

其中，$x(t), y(t)$ 是 $[a,b]$ 上的任意两个连续函数，则 $C[a,b]$ 是一个距离空间。

要证明他是距离空间，首先就要想想 $|x(t)-y(t)|$ 是一个数吗？很显然这是一个数，因为函数是连续的。那么要证明在由闭区间 $[a,b]$ 上全体连续函数组成的集合上定义的距离需要满足四条距离公理。

证明，其中前面三条非负，正定，对称是显然成立的。下面主要就是验证第四条。设 $x(t), y(t), z(t)$ 是 $[a,b]$ 上任意三个连续函数。要证 $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$，即为要证，

$$\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)| \le \max_{a\le t\le b}|x(t)-z(t)| + \max_{a\le t\le b}|z(t)-y(t)|$$

由绝对值不等式可得，对于 $\forall t \in [a,b]$，

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| \le & |x(t)-z(t)| + |z(t)-y(t)| \\ \le & \max_{a\le t\le b}|x(t)-z(t)| + \max_{a\le t\le b}|z(t)-y(t)| \\ = & d(x,z) + d(z,y)\end{aligned} \tag{15}$$

所以，必然有 $d(x,y) = \max_{a\le t\le a}|x(t)-y(t)| \le d(x,z) + d(z,y)$，于是 $[a,b]$ 上的全体连续函数赋予上述距离成为一个距离空间，记为 $C[a,b]$。

而在一个集合上，可以引进多种距离，并且根据不同的问题来定义不同的距离。同一个集合中的元素，定义不同的距离，就可以形成不同的距离空间。不过其中有的距离下空间是完备的，有的是不完备的。空间的完备性是很重要的，有了完备性，极限运算 (微分和积分) 才能很好的进行、不同的距离导出的收敛性不同，这个空间的完备性，我们在后面的章节中会详细的学习。距离空间中距离的选择是非常重要的，具体定义什么样的距离，要根据不同的问题，设定不同的目标，引进不同的距离。下面来看一个具体的例子。

### 3.5 全体整数组成的元素序列

设 $B$ 为全体由整数组成的元素序列，即为 $B = \{n = (n_1, n_2, \cdots) | n_i \in \mathbb{N}\}$，定义

$$d(n,m) = \begin{cases} 0 & \text{如果，} n_i = m_i\text{，} i = 1, 2, \cdots \\ \frac{1}{k} & k \text{ 是 } n_i \ne m_i \text{ 的第一个元素。} \end{cases} \tag{16}$$

大家可能觉得这个距离有点奇怪，比如前三个元素都一样，第四个元素不一样，那么距离就是 $\frac{1}{4}$。这个距离是从哪来抽象出来的呢？这一距离，是从下述数学模型中抽象出来的，假设 $s(t)$ 是一个通过某一通讯系统送出的信号，且 $s(t)$：(1) 每秒取样-次，(2) 在单位时间看作常量，(3) 信号码都编译成整数。假如有一段信号为，

$$\{n_s = \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 7, \cdots\}\}$$

由于系统和环境的扰动, 收到的信号可能会发生误差. 假定收到的信号是

$$n_r = \{n_{r_1}, n_{r_2}, \cdots\}$$

则我们可以通过送出和收到的信号的距离 $d(n_s, n_r)$ 来刻画多长时间某一个误差发生，即 $d(n_s, n_r)$ 越小，则通信系统不发生误差运行的时间越长。这就是距离这样定义的意义。

### 3.6 小结

那么通过上述几个例子，我们比较详细的分析了距离空间中的一些例子，并且距离说明了同样的元素通过不同的距离的定义，可以得到不同的距离空间。而在空间中定义了距离之后，**我们就可以在距离空间中引入极限的概念了**，而极限的概念中，就离不开对收敛性的讨论。

## 4 距离空间中的收敛

下面首先给出距离空间中极限的定义，

极限，设 $(X, d)$ 是一个距离空间，$\{x_n\} \subset X, x_0 \in X$，如果当 $n \to \infty$ 时，$d(x_n, x_0) \to 0$，则称 $\{x_n\}$ 以 $x_0$ 为极限。其中，$x_0 \in (X, d)$ 是必须要存在的。

