Class 1

2018年2月27日 星期二 10:09

» 死亡率问题

两城市 Richmond, New York：黑、白人种（两人种）死亡率低 $\overset{?}{\Rightarrow}$ 生活水平高 ✗ 和死亡率未必低

Reason: 设 λ_1, λ_2

$\frac{w_1'}{w_1} < \frac{w_2'}{w_2}$ ← 去世人数 / ← 总人数 ⇐ 白人

μ_1, μ_2: $\frac{B_1'}{B_1} < \frac{B_2'}{B_2}$ ⇐ 黑人

$\frac{B_1'+w_1'}{B_1+w_1} \ ? \ \frac{B_2'+w_2'}{B_2+B_2}$　$>$ 也可能发生

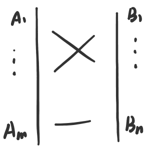
比较: $\frac{\mu_1 B_1+\lambda_1 w_1}{B_1+w_1}$, $\frac{\mu_2 B_2+\lambda_2 w_2}{B_2+w_2}$　$\left(\begin{matrix}\lambda_1<\lambda_2\\ \mu_1<\mu_2\end{matrix}\right)$

假设 $\lambda_1>\mu_2$，使 $w_1, B_2\to\infty$ 则上两式 $>$ 成立

Example 1

→ 引出问题（网络流）

设运输计划 Z



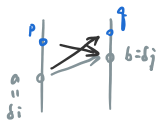
A_i: 出 a_i; B_j: λ b_j & $\Sigma a_i=\Sigma b_j$ ⇒ $\min \sum_{ij} c_{ij} z_{ij} = f(C,a,b)$ 线性规划

（c_{ij}：$A_i\to B_j$ 单位运输价）

Q: 若 $a'>a$, $b'>b$

则 $f(C,a',b') < f(C,a,b)$ 可能发生？

Reason:



$a'=\delta_p+\delta_i$

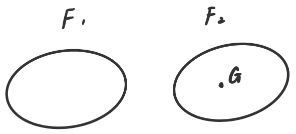
$b'=\delta_q+\delta_j$

⇒ $c_{pj}+c_{iq} < c_{ij}$ 时成立

?

Example 1.1

» 有两家庭各有三小孩



⇒ $p(F_1)=\frac{3}{8}$　$p(F_2)=\frac{1}{4}$

$\#G=1$, $\#B=2$　　$\exists\, G\times1$ 没有姐妹

Ay: 3小孩共8种可能 ⇒ $p(F_1)=\frac{3}{8}$ 女孩第几胎 } F_1

已知一女孩，无姐妹 ⇒ $p(F_2)=\frac{1}{4}$ 另两孩均为男概率 } F_2

$3P(F_2) \overset{?}{=} 2P(F_1)$

Example 2

→ 引出问题：

三小孩性别一样的概率：$\frac{1}{8}\times2=\frac{1}{4}$

错解：[抽屉原理] 三小孩一定有两人性别一样，剩下一个概率为 $\frac{1}{2}$ × 抽屉原理相同情况与不同个数不等

⇒ 不为等比例划分

001　010　100 | 000

110　101　011 | 111

不为 $\frac{1}{2}$ 划分

Example 2.1

» 容斥原理：

$P(\cup A_i)$ → $\prod_i(1-\chi_{A_i}) = 1-\chi_{\cup A_i}$　$\left[\chi_{A_i}(x)=\begin{cases}1 & x\in A_i\\ 0 & x\notin A_i\end{cases}\right]$

可加线性函数 → $F(\chi_{\cup A_i}) = \Sigma \underbrace{\chi_{A_i}}_{F(\ )} - \Sigma \underbrace{\chi_{A_i\cap A_j}}_{F(\ )} + \cdots$ 展开

※ 概率是线性泛函，容斥原理多项式可套用

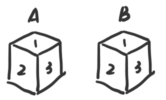
相关习题 P49-12

朴素容斥原理：两边展开相等 P49-11

更困难版本：应用 Taylor 展开，考虑近似

容斥原理

掷骰子问题:



