概率论笔记 No.16

李江贝 (alex-li@sjtu.edu.cn)

2018 年 5 月 17 日

目录

1 知识回顾

1.1 离散随机变量分布

1 定义 (泊松分布)

$$p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

2 定义 (伯努利分布)

$$p_X(k) = \begin{cases} p & k = 1, \\ 1-p & k = 0. \end{cases}$$

1.2 全变差距离

3 定义 (全变差距离 (Total variation distance)) 设 P, Q 为定义在样本空间 Ω 上的概率分布.

$$d_{TV}(P,Q) = \sup_{A\subseteq\Omega} \mid P(A) - Q(A) \mid$$

4 推论 在一个有限的概率空间里,P 和 Q 的全变差距离等于他们对应位置差的绝对值之和的一半.

$$d_{TV}(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega} \mid P(\omega) - Q(\omega) \mid$$

证明 设 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$.

不妨设 $A = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k\}, \mid P(A) - Q(A) \mid$ 最大, 且为正数

所以 $P(\omega_i) > Q(\omega_i), i = 1, 2, \cdots, k$

$P(\omega_i) < Q(\omega_i), i = k+1, k+2, \cdots, n$

$$\begin{aligned} P(A) - Q(A) &= \sum_{i=1}^{k}(P(\omega_i) - Q(\omega_i)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(P(\omega_i) - Q(\omega_i)) + \frac{1}{2}\sum_{i=k+1}^{n}(Q(\omega_i) - P(\omega_i)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mid P(\omega_i) - Q(\omega_i) \mid \end{aligned}$$

2 Poisson Approxmation

5 引理 (独立的泊松随机变量之和仍服从泊松分布)

证明 设 $X \sim Poisson(\lambda), Y \sim Poisson(\mu), Z = X + Y$,

则 $P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, P(Y=y) = e^{-\mu}\frac{\mu^y}{y!}$.

$$
\begin{aligned}
P(Z=z) &= \sum_{x=0}^{z} P(X=x)\cdot P(Y=z-x) = \sum_{x=0}^{z} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\cdot e^{-\mu}\frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!} \\
&= e^{-(\mu+\lambda)}\sum_{x=0}^{z}\frac{\lambda^x}{x!}\cdot\frac{\lambda^{z-x}}{(z-x)!} = e^{-(\mu+\lambda)}\sum_{x=0}^{z}\frac{\binom{z}{x}\lambda^x\mu^{z-x}}{z!} \\
&= \frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{z!}(\lambda+\mu)^z
\end{aligned}
$$

因此,$Z \sim Poisson(\lambda+\mu)$

6 定理 (Lucien Le Cam 1960) 设 $n \in N$

1. $X_i \sim Bernoulli(p_i), i = 1, 2, 3, \cdots$
2. $S = X_1 + \cdots + X_n$
3. $\lambda = \sum_{i=1}^{n} p_i$
4. $Q \sim Poisson(\lambda)$

$$
d_{TV}(Q, S) \leqslant \sum_{r=1}^{n} p_r^2
$$

证明 设分布 Y_r, 构造联合分布 (X_r, Y_r), $r = 1, 2, \cdots n$. 构造方法如下:

$$
P(X_r = x, Y_r = y) = \begin{cases} 1 - p_r & if\ x = y = 0 \\ e^{-p_r} - 1 + p_r & if\ x = 1, y = 0 \\ \frac{p_r^y}{y!}e^{-p_r} & if\ x = 1, y \geqslant 1 \\ 0 & if\ x = 0, y \geqslant 1 \end{cases}
$$

首先证明 (X_r, Y_r) 是一个分布列:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} P(X_r = x, Y_r = y) \\
&= P(X_r = 0, Y_r = 0) + P(X_r = 1, Y_r = 0) + \sum_{y=1}^{\infty} P(X_r = 1, Y_r = y) + \sum_{y=1}^{\infty} P(X_r = 0, Y_r = y) \\
&= 1 - p_r + e^{-p_r} - 1 + p_r + \sum_{y=1}^{\infty}\frac{p_r^y}{y!}e^{-p_r} = 1
\end{aligned}
$$

因此,(X_r,Y_r) 是一个分布列.

