6 апреля 2010

Assignment 4.1
Решение уравнения Пуассона

Е.Е. Перепелкин

http://parallel-compute.ru

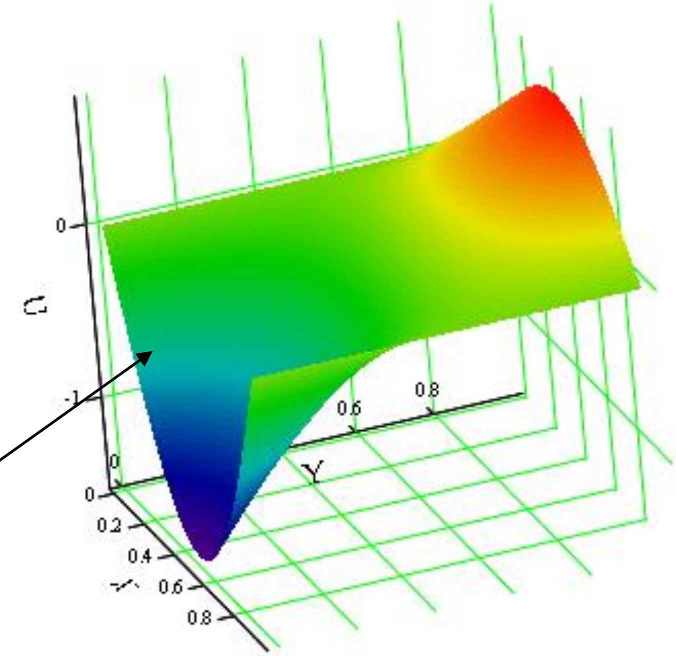
Постановка задачи

$$\begin{cases} \Delta u(p) = -\rho(p), \quad p \in \Omega \\ u\big|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \le x, y \le 1\}$$

$$u_0(x, y) = \sin(\pi x)\left(1 - \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) - \textit{точное решение}$$

$$\rho(x, y) = \pi^2 \sin(\pi x)\left(1 - \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) + 2\sin(\pi x)$$



Решение краевой задачи

Решение задачи может быть получено с использованием БПФ

$$\bar{\rho}(n,m)=\frac{4}{N_x N_y}\sum_{j=1}^{N_y-1}\sum_{i=1}^{N_x-1}\rho(x_i,y_j)\sin\left(\frac{\pi ni}{N_x}\right)\sin\left(\frac{\pi mj}{N_y}\right)$$

$$\bar{u}(n,m)=-\bar{\rho}(n,m)\left[\left(\frac{\pi n}{L_x}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{L_y}\right)^2\right]^{-1} \qquad (*)$$

$$u(x_i,y_j)=\sum_{m=1}^{N_y-1}\sum_{n=1}^{N_x-1}\bar{u}(n,m)\sin\left(\frac{\pi ni}{N_x}\right)\sin\left(\frac{\pi mj}{N_y}\right)$$

- Для поиска коэффициентов Фурье можно воспользоваться библиотекой cuFFT.
- Формулу (*) можно распараллелить

Оформление

- Построить на одном графике найденную функцию U(x,y) и точное решение U_0(x,y).
- Построить график относительной погрешности

$$\varepsilon_{m,n}^{diff} = \frac{u_{m,n} - u_0\left(x_m, y_n\right)}{u_0\left(x_m, y_n\right)}$$

- Провести расчет для набора сеток 64x64, 128x128, 512x512, 1024x1024. И построить график зависимости суммарной точности

$$\varepsilon_{total} = \frac{1}{\left(N_x - 1\right)\left(N_y - 1\right)} \sum_{m=1}^{N_x - 1} \sum_{n=1}^{N_y - 1} \varepsilon_{m,n}^{diff}$$

От размера сетки Nx Ny

Дополнительно

- Реализовать ту же самую задачу на CPU. И получить график ускорения при использовании GPU.
- Сравнить точность полученных решений для двух типов переменных: float и double (double например на ЦПУ)

6 апреля 2010

Assignment 4.2
Метод Рунге - Кутта

Е.Е. Перепелкин

e-mail: ep@parallel-compute.ru

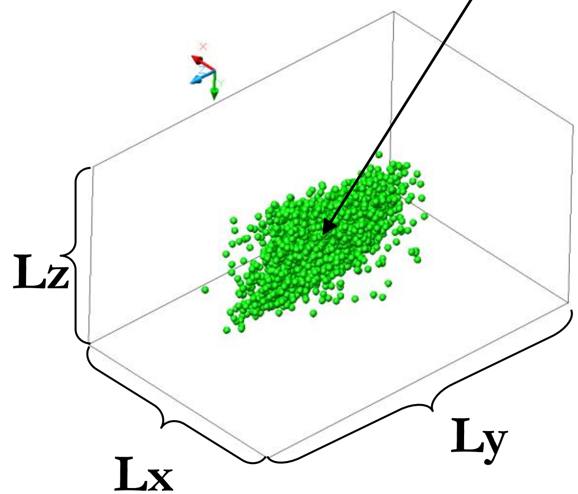
Постановка задачи

$(\vec{r}_i, \vec{v}_i, 0)$, $i = 1 \ldots N$ – *необходимо сгенирировать*

начальное распределение частиц вокруг центральной

$\vec{R}_0 = \{1,0,0\}$, $\vec{V}_0 = \left\{0, -\frac{q}{m}\frac{1}{e}, 0\right\}$ – *центральная частица*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{v}_i = \frac{q}{m}\left[\vec{v}_i, \vec{B}(\vec{r}_i)\right] \\ \vec{r}_i\big|_{t=0} = \vec{r}_i^{(0)}, \vec{v}_i\big|_{t=0} = \vec{v}_i^{(0)} \\ 1 \le i \le N, \vec{r}_i \in V \end{cases}$$



