

概率论笔记

刘啸远 (lx9843@sjtu.edu.cn)

2018 年 6 月 5 日

目录

关于随机变量间距的问题（一）	2
题目描述	2
题目解答	2
关于随机变量间距的问题（二）	3
题目描述	3
题目解答	3
关于随机变量间距的问题（三）	4
题目描述	4
题目解答	4
思考题（一）	6
思考题（二）	6
关于马尔可夫链平稳分布的知识补充	7
平均首次访问时间（Mean First Passage Time）	7
平均回转时间（Mean Recurrence Time）	7
基本矩阵（Fundamental matrix）	8
思考题（三）	9
马氏链的中心极限定理	10

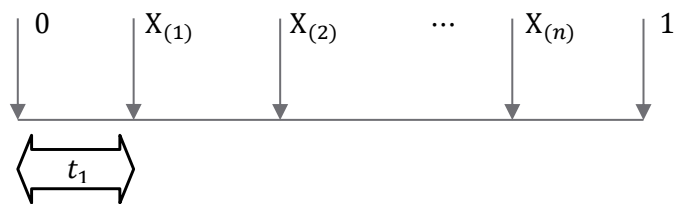
关于随机变量间距的问题（一）

题目描述

随机变量 $X \sim U[0,1]$ ，有 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \sim X$ 且独立同分布，现将其排序为

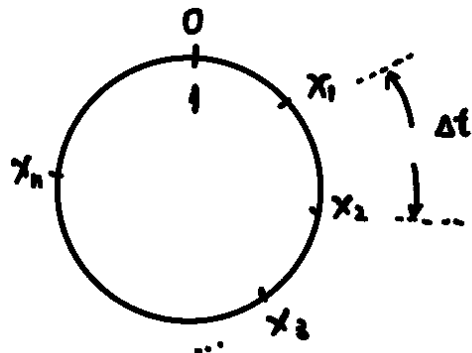
$$0 \leq X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)} \leq \dots \leq X_{(n)} \leq 1$$

设 $\Delta t_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}$ （规定 $X_{(0)} = 0, X_{(n+1)} = 1$ ），则期望 $E_{\Delta t}$ 为多少？



题目解答

将 $[0,1]$ 首尾相连，使得原问题具有更高的对称性



由对称性可得： $E_{t_1} = E_{t_2} = \dots = E_{t_{(n+1)}}$

又由 $E_{t_1} + E_{t_2} + \dots + E_{t_{(n+1)}} = 1 \Rightarrow E_t = \frac{1}{n+1}$

关于随机变量间距的问题（二）

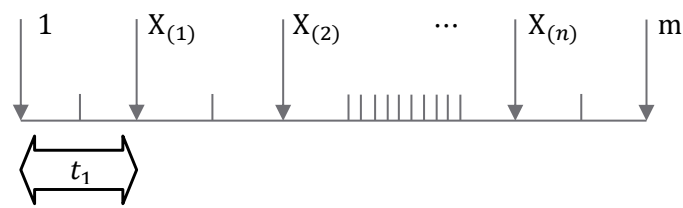
考察 $x \sim U([m])$ 的情况

题目描述

随机变量 $X \sim U[m]$ ，有 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \sim X$ 且独立同分布，现将其排序为

$$1 \leq X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)} \leq \dots \leq X_{(n)} \leq m$$

设 $\Delta t_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}$ （规定 $X_{(0)} = 1, X_{(n+1)} = m$ ），则期望 $E_{\Delta t}$ 是否还能像刚才那样算？



题目解答

不能。无法进行刚才那样的转换（不是双射）。

关于随机变量间距的问题（三）

考察问题（一）若非均匀分布时的情况

题目描述

随机变量 X 满足分布函数 $f(x)$ ，累计分布函数 $F(x)$ ，有 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \sim X$ 且独立同分布，现将其排序为

$$0 \leq X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)} \leq \dots \leq X_{(n)} \leq 1$$

试求 $E(X_k)$

题目解答

$$E(X_k) = \int_0^1 x f_{(k)}(x) dx$$

$$f_{(k)}(x) dx = P(X_{(k)} \in dx)$$

$$= P(\text{'one of the } X \text{ is in } dx \text{ AND 'exactly } (k-1) \text{ of other } < x')$$

$$= nP(X_1 \in dx)P(\text{'exactly } (k-1) \text{ of other } < x')$$

$$= n f(x) dx \binom{n-1}{k-1} F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k}$$

$$\text{验证如果是刚才的均匀分布，有} \begin{cases} f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{else} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(X_{(k)}) = \int_0^1 x n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx$$

$$\int_0^1 x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx = \frac{(k-1)! (n-k)!}{n!} \Rightarrow E(X_{(k)}) = \frac{k}{n+1}$$

也验证了刚才 $\frac{1}{n+1}$ 的结论。

而对于离散的情况，如

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \in [6], E(X_{(2)} - X_{(3)})$$

