

问题重述:

1. 某银行经理计划用一笔资金进行有价证券的投资,可供购进的证券以及其信用等级、到期年限、到期税前收益如下表所示.按照规定,市政证券的收益可以免税,其他证券的收益需按 50% 的税率纳税.此外还有以下限制:

- (1) 政府及代办机构的证券总共至少要购进 400 万元;
- (2) 所购证券的平均信用等级不超过 1.4(信用等级数字越小,信用程度越高);
- (3) 所购证券的平均到期年限不超过 5 年.

证券名称	证券种类	信用等级	到期年限	到期税前收益/%
A	市政	2	9	4.3
B	代办机构	2	15	5.4
C	政府	1	4	5.0
D	政府	1	3	4.4
E	市政	5	2	4.5

问:(1) 若该经理有 1 000 万元资金,应如何投资?

(2) 如果能够以 2.75% 的利率借到不超过 100 万元资金,该经理应如何操作?

(3) 在 1 000 万元资金情况下,若证券 A 的税前收益增加为 4.5%,投资应否改变? 若证券 C 的税前收益减少为 4.8%,投资应否改变^[10]?

问题分析:

这个优化问题的目标是在总投资不超过 1000 万的情况下收益最高。

模型假设:

设投资 A、B、C、E、D 的金额分别为 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 万元, 收益为 w 万元, 则根据题意建立模型:

$$\max w = 4.3\%x_1 + 5.4\%x_2 \times 50\% + 5.0\%x_3 \times 50\% + 4.4\%x_4 \times 50\% + 4.5\%x_5$$

$$s.t. \quad x_2 + x_3 + x_4 \geq 400$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 1000$$

$$\frac{2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \leq 1.4 \Rightarrow 6x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 36x_5 \leq 0$$

$$\frac{9x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \leq 5 \Rightarrow 4x_1 + 10x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

模型求解:

(1) 使用 Lingo 工具对上述关系式求解, 代码如下:

```

1.  max=0.043*x1+0.027*x2+0.025*x3+0.022*x4+0.045*x5;
2.  x2+x3+x4>=400;
3.  x1+x2+x3+x4+x5<=1000;
4.  6*x1+6*x2-4*x3-4*x4+36*x5<=0;
5.  4*x1+10*x2-x3-2*x4-3*x5<=0;
6.  x1>=0;
7.  x2>=0;
8.  x3>=0;
9.  x4>=0;
```

10. $x_5 \geq 0$;

结果如下:

Solution Report - LINGO1

Global optimal solution found.
Objective value: 29.83636
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 3

Variable	Value	Reduced Cost
X1	218.1818	0.000000
X2	0.000000	0.3018182E-01
X3	736.3636	0.000000
X4	0.000000	0.6363636E-03
X5	45.45455	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	29.83636	1.000000
2	336.3636	0.000000
3	0.000000	0.2983636E-01
4	0.000000	0.6181818E-03
5	0.000000	0.2363636E-02
6	218.1818	0.000000
7	0.000000	0.000000
8	736.3636	0.000000
9	0.000000	0.000000
10	45.45455	0.000000

即证券 A 投资 218.1818 万元, B 不投资, C 投资 736.3636 万元, D 不投资, E 分别投资 45.45455 万元, 最大税后收益为 29.83636 万元。

(2) 由图中的结果中的 Dual Price 可知, 若资金增加 1 万元, 收益可增加 0.02983636 万元, 则若增加 100 万元时, 收益可增加 2.983636 万元, 大于以 2.75% 的利率借到 100 万元资金的利息, 所以应该贷款。模型对约束式做出调整, 将

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 1000$$

调整为:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 1100$$

求得结果为:

Solution Report - LINGO1

Global optimal solution found.
Objective value: 32.82000
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 3

Variable	Value	Reduced Cost
X1	240.0000	0.000000
X2	0.000000	0.3018182E-01
X3	810.0000	0.000000
X4	0.000000	0.6363636E-03
X5	50.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	32.82000	1.000000
2	410.0000	0.000000
3	0.000000	0.2983636E-01
4	0.000000	0.6181818E-03
5	0.000000	0.2363636E-02
6	240.0000	0.000000
7	0.000000	0.000000
8	810.0000	0.000000
9	0.000000	0.000000
10	50.00000	0.000000

即: 证券 A、C、E 分别投资 240、810、50 万元, 最大税后收益为 300.7 万元

(3) 打开 (1) 中目标函数系数允许范围如下:

