= МАТЕМАТИКА

УЛК 519

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ СФЕРЫ 131-гө АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

© 1999 г. В. И. Лебедев, Д. Н. Лайков

Представлено академиком Г.И. Марчуком 26.02.98 г.

Поступило 27.02.98 г.

В настоящей работе приведены координаты узлов и веса квадратурной формулы гауссового типа 131-го порядка для единичной трехмерной сферы, инвариантной относительно группы октаэдра с инверсией. Теория и способы построения квадратур указанного типа описаны в [1–3].

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве $R^3(x, y, z)$ задана сфера $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и пусть

$$I(f) = \frac{1}{4\pi} \int_{S} f(\omega) d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{\pi} f(\theta, \phi) \sin\theta d\theta, (1)$$

где $\omega \in S$. Инвариантные относительно группы октаэдра с инверсией квадратуры гауссового типа, правильно интегрирующие первые $(n+1)^2$ многочлена на сфере, представим в виде

$$I_{n}(f) = A_{1} \sum_{i=1}^{6} f(a_{i}^{1}) + A_{2} \sum_{i=1}^{12} f(a_{i}^{2}) + A_{3} \sum_{i=1}^{8} f(a_{i}^{3}) + \sum_{i=1}^{N_{B}} B_{k} \sum_{i=1}^{24} f(b_{i}^{k}) + \sum_{k=1}^{N_{C}} C_{k} \sum_{i=1}^{24} f(c_{i}^{k}) + \sum_{k=1}^{N_{D}} D_{k} \sum_{i=1}^{48} f(d_{i}^{k}),$$

$$(2)$$

где узлы, соответствующие весам A_1, A_2, A_3, B_k, C_k , D_k , имеют координаты

$$A_1$$
: $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$;
 A_2 : $(\pm 2^{-1/2}, \pm 2^{-1/2}, 0)$, $(\pm 2^{-1/2}, 0, \pm 2^{-1/2})$, $(0, \pm 2^{-1/2}, \pm 2^{-1/2})$;

$$A_3$$
: $(\pm 3^{-1/2}, \pm 3^{-1/2}, \pm 3^{-1/2})$;

Российский научный центр
"Курчатовский институт", Москва
Институт вычислительной математики
Российской Академии наук, Москва
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

$$B_{k}: (\pm l_{k}^{-1/2}, \pm l_{k}^{-1/2}, \pm m_{k}^{-1/2}), (\pm l_{k}^{-1/2}, \pm m_{k}^{-1/2}, \pm m_{k}^{-1/2}, \pm l_{k}^{-1/2}), (\pm m_{k}^{-1/2}, \pm l_{k}^{-1/2}, \pm l_{k}^{-1/2}), 2l_{k}^{2} + m_{k}^{2} = 1;$$

$$C_{k}: (\pm q_{k}^{-1/2}, \pm r_{k}^{-1/2}, 0), (\pm q_{k}^{-1/2}, 0, \pm r_{k}^{-1/2}), (0, \pm q_{k}^{-1/2}, \pm r_{k}^{-1/2}), (\pm r_{k}^{-1/2}, \pm q_{k}^{-1/2}, 0), (\pm r_{k}^{-1/2}, 0, \pm q_{k}^{-1/2}), (0, \pm r_{k}^{-1/2}, \pm q_{k}^{-1/2}), q_{k}^{2} + r_{k}^{2} = 1;$$

$$D_{k}: (\pm u_{k}^{-1/2}, \pm v_{k}^{-1/2}, \pm w_{k}^{-1/2}), (\pm v_{k}^{-1/2}, \pm w_{k}^{-1/2}, \pm w_{k}^{-1/2}, \pm u_{k}^{-1/2}, \pm$$

До настоящего времени были получены квадратурные формулы (2) для n = 6m + 5, m = 0, 1, ..., 9, а также для некоторых других n < 29 (см. [4, 5]). Трудности построения квадратур высоких порядков связаны с необходимостью численного решения больших, плохо обусловленных систем нелинейных уравнений. Используя написанную Д.Н. Лайковым программу на языке Си, позволяющую вести вычисления с необходимой длиной мантиссы (до 100 десятичных разрядов), оказалось возможным получить квадратуры (2) для n = 6m + 5, m = 10, 11, ..., 21. Подробное описание применяемого алгоритма, а также параметры квадратур для m = 10, 11, ..., 20 будут опубликованы.

Параметры квадратуры 131-го порядка ($N_B = 31$, $N_C = 10$, $N_D = 100$) приведены с шестнадцатью значащими цифрами в табл. 1. Эта квадратурная формула содержит N = 5810 узлов и правильно интегрирует 17424 сферических гармоник до 131-го порядка включительно; ее коэффициент эф-

фективности [1]
$$\eta = \frac{(n+1)^2}{3N}$$
 равен 0.99966. При ра-

боте с обычной двойной точностью (15–16 десятичных разрядов), приведенные в настоящей работе коэффициенты обеспечивают вычисление интегралов от всех многочленов $x^k y^l z^m$, $k+l+m \le 131$ с относительной точностью порядка $2 \cdot 10^{-14}$.

1

2

3

10

Таблица 1		:	
	$A_1 \cdot 10^5$	$A_2 \cdot 10^3$	$A_3 \cdot 10^3$
	0.9735347946175486	0.1907581241803167	0.1901059546737578
k	l_k	m_k	$B_k \cdot 10^3$
1	0.0118236166240028	0.9998601923168344	0.0392642453891921
2	0.0306214500913896	0.9990618867660806	0.0666790546729438
3	0.0532979403683424	0.9971552833460720	0.0886889131501914
4	0.0784816553286222	0.9938215431121216	0.1066306000958872
5	0.1054038157636201	0.9888276246368412	0.1214506743336128
6	0.1335577797766211	0.9820003253167888	0.1338054681640871
7	0.1625769955502252	0.9732098648471070	0.1441677023628504
8	0.1921787193412792	0.9623589141607676	0.1528880200826557
. 9	0.2221340534690548	0.9493750178821930	0.1602330623773609
10	0.2522504912791132	0.9342052126266968	0.1664102653445244
11.	0.2823610860679697	0.9168121040589686	0.1715845854011323
12	0.3123173966267560	0.8971709355126096	0.1758901000133069
13	0.3419847036953789	0.8752673448020141	0.1794382485256736
14	0.3712386456999758	0.8510956091284314	0.1823238106757407
15	0.3999627649876828	0.8246572459190639	0.1846293252959976
16	0.4280466458648093	0.7959598846221919	0.1864284079323098
17	0.4553844360185711	0.7650163598669611	0.1877882694626914
18	0.4818736094437834	0.7318440059488363	0.1887716321852025
19	0.5074138709260629	0.6964641607316614	0.1894381638175673
20	0.5319061304570707	0.6589019174083282	0.1898454899533629
21	0.5552514978677286	0.6191861983533608	0.1900497929577815
22	0.5981009025246183	0.5334328643779589	0.1900671501924092
23	0.6173990192228116	0.4874801556221757	0.1899837555533510
24	0.6351365239411131	0.4395488504273442	0.1899014113156229
25	0.6512010228227200	0.3897107334283811	0.1898581257705106
26	0.6654758363948120	0.3380589036680602	0.1898804756095753
27	0.6778410414853370	0.2847157265697618	0.1899793610426402
28	0.6881760887484110	0.2298419930079757	0.1901464554844117
29	0.6963645267094598	0.1736458806923450	0.1903533246259542
30	0.7023010617153579	0.1163891637007593	0.1905556158463228
31	0.7059004636628753	0.0583872486171024	0.1907037155663528
<i>k</i>	q_k	. r _k	$C_k \cdot 10^3$
	0.0355047031047050	0.0003/870050/2000	0.0500200794424007

5	0.2988242318581361	0.9543081674461322	0.1584200054793902
6	0.3717482419703886	0.9283335847592316	0.1694436550982744
7 .	0.4440094491758889	0.8960221029877130	0.1776617014018108
8	0.5145337096756643	0.8574701520212813	0.1836132434440077
9	0.5824053672860230	0.8128985103667202	0.1876494727075983

