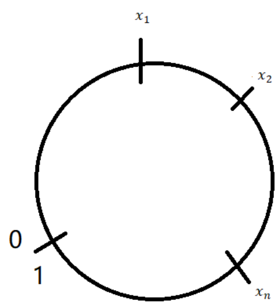
概率论笔记-19

516030910581 刘畅 only-changer@sjtu.edu.cn

例题一：

随机变量 X 满足$x \in U[0,1]$，且有 x1,x2……xn 为独立同分布，我们对 X 中每一项进行排序，有$0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le 1$，这 n 个随机变量把[0,1]分成了 n+1 份，则每段长度的均值为？

解：



本题等价于在一个周长为 1 的圆上取 n+1 个点，则有 n+1 条线段的均值为 1，即每条线段的均值为 $\frac{1}{n+1}$

思考一：

如果变量 X 满足$x \in U[M]$，有 x1,x2……xn 为独立同分布并且均为整点，我们仍然对 X 中每一项进行排序，有$1 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le m$，这 n 个随机变量把[1,m]分成了 n+1 份，求每段长度的均值？还可以用同样的方法做吗？

答案是否定的，此时的随机变量 X 有可能存在两个点大小相等，因此不再可以像第一题那样进行问题转换。

思考二：

如果变量 X 满足分布函数 f(x)，且有 x1,x2……xn 为独立同分布，我们仍然对 X 中每一项进行排序，有$0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le 1$，这 n 个随机变量把[0,1]

分成了 n+1 份，求每段长度的均值？（设累计分布函数为 F(x)）

解：

$f_k(x)dx = P(x \in dx)$

$= \mathrm{p}(一个\ \mathrm{x} \in \mathrm{dx}', 且恰有\ \mathrm{k}-1\ 个其他点 < x')$

$= \mathrm{np}(x_1 \in dx) * p($恰有 k-1 个其他点 $< x')$

$= \mathrm{n} * \mathrm{f(x)dx} * C_{n-1}^{k-1} * \mathrm{F(x)}^{k-1} * (1-\mathrm{F(x)}^{n-k})$

即有 k-1 个点比 x 小，n-k 个点比 x 大

有 $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 1, x \in [0,1] \\ 0, x \notin [0,1] \end{cases}$

$\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, 0) \\ x, x \in [0,1] \\ 1, x \in (1, +\infty) \end{cases}$

期望公式为

$$\mathrm{E}(x_k) = \int_0^1 f_k(x)dx$$

$$= \int_0^1 n * C_{n-1}^{k-1} * x^k * (1-x)^{n-k}\, dx$$

$$= \mathrm{n} * C_{n-1}^{k-1} * \int_0^1 x^k * (1-x)^{n-k}\, dx$$

$$= \mathrm{n} * C_{n-1}^{k-1} * \frac{(k-1)!*(n-k)!}{n!}$$

$$= \frac{k}{n+1}$$

所以每段长度的期望为

$$\mathrm{E}(x_k) - E(x_{k-1}) = \frac{1}{n+1}$$

证毕，同时我们也验证了之前转换成圆的做法的正确性。

思考三：如果 X 为离散的，比如 X1,X2,X3,X4 $\in [6]$,且有 $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$

试求 E($x_2 - x_3$)

解：E($x_2 - x_3$) $= \sum_{i=1}^{5} P(x_2 \le i, x3 \ge i+1)$

$= \sum_{i=1}^{5} C_4^2\, \mathrm{P}(x_1, x_2 \le i\, , x_3, x_4 \ge i+1)$

$$= \frac{C_4^2}{6^4} * \sum_{i=1}^{5} i^2 * (6-i)^2$$

$$= \frac{259}{216}$$

习题一：

接上题，若$Y_0 = 1$, $Y_1 = X_1$, … , $Y_4 = X_4$, $Y_5 = 6$

求 1. $\max E(Y_i - Y_{i-1}) = ?$

2. $\mathrm{E}(\max(Y_i - Y_{i-1})) = ?$

习题二：设点集 V = $\{0,1\}^k$ 即为长度为 k 的 01 串

设 T 为抛硬币模型下 01 串第一次出现的时间

假设两点 AB，AB 有边当且仅当$\mathrm{P}(T^A < T^B) > \frac{1}{2}$

求 $\max \mathrm{P}(T^A < T^B)$

习题三：

对于马尔科夫链 (b,a1,a2,a3⋯,ak-1)

