Functional Analysis 1.3 Open Set Continuous Mapping

Chen Gong

26 August 2020

目录

1 Introduction

在上一小节中，我们讲述的就是距离空间，我们引入了距离的概念。之后讲述了距离空间上的一些性质，下一节我们要讲的是开集和开映射。

在 $\mathbb{R}^2$,$\mathbb{R}^3$ 空间中引入了距离（欧式距离），就有了

开球

$$B(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) < r\}, \tag{1}$$

闭球

$$B(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) \leq r\}, \tag{2}$$

于是，就有了开集、闭集这些概念。注意，开球和闭球这两个概率仅仅用到了距离的概念。所以，在一般的距离空间中，我们也同样可以引进开球、闭球，进而引进开集、闭集等一系列概念。

2 开球和闭球

集合 2.1 设 (X, d) 是一个距离空间，$r > 0$，集合

$$B(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) < r\}, \tag{3}$$

称为以 x_0 为中心，r 为半径的开球（Open ball）；
集合

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) \leq r\}, \tag{4}$$

称为以 x_0 为中心，r 为半径的闭球（Closed ball）；
集合

$$S(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) = r\}, \tag{5}$$

称为以 x_0 为中心，r 为半径的球面（Sphere）。

注 1，在 $\mathbb{R}$ 中，开球

$$B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中，开球

$$B(x_0, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} < r \right\}$$

注 2 从 Euclidlean 几何中延伸使用的 “开球”、“闭球、“球面” 这些概念，不一定具有在 $\mathbb{R}^3$ 中球体的几何直观效果。

下面我给出离散空间的定义，X 是一个非空集合，$x, y \in X$，定义

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases} \tag{6}$$

那么在此离散空间中，$B(x_0, \frac{1}{2}) = \{x_0\}$，因为除了他自己，其他所有的元素和他的距离都是 1。同理可得，$B(x_0, \frac{3}{2}) = \{D\}$，$B(x_0, 1) = \{x_0\}$。同理可得，$\bar{B}(x_0, 1) = D$，而 $S(x_0, 1) = D - \{x_0\}$。

设 X 是 $[0,T]$ 上全体连续函数组成的距离空间，距离定义为，

$$d_2(x,y) = \left\{ \int_0^T |x(t)-y(t)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

对于 $x_0 \in X$，开球 $B(x_0, \frac{1}{2})$ 表示定义在 $[0,T]$ 区间上，满足条件

$$\left\{ \int_0^T |x(t)-y(t)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2} \tag{8}$$

的全体连续函数。

3 内点，开集，邻域

关于这三个概率的介绍，我们可以把 $\mathbb{R}^2$ 空间中的类似概念作为其来源和背景。

定义 3.1 设 X 是一个距离空间，$A \subset X$，若存在开球 $B(x_0,r)$，使得 $A \subset B(x_0,r)$，则称 A 是有界集。

定义 3.2 设 X 是一个距离空间，$G \subset X$，对于 $x_0 \in G$，若存在开球 $B(x_0,r)$，使得 $B(x_0,r) \subset G$，则称 x_0 为 G 的内点。**内点是本章中非常重要的概念，之后我们会具体描述，为什么它会这么重要。**

定义 3.3 设 X 是一个距离空间，$G \subset X$，若 G 的每一个点都是内点，则称 G 是一个开集。

对于 $x \in X$，包含 x 的任一开集称为 x 的一个开邻域。

证明，开球 $B(x_0,r)$ 是一个开集。

要证 $B(x_0,r)$ 是开集，即要证明其中的每一个点都是内点。也就是 $B(x_0,r)$ 中的每一个点都存在开球包含的 $B(x_0,r)$ 中。

根据开球的定义可得 $\forall x_1 \in B(x_0,r)$，都有 $d(x_0,x_1) < r$。取 $0 < r_1 < r - d(x_0,x_1)$，我们要证明

$$B(x_1,r_1) \subset B(x_0,r)$$

事实上，根据开球的定义，可以很简单的得出 $\forall x \in B(x_1,r_1) \to d(x_1,x) < r_1$。由距离的三角不等式，有

$$\begin{aligned} d(x_0,x) &\leq d(x_0,x_1) + d(x_1,x) \\ &\leq d(x_0,x_1) + r_1 \\ &< d(x_0,x_1) + r - d(x_0,x_1) \\ &= r \end{aligned} \tag{9}$$

