1. P104 复习题

问题重述：

考虑以下“食谱问题”[72]：某学校为学生提供营养套餐，希望以最小费用来满足学生对基本营养的需求.按照营养学家的建议，一个人一天对蛋白质、维生素 A 和钙的需求如下：50 g 蛋白质、4 000 IU（国际单位）维生素 A 和 1 000 mg 钙.我们只考虑以下食物构成的食谱：苹果、香蕉、胡萝卜、枣汁和鸡蛋，其营养含量见下表.确定每种食物的用量，以最小费用满足营养学家建议的营养需求，并考虑：

（1）对维生素 A 的需求增加一个单位时，是否需要改变食谱？成本增加多少？如果对蛋白质的需求增加 1 g 呢？如果对钙的需求增加 1 mg 呢？

（2）胡萝卜的价格增加 1 角时，是否需要改变食谱？成本增加多少？

食物	单位	蛋白质/g	维生素 A/IU	钙/mg	价格/角
苹果	138 g/个（中等大小）	0.3	73	9.6	10
香蕉	118 g/个（中等大小）	1.2	96	7	15
胡萝卜	72 g/个（中等大小）	0.7	20 253	19	5
枣汁	178 g/杯	3.5	890	57	60
鸡蛋	44 g/个（中等大小）	5.5	279	22	8

问题分析：

该问题是一个最优化问题，目标是用最小费用来满足营养家建议的学生对基本营养的需求。求解方法为线性规划，先建立目标函数关系式，再写出约束条件。

模型建立：

设每天购买的苹果、香蕉、胡萝卜、枣汁、鸡蛋的量分别为 a、b、c、d、e, 总支出为 z，则由题意可得模型：

$$\min z = 10a + 15b + 5c + 60d + 8e$$

$$\text{s.t. } 0.3a + 1.2b + 0.7c + 3.5d + 5.5e \geq 50$$

$$73a + 96b + 20253c + 890d + 279e \geq 4000$$

$$9.6a + 7b + 19c + 57d + 22e \geq 1000$$

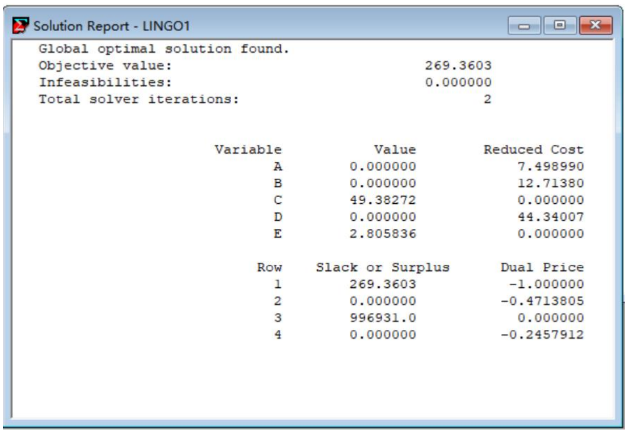
$$a,b,c,d,e \geq 0$$

模型求解：

使用 Lingo 工具对上述关系式求解，代码如下：

```
min=10*a+15*b+5*c+60*d+8*e;
0.3*a+1.2*b+0.7*c+3.5*d+5.5*e>=50;
73*a+96*b+20253*c+890*d+279*e>=4000;
9.6*a+7*b+19*c+57*d+22*e>=1000;
```

结果如下：



即给每人每天购买 **49.38272 根胡萝卜**和 **2.805836 个鸡蛋**成本最低，**最低成本为 269.3603 角**。

（1）观察求解结果中各行的 Dual Price，发现维生素 A 行的值为 0，说明**增加一个单位的维生素 A 不会改变食谱，也不会引起成本增加**。而蛋白质的 Dual Price 为-0.4713805，故**增加一个单位的蛋白质的需求，不会改变食谱，成本将增加 0.4713805 角**；钙的 Dual Price 为-0.2457912，故**增加一个单位的钙的需求，不会改变食谱，成本将增加 0.2457912 角**。

（2）当胡萝卜的价格增加 1 角时，模型更改为：

$$\min z = 10a + 15b + 6c + 60d + 8e$$
$$s.t.\ 0.3a + 1.2b + 0.7c + 3.5d + 5.5e \geq 50$$
$$73a + 96b + 20253c + 890d + 279e \geq 4000$$
$$9.6a + 7b + 19c + 57d + 22e \geq 1000$$
$$a,b,c,d,e \geq 0$$