考虑 (X_r,Y_r) 的两个分量. 在 X_r 方向的分量上, 概率分布满足

$$P(X_r)=\begin{cases}1-p_r & if\ X_r=0\\ p_r & if\ X_r=1\end{cases}$$

$$X_r \sim Bernoulli(p_r)$$

在 Y_r 方向的分量上, 概率分布满足

$$P(Y_r=y)=\frac{p_r^y}{y!}e^{-p_r}$$

$$Y_r \sim Poisson(p_r)$$

由引理 5, 以及 $S=X_1+X_2+\cdots+X_n$

将 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots(X_n,Y_n)$ 加起来有:

$$\sum_{r=1}^{n}P(X_r,Y_r)=P(\sum_{r=1}^{n}X_r,\sum_{r=1}^{n}Y_r)=P(S,Poisson(\lambda))=P(S,Q)$$

$$d_{TV}(S,Q)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\mid P(S=k)-P(Q=k)\mid=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\mid P(S=k,Q\neq k)-P(S\neq k,Q=k)\mid$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(P(S=k,Q\neq k)+P(S\neq k,Q=k))=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}P(S=k,Q\neq k)+sum_{k=0}^{\infty}P(S\neq k,Q=k)$$
$$=\frac{1}{2}(P(S\neq Q)+P(S\neq Q))=P(S\neq Q)$$

考虑事件 $S\neq Q$, 他被子事件 $X_r\neq Y_r, r=1,2,\cdots$ 所覆盖.

所以 $\bigcup_{r=1}^{n}\{X_r\neq Y_r\}\supseteq\{S\neq Q\}$

$$P(S\neq Q)\leqslant\sum_{r=1}^{n}P(X_r\neq Y_r)=\sum_{r=1}^{n}(P(X_r=1,Y_r=0)+P(Y_r\geqslant 2))$$
$$=\sum_{r=1}^{n}(e^{-p_r}-1+p_r+(1-P(Y_r=0)-P(Y_r=1))=\sum_{r=1}^{n}p_r(1-e^{-p_r})$$
$$\leqslant\sum_{r=1}^{n}p_r^2$$

证毕.

3 在面积为 1 的三角形中随机取三个点，构成三角形的面积期望是多少?

设三角形 ABC 的面积为 1, 在三角形 ABC 中随机取三个点 P,Q,R.

7 引理 在 BC 上任取一点 D, 在三角形 ABD 中随机取一点 P, 在三角形 ACD 中随机取一点 Q, 有 $E\mid APQ\mid=\frac{2}{9}$

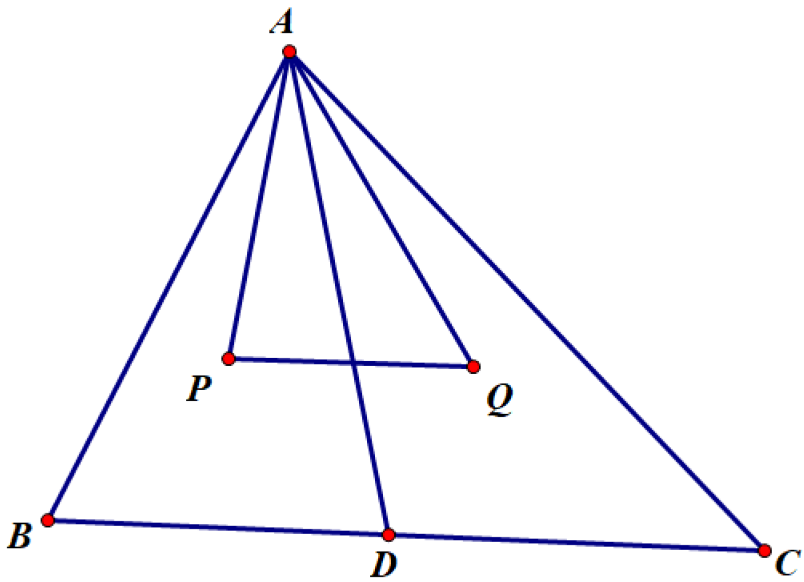

图 1: P,Q 在 AD 两侧

证明 首先固定 AQ, 在三角形 ABD 中随机选取点 P, 由重心的性质可知, 三角形 APQ 面积的均值等于当点 P 为三角形 ABD 重心时三角形 APQ 的面积.

