Introduction to Probability: Class-18

Proposer: 汪陶磊

June 10, 2018

Abstract

本节课中老师为了解决哈密顿图和平面图之间关系问题，主要讲了协方差与四函数定理的定义与运用。由于本人数学水平有限，且LaTeX使用不熟练，笔记中难免会有说明错误或叙述不当之处，还望不吝指出并赐教，感谢!

1 Question

我们希望解决的问题：一个图是否是哈密顿图和一个图是否是平面图这两个问题之间是正相关还是负相关。

2 Covariance

2.1 Definition

定义：
协方差covariance

$$Cov(X,Y) = E((X - EX)(Y - EY))$$

协方差的期望本质上是一个内积，它可以当做是X,Y之间的夹角。
对比系数coefficient of correlation

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(x)\sigma(Y)} \in [-1,1]$$

2.2 Calculate

通过柯西施瓦茨定理可以推导出

$$Cov(X,Y) = E((X - EX)(Y - EY)) = E(XY) - EX^2EY^2$$

当$Cov(X,Y) \leq 0$时，说明X,Y正相关，反之则说明负相关。

3 The Four Function Theorem

3.1 Definition

Let $\alpha, \beta, \gamma, \delta : 2^{\mathcal{N}} \to R_{\geq 0}$ be four functions. If for every two subsets $A, B \subset \mathcal{N}$,

$$\alpha(A)\beta(B) \leq \gamma(A \cap B)\delta(A \cup B)$$

then for every two families $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset 2^{\mathcal{N}}$, it holds

$$(\sum_{A\in\mathcal{A}} \alpha(A))(\sum_{B\in\mathcal{B}} \beta(B)) \leq (\sum_{A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B},C=A\cup B} \gamma(C))(\sum_{A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B},D=A\cap B} \delta(D))$$

其中family表示子集族。

3.2 Lemma One

FKG-inequality:
if μ is a nonnegative log-supermodular function and if f and g are both decreas-

ing(or both increasing) functions on $2^{\mathcal{S}}$, then

$$(\sum_{A\in\mathcal{S}}\mu(A)f(A))(\sum_{B\in\mathcal{S}}\mu(B)g(B)) \leq (\sum_{E\subset S}\mu(E))(\sum_{F\subset S}f(F)g(F)\mu(F))$$

f is increasing means if $B\subset A$, then $f(B)\leq f(A)$,
f is decreasing means if $B\subset A$, then $f(B)\geq f(A)$.
log-supermodular means

$$\mu(A)\mu(B)\leq\mu(A\cup B)\mu(A\cap B)$$

我们可以通过四函数定理推导到FKG不等式：
构造：

$$\alpha(A)=\mu(A)f(A),\beta(A)=\mu(A)g(A),\gamma(A)=\mu(A),\delta(A)=\mu(A)f(A)g(A)$$

带入到四函数中则有：

$$\mu(A)f(A)\cdot\mu(B)g(B)\leq\mu(A\cup B)\mu(A\cap B)f(A\cup B)g(A\cup B)$$

而由于f，g都是递增的，所以有$f(A)\geq f(A\cup B),g(A)\geq g(A\cup B)$, 故可得FKG不等式

$$\mu(A)f(A)\cdot\mu(B)g(B)\leq\mu(E)\mu(F)f(F)g(F)$$

3.3 Lemma Two

Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be two monotone increasing families of $2^{[n]}$ and let $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ be two monotone decreasing functions of $2^{[n]}$, then

$$P(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})\geq P(\mathcal{A})P(\mathcal{B}),P(\mathcal{C}\cup\mathcal{D})\geq P(\mathcal{C})P(\mathcal{D}),P(\mathcal{A}\cup\mathcal{C})\leq P(\mathcal{A})P(\mathcal{C})$$

这个引理也可以通过和刚才类似的方法由四函数定理推出。

4 Supplement

4.1

考虑将m个鸡蛋扔进n个盒子里，X_i表示在第i个盒子里的鸡蛋数。
现在想要证明：
1.$P(X_1\geq t_1\cap X_n\geq t_n)\leq P(X_1\geq t_1)P(X_n\geq t_n)$
2.$\rho(X_1,X_n)\leq 0$
其中第一问为考试备选题，第二问可以通过第一问以及四函数定理证明。

4.2

已知$x\in V[0,1]$, 且有$X(1)\leq X(2)\leq\cdots\leq X(n)$, 求最长的$|X(n)-X(n-1)|$是什么？
本题可见下一张笔记的开头有证明。