

问题重述:

2. 选择战斗机.待测评或购买的战斗机有 4 种备选型号 A_1, A_2, A_3, A_4 , 已确定的属性为:最高速度 X_1 (马赫)、航程 X_2 (10^3 n mile)、最大载荷 X_3 (10^3 lb)、价格 X_4 (10^6 美元)、可靠性 X_5 、机动性 X_6 . 4 种战斗机对 6 个属性的定量取值或定性表述如下表^[30].

备选方案	属性					
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
A_1	2.0	1.5	20	5.5	中	很高
A_2	2.5	2.7	18	6.5	低	中
A_3	1.8	2.0	21	4.5	高	高
A_4	2.2	1.8	20	5.0	中	中

根据以下要求确定最终决策(优劣排序和数值结果):

- (1) 对属性 X_5, X_6 的定性表述给以定量化,对“很高”、“高”、“中”、“低”、“很低”分别给以分值 9,7,5,3,1,或者分别给以分值 5,4,3,2,1.
- (2) 属性权重主观地给定为 0.2,0.1,0.1,0.1,0.2,0.3,或者对决策矩阵用信息熵方法得到.
- (3) 对决策矩阵归一化、最大化、模一化.
- (4) 用加权和法、加权积法、TOPSIS 方法计算方案对目标的权重.

问题分析:

这是一个需要利用层次分析法求解的多属性决策问题。利用层次分析法，建立属性矩阵。

模型建立:

对属性 X_5, X_6 中的“很高”、“高”、“中”、“低”、“很低”分别给以分值 9、7、5、3、1。得到原始的决策矩阵如下:

$$D = \begin{pmatrix} 2.0 & 1.5 & 20 & \frac{1}{5.5} & 5 & 9 \\ 2.5 & 2.7 & 18 & \frac{1}{6.5} & 3 & 5 \\ 1.8 & 2.0 & 21 & \frac{1}{4.5} & 7 & 7 \\ 2.2 & 1.8 & 20 & \frac{1}{5.0} & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

下将决策矩阵归一化、最大化、模一化，有公式（1）（2）（3）如下:

$$rij = \frac{dij}{\sum_{i=1}^m dij} \tag{1}$$

$$rij = \frac{dij}{\max_{i=1,2,...,m} dij} \tag{2}$$

$$r_{ij} = \frac{d_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m d_{ij}^2}} \quad (3)$$

根据公式（1）将决策矩阵 D 归一化得：

$$R1 = \begin{pmatrix} 0.2353 & 0.1875 & 0.2532 & 0.2399 & 0.2500 & 0.3462 \\ 0.2941 & 0.3375 & 0.2278 & 0.2030 & 0.1500 & 0.1923 \\ 0.2118 & 0.2500 & 0.2658 & 0.2932 & 0.3500 & 0.2692 \\ 0.2588 & 0.2250 & 0.2532 & 0.2639 & 0.2500 & 0.1923 \end{pmatrix}$$

根据公式（2）将决策矩阵 D 最大化得：

$$R2 = \begin{pmatrix} 0.8000 & 0.5556 & 0.9524 & 0.8182 & 0.7143 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 & 0.8571 & 0.6923 & 0.4286 & 0.5556 \\ 0.7200 & 0.7407 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.7778 \\ 0.8800 & 0.6667 & 0.9524 & 0.9000 & 0.7143 & 0.5556 \end{pmatrix}$$

根据公式（3）将决策矩阵 D 模一化得：

$$R3 = \begin{pmatrix} 0.4671 & 0.3662 & 0.5056 & 0.4757 & 0.4811 & 0.6708 \\ 0.5839 & 0.6591 & 0.4550 & 0.4025 & 0.2887 & 0.3727 \\ 0.4204 & 0.4882 & 0.5308 & 0.5814 & 0.6736 & 0.5217 \\ 0.5139 & 0.4394 & 0.5056 & 0.5232 & 0.4811 & 0.3727 \end{pmatrix}$$

模型求解：

下使用给定的 $w=[0.2, 0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.3]$ 作为属性权重。为了将决策矩阵和属性权重综合得到最优方案及其排序，采用加权和法和加权积法，有如下两个式子：

$$v_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} * w_j \quad (4)$$

$$v_i = \prod_{j=1}^n d_{ij}^{w_j} \quad (5)$$

对 R1、R2、R3 依次使用（4）式求解加权和，可得：

$$V1=[0.2651, 0.2290, 0.2699, 0.2360]$$

$$V2=[0.8426, 0.7349, 0.8581, 0.7579]$$

$$V3=[0.5208, 0.4505, 0.5301, 0.4641]$$

对 R4 使用（5）式求解加权积，得：

$$V4=[2.7479, 2.3459, 2.8125, 2.4705]$$

对 R3 使用 TOPSIS 法求解相对接近度得到：

$$V5=[0.2913, 0.2161, 0.2604, 0.2322]$$

综上，用加权和法与加权积法得到的方案优先排序为 A3, A1, A4, A2；用 TOPSIS 法得到的方案优先排序为 A1, A3, A4, A2。