《数值计算》期中测验试卷

一、(10 分，2 分/每空) 填空题

(1) 在数值计算中为避免损失有效数字，尽量避免两个<u>相近的</u>数作减法运算；为避免误差的扩大，也尽量避免分母的绝对值<u>远小于</u>分子的绝对值。

(2) 误差有四大来源，数值分析主要处理其中的<u>截断误差</u>和<u>舍入误差</u>。

(3) 有效数字越多，相对误差越<u>小</u>。

二、(20 分) 简答题

(1) 以下各数都是对精确值进行四舍五入得到的近似数，指出它们的有效数位、误差限和相对误差限。

$\frac{0.00005}{0.3040}=0.164\%$

$X_1 = 0.3040$， $X_2 = 5.1 \times 10^9$， $X_3 = 400$， $X_4 = 0.003346$， $X_5 = 0.875 \times 10^{-5}$

4 0.00005　2 0.05×10^9　3 0.5　4 0.0000005　3 0.0005×10^{-5}

(2) 已知 $x = 0,2,3,5$ 对应的函数值为 $y = 1,3,2,5$ 作三次 Newton 插值多项式，如再增加 $x = 6$ 时的函数值为 6，作四次 Newton 插值多项式。

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$f(x_0,x_1)=1$， $f(x_1,x_2)=-1$， $f(x_2,x_3)=\cancel{0}\ \frac{3}{2}$

$f(x_0,x_1,x_2)=-\frac{2}{3}$， $f(x_1,x_2,x_3)=\frac{5}{6}$

$f(x_0,x_1,x_2,x_3)=\frac{3}{10}$

$P_3(x)=1+1(x-0)-\frac{2}{3}(x-0)(x-2)+\frac{3}{10}(x-0)(x-2)(x-3)$

三、(20 分) 非线性方程　PPT 末例题

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1 - x_2^2 = 1 \\ x_2 - sinx_1^2 = 0 \end{cases}$$

有靠近 (0, 0) 的解，使用简单迭代法或 Newton 法求前两次迭代解。

四、(20 分) 已知三次 B 样条曲线方程为：

$$C_i(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \\ P_{i+2} \\ P_{i+3} \end{bmatrix}, \ t \in [0,1],$$

由控制顶点 $P=\{P_0\ P_1 \dots P_n\}=\{(0,0), (1,1), (2,0), (3,-1), (4,0), (5,1), (6,0)\}$ 可生成四段 B 样条曲线 C_0, C_1, C_2, C_3。

$C_0(t)$: $\begin{cases} x = t+1 \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + \frac{2}{3} \end{cases}$

(1) 求 $C_0(1), C_1(0), C'_0(1), C'_1(0)$。

(2) 如果调整控制点 P_2，将对哪些线段产生影响？ C_0. C_1. C_2

五、(30 分) 证明题

设 $l_0(x)$, $l_1(x)$,…, $l_n(x)$ 是以 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 为节点的 Lagrange 插值基函数，

试证:

（1）$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1$ 设$f(x)=1$

（2）$\sum_{k=0}^{n} x_k^j l_k(x) = x^j (j = 1, \dots, n)$ 设$f(x)=x^j$

（3）$\sum_{k=0}^{5} (x_k - x) \ l_k(x) = 0$ 设$f(t)=(t-x)$

（4）$\sum_{k=0}^{n} l_k(0) x_k^j = \begin{cases} 0, & j = 1,2, \dots, n \\ (-1)^n x_0 x_1 \dots x_n, & j = n+1 \end{cases}$

（提示：使用（2）的结论；使用插值余项定理）

$j \le n$时，$E = f(x) - p_n(x) = \frac{w(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = 0$

$j = n+1$时，$E = \frac{(0-x_0)\cdots(0-x_n)}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot x_0 \cdots x_n}{(n+1)!} \cdot (n+1)!$

二(1)

