Lecture Notes for Probability Theory ——Class2

Xiao Yunxuan

1 问题 (Tennis Match) Alice 和 Bob 将进行一场网球比赛，先赢得 N 回合的一方获胜。已知 Alice 和 Bob 在各自发球局获胜的概率分别为 p 和 q，考虑以下两种发球方式。

Alternating Serve（AS）：两位选手在每一回合交替轮换发球。

Winner Serve（WS）：前一回合胜利的一方将在本回合发球。

假设无论采取何种发球方式，第一个回合均由 Alice 发球。那么两位选手的获得全场比赛胜利的概率在这两种发球方式下是否有所区别?

证明 首先, 我们只需考虑 Alice 获胜的概率，因为二者获胜概率之和为 1；其次，无论采取何种发球方式，整场比赛至多进行 $2N-1$ 回合必能决出胜负。

1. 考虑 AS 情况：

假设 Alice 在前 k 场比赛后便胜出，在理想状态下，我们继续模拟二者继续按原发球方式进行剩余的 $2N-1-k$ 场比赛。

$$ABAB\cdots AB|AB\cdots ABA$$

此时 Alice 有 N 个发球局，Bob 有 $N-1$ 个发球局。

2. 考虑 WS 情况：

Alice 在 k 回合内获胜，则前 k 回合必有 N 回合为 Alice 的发球局，(Alice 每赢一回合，下一回合便是她的发球局；第 k 回合必为 Alice 胜利，与第一回合 Alice 发球对应)。在理想条件下，模拟剩余的 $2N-1-k$ 回合均为 Bob 的发球局。

$$ABBAA\cdots AB|BBB\cdots BB$$

此时同样 Alice 有 N 个发球局，Bob 有 $N-1$ 个发球局。

在以上两个理想实验中，各回合可视为相对独立事件，不再考虑发球局的顺序。两种赛制下 Alice 获胜概率被化归为同一个问题，即：在 Alice 有 N 个发球局，Bob 有 $N-1$ 个发球局的情况下，Alice 赢得其中 N 回合的概率。故采取任意一种赛制对于两位选手获胜概率是无影响的。

2 问题 (Hat Color) 有一个 7 人的团队，每人头上戴着一顶帽子，颜色为黑或白，每个人可以看到其他人帽子的颜色，并给出对自己帽子颜色的猜测（黑/白/*)。求在团队采取某种策略的情况下无人猜错的最大概率，并给出这个策略。

证明 设 1 代表白帽子，0 代表黑帽子，令 $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_7\}, x\in\mathbb{F}_2^7$ 表示 7 个人佩戴帽子情况，$x^{(k)}$ 为第 k 位观察者做出的判断，样本全空间 $V=\mathbb{F}_2^7$.

Step1: 构造矩阵 $B\in\mathbb{F}_2^{3\times7}$

$$B_{3\times7}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

其中 b_1,b_2,b_3 线性无关，令 $H=KerB=\{x\in\mathbb{F}_2^7\mid Bx=0\}$, 可知 $\mathbf{dim}H=4$，则 $|H|=2^4$.

故

$$P(x\in H)=\frac{|H|}{|V|}=\frac{1}{8}$$

$$P(x\in V-H)=1-P(x\in H)=\frac{7}{8}$$

x 等概率地分布在空间 V 中, 故有 $\frac{7}{8}$ 的概率落在 $V-H$ 中; 如能保证对 $\forall x\in V-H$ 一定不会猜错，则整个团队无人猜错的概率可以达到 $\frac{7}{8}$.

Step2: 构造单位向量组

$$I=\{e_i|i=0,1,\cdots,7\}$$

I 将全空间 V 划分为 8 个商空间

$$\{H\ +\ e_i|i=0,1,\cdots,7\}$$

则对任意 x，仅存在唯一 i 使得 $x\in H+e_i$.

我们坚信真实情况 $x\in H+e_i, i\neq 0$, 则必然存在唯一的 i 满足下列两种条件（R1, R2）之一:

R1 : $x|_{x_i=0}\in H$ 且 $x|_{x_i=1}\notin H$

R2 : $x|_{x_i=0}\notin H$ 且 $x|_{x_i=1}\in H$

则可以通过确定 x_i 的值，保证 x 落入 $H+e_i$ 内，进而保证若真实情况 $x\in H+e_i$ 则做出的判断一定正确。若真实情况 $x\in H$, 则团队无法成功使用该策略。

策略:

1. 进入游戏前，7 位观察者唯一确定数字 17 作为自己的编号，并构造矩阵 B 并知晓集合 H 中的元素。

2. 进入游戏后, 每位观察者通过验证自己的决策向量 $x^{(k)}$ 是否满足条件 $R1,R2$，来确定是否自己是唯一应做出非 * 回答的那个人。若不满足，则回答 *；若满足则调整 x_i 使得 x^k 落入 $V-H$ 内.

3 定理 (Murphy's Law) 使 $(A_n, n \geq 1)$ 为某概率空间上的任意事件序列，其满足对任意 $n \geq 1, A_n \subset A_{n+1}$. 令 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$。假设存在某些 ϵ 使得对任意 $n \geq 1$ 均成立 $P(A|A_n^c) \geq \epsilon$ 则 $P(A) = 1$.
(If something bad can happen it eventually will.)

证明 令 $p_n = P(A_n)$, 根据全概率公式有:

$$P(A) = P(A|A_n^c)(1 - p_n) + P(A|A_n)p_n$$

由于 $P(A|A_n) = 1$ 及假设 $P(A|A_n^c) \geq \epsilon$, 可得到

$$P(A) \geq \epsilon(1 - p_n) + p_n$$

由于 $P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} p_n$, 两边取极限

$$P(A) \geq \epsilon(1 - P(A)) + P(A)$$

故

$$P(A) = 1$$

4 问题 (The Balls) 不透明袋中共有 $a+b$ 个球，其中白球 a 个，黑球 b 个。先从中不放回地取出 n 个球，再从这 n 个球中取出一个，求最终取出的球为白球的概率。

证明 .

解法 1：设第一次取出的 n 个球中有 c 个白球，则最终取出白球的概率 P 可由下式得出：

$$P=\sum_{c=0}^{n}\frac{\binom{a}{c}\binom{b}{n-c}}{\binom{a+b}{n}}\frac{c}{n}$$

解法 2：

设事件 C 为取出的 n 个球中白色球的个数, 事件 A 为最后取出的球为白球

$\{x_i|i=1,\cdots,n\}$ 为一组随机变量，$x_i=1$ 表示第 i 个球为白色，$x_i=0$ 表示其为黑色。则在 $a+b$ 个球中取 n 个，其中白球数目的期望为：

$$E(C)=E(\sum_{c}x_i)=\sum_{c}E(x_i)=n\frac{a}{a+b}$$

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{c}P(A|C=c)P(C=c)\\&=E[P(A|C)]\\&=E[1\times P(A|C)+0\times P(\overline{A}|C)]\\&=E[E[A|C]]\\&=E(\frac{C}{n})\\&=\frac{1}{n}E(C)\\&=\frac{a}{a+b}\end{aligned}$$