士兵拿枪问题——错排问题的推广

李江贝 (alex-li@sjtu.edu.cn)

2018 年 6 月 17 日

目录

1 问题描述

某班有 n 个士兵, 每人各有一支枪, 这些枪外形完全一样, 在一次夜间紧急集合中, 若每人随机的取走一支枪, 问恰好有 $k(0 \leqslant k \leqslant n)$ 个人拿到自己的枪的概率是多少?

在Note 14中谢雨桐同学所写的帽子问题即为 $k = 0$ 时的情况, 在此我对此题进行推广, 以求得到更为普遍的结论.

2 问题的解决

设 n 个士兵中恰好有 k 个士兵拿对自己的枪的概率为 $P_k^{(n)}$, 由上课所提到的帽子问题可知

$$P_0^{(n)} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

记事件 A_i 表示第 i 个士兵拿对了自己的枪. 考察如下的情况:

只有 k 个士兵拿对了自己的枪, 不妨设这 k 个士兵编号为 $i_1, i_2, \cdots, i_k$, 这种情况发生的概率为

$$\begin{aligned}
&P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\overline{A_{i_{k+1}}}\cdots\overline{A_{i_n}}) \\
&= P(A_{i_1})P(A_{i_2}|A_{i_1})\cdots P(A_{i_k}|A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_{k-1}})\cdot P(\overline{A_{i_{k+1}}}\cdots\overline{A_{i_n}}|A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{n-(k-1)}\cdot P_0^{(n-k)} = \frac{(n-k)!}{n!}P_0^{(n-k)} \\
&= \frac{(n-k)!}{n!}\cdot(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!})
\end{aligned}$$

因为 n 个士兵中选 k 个士兵有 $\binom{n}{k}$ 种选法. 因此只有 k 个人拿到自己的枪的概率为

$$\begin{aligned}
P_k^{(n)} &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\overline{A_{i_{k+1}}}\cdots\overline{A_{i_n}}) \\
&= \binom{n}{k}\cdot\frac{(n-k)!}{n!}\cdot(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}) \\
&= \frac{1}{k!}\cdot(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!})
\end{aligned}$$

3 特殊的发现

观察我们得到的结论

$$P_k^{(n)} = \frac{1}{k!} \cdot (\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!})$$

当 $n \to \infty$ 时

$$\lim_{n\to\infty} P_k^{(n)} = k!\frac{1}{e}$$

这恰好是 $\lambda = 1$ 时的泊松分布在 k 处的取值.