则代码更改为：

```
min=10*a+15*b+6*c+60*d+8*e;
0.3*a+1.2*b+0.7*c+3.5*d+5.5*e>=50;
73*a+96*b+20253*c+890*d+279*e>=4000;
9.6*a+7*b+19*c+57*d+22*e>=1000;
```

结果为：

```
Solution Report - LINGO1

  Global optimal solution found.
  Objective value:                              318.7430
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             2

                       Variable           Value        Reduced Cost
                              A        0.000000            6.980471
                              B        0.000000            12.57800
                              C        49.38272            0.000000
                              D        0.000000            41.68575
                              E        2.805836            0.000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        318.7430           -1.000000
                              2        0.000000          -0.2244669
                              3        996931.0            0.000000
                              4        0.000000          -0.3075196
```

即**食谱不变**，但成本变为 318.7430 角，即**成本增加了 49.3872 角**。

2. P108 复习题

问题重述：

考虑以下"运输问题"[72]：某公司有 6 个建筑工地要开工，每个工地的位置（用平面坐标 x，y 表示，距离单位：km）及水泥日用量 d（单位：t）由下表给出．目前有两个临时料场位于 A（5，1），B（2，7），日储量各有 20 t．假设从料场到工地之间均有直线道路相连，试制定每天的供应计划，即从 A，B 两料场分别向各工地运送多少吨水泥，使总的吨千米数最小．

	1	2	3	4	5	6
x/km	1.25	8.75	0.5	5.75	3	7.25
y/km	1.25	0.75	4.75	5	6.5	7.75
d/t	3	5	4	7	6	11

问题分析：

这个优化问题的目标就是要求出从 A、B 两料场分别向个工地运送多少吨水泥，使总的吨千米数最小。

模型建立：

记工地位置(a_i, b_i)，水泥日用量 d_i，$(i=1,2,3,4,5,6)$，材料厂位置(x_j, y_j)，日储量为 e_j，$(j=1,2)$，从料场 j 向工 i 的运送量为 c_{ij}。目标是总吨千米数最小，约束是满足各工地的日用量，以及各料场的运送量不超过日储量，模型为：

$$\min f = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} \mathrm{cij}\sqrt{(\mathrm{xj}-\mathrm{ai})^2+(\mathrm{yj}-\mathrm{bi})^2}$$

$$\mathrm{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{2} \mathrm{cij} = \mathrm{di}\,, \mathrm{i} = 1,2,3,4,5,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} cij \le ej, \quad j = 1,2$$

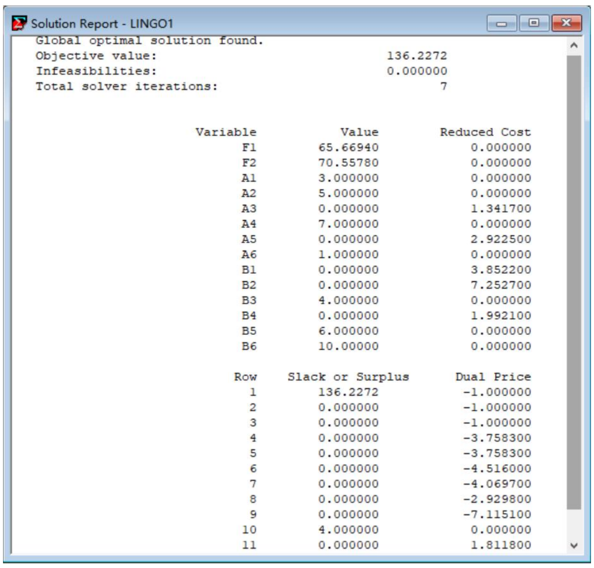
$$cij \ge 0$$

模型求解：

使用 Lingo 工具对上述关系式求解，代码如下：

```
min=f1+f2;
f1=3.7583*A1+3.7583*A2+5.8577*A3+4.0697*A4+5.8523*A5+7.1151*A6;
f2=5.7987*B1+9.1992*B2+2.7042*B3+4.2500*B4+1.1180*B5+5.3033*B6;
A1+B1>=3;
A2+B2>=5;
A3+B3>=4;
A4+B4>=7;
A5+B5>=6;
A6+B6>=11;
A1+A2+A3+A4+A5+A6<=20;
B1+B2+B3+B4+B5+B6<=20;
```

