线性代数

1. 矩阵：数组 → $n\times n$
行列式：数值 $D=\det(a_{ij})$

2、性质 $D=D^T$

$D \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j \,/\, c_i \leftrightarrow c_j} -D$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_{1j}+c_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_{2j}+c_{2j} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_{nj}+c_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left| \quad \right| + \left| \quad \right|$$

$$\left|\begin{array}{cc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & & a_{in} \\ \hline a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|$$

3. 余子式 M_{ij}，代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$

4. 范德蒙德行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

5. 对角矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 数量矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$

上/下三角矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & & \ddots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

对称矩阵 $A=A^T$ 反对称矩阵 $A=-A^T$

同型矩阵 $m\times n$ 奇异方阵 $|A|=0$

正交矩阵 $AA^T=E$（A是方阵且必可逆）$\Rightarrow \begin{cases} \text{各行/列是单位向量且两两正交} \\ |A|=1 \end{cases}$

相似矩阵 $A\sim B$ $P^{-1}AP=B$（P可逆，A，B为方阵）$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_A=\lambda_B,\ r(A)=r(B) \\ |A|=|B|,\ tr(A)=tr(B) \\ A\sim B,\ B\sim C \Rightarrow A\sim C \end{cases}$

合同矩阵 $A\simeq B$ $\exists C$ 可逆，使 $C^TAC=B$ $\Leftrightarrow$ A与B正负惯性指数相同

正定矩阵A $\forall \vec{k}\neq\vec{0}$，$f(\vec{k})=k^TAk>0$

判定1：（充要）A的n个特征值全为正 判定2：（充要）$A\simeq E$

判定3：（充要）主对角元素为正 判定4：（充要）n个顺序主子式 >0

6、矩阵的秩 $R(A)=r$ （$\exists\ r$ 阶子式 $D\neq 0$ 且 $D_{r+1}=0$）

满秩矩阵 方阵 $R(A)=n$ $\longleftrightarrow$ 降秩矩阵

7、行阶梯形矩阵 $\Rightarrow$ 行最简形矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

标准形 $R(A)=r$，$A=\begin{pmatrix} E_{r\times r} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} \end{pmatrix}$

8、逆矩阵 $AB=BA=E$ （方阵）

伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$、$AA^*=A^*A=\begin{pmatrix} |A| & & 0 \\ & |A| & \\ 0 & & \ddots\ |A| \end{pmatrix}=|A|E \Rightarrow A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$

9. 向量组线性无关/相关

最大线性无关组

10. 正交向量组 （非零+两两正交的一组向量）

11. 线性方程组的系数矩阵A，增广矩阵 $\bar{A}=(A\,|\,\beta)$

12. 特征值λ，特征向量 T . $Tx=\lambda x$

13. 二次型 $f(x)=x^TAx$

14. 正定矩阵 $\forall\ \vec{x}\neq\vec{0}$，$f(\vec{x})>0$

半正定、(半)负定、不定

15. 顺序主子式：n阶方阵A的i阶顺序主子式 $D_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$

n阶方阵的n个顺序主子式均为正 $\Rightarrow$ 正定矩阵

16 矩阵的迹：$\operatorname{tr}\overset{n\times n}{(A)}=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ $\qquad \operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$

$\operatorname{tr}(A^T)=\operatorname{tr}(A)$， $\operatorname{tr}(XY^T)=\operatorname{tr}(X^TY)=\operatorname{tr}(YX^T)=\operatorname{tr}(Y^TX)$

17. 矩阵的正负惯性指数：正负λ个数

实二次型正负惯性指数：系数为正/负的 a_{ii}^2 个数

link

$$\text{线性无关向量组}\ \underset{\triangle}{A} \xrightarrow{\text{施密特正交化}} \text{正交向量组}\ \underset{\triangle}{B}$$

其中α_i, β_j均为向量

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\ (m \le n)$ 是 R^n 中的一个线性无关向量组，若令

$$\beta_1 = \alpha_1$$
$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1$$
$$\cdots$$
$$\beta_m = \alpha_m - \frac{\langle \alpha_m, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 - \frac{\langle \alpha_m, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle}\beta_2 - \cdots - \frac{\langle \alpha_m, \beta_{m-1} \rangle}{\langle \beta_{m-1}, \beta_{m-1} \rangle}\beta_{m-1}$$

则$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 就是一个 正交向量组，若再令

$$e_i = \frac{\beta_i}{||\beta_i||}(i = 1, 2, \cdots, m)$$

就得到一个标准正交向量组$e_1, e_2, \cdots, e_m$ ，且该向量组与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 等价。[1]

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$\beta_1 = 1,\quad \beta_2 = x - \frac{x}{1} \cancel{\cdot 1 = 0}$?

α_i, β_j 是向量而非数值

例 1 用施密特 正交化方法，将向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **标准正交化.**

解 正交化

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

单位化

$$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

link 二次型 $\longrightarrow$ 矩阵

$$f = x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_1x_2 + 3x_2x_3$$
$$= 1\,x_1^2 + -3\,x_2^2 + 0\,x_3^2 + 2\times(-2)x_1x_2 + 2\times 0\,x_1x_3 + 2\times\frac{3}{2}x_2x_3$$

$$\therefore f = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$