∃b , 使得(b,a1,a2,a3…,ak-1) -> (a1,a2,a3,…,ak)

且满足任何一点有入邻居。

该问题即著名的 De Bruijn 问题。

例题二：

关于马尔科夫链及其平稳分布，在此用矩阵重新证明。

首先给出一些定义

首次访问时间 $m_{ij} = \mathrm{E}$(从 i 出发第一次经过 j 的时间)

M 为 m_{ij} 构成的矩阵

首次回归时间　$r_i =$ E(从 i 出发第一次回到 i 的时间)

R 为 以 r_i 为对角元构成的矩阵

平稳分布：　$W = (w_1, w_2, \dots, w_k)$

基于以上这些定义，一定有： $r_i = \frac{1}{w_i}$

证明：

先证明引理：(I – P) M = J – R（其中 I 为单位矩阵，J 为全 1 矩阵）

利用全概率公式，我们可得：

$$m_{ij} = p_{ij} + \sum_{k<>j} p_{ik}(m_{kj} + 1)$$
$$= 1 + \sum_{k<>j} p_{ik} m_{kj} \quad ---①$$

（可以理解成要从 i 到 j，要经过 k，因此枚举 k 即可）

$$r_i = \sum_{k<>i} p_{ik}(m_{ki} + 1) \quad ---②$$

（可以理解成要从 i 绕回 i，要经过 k，因此枚举 k 即可）

由上述两式可得

M = J – R + P * M　　--③

证明技巧：对于不在对角线上的点，利用①式；

在对角线上的点，利用①②相加即可。

③式经过移项易得原式

(I – P) M = J – R　　---④

又因为 W 为平稳分布，有：W(I – P) = 0

④式两边同乘 W 可得

W(J – R) = W(I – P)M = 0

所以 W(J – R) = 0

即 $r_i = \frac{1}{w_i}$

证毕。

例题三：

在马尔科夫链中，证明 （I – P + W）可逆

证明：

由平稳分布的定义： W = $\lim_{n \to \infty} P^n$

则 $(\mathrm{I} - (\mathrm{P} - \mathrm{W}))^{-1} = I + (P - W) + (P - W)^2 + \cdots + (P - W)^n$

又因为 $(P - W)^n = P^n - W \to 0$

所以 （I – P + W）可逆

注：除了这种直接根据 W 的定义证明外，还可以通过（I – P + W）x = 0 推出 x = 0 证明。

例题四：

在马尔科夫链中，定义基本矩阵 $\mathrm{Z} = (I - P + W)^{-1}$

证明 $m_{ij} = \frac{z_{jj} - z_{ij}}{w_j} = r_j(z_{jj} - z_{ij})$

证明：

由于刚才已经证明了$r_i = \frac{1}{w_i}$ ，因此只要证明第一个等号即可

先证明引理： ZJ = J

由于 PJ = J; WJ = J;

所以 J = (I – P + W) J

故　　ZJ = J

我们之前证明了 (I – P)M = J – R

所以　Z(I – P)M = Z(J – R) = J – ZR　---①

又因为　I – P = I – P + W – W – PW + W^2 = (I – P + W)(I – W)

即　　I – P = (I – P + W)(I – W)

两边同时*Z 有：

Z(I – P) = (I – W)

将①代入，有　(I – W)M = J – ZR

即　　　M = J – ZR + WM

具体到矩阵上的点，有：

$$m_{ij} = 1 - z_{ij}r_j + (WM)_j$$

为了计算$(WM)_j$，我们取 i = j 的情况，由 m 的定义$m_{jj} = 0$

$$0 = m_{jj} = 1 - z_{jj}r_j + (WM)_j$$

整理得：

$$m_{ij} = r_j(z_{jj} - z_{ij})$$

证毕。

思考题四：

对于不可约马尔科夫链

证明：$\sum_{j<>i} m_{ij}w_j = \sum_{j<>i} z_{jj} - 1$

例题五：

马尔科夫中心极限定理：

对于 r < s

有 $\mathrm{P}\left(\mathrm{r} < \frac{S_j^n - w_j * n}{\sqrt{n * \sigma_j^2}} < s\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \int_r^s e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$$\sigma^2 = 2\, w_j\, z_{jj} - {w_j}^2$$