

## 复习题

在香烟过滤嘴模型中,

(1) 设  $M = 800 \text{ mg}$ ,  $l_1 = 80 \text{ mm}$ ,  $l_2 = 20 \text{ mm}$ ,  $b = 0.02 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta = 0.08 \text{ s}^{-1}$ ,  $v = 50 \text{ mm/s}$ ,  $\alpha = 0.3$ , 求  $Q$  和  $Q_1/Q_2$ .

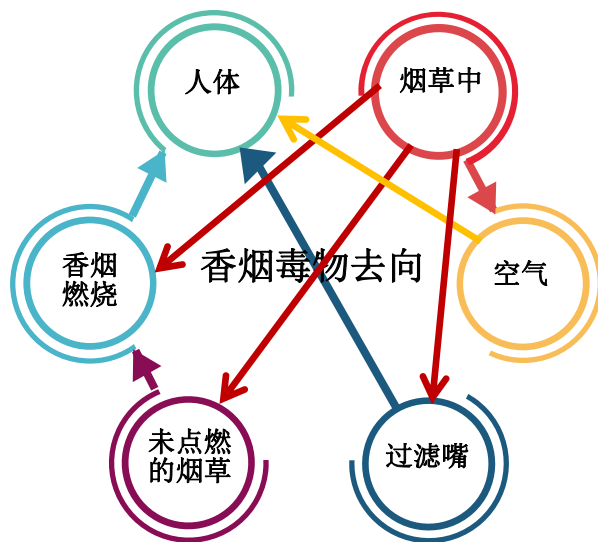
(2) 若有一支不带过滤嘴的香烟, 参数同上. 比较全部吸完和只吸到  $l_1$  处的情况下, 进入人体毒物量的区别.

## 解答:

### 一. 问题分析:

吸烟者实际的吸烟过程非常复杂并且因人而异, 点燃处**毒物随烟雾进入空气**和**沿香烟穿行**的数量比例, 与**吸烟的方式、环境**等多种因素有关; 烟雾穿过香烟的速度随着**吸烟动作**的变化而不断地改变; 过滤嘴和烟草对毒物的吸收作用也会随**烟雾穿行速度**等因素的影响而有所变化.

先尝试分析人在吸烟时**毒物进入人体**的过程: 毒物均匀地分布在**烟草**中, 吸烟时点燃处的烟草大部分化为烟雾, 毒物由烟雾携带着一部分直接进入**空气**, 另一部分**沿香烟穿行**. 在穿行过程中又部分地被**未点燃的烟草**和**过滤嘴**吸收而沉积下来, 剩下的进入人体. 被烟草吸收而沉积下来的那一部分毒物, 当**香烟燃烧**到那里的时候又通过烟雾部分进入空气, 部分沿香烟穿行, 这个过程一直继续到香烟燃烧至过滤嘴处为止. 于是我们看到, 原来分布在烟草中的毒物除了进入空气和被过滤嘴吸收的一部分外, 剩下的全都被人体吸入. 上述过程如下图所示:



为了能建立一个便于定量计算的模型, 可以设想吸烟者的动作、方式及外部环境在整个过程中不变. 于是可以认为**毒物随烟雾进入空气和沿香烟穿行的数量比例**、**烟雾穿行的速度**、**过滤嘴和烟草对毒物的吸收率**等在吸烟过程中都是常数.

### 二. 模型假设:

基于上述分析, 建立微分方程模型, 假设如下:

1. 烟草和过滤嘴的长度分别是  $l_1$  和  $l_2$ , 香烟总长  $l = l_1 + l_2$ , 毒物  $M$  (单位: mg) 均匀分布在烟草

中，密度为  $w_0=M/l_1$ .

2.点燃处毒物随烟雾进入空气和沿香烟穿行的数量比例是  $a':a$ ，其中  $a'+a=1$ .

3.未点燃的烟草和过滤嘴对随烟雾穿行的毒物的吸收率（单位时间内毒物被吸收的比例）分别是常数  $b$  和  $\beta$ .

