Lecture Notes

王翰竞

June, 2018

目录

1 引入 **3**

2 随机游走和电路网络理论 **3**

2.1 电路网络解的存在性和唯一性 3

2.1.1 唯一性 3

2.1.2 存在性 3

2.2 马尔可夫链解的存在性和唯一性 4

2.2.1 调和函数 4

2.3 存在性 4

2.4 电路网络 4

2.5 逃逸概率 5

2.6 电压的概率解释 5

2.7 电流与Sojourn Time-滞留时间 6

2.8 Hitting Time-首次命中时间 6

3 无限网格上的随机游走 **7**

3.1 波利亚定理 7

3.2 证明 7

3.2.1 短路法证明平面常返性 7

3.2.2 能量损耗和逃逸概率 8

4 局限性和改进 **8**

1 引入

本文档主要根据吴耀琨老师的课堂笔记所作, 主要讨论了有限电阻网络和其上的随机游走的联系. 内容上根据个人理解和学习过程做了顺序上的调整和内容的补充. 由于水平所限, 还有诸多不足和错误, 请各位指点.

2 随机游走和电路网络理论

为联系马尔可夫链和电阻网络, 首先需要说明双方解的唯一性和存在性

2.1 电路网络解的存在性和唯一性

电阻网络由电阻沿有限无向连通图$\mathbf{G}$ 布置而成,一旦给定节点集$\mathbf{V}$ 的非空子集$\mathbf{W}$ 的电势分布情况，也即$U_x, \forall x \in \mathbf{W}$ 以及唯一确定集$\mathbf{i}$ 满足$\sum_{y\sim x} i_{xy} = 0$, 电路网络存在一个唯一解, 也即$u_x = U_x, \forall x \in \mathbf{W}$ 以及唯一确定集$\mathbf{i}$ 满足$\sum_{y\sim x} i_{xy} = 0, \forall x \notin \mathbf{W}$.

2.1.1 唯一性

Proposition 2.1. *给定有限无向连通图$\mathbf{G}$ 以及上述边界集$\mathbf{W}$, 固定边界条件$(U_x)_{x\in\mathbf{W}}$, 如果存在两组解$(\mathbf{u}, \mathbf{i}), (\mathbf{u}', \mathbf{i}')$ 满足边界条件, 那么有$\mathbf{u} = \mathbf{u}', \mathbf{i} = \mathbf{i}'$*

Proof. 由于电路的线性特性, $(\mathbf{u} - \mathbf{u}', \mathbf{i}, \mathbf{i}')$是满足边界条件$U_x = 0, \forall x \in \mathbf{Q}$的一组解, 若存在点集$S \subset V - W$并且$u_x - u_x' > 0, \forall x \in S$ S中所有节点的净电流将为流出，与$\sum_{y\sim x} i_{xy} = 0, \forall x \notin \mathbf{W}$矛盾 □

2.1.2 存在性

记$i_x := \sum_{y\sim x} i_{xy}$为节点$x \in \mathbf{W}$的净电流.

Lemma 2.2. 给定无向连通图$\mathbf{G}$以及边界集$\mathbf{W}$, *假设我们对于所有的边界条件$(U_x)_{x\in\mathbf{W}}$, 对于任何的$x \in \mathbf{W}$, 当其他边界条件(电压)U_y为固定常数时,i_x是U_x的仿射递增函数*

Proof. 固定$x \in \mathbf{W}$, 考虑$U'_x > U_x, U'_y = U_y forall x \neq y \in \mathbf{W}$以及对应的两个解.重复Proposition 2.1中的思考步骤, 属于$V - W$且$U_x - U'_x > 0$的节点显然满足$i_x - i'_x > 0$ □

Proposition 2.3. 给定非空集合$\mathbf{W}$和边界条件$(U_x)_{x\in\mathbf{W}}$的电路的解存在

Proof. 将属于集合$V - W$的节点称为自由节点, 对其集合大小$n = |V - W|$做归纳. 当$n = 0$时，所有节点的电势固定，只需根据欧姆定律计算电流，解必然存在. 假设当$n' = n + 1$时, 解依然存在. 任意选择$x \in |V - W|$. 固定其所有边界条件$U_y, y \in \mathbf{W}, U_x$, 因为对于n的情形解存在, 而且$i_x$是$U_x$的递增仿射函数，必然一个$U_{x0}$使得对应的$i_{x0} = 0$,因此对于$n' = n + 1$的情形解存在. □

2.2 马尔可夫链解的存在性和唯一性

2.2.1 调和函数

如果一个定义在节点集上的函数g,其在边界节点的值由边界条件给定，并且节点x的值是由和它相邻的节点y的值加权p_{xy}所得, 满足$\sum_y p_{xy} = 1$, 则g是一个调和函数.给定边界条件B,定义在S上满足B的调和函数是唯一的, 详细证明略去.

