Solution

概率论，2018 春季学期

姓名：王天哲　学号：516030910591　班级：F1603024

1. Problem
   求证:
   $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(cos\theta)^n e^{-ji\theta}d\theta = \frac{1}{2^{n+1}}[1+(-1)^{n+j}]\binom{n}{\frac{n+j}{2}}$.

   Solution.

   这里给出一种组合证明方法:
   我们考虑这样一个问题，一个人初始在原点各以 $\frac{1}{2}$ 的概率向前或者向后走一个单位，问走 n 步后在位置 j 的概率。
   求证的等式可以认为是矩母函数的形式，$(cos\theta)^n = (\frac{1}{2}e^{i\theta}+\frac{1}{2}e^{-i\theta})^n$, 其中 $\frac{1}{2}e^{i\theta}+\frac{1}{2}e^{-i\theta}$ 为矩母函数。
   我们容易知道 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ji\theta}d\theta = [j=0]$，记之为 (*).
   那么通过 (*) 式可以将 LHS 中不为常数次数的项筛去。
   从而新问题与这里给出的组合问题等价。
   而对于这个组合问题的答案，显然在 n 步中有 $\frac{n+j}{2}$ 步是向前的，$\frac{n-j}{2}$ 步是向后的。当 n 和 j 不同奇偶的时候，答案为 0，利用乘以 $\frac{1}{2}(1+(-1)^{n+j})$ 的技巧即可将这种情况的答案置为 0。
   此时方案数即为 RHS。
   从而得证。

   □