考试教室____ 姓名____ 学号____ 年级____ 专业、班____ 学院____

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密 封 线

重庆大学《数值计算》课程试卷（A 卷）

2019 — 2020 学年 第 2 学期

开课学院：计算机 课程号：CST21301 考试日期：2020.06.15

考试方式：开卷 考试时间：120 分钟

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、（15 分，3 分/每小题）填空题

1. 设计一个数值算法时，应避免两个__相近__的数相减。

2. 矩阵 A 有如下三角分解：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&-1\\0&0&3\end{bmatrix}$$

则方程组 $A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ 的解为 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$。

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}y=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$y=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&-1\\0&0&3\end{pmatrix}x$$

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&-1\\-2&0&3\end{pmatrix}$$

3. 设牛顿插值公式的差商表如表 1 所示.

表 1：差商表

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0.0	0.0			
1.0	1.0	1.0		
2.0	3.0	2.0	0.5	
3.0	6.0	3.0	0.5	0.0

请完善该差商表。 $0.0+1.0(x-0)+0.5(x-0)(x-1)+0.0(x-0)(x-1)(x-2)$

4. 以上题表 1 为差商表的牛顿插值多项式 $P(x)$为：

$P(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$。

5. 代数方程 $2sinx-e^x=0$ 的牛顿求根迭代公式为

$x_{n+1}=x_n-\frac{2\sin x_n-e^{x_n}}{2\cos x_n-e^{x_n}}$。

二、（15 分）已知求积公式

$$\int_0^a f(x)\,dx=\frac{2a}{3}f(0)+\frac{a}{3}f(a)+\frac{a^2}{6}f'(0)$$

试讨论该求积公式具有几阶代数精度。

对 $f(x)=1$，左式 $=a=$ 右式

对 $f(x)=x$，左式 $=\frac{a^2}{2}=$ 右式

对 $f(x)=x^2$，左式 $=\frac{a^3}{3}=$ 右式

对 $f(x)=x^3$，左式 $=\frac{a^4}{4}\neq$ 右式 $=\frac{5}{6}a^4$

∴代数精度为 2

命题人：周尚波

组题人：冯永

审题人：钟将

命题时间：2020.06.06

教务处制

三、（15 分）试求[0,1]上的3 次插值多项式 $p(x)$，使得

$$p(0)=f(0), p(1)=f(1), p'(0)=0, p''(0)=p''(1)$$

其中$f(0)$、$f(1)$为已知量，$p''(0)$、$p''(1)$未知。

设 $p(x)=\frac{x-0}{1-0}f(1)+\frac{1-x}{1-0}f(0)+Ax(x-1)+Bx^2(x-1)$

即 $p(x)=xf(1)+(1-x)f(0)+Ax(x-1)+Bx^2(x-1)$

则 $p'(x)=f(1)-f(0)+A(2x-1)+B(3x^2-2x)$

$p''(x)=2A+B(6x-2)$

代入 $p'(0)=0$，$p''(0)=p''(1)$ 得

$$\begin{cases} A=f(1)-f(0) \\ B=0 \end{cases}$$

不满足3次-- 问题出在p''中A不受x控制

修改：$p(x)=xf(1)+(1-x)f(0)+Ax^2(x-1)+Bx(x-1)^2$

$p'(x)=f(1)-f(0)+A(3x^2-2x)+B(3x^2-4x+1)$

$p''(x)=A(6x-2)+B(6x-4)$

代入 $p'(0)=0$，$p''(0)=p''(1)$ 得

$$\begin{cases} A=f(1)-f(0) \\ B=f(0)-f(1) \end{cases}$$

$xf(1)+f(0)-f(0)x$

$\Rightarrow p(x)=(f(1)-f(0))x^3+f(0)$

检验：$p(0)=f(0)$，$p(1)=f(1)$，

$p'(0)=0$，$p''(0)=p''(1)$

(emmm... 题目原因，无法3次)

四、（15 分）已知

$$\begin{cases} 5x_1-2x_2-10x_3=-1 \\ x_1-4x_2+2x_3=1 \\ 16x_1-10x_2+x_3=0 \end{cases}$$

试设计一个求解该线性方程组的 Jacobi 迭代格式，并说明迭代是否收敛。

$x^{(0)}=(0,0,0)$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{5}(2x_2^{(k)}+10x_3^{(k)}-1) \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(x_1^{(k)}+2x_3^{(k)}-1) \\ x_3^{(k+1)}=-16x_1^{(k)}+10x_2^{(k)} \end{cases}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & 2 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ -16 & 10 & 0 \end{pmatrix} \qquad |B-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{2}{5} & 2 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ -16 & 10 & -\lambda \end{vmatrix}=-64\lambda^3-\frac{8608}{5}\lambda+\frac{576}{5}$$

$\Rightarrow \lambda_1=0.0669$，$\lambda_2,\lambda_3=-0.0334\pm 5.1868i$

$\rho(B)=5.1869>1$

$\therefore$ 不收敛

(预先处理方程组 $\begin{cases} 16x_1-10x_2+x_3=0 \\ x_1-4x_2+2x_3=1 \\ 5x_1-2x_2-10x_3=-1 \end{cases}$ 即可收敛)

五、（20 分）试用单纯形法解下列线性规划问题：

$$\max\ F = 3x + 4y$$
$$s.t\quad 2x + y < 40$$
$$x + 3y < 30$$
$$x, y \geq 0$$

六、（20 分）已知初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$f(t, x, y) = y$

$g(t, x, y) = -x + y$

$t_n = 0.1n\ (0 \le n \le 10)$

取步长 $h = 0.1$, 试写出求解该初值问题一个三阶 Runge-Kutta 方法的数值公式，并计算 $x(h), y(h)$ 的值。

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{1}{60}(K_1 + 4K_2 + K_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{60}(M_1 + 4M_2 + M_3) \end{cases}$$

t为自变量，

x, y 为因变量

$$\begin{cases} K_1 = f(t_n, x_n, y_n) \\ M_1 = g(t_n, x_n, y_n) \\ K_2 = f(t_n + 0.05, x_n + 0.05K_1, y_n + 0.05M_1) \\ M_2 = g(t_n + 0.05, x_n + 0.05K_1, y_n + 0.05M_1) \\ K_3 = f(t_n + 0.1, x_n - 0.1K_1 + 0.2K_2, y_n - 0.1M_1 + 0.2M_2) \\ M_3 = g(t_n + 0.1, x_n - 0.1K_1 + 0.2K_2, y_n - 0.1M_1 + 0.2M_2) \end{cases}$$

$t_0 = 0$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$

$K_1 = f(t_0, x_0, y_0) = f(0, 1, 0) = 0$,　$M_1 = g(0, 1, 0) = -1$

$K_2 = f(0.05, 1, -0.05) = -0.05$,　$M_2 = g(0.05, 1, -0.05) = -1.05$

$K_3 = f(0.1, 0.99, -0.11) = -0.11$.　$M_3 = g(0.1, 0.99, -0.11) = -1.1$

$x(0.1) = x(0) + \frac{1}{60}(0 - 0.2 - 0.11) = 0.99483$

$y(0.1) = y(0) + \frac{1}{60}(-1 - 4.2 - 1.1) = -0.105$