Lecture Notes of Probability Theory
Lecture 20

范舟
516030910574
zhou.fan@sjtu.edu.cn
上海交通大学 ACM 班

目录

1 内容摘要

在 Lesson 20 中，吴老师所讲授的内容主要是可逆马尔可夫链[1]与电阻网络之间的联系，按照一定的规则将可逆马尔可夫链转化为对应的电阻网络，在马尔可夫链上进行随机行走的一些概率性质便与电阻网络中的电阻、电势、电流等物理性质建立起了对应关系，这为求解一些问题带来了很大的方便，这种方便是双向的：随机行走过程中的相应概率可以通过计算或测量电阻网络中的电性质得到，另一方面，可以对电阻网络中的电性质建立概率表示.

笔者所整理的 lecture notes 中如有存在疏漏之处，还请各位读者批评指正.

2 可逆马尔可夫链与电阻网络

无向图中边的电导值 考虑无向图 $G = \{V(G), E(G)\}$，其中 $V(G)$ 为点集，$E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$ 为边集. 另有映射

$$c \in R_+^{E(G)}$$

称映射 c 为电导[2]，c 将无向图中的每条无向边 $xy \in E(G)$ 映射到电导值 c_{xy}. 由于 xy 为无向边，有 $c_{xy} = c_{yx}$.

转移概率 上述无向图中两点之间的转移概率定义为

$$P_{xy} = \begin{cases} \frac{c_{xy}}{c_x} & xy \in E(G) \\ 0 & else \end{cases}$$

其中 c_x 为与节点 x 相连的边的电导值之和，即 $c_x = \sum_y c_{xy}$.

评注 上述表述将无向图中的边权理解为电导值，并构造出对应的转移概率，这实际上将可逆马尔可夫链转换为了对应的电阻网络.

3 电阻网络与随机行走的联系

3.1 电势的概率表示

定理 设 $N = (G, c)$ 为一个连通的电阻网络，令 $s, t \in V(G), \quad s \neq t$. 对于任意的 $x \in V(G)$，令 V_x 为从 x 出发，在到达 s 之前先到达 t 的概率，即

$$V_x = P(starting\ at\ x,\ we\ get\ to\ s\ before\ get\ to\ t)$$

[1]reversible Markov chain

[2]conductance

那么 $(V_x)_{x\in V(G)}$ 即为在此电阻网络中满足 $V_s=1, V_t=0$ 的唯一的电压分布.

评注 这一定理为电阻网络中每个节点的电压找到了对应的概率表示，$V_s=1, V_t=0$ 在概率表示中是显然的.

证明 由基尔霍夫电路定理[3]，对于电路中的任意节点，有

$$\sum_{y\sim x} i_{xy}=0$$

为了证明这一定理，只需对任意的 $x\in V(G)\setminus\{s,t\}$ 验证基尔霍夫电路定理. V_x 满足

$$V_x=\sum_{y\sim x}P_{xy}V_y$$

因此有

$$\begin{aligned} c_xV_x &= c_x\sum_{y\sim x}P_{xy}V_y \\ &= \sum_{y\sim x}c_xP_{xy}V_y \\ &= \sum_{y\sim x}c_x\frac{c_{xy}}{c_x}V_y \\ &= \sum_{y\sim x}c_{xy}V_y \end{aligned}$$

下面验证基尔霍夫电路定理.

$$\begin{aligned} \sum_{y\sim x} i_{xy} &= \sum_{y\sim x}(V_x-V_y)c_{xy} \\ &= V_x\sum_{y\sim x}c_{xy}-\sim_{y\sim x}c_{xy}V_y \\ &= c_xV_x-\sim_{y\sim x}c_{xy}V_y \\ &= 0 \end{aligned}$$

满足基尔霍夫电路定理，因此如上定义的 $(V_x)_{x\in V(G)}$ 即为在此电阻网络中满足 $V_s=1, V_t=0$ 的唯一的电压分布.

