重庆大学《数值计算》课程期中测验试卷

2018 —2019 学年第二学期

开课学院：计算机学院　　课程号：CST21301　考试日期：2019.03

考试方式：　◉ 开卷　○ 闭卷　○ 其他　　　考试时间：100 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、（15 分）下列各数都是经过四舍五入得到的近似数,即误差限不超过最后一位的半个单位,试指出它们各有几位有效数字:

$x_1 = 1.00102,\ x_2 = 0.031,\ x_3 = 63.5,$

$x_4 = 0.002,\ x_5 = 6\times 1.0$ (6为精确数)

x_1: 6位
x_2: 2位
x_3: 3位
x_4: 1位
x_5: 2位

二、（15）计算园面积 $S = \pi R^2$ 时，要求相对误差限为 2%，问度量半径 R 时，R 允许的相对误差限是多少?

度量值 R, S, 精确值 R^*, S^*

$\varepsilon_{rS} = \frac{|S-S^*|}{S} = \frac{|R^2-R^{*2}|}{R^2} = \left|1-\left(\frac{R^*}{R}\right)^2\right| \le 2\%$

$\therefore \sqrt{0.98} \le \frac{R^*}{R} \le \sqrt{1.02}$　　1.0050%　　0.9950%

$\varepsilon_{rR} = \frac{|R-R^*|}{R} = \left|1-\frac{R^*}{R}\right| \le 0.9950\%$

三、（15 分）为求方程 $x^2 - e^x + 2 = 0$ 在 $x_0 = 1.3$ 附近的一个根，设将方程改写成下列等价形式，并建立相应的迭代公式。

1） $x = \ln(2+x^2)$，迭代公式 $x_{k+1} = \ln(2+x_k^2)$；

2） $x = \sqrt{e^x - 2}$，迭代公式 $x_{k+1} = \sqrt{e^{x_k} - 2}$；

3） $x = \frac{e^x - 2}{x}$，迭代公式 $x_{k+1} = \frac{e^{x_k} - 2}{x_k}$。

试分析每种迭代公式的收敛性，并构造原方程的 Newton 求根公式。

$1 \le x \le 2$

1) $\varphi'(x) = \frac{2x}{2+x^2} \le \frac{\sqrt{2}}{2}$　收敛

2) $\varphi'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-2}}$　　$\varphi'(2) = \frac{e^2}{2\sqrt{e^2-2}} > 1$　发散

3) $\varphi'(x) = \frac{e^x(x-1)+2}{x^2}$　　$\varphi'(2) = \frac{e^2+2}{4} > 1$　发散

牛顿法：$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - e^{x_k} + 2}{2x_k - e^{x_k}}$

四、(15 分)已知型值点(-1,3)、(0,1)、(1,4),试写出 Lagrange 插值多项式 $L(x)$,并计算 $L(0.5)$。

$l_0(x)=\prod_{j=1}^{2}\frac{x-x_j}{x_0-x_j}=\frac{x(x-1)}{2}$

$l_1(x)=\prod_{\substack{j=0\\j\neq1}}^{2}\frac{x-x_j}{x_1-x_j}=\frac{(x+1)(x-1)}{-1}$

$l_2(x)=\prod_{\substack{j=0\\j\neq2}}^{2}\frac{x-x_j}{x_2-x_j}=\frac{(x+1)x}{2}$

$L(x)=\frac{3}{2}x(x-1)-(x+1)(x-1)+2(x+1)x$

五、(20 分)已知节点数据:

时间 t (秒)	0	1.0	2.0	3.0
距离 s (米)	0	1	5	10

试求其 Newton 插值公式.

六、(20 分)试求[0,1]上的插值函数 $p(x)$,使得

$$p(0)=f(0),\ p(1)=f(1),\ p'(0)=m_1,\ p''(0)=m_2$$

其中 $f(0), f(1), m_1, m_2$ 为已知量。

法一: $p(x)=-(x-1)f(0)+xf(1)+A(x-0)(x-1)+Bx^2(x-1)$

$p'(x)=f(1)-f(0)+A(2x-1)+B(3x^2-2x)$ $\Rightarrow A=f(1)-f(0)$

$p''(x)=2A+B(6x-2)$ $\Rightarrow B=f(1)-f(0)$

基本形式: $\underbrace{\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{a-x}{a-b}f(b)}_{\text{保证 } f(a),\ f(b)}+\underbrace{k_1(x-a)(x-b)+k_2(x-a)^2(x-b)}_{\text{保证 } f', f''\cdots\text{(根据待定条件个数确定参数个数)}}$

$-(x-1)f(0)+(x)f(1)$

$f(0)+x(f(1)-f(0))$