0.0355247031247258

0.0915117662084128

0.1566197930068980

0.2265467599271907

0.6468283961043370

0.9993687985262998

0.9958039950941234

0.9876589697048654

0.9740002903318314

0.7626355787616330

0.0599299784424997

0.0974905938245698

0.1241680804599158

0.1437626154299360

0.1899906535336482

№ 6

1999

Таблина 1. Продолжение

1 0.0609596425910437 0.0178782827534293 0.9979801045015680 0.0814325282076735 2 0.0881196227095939 0.0395388874079210 0.9953248758450994 0.0999885989088773 3 0.1165936722428831 0.0637812179772299 0.9911295938605910 0.1156199403068359 4 0.1460232857031785 0.0898589081374504 0.9851916446361048 0.1287632092635513 5 0.1761197110181755 0.1172606510576162 0.9773595996890900 0.1398378643365139 6 0.2066471190463718 0.1456102876970995 0.9675198252783260 0.1491876468417391 7 0.2374076026328152 0.1746153823011775 0.9555873055226052 0.1570855679175456 8 0.2682305474337051 0.2040383070295584 0.9414991995152872 0.1637483948103775 9 0.2989653312142369 0.2336788634003698 0.9252102028900638 0.1693500566632843 10 0.3596390887276086 0.2929369098051600 0.8859163012006150 0.1779126637278296 12 0.3893383046398812 0.3222592785275512 0.8628815920756713 0.1810908108835412 13 <td< th=""><th>нолица 1.</th><th>Продолжение</th><th></th><th></th><th></th></td<>	нолица 1.	Продолжение			
2 0.088119622705939 3 0.1165936722428831 4 0.1460232857031785 0.0898589081374504 0.9851916446361048 1.1267632092635513 5 0.1761197110181755 6 0.2066471190463718 0.1460232857031785 0.02066471190463718 0.14660232857031785 0.2066471190463718 0.14661023769799 0.2973959996890900 0.1298378643365133 0.2040383070295584 0.22682305474337051 0.2040383070295584 0.2989653312142369 0.33934762752772209 0.25336788634003698 10 0.33944762752772209 0.25336788634003698 11 0.3596590887276086 0.2929369098051600 0.39294762752772209 0.25336337552654219 0.29893383046398812 0.3222592785275512 0.8628815920756713 13 0.418453789358347 0.3512004791195743 0.4469172319076166 0.7963963867576985 16 0.5014034601410262 0.43454569060127828 17 0.5272493404551239 0.407942515205134 0.51520431051846366 0.5014034601410262 0.43454569060127828 0.05272493404551239 0.407942515205134 0.5152063791275054821 0.1539113217321372 0.01359639088572 0.012526393430588352 0.013647395342789 0.515264347395342789 0.515264347395342789 0.5152643480 0.5454690811366526 0.02134645592265579 0.992238045805802 0.12235963863712 0.078646817786482 0.9870656871393407 0.0212361561778753 0.021237156214440 0.4839335435252385 0.0212361853699155 0.021236185369855 0.021236185369855 0.021236185369855 0.0212361856177973 0.0212361854179773 0.02429187388413519 0.4638776641524965 0.0276410462687 0.035638776641524965 0.0276410462687 0.035637539934543 0.029973589989999090 0.129973594896049514 0.4638776641524965 0.0276410462687 0.035637359934543 0.029987663913153099155 0.021281835845910904648199881290001645 0.0296724534927186 0.0356337896049514 0.0356337890985090900000000000000000000000000000	k	u_k	v_k	w_k	$D_k \cdot 10^3$
3 0.11669367C22428831 0.0698589081374504 0.99811916446361048 0.1287630292635513 4 0.1460232887031785 0.0898589081374504 0.9851916446361048 0.1287632092635513 5 0.1761197110181755 0.17560510576162 0.97733959996890900 0.13987378643365136 6 0.266271190463718 0.1456102876970995 0.9675198252783260 0.1491876468417391 7 0.237407602628152 0.1456102876970995 0.9555873055226052 0.1570855679175456 8 0.2682305474337051 0.2040383070295584 0.99414991995152872 0.1570855679175456817175 9 0.239476275277209 0.3636363752564219 0.9056991249325308 0.1693500566632843 11 0.3596390887276086 0.2929369098051600 0.8859163012006150 0.1779126637278296 12 0.3393383046398812 0.3120047911975743 0.83758288019355877 0.181098108835412 15 0.4745950813276976 0.379538767684538 0.8100244105499294 0.1587652841777378 16 0.5014034601410262 0.345456906027872 0.7821741862274833 0.187227265659130 17	1	0.0609596425910437	0.0178782827534293	0.9979801045015680	0.0814325282076735
0.1460232857031785	2	0.0881196227095939	0.0395388874079210	0.9953248758450994	0.0999885989088773
5 0.1761197110181755 0.1172606510576162 0.9773595996809000 0.1398378643365135 6 0.2066471190463718 0.1456102876970995 0.9675198252783260 0.1491876468417391751 7 0.2374076026328152 0.1746153823011775 0.95558730553226052 0.15796555679175456 8 0.2682305474337051 0.2040383070295584 0.9414991995152872 0.1637483948103757 10 0.3294762752772209 0.2633632752654219 0.9066891249325308 0.1740322769393633 11 0.3596390887276086 0.2929360908061600 0.8859163012006150 0.1779126637278296 12 0.3893383046398812 0.3212004791195743 0.862881592075673 0.8180883412 13 0.4184653789358347 0.3512004791195743 0.8375828019355877 0.1836529132600190 15 0.47459590813276976 0.47945526813275979 0.474595968132750077 0.18365752841377550 0.187274843041575 0.183652913061883412 19 0.5756887237503077 0.510344739534181720 0.748766584033999 0.188672448050144 0.1897143245252597 20 0.1252509430588352 0.02134457695664652459	3	0.1165936722428831	0.0637812179772299	0.9911295938605910	0.1156199403068359
6 0.206471190463718 0.1456102876970995 0.9675198252783260 0.1491876468417391 7 0.2374076026328152 0.1746153823011775 0.955587055226652 0.1570855679185727085 0.1570855679185727081 0.1570855679185727081 0.1570855679185727081 0.9068912746932508 0.1693500566632843 10 0.3294762752772209 0.2633632752654219 0.906681249325308 0.1693500566632843 11 0.3596390887276086 0.292936098081000 0.906891249325308 0.179312663727853782631 12 0.3893383046398812 0.3222592785275512 0.8628815920756713 0.1810908108835412 13 0.4184653789358347 0.3512004791197543 0.8879163012006150 0.179126637278293 15 0.4745950813276976 0.407457537826879 0.7802165492015750 0.1865221380618351 16 0.5014034601410262 0.43454559060027828 0.7802165492015750 0.1872270566606832 17 0.5272499404551239 0.4607942515205134 0.6774665568403399 0.1872270566606832 18 0.5520413051846366 0.48609612841181720 0.67746655684033399 0.1872270566606832 20	4	0.1460232857031785	0.0898589081374504	0.9851916446361048	0.1287632092635513
7 0.2374076026328152 0.1746153823011775 0.9555873055226052 0.1570855679175456 8 0.2682305474337051 0.2040383070295584 0.94149995152872 0.16374839481050066632843 10 0.3294762752772209 0.2336788634003698 0.9952102028990638 0.16374839481050066632843 11 0.3596390887276086 0.2929369098051600 0.8859163012006150 0.1740322769393632 12 0.3893383046398812 0.3222592785275512 0.8628815920756713 0.181098108835412 13 0.448653789358347 0.3512004791195743 0.8375828019355877 0.1836529132600190 15 0.4745950813276976 0.3796385677684538 0.8100244105499224 0.1856752841777379 16 0.5014034601410262 0.4345456906027828 0.7481741862274833 0.18872270566606832 17 0.5272493404551229 0.4607942515205134 0.7139165152560114 0.189714324525297 18 0.5520413051846366 0.4860961284181720 0.6774665684053399 0.1889627480450146 20 0.12253094305805845 0.0131453592255579 0.052223804380585888 0.11330182900166 2	5	0.1761197110181755	0.1172606510576162	0.9773595996890900	0.1398378643365139
8 0.2682305474337051 0.2040383070295584 0.9414991995152872 0.1637483948103775 9 0.2989653312142369 0.2336788634003698 0.9252102028900338 0.169350056632843 11 0.3596390887276086 0.2929369098051600 0.8859163012006150 0.1779126637278296 12 0.3893383046398812 0.3222592785275512 0.8628815920756713 0.181098180883412 13 0.4486653789388347 0.3512004791195743 0.8375828019355877 0.1836529133601080 14 0.4469172319076166 0.3796385677684538 0.8100244105499234 0.1856752841777379 15 0.4745950813276976 0.4074575378263879 0.7802165492015750 0.1872270566606832 16 0.501403460140262 0.4607942515205134 0.7139165152560114 0.1891714324525297 18 0.5520413051846366 0.4860961284181720 0.6774656584053399 0.189627480450146 21 0.1539113217321372 0.0452092616613719 0.9870986832 0.1123301829001669 22 0.185671248749 0.0978282948877292 0.9711289936652952 0.1123301829001669 25 0.2812	6	0.2066471190463718	0.1456102876970995	0.9675198252783260	0.1491876468417391