使用两次计数的技巧，可以做如下计算：

$$E(X_{(2)} - X_{(3)}) = \sum_{i=1}^5 P(X_{(2)} \leq i, X_{(3)} \geq i + 1) \quad (\text{use double counting here})$$

$$= \sum_{i=1}^5 \binom{4}{2} P(X_1, X_2 \leq i, X_3, X_4 \geq i + 1) \quad (\text{choose two } x \text{ to be small})$$

$$= \frac{\binom{4}{2}}{6^4} \sum_{i=1}^5 i^2 (6 - i)^2$$

思考题（一）

继续上题(三)，设 $Y_0 = 1, Y_1 = X_{(1)}, \dots, Y_4 = X_{(4)}, Y_5 = 6$

求： $\max_i E(Y_i - Y_{i-1})$ 的结果，试画出 $Y_i - Y_{i-1}$ 的分布

求： $E(\max_i (Y_i - Y_{i-1}))$ 的结果，试画出 $\max_i (Y_i - Y_{i-1})$ 的分布

思考题（二）

有随机生成的长度为 k 的字符串 $\{0,1\}^k$ ，设 T^s 是第一次看见 s 串的时间

构造一个以这样的字符串为节点的图，**A**、**B** 两节点间连边当 $P(T^A < T^B) > \frac{1}{2}$ ，即

$$V = \{0,1\}^k \quad E = \{A \rightarrow B | P(T^A < T^B) > \frac{1}{2}\}$$

问这张图有什么好的性质吗？

（例如 对于 $k \geq 3$ 总是存在字符 b 满足串 $ba_1a_2 \dots a_{k-1} \rightarrow a_1a_2 \dots a_k$ ）

关于马尔可夫链平稳分布的知识补充

在最简马尔可夫链（Irreducible MC）中，我们记状态（state）为 $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_k$ ，记平稳分

布为 $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_k)$ ，记 $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$ \mathbf{w}

平均首次访问时间（Mean First Passage Time）

定义从 i 到 j 的首次访问平均时间为：

$$m_{ij} = E(\min\{t: x_t = s_j, x_0 = s_i\})$$

由 m_{ij} 构成的矩阵设为：

$$\mathbf{M} = [m_{ij}]$$

平均回转时间（Mean Recurrence Time）

定义从 i 出发回到 i 的平均时间为：

$$r_i = E(\min\{t > 0: x_t = s_i, x_0 = s_i\})$$

由 r_i 作为对角线构成的向量设为：

$$\mathbf{R} = [r_i]$$

下面证明： $r_i = \frac{1}{w_i}$

$$\text{首先声明 } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}, \text{ 先证 } (I - P)M = J - R$$

$$i \neq j \Rightarrow m_{ij} = P_{ij} + \sum_{k \neq j} P_{ik}(m_{kj} + 1) = 1 + \sum_{k \neq j} P_{ik}m_{kj}$$

$$r_i = \sum_k P_{ik}(m_{ki} + 1) = 1 + \sum_k P_{ik}m_{ki}$$

$$(PM)_{ij} = \sum_k P_{ik}m_{kj} = \sum_{k \neq j} P_{ik}m_{kj} + \sum_k P_{ik}m_{ki}$$

$$\Rightarrow M = J - R + PM$$

$$\text{由平稳分布的定义, } W(I - P) = 0$$

$$WJ - WR = W(J - R) = W(I - P)M = 0$$

基本矩阵 (Fundamental matrix)

定义 $Z = (I - P + W)^{-1}$ 为一个马氏链的基本矩阵

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$$

$$(I - (P - W))^{-1} = I + (P - W) + (P - W)^2 + \dots \quad (P - W)^n = P^n - W \rightarrow 0$$

$$I - (P + W)x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$(I - P + W)x = 0 \Rightarrow W(I - P + W)x = 0 \Rightarrow Wx = 0 \Rightarrow (I - P)x = 0 \Rightarrow x \equiv \text{constant}$$

$$Wx = 0 \Rightarrow \sum_i w_i x_i = 0 \Rightarrow c \sum_i w_i = 0 \Rightarrow c \cdot 1 = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{定理 } M_{ij} = \frac{z_{jj} - z_{ij}}{w_j} = r_j(z_{jj} - z_{ij})$$

证明如下:

$$(I - P)M = J - R$$

$$Z(I - P)M = ZJ - ZR = J - ZR$$

$$(I - P) = I - P + W - W - PW + W^2 = (I - P + W)(I - W)$$

$$\Rightarrow Z(I - P) = I - W$$

$$\Rightarrow (I - W)M = Z(I - P)M = J - ZR$$

$$M = J - ZR + WM$$

$$m_{ij} = 1 - z_{ij}r_j + (WM)_i$$

$$m_{ii} = 0 \Rightarrow 0 = 1 - z_{jj}r_j + (WM)_j$$

$$\text{代入 } (WM)_j \text{ 有 } m_{ij} = 1 - z_{ij}r_j + z_{jj}r_j - 1 = (z_{jj} - z_{ij})r_j$$

思考题（三）

对于任意一个最简的马氏链（irreducible MC）,证明：

$$\sum_j m_{ij} w_j = \sum_j z_{jj} - 1$$

马氏链的中心极限定理

参考 《The central limit theorem for Markov chains started at a point》

<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s004400200215.pdf>