2.3 存在性

Theorem 2.4. *(马尔可夫链基础定理)*对于连通马尔可夫链，存在唯一的概率分布π满足$\pi P = \pi$,其中P为概率转移矩阵. 并且当时间趋于无穷时，平均概率分布收敛到π

2.4 电路网络

抽象电路网络为一个简单无向连通图(无重边、自环)$\mathbf{G}$, 其节点集为$V(G)$, 边集为$E(G) \subset \binom{V(G)}{2}$, 并且每边$xy$ 电阻为$R_{xy} > 0$.记电导率(conductance) $C \in R_+^{E(G)}$, 每边电导为$C_{xy} = \frac{1}{R_{xy}}$, 节点总电导$C_x = \sum_y C_{xy}$.
易知形成的电导矩阵$\mathbf{C}$ 是非负对称矩阵.

$$C_{xy} = C_{yx}, C_{xy} > 0$$

定义图G上的随机游走为一个马尔可夫链, 且转移概率P_{xy} 满足关系:

$$P_{xy} = \begin{cases} \frac{C_{xy}}{C_x} & xy \in \mathbf{E} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

因为G的连通性, 这样构造出的马尔可夫链为可遍历的, 因此存在概率向量w满足$wP = w$, 其中$w = \frac{C_x}{\sum C_i}$. 又有如下性质:

$$w_x p_{xy} = \frac{C_x}{\sum C_i}\frac{C_{xy}}{C_x} = \frac{C_y}{\sum C_i}\frac{C_{yx}}{C_y} = w_y p_{yx}$$

因此该马尔可夫链可逆.

2.5 逃逸概率

定义逃逸概率$P_{escape}(s \to t)$为从节点s出发随机游走，在重返节点s前先访问节点t的概率.

2.6 电压的概率解释

Theorem 2.5. *$N = (G, C)$为一连通电路网络，选取$s, t \in V(G)$, 定义s, t为电路的源和汇，对于电路中任一节点x, 电压函数$V(x)$有如下的概率意义:*

$$V(x) = P(\textit{Starting random walk at x, visit s before t})$$

在边界条件(i) $V(s) = 1, V(s) = 0$ (ii) $C_{eff}(s,t) = C_s P_{escape}(s \to t)$ 下$V(x), x \in V(G)$ 是唯一成立的势能分布.

Proof. 由基尔霍夫定律, 除了电路网络的源和汇外, 节点出电流和入电流平衡.

$$x \in (V(G)\backslash s, t), \sum_{y, xy \in E} (V_x - V_y) C_{xy} = 0$$

$$V_x = \frac{1}{C_x} \sum_{y, xy \in E} C_{xy} V_y = \sum_{y, xy \in E} P_{xy} V_y$$

由调和函数的唯一性, 可知V_x即为P(Starting random walk at x, visit s before t)

□

容易得知如下结论

$$\frac{P_{escape}(s \to t)}{P_{escape}(t \to s)} = \frac{C_t}{C_s}$$

Proof:

$$\begin{aligned}(V_s - V_t)C_{eff}(s,t) &= \textstyle\sum_{sy \in E} C_{sy}(V_s - V_y) \\ &= \sum C_{sy} - C_{sy} \sum P_{sy} V_y \\ &= C_s P_{escape}(s \to t)\end{aligned}$$

2.7 电流与Sojourn Time-滞留时间

定义$S_x(s \to t) = E[i < T_t : x_i = x]$, 即为无向图上从s出发在访问t前命中x的平均次数, 将其称为滞留时间. 显然有:

$$S_t(s \to t) = 0, S_s(s \to t) = 1, S_x = \sum_y p_{xy} S_y$$

因为$C_x p_{xy} = C_y p_{yx}, S_x = \sum_y S_y p_y x, \forall x \neq s, t$

$$S_x = \sum_y S_y \frac{p_{xy} C_x}{C_y} \Rightarrow \frac{S_x}{C_x} = \sum_y S_y \frac{p_{xy}}{C_y}$$