9 0.2989653312142369 0.2336788634003698 0.9252102028900638 0.1693500566632843 10 0.3294762752772209 0.2633623752654219 0.9066891249325308 0.174032276986 12 0.3893383046398812 0.3222592785275512 0.8628815920756713 0.1810908108835412 13 0.4184653789358347 0.3512004791195743 0.8375828019355877 0.18356523243170312600190 15 0.4745950813276976 0.4074575378263879 0.7802165492015750 0.1872270566606832 16 0.5014034601410262 0.4345456906027828 0.748114862274833 0.1883722645591307 18 0.5520413051846366 0.4860961284181720 0.6774665684053399 0.189628417059528 20 0.1225039430588352 0.0123645592265579 0.9922380458055882 0.1123301829001666 21 0.1539113217321372 0.0456468117786482 0.9800627154426746 0.1123301829001666 22 0.182331562143480 0.1258106396267210 0.9870498607986832 0.1233698826711277 22 0.18523155621433480 0.15445912504769 0.9800627154426746 0.1165076286814007 24	7	0.2374076026328152	0.1746153823011775	0.9555873055226052	0.1570855679175456
10 0.3294762752772209 0.2633632752654219 0.9066891249325308 0.1740322769393633 11 0.3596390887276086 0.2929369098051600 0.8859163012006150 0.1779126637278296 12 0.3893383046364398812 0.32225927825275512 0.8628815920756713 0.18090818381341 13 0.4184653789358347 0.3512004791195743 0.8375828019355877 0.1836529132600190 15 0.47459598183276976 0.40474575878263879 0.8100244105499224 0.1856752841777378 16 0.5014034601410262 0.4345456906027828 0.7481741862274833 0.188372265591307 18 0.5520413051846366 0.46607942515205134 0.7139165152560114 0.1897227565605083 20 0.12250394305883552 0.0213645592265579 0.9922380458055882 0.1123301822901669 21 0.1539113217321372 0.0708646817786482 0.9800627154426746 0.136626117678531 22 0.1856213098637712 0.0708646817786482 0.9800627154426746 0.1366266117678531 23 0.2174998728035131 0.978523948877292 0.9711289936652992 0.1462736856106918 24	8	0.2682305474337051	0.2040383070295584	0.9414991995152872	0.1637483948103775
11 0.3596390887276086 0.2929369098051600 0.8859163012006150 0.1779126637278296 12 0.3393334046398812 0.32222592785275512 0.8628815920756713 0.181090810835412 13 0.4184653789358347 0.3512004791195743 0.8375828019355877 0.1836529132600190 14 0.4469172319076166 0.3796385677684538 0.8100244105499234 0.1856752841777379 15 0.4745950813276976 0.4074575378263879 0.7802165492015750 0.1872270566606832 16 0.5014034601410262 0.4345456906027828 0.7481741862274833 0.188372264559130 17 0.5272493404551239 0.4607942515205134 0.7139165152560114 0.1891714324525297 18 0.5520413051846366 0.4860961284181720 0.6774665684053399 0.189622748045014 19 0.5756887237503077 0.5103447395342789 0.6388511095524769 0.1898628417059528 20 0.12250393430588352 0.0215465592265579 0.092380458055882 0.11230112301229202616613719 0.9870498607986832 0.1253698826711277 21 0.15361327562143480 0.02742749467714852912044026442442 0.98	9	0.2989653312142369	0.2336788634003698	0.9252102028900638	0.1693500566632843
12 0.3893383046398812 0.3222592785275512 0.8628815920756713 0.1810908108835412 13 0.4484653789358347 0.3512004791195743 0.8375828019355877 0.18365292312500109 14 0.4469172319076166 0.379638677684538 0.8100244105499234 0.1856752841777378 15 0.4745950813276976 0.4074575378263879 0.7802165492015750 0.1872270566606832 16 0.5014034601410262 0.4345456906027828 0.7481741862274833 0.1883722645591307 17 0.5272493404551239 0.4607942515205134 0.7139165152560114 0.1891714324525297 18 0.5520413051846366 0.4860961284181720 0.6774665684053399 0.189662480450146 19 0.5756887237503077 0.5103447395342789 0.6388511095524769 0.1899628417059528 21 0.1539113217321372 0.07136458592265579 0.9920238045805882 0.112330182901666 22 0.1856213098637712 0.0708646817786482 0.9800627154426746 0.1366266117678531 23 0.2174998728035131 0.98752912504701 0.9601900443899258 0.14567576466685412 24	10	0.3294762752772209	0.2633632752654219	0.9066891249325308	0.1740322769393633
13 0.4184653789358347 0.3512004791195743 0.8375828019355877 0.1836529132600190 14 0.4469172319076166 0.3796385677684538 0.8100244105499234 0.185672841777379 15 0.4745950813276976 0.40745753818263879 0.78021634920115750 0.1872270566606832 16 0.5014034601410262 0.4345456906027828 0.7481741862274833 0.1883722645591307 17 0.5272493404551239 0.4607942515205134 0.7139165152560114 0.1891714324525299 18 0.5520413051846366 0.4860961284181720 0.677465684053399 0.189824740540146 19 0.5756887237503077 0.5103447395342789 0.67865684053399 0.1899628417059528 20 0.1252039430588352 0.0213645592265579 0.9922380458058882 0.1123301829001669 21 0.1539113217321372 0.0452092616613719 0.9870498607986832 0.1123801829001669 22 0.1856213098637712 0.0708646817786482 0.9910443899258 0.1545071666685412 23 0.2124998728035131 0.0978523948877292 0.9711429936652952 0.1462736856106918 24	11	0.3596390887276086	0.2929369098051600	0.8859163012006150	0.1779126637278296
14 0.4469172319076166 0.3796385677684538 0.8100244105499234 0.1856752841777379 15 0.4745950813276976 0.4074575378263879 0.7802165492015750 0.1827270566606832 16 0.501403460410262 0.4345456906027828 0.7481741862274833 0.1883722645591307 17 0.5272493404551239 0.4607942515205134 0.7139165152560114 0.1897124324525297 18 0.5520413051846366 0.4860961284181720 0.6774665684053399 0.1896827480450144 19 0.5756887237503077 0.5103447395342789 0.6388511095524769 0.1899628417059528 20 0.1239113217321372 0.0452092616613719 0.9870498607986832 0.1123301829001669 21 0.1539113217321372 0.0452092616613719 0.9870498607986832 0.1253698826711277 22 0.1856213098637712 0.0708646817786482 0.9870498607986832 0.1253698826711277 23 0.214998728035131 0.0978523948877292 0.9711429936652952 0.156266117678531 24 0.249128336938330 0.1258166396267210 0.961900443899258 0.1545076466885412 27	12	0.3893383046398812	0.3222592785275512	0.8628815920756713	0.1810908108835412
15 0.4745950813276976 0.4074575378263879 0.7802165492015750 0.1872270566606832 16 0.5014034601410262 0.4345456996027828 0.7481741862274833 0.1883722645591307 17 0.5272493404551239 0.4607942515205134 0.7139165152560114 0.1883722645591307 18 0.5520413051846366 0.4860961284181720 0.6774665684035339 0.1897174324525297 19 0.5756887237503077 0.5103447395342789 0.6388511095524769 0.1899628417059528 20 0.1225039430588352 0.0213645592265579 0.9922380458055882 0.1123301829001669 21 0.1539113217321372 0.0452092616613719 0.9870498607986832 0.1253698826711277 22 0.1856213098637112 0.0708646817786482 0.9800627154426746 0.136652952 0.1462736856106918 23 0.2174998728035131 0.0978523948877292 0.9711429936652952 0.1462736856106918 24 0.2491128336938330 0.1258106396267210 0.9601900443899258 0.15457076466668541 25 0.281321562143480 0.1544529125047001 0.94712869888207272 0.1615906286814007	13	0.4184653789358347	0.3512004791195743	0.8375828019355877	0.1836529132600190
16 0.5014034601410262 0.4345456906027828 0.7481741862274833 0.1883722645591307 17 0.5272493404551239 0.4607942515205134 0.1739165152566114 0.1891714324525297 18 0.5520413051846366 0.4860961284181720 0.6774665684053399 0.1896827480450140 19 0.5756887237503077 0.5103447395342789 0.6388511095524769 0.18986284417059528 20 0.1225039430588352 0.0213645592265579 0.9922380458055882 0.1123301829001669 21 0.13539113217321372 0.0452092616613719 0.9870498607928632 0.125369882671127 22 0.1856213908637712 0.0708646817786482 0.9800627154426746 0.1366266117678531 23 0.2174998728035131 0.0978523948877292 0.9711429936652952 0.1462736856106918 25 0.2812321562143480 0.1544529125047001 0.9471286988207272 0.16596280814007 26 0.3128372276456111 0.1835433512202753 0.9319038079232420 0.1674366639741759 27 0.3441145160177973 0.2128813258619585 0.9144762112625412 0.176581082294714759 28	14	0.4469172319076166	0.3796385677684538	0.8100244105499234	0.1856752841777379
17 0.5272493404551239 0.4607942515205134 0.7139165152560114 0.1891714324525297 18 0.5520413051846366 0.4860961284181720 0.6774665684053399 0.1896827480450146 19 0.5756887237503077 0.5103447395342789 0.6388511095524769 0.1899628417059528 20 0.125039430588352 0.0213645592265579 0.9922380458055882 0.1123301829001669 21 0.1539113217321372 0.0452092616613719 0.9870498607986832 0.1253698826711277 22 0.1856213098637712 0.0708646817786482 0.9800627154426746 0.1366266117678531 24 0.2494128336938330 0.1554160396267210 0.9601900443899258 0.1545076466685412 25 0.2812321562143480 0.1544529125047001 0.9471286988207272 0.1615906280814007 26 0.3128372276456111 0.1835433512202753 0.9319038079232420 0.1674366639141759 27 0.3441145160177973 0.2128813258619585 0.944762112625412 0.1765810822987288 29 0.4052621732015610 0.2716163748391453 0.8729187338413519 0.1800104126010751 30	15	0.4745950813276976	0.4074575378263879	0.7802165492015750	0.1872270566606832