同理, 固定点 P, 三角形 APQ 面积的均值等于当点 P 为三角形 ACD 重心时三角形 APQ 的面积.

因此, 三角形 APQ 面积的均值等于，当 P 为三角形 ABD 重心,Q 为三角形 ACD 重心时, 三角形 APQ 的面积.

由重心的性质可知,PQ // BC, 且截取线段的比例为 2:1. 经计算可知:

$$E\mid APQ\mid=(\frac{2}{3})^2\cdot\frac{1}{2}\mid ABC\mid=\frac{2}{9}$$

8 引理 在三角形 ABC 中随机取 P,Q 两点, 有 $E\mid APQ\mid=\frac{4}{27}$

证明 设 D 为 BC 的中点, 连结 AD, 设 $E\mid APQ\mid = r$.

讨论 P,Q 与 AD 的相对位置.

1. 若 P,Q 在 AD 的两侧

   P(P,Q 在 AD 的两侧) $= \frac{1}{2}$

   由引理 7 可知,$E\mid APQ\mid = \frac{2}{9}$

2. 若 P,Q 在 AD 的同侧, 如图 2 所示

   P(P,Q 在 AD 的同侧) $= \frac{1}{2}$

   因为 $\mid ABD\mid = \frac{1}{2}\mid ABC\mid$, 所以 $E\mid APQ\mid$ (P,Q 在 AD 的同侧) $= \frac{1}{2}r$

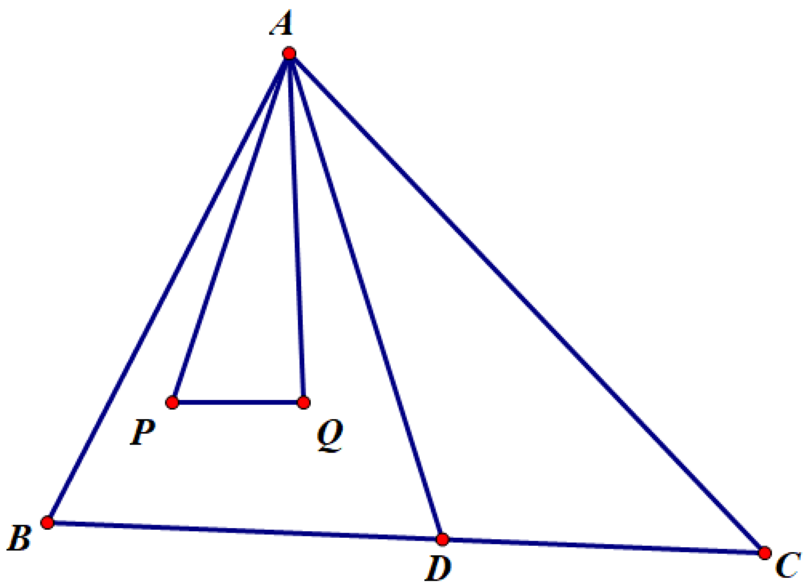

图 2: P,Q 在 AD 同侧

由全概率公式可知

$$E\mid APQ\mid = \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}r)+\frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{9}) \Leftrightarrow r = \frac{1}{4}r+(\frac{1}{9}) \Leftrightarrow r = \frac{4}{27}$$

9 引理 在边 BC 上随机选取点 R, 在三角形 ABC 内部随机选取点 PQ，有 $E\mid PQR\mid = \frac{1}{9}$

证明 连结 AR, 不妨设 $BR = rBC$ 对 P,Q,R 的相对位置分情况讨论:

1. 若 P,Q 均在三角形 ABR 中, 如图 3.