3.2 等效电阻的概率表示

定理 设 $N=(G,c)$ 为一个连通的电阻网络，令 $s,t\in V(G),\quad s\neq t$. 定义逃逸概率[4] $P_{esc}(s\to t)$ 为从 s 出发，在再次回到 s 之前到达 t 的概率，则有

$$c_{eff}(s,t)=c_sP_{esc}(s\to t)$$

[3]Kirchhoff Circuit Laws

[4]escape probability

其中 $c_{eff}(s,t)$ 为 s,t 之间的等效电导. 也可以使用等效电阻 $r_{eff}(s,t)$ 表示为

$$r_{eff}(s,t) = \frac{1}{c_s P_{esc}(s \to t)}$$

证明 考虑 $V_s = 1, V_t = 0$ 时的电压分布，有

$$\begin{aligned}
c_{eff}(s,t) &= (V_s - V_t)c_{eff}(s,t) \\
&= \sum_{y\sim s}(V_s - V_y)c_{sy} \\
&= \sum_{y\sim s}(1 - V_y)\frac{c_{sy}c_s}{c_s} \\
&= c_s - c_s\sum_{y\sim s}P_{sy}V_y \\
&= c_s(1 - \sum_{y\sim s}P_{sy}V_y) \\
&= c_s P_{esc}(s \to t)
\end{aligned}$$

其中，最后一步等式是由于

$$P_{esc}(s \to t) = 1 - \sum_{y\sim s}P_{sy}V_y$$

由 $P_{esc}(s \to t)$ 的定义及全概率公式可以很容易得到这一等式.

3.3 概率表示的严格定义

可以将节点 t 考虑为一个吸收节点，那么 $P_{esc}(s \to t)$ 即为从 s 出发，被 t 吸收无法回到 s 的概率. 下面我们再借助 hitting time 的概念给出 V_x 的概率表示与 $P_{esc}(s \to t)$ 更严格的定义.

定义 对于一个可逆马尔可夫链对应的无向图 G，令 S 为一个节点子集，即 $S \subseteq V(G)$. 定义两种不同的 hitting time 为

$$\begin{aligned}
\tau_S &= \min\{t \geq 0, X_t \in S\} \\
\tau_S^+ &= \min\{t \geq 1, X_t \in S\}
\end{aligned}$$

即 τ_S 为第一次到达 S 集合内的节点的时间，τ_S^+ 为排除初始状态后第一次到达 S 集合内的节点的时间.

使用 hitting time 定义概率表示 现在给出 V_x 的概率表示与 $P_{esc}(s \to t)$ 更严格的定义

$$\begin{aligned}
V_x &= P_x(X_{\tau_{\{s,t\}}} = s) \\
P_{esc}(s \to t) &= P_s(X_{\tau^+_{\{s,t\}}} = t)
\end{aligned}$$

3.4 电流的概率表示

定义 对于马尔可夫链上的随机行走过程，定义从节点 s 出发并到达节点 t 之前，到达节点 x 的次数的期望为 sojourn time $S_x(s \to t)$，即

$$S_x(s \to t) = E_s(|\{i < \tau_{\{t\}} : X_i = x\}|)$$

定理 设 $N = (G, c)$ 为一个连通的电阻网络，且 $s, t \in V(G), \quad s \neq t$. 对于 $x \in V(G)$，令 $V_x = S_x(s \to t)/c_x$. 对于任意的 $xy \in E(G)$，用记号 E_{xy} 表示从节点 s 开始随机行走，在到达节点 t 之前访问边 xy 的期望次数. 将节点 s 处的电势设定为 $r_{eff}(s,t)$，将节点 t 处的电势设定为 0，则从 s 到 t 的总电流大小为 1. 那么 (V_x) 即为此条件下电阻网络中的电势分布，特别地

$$r_{eff}(s,t) = \frac{S_s(s \to t)}{c_s}$$

并且有，边 xy 中的电流大小即为 E_{xy}.

评注 在上面“等效电阻的概率表示”部分，我们已经得到

$$P_{esc}(s \to t) = \frac{1}{c_s r_{eff}(s,t)}$$

现在又有

$$r_{eff}(s,t) = \frac{S_s(s \to t)}{c_s}$$

因此可以得到

$$P_{esc}(s \to t) = \frac{1}{S_s(s \to t)}$$

在这里我们是由电阻网络的物理意义得到这一结论的，事实上也可以直接证明这一等式.