所以，$x \in B(x_0,r)$，即为 $B(x_1,r_1) \subset B(x_0,r)$。故 $B(x_0,r)$ 是开集。**注，开球是开集，而开集并不一定是开球。**

3.1 开集的性质

设 X 是距离空间，X 中的开集具有以下性质。

(1) 全空间与空集是开集；

(2) 任意多个开集的并集是开集；

(3) 任意有限多个开集的交集是开集。

第一条性质这里不给出过多的证明，这个结论比较显然。

第二条性质证明，G_a 是开集，其中 $\alpha \in I$。要证明 $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ 是开集，$\forall x \in G$，$\exists \alpha_0 \in I$，使得 $x \in G_{\alpha_0}$。

因为 G_{α_0} 是开集，所以存在开球 $B(x, r)$，使得

$$B(x, r) \subset G_{\alpha_0} \subset G \tag{10}$$

所以 G 是开集。

第三条性质证明，设 $G = \bigcap_{k=1}^{n} G_k$，其中 G_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 是开集，需要证明 G 是开集。此证明需要采用开集的定义。对于 $\forall x \in G$，则 $x \in G_k$。由于，每一个 G_k 都是开集，则存在 $B(x, r_k) \subset G_k$。由于集合的数量是有限的，并且每一个 r 都必然是大于零的。所以，我们这里取到了 $r = \min\{r_k\}$。注意这里为什么是有限，因为当集合的数量是无限个以后，距离的下确界将不一定大于零了，它有可能会等于零。（所以，在此处我们用到了“有限个开集”这个条件）。

于是，

$$B(x, r) \subset B(x, r_k) \subset G_k (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{11}$$

即为，

$$B(x, r) \subset \bigcap_{k=1}^{n} G_k = G \tag{12}$$

所以 G 是开集。

如果一个集合 X 中有一个子集族 $\mathcal{J}$ 满足上述三个性质，我们则把它们称为开集族。或者说 $\mathcal{J}$ 是 X 的一个拓扑，$(X, \mathcal{J})$ 成为一个拓扑空间。即全体开集决定了空间的拓扑性质。那么，按这个思路来看，我们一步步从距离定义了开球，从开球定义了开集，从开集定义出了拓扑，定义是一步步逐渐深入的。在这样的拓扑机构下，类似于实数集上定义的连续函数一样，我们可以类似的定义距离空间上的连续映射。

老师从这里引入了一个拓扑的概念，这个概念是来自牛津字典。Definition of topology: Study of geometrical properties and spatial relations unaffected by continuous change of shape or size of figures.

我个人的理解是，图形在连续变换下，比如压缩，拉升等等，几何性质和空间关系没有受到影响的一些性质，被称之为基本的拓扑性质。

3.2 小结

我们从简单的二维空间出发，引出了开集和内点这样一些概念的思维来源。然后将其推广到无穷维空间，和更加一般化的距离空间中，从而得到了更加一般化的概念。有了这样一些概念以后，我们继续研究了开集的性质。抽象出来开集本质的一些特征，从而就可以引出拓扑了，也就是在连续变化下，没有改变的一些性质。下面，我们就要介绍连续映射和等价距离的概念和性质了。

4 等价的距离、连续映射

4.1 等价距离的定义

首先给出等价距离的定义，

定义 4.1 设 (X, d_1)，(X, d_2) 是定义在同一集合 X 上的两个距离，如果存在 $C_1 > 0$，$C_2 > 0$，使得对于 $\forall x, y \in X$ 都有

$$C_1 d_1(x, y) < d_2(x, y) < C_2 d_1(x, y)$$

则称距离 d_1，d_2 是等价的。等价最重要的含义是，收敛性是一样的。为什么说收敛性是一样呢？收敛的定义就是，$x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ 的时候有 $d(x_n, x_0) \to 0$ $(n \to \infty)$。根据这个不等式关系，可以很明显的感受到，如果 $d_1(x_n, x_0) \to 0$ 的话，必然有 $d_2(x_n, x_0) \to 0$。而且反之也是成立的，所以我们可以推出两个距离空间下的收敛性是一样的。即为：

$$x_0 \xrightarrow{d} x(n \to \infty) \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d} x(n \to \infty) \tag{13}$$

