考试教室　姓名　学号　年级　专业、班　学院

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　封　线

重庆大学《数值计算》课程试卷（B 卷）

2019 — 2020 学年　第 2 学期

开课学院：计算机　课程号：CST21301　考试日期：2020.09

考试方式：开卷　　考试时间：120 分钟

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、（18 分，3 分/每小题）填空题

1. 数值计算中，绝对值 太小 的数不宜作除数。

2. 计算圆面积要使相对误差限为 1%，则度量半径 R 时允许的相对误差限约为 0.499%（提示：圆面积 $S = \pi R^2$）

$\left|1-\left(\frac{R^*}{R}\right)^2\right| \le 1\%$

$0.99498 \le \frac{R^*}{R} \le 1.00498$

$\left|1-\frac{R^*}{R}\right| \le$

0.5%　0.4%

3. 已知 $f(x)$ 函数值列表如下

x	0	1	2
$f(x)$	3	−1	2

则其拉格朗日多项式 $P(x)$为：

$P(x) = \frac{3(x-1)(x-2)}{2} + \frac{x(x-2)}{1} + \frac{x(x-1)}{1}$。

$= \frac{7}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + 3$

4. 已知向量$x = (-2, 1, 4)$，则 $\|x\|_2 = \sqrt{21}$。

5. 代数方程 $2x - sinx = 0$ 的牛顿求根迭代公式为

$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n - \sin x_n}{2 - \cos x_n}$。

6. 2 阶 B 样条函数 $M_2 = \begin{cases} 1-|x| & |x|<1 \\ 0 & |x|\ge 1 \end{cases}$。

$\sum_{k=0}^{2}(-1)^k C_2^k (x+1-k)_+$

二、（12 分）数值积分计算

1. 试用三点 Gauss-Legendre 公式写出下面积分的数值积分计算公式

$$I = \int_0^2 \frac{sinx}{x}dx$$

2. 试用四点 Gauss-Hermite 公式写出下面积分的数值积分计算公式

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} sin^2x\, dx$$

权函数　$f(x) = \sin^2 x$

1. 对x作变换 $x = t+1$，$-1 \le t \le 1$

$I = \int_{-1}^{1} \frac{\sin(t+1)}{t+1} dt = 0.88889 f(0) + 0.55556[f(\pm 0.774597)] = 1.60542$

2. $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin^2 x\, dx$

$= \frac{1}{2}[0.80491 \cdot f(\pm 0.52464) + 0.081312 \cdot f(\pm 1.65061)]$

$= \cancel{0.158659}$

0.282755

命题人：周尚波

组题人：冯永

审题人：钟将

命题时间：2020.06.06

教务处制

三、（15 分）试求$[a,b]$上的 2 次插值多项式 $p(x)$，使得

$$p(a)=f(a), p(b)=f(b), p'(a)=p'(b)/2$$

其中$f(a)$、$f(b)$为已知量，$p'(a)$、$p'(b)$未知。

设 $p(x)=\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{a-x}{a-b}f(b)+A(x-a)(x-b)$

$$p'(x)=\frac{f(a)}{a-b}-\frac{f(b)}{a-b}+A(2x-a-b)$$

代入 $p'(a)=\frac{p'(b)}{2}$ 得 $2A(a-b)+\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=A(b-a)$

$$\therefore A=-\frac{f(a)-f(b)}{3(a-b)^2}$$

$$\cancel{\therefore p(x)=-2x^2+\left[2(a+b)+\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right]x+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}-2ab}$$

$$D\vec{x}^{(k+1)}=\vec{b}-L\vec{x}^{(k+1)}-U\vec{x}^{(k)}$$

$$\vec{x}^{(k+1)}=(D+L)^{-1}\vec{b}-(D+L)^{-1}U\vec{x}^{(k)}$$

$$D+L=\begin{pmatrix}8&0&0\\1&-4&0\\3&-2&-5\end{pmatrix} \qquad (D+L)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{8}&0&0\\\frac{1}{32}&-\frac{1}{4}&0\\-\frac{5}{16}&\frac{1}{10}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

四、（15 分）已知

$$-(D+L)^{-1}U=\begin{pmatrix}-\frac{1}{8}&0&0\\-\frac{1}{32}&\frac{1}{4}&0\\\frac{5}{16}&-\frac{1}{10}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-6&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{3}{4}&-\frac{1}{8}\\0&\frac{3}{16}&\frac{15}{32}\\0&-\frac{15}{8}&\frac{9}{80}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}8x_1-6x_2+x_3=0\\x_1-4x_2+2x_3=1\\3x_1-2x_2-5x_3=1\end{cases}$$

试写出求解该线性方程组的高斯−塞德尔迭代格式，并写出其迭代矩阵。

$$D=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&-4&0\\0&0&-5\end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\3&-2&0\end{pmatrix}.\quad U=\begin{pmatrix}0&-6&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{8}&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0\\0&0&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{8}(6x_2^{(k)}-x_3^{(k)})\\x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(x_1^{(k+1)}+2x_3^{(k)}-1)\\x_3^{(k+1)}=\frac{1}{5}(3x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k+1)}-1)\end{cases} \qquad B=\begin{pmatrix}0&\frac{3}{4}&-\frac{1}{8}\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{2}\\\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}&0\end{pmatrix}$$

$$x_2^{(k+1)}=\frac{3}{16}x_2^{(k)}-\frac{1}{16}x_3^{(k)}+\frac{1}{2}x_3^{(k)}-\frac{1}{4}$$

$$x_3^{(k+1)}=\frac{9}{20}x_2^{(k)}-\frac{3}{40}x_3^{(k)}-\frac{3}{40}x_2^{(k)}+\frac{1}{40}x_3^{(k)}-\frac{1}{10}$$

五、（20 分）用单纯形法求解以下生产组织与计划问题。某厂要生产 B_1、B_2 两种产品。制造 1kg 产品 B_1 的利润 7 万元，1kg 产品 B_2 的利润 12 万元，而所消耗的煤 A_1（T），电 A_2（kW），工时 A_3(d)，列表如下：

	B_1	B_2
A_1	9	4

A_2	**4**	**5**
A_3	**3**	**10**

若煤、电、工时的资源约束分别为 360T、200kW、300d，问该厂应生产产品 B_1 和 B_2 各多少公斤，才能获得最大利润？

六、（20 分）已知初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 - y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

取步长 $h = 0.1$，试写出求解该初值问题的改进 Euler 方法的数值公式，并计算 $x(h), y(h)$ 的值。