Objective Coefficient Ranges			
Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	0.4300000E-01	0.3500000E-02	0.1300000E-01
X2	0.2700000E-01	0.3018182E-01	INFINITY
X3	0.2500000E-01	0.1733333E-01	0.5600000E-03
X4	0.2200000E-01	0.6363636E-03	INFINITY
X5	0.4500000E-01	0.5200000E-01	0.1400000E-01

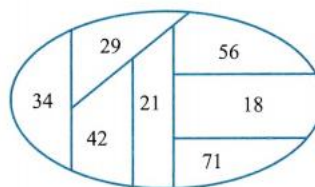
Righthand Side Ranges			
Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
2	400.0000	336.3636	INFINITY
3	1000.0000	INFINITY	456.7901
4	0.0	10571.43	2000.000
5	0.0	1000.000	1200.000
6	0.0	218.1818	INFINITY
7	0.0	0.0	INFINITY
8	0.0	736.3636	INFINITY
9	0.0	0.0	INFINITY
10	0.0	45.45455	INFINITY

由图可知，证券 A 的税前收益可增加 0.35%，证券 C 的税前收益可减少 $0.56\% \times 2 = 0.112\%$ 。故若证券 A 的税前收益增加为 4.5%，投资不应改变。若证券 C 的税前收益减少为 4.8%，投资应该改变。

P136 2

问题重述：

2. 一家出版社准备在某市建立两个销售代理点，向 7 个区的大学生售书，每个区的大学生数量（单位：千人）表示在右图上。每个销售代理点只能向本区和一个相邻区的大学生售书，这两个销售代理点应该建在何处，才能使所能供应的大学生的数量最大？建立该问题的整数线性规划模型并求解^[61]。



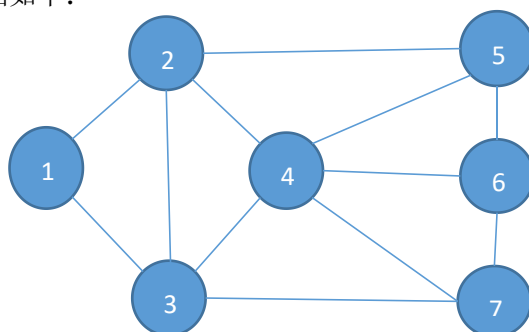
3. 一家保姆服务公司专门向顾主提供保姆服务。公司向顾主收取费用后，统一给保姆发工资。每人每月工资固定。根据估计，下

问题分析：

这个优化问题的目标就是求出两个代理点的位置使其所能供应的大学生的数量最大。

模型建立：

将大学生数量为 34、29、42、21、56、18、71 的区分别编号为 1~7 区域，画出区域之间的相邻关系图如下：



用 0-1 二值变量表示建立代理点情况，用 x_{ij} 表示（其中 $i < j$ 且 i, j 相邻）， $x_{ij}=1$ 表示表示 (i, j) 区的大学生由一个销售代理点供应图书。由题意建立规划模型如下：

$$\begin{aligned}
& \max 63x_{12} + 76x_{13} + 71x_{23} + 50x_{24} + 85x_{25} + 63x_{34} + 77x_{45} + 39x_{46} + 92x_{47} + 74x_{56} \\
& \quad + 89x_{67} \\
& s. t. x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{56} + x_{67} \leq 2 \\
& \quad x_{12} + x_{13} \leq 1 \\
& \quad x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 1 \\
& \quad x_{13} + x_{23} + x_{34} \leq 1 \\
& \quad x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{47} \leq 1 \\
& \quad x_{25} + x_{45} + x_{56} \leq 1 \\
& \quad x_{46} + x_{56} + x_{67} \leq 1 \\
& \quad x_{47} + x_{67} \leq 1 \\
& \quad x_{ij}(1 - x_{ij}) = 0
\end{aligned}$$

模型求解：

使用 Lingo 工具对上述关系式求解，代码如下：

```

1.  max=63*x12+76*x13+71*x23+50*x24+85*x25+63*x34+77*x45+39*x46+92*x47+74*x56+89*x67;
2.  x12+x13+x23+x24+x25+x34+x45+x46+x47+x56+x67<=2;
3.  x12+x13<=1;
4.  x12+x23+x24+x25<=1;
5.  x13+x23+x34<=1;
6.  x24+x34+x45+x47<=1;
7.  x25+x45+x56<=1;
8.  x46+x56+x67<=1;
9.  x47+x67<=1;
10. @bin(x12);
11. @bin(x13);
12. @bin(x23);
13. @bin(x24);
14. @bin(x25);
15. @bin(x34);
16. @bin(x45);
17. @bin(x46);
18. @bin(x47);
19. @bin(x56);
20. @bin(x67);