17 0.5272493404551239 0.4607942515205134 0.7139165152560114 0.1891714324525297 18 0.5520413051846366 0.4860961284181720 0.6774665684053399 0.1896827480450146 19 0.5756887237503077 0.5103447395342789 0.6388511095524769 0.1899628417059528 20 0.125039430588352 0.0213645592265579 0.9922380458055882 0.1123301829001669 21 0.1539113217321372 0.0452092616613719 0.9870498607986832 0.1253698826711277 22 0.1856213098637712 0.0708646817786482 0.9800627154426746 0.1366266117678531 24 0.2494128336938330 0.1554160396267210 0.9601900443899258 0.1545076466685412 25 0.2812321562143480 0.1544529125047001 0.9471286988207272 0.1615906280814007 26 0.3128372276456111 0.1835433512202753 0.9319038079232420 0.1674366639141759 27 0.3441145160177973 0.2128813258619585 0.944762112625412 0.1765810822987288 29 0.4052621732015610 0.2716163748391453 0.8729187338413519 0.1800104126010751 30	16	0.5014034601410262	0.4345456906027828	0.7481741862274833	0.1883722645591307
18 0.5520413051846366 0.4860961284181720 0.6774665684053399 0.1896827480450146 19 0.5756887237503077 0.5103447395342789 0.6388511095524769 0.1899628417059528 20 0.1225039430588352 0.0213645592265579 0.9922380458055882 0.12359113217321372 21 0.1539113217321372 0.0452092616613719 0.9870498607986832 0.1253698826711277 22 0.1856213098637712 0.0708646817786482 0.9800627154426746 0.1366266117678531 23 0.2174998728035131 0.0978523948877292 0.9711429936652952 0.1462736856106918 24 0.249412833693830 0.1258106396267210 0.9601900443899258 0.1545076466685412 25 0.2812372276456111 0.1835433512202753 0.9319038079232420 0.1615096280814072 26 0.3128372276456111 0.1835433512202753 0.9319038079232420 0.16736663654175 27 0.3441145160177973 0.2128813258619585 0.9144762112625412 0.172422500243790 28 0.3749567714853510 0.2716163748391453 0.8729187333841351 0.1800104126010751 30				1	1
19 0.5756887237503077 0.5103447395342789 0.6388511095524769 0.1899628417059528 20 0.1225039430588352 0.0213645592265579 0.9922380458055882 0.1123301829001669 21 0.1539113217321372 0.0452092616613719 0.9870498607986832 0.125369882671127 22 0.1856213098637712 0.0708646817786482 0.9800627154426746 0.1366266117678531 23 0.2174998728035131 0.0978523948877292 0.9711429936652952 0.1462736856106918 24 0.2494128336938330 0.1548529125047001 0.9601900443899258 0.1545076466685412 25 0.2812321562143480 0.1544529125047001 0.9471286988207722 0.1615096280814007 26 0.3128372276456111 0.1835433512202753 0.9319038079232420 0.1674366639741759 27 0.3441145160177973 0.2128813258619585 0.9144762112625412 0.1724225002437900 28 0.3749567714853510 0.2716163748391453 0.8729187338413519 0.180014126010751 30 0.4349335453522385 0.3007127671240280 0.8487665419984122 0.1827960437331284 31		1	1	i i	1
20 0.1225039430588352 0.0213645592265579 0.9922380458055882 0.1123301829001669 21 0.1539113217321372 0.0452092616613719 0.98706498607986832 0.1253698826711277 22 0.1856213098637712 0.0708646817786482 0.9800627154426746 0.1366266117678531 23 0.2174998728035131 0.0978523948877292 0.971142993652952 0.1462736856106918 24 0.2494128336938330 0.1258106396267210 0.9601900443899258 0.1545076466685412 25 0.2812321562143480 0.1544529125047001 0.9471286988207272 0.1615906280814007 26 0.3128372276456111 0.1835433512202753 0.9319038079232420 0.1674366639741759 27 0.3441145160177973 0.2128183258619585 0.9144762112625412 0.1724225002437900 29 0.4052621732015610 0.2716163748391453 0.8729187338413519 0.1800104126010751 30 0.4349335453522385 0.3007127671240280 0.8487665419984122 0.1827960437331284 31 0.4638776641524965 0.3294470677216479 0.8223637530354609155 0.7937171844978842 0.1880178688638289		i e		1	1
21 0.1539113217321372 0.0452092616613719 0.9870498607986832 0.1253698826711277 22 0.1856213098637712 0.0708646817786482 0.9800627154426746 0.1366266117678531 24 0.249412833693830 0.1258106396267210 0.9601900443899258 0.1545076466685412 25 0.2812321562143480 0.1544529125047001 0.9471286988207272 0.1615096280814007 26 0.3128372276456111 0.1835433512202753 0.9319038079232420 0.1674366639741759 27 0.3441145160177973 0.2128813258619585 0.9144762112625412 0.1724225002437900 28 0.3495567714853510 0.2422913734880829 0.8948197080141567 0.1765810822987288 29 0.4052621732015610 0.2716163748391453 0.8729187338413519 0.1800104126010751 30 0.4349335453522385 0.3007127671240280 0.8487665419984122 0.1827960437331284 31 0.4638776641524965 0.3576932543699155 0.7937171844978842 0.18673333507394938 32 0.4920046410462687 0.3853307059757764 0.7628389085167639 0.1880178688638289 34			1	1	1
22 0.1856213098637712 0.0708646817786482 0.9800627154426746 0.1366266117678531 23 0.2174998728035131 0.0978523948877292 0.9711429936652952 0.1462736856106918 24 0.2494128336938330 0.1258106396267210 0.9601900443899228 0.15450764666854122 25 0.2812321562143480 0.154529125047001 0.9471286988207272 0.1615096280814007 26 0.3128372276456111 0.1835433512202753 0.9319038079232420 0.1674366639741759 27 0.3441145160177973 0.2128813258619585 0.9144762112625412 0.1724225002437900 28 0.3749567714853510 0.2422913734880829 0.8948197080141567 0.1765810822987288 29 0.4052621732015610 0.2716163748391453 0.8729187338413519 0.1800104126010751 30 0.4349335453522385 0.3007127671240280 0.8223637530132463 0.1850140300716308 31 0.4920046410462687 0.3576932543699155 0.7937171844978482 0.18673335073493843 34 0.5454609081136522 0.4122425044452694 0.7297455140311051 0.1889278925654758 37				1	i
23 0.2174998728035131 0.0978523948877292 0.9711429936652952 0.1462736856106918 24 0.2494128336938330 0.1258106396267210 0.9601900443899258 0.1545076466685412 25 0.2812321562143480 0.1544529125047001 0.9471286988207272 0.1615096280814007 26 0.3128372276456111 0.1835433512202753 0.931903807923420 0.1674366639741759 27 0.3441145160177973 0.2128813258619585 0.9144762112625412 0.1724225002437900 28 0.3749567714853510 0.2422913734880829 0.8948197080141567 0.1764326639741759 29 0.4052621732015610 0.2716163748391453 0.8729187338413519 0.1800104126010751 30 0.4349335453522385 0.3007127671240280 0.8487665419984122 0.1827960437331284 31 0.4638776641524965 0.3257693254369915 0.7937171844978482 0.1867333507394938 32 0.4920046410462687 0.357693254369915 0.7937171844978482 0.1880178688638289 33 0.5192273554861704 0.3853307059757764 0.7628389085167639 0.1880178688638289 35				1	1
24 0.2494128336938330 0.1258106396267210 0.9601900443899258 0.1545076466685412 25 0.2812321562143480 0.1544529125047001 0.9471286988207272 0.1615096280814007 26 0.3128372276456111 0.1835433512202753 0.9319038079232420 0.1674366639741759 27 0.3441145160177973 0.21288135258619585 0.9144762112625412 0.1724225002437900 28 0.3749567714853510 0.2422913734880829 0.8948197080141567 0.1765810822987288 29 0.4052621732015610 0.2716163748391453 0.8729187338413519 0.1800104126010751 30 0.4349335453522385 0.3007127671240280 0.8487665419984122 0.1827960437331284 31 0.4638776641524965 0.3576932543699155 0.7937171844978482 0.1867333507394938 32 0.4920046410462687 0.3853307059757764 0.7628389085167639 0.1880178688638289 34 0.5454609081136522 0.4122425044452694 0.7297455140311051 0.1880178688638289 35 0.5706220661424140 0.4383139587781027 0.6944575805415550 0.1895213832507346 36		1		1	
25 0.2812321562143480 0.1544529125047001 0.9471286988207272 0.1615096280814007 26 0.3128372276456111 0.1835433512202753 0.9319038079232420 0.1674366639741759 27 0.3441145160177973 0.2128813258619585 0.9144762112625412 0.1724225002437900 28 0.3749567714853510 0.2422913734880829 0.8948197080141567 0.1765810822987288 29 0.4052621732015610 0.2716163748391453 0.8729187338413519 0.1800104126010751 30 0.4349335435522385 0.3007127671240280 0.8487665419984122 0.1827960437331284 31 0.4638776641524965 0.3294470677216479 0.82236375301322463 0.1850140300716308 32 0.4920046410462687 0.3576932543699155 0.7937171844978482 0.1867333507394938 33 0.5192273554861704 0.3853307059757764 0.7628389085167639 0.1880178688638289 34 0.5454609081136522 0.4122425044452694 0.7297455140311051 0.18895213832507346 35 0.5706220661424140 0.4383139587781027 0.6944575805415550 0.1898548277397420 36				1	