同样极限 $\lim_{n\to\infty x_n = x_0}$ 的定义，也可以用 $\epsilon - N$ 语言来表述。$\forall \epsilon > 0, \exists N,$ 当$n \leq N$时，有$d(x_n, x_0) < \epsilon$。注意，这里我们描述的是点列，不是数列。其中，点列和数列还是有很多区别的。而下面我们来探究一下距离空间中收敛点列的性质。这里其实和数学分析中的性质是非常类似的。

**定理 4.1** $\{x_n\}$ 在 $X$ 中收敛，则

1. $\{x_n\}$ 的极限是唯一的。
2. 若 $x_0$ 是 $\{x_n\}$ 的极限，则它的任何子列也收敛到 $x_0$。

分析，我们可以利用距离空间中数列极限的定义来证明。

(1) 的证明，反证法，假设同时有 $x_0, y_0 \in X, x_0 \neq y_0$，且 $x_n \to x_0, x_n \to y_0 (n \to \infty)$。根据收敛数列的 $\epsilon - N$ 语言，可以得出以下证明，

对于 $\epsilon = \frac{1}{2} d(x_0, y_0) > 0$，存在 $N_1$，当 $n \geq N_1$ 时，

$$d(x_0, x_n) < \epsilon_0,$$

同时存在 $N_1$，当 $n \geq N_1$ 时，

$$d(y_0, x_n) < \epsilon_0,$$

于是当 $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ 时，

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_n) + d(y_0, x_n) < 2\epsilon_0 = d(x_0, y_0)$$

这里显然是不可能的，因此极限唯一。

(2) 的证明，首先我们需要明白什么是子列，这里不给出严格的定义了，我们尝试从 intuitive 思维去理解一下。有一个点列 $\{x_n\}$，假设他的子列为 $\{x_{n_k}\}$。这个子列是怎么来的呢？说白了就是从 $\{x_n\}$ 中，按原点列的顺序提取，所以这样就一定会有 $n_k \leq n$，而且由于 $\{x_n\}$ 有无穷多个，那么 $\{x_{n_k}\}$ 也必然有无穷多个。

而关于 (2) 的证明，与数学分析中收敛数列类似性质的证明方法一样。由已知 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$，根据定义有：$\forall \epsilon > 0, \exists N$，当 $n >\leq N$ 时，

$$d(x_n, x_0) < \epsilon$$

设 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列，要证 $\{x_{n_k}\} \to x_0(k\to\infty)$，由 $n_k \le k, n_k \to \infty(k\to\infty)$。令 $k=N$，显然当 $k>K$ 时有，$n_k>n>K=N$，有

$$d(x_{n_k}, x_0) < \epsilon$$

于是有

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$$

得证!!

# 5 总结

这一章只是泛函分析的一个开头，首先我们为什么要一开头就定义距离空间，因为距离空间很重要。这完全就是废话。而它的逻辑是这样的，我们泛函分析研究的是无穷维空间的问题，所以离不开极限的概念，而极限是由距离空间所定义的，所以我们首要的就是研究什么是距离空间。本章首先介绍了什么是距离空间，根据距离公理，其需要满足四条性质，非负，正定，交换，三角不等式。然后我们举了几个例子，证明了一下距离空间，其中最难验证的就是第四条。这里有一点值得我们注意，距离一定是一个数。在大量的举例中我们得到了同一个集合中的元素，定义不同的距离，就可以形成不同的距离空间。这和实际建模有关。

定义完了距离空间，我们就很自然的引出了泛函分析中一个非常重要的概念“极限”。有了极限就要考虑收敛性的问题，所以介绍了距离空间中的收敛性问题，和点列收敛的性质。注意区分点列和数列的区别，在点列中的元素不再是一个简单的数，而可以是集合中的任何元素，包括向量，矩阵，函数，运算等。同样我们可以借助数学分析中，数列收敛的性质，来证明点列收敛的性质，这典型的从简单问题出发推广到一般问题。