结果如下：



```
Solution Report - LINGO1
Global optimal solution found.
Objective value:                              136.2272
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             7

                       Variable           Value        Reduced Cost
                             F1        65.66940            0.000000
                             F2        70.55780            0.000000
                             A1        3.000000            0.000000
                             A2        5.000000            0.000000
                             A3        0.000000            1.341700
                             A4        7.000000            0.000000
                             A5        0.000000            2.922500
                             A6        1.000000            0.000000
                             B1        0.000000            3.852200
                             B2        0.000000            7.252700
                             B3        4.000000            0.000000
                             B4        0.000000            1.992100
                             B5        6.000000            0.000000
                             B6        10.00000            0.000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        136.2272           -1.000000
                              2        0.000000           -1.000000
                              3        0.000000           -1.000000
                              4        0.000000           -3.758300
                              5        0.000000           -3.758300
                              6        0.000000           -4.516000
                              7        0.000000           -4.069700
                              8        0.000000           -2.929800
                              9        0.000000           -7.115100
                             10        4.000000            0.000000
                             11        0.000000            1.811800
```

即 **A 料场分别向各地运输 3、5、0、7、0、1t 水泥，B 料场分别向各地运输 0、0、4、0、6、10t 水泥**时，总吨千里数最小，**最小为 136.2272t*km**

3. P112 复习题 1

问题重述：

1. 考虑 4.2 节的复习题，为了进一步减少吨千米数，打算舍弃两个临时料场，改建两个新的，日储量仍各为 20 t，应建在何处？节省的吨千米数有多大？[72]

问题分析：

由于两个厂的位置未知，因此调整约束关系为不等关系，模型更改为：

$$\min f = \sum_{i=1}^{6} ci\sqrt{(x1-ai)^2+(y1-bi)^2} + (di-ci)\sqrt{(x2-ai)^2+(y2-bi)^2}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{6} ci \le e1$$

$$\sum_{i=1}^{6} (di-ci) \le e2$$

$$di \ge ci \ge 0$$

问题求解：

用 Lingo 求解上述问题，代码为：

```
model:
sets:
    demand/1..6/:a,b,d;
    supply/1..2/:x,y,w;
    link(demand,supply):c;
endsets

data:
    a=1.25,8.75,0.5,5.75,3,7.25;
    b=1.25,0.75,4.75,5,6.5,7.75;
    d=3,5,4,7,6,11;
    w=20,20;
enddata

[OBJ] min=@sum(link(i,j): c(i,j)*((x(j)-a(i))^2+(y(j)-b(i))^2)^(1/2));
@for(demand(i):[DEMAND_CON] @sum(supply(j):c(i,j)) = d(i););
@for(supply(i):[SUPPLY_CON] @sum(demand(j):c(j,i))<=w(i););
@for(supply: @free(x);@free(y););

End
```

结果如下：

```
Local optimal solution found.
Objective value:                              85.26604
Objective bound:                              22.10308
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                           25268
Total solver iterations:                      29572050

                   Variable           Value        Reduced Cost
                      A( 1)        1.250000            0.000000
                      A( 2)        8.750000            0.000000
                      A( 3)       0.5000000            0.000000
                      A( 4)        5.750000            0.000000
                      A( 5)        3.000000            0.000000
                      A( 6)        7.250000            0.000000
                      B( 1)        1.250000            0.000000
                      B( 2)       0.7500000            0.000000
                      B( 3)        4.750000            0.000000
                      B( 4)        5.000000            0.000000
                      B( 5)        6.500000            0.000000
                      B( 6)        7.750000            0.000000
                      D( 1)        3.000000            0.000000
                      D( 2)        5.000000            0.000000
                      D( 3)        4.000000            0.000000
                      D( 4)        7.000000            0.000000
                      D( 5)        6.000000            0.000000
                      D( 6)        11.00000            0.000000
                      X( 1)        3.254883            0.000000
                      X( 2)        7.250000        0.8084079E-07
                      Y( 1)        5.652332            0.000000
                      Y( 2)        7.750000        0.2675276E-06
                      W( 1)        20.00000            0.000000
                      W( 2)        20.00000            0.000000
                   C( 1, 1)        3.000000            0.000000
                   C( 1, 2)        0.000000            4.008540
                   C( 2, 1)        0.000000           0.2051358
                   C( 2, 2)        5.000000            0.000000
                   C( 3, 1)        4.000000            0.000000
                   C( 3, 2)        0.000000            4.487750
                   C( 4, 1)        7.000000            0.000000
                   C( 4, 2)        0.000000           0.5535090
                   C( 5, 1)        6.000000            0.000000
                   C( 5, 2)        0.000000            3.544853
                   C( 6, 1)        0.000000            4.512336
                   C( 6, 2)        11.00000            0.000000

                        Row    Slack or Surplus      Dual Price
                        OBJ        85.26604           -1.000000
               DEMAND_CON( 1)      0.000000           -4.837363
               DEMAND_CON( 2)      0.000000           -7.158911
               DEMAND_CON( 3)      0.000000           -2.898893
               DEMAND_CON( 4)      0.000000           -2.578982
               DEMAND_CON( 5)      0.000000          -0.8851584
               DEMAND_CON( 6)      0.000000            0.000000
               SUPPLY_CON( 1)      0.000000            0.000000
               SUPPLY_CON( 2)      4.000000            0.000000
```