而且距离 d_1, d_2 是等价的，它们产生的开集族 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 也是相同。这个也很好理解，因为距离是等价的，而开集的关系都是由距离给出的，所以必然开集族也是相同的。那么，下面我们将给出一个具体的例子。

4.2 等价距离实例

在 $\mathbb{R}^2$ 中，对 $\forall x = (x_1, x_2)$，$y = (y_1, y_2)$，定义距离，

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ d_2(x, y) &= \left(|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2\right)^{1/2} \\ d_\infty(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \end{aligned} \tag{14}$$

则 d_1, d_2, d_∞ 在 $\mathbb{R}^2$ 中是等价的，事实上：$\forall x, y \in \mathbb{R}^2$，我们可以简单的得到如下几个等式，

(1) $d_\infty(x, y) \le d_2(x, y) \le d_1(x, y)$；

(2) $d_2(x, y) \le \sqrt{2} d_\infty(x, y)$；

(3) $d_1(x, y) \le \sqrt{2} d_2(x, y) \le 2 d_\infty(x, y)$。

这三个公式的推导非常的简单，这里就不做过多的描述了，显然从以上三个公式中，我们可以得出 $d_\infty(x, y) \le d_2(x, y) \le \sqrt{2} d_\infty(x, y)$。所以有 $d_2(x, y) \Leftrightarrow d_\infty(x, y)$。同理，可以得到，$\frac{\sqrt{2}}{2} d_1(x, y) \le d_2(x, y) \le d_1(x, y)$，所以可以得到 $d_2(x, y) \Leftrightarrow d_1(x, y)$。比较严谨的同学还会想到，这里得到了 $d_2(x, y) \Leftrightarrow d_\infty(x, y)$ 和 $d_2(x, y) \Leftrightarrow d_1(x, y)$，有没有传递性可以得出，$d_2(x, y) \Leftrightarrow d_\infty(x, y) \Leftrightarrow d_1(x, y)$。大家根据距离等价的定义去想想就知道，这个等价性必然是存在的。

而且，这个结果可以推广到 $\mathbb{R}^n$ 中。具体的证明思路是一样的，这里不做过多的描述。

4.3 连续映射的定义

在讲解连续映射之前，我们首先要了解一个连续函数的定义。设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上定义的实值函数（即为：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的映射），如果满足：对于 $\forall \epsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续，如果在函数在其定义域内每个点都连续，则称函数在定义域内是连续函数。实际上把这里的绝对值可以看成是距离，连续和极限的定义都是距离空间为基础的。

而类似于实数空间中的连续函数，可在距离空间上定义连续映射。

下面给出连续映射的定义，

定义 4.2 连续映射：令 (X, d)，(X_1, d_1) 是距离空间，

$$T : X \to X_1$$

是一个映射，$x_0 \in X$，如果对于 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$，当 $d(x, x_0) < \delta$ 时，有

$$d(T(x), T(x_0)) < \epsilon$$

则称 T 在 x_0 点连续。

其实这个和前面连续的定义有区别吗？显然都是一样的。可能看到这里还感觉比较简单，接下来我们将用更加一般化的语言来进行抽象。换用一种邻域的观点，从几何的角度来看这个问题，可能会更加的直观一点，注意这里的定义和之前的定义都是等价的。只不过思考的角度不一样，