26 0.3128372276456111 0.1835433512202753 0.9319038079232420 0.1674366639741759 27 0.3441145160177973 0.2128813258619585 0.9144762112625412 0.1724225002437900 28 0.3749567714853510 0.2422913734880829 0.8948197080141567 0.1765810822987288 29 0.4052621732015610 0.2716163748391453 0.8729187338413519 0.1800104126010751 30 0.4349335453522385 0.3007127671240280 0.8487665419984122 0.1827960437331284 31 0.4638776641524965 0.3294470677216479 0.8223637530132463 0.1850140300716308 32 0.4920046410462687 0.3576932543699155 0.7937171844978482 0.1867333507394938 33 0.5192273554861704 0.3853307059757764 0.7628389085167639 0.1880178688638289 34 0.5454609081136522 0.4122425044452694 0.7297455140311051 0.1889278925654758 35 0.5706220661424140 0.4383139587781027 0.6944575805415550 0.1895213832507346 36 0.5946286755181518 0.4634312536300553 0.6569993998554366 0.1898548277397420 38		1			
27 0.3441145160177973 0.2128813258619585 0.9144762112625412 0.1724225002437900 28 0.3749567714853510 0.2422913734880829 0.8948197080141567 0.1765810822987288 29 0.4052621732015610 0.2716163748391453 0.8729187338413519 0.1800104126010751 30 0.4349335453522385 0.3007127671240280 0.8487665419984122 0.1827960437331284 31 0.4638776641524965 0.3294470677216479 0.8223637530132463 0.1850140300716308 32 0.4920046410462687 0.3576932543699155 0.7937171844978482 0.1867333507394938 34 0.5454609081136522 0.3853307059757764 0.422425044452694 0.7297455140311051 0.1889148088688289 35 0.5706220661424140 0.4383139587781027 0.6944575805415550 0.1898548277397420 36 0.5946286755181518 0.4634312536300553 0.656993998554366 0.1898548277397420 37 0.1905370790924295 0.0237131153778198 0.9813935549258532 0.1349105935937341 40 0.2908724534927186 0.1036991083191100 0.9511254968367464 0.1596354368615331 <td></td> <td></td> <td></td> <td>1</td> <td>1</td>				1	1
28 0.3749567714853510 0.2422913734880829 0.8948197080141567 0.1765810822987288 29 0.4052621732015610 0.2716163748391453 0.8729187338413519 0.1800104126010751 30 0.4349335453522385 0.3007127671240280 0.8487665419984122 0.1827960437331284 31 0.4638776641524965 0.3294470677216479 0.8223637530132463 0.1850140300716308 32 0.4920046410462687 0.3576932543699155 0.7937171844978482 0.1867333507394938 33 0.5192273554861704 0.3853307059757764 0.7628389085167639 0.1880178688638289 34 0.5454609081136522 0.4122425044452694 0.7297455140311051 0.1895213832507346 35 0.5706220661424140 0.4383139587781027 0.6944575805415550 0.1895213832507346 36 0.5946286755181518 0.4633412536300553 0.6569993998554366 0.1898548277397420 37 0.1905370790924295 0.0237131153778198 0.9813935549258532 0.1349105935937341 40 0.2908724534927186 0.1036991083191100 0.9511254968367464 0.1526797390930008 42		1		1	
29 0.4052621732015610 0.2716163748391453 0.8729187338413519 0.1800104126010751 30 0.4349335453522385 0.3007127671240280 0.8487665419984122 0.1827960437331284 31 0.4638776641524965 0.3294470677216479 0.8223637530132463 0.1850140300716308 32 0.4920046410462687 0.3576932543699155 0.7937171844978482 0.1867333507394938 33 0.5192273554861704 0.3853307059757764 0.7628389085167639 0.1880178688638289 34 0.5454609081136522 0.4122425044452694 0.7297455140311051 0.1889278925654758 35 0.5706220661424140 0.4383139587781027 0.6944575805415550 0.1895213832507346 36 0.5946286755181518 0.4634312536300553 0.6569993998554366 0.1898548277397420 37 0.1905370790924295 0.0237131153778198 0.9813935549258532 0.1344060068369326 39 0.2577190808025936 0.0759549896049514 0.9632298349534124 0.1526797390930008 40 0.2326354020056219 0.1321348584450234 0.9369100841342104 0.1659354368615331 42				1	
30 0.4349335453522385 0.3007127671240280 0.8487665419984122 0.1827960437331284 31 0.4638776641524965 0.3294470677216479 0.8223637530132463 0.1850140300716308 32 0.4920046410462687 0.3576932543699155 0.7937171844978482 0.1867333507394938 33 0.5192273554861704 0.3853307059757764 0.7628389085167639 0.1880178688638289 34 0.5454609081136522 0.4122425044452694 0.7297455140311051 0.1889278925654758 35 0.5706220661424140 0.4383139587781027 0.6944575805415550 0.1895213832507346 36 0.5946286755181518 0.4634312536300553 0.6569993998554366 0.1898548277397420 37 0.1905370790924295 0.0237131153778198 0.9813935549258532 0.1349105935937341 38 0.22577190808025936 0.0759549896049514 0.9632298349534124 0.1526797390930008 40 0.2908724534927186 0.1036991083191100 0.9511254968367464 0.1598208771406474 41 0.3359267359304543 0.1610316571314789 0.9205351509048322 0.1711279910946440 42		1		1	1
31 0.4638776641524965 0.3294470677216479 0.8223637530132463 0.1850140300716308 32 0.4920046410462687 0.3576932543699155 0.7937171844978482 0.1867333507394938 33 0.5192273554861704 0.3853307059757764 0.7628389085167639 0.1880178688638289 34 0.5454609081136522 0.4122425044452694 0.7297455140311051 0.1889278925654758 35 0.5706220661424140 0.4383139587781027 0.6944575805415550 0.1895213832507346 36 0.5946286755181518 0.4634312536300553 0.6569993998554366 0.1898548277397420 37 0.1905370790924295 0.0237131153778198 0.9813935549258532 0.1349105935937341 38 0.2242518717748009 0.0491787805925481 0.9732895486672650 0.1444060068369326 39 0.2577190808025936 0.0759549896049514 0.9632298349534124 0.1526797390930008 40 0.2908724534927186 0.1036991083191100 0.9511254968367464 0.1598208771406474 41 0.3236354020056219 0.1321348584450234 0.9369100841342104 0.1659354368615331 42		1		1	
32 0.4920046410462687 0.3576932543699155 0.7937171844978482 0.1867333507394938 33 0.5192273554861704 0.3853307059757764 0.7628389085167639 0.1880178688638289 34 0.5454609081136522 0.4122425044452694 0.7297455140311051 0.1889278925654758 35 0.5706220661424140 0.4383139587781027 0.6944575805415550 0.1895213832507346 36 0.5946286755181518 0.4634312536300553 0.6569993998554366 0.1898548277397420 37 0.1905370790924295 0.0237131153778198 0.9813935549258532 0.1349105935937341 38 0.2242518717748009 0.0491787805925481 0.9732895486672650 0.1444060068369326 40 0.2908724534927186 0.1036991083191100 0.9511254968367464 0.1598208771406474 41 0.3236354020056219 0.1321348584450234 0.9369100841342104 0.1659354368615331 42 0.3876637123676956 0.1901912080395707 0.9019668233908304 0.1754952725601440 44 0.4187636705218842 0.2194384950137950 0.8811831450709435 0.1791247850802529 45				1	
33 0.5192273554861704 0.3853307059757764 0.7628389085167639 0.1880178688638289 34 0.5454609081136522 0.4122425044452694 0.7297455140311051 0.1889278925654758 35 0.5706220661424140 0.4383139587781027 0.6944575805415550 0.1895213832507346 36 0.5946286755181518 0.4634312536300553 0.6569993998554366 0.1898548277397420 37 0.1905370790924295 0.0237131153778198 0.9813935549258532 0.1349105935937341 38 0.2242518717748009 0.0491787805925481 0.9732895486672650 0.1444060068369326 39 0.2577190808025936 0.0759549896049514 0.9632298349534124 0.1526797390930008 40 0.2908724534927186 0.1036991083191100 0.9511254968367464 0.1598208771406474 41 0.3236354020056219 0.1321348584450234 0.9369100841342104 0.1659354368615331 42 0.3876637123676956 0.1901912080395707 0.9019668233908304 0.1754952725601440 44 0.4187636705218842 0.2194384950137950 0.8811831450709435 0.1791247850802529 45				1	
34 0.5454609081136522 0.4122425044452694 0.7297455140311051 0.1889278925654758 35 0.5706220661424140 0.4383139587781027 0.6944575805415550 0.1895213832507346 36 0.5946286755181518 0.4634312536300553 0.6569993998554366 0.1898548277397420 37 0.1905370790924295 0.0237131153778198 0.9813935549258532 0.1349105935937341 38 0.2242518717748009 0.0491787805925481 0.9732895486672650 0.1444060068369326 39 0.2577190808025936 0.0759549896049514 0.9632298349534124 0.1526797390930008 40 0.2908724534927186 0.1036991083191100 0.9511254968367464 0.1598208771406474 41 0.3236354020056219 0.1321348584450234 0.9369100841342104 0.1659354368615331 42 0.3559267359304543 0.1610316571314789 0.9205351509048322 0.1711279910946440 43 0.3876637123676956 0.1901912080395707 0.9019668233908304 0.1754952725601440 44 0.4187636705218842 0.2194384950137950 0.8811831450709435 0.1791247850802529 45		1			
35 0.5706220661424140 0.4383139587781027 0.6944575805415550 0.1895213832507346 36 0.5946286755181518 0.4634312536300553 0.6569993998554366 0.1898548277397420 37 0.1905370790924295 0.0237131153778198 0.9813935549258532 0.1349105935937341 38 0.2242518717748009 0.0491787805925481 0.9732895486672650 0.1444060068369326 39 0.2577190808025936 0.0759549896049514 0.9632298349534124 0.1526797390930008 40 0.2908724534927186 0.1036991083191100 0.9511254968367464 0.1598208771406474 41 0.3236354020056219 0.1321348584450234 0.9369100841342104 0.1659354368615331 42 0.3559267359304543 0.1610316571314789 0.9205351509048322 0.1711279910946440 43 0.3876637123676956 0.1901912080395707 0.9019668233908304 0.1754952725601440 44 0.4187636705218842 0.2194384950137950 0.8811831450709435 0.1791247850802529 45 0.4787270932425445 0.2775768931812335 0.8329294319252971 0.1844788524548449 47				1	