```

结果如下：

Solution Report - LINGO1		
Global optimal solution found.		
Objective value:	177.0000	
Objective bound:	177.0000	
Infeasibilities:	0.000000	
Extended solver steps:	0	
Total solver iterations:	0	
Variable	Value	Reduced Cost
X12	0.000000	-63.00000
X13	0.000000	-76.00000
X23	0.000000	-71.00000
X24	0.000000	-50.00000
X25	1.000000	-85.00000
X34	0.000000	-63.00000
X45	0.000000	-77.00000
X46	0.000000	-39.00000
X47	1.000000	-92.00000
X56	0.000000	-74.00000
X67	0.000000	-89.00000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	177.0000	1.000000
2	0.000000	0.000000
3	1.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	1.000000	0.000000
6	0.000000	0.000000
7	0.000000	0.000000
8	1.000000	0.000000
9	0.000000	0.000000

即供应数量最大的最优解为在城市 2 或 5 处建立一个代理点，在城市 4 或 7 建立一个代理点，此时最多能供应 177 人。

P136 4

问题重述：

4. 在甲乙双方的一场战争中，一部分甲方部队被乙方部队包围长达 4 个月。由于乙方封锁了所有水陆交通通道，被包围的甲方部队只能依靠空中交通维持供给。运送 4 个月的供给分别需要 2 次，3 次，3 次，4 次飞行，每次飞行编队由 50 架飞机组成（每架飞机需要 3 名飞行员），可以运送 10^5 t 物资。每架飞机每个月只能飞行一次，每名飞行员每个月也只能飞行一次。在执行完运输任务后的返回途中有 20% 的飞机会被乙方部队击落，相应的飞行员也因此牺牲或失踪。在第 1 个月开始时，甲方拥有 110 架飞机和 330 名熟练的飞行员。在每个月开始时，甲方可以招聘新飞行员和购买新飞机。新飞机必须经过一个月的检查后才可以投入使用，新飞行员必须在熟练飞行员的指导下经过一个月的训练才能投入飞行。只有不执行当月飞行任务的熟练飞行员可以作为当月的教练指导新飞行员进行训练，每名教练每个月正好指导 20 名飞行员（包括他自己在内）进行训练。每名飞行员在完成一个月的飞行任务后，必须有一个月的带薪假期，假期结束后才能再投入飞行。已知各项费用（单位略去）如下表所示，请你为甲方安排一个飞行计划。

	第 1 个月	第 2 个月	第 3 个月	第 4 个月
新飞机价格	200.0	195.0	190.0	185.0
闲置的熟练飞行员报酬	7.0	6.9	6.8	6.7
教练和新飞行员报酬（包括培训费用）	10.0	9.9	9.8	9.7
执行飞行任务的熟练飞行员报酬	9.0	8.9	9.8	9.7
休假期间的熟练飞行员报酬	5.0	4.9	4.8	4.7

如果每名教练每个月可以指导不超过 20 名新飞行员（不包括他自己在内）进行训练，模型和结果有哪些改变^[1]？

问题分析：

这个优化问题的目标是为甲方部队安排合适的飞行计划使得总的支出最小。

模型建立：

假设 4 个月中甲方购买的新飞机数量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 架，闲置的飞机数量分别为 y_1, y_2, y_3, y_4 架，飞行员中教练和新飞行员数量的总和分别为 p_1, p_2, p_3, p_4 ，闲置的熟练飞行员数量分别为 q_1, q_2, q_3, q_4 ，总支出为 w ，根据题意得到目标函数：

$$\begin{aligned} \text{Min } w = & 200x_1 + 195x_2 + 190x_3 + 185x_4 + 10.0p_1 + 9.9p_2 + 9.8p_3 + 9.7p_4 + 7.0q_1 + 6.9q_2 + 6.8q_3 + 6.7q_4 \\ & + 9.0 \times 3 \times 2 \times 50 + 9.8 \times 3 \times 3 \times 50 + 9.7 \times 3 \times 4 \times 50 + 5.0 \times 3 \times 2 \times 50 \times (1-20\%) + 4.9 \times 3 \times 3 \times 50 \times (1-20\%) \\ & + 4.8 \times 3 \times 3 \times 50 \times (1-20\%) + 4.7 \times 3 \times 4 \times 50 \times (1-20\%) \end{aligned}$$