对 $\forall \epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得，

$$TB(x_0, \delta) \subset B(T(x_0), \epsilon) \tag{15}$$

几何映射解释如下图所示，

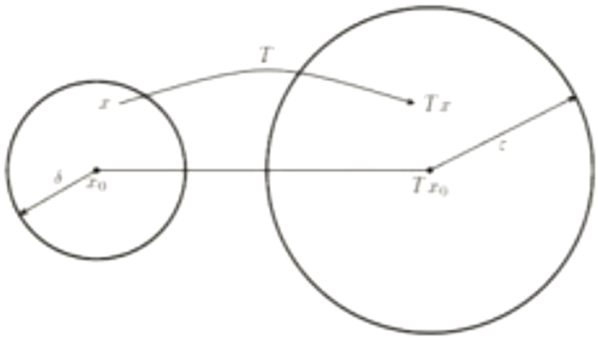

图 1: 二维空间中连续映射的概念图

通过图 1 我们可以看得比较清晰，其中 $B(x_0, \delta)$ 实际上就是 $d(x, x_0) < \delta$ 形成的开球。而 $B(T(x_0), \epsilon)$ 指的是 $d(T(x), T(x_0)) < \epsilon$ 形成的开球。而 $TB(x_0, \delta)$ 是对此开球中的元素做一个映射 T。映射后的元素一定是 $B(T(x_0), \epsilon)$ 中的内点，这就是从邻域的角度进行思考。

定义 4.3 等距映射，若 T 在 X 中的每一个点都连续则称 T 在 X 上连续，特殊的，若

$$d(x,y)=d_1(T(x),T(y)),\ \forall x,y\in X$$

则称 T 是等距映射。注 1 等距映射是连续映射，等距映射是 1-1 的，但不一定是满射的。如果，X, X_1 上存在一个等距在上的映射，

$$T:X\to X_1(T(X)=X_1) \tag{16}$$

则称 X_1 和 X 是等距的。而且等距的两个空间，在等距的意义下可以认为是同一空间。

定义 4.4 连续映射的一般化定义：在开集的概念，我们可以把连续映射用开集来描述。设 T 是从距离空间 (X,d) 到距离空间 (X_1,d_1) 的映射，T 是连续的当且仅当 (X_1,d_1) 中任何开集的原像仍然是 (X,d) 中的开集。

其实在这个定义中，已经把距离的概念都隐掉了。在我们原始的定义中，本就没有距离的概念的。这才是连续函数的最基本的性质。

证明，

首先要证充分性 "$\Rightarrow$" 假设 T 是连续的，$S_1\subset X_1$ 是开集。$S\subset X$ 是 S_1 的原像。也就是映射结果是开集，原像也要是开集。我们的条件中最重要的就是这两条标红的。下面的证明中，必须要用到这两个条件，没有用到就一定错了。

如果 $S=\emptyset$，这是显然成立的。

如果 $S\neq\emptyset$，我们需要利用开集的定义来证明，即为要证：对 $\forall x_0\in S$，存在 x_0 的一个邻域包含在 S 中，而 T 把此邻域都映射到 S_1 中。简单的理解为，S 中关于 X_0 的一个邻域中所有的点，都可以通过 T 映射到 S_1 中 y_0 的一个领域内。

要证 $S\neq\emptyset$，对于 $\forall x_0\in S$，要证 x_0 是 S 的内点，即证明存在 x_0 的一个邻域映射到 S 中，一个邻域包含在 S 中的含义是：T 把此邻域映射到 S_1 中。

令 $y_0=Tx_0\in S_1$，其中 S 是关于 S_1 的原像，关于 T。因为 S_1 是开集，所以必然存在 $B_1(y_0,\epsilon)\subset S_1$。

由 T 是连续的，根据公式 (15) 可得，对于上述 ϵ，存在 $\delta>0$，使得$TB(x_0,\delta)\subset B_1(y_0,\epsilon)\subset S_1$。这意味着 $B(x_0,\delta)\subset S$，那么 x_0 是一个内点，可知 S 是开集。

根据下面这个图就可以清楚的看到了，

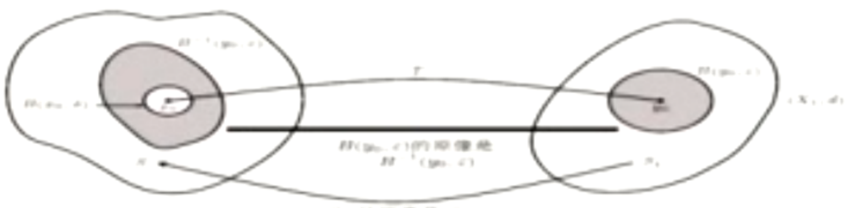

图 2: 开集连续映射的图像

"$\Leftarrow$" 则是关于必要性的证明，假设 X_1 中任何开集的原像仍是 X 中的开集，要证明 T 是连续的。即要证 T 在 X 中的每一点都连续。