36 0.5946286755181518 0.4634312536300553 0.6569993998554366 0.1898548277397420 37 0.1905370790924295 0.0237131153778198 0.9813935549258532 0.1349105935937341 38 0.2242518717748009 0.0491787805925481 0.9732895486672650 0.1444060068369326 39 0.2577190808025936 0.0759549896049514 0.9632298349534124 0.1526797390930008 40 0.2908724534927186 0.1036991083191100 0.9511254968367464 0.1598208771406474 41 0.3236354020056219 0.1321348584450234 0.9369100841342104 0.1659354368615331 42 0.3559267359304543 0.1610316571314789 0.9205351509048322 0.1711279910946440 43 0.3876637123676956 0.1901912080395707 0.9019668233908304 0.1754952725601440 44 0.4487636705218842 0.2194384950137950 0.8811831450709435 0.1791247850802529 45 0.4491449019883107 0.2486155334763858 0.8581719953087277 0.1820954300877716 46 0.4787270932425445 0.3061863786591120 0.805458353232364195 0.1863409481706220 48		1	•	1	
37 0.1905370790924295 0.0237131153778198 0.9813935549258532 0.1349105935937341 38 0.2242518717748009 0.0491787805925481 0.9732895486672650 0.1444060068369326 39 0.2577190808025936 0.0759549896049514 0.9632298349534124 0.1526797390930008 40 0.2908724534927186 0.1036991083191100 0.9511254968367464 0.1598208771406474 41 0.3236354020056219 0.1321348584450234 0.9369100841342104 0.1659354368615331 42 0.3876637123676956 0.1901912080395707 0.9019668233908304 0.1754952725601440 43 0.4187636705218842 0.2194384950137950 0.8811831450709435 0.1791247850802529 45 0.4491449019883107 0.2486155334763858 0.8581719953087277 0.1820954300877716 46 0.4787270932425445 0.2775768931812335 0.8054583532364195 0.1863409481706220 47 0.5074315153055574 0.3061863786591120 0.8054583532364195 0.1863409481706220 48 0.5619001025975381 0.3618362729028427 0.7438701407588932 0.1887444543705232			·		
38 0.2242518717748009 0.0491787805925481 0.9732895486672650 0.1444060068369326 39 0.2577190808025936 0.0759549896049514 0.9632298349534124 0.1526797390930008 40 0.2908724534927186 0.1036991083191100 0.9511254968367464 0.1598208771406474 41 0.3236354020056219 0.1321348584450234 0.9369100841342104 0.1659354368615331 42 0.3559267359304543 0.1610316571314789 0.9205351509048322 0.1711279910946440 43 0.3876637123676956 0.1901912080395707 0.9019668233908304 0.1754952725601440 44 0.4187636705218842 0.2194384950137950 0.8811831450709435 0.1791247850802529 45 0.4491449019883107 0.2486155334763858 0.8581719953087277 0.1820954300877716 46 0.4787270932425445 0.2775768931812335 0.8329294319252971 0.1844788524548449 47 0.5074315153055574 0.3061863786591120 0.8054583532364195 0.1863409481706220 48 0.5351810507738336 0.3618362729028427 0.7438701407588932 0.1887444543705232 49		1			
39 0.2577190808025936 0.0759549896049514 0.9632298349534124 0.1526797390930008 40 0.2908724534927186 0.1036991083191100 0.9511254968367464 0.1598208771406474 41 0.3236354020056219 0.1321348584450234 0.9369100841342104 0.1659354368615331 42 0.3559267359304543 0.1610316571314789 0.9205351509048322 0.1711279910946440 43 0.3876637123676956 0.1901912080395707 0.9019668233908304 0.1754952725601440 44 0.4187636705218842 0.2194384950137950 0.8811831450709435 0.1791247850802529 45 0.4491449019883107 0.2486155334763858 0.8581719953087277 0.1820954300877716 46 0.4787270932425445 0.2775768931812335 0.8329294319252971 0.1844788524548449 47 0.5074315153055574 0.3061863786591120 0.8054583532364195 0.1863409481706220 48 0.5351810507738336 0.3343144718152556 0.7757674115529100 0.1877433008795068 49 0.5619001025975381 0.3618362729028427 0.7438701407588932 0.1887444543705232		1			
40 0.2908724534927186 0.1036991083191100 0.9511254968367464 0.1598208771406474 41 0.3236354020056219 0.1321348584450234 0.9369100841342104 0.1659354368615331 42 0.3559267359304543 0.1610316571314789 0.9205351509048322 0.1711279910946440 43 0.3876637123676956 0.1901912080395707 0.9019668233908304 0.1754952725601440 44 0.4187636705218842 0.2194384950137950 0.8811831450709435 0.1791247850802529 45 0.4491449019883107 0.2486155334763858 0.8581719953087277 0.1820954300877716 46 0.4787270932425445 0.2775768931812335 0.8329294319252971 0.1844788524548449 47 0.5074315153055574 0.3061863786591120 0.8054583532364195 0.1863409481706220 48 0.5351810507738336 0.3343144718152556 0.7757674115529100 0.1877433008795068 49 0.5619001025975381 0.3618362729028427 0.7438701407588932 0.1887444543705232				1	
41 0.3236354020056219 0.1321348584450234 0.9369100841342104 0.1659354368615331 42 0.3559267359304543 0.1610316571314789 0.9205351509048322 0.1711279910946440 43 0.3876637123676956 0.1901912080395707 0.9019668233908304 0.1754952725601440 44 0.4187636705218842 0.2194384950137950 0.8811831450709435 0.1791247850802529 45 0.4491449019883107 0.2486155334763858 0.8581719953087277 0.1820954300877716 46 0.4787270932425445 0.2775768931812335 0.8329294319252971 0.1844788524548449 47 0.5074315153055574 0.3061863786591120 0.8054583532364195 0.1863409481706220 48 0.5351810507738336 0.3343144718152556 0.7757674115529100 0.1877433008795068 49 0.5619001025975381 0.3618362729028427 0.7438701407588932 0.1887444543705232					
42 0.3559267359304543 0.1610316571314789 0.9205351509048322 0.1711279910946440 43 0.3876637123676956 0.1901912080395707 0.9019668233908304 0.1754952725601440 44 0.4187636705218842 0.2194384950137950 0.8811831450709435 0.1791247850802529 45 0.4491449019883107 0.2486155334763858 0.8581719953087277 0.1820954300877716 46 0.4787270932425445 0.2775768931812335 0.8329294319252971 0.1844788524548449 47 0.5074315153055574 0.3061863786591120 0.8054583532364195 0.1863409481706220 48 0.5351810507738336 0.3343144718152556 0.7757674115529100 0.1877433008795068 49 0.5619001025975381 0.3618362729028427 0.7438701407588932 0.1887444543705232			-		
43 0.3876637123676956 0.1901912080395707 0.9019668233908304 0.1754952725601440 44 0.4187636705218842 0.2194384950137950 0.8811831450709435 0.1791247850802529 45 0.4491449019883107 0.2486155334763858 0.8581719953087277 0.1820954300877716 46 0.4787270932425445 0.2775768931812335 0.8329294319252971 0.1844788524548449 47 0.5074315153055574 0.3061863786591120 0.8054583532364195 0.1863409481706220 48 0.5351810507738336 0.3343144718152556 0.7757674115529100 0.1877433008795068 49 0.5619001025975381 0.3618362729028427 0.7438701407588932 0.1887444543705232				i e	
44 0.4187636705218842 0.2194384950137950 0.8811831450709435 0.1791247850802529 45 0.4491449019883107 0.2486155334763858 0.8581719953087277 0.1820954300877716 46 0.4787270932425445 0.2775768931812335 0.8329294319252971 0.1844788524548449 47 0.5074315153055574 0.3061863786591120 0.8054583532364195 0.1863409481706220 48 0.5351810507738336 0.3343144718152556 0.7757674115529100 0.1877433008795068 49 0.5619001025975381 0.3618362729028427 0.7438701407588932 0.1887444543705232				1	1
45 0.4491449019883107 0.2486155334763858 0.8581719953087277 0.1820954300877716 46 0.4787270932425445 0.2775768931812335 0.8329294319252971 0.1844788524548449 47 0.5074315153055574 0.3061863786591120 0.8054583532364195 0.1863409481706220 48 0.5351810507738336 0.3343144718152556 0.7757674115529100 0.1877433008795068 49 0.5619001025975381 0.3618362729028427 0.7438701407588932 0.1887444543705232		1			
46 0.4787270932425445 0.2775768931812335 0.8329294319252971 0.1844788524548449 47 0.5074315153055574 0.3061863786591120 0.8054583532364195 0.1863409481706220 48 0.5351810507738336 0.3343144718152556 0.7757674115529100 0.1877433008795068 49 0.5619001025975381 0.3618362729028427 0.7438701407588932 0.1887444543705232					
47 0.5074315153055574 0.3061863786591120 0.8054583532364195 0.1863409481706220 48 0.5351810507738336 0.3343144718152556 0.7757674115529100 0.1877433008795068 49 0.5619001025975381 0.3618362729028427 0.7438701407588932 0.1887444543705232		L. The state of th		1	
48 0.5351810507738336 0.3343144718152556 0.7757674115529100 0.1877433008795068 49 0.5619001025975381 0.3618362729028427 0.7438701407588932 0.1887444543705232					
49 0.5619001025975381 0.3618362729028427 0.7438701407588932 0.1887444543705232				1	
		1		•	
JU U.384JU98293/3000 U.109/84288/3339/U U.1894JU98293/3000		•	· ·		
	50	0.5875144035268046	0.3886297583620408	0.7097842887553970	0.1894009829375006