$$\vec{B}(x,y) = \{0,0,B_z(x,y)\},\ B_z(x,y) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

Метод Рунге - Кутта

$$vx_{k+1} = vx_k + \frac{\tau}{6}\left(kvx_1 + 2\cdot kvx_2 + 2\cdot kvx_3 + kvx_4\right)$$

$$vy_{k+1} = vy_k + \frac{\tau}{6}\left(kvy_1 + 2\cdot kvy_2 + 2\cdot kvy_3 + kvy_4\right)$$

$$vz_{k+1} = vz_k + \frac{\tau}{6}\left(kvz_1 + 2\cdot kvz_2 + 2\cdot kvz_3 + kvz_4\right)$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\tau}{6}\left(kx_1 + 2\cdot kx_2 + 2\cdot kx_3 + kx_4\right)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\tau}{6}\left(ky_1 + 2\cdot ky_2 + 2\cdot ky_3 + ky_4\right)$$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{\tau}{6}\left(kz_1 + 2\cdot kz_2 + 2\cdot kz_3 + kz_4\right)$$

Метод Рунге - Кутта

$$\begin{cases} kx_1 = v_x\left(t_k, x_k, y_k, z_k, vx_k, vy_k, vz_k\right) \\ ky_1, kz_1 \\ kvx_1 = f_x\left(t_k, x_k, y_k, z_k, vx_k, vy_k, vz_k\right) \\ kvy_1, kvz_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx_2 = v_x\left(t_k + \frac{\tau}{2}, x_k + \frac{kx_1}{2}, y_k + \frac{ky_1}{2}, z_k + \frac{kz_1}{2}, vx_k + \frac{kvx_1}{2}, vy_k + \frac{kvy_1}{2}, vz_k + \frac{kvz_1}{2}\right) \\ ky_2, kz_2 \\ kvx_2 = f_x\left(t_k + \frac{\tau}{2}, x_k + \frac{kx_1}{2}, y_k + \frac{ky_1}{2}, z_k + \frac{kz_1}{2}, vx_k + \frac{kvx_1}{2}, vy_k + \frac{kvy_1}{2}, vz_k + \frac{kvz_1}{2}\right) \\ kvy_2, kvz_2 \end{cases}$$

Метод Рунге - Кутта

$$\begin{cases} kx_3 = v_x\left(t_k + \frac{\tau}{2}, x_k + \frac{kx_2}{2}, y_k + \frac{ky_2}{2}, z_k + \frac{kz_2}{2}, vx_k + \frac{kvx_2}{2}, vy_k + \frac{kvy_2}{2}, vz_k + \frac{kvz_2}{2}\right) \\ ky_3, kz_3 \\ kvx_3 = f_x\left(t_k + \frac{\tau}{2}, x_k + \frac{kx_2}{2}, y_k + \frac{ky_2}{2}, z_k + \frac{kz_2}{2}, vx_k + \frac{kvx_2}{2}, vy_k + \frac{kvy_2}{2}, vz_k + \frac{kvz_2}{2}\right) \\ kvy_3, kvz_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx_4 = v_x\left(t_k + \tau, x_k + kx_3, y_k + ky_3, z_k + kz_3, vx_k + kvx_3, vy_k + kvy_3, vz_k + kvz_3\right) \\ ky_4, kz_4 \\ kvx_4 = f_x\left(t_k + \tau, x_k + kx_3, y_k + ky_3, z_k + kz_3, vx_k + kvx_3, vy_k + kvy_3, vz_k + kvz_3\right) \\ kvy_4, kvz_4 \end{cases}$$

Рекомендуемые параметры

- Число частиц N от 100,000 до 1,000,000
- Шаг по времени $\tau \sim 10^{-10}$ сек.
- Параметры частицы, например, углерод $^{12}C^{6+}$
  - заряд $Z = 6$, $q = Z \cdot q_e$, $q_e = 1.6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл
  - масса $m = 12$ a.m.u, 1 a.m.u. $= 1.66057 \cdot 10^{-27}$ кг
- Размеры поучка
  - Разброс в поперечном сечении ± 5 см. Например, $2\sigma_x = 2\sigma_z = 5$ см
  - Разброс в продольном направлении ± 10 см. Например, $2\sigma_y = 10$ см
- Число шагов по времени $NT = T/\tau$, где $T = m/(2\pi q)$ – период обращения

Оформление

- Полученные результаты проиллюстрировать графически. Например, используя OpenGL.
- Приветствуется использование CUDA - OpenGL interop.