即料场的位置分别为**(3.254883,5.652332)**和**(7.250000,7.750000)**时，**总吨千米数最小，为 85.26604km**，**节省了 50.96116km**

4. P112 复习题 2

问题重述：

2. 某公司将 4 种不同含硫量的液体原料(分别记为甲、乙、丙、丁)混合生产两种产品(分别记为 A,B).按照生产工艺的要求,原料甲、乙、丁必须首先倒入混合池中混合,混合后的液体再分别与原料丙混合生产 A,B.已知原料甲、乙、丙、丁的含硫量分别是 3%,1%,2%,1%,进货价格(单位:千元/t)分别为 6,16,10,15;产品 A,B 的含硫量分别不能超过 2.5%,1.5%,售价分别为 9,15.根据市场信息,原料甲、乙、丙的供应没有限制,原料丁的供应量最多为 50 t;产品 A,B 的市场需求量分别为 100 t,200 t.问应如何安排生产[21]?

问题分析：

这是一个优化问题，其目标就是要求出如何安排生产才能使利润最大

设混合池中甲、乙、丁原料的占比分别为 x1, x2, x4，产品 A 中来自混合池和丙的吨数分别为 y1, z1，产品 B 中来自混合池和丙的吨数分别为 y2, z2,总利润为 w，根据题意建立模型：

$$\max w = y_1(9-6x_1-16x_2-15x_4)+y_2(15-6x_1-16x_2-15x_4)+z_1(9-10) + z_2(15-10)$$

$$s.t.\begin{cases} x_4(y_1+y_2)\le 50 \\ y_1+z_1\le 100 \\ y_2+z_2\le 200 \\ x_1+x_2+x_4=1 \\ \dfrac{(3x_1+x_2+x_4)y_2+2z_2}{y_2+z_2}\le 1.5 \\ \dfrac{(3x_1+x_2+x_4)y_1+2z_2}{y_1+z_1}\le 2.5 \\ x_1,x_2,x_4,y_1,y_2,z_1,z_2\ge 0 \end{cases}$$

问题求解：

使用 Lingo 求解上述关系式，代码如下：

```
max=(9-6*x1-16*x2-15*x4)*y1+(15-6*x1-16*x2-15*x4)*y2+(9-10)*z1+(15-10)*z2;
```

```
x4*(y1+y2)<=50;
y1+z1<=100;
y2+z2<=200;
x1+x2+x4=1;
(3*x1+x2+x4-1.5)*y2+0.5*z2<=0;
((3*x1+x2+x4)*y1+2*z1)/(y1+z1)<=2.5;
```

结果如下：

```
Solution Report - LINGO1

  Global optimal solution found.
  Objective value:                              450.0000
  Objective bound:                              450.0000
  Infeasibilities:                              0.000000
  Extended solver steps:                               3
  Total solver iterations:                           346


                       Variable           Value        Reduced Cost
                             X1        0.000000            200.0000
                             X2       0.5000000            0.000000
                             X4       0.5000000            0.000000
                             Y1        0.000000            7.000000
                             Y2        100.0000            0.000000
                             Z1        0.000000            1.000000
                             Z2        100.0000            0.000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        450.0000            1.000000
                              2        0.000000            1.000000
                              3        100.0000            0.000000
                              4        0.000000            2.000000
                              5        0.000000           -2200.000
                              6        0.000000            6.000000
                              7        2.500000            0.000000
```