4.烟雾沿香烟穿行的速度是常数  $v$ ，香烟燃烧速度是常数  $u$ ，且  $v \gg u$ .

5.记  $Q$  为将一支烟吸完后毒物进入人体的总量（不考虑从空气的烟雾中吸入的），下面分析  $Q$  与哪些因素有关：

首先，提高过滤嘴吸收率  $\beta$ 、增加过滤嘴长度  $l_2$ ，减少烟草中毒物的初始含量  $M$ ，显然可以降低吸入毒物量  $Q$ 。其次，当毒物随烟雾沿香烟穿行的比例  $a$  和烟雾速度  $v$  减小时，预料  $Q$  也会降低。至于在假设条件中涉及的其他因素，如烟草对毒物的吸收率  $b$ 、烟草长度  $l_1$ 、香烟燃烧速度  $u$  对  $Q$  的影响不易估计。

### 三. 符号说明：

符号	含义
$l/l_1/l_2$	香烟/烟草/过滤嘴长度
$M$	一支香烟中的毒物含量/mg
$w_0$	烟草中的毒物密度
$a':a$ ( $a'+a=1$ )	毒物进入空气和沿香烟穿行的数量比例
$b$	未点燃的烟草对随烟雾穿行的毒物的吸收率
$\beta$	过滤嘴对随烟雾穿行的毒物的吸收率
$v$	烟雾沿香烟穿行的速度
$u$	香烟燃烧速度
$Q$	一支烟吸完后毒物进入人体的总量

### 四. 模型建立：

设  $t=0$  时，在  $x=0$  处点燃香烟，坐标系如图 1 所示。吸入毒物量  $Q$  由毒物穿过香烟的流量确定，后者又与毒物在烟草中的密度有关，为研究这些关系,定义两个基本函数：

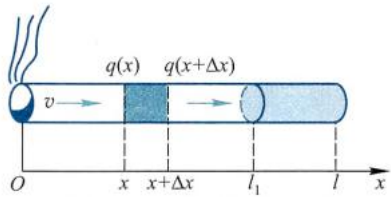


图 1  $x=0$  处点燃的香烟

**毒物流量  $q(x,t)$ :** 表示时刻  $t$  时单位时间内通过香烟截面  $x$  处( $0 \leq x \leq l$ )的毒物量;

**毒物密度  $w(x,t)$ :** 表示时刻  $t$  时截面  $x$  处单位长度烟草中的毒物含量 ( $0 \leq x \leq l$ ); 由假设 1 可知,  $w(x,0)=w_0$

如果知道了毒物流量  $q(x,t)$  函数，吸入毒物量  $Q$  就是  $x=l$  处的流量在吸一支烟时间内的总和。根据假设 1、4，我们得到：

$$Q = \int_0^T q(l,t)dt, \quad T = l1/u \tag{1}$$

下面分步计算  $Q$ :

**Step1:** 当  $t=0$  的瞬间, 由烟雾携带的毒物在单位时间内通过  $x$  处的数量为  $q(x,0)$ 。由假设 4 中关于  $u \gg v$  的假设, 我们认为香烟点燃处  $x=0$  静止不动。考察  $(x, x+\Delta x)$  一段香烟, 毒物通过  $x$  和  $x+\Delta x$  处的流量分别是  $q(x,0)$  和  $q(x+\Delta x,0)$ , 根据守恒定律,  $q(x+\Delta x,0)$  和  $q(x,0)$  之差等于这一段未点燃的烟草或过滤嘴对毒物的吸收量, 于是由假设 2 和 4 有:

$$q(x,0) - q(x+\Delta x,0) = \begin{cases} -bq(x,0)\Delta t, & 0 \leq x \leq l_1 \\ \beta q(x,0)\Delta t, & l_1 < x \leq l \end{cases} \quad \Delta t = \frac{\Delta x}{v}$$

其中  $\Delta t$  是烟雾穿过  $\Delta x$  所需时间。当  $\Delta t \rightarrow 0$ , 可得微分方程:

$$\frac{dq}{dx} = \begin{cases} -\frac{b}{v}q(x,0), & 0 \leq x \leq l_1 \\ -\frac{\beta}{v}q(x,0), & l_1 < x \leq l \end{cases} \quad (2)$$