	有效数位	误差限	相对误差限
0.3040	4	0.0005	1.645×10^{-3}
5.1×10^{9}	2	0.5×10^{9}	0.098
400	3	5	0.0125
0.003346	4	0.000005	1.494×10^{-3}
0.875×10^{-5}	3	0.005×10^{-5}	5.714×10^{-3}

二(2)

x	$f(x)$	一阶	二阶	三阶	四阶
0	1				
2	3	1			
3	2	-1	$-\frac{2}{3}$		
5	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{10}$	
6	6	1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{11}{120}$

$$P_3(x)= 1+1(x-0)-\frac{2}{3}(x-0)(x-2)+\frac{3}{10}(x-0)(x-2)(x-3)$$

$$=\frac{3}{10}x^3-\frac{13}{6}x^2+\frac{62}{15}x+1$$

$$P_4(x)=P_3(x)+\left(-\frac{11}{120}\right)(x-0)(x-2)(x-3)(x-5)$$

$$=-\frac{11}{120}x^4+\frac{73}{60}x^3-\frac{601}{120}x^2+\frac{413}{60}x+1$$

$$\begin{cases} \cancel{f(x_1,x_2)=} \; f(x_1,x_2) = x_1^2+x_1-x_2^2-1=0 \\ g(x_1,x_2) = x_2-\sin x_1^2=0 \end{cases}$$

$f_{x_1} = 2x_1+1$ $\qquad f_{x_2} = -2x_2$

$g_{x_1} = -\cos x_1^2 \cdot 2x_1 = -2x_1\cos x_1^2$ $\qquad g_{x_2}=1$

$x_1^{(0)}=0 \qquad x_2^{(0)}=0$

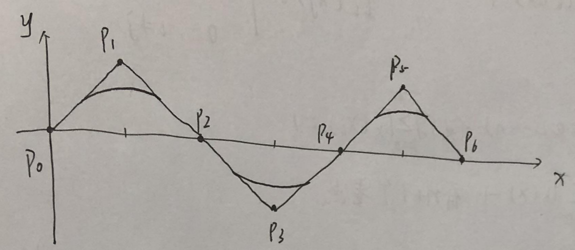
$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \frac{f(0,0)\,g_{x_2}(0,0) - g(0,0)\cdot f_{x_2}(0,0)}{g_{x_1}(0,0)\,f_{x_2}(0,0) - f_{x_1}(0,0)\cdot g_{x_2}(0,0)} = 0+\frac{-1\times1-0\times0}{0\times0-1\times1}=1$$

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + \frac{g(0,0)\,f_{x_1}(0,0) - f(0,0)\cdot g_{x_1}(0,0)}{g_{x_1}(0,0)\,f_{x_2}(0,0) - f_{x_1}(0,0)\cdot g_{x_2}(0,0)} = 0+\frac{0\times1-(-1)\times0}{0\times0-1\times1}=0$$

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + \frac{f(1,0)\,g_{x_2}(1,0) - g(1,0)\cdot f_{x_2}(1,0)}{g_{x_1}(1,0)\,f_{x_2}(1,0) - f_{x_1}(1,0)\,g_{x_2}(1,0)} = 1+\frac{1\times1-(-\sin1)\times0}{-2\cos1\times0-3\times1} = \frac{2}{3} = 0.6667$$

$$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} + \frac{g(1,0)\,f_{x_1}(1,0) - f(1,0)\cdot g_{x_1}(1,0)}{g_{x_1}(1,0)\,f_{x_2}(1,0) - f_{x_1}(1,0)\cdot g_{x_2}(1,0)} = 0+\frac{-\sin1\times3-1\times(-2\cos1)}{-2\cos1\times0-3\times1} = 0.4813$$

四



(1). $C_0(1) = \frac{1}{6}P_1 + \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{6}P_3 = (2,0)$

$C_1(0) = \frac{1}{6}P_1 + \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{6}P_3 = (2,0)$

