Class 8

2018年4月3日 星期二 10:03

Markov Chain

* Markov Chain: Notes 中加入历史信息，不应为简单的习题作答

$(X_0, X_1, \cdots)$ a sequence of RV's taking values in V

$P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_0 = x_0, \cdots, X_t = x_t) = P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t)$ ← 体现独立性，历史无关性

$X_0 : S \to V$

初始分布

A Markov Chain with the state space S generated by the initial distribution μ on S

最后一题有具体示例

and the stochastic matrics $P(1), \dots, P(n)$ → $P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t)$ 转移矩阵 $P_{x_t x_{t+1}}(t+1)$

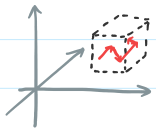
is the probability measure P on S^{n+1} such that $P(w_0 = i_0, \cdots, w_n = i_n) = \mu_{i_0} P_{i_0 i_1}(1) \cdots P_{i_{n-1} i_n}(n)$

由初始分布不断转移

$S = \{S_0, S_1, S_2, S_3\}$ X构成S的划分

$V = \{V_0, V_1, V_2, V_3\}$ 被映射集合

$P = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ 表示取值的概率



在区域中 P_i 转移

$P_{new} = \{P_0', P_1', P_2', P_3'\}$ $P_t \to P_{t+1}$ 转移，可用 $TP_t' = P_{t+1}'$ 描述

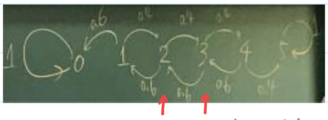
或 $P_t T' = P_{t+1}$

* 若 $P(1) = P(2) = \cdots$，则为齐次状态 homogeneous markov chain. ?

Example 1

* Gamble's Ruin:

$$\begin{cases} P(i, i+1) = 0.4 \\ P(i, i-1) = 0.6 \end{cases}$$



随机游走（自动机）

A B 初始状态

$A(0) < B(0)$

Q: $P(A(t) > B(t))$

Example 2

* Wright - Fisher model:

A a

AAaAA ← 集合中取 n 次，取出时 Aa 有概率互换

$A \underset{v}{\overset{u}{\rightleftharpoons}} a$

$$\begin{cases} p_i = \frac{i}{N}(1-u) + \frac{N-i}{N} v \\ P(i, j) = \binom{N}{j} p_i^j (1-p_i)^{N-j} \end{cases}$$

← 在取 j 次时，获得 i 次 A 的概率

Example 3

* HW:

$$\left.\begin{aligned} X_i &: S \to V \\ f &: V \to W \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & f(X_i) \\ & S \to W \end{aligned}$$

X_i 为 MC，给定 f，$f(X_i)$ 是否为 MC？

MC 的性质似乎为历史独立无关，由最新状态转移，若 f 与 i 相关是否不再为 MC？

Chapman equation

* Chapman - Kolmogorov equation:

$$P_t^{(m+n)}(i, j) = \sum_k P_t^{(m)}(i, k) P_{t+m}^{(n)}(k, j)$$

全概率公式 说明何处使用 MC 无记忆性 → HW

Example 4

* $\overset{-2}{\circ} — \overset{-1}{\circ} — \overset{0}{\circ} — \overset{1}{\circ} — \overset{2}{\circ} — \circ$ $p + q = 1$; $p, q \geq 0$

$\overleftarrow{p}$ $\overrightarrow{q}$

$P_n(j) = P(x_n = j \mid x_0 = 0)$

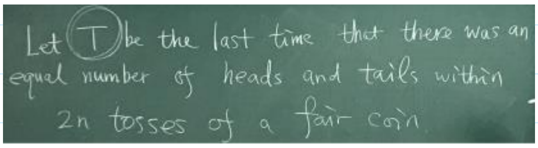
$\left\{ \sum_{i=1}^{5} f(i) e_i \right.$ 中若要提出 e_5 系数且 e_i 构成正交基 $\left. \langle \sum_{i=1}^{5} f(i) e_i , e_5^* \rangle \right\}$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(pe^{i\theta}+qe^{-i\theta})^n e^{-ij\theta}\,d\theta$$ 傅立叶反演，母函数