在  $x=0$  处点燃的烟草单位时间内放出的毒物量记作  $H_0$ , 根据假设 1、3、4 可以写出方程(2)的初始条件为:

$$q(x,0) = aH_0, \quad H_0 = uw_0 \quad (3)$$

联立(2), (3)式求解得:

$$q(x,0) = \begin{cases} aH_0 e^{-\frac{bx}{v}}, & 0 \leq x \leq l_1 \\ aH_0 e^{-\frac{bl_1}{v}} e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1 < x \leq l \end{cases} \quad (4)$$

**Step2:** 在香烟燃烧过程的任意时刻  $t$ , 求毒物单位时间内通过  $x=l$  的数量  $q(l,t)$ 。

因为在时刻  $t$  香烟燃至  $x=ut$  处, 记此时点燃的烟草单位时间放出的毒物量为  $H(t)$ , 则:

$$H(t) = uw(ut, t) \quad (5)$$

分析同上, 可得:

$$q(x,t) = \begin{cases} aH_0 e^{-\frac{b(x-ut)}{v}}, & 0 \leq x \leq l_1 \\ aH_0 e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}} e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1 < x \leq l \end{cases} \quad (6)$$

由(5), (6)式可得:

$$q(l,t) = auw(ut, t) e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}} e^{-\frac{\beta(l-l_1)}{v}} \quad (7)$$

**Step3: 求  $w(ut, t)$**

因为在吸烟过程中未点燃的烟草不断地吸收烟雾中的毒物, 所以毒物在烟草中的密度  $w(x,t)$  由初始值  $w_0$  逐渐增加。考察烟草截面  $x$  处  $\Delta t$  时间内毒物密度的增量  $w(x, t+\Delta t) - w(x, t)$ , 根据守恒定律它应该等于单位长度烟雾中的毒物被吸收的部分, 按照假设 2、4, 有:

$$w(x, t+\Delta t) - w(x, t) = b \frac{q(x, t)}{v} \Delta t$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$ , 带入(5)(6)式可得微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{abu}{v} w(ut, t) e^{-\frac{b(x-ut)}{v}} \\ w(x, 0) = w_0 \end{cases} \quad (8)$$

解(8)式可得

$$\begin{cases} w(x, t) = w_0 \left[ 1 + \frac{a}{a'} e^{-\frac{bx}{v}} \left( e^{\frac{but}{v}} - e^{-\frac{abut}{v}} \right) \right] \\ w(ut, t) = \frac{w_0}{a'} (1 - ae^{-\frac{a'but}{v}}) \end{cases} \quad (9)$$

由假设 2 知，其中  $a+a'=1$

**Step4: 计算 Q 的表达式**

联立(1)(7)(9)式积分得：

$$Q = \int_0^{l_1/u} q(l, t) dt = \frac{aw_0v}{a'b} e^{-\frac{\beta l_2}{v}} (1 - e^{-\frac{a'bl_1}{v}}) \quad (10)$$

记  $r = \frac{a'bl_1}{v}$ ,  $\varphi(r) = \frac{1-e^{-r}}{r}$ , 则：

$$Q = aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}} \varphi(r) \quad (11)$$

其表示了吸入毒物量 Q 与 a, M,  $\beta$ ,  $l_2$ , v, b,  $l_1$  等变量之间的数量关系。

## 五. 问题解答：

(1) 当 M=800,  $l_1=80$ ,  $l_2=20$ , b=0.02,  $\beta=0.08$ , v=50, a=0.3 时,

$a'=1-a=0.7$ ,  $r=0.0224$

Q=229.85mg,

Q1/Q2=0.97598

(2) 若有一支不带过滤嘴的香烟，全部吸完与只吸到  $l_1$  处进入人体毒物量之比为

$$\frac{\frac{bl}{e^{\frac{bl}{v}}} - e^{-\frac{abl}{v}}}{\frac{bl_1}{e^{\frac{bl_1}{v}}} - e^{-\frac{abl_1}{v}}} = 1.2532$$