$$P(P,Q \in \triangle ABR) = r^2$$

由引理 8 可知:

$$E \mid PQR \mid = \frac{4}{27} r$$

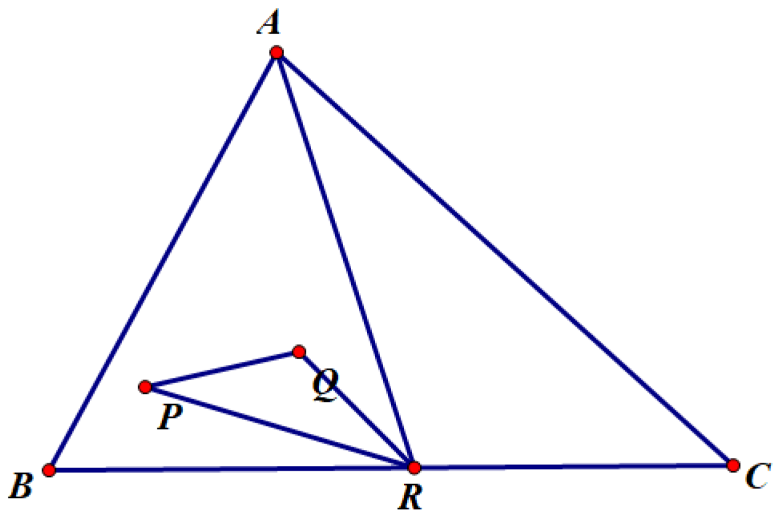

图 3: P,Q 均在三角形 ABR

2. 若 P,Q 均在三角形 ACR 中. 同理:

$$P(P,Q \in \triangle ACR) = (1-r)^2$$

$$E \mid PQR \mid = \frac{4}{27}(1-r)$$

3. 若 P,Q 在 AR 两侧, 如图 4.

$$P((P \in \triangle ABR, Q \in \triangle ACR) or (P \in \triangle ACR, Q \in \triangle ABR)) = 2r(1-r)$$

连结 AP,AQ. 由引理 7:

$$\begin{aligned} &E \mid PQR \mid = E(\mid APR \mid + \mid AQR \mid - \mid APQ \mid) \\ &= E \mid APR \mid + E \mid AQR \mid - E \mid APQ \mid \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

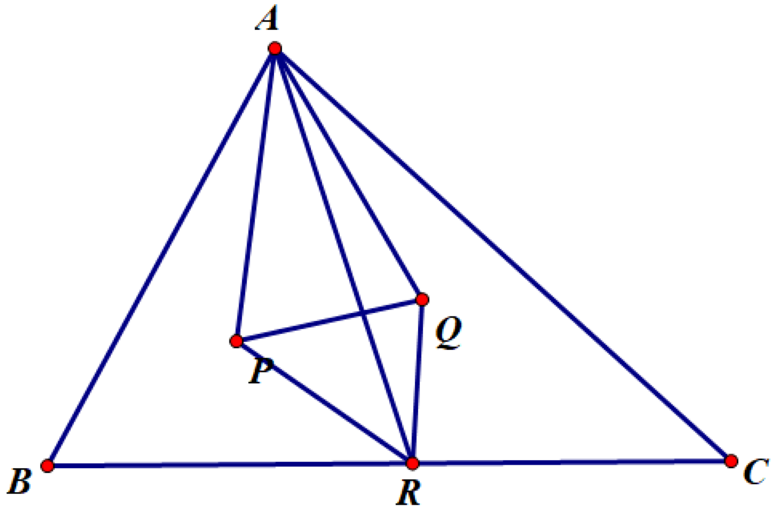

图 4: P,Q 在 AR 两侧

最后由全概率公式,

$$E\mid PQR\mid = r^2\cdot\frac{4}{27}r+(1-r)^2\cdot\frac{4}{27}(1-r)+2r(1-r)\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{9}r^2-\frac{2}{9}r+\frac{4}{27}$$

对 r 在 $(0,1)$ 上进行积分.

$$E\mid PQR\mid = \int_0^1(\frac{2}{9}r^2-\frac{2}{9}r+\frac{4}{27})dr=\frac{1}{9}$$

10 定理 设三角形 ABC 的面积为 1, 在三角形 ABC 中随机取三个点 P,Q,R.

$$E\mid PQR\mid = \frac{1}{12}$$

证明 由仿射变换, 不妨设三角形 ABC 为等腰直角三角形,AB = AC = x. 并建立如图 5 所示的平面直角坐标系. 设 $E\mid PQR\mid = A(x)$, 分别在 AB 和 AC 的延长线上取点 $B'(x+\delta,0),C'(0,x+\delta)$, 连结 B',C', 设区域 $BCC'B'$ 为 Δ.