$(p=q=\frac{1}{2}时)$ $= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta)^n e^{-i\theta j}\,d\theta$ ---------- 计算积分 ⇒ HW

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left[1+(-1)^{n+j}\right]\binom{n}{\frac{n+j}{2}}$$

*



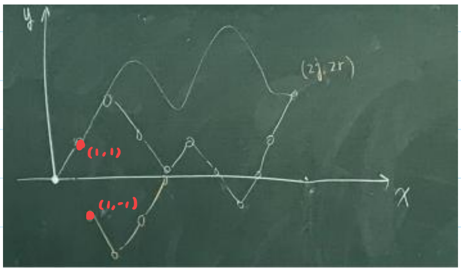
$P(T=2k) = P(S_{2k}=0,\ S_{2k+1}\neq 0,\ \cdots,\ S_{2n}\neq 0)$

[MC性质 独立] $= P(S_{2k}=0)\,P(S_1\neq 0,\ \cdots,\ S_{2n-2k}\neq 0)$

$= 2\cdot P(S_{2k}=0)\cdot P(S_1>0,\ \cdots,\ S_{2n-2k}>0)$

$= 2\cdot \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}\cdot \sum_{r=1}^{\infty} P(S_1>0,\ \cdots,\ S_{2n-2k-1}>0,\ S_{2n-2k}=2r)$ ←仿射原理

Example 5



$(1,1)\to(2j,2r)$ 总数：N_{2j-1}^{2r-1}

其中包含着触碰到x轴情况

$(1,-1)\to(2j,2r)$ 总数：N_{2j-1}^{2r+1}

由零点存在性定理该路径一定穿过x轴

由x轴翻转构成双射计数上述触碰到x轴情况

$Ans = N_{2j-1}^{2r-1} - N_{2j-1}^{2r+1}$

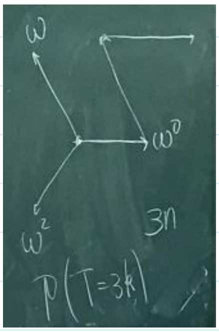
$= 2\cdot\ \cdots\ \cdot \underbrace{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{N_{2j-1}^{2r-1}-N_{2j-1}^{2r+1}}{2^{2j}}}$ $= \frac{1}{2}\left(\sum P_{2j-1}^{2r-1} - P_{2j-1}^{2r+1}\right)$

$= \frac{1}{2}P_{2j-1}^{1} = \frac{1}{2}P_{2j}^{0}$

⇒ $P(T=2k) = P_{2k}^{0}\ \ P_{2n-2k}^{0}$

~>

Example 5.1



拓展为3个方向概率w运动 ⇒ HW

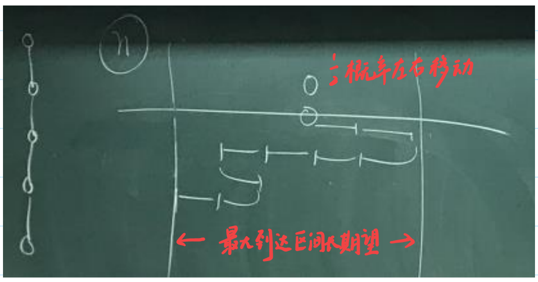
或历史问题：

蚊子360°飞完长，t时间后回归原点概率

甚至将完长限制抛去

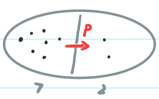
* 仿射原理例题：圆的 Lipsius 高度

Example 6



* Ehrenfest chain (urn)

Example 7



两边任挑一个左右翻转

$(P_1,\ \cdots P_7,\ \cdots P_{10})$ ↓ (7,2)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & \text{col } 6 & & \text{col } 8 & & \end{array} \\ \text{row } 7 & \begin{pmatrix} 0\cdots 0 & \frac{7}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

取左 (6,3)　取右 (8,1)

转移矩阵