即：**A 产品不生产，B 产品生产 200t，配料为：甲原料 0t，乙原料 50t，丙原料 100t，丁原料 50t，最大利润为 450 千元**

5. P117 复习题

问题重述：

某公司指派 n 个员工到 n 个城市工作（每个城市单独一人），希望使所花费的总电话费用尽可能少．n 个员工两两之间每个月通话的时间表示在下面的矩阵的上三角形部分（假设通话的时间矩阵是对称的，没有必要写出下三角形部分），n 个城市两两之间通话费率表示在下面的矩阵的下三角形部分（同样道理，假设通话的费率矩阵是对称的，没有必要写出上三角形部分）．试求解该二次指派问题．（如果你的软件解不了这么大规模的问题，那就只考虑最前面的若干员工和城市．）[21]

$$\begin{pmatrix}
0 & 5 & 3 & 7 & 9 & 3 & 9 & 2 & 9 & 0\\
7 & 0 & 7 & 8 & 3 & 2 & 3 & 3 & 5 & 7\\
4 & 8 & 0 & 9 & 3 & 5 & 3 & 3 & 9 & 3\\
6 & 2 & 10 & 0 & 8 & 4 & 1 & 8 & 0 & 4\\
8 & 6 & 4 & 6 & 0 & 8 & 8 & 7 & 5 & 9\\
8 & 5 & 4 & 6 & 6 & 0 & 4 & 8 & 0 & 3\\
8 & 6 & 7 & 9 & 4 & 3 & 0 & 7 & 9 & 5\\
6 & 8 & 2 & 3 & 8 & 8 & 6 & 0 & 5 & 5\\
6 & 3 & 6 & 2 & 8 & 3 & 7 & 8 & 0 & 5\\
5 & 6 & 7 & 6 & 6 & 2 & 8 & 8 & 9 & 0
\end{pmatrix}$$

问题分析：

这个优化问题的目标就是要求出如何匹配员工到对应城市才能使公司每个月的总

花费最少。设 x_{ia} 表示第 i 个员工在第 a 个城市；$x_{ia}=1$ 表示第 i 个员工在第 a 个城市；$x_{ia}=0$ 表示第 i 个员工没在第 a 个城市；t_{ij} 表示第 i 个员工与第 j 个员工的通话时间；p_{ab} 表示 a，b 两城市之间的通话费率；z 表示总话费。建立约束关系式：

$$\min z=\frac{\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10}\sum_{a=1}^{10}\sum_{b=1}^{10}(x_{i,a}x_{j,b}t_{i,j}p_{a,b})}{2}$$

$$s.t.\sum_{a=1}^{10}x_{i,a}=1$$

$$\sum_{i=1}^{10}x_{i,a}=1$$

问题求解：

使用 Lingo 求解上述问题，代码如下：

```
MODEL:
SETS:
num/1..10/;
call(num,num):x,t,p;
ENDSETS
DATA:
T = 0 5 3 7 9 3 9 2 9 0
    5 0 7 8 3 2 3 3 5 7
    3 7 0 9 3 5 3 3 9 3
    7 8 9 0 8 4 1 8 0 4
    9 3 3 8 0 8 8 7 5 9
    3 2 5 4 8 0 4 8 0 3
    9 3 3 1 8 4 0 7 9 5
    2 3 3 8 7 8 7 0 5 5
    9 5 9 0 5 0 9 5 0 5
    0 7 3 4 9 3 5 5 5 0;
P = 0 7 4 6 8 8 8 6 6 5
    7 0 8 2 6 5 6 8 3 6
    4 8 0 10 4 4 7 2 6 7
    6 2 10 0 6 6 9 3 2 6
    8 6 4 6 0 6 4 8 8 6
    8 5 4 6 6 0 3 8 3 2
    8 6 7 9 4 3 0 6 7 8
    6 8 2 3 8 8 6 0 8 8
    6 3 6 2 8 3 7 8 0 9
    5 6 7 6 6 2 8 8 9 0;
ENDDATA
min=@sum(call(i,j):@sum(call(a,b):x(i,a)*x(j,b)*p(a,b)*t(i,j););)/2;
@for(num(i):@sum(num(b):x(i,b))=1;);
@for(num(a):@sum(num(j):x(j,a))=1;);
@for(call:@bin(x););
```

