Solutions to Some Problems in Lecture 20

范舟
516030910574
zhou.fan@sjtu.edu.cn
上海交通大学 ACM 班

1 Escape Probability and Sojourn Time

1.1 问题

在 Lecture 20 中，我们已经通过马尔可夫链上的随机行走过程与电阻网络之间的联系得到了等效电阻与 escape probability，sojourn time 的关系

$$P_{esc}(s \to t) = \frac{1}{c_s r_{eff}(s,t)}$$

$$r_{eff}(s,t) = \frac{S_s(s \to t)}{c_s}$$

因此得到 escape probability 与 sojourn time 之间的等式关系

$$P_{esc}(s \to t) = \frac{1}{S_s(s \to t)} \tag{1}$$

事实上我们也可以不借助电阻网络的概念，直接证明这一结论，下面将给出直接的证明过程. 在证明之前，先给出 escape probability 与 sojourn time 的定义表述.

1.2 定义

为了定义 ecaspe probability 与 sojourn time，在这里首先给出 hitting time 的定义.

Hitting Time 对于一个可逆马尔可夫链对应的无向图 G，令 S 为一个节点子集，即 $S \subseteq V(G)$. 定义两种不同的 hitting time 为

$$\tau_S = \min\{t \geq 0, X_t \in S\}$$

$$\tau_S^+ = \min\{t \geq 1, X_t \in S\}$$

即 τ_S 为第一次到达 S 集合内的节点的时间，τ_S^+ 为排除初始状态后第一次到达 S 集合内的节点的时间.

Escape Probability 定义逃逸概率[1] $P_{esc}(s \to t)$ 为从 s 出发，在再次回到 s 之前到达 t 的概率，即

$$P_{esc}(s \to t) = P_s(X_{\tau^+_{\{s,t\}}} = t)$$

Sojourn Time 对于马尔可夫链上的随机行走过程，定义从节点 s 出发并到达节点 t 之前，到达节点 x 的次数的期望为 sojourn time $S_x(s \to t)$，即

$$S_x(s \to t) = E_s(|\{i < \tau_{\{t\}} : X_i = x\}|)$$

1.3 证明

下面我们直接证明等式 (1). 根据期望的定义，有

$$\begin{aligned}
S_x(s \to t) &= E_s(|\{i < \tau_{\{t\}} : X_i = x\}|) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k P_s(|\{i < \tau_{\{t\}} : X_i = x\}| = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - P_{esc}(s \to t))^{k-1} P_{esc}(s \to t) \\
&= \frac{1}{P_{esc}(s \to t)}
\end{aligned}$$

评注 事实上，对于从节点 s 开始的随机行走过程，在逃逸（即到达节点 t）之前访问节点 s 的次数 $|\{i < \tau_{\{t\}} : X_i = x\}|$ 是一个服从几何分布的随机变量，这一几何分布的参数 $p = P_{esc}(s \to t)$. 证明过程中的最后一步等式是数列求和，即求几何分布随机变量的期望.

[1] escape probability