

概率论笔记 3

周久钦

目录

1	车祸现场	2
2	矩阵测试	2
3	社会风评	3
4	哈迪-温伯格定律	3

1 车祸现场

昨夜有一辆出租车出了车祸. 已知平时这条路上有 15% 的概率出现白车, 85% 的概率出现黑车. 那晚某位证人看到的车是白车, 且证人有 20% 的概率看错. 请问出车祸的车是黑车的概率大, 还是白车的概率大?

- 1 **定理 (全概率定理)** 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是一组互不相容的事件, 形成样本空间的一个分割 (每一试验结果必定使得其中一个事件发生). 又假定对每一个 i , $P(A_i) > 0$. 则对于任何一个事件 B , 只要它满足 $P(B) > 0$, 下列公式成立

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1)P(B|A_1) + \dots + P(A_n)P(B|A_n) \end{aligned}$$

- 2 **定理 (贝叶斯准则)** 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是一组互不相容的事件. 形成样本空间的一个分割 (每一个实验结果必定使得其中一个事件发生). 又假定对每一个 i , $P(A_i) > 0$. 则对于任何一个事件 B , 只要它满足 $P(B) > 0$, 下列公式成立

$$\begin{aligned} P(A_i|B) &= \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)} \end{aligned}$$

解答 设 A_1 是该车为白车, A_2 是该车为黑车, B 是证人看到的车是白车. 根据贝叶斯准则

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} \\ &= \frac{0.15 \times 0.8}{0.15 \times 0.8 + 0.85 \times 0.2} \\ &= \frac{12}{39} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

所以是黑车的概率大.

作业 用全概率公式和贝叶斯准则估计明天太阳升起的概率.

2 矩阵测试

若 $AB = C$, 显然有 $ABr = Cr$ ($A, B \in F_2^{m \times n}$, $r \in F_2^n$). 现在任取 $r \in F_2^n$, 使得 $ABr = Cr$, 求 $AB = C$ 的概率.

作业 解决上述问题.

3 社会风评

假设路人绝对诚实. 现在随机找一个人来做实验: 先抛一枚硬币, 正面朝上就问他的生日是否是前半年, 反面朝上就问他没有偷过东西. 如此重复 150 次. 现在在 150 人中, 有 60 人回答 YES, 请问该社会中有多少比例的人偷过东西?

解答

$$\begin{aligned} 0.5 \times 0.5 + 0.5 \times x &= \frac{60}{150} \\ \Rightarrow x &= 0.3 \end{aligned}$$

评注 问题涉及到统计, 不是完全的概率.

4 哈迪-温伯格定律

在理想情况下, 种群的基因频率不变. 记 A 的频率为 p , a 的频率为 q , 即 $P(A) = p$, $P(a) = q$.

基因类型	AA	Aa	aa
频率	p^2	$2pq$	q^2

$$\Rightarrow P(A) = p^2 + pq = p$$

$$P(a) = q^2 + pq = q$$

所以基因频率不变.

作业 将该定律推广到多组基因的情况, 验证定律是否仍然成立.

3 定理 (独立性) 两个事件 A 和 B 称为互相独立的, 如果他们满足

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

若 B 还满足 $P(B) > 0$, 则独立性等价于

$$P(A|B) = P(A)$$

.

4 定理 (一组事件的独立性) 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个事件, 若它们满足

$$\forall S \subset [n], P(\cap_{i \in S} A_i) = \prod_{i \in S} P(A_i)$$

则称 A_1, A_2, \dots, A_n 为相互独立事件.

作业 对于 $\forall T \subset 2^{[n]}$, 试构造一个 $[n]$ 的概率分布, 使得

$$P(\cap_{E \in T} E) = \prod_{E \in T} P(E)$$

例 给定一个集合

$$\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$P(a) = P(b) = \frac{1}{8}$$

$$P(c) = P(d) = P(e) = P(f) = \frac{3}{16}$$

又

$$E_1 = \{a, d, e\}$$

$$E_2 = \{a, c, e\}$$

$$E_3 = \{a, c, d\}$$

计算可得

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{2}$$

但

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \neq P(E_1) \times P(E_2) \times P(E_3)$$

所以不是合法的概率分布.

作业 ABC 三人每人各有一个骰子, 上面有一些正整数. 三人掷骰子点数分别记为 ABC . 如图

A	2	2	6	6	7	7
B	1	1	5	5	9	9
C	3	3	4	4	8	8

有 $P = P(A > B) = P(B > C) = P(C > A) = \frac{5}{9}$, 试在保持等式成立的情况下

1. 只修改骰子面值, 尽可能提高 P 值.
2. 讨论骰子面数大于六面的情况.

作业 下无向图中每条边有 p 的概率断裂, 试求图联通的概率.

