平稳分布和平均回访时间的关系

李江贝 (alex-li@sjtu.edu.cn)

2018 年 6 月 16 日

目录

1 知识回顾

1.1 平稳分布

1 **定义 (平稳分布)** 平稳分布 π 是一个行向量, 元素非负且和为 1, 满足

$$\pi P = \pi$$

2 **推论** 对于一个离散状态空间, 如果转移矩阵 P 不可约，并且是非周期的.

$$\lim_{k\to\infty} P^k = \pi$$

由弱大数定律可知

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} P^i}{k} = \lim_{k\to\infty} P^k = \pi$$

1.2 平均回访时间

3 **定义 (平均回访时间)** 给定一点 i, 平均回访时间指的是, 从 i 出发回到 i 的平均时间.

$$\mu_i = E(min\{t > 0 : x_t = s_i, x_0 = s_i\})$$

2 平稳分布和平均回访时间的关系

4 命题 对于一个不可约、非周期的马尔可夫链.

设其平稳分布为 π, 对于每一个点 i, 平稳分布的概率为 π_i, 平均回访时间为 μ_i.

则有

$$\pi_i = \frac{1}{\mu_i}$$

这个命题直观来看并不复杂, 我们可以将 μ_i 理解为每一次访问点 i 所需要的时间, $\frac{1}{\mu_i}$ 即为单位时间访问点 i 的次数. 也就是访问点 i 的概率. 因此 $\pi_i = \frac{1}{\mu_i}$.

在Note 19中刘啸远同学给出了矩阵方法的证明. 在此我希望使用更加初等的方法证明这个结论.

证明 任取一点 i, 以 i 为起点, 设 X_k 表示第 k 步转移后所在的点的编号,$X_0 = i$.

令 τ_1 表示第 1 次返回 i 的时间,

令 τ_k 表示从第 k - 1 次返回 i 到第 k 次返回 i 的时间间隔.

则 $\tau_1, \tau_2, \cdots$ 独立同分布. 且 $E(\tau) = \mu_i$.

令 $S_n = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n$, 由弱大数定律得, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\frac{S_n}{n} = \mu_i$$

令 N_n 表示 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中访问到 i 的个数, 因此有

$$S_{N_n} \leqslant n < S_{N_n+1}$$

$$\frac{S_{N_n}}{N_n} \leqslant \frac{n}{N_n} < \frac{S_{N_n+1}}{N_n} = \frac{S_{N_n+1}}{N_n+1}\frac{N_n+1}{N_n}$$

由于 $\lim_{n\to\infty} N_n = \infty$, 由夹逼准则:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{N_n} = \mu_i$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_{ii}^k$$

由推论 2, 因此

$$\frac{1}{\mu_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_{ii}^k = \pi_i$$