$$\frac{dA}{dx}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{A(x+\delta x)-A(x)}{\delta x}$$

在三角形 $AB'C'$ 中, 随机取三个点 P,Q,R:

1. P,Q,R 均在三角形 ABC 中:

$$P(P,Q,R\in\triangle ABC)=[\frac{x^2}{(x+\delta x)^2}]^3$$

$$=(1-\frac{(\delta x)^2+2x\delta x}{(x+\delta x)^2})^3=1-\frac{6\delta x}{x}+o(\delta x)$$

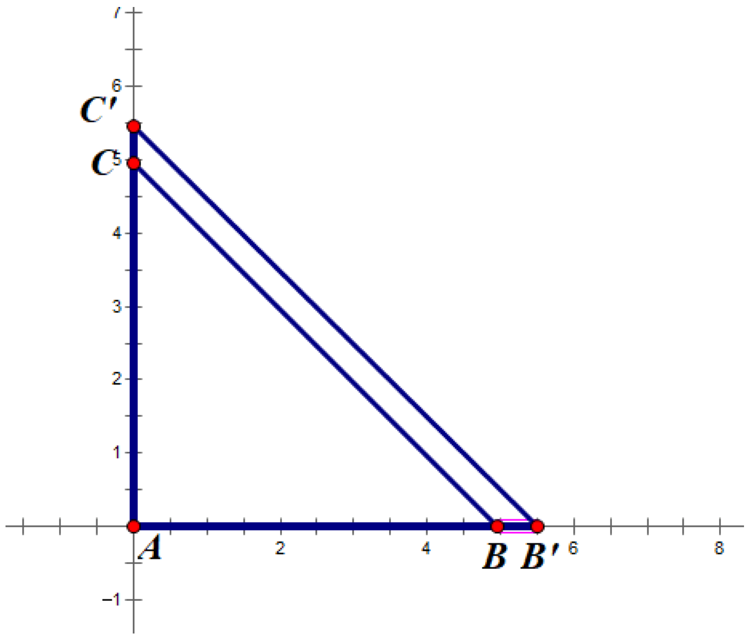

图 5: 定理 10

$$E \mid PQR \mid = A(x)$$

2. P,Q,R 中有两个点在三角形 ABC 中, 一个点在 Δ 中, 不妨设为 R 在 Δ 中.(最后得到的概率乘 3 即可)

$$P((P,Q \in \triangle ABC) \cap (R \in \Delta)) = [\frac{x^2}{(x+\delta x)^2}]^2 \cdot \frac{(\delta x)^2 + 2x\delta x}{(x+\delta x)^2}$$
$$= \frac{2\delta x}{x} + o(\delta x)$$

由引理 9 可知:

$$E \mid PQR \mid = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{18}$$

3. P, Q, R 中有一个点在三角形 ABC 中, 两个点在 Δ 中, 不妨设为 R 在三角形 ABC 中.

$$P((R \in \triangle ABC) \cap (P,Q \in \Delta)) = \frac{x^2}{(x+\delta x)^2} \cdot [\frac{(\delta x)^2 + 2x\delta x}{(x+\delta x)^2}]^2 = o(\delta x)$$

4. P, Q, R 均在 Δ 中, 同理

$$P(P,Q,R \in \Delta) = o(\delta x)$$

由全概率公式, 令 $\delta x \to 0$ 得到:

$$A(x+\delta x) = A(x)(1 - \frac{6\delta x}{x}) + 3 \cdot \frac{x^2}{18} \cdot \frac{2\delta x}{x} + o(\delta x)$$
$$\Leftrightarrow \frac{A(x+\delta x) - A(x)}{\delta x} = -\frac{6A(x)}{x} + \frac{x}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{dA}{dx} = -\frac{6A}{x} + \frac{x}{3}$$

易知,$A(0)=0$. 从而得到方程的解为

$$A(x)=\frac{x^2}{24}$$

因此当三角形 ABC 面积为 1 时,$E\mid PQR\mid=\frac{1}{12}$