《数值计算》期中测验试卷

姓名：__________　学号 ____________　专业 _____________

1. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数,即误差限不超过最后一位的半个单位,试指出它们各有几位有效数字: ✓

   $x_1=1.00102,\ x_2=0.031,\ x_3=63.5,\ x_4=0.002,\ x_5=6\times1.0$ (6 为精确数)

2. 计算园面积时，要使相对误差限为 1%，问度量半径 R 时允许的相对误差限是多少? ✓

3. 为求方程 $x^2-e^x+2=0$ 在 $x_0=1.3$ 附近的一个根，设将方程改写成下列等价形式，并建立相应的迭代公式。

   1） $x=\ln(2+x^2)$，迭代公式 $x_{k+1}=\ln(2+x_k^2)$； ✓

   2） $x=\sqrt{e^x-2}$，迭代公式 $x_{k+1}=\sqrt{e^{x_k}-2}$；

   3） $x=\dfrac{e^x-2}{x}$，迭代公式 $x_{k+1}=\dfrac{e^{x_k}-2}{x_k}$。

试分析每种迭代公式的收敛性，并构造其 Newton 求根公式。

4. 已知节点数据: ✓

时间 t (秒)	0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
距离 s (米)	0	0	20	40	60	50

试求其 Newton 插值公式.

5. 证明：若 $f(x)\in C^4[x_i,x_{i+1}]$, $H(x)$ 是分段三次埃尔米特插值函数，则其插值余项为 此类证明构造多个 $F(t_i)=0$, $F'(p_i)=0$, $F''(q_i)=0$……运用罗尔定理证明

$$f(x)-H(x)=\frac{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2}{4}f^{(4)}(\xi_i)\ ,\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$$

$$F(z)=f(z)-H(z)-\frac{(z-x_i)^2(z-x_{i+1})^2}{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2}[f(x)-H(x)]$$

1° 当 $z=x_i$ 或 x_{i+1} ✓

2° $x_i<z<x_{i+1}$　$F(x_i)=F(x_{i+1})=F(x)=0$ ⇓ $F'(a)=F'(b)=0$

$F'(x_i)=F'(x_{i+1})=0$

$\Rightarrow F''(c)=F''(d)=F''(e)=0$

$\Rightarrow F'''(f)=F'''(g)=0 \Rightarrow F''''(h)=0$

又 $F^{(4)}(h)=f^{(4)}(h)-0-\dfrac{4}{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2}[f(x)-H(x)]$

$\therefore f(x)-H(x)=\dfrac{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2}{4}f^{(4)}(\xi)$

6. 试求$[a,b]$上的插值函数 $p(x)$，使得

$$p(a)=f(a),\ p(b)=f(b),\ p'(\frac{a+b}{2})=m$$

其中 $f(a), f(b), m$ 为已知量。

法一：二次牛顿插值

设 $f(\frac{a+b}{2})=t$，下求 t

$p_2(x)=f(a)+\dfrac{t-f(a)}{\frac{b-a}{2}}(x-a)+2\dfrac{f(a)+f(b)-2t}{(b-a)^2}(x-a)(x-\frac{a+b}{2})$

$p_2'(x)=2\dfrac{t-f(a)}{b-a}+2\dfrac{f(a)+f(b)-2t}{(b-a)^2}(2x-a-\frac{a+b}{2})$

$p_2'(\frac{a+b}{2})=2\dfrac{t-f(a)}{b-a}+2\dfrac{f(a)+f(b)-2t}{(b-a)^2}\dfrac{b-a}{2}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=m$

(无解 X)

法二：改进二次牛顿插值

设 $p(x)=f(a)+\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)+A(x-a)(x-b)$

代入 $p'(\frac{a+b}{2})$ 得 A

法三：埃米尔特插值构造

$p(x)=f(a)h_1(x)+f(b)h_2(x)+mh_3(x)$

对 $f(a)$，要使 $h_1(a)=1$，$h_2(a)=h_3(a)=0$

对 $f(b)$，　$h_2(b)=1$，$h_1(b)=h_3(b)=0$

对 m，　$h_1'(\frac{a+b}{2})=h_2'(\frac{a+b}{2})=0$，$h_3'(\frac{a+b}{2})=1$

待定系数即可

法四：$\alpha(x)=\dfrac{x-b}{a-b}f(a)+\dfrac{a-x}{a-b}f(b)$

$\beta(x)=M(x-a)(x-b)$

$p(x)=\alpha(x)+\beta(x)$

代入 $p'(\frac{a+b}{2})$ 求 M

结果同法二