下求约束函数：

1) 飞机数量约束

由等式：本月飞机数量=上一月执行任务飞机数 $\times(1-20\%)$ +上一月飞机闲置数+上一月购机数，于是可得每个月的约束条件：

$$\text{第一个月：} 2 \times 50 + y_1 = 110$$

$$\text{第二个月：} 3 \times 50 + y_2 = 2 \times 50 \times 1 - 20\% + y_1 + x_1$$

$$\text{第三个月：} 3 \times 50 + y_3 = 3 \times 50 \times 1 - 20\% + y_2 + x_2$$

$$\text{第四个月：} 4 \times 50 + y_4 = 3 \times 50 \times 1 - 20\% + y_3 + x_3$$

2) 飞行员数量限制

由等式：本月执行任务飞行员数量+本月闲置飞行员数量+教练数量=前一个月教练与新飞行员数量+前一个月闲置飞行员数量+前两个月执行任务完毕后返回并休假完成的飞行员数量，于是可得约束条件：

$$\text{第一个月：} 3 \times 2 \times 50 + \frac{1}{20} p_1 + q_1 = 330$$

$$\text{第二个月：} 3 \times 3 \times 50 + \frac{1}{20} p_2 + q_2 = p_1 + q_1$$

$$\text{第三个月：} 3 \times 3 \times 50 + \frac{1}{20} p_3 + q_3 = p_2 + q_2 + 3 \times 2 \times 50 \times (1 - 20\%)$$

$$\text{第四个月：} 3 \times 4 \times 50 + \frac{1}{20} p_4 + q_4 = p_3 + q_3 + 3 \times 3 \times 50 \times (1 - 20\%)$$

综上，可得模型如下：

$$\begin{aligned} \min \quad & 200x_1 + 195x_2 + 190x_3 + 185x_4 + 10.0p_1 + 9.9p_2 + 9.8p_3 + 9.7p_4 + 7.0q_1 + 6.9q_2 \\ & + 6.8q_3 + 6.7q_4 + 23883 \end{aligned}$$

$$\text{s. t. } y_1 = 10$$

$$y_1 + x_1 - y_2 = 70$$

$$y_2 + x_2 - y_3 = 30$$

$$y_3 + x_3 - y_4 = 80$$

$$0.05p_1 + q_1 = 30$$

$$p_1 + q_1 - 0.05p_2 - q_2 = 450$$

$$p_2 + q_2 - 0.05p_3 - q_3 = 210$$

$$p_3 + q_3 - 0.05p_4 - q_4 = 240$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_4 \geq 0 \text{ 且为整数}$$

模型求解：

(1) 使用 Lingo 工具对上述关系式求解，代码如下：

```
1. min=200*x1+195*x2+190*x3+185*x4+10.0*p1+9.9*p2+9.8*p3+9.7*p4+7.0*q1+6.9*q2+6.8*q3+6.7*q4+23883;
```

```

2.  y1=10;
3.  y1+x1-y2=70;
4.  y2+x2-y3=30;
5.  y3+x3-y4=80;
6.  0.05*p1+q1=30;
7.  p1+q1-0.05*p2-q2=450;
8.  p2+q2-0.05*p3-q3=210;
9.  p3+q3-0.05*p4-q4=240;
10. @gin(x1);
11. @gin(x2);
12. @gin(x3);
13. @gin(x4);
14. @gin(y1);
15. @gin(y2);
16. @gin(y3);
17. @gin(y4);
18. @gin(p1);
19. @gin(p2);
20. @gin(p3);
21. @gin(p4);
22. @gin(q1);
23. @gin(q2);
24. @gin(q3);
25. @gin(q4);

```

结果如下：

```

Global optimal solution found.
Objective value:                66207.40
Objective bound:                66207.40
Infeasibilities:                0.000000
Extended solver steps:          0
Total solver iterations:        119

```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	60.00000	200.0000
X2	30.00000	195.0000
X3	80.00000	190.0000
X4	0.000000	185.0000
P1	460.0000	10.00000
P2	220.0000	9.900000
P3	240.0000	9.800000
P4	0.000000	9.700000
Q1	7.000000	7.000000
Q2	6.000000	6.900000
Q3	4.000000	6.800000
Q4	4.000000	6.700000
Y1	10.00000	0.000000
Y2	0.000000	0.000000
Y3	0.000000	0.000000
Y4	0.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	66207.40	-1.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	0.000000	0.000000
6	0.000000	0.000000
7	0.000000	0.000000
8	0.000000	0.000000
9	0.000000	0.000000

