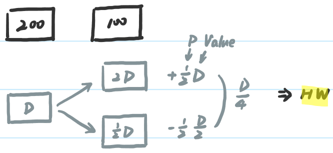
Class 4

2018年3月13日 星期二 10:18

Example 1

* 信封问题：



概率空间 - 期望

* 概率空间 (Ω, P) （Ω 为有限集时具有可加性，无限集时为空间，易产生悖论）

* Random Variable $f: \Omega \to R$ （R^{Ω}，$|\Omega| < \infty$，将概率空间映射至实数集）

· event: $A \subseteq \Omega \to \begin{cases} 1_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases} \\ \chi_A \end{cases} \subseteq R^{\Omega}$ $\quad P(A) = E(1_A)$

期望定义：$E(x) = \sum_i x_i P(X = x_i) \quad \to \quad E(f(\mathbb{Z})) = \sum_i y_i P(f(x) = y_i) \quad \mathbb{Z} \subseteq R^{\Omega}$

$= \sum_i f(x_i) P(X = x_i) \quad f \subseteq R^R$

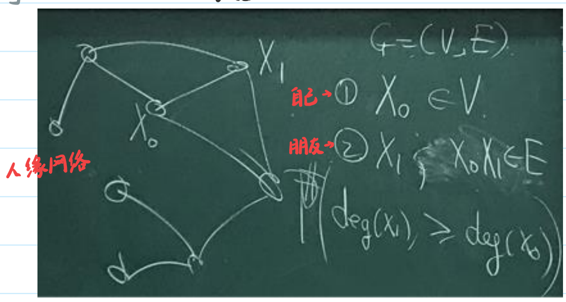
⇝ 线性性：

$E[x + x'] = E[x] + E[x']$ 期望具有线性性，随机变量本身为线性

$E[ax + bx'] = a \cdot E[x] + bE[x']$ → $ax + bx'$ 也为线性，E 为其线性泛函

Example 2

eg：你的朋友比你人缘更好



pf:

$E(deg(x_0)), E(deg(x_1))$

$E(d(x_1)) = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{x_0} \cdot \underbrace{\frac{1}{d(x_0)} \sum_{x_1 \sim x_0} d(x_1)}_{\text{与 } x_0 \text{ 相连结点度数平均值}}}_{\text{对所有 } x_0 \text{ 取平均}}$

$= \frac{1}{n} \sum_{x_0, x_1 \in E} \left(\frac{d(x_0)}{d(x_1)} + \frac{d(x_1)}{d(x_0)} \right)$ ← 握手定理

$\geq 2 \cdot \frac{\|E\|}{\|V\|} = E\, d(Z_0)$ ⇐ 如何得出结论

x_0：半径为1的球 → 半径增大结果？

（n重邻接矩阵情况）

⇝ 全概率公式推广：$P(A) = \sum P(B_i) P(A|B_i) \to E(x) = E(E[x|Y])$ 全期望公式

* Markov Inequality:

$P(X \geq a) \leq \frac{E[x]}{a} \quad \forall a > 0, X \geq 0$

pf: $E(x) = \sum a_i \cdot P(X = a_i) \geq \sum_{a_i \geq a} a_i P(x = a_i) \geq a P(X \geq a)$

* Chebyshev's Inequaity:

$P(|X - E[x]| \geq a) \leq \frac{E[(x - E[x])^2]}{a^2}$

* $E[x]$ 相关公式：

$var(x) = E[(x - E[x])^2] = Ex^2 - (Ex)^2 \qquad var(aX + b) = a^2 var(x)$

standard deviation: $\sigma_x = \sqrt{var(x)}$ $\quad$ Y=1 特例

⇝ $|E[xY]|^2 \leq EX^2 \cdot EY^2$ 柯西不等式

eg: $E[x | x + Y] = ?$ （X, Y 独立同分布）

pf: 原式 $= \frac{1}{2}(E[x|x+Y] + E[Y|x+Y])$

$= \frac{1}{2}(E[x+Y|x+Y]) = \frac{x+Y}{2}$ 何为条件期望？

$= \frac{}{2}\,(E[X+Y \mid X+Y]) = \frac{\quad}{2}$ 何为条件期望？

eg: Let $v_1 \cdots v_n \in S^{n-1}$ $v_i \in \mathbb{R}^n, |v_i| = 1$ n个点落在n-1维球面

Calc: $|\sum \varepsilon_i v_i|$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ 期望线性性讨论

pt: $X = |\sum \varepsilon_i v_i| \leftarrow \varepsilon$

$EX^2 = E[\sum_{i \neq j} \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j v_i \circ v_j] + E[\sum_i \varepsilon_i^2 \cdot v_i \circ v_i]$ 由 $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ 独立：$E(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i) \cdot E(\varepsilon_j) = 0$

$= E[\sum_i v_i \circ v_i] = n$

→ $\exists\ \varepsilon$, $|\sum \varepsilon_i v_i| \geq \sqrt{n}$

$\exists\ \varepsilon$, $|\sum \varepsilon_i v_i| \leq \sqrt{n}$

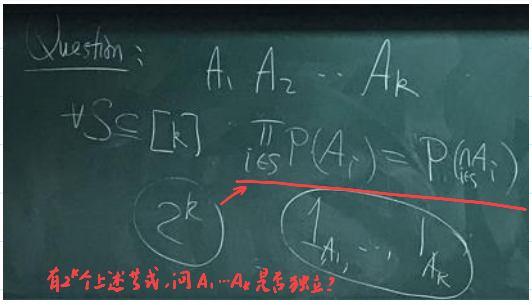
?

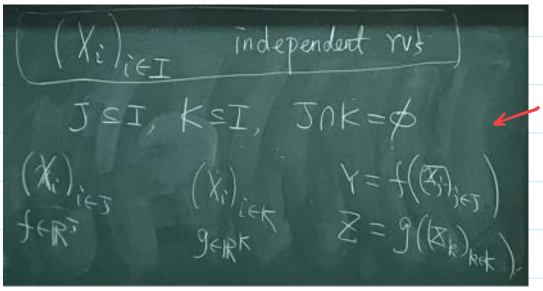
Example 3s

* 独立性：$X_1, \cdots, X_k$

独立性

定义：$P(X_1 = x_1, \cdots, X_k = x_k) = \prod P(X_i = x_i)$

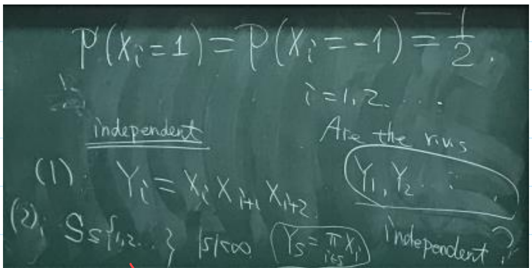




← 证明其独立性

Example 4s

Q: If X and Y are independent rvs, then $E[XY] = E[X] \times E[Y]$, $var(X+Y) = var(X) + var(Y)$



(1) 给定 $Y_i = X_i X_{i+1} X_{i+2}$

(2) S为任意子集，问满足独立性的条件