$C_0'(1) = -\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_3 = (1,-1)$

$C_1'(0) = -\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_3 = (1,-1)$

$$C_i(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}t^3 & \frac{1}{6}t^2 & \frac{1}{6}t & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \\ P_{i+2} \\ P_{i+3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{6} & \frac{1}{2}t^3 - t^2 + \frac{2}{3} & -\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6} & \frac{1}{6}t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \\ P_{i+2} \\ P_{i+3} \end{bmatrix}$$

$$= (-\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{6})P_i + (\frac{1}{2}t^3 - t^2 + \frac{2}{3})P_{i+1} + (-\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6})P_{i+2} + \frac{1}{6}t^3 P_{i+3}$$

$$= t^3(-\frac{1}{6}P_i + \frac{1}{2}P_{i+1} - \frac{1}{2}P_{i+2} + \frac{1}{6}P_{i+3}) + t^2(\frac{1}{2}P_i - P_{i+1} + \frac{1}{2}P_{i+2}) + t(-\frac{1}{2}P_i + \frac{1}{2}P_{i+2}) + (\frac{1}{6}P_i + \frac{2}{3}P_{i+1} + \frac{1}{6}P_{i+2})$$

$$C_i'(t) = 3t^2(-\frac{1}{6}P_i + \frac{1}{2}P_{i+1} - \frac{1}{2}P_{i+2} + \frac{1}{6}P_{i+3}) + 2t(\frac{1}{2}P_i - P_{i+1} + \frac{1}{2}P_{i+2}) + (-\frac{1}{2}P_i + \frac{1}{2}P_{i+2})$$

(2) 调整P_2影响 C_0, C_1 C_2

五.(1) 令 $f(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)-1$　　$l_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

∴ 存在 $x_i\,(i=0,1,\cdots n)$ 使得 $\sum_{k=0}^{n} l_k(x_i)=1$

即 $f(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)-1$ 有n+1个零点

又 $f(x)$为n次多项式且有n+1个零点. ∴ $f(x)=0$. 即 $\sum_{k=0}^{n} l_k(x)=1$ 得证

(2) 令 $f(x)=\sum_{k=0}^{n} x_k^j l_k(x)-x^j$　　$l_i(x_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

∴ 存在 $x_i\,(i=0,1,\cdots n)$ 使得 $\sum_{k=0}^{n} l_k(x)=1$ 即 $\sum_{k=0}^{n} x_k^j l_k(x)=x^j$

即 $f(x)=\sum_{k=0}^{n} x_k^j l_k(x)-x^j$ 有n+1个零点.

又 $j=1,2,\cdots n$. ∴ $f(x)$为n次多项式且有n+1个零点.

∴ $f(x)=0$ 恒成立. 即 $\sum_{k=0}^{n} x_k^j l_k(x)=x^j$ 得证.

(3). $f(z)=(z-x)^5$ 的 Lagrange 插值函数为 $f(z)=\sum_{k=0}^{n}(x_k-x)^5 l_k(z)$

令 $z=x$ 得 $f(x)=0^5=0=\sum_{k=0}^{n}(x_k-x)^5 l_k(z)$.

且插值节点个数为6 即 $n=5$时 有 ~~f(z)=(z-x)^5~~

可得: $0=\sum_{k=0}^{5}(x_k-x)^5 l_k(x)$ 得证

(4). 令 $f(x)=x^j$ 其Lagrange 插值函数 $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x_k^j l_k(x)$

$R(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{w(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$　　$w(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),\ a<\xi<b$

$p_n(x)=f(x)-\frac{w(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$

当 $j\le n$时 $f^{(n+1)}(\xi)=0$　　$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x_k^j l_k(x)=f(0)=0$

当 $j=n+1$时 $f^{(n+1)}(\xi)=(n+1)(n)(n-1)\cdots 1=(n+1)!$

∴ $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x_k^j l_k(x)=f(0)-w(0)\frac{(n+1)!}{(n+1)!}=0-(-x_0)(-x_1)\cdots(-x_n)$

$=(-1)^n x_0 x_1\cdots x_n$ 得证.