结果如下：

Local optimal solution found.
Objective value: 1142.000
Objective bound: 1142.000
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 13
Total solver iterations: 336
Elapsed runtime seconds: 0.15

Model Class: PIQP

Total variables: 100
Nonlinear variables: 100
Integer variables: 100

Total constraints: 21
Nonlinear constraints: 1

Total nonzeros: 300
Nonlinear nonzeros: 3780

Variable	Value	Reduced Cost
X(1, 1)	0.000000	21.00008
X(1, 2)	0.000000	0.000000
X(1, 3)	0.000000	47.99999
X(1, 4)	0.000000	34.99994
X(1, 5)	0.000000	28.00004
X(1, 6)	0.000000	40.99994
X(1, 7)	0.000000	30.99993
X(1, 8)	0.000000	37.99998
X(1, 9)	1.000000	11.99994
X(1, 10)	0.000000	15.00013
X(2, 1)	1.000000	0.000000
X(2, 2)	0.000000	23.99990
X(2, 3)	0.000000	0.000000
X(2, 4)	0.000000	27.99992
X(2, 5)	0.000000	6.000013
X(2, 6)	0.000000	14.99988
X(2, 7)	0.000000	26.99987
X(2, 8)	0.000000	0.000000
X(2, 9)	0.000000	39.99988
X(2, 10)	0.000000	0.000000
X(3, 1)	0.000000	0.000000
X(3, 2)	0.000000	42.99985
X(3, 3)	0.000000	56.99988
X(3, 4)	0.000000	79.99981
X(3, 5)	0.000000	27.99994
X(3, 6)	0.000000	59.99980
X(3, 7)	0.000000	59.99979
X(3, 8)	1.000000	47.99983
X(3, 9)	0.000000	46.99982
X(3, 10)	0.000000	37.99997
X(4, 1)	0.000000	14.00007
X(4, 2)	0.000000	61.99999
X(4, 3)	1.000000	0.000000
X(4, 4)	0.000000	46.99999
X(4, 5)	0.000000	33.00008
X(4, 6)	0.000000	43.99997
X(4, 7)	0.000000	0.000000
X(4, 8)	0.000000	70.00000
X(4, 9)	0.000000	66.99997
X(4, 10)	0.000000	17.00007
X(5, 1)	0.000000	19.00010
X(5, 2)	0.000000	0.000000
X(5, 3)	0.000000	46.00002
X(5, 4)	0.000000	41.99999
X(5, 5)	0.000000	-3.999862
X(5, 6)	1.000000	7.999923
X(5, 7)	0.000000	25.99997
X(5, 8)	0.000000	68.00001
X(5, 9)	0.000000	41.99993
X(5, 10)	0.000000	33.00007
X(6, 1)	0.000000	32.99999
X(6, 2)	0.000000	44.99990
X(6, 3)	0.000000	-0.4700000E-04
X(6, 4)	0.000000	61.99989
X(6, 5)	0.000000	0.000000
X(6, 6)	0.000000	35.99986
X(6, 7)	1.000000	4.999862
X(6, 8)	0.000000	68.99995
X(6, 9)	0.000000	61.99986
X(6, 10)	0.000000	0.000000
X(10, 1)	0.000000	3.000143
X(10, 2)	0.000000	22.00005
X(10, 3)	0.000000	18.00003
X(10, 4)	0.000000	49.00000
X(10, 5)	0.000000	6.000107
X(10, 6)	0.000000	41.00000
X(10, 7)	0.000000	0.000000
X(10, 8)	0.000000	46.00002
X(10, 9)	0.000000	32.00000
X(10, 10)	1.000000	-3.999831

即**工人 1 去城市 9，工人 2 去城市 1，工人 3 去城市 8，工人 4 去城市 3，工人 5 去城市 6，工人 6 去城市 7，工人 7 去城市 2，工人 8 去城市 5，工人 9 去城市 4，工人 10 去城市 10**。每个月的**最小总通话费用为 1142 元。**