设 $p_1+\cdots+p_6=1$ $q_1+\cdots+q_6=1$

$A+B=2,3,\cdots,12$ 等可能 → 不等可能（单 $p(1)-p(6)$，和 $p(2)-p(12)$）

作弊使 $p(1)-p(6)$ 不等（单值），设计 A, B 使 A+B 结果等可能

$$\Rightarrow \frac{1}{11} \geq p_1q_6+p_6q_1 = p_1q_1\frac{p_1q_6}{p_1q_1}+p_6q_6\frac{p_6q_1}{p_6q_6} = \frac{1}{11}\left(\frac{q_6}{q_1}+\frac{q_1}{q_6}\right) \geq \frac{2}{11}$$ ✗ 不可能

作弊修改 A, B 各面数字，使 A+B 结果等分布 ($p(2)=\cdots=p(12)$)，是否可能

Example 3

Sleeping Beauty:

Head: M

Tail: M T

问题描述：
抛硬币，若为正面：在周一将睡美人叫醒；若为反面：在周一和周二均将睡美人叫醒
睡美人醒来时并不知道今天周几，是第几次醒来，猜测抛硬币结果

Example 4

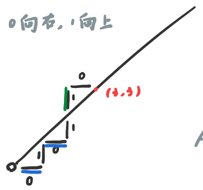
Three Prismers ⟷ Monty Hall →

问题描述：
类似于羊车问题，三位死刑犯，国王特赦一个，将另两位杀死。已决定自己最后附身哪位死刑犯，
国王告知另外两位中哪一位一定会死，问是否更换附身目标？

Example 5

扔硬币问题:

0向右，1向上



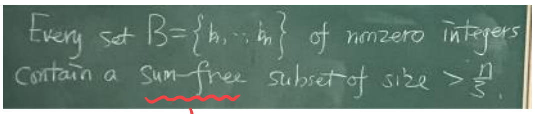
从对角线出发走 $2n$ 步回到对角线 (n 个 0，n 个 1)

共有 $\binom{2n}{n}$ 种路径

Ay: 上方的 | + 下方的 — = n 个 $(1, n-1) \to 0,1,\cdots,n$ 概率各有多大 ?

Example 6

概率论即为数数



sum-free: $\{2,2,6\}$ ∄ $b_i+b_j=b_k$, $i,j,k\in[n]$

pf:

引理: $\{1,2,\cdots,3k+1\}$ 中 $\{k+1,k+2,\cdots,2k+1\}$ 为 sum-free 先找特例再用随机性质结果

→ prime $p=3k+2$，$p\nmid b_1\cdots b_n$（其实只需后一条件）

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & & b_n \\ 2b_1 & 2b_2 & \cdots & 2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (p-1)b_1 & (p-1)b_2 & & (p-1)b_n \end{pmatrix}$$ 每一列为模 p 的完全剩余系

由引理可知，每一列模 p 后形成集合 $\{1,\cdots,3k+1\}$，其中一定存在 $k+1$ 个数模 p 结果等于 $k+1,\cdots,2k+1$

由鸽巢原理可知，一定存在某一行，其中至少 $\frac{1}{3}$ 模 p 结果 $\in\{k+1,\cdots,2k+1\}$，设其为 $b_{a_1}, b_{a_2},\cdots,b_{a_k}$，属于第 c 行

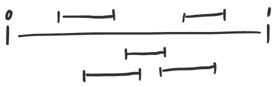
则 ∄ $c\cdot b_{a_p}+c\cdot b_{a_q}=c\cdot b_{a_r}$ → 即 $\{c\cdot b_{a_i}\}$ 为 sum-free

⇒ ∄ $b_{a_p}+b_{a_q}=b_{a_r}$ → 即 $\{b_{a_i}\}$ 为 sum-free

即 $\{b_1,\cdots,b_n\}$ 中 ∃ sum-free subset size $>\frac{n}{3}$

Example 7

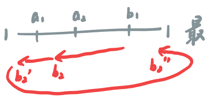
掷线段问题:



$[0,1]$ 中扔线段，某线段打中其它所有线段的概率: $\frac{2}{3}$

数学中概率大多与 2 有关
特例计算精结果

pf:
建立空间说明只与顶点有关

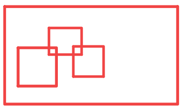


最左端标 a_1, a_2，右侧线段先确定 b_1，b_2 往左走再绕回，找最右侧 b_1 证 $\frac{2}{3}$

Example 8

引出问题

A:



B:

掷方格 & 圆弧

Example 8.1

HW: Read 1.1 → 1.2