概率论笔记

刘啸远（lxy9843@sjtu.edu.cn）

2018 年 6 月 5 日

目录

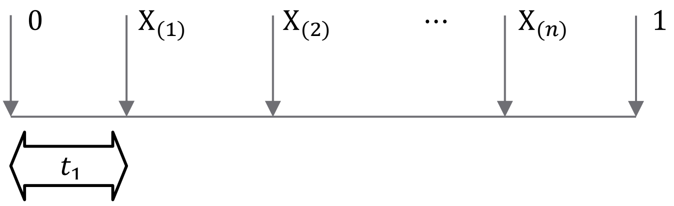
关于随机变量间距的问题（一）

题目描述

随机变量$X \sim U[0,1]$，有$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \sim X$且独立同分布，现将其排序为

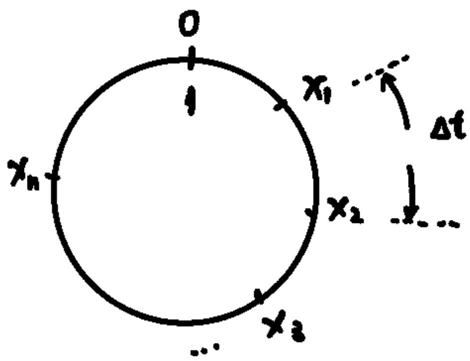
$$0 \le X_{(1)} \le X_{(2)} \le X_{(3)} \le \cdots \le X_{(n)} \le 1$$

设$\Delta t_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}$（规定$X_{(0)} = 0, X_{(n+1)} = 1$），则期望$E_{\Delta t}$为多少？



题目解答

将[0,1]首尾相连，使得原问题具有更高的对称性



由对称性可得：$E_{t1} = E_{t2} = \cdots = E_{t(n+1)}$

又由$E_{t1} + E_{t2} + \cdots + E_{t(n+1)} = 1 \Rightarrow E_t = \frac{1}{n+1}$

关于随机变量间距的问题（二）

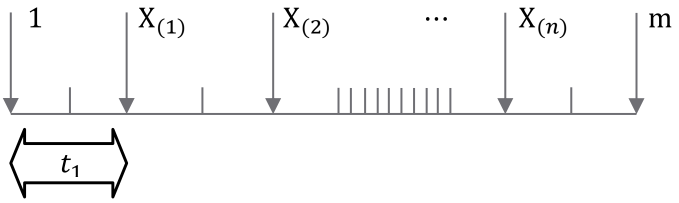
考察$x \sim U([\mathbf{m}])$的情况

题目描述

随机变量$X \sim U[m]$，有$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \sim X$且独立同分布，现将其排序为

$$1 \le X_{(1)} \le X_{(2)} \le X_{(3)} \le \cdots \le X_{(n)} \le m$$

设$\Delta t_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}$（规定$X_{(0)} = 1, X_{(n+1)} = m$），则期望$E_{\Delta t}$**是否还能像刚才那样算？**



题目解答

不能。无法进行刚才那样的转换（不是双射）。

关于随机变量间距的问题（三）

考察问题（一）若非均匀分布时的情况

题目描述

随机变量X满足分布函数$f(x)$，累计分布函数$F(x)$，有$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \sim X$且独立同分布，现将其排序为

$$0 \le X_{(1)} \le X_{(2)} \le X_{(3)} \le \cdots \le X_{(n)} \le 1$$

试求$E(X_k)$

题目解答

$$E(X_k) = \int_0^1 x f_{(k)}(x) dx$$

$$f_{(k)}(x)dx = P\left(X_{(k)} \in dx\right)$$

$$= P(\,'\text{one of the X is in dx}'\ \mathbf{AND}\ '\text{exactly } (k-1) \text{of other} < x')$$

$$= nP(x_1 \in dx)P('\text{exactly } (k-1) \text{of other} < x')$$

$$= nf(x)dx \binom{n-1}{k-1} F(x)^{k-1}\left(1 - F(x)\right)^{n-k}$$

回顾问题（一）

验证如果是刚才的均匀分布，有$\begin{cases} f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{else} \end{cases} \end{cases}$

$$\Rightarrow E\left(X_{(k)}\right) = \int_0^1 xn \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k} dx$$

$$\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k} dx = \frac{(k-1)!\,(n-k)!}{n!} \Rightarrow E\left(X_{(k)}\right) = \frac{k}{n+1}$$

也验证了刚才$\frac{1}{n+1}$的结论。

回顾问题（二）

而对于离散的情况，如

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \in [6], E(X_{(3)} - X_{(2)})$$

使用两次计数的技巧，可以做如下计算：

$$E\left(X_{(3)} - X_{(2)}\right) = \sum_{i=1}^{5} P\left(X_{(2)} \le i, X_{(3)} \ge i+1\right) \quad \text{(use double counting here)}$$

$$= \sum_{i=1}^{5} \binom{4}{2} P(X_1, X_2 \le i, X_3, X_4 \ge i+1) \quad \text{(choose two x to be small)}$$

$$= \frac{\binom{4}{2}}{6^4} \sum_{i=1}^{5} i^2 (6-i)^2$$

注：关于两次计数部分的详细解释

为了理解第一行的转换，可以考虑$X_{(3)} - X_{(2)}$为不同值的情况。如$X_{(2)}$是 1，$X_{(3)}$是 5 的情况，在正常解法中，该种情况应为距离 4 乘以发生这种情况的概率，而在上述解法的式子中，乘数 4 被分别算入$X_{(2)} \le 1, X_{(3)} \ge 2$，$X_{(2)} \le 2, X_{(3)} \ge 3$，$X_{(2)} \le 3, X_{(3)} \ge 4$，$X_{(2)} \le 4, X_{(3)} \ge 5$ 四种情况下，故总体的概率是相同的，从两种角度计算出来的结果也是相同的。