744	ЛЕБЕДЕВ, ЛАЙКОВ				
Таблица 1. С	Таблица 1. Окончание				
\overline{k}	u _k	v_k	w_k	$D_k \cdot 10^3$	
51	0.6119507308734495	0.4145742277792031	0.6735313746550552	0.1897683345035198	
52	0.2619733870119463	0.0254004718638935	0.9647407737452484	0.1517327037467653	
53	0.2968149743237949	0.0520810701854399	0.9535137299197660	0.1587740557483543	
54	0.3310451504860488	0.0797182847088560	0.9402415133478988	0.1649093382274097	
55	0.3646215567376676	0.1080465999177927	0.9248659646718568	0.1701915216193265	
56	0.3974916785279360	0.1368413849366629	0.9073449183577654	0.1746847753144065	
57	0.4295967403772029	0.1659073184763559	0.8876493690265695	0.1784555512007570	
58	0.4608742854473447	0.1950703730454614	0.8657611925775514	0.1815687562112174	
59	0.4912598858949903	0.2241721144376724	0.8416713061635072	0.1840864370663302	
60	0.5206882758945558	0.2530655255406488	0.8153781693967469	0.1860676785390006	
61	0.5490940914019820	0.2816118409731066	0.7868865546005788	0.1875690583743703	
62	0.5764123302025542	0.3096780504593238	0.7562065396795865	0.1886453236347225	
63	0.6025786004213506	0.3371348366394988	0.7233527025167632	0.1893501123329645	
64	0.6275291964794956	0.3638547827694396	0.6883435222485954	0.1897366184519868	
65	0.3348189479861771	0.0266484193553744	0.9419055864656976	0.1643908815152736	
66	0.3699515545855294	0.0542400006684350	0.9274663711354920	0.1696300350907768	
67	0.4042003071474669	0.0825199271543086	0.9109404883549424	0.1741553103844483	
68	0.4375320100182624	0.1112695182483710	0.8922918998389230	0.1780015282386092	
69	0.4699054490335947	0.1402964116467816	0.8714962913561781	0.1812116787077125	
70	0.5012739879431952	0.1694275117584291	0.8485391607173312	0.1838323158085421	
71	0.5315874883754966	0.1985038235312689	0.8234142179037827	0.1859113119837737	
72	0.5607937109622116	0.2273765660020893	0.7961220452784415	0.1874969220221698	
73	0.5888393223495521	0.2559041492849764	0.7666689760474548	0.1886375612681076	
74	0.6156705979160163	0.2839497251976899	0.7350661660162923	0.1893819575809276	
75	0.6412338809078123	0.3113791060500690	0.7013288545977311	0.1897794748256767	
76	0.4076051259257167	0.0275779229085846	0.9127417594736908	0.1738963926584846	
77	0.4423788125791520	0.0558413683498429	0.8950881117308378	0.1777442359873466	