对于 $\forall x_0 \in X$ 和 $\forall \epsilon > 0$，$B_1(T(x_0), \epsilon)$ 在 X_1 中是开的。而且他的原像 $N = T^{-1}B_1(T(x_0), \epsilon)$ 也是开集。并且 $x_0 \in N$，因此 N 中包含一个 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0, \delta)$。注意左边这个大黑的集合就是映射的原像 N，那么我们必然有 $TB(x_0, \delta) \subset B_1(T(x_0), \epsilon)$。

那么由公式 (15) 式可得，T 在 x_0 处连续，x_0 是任意的，则 T 在 X 上连续。

4.4 小结

我们可以看到连续映射是一个拓扑概念，它最本质的抽象用一句话描述就是，开集的原像也是开集。所以，有了这个概念，推导得出两个连续函数的复合函数也是连续的就变得非常简单了，甚至是推导任意多个连续函数的复合都是连续的。简单想一想就知道，开集的原像也是开集，那么原像的原像也是开集，这样连续映射肯定可以满足拓扑性质。这样可以无限的套下去，就像俄罗斯套娃一样，任意多个连续函数的复合之间开集和其开集的原像也一定是开集。而在数学分析中对这个结论的证明是非常困难的，而在泛函分析中使用开集的概念来证明就变得相对比较简单了，这是当然的，我们使用的数学工具更加抽象了。

5 泛函分析学科思维简介

这是孙炯老师对泛函分析学习过程中的一些思考，以及上升到数学学习的一些想法。

随着课程的进行，大家或许会感觉泛函的学习越来越抽象。泛函分析是分析系列中非常重要，也是非常困难的一门课程。俗话说得好“实变函数学十遍，泛函分析心泛函”并不是没有道理的。

学习泛函分析的困难首先在于它的抽象，抽象是从众多的事物中抽取出共同的、本质性的特征，而舍并其非本质的特征例如苹果、香蕉，葡萄等，它们共同的特性就是都是水果。得出水果概念的过程就是一个抽象的过程，要抽象就必须进行比较，没有比较就无法找到共同的部分。所谓的共同特征是相对的，是指从某一个侧面看是共同的。

在抽象时同与不同，决定于从什么角度上来抽象，抽象的角度取决于分析问题的目的。

其实大家想想我们距离这些概念最原始的都是从之前学习的二维坐标系中的距离中抽象出来的。所以以这个知识点为背景，再去理解整个距离空间会简单很多。

抽象是我们数学研究中，非常重要的一种手段。数学的抽象就是数学建模。而泛函分析不但将古典分析的基本概念和方法抽象化。而且还将这些概念和方法几何论。我们研究泛函的目的是如何学会抽象这种思维方式。

6 可交换的极限顺序思考连续映射

6.1 可交换的顺序思考连续映射

之前我们从开集的角度定义了连续映射，下面我们将从极限运算可交换的角度思考连续映射。

定理 4.1: 连续映射设 T 是从距离空间 (X, d) 到距离空间 (X_1, d_1) 的映射。T 在 x_0点是连续的当且仅当对于每个满足条件 $\lim_{n\to\infty} x_n = X_0$ 的点列都有

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) \tag{17}$$

此定理说明，若 T 连续，则极限运算可以和 T 交换顺序。

证明：

首先我们要证的是**充分性**，假设 T 是连续的，且 $\lim x_n = x_0$，要证明

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0) = T(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