思考题（一）

继续上题(三)，设$Y_0 = 1, Y_1 = X_{(1)}, \cdots, Y_4 = X_{(4)}, Y_5 = 6$

求：$\max_i E(Y_i - Y_{i-1})$的结果，试画出$Y_i - Y_{i-1}$的分布

求：$E(\max_i (Y_i - Y_{i-1}))$的结果，试画出$\max_i (Y_i - Y_{i-1})$的分布

思考题（二）

有随机生成的长度为 k 的字符串$\{0,1\}^k$，设T^s是第一次看见 s 串的时间

构造一个以这样的字符串为节点的图，A、B 两节点间连边当$P(T^A < T^B) > \frac{1}{2}$，即

$$V = \{0,1\}^k \quad E = \{A \to B | P(T^A < T^B) > \frac{1}{2}\}$$

问这张图有什么好的性质吗？

（例如 对于$k \geq 3$总是存在字符 b 满足串 $ba_1a_2 \cdots a_{k-1} \to a_1a_2 \cdots a_k$）

关于马尔可夫链平稳分布的知识补充

在最简马尔可夫链（Irreducible MC）中，我们记状态（state）为$\mathbf{S_1, \dots, S_k}$，记平稳分布为$\mathbf{w} = (\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_k})$,记$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \dots \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathbf{w}$

平均首次访问时间（Mean First Passage Time）

定义从 i 到 j 的首次访问平均时间为：

$$\mathrm{m_{ij} = E\left(min\left\{t: x_t = s_j, x_0 = s_i\right\}\right)}$$

由$\mathrm{m_{ij}}$构成的矩阵设为：

$$\mathrm{M = [m_{ij}]}$$

平均回转时间（Mean Recurrence Time）

定义从 i 出发回到 i 的平均时间为：

$$\mathrm{r_i = E(min\{t > 0: x_t = s_i, x_0 = s_i\})}$$

由$\mathrm{r_i}$**作为对角线**构成的向量设为：

$$\mathrm{R = [r_i]}$$

下面证明：$r_i = \frac{1}{w_i}$

首先声明$J = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{n \times n}$，先证$(I - P)M = J - R$

$i \neq j \Rightarrow m_{ij} = P_{ij} + \Sigma_{k \neq j} P_{ik} \left(m_{kj} + 1\right) = 1 + \Sigma_{k \neq j} P_{ik} m_{kj}$

$r_i = \Sigma_k P_{ik} (m_{ki} + 1) = 1 + \Sigma_k P_{ik} m_{ki}$

$(PM)_{ij} = \Sigma P_{ik} m_{kj} = \Sigma_{k \neq j} P_{ik} \mathrm{m_{kj}} + \mathrm{\Sigma_k P_{ik} m_{ki}}$

$\mathrm{\Rightarrow M = J - R + PM}$

由平稳分布的定义，$\mathrm{W(I - P) = 0}$

$\mathrm{WJ - WR = W(J - R) = W(I - P)M = 0}$

基本矩阵（Fundamental matrix）

定义 $Z=(I-P+W)^{-1}$为一个马氏链的基本矩阵

$$W=\lim_{n\to\infty}P^n$$

$\big(I-(P-W)\big)^{-1}=I+(P-W)+(P-W)^2+\cdots$ $\qquad (P-W)^n=P^n-W\to 0$

$I-(P+W)x=0\Rightarrow^{?}x=0$

$(I-P+W)=0\Rightarrow W(I-P+W)x=0\Rightarrow Wx=0\Rightarrow(I-P)x=0\Rightarrow x\equiv \text{constant}$

$Wx=0\Rightarrow \Sigma w_i x_i=0\Rightarrow c\Sigma w_i=0\Rightarrow c\ \cdot 1=0\Rightarrow c=0\Rightarrow x=0$

定理 $M_{ij}=\frac{z_{jj}-z_{ij}}{w_j}=r_j\big(z_{jj}-z_{ij}\big)$

证明如下：

$(I-P)M=J-R$

$Z(I-P)M=ZJ-ZR=J-ZR$

$(I-P)=I-P+W-W-PW+W^2=(I-P+W)(I-W)$

$\Rightarrow Z(I-P)=I-W$

$\Rightarrow (I-W)M=Z(I-P)M=J-ZR$

$M=J-ZR+WM$

$m_{ij}=1-z_{ij}r_j+(WM)_i$

$m_{ii}=0\Rightarrow 0=1-z_{jj}r_j+(WM)_j$

代入$(WM)_j$有$m_{ij}=1-z_{ij}r_j+z_{jj}r_j-1=\big(z_{jj}-z_{ij}\big)r_j$

思考题（三）

对于任意一个最简的马氏链（**irreducible MC**）**,**证明：

$$\sum_{j} m_{ij} w_{j} = \sum_{j} z_{jj} - 1$$

马氏链的中心极限定理

参考《The central limit theorem for Markov chains started at a point》

https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s004400200215.pdf