0.0845777208772714

0.1135975846359248

0.1427286904765053

0.1718112740057635

0.2006944855985351

0.2292335090598907

0.2572871512353714

0.0282609419773593

0.0569987135968365

0.0860271252855440

0.1151748137221281

0.1442811654136362

0.1731930321657680

0.2017619958756061

0.0287421975590739

0.0577831212371370

0.0291994613580811

78

79

80

81

82

83

84

85

86 87

88

89

90

91

92

93

100

0.4760480917328258

0.5085838725946297

0.5399513637391218

0.5701118433636380

0.5990240530606021

0.6266452685139695

0.6529320971415942

0.4791583834610126

0.5130373952796941

0.5456252429628476

0.5768956329682385

0.6068186944699046

0.6353622248024907

0.6624927035731797

0.5484933508028488

0.5810207682142106

0.6772135750395347

0.8753426891730698

0.8534858131811760

0.8295065073350085

0.8034011278191182

0.7751721791351830

0.7448272992936981

0.7123784095068203

0.8772733682938184

0.8564717027975487

0.8336020801058733

0.8086570292443197

0.7816354760044630

0.7525417044279051

0.7213844430902229

0.8356607745996807

0.8118349449265306

0.7352068860113937

0.1810010815068719

0.1836920318248129

0.1858489473214328

0.1875079342496592

0.1887080239102310

0.1894905752176822

0.1898991061200695

0.1809065016458791

0.1836297121596799

0.1858426916241869

0.1875654101134641

0.1888240751833503

0.1896497383866979

0.1900775530219121

0.1858525041478814

0.1876248690077947

0.1889404439064607

0.1898168539265290

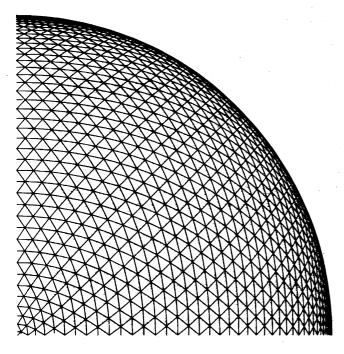
0.1902779940661772

0.1890125641731815

0.1899434637795751

0.1904520856831751

0.1905534498734563



Puc. 1.

На рис. 1 изображена сетка на сфере, проведенная через узлы квадратуры 131-го порядка. Как и для других полученных квадратурных формул порядков n = 6m + 5, узлы данной квадратуры почти равномерно триангулируют поверхность сферы и все веса положительны и близки по величине. Это свойство квадратур указанного типа

весьма полезно для многих задач математической физики, в частности для трехмерного численного интегрирования в задачах квантовой химии, где квадратуры указанного типа находят широкое применение [6]. Кроме того, сетку, образованную узлами данной квадратуры, можно использовать для построения конечно-разностных схем и схем метода конечных элементов для аппроксимации дифференциальных уравнений в частных производных на поверхности сферы, что в силу равномерности распределения ее узлов имеет определенные преимущества по сравнению с использованием прямоугольных сеток в сферических координатах (θ, ф).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 96–01–01481, 06–01–00163).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Лебедев В.И. // ЖВМиМФ. 1976. Т. 16. № 2. С. 293—306.
- 2. Лебедев В.И. // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18. № 1. С. 132-142.
- 3. *Лебедев В.И.* Тр. конф. по дифференциальным уравнениям и вычислительной математике. Новосибирск, 1978. С. 110–114.
- 4. Лебедев В.И., Скороходов А.Л. // ДАН. 1992. Т. 324. № 3. С. 519–524.
- 5. Лебедев В.И. // ДАН. 1994. Т. 338. № 4. С. 454-456.
- Laikov D.N. // Chem. Phys. Lett. 1997. T. 281. № 2. C. 151–156.