由 T 是连续的，则对于 $\forall\epsilon > 0$，使得当 $d(x, x_0) < \delta$ 时，有

$$d_1(T(x), T(x_0)) < \epsilon$$

因为 $\lim x_n = x_0$，则对于 $\delta > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，有 $d(x_n, x_0) < \delta$，于是有

$$d_1(T(x_n), T(x_0)) < \epsilon$$

即为

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0)$$

又因为 $\lim x_n = x_0$，所以我们可以得到

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) \tag{18}$$

第二步则是要证**必要性**，在已知 $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0) = T(\lim_{n\to\infty} x_n)$ 的情况下，显然有 $T(x_n) \to T(x_0)$，所以我们要证明 T 在 x_0 点连续。

我们需要采用反证法来进行证明，假若不然，T 在 x_0 点不连续。则存在 $\epsilon_0 > 0$，对于任何的 $\delta > 0$，都存在一个 x_0，使得 $d(x_0, x_n) < \delta$，但是有

$$d_1(T(x_n), T(x_0)) \geq \epsilon_0$$

取 $\delta = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$。对应的有 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，满足 $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$，但是有 $d_1(T(x_n), T(x_0)) \geq \epsilon_0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$。

那么现在根据上述的推导可以得出 $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$，但是 $T(x_n)$ 不趋近于 $T(x_0)$，这与条件矛盾。

6.2 实例

例 1. 设 $X = C[a, b]$，令 $T(x) = \int_a^b x(t)dt$，则 T 是从 $C[a, b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 (这里实际上就是一个线性泛函)，由于

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) = \left| \int_a^b x(t)\mathrm{d}t - \int_a^b y(t)dt \right| &\leq \int_0^b |x(t) - y(t)|dt \\ &\leq |b - a| d(x, y) \end{aligned} \tag{19}$$

那么，根据公式 (19) 是显然可以符合映射连续的条件的，所以 T 是连续的。

例 2. 若 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a, b]$ 中的收敛序列，即为

$$x_n \underset{d_{C[a,b]}}{\rightarrow} x \ (n \to \infty)$$

由定理 4.1 可得，

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) \tag{20}$$

这里的 $T(x) = \int_a^b x(t)dt$，我们有：

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to\infty} x_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)\mathrm{d}t \tag{21}$$

注意到 $\{x_n(t)\}$ 在 $C[a,b]$ 中的收敛是：

$$\max_{a\le t\le b} |x_n(t) - x(t)| \to 0 \ (n\to\infty) \tag{22}$$

由于此数列的收敛与具体的点无关，所以可知此函数列是一致收敛的。而我们之前在数学分析中就学习过，如果函数是一致收敛的，那么可以交换积分和极限的顺序，这是数学分析中熟知的结论。

可否交换积分和极限的顺序对于运算来说是非常重要的，比如在重积分中，如果可以交换顺序很多时候是可以计算出来的，如果不可以交换则是算不出来的。而定理 4.1 把结论更一般化了。

只要映射是连续的（在距离空间下），极限运算和这个映射就可以交换运算顺序。而积分和极限运算的交换顺序只是其中的一个特例。

7 总结

本章首先介绍的是开集和连续映射的内容。其中开集的定义非常的重要，开集是集合中的每一个点都是内点组成的集合。然后描述并证明了开集的性质，

(1) 全空间与空集是开集；

(2) 任意多个开集的并集是开集；

(3) 任意有限多个开集的交集是开集。

系统的学习了开集之后，很自然的就可以引出拓扑的概念了，图形在连续变换下，比如压缩，拉升等等，几何性质和空间关系没有受到影响的一些性质，被称之为基本的拓扑性质。

文章的第二部分，描述的是开集引出的重要概念"连续映射"。其中首先介绍的是等价距离，由距离等价可以得出它们产生的开集族是一样的。之后，我们分别从三个角度来定义了连续映射，

(1) 距离的角度，我们从距离的定义，引出了连续映射的定义。

(2) 拓扑的角度，舍弃距离的具体表达形式，采用开集的原像一定是个开集来定义连续映射。

(3) 运算的角度，只要映射是连续的（在距离空间下），极限运算和这个映射就可以交换运算顺序。

同时通过一些例子，我们发现很多分析中很难的问题，在泛函分析中得到了简化和推广，比如 n 个连续函数复合还是连续函数；如果函数是一致收敛的，那么可以交换积分和极限的顺序。