这说明$h_x = \frac{S_x}{C_x}$是调和函数. 因为$h_t = 0$, 当h_s满足$h_s = 1$时,由调和函数唯一性, 可知h_x即为电压函数V_x, 而此时$h_x = \beta V_x, \beta = \frac{S_s}{C_s}$

$$i_{xy} = \beta(V_x - V_y)C_{xy} = \beta(\frac{S_x}{C_x} - \frac{S_y}{C_y})C_{xy} = \beta(S_x p_{xy} - S_y p_{yx})$$

因此电流的概率含义为, 将β单位电压加在电路两端(使得一单位电流流过), 相邻点x, y间的电流i_{xy}为从a出发访问b前从x通往y的净次数.

2.8 Hitting Time-首次命中时间

令S为某一节点集合或者节点, 定义Hitting Time(首次命中)$t_s^+ = min\{t \geq 1, x_t \in S\}$. 如此可得到节点x电势的另一表达式$V_x = P_x(x_{t(visitsrcbeforedst)=src})$以及逃逸概率$P_{escape}(s \to t) = P_s(x_{t_t^+} = t)$

3 无限网格上的随机游走

3.1 波利亚定理

Figure 1: 多维随机游走

在d维网格上的随机游走, 若以概率1返回初始点, 则称这样的随机游走为常返(recurrence)的, 否则称为暂留(transient)的, 当$d \leq 2$时, 随机游走为常返的, $d \geq 3$时为暂留的.

3.2 证明

3.2.1 短路法证明平面常返性

在$d = 2$时, 无限电阻网络形如如图2所示的无限嵌套扩大的正方形. 使用短路法, 将与原点距离相等的点短路连接, 得到等效电路图3

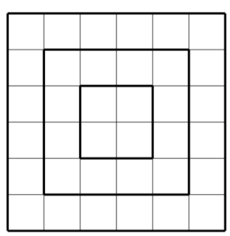

Figure 2: 二维无限电阻网络

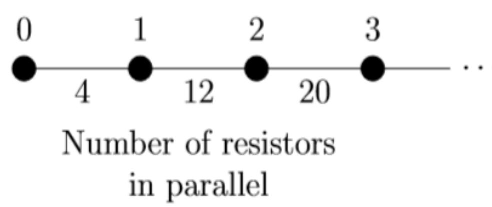

Figure 3: 短路等效电阻网络

显然, 原图电路的总电阻大于短路后电路电阻, 而后者是易于计算的, 值为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8n+4} = \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ...) = \Theta(\ln n)$$

3.2.2 能量损耗和逃逸概率

Theorem 3.1. *(Thomson's 原理)*如果i是由基尔霍夫定律决定的$s \to t$的电流，则能量耗散$\frac{1}{2}\sum_{x,y} i_{xy}^2 R_{xy}$在所有$s$到$t$的单位流中能量耗散最小

Lemma 3.2. 在$N = (G, C)$上的随机游走是暂留的，当单位流流向无穷远处的能量耗散为有限值

Proof. 参考文献[1]给出构造性证明. □

相应的有

Lemma 3.3. 在$N = (G, C)$上的随机游走是常返的，当且仅当对任意$\epsilon > 0$*0*存在$V(G)$上的函数h使得对某些节点s,$h(s) \geq 1$，除有限多点外$h(x)$均为*0*，以及$\sum_{xy} \in E(G)(V_x - V_y)^2 C_{xy} < \epsilon$

4 局限性和改进

以上的所有讨论均针对于可逆马尔可夫链，这是由于电阻的对称性决定的. 引入非对称性电路元件如放大器后，可将研究领域扩展至不可逆马尔可夫链.

References

[1] Wang S, Random Walks on Trees and Electric Networks, thesis, May 2014

[2] Marton Bala, Electric network for non-reversible Markov chains, American Mathematical Monthly, May 2014

[3] Avrim Blum, John Hopcroft, Ravindran Kannan, Foundations of Data Science, Jan 2018