概率论笔记 第6课

段宇轩

1　写在前面的话

本次课吴老师主要讲了一个有关随机图的例子和若干概率定理，主线为后讲的定理可应用于或辅以证明前面的例子或定理。由于内容较多，所以我在此只列出问题或定理内容，和部分推导过程。欢迎大家补充自己的想法，或者提出本笔记中的错误，谢谢!

2　授课内容

Markov's Inequality

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a} \qquad (a > 0,\ x \geq 0)$$

证明：

$$P(X \geq a) = E[1_{X \geq a}] \leq E[\frac{X}{a}] = \frac{E[X]}{a}$$

Chebyshev's Inequality

$$P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{E[(X - E[X])^2]}{a^2}$$

证明：等式左边等于

$$P(|X - E[X]|^2 \geq a)$$

之后套用Markov's Inequality.

例题：随机图

考虑有n个节点，在两两节点之间以p 的概率有无向边相连，$1-p$的概率没有。构成的随机图我们称为$G(n,p)$，它的点集称为V，边集称为E.

现在我们另有一给定的图G，且定义两个图具有包含关系($G \subseteq H$)意为：

$$\begin{aligned}\exists \phi : V_G &\mapsto V_H \\ g_i &\to h_i \in V_H \qquad (\forall g_i \in V_G) \\ \text{s.t. } (\phi(g_i), \phi(g_j)) &\in E_H \qquad (\forall (g_i, g_j) \in E_G)\end{aligned}$$

求$P(G \subseteq G(n,p))$ 和 $\lim_{n\to\infty} P(G \subseteq G(n,p))$

解：

$$P(X=0) \leq P(|X - E[X]| \geq E[X]) \leq \frac{\text{var}(X)}{(E[X])^2} = \frac{E[X^2]}{(E[X])^2} - 1$$

其中倒数第二步用到了Chebyshev's Inequality

令X_n为$G(n,p_n)$中与G同构子图的个数，则有

$$P(X_n=0)=\frac{\mathrm{var}(X_n)}{(E[X_n])^2}\to 0$$

令$m(G)=\max\{\frac{|E_H|}{|V_H|}:H\subseteq G\}$，即$G$的所有子图中边数/点数的最大值，则有

$$P(n)\cdot n^{\frac{1}{m(G)}}\to\infty$$

其中$P(n)$为有n个节点的概率

Weak Law of Large Numbers (J. Bernoulli, 1713)

$X_1,X_2,\dots X_n$是互相独立的随机变量，记$\mu_i=E[X_i]$，$\sigma_i^2=\mathrm{var}(X_i)$，$S=X_1+X_2+\cdots+X_n$

证$P(|\frac{S_n}{n}-E[\frac{S_n}{n}]|<\varepsilon)\to 1\qquad(n\to\infty)$

Wierstrass Approximation Theorem

$[a,b]\subseteq\mathbb{R}$，f 在$[a,b]$上连续

证存在实多项式函数g s.t. $\sup_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|<\varepsilon$

Serge Bernstein, 1912

$$\sup_{0\le x\le 1}|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(\frac{k}{n})x^k(1-x)^{n-k}|\to 0\qquad(n\to\infty)$$

其中

$$B_{n,f}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(\frac{k}{n})x^k(1-x)^{n-k}$$

为Bernstein构造的多项式函数

$$\begin{aligned}E[f(\frac{S_n}{n})]&=B_{n,f}(p)\\|B_{n,f}(p)-f(p)|&=|E[f(\frac{S_n}{n})]-f(p)|\\&=|\sum_{k=0}^{n}(f(\frac{k}{n})-f(p))\cdot P(S_n=k)|\\&\le\sum_{|\frac{k}{n}-p|\le\eta}+\sum_{|\frac{k}{n}-p|\le\eta}\end{aligned}$$

Bernstein 根据Weak Law of Large Number 的推导

$$\begin{aligned}P(|\frac{S_n}{n}-P|\ge t)&\le\frac{p(1-p)}{nt^2}\\&\le e^{-nh_+(t)}+e^{-nh_-(t)}\end{aligned}$$

Chernoff's Bound i.e. Hoeffding's Inequality

$$P[S_n\ge(p+t)n]\le e^{-nh_+(t)}\qquad(p+t)\le 1$$
$$P[S_n\le(p-t)n]\le e^{-nh_-(t)}$$

Kullback-Leibler Divergence (Relative Entropy)

$$\mathbb{D}_{KL}(P\|Q) = \sum_i p_i \ln \frac{p_i}{q_i}$$
$$(P: p_1, p_2, \dots p_n$$
$$Q: q_1, q_2, \dots q_n)$$

其中，$\mathbb{D}_{KL}$满足性质$\mathbb{D}_{KL} \geq 0$

$$h_+(t) = \mathbb{D}_{KL}((p+t, 1-p-t)\|(p, 1-p))$$
$$h_-(t) = \mathbb{D}_{KL}((p-t, 1-p+t)\|(p, 1-p))$$

应用于Chernoff's Bound

$$\begin{aligned}
P(S_n \geq (p+t)n) &= P(\lambda S_n \geq \lambda(p+t)n) \qquad (\lambda > 0) \\
&= P[e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda(p+t)n}] \\
&\leq \frac{E[e^{\lambda S_n}]}{e^{\lambda(p+t)n}} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^n E[e^{\lambda x_i}]}{e^{\lambda(p+t)n}} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^n (pe^{\lambda} + (1-p)e^0)}{e^{\lambda(p+t)n}} \\
&= [\frac{pe^{\lambda} + (1-p)}{e^{\lambda(p+t)}}]^n \\
&= e^{-nh_-(t)} \\
\Rightarrow P(S_n \geq (p+t)n) &\leq [\frac{pe^{\lambda} + (1-p)}{e^{\lambda(p+t)}}]^n
\end{aligned}$$

Encoding Arguments (P. Morin, W. Mulzer, T. Reddad, ACM Computing Surveys (2017))

D为$\{0,1\}^n$上的概率分布，$\forall x \in \{0,1\}^n$，存在其概率P_x

令w为$\{0,1\}^n$上的非负权重函数s.t.

$$\sum_{x \in \{0,1\}^n} w(x) \leq 1$$

对$\forall s \geq 1$

$$P_{x \sim D}[w(x) \geq s \cdot P_x] \leq \frac{1}{S}$$

令

$$Z_s = \{x \in \{0,1\}^n : w(x) \geq s \cdot P_x\}$$

有

$$\begin{aligned}
P_{x \sim D}[w(x) \geq s \cdot P_x] &\leq \sum_{x \in Z_s} P_x \cdot \frac{w(x)}{s \cdot P_x} \\
&\leq \frac{1}{S} \sum_x w(x) \\
&\leq \frac{1}{S}
\end{aligned}$$

令

$$X = X_1\ X_2\ \ldots X_n \qquad (X_i \in \{0,1\}^n)$$

k_X为X中1的个数
有

$$\begin{aligned} P_X &= p^{k_X} \cdot (1-p)^{n-k_X} \\ w(X) &= (p+t)^{k_X} \cdot (1-p-t)n - k_X \\ P(S_n \geq (p+t)n) &= P_{X\sim D}[k_X \geq (p+t)n] \\ &\cdots \\ &= P_{X\sim D}[w(X) \geq P_X \cdot e^{-nh_+(t)}] \\ &\leq e^{-nh_+(t)} \end{aligned}$$