即满足条件的最优解为：4 个月甲方部队每月购买的新飞机数量分别为 60、30、80、0 架，闲置的飞机数量分别为 10、0、0、0 架，飞行员中教练和新飞行员数量的总和分别为 460、220、240、0 人，闲置的熟练飞行员数量分别为 7、6、4、4 人，总支出最低为 66207.40。

(2) 如果每名教练每个月可以指导不超过 20 名新飞行员进行训练，那么不妨在新模型中将教练和学员分开，教练数为：p1, p2, p3, p4，学员数为：s1, s2, s3, s4，其他变量不变，飞行员的数量约束更改为：

$$\begin{aligned} \min & 200x_1 + 195x_2 + 190x_3 + 185x_4 + 10.0(p_1 + s_1) + 9.9(p_2 + s_2) + 9.8(p_3 + s_3) \\ & + 9.7(p_4 + s_4) + 7.0q_1 + 6.9q_2 + 6.8q_3 + 6.7q_4 + 23883 \\ \text{s. t. } & y_1 = 10 \\ & y_1 + x_1 - y_2 = 70 \\ & y_2 + x_2 - y_3 = 30 \\ & y_3 + x_3 - y_4 = 80 \\ & p_1 + q_1 = 30 \\ & p_1 + q_1 + s_1 - p_2 - q_2 = 450, s_1 \leq 20p_1 \\ & p_2 + q_2 + s_2 - p_3 - q_3 = 210, s_2 \leq 20p_2 \\ & p_3 + q_3 + s_3 - p_4 - q_4 = 240, s_3 \leq 20p_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, p_1, p_2, p_3, p_4, s_1, s_2, s_3, s_4, q_1, q_2, q_3, q_4 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{aligned}$$

Lingo 代码如下：

```
1. min=200*x1+195*x2+190*x3+185*x4+10.0*(p1+s1)+9.9*(p2+s2)+9.8*(p3+s3)+9.7*(p4+s4)+7.0*q1+6.9*q2+6.8*q3+6.7*q4+23883;
2. y1=10;
3. y1+x1-y2=70;
4. y2+x2-y3=30;
5. y3+x3-y4=80;
6. p1+q1=30;
7. p1+q1+s1-p2-q2=450;
8. s1<=20*p1;
9. p2+q2+s2-p3-q3=210;
10. s2<=20*p2;
11. p3+q3+s3-p4-q4=240;
12. s3<=20*p3;
13. @gin(x1);
14. @gin(x2);
15. @gin(x3);
16. @gin(x4);
17. @gin(y1);
18. @gin(y2);
19. @gin(y3);
20. @gin(y4);
21. @gin(p1);
22. @gin(p2);
23. @gin(p3);
24. @gin(p4);
25. @gin(q1);
```



```

26. @gin(q2);
27. @gin(q3);
28. @gin(q4);
29. @gin(s1);
30. @gin(s2);
31. @gin(s3);
32. @gin(s4);

```

结果如下：

```

Global optimal solution found.
Objective value:                66068.80
Objective bound:                66068.80
Infeasibilities:                0.000000
Extended solver steps:          0
Total solver iterations:        19

```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	60.00000	200.0000
X2	30.00000	195.0000
X3	80.00000	190.0000
X4	0.000000	185.0000
P1	22.00000	10.00000
S1	431.0000	10.00000
P2	11.00000	9.900000
S2	211.0000	9.900000
P3	12.00000	9.800000
S3	228.0000	9.800000
P4	0.000000	9.700000
S4	0.000000	9.700000
Q1	8.000000	7.000000
Q2	0.000000	6.900000
Q3	0.000000	6.800000
Q4	0.000000	6.700000
Y1	10.00000	0.000000
Y2	0.000000	0.000000
Y3	0.000000	0.000000
Y4	0.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	66068.80	-1.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	0.000000	0.000000
6	0.000000	0.000000
7	0.000000	0.000000
8	9.000000	0.000000
9	0.000000	0.000000
10	9.000000	0.000000
11	0.000000	0.000000
12	12.00000	0.000000

即最优解为：4 个月甲方每月购买的新飞机数量分别为 60、30、80、0 架，闲置飞机的数量分别为 10、0、0、0 架，教练飞行员的数量分别为 22、11、12、0 人，新学员的数量分别为：431、211、228、0 人，闲置的熟练飞行员数量分别 8、0、0、0 人，总支出最低为 66068.80。