4 无限大网格图的逃逸概率

4.1 transient 与 recurrent

定义 对于一个无向图 G 从一个起点 $s \in V(G)$ 开始的随机行走过程，如果 $P_{esc}(s \to \infty) > 0$，我们称其是 transient 的；若 $P_{esc}(s \to \infty) = 0$，我们称其是 recurrent 的.

评注 若一个无向图上的随机行走是 transient 的，这表示从节点 s 出发，一定会到达无穷远处，在这一过程中只会访问节点 s 有限多次；相反地，若一个无向图上的随机行走是 recurrent 的，则表示从节点 s 出发的随机行走会访问节点 s 无限多次，而不会到达无穷远处.

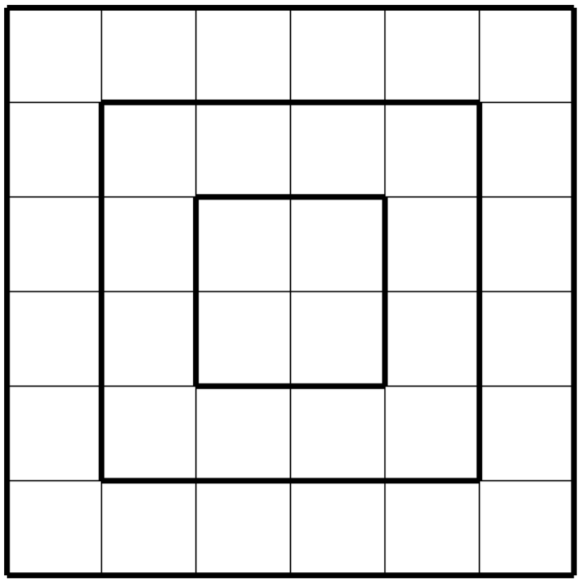

图 1: 二维网格中以原点为中心的正方形环

4.2 对于无限大网格图的情况

定义 将 d 维空间中的无限大网格图记作 Z^d. Z^d 的节点为所有各维坐标均为整数的整点，两个节点之间有边当且仅当这两个节点坐标相邻，即：有一维坐标相邻，其余维度坐标相同.

定理 Z^d 是 transient 当且仅当 $d \geq 3$.

评注 上面的定理说明，Z^2 是 transient 的，而 $Z^3, Z^4, \ldots$ 是 recurrent 的. 在 Z^2 中从原点出发的随机行走，一定会到达无穷远处，在这一过程中只会返回原点有限多次. 而 $d \geq 3$ 时，在 Z^d 上从原点出发的随机行走将会无限多次返回原点. 下面给出 Z^2 是 transient 的证明.

证明 Z^2 是 transient 的 假设图中每条边的电阻值均为 1Ω. 首先考虑有限大小的网格图，如图 1，考虑以原点为中心的每一级正方形环 $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$ （S_0 是原点）. 考虑 n 趋向于正无穷时原点与网格图边界之间的等效电阻 r_{eff} 的变化. 若将每一级正方形环 S_i 上的节点之间的电阻短路，则原点与网格图边界之间的等效电阻会减小. 此时只保留有相邻两级正方形环之间的电阻，在第 i 级正方形环 S_i 与第 $i+1$ 级正方形环 S_{i+1} 之间有 $4(2i+1)$ 个并联的 1Ω 电阻，则 S_i 与 S_{i+1} 之间的电阻值为 $1/4(2i+1)$. 因此原点 S_0 与网格图边界 S_n 之间的等效电阻满足

$$r_{eff} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots = \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots) = \Theta(n)$$

当 n 趋向于正无穷时，r_{eff} 的下界趋向于正无穷，因此 r_{eff} 趋向于正无穷. 根据

$$P_{esc}(s \to t) = \frac{1}{c_s r_{eff}(s,t)}$$

从原点出发的逃逸概率 $P_{esc}(S_0 \to \infty) = 0$，因此 Z^2 是 transient 的.

评注 将第 i 级正方形环 S_i 上的节点之间的电阻短路，实际上是将这些节点看作等价的节点，使它们的电压相等，这是一种很常见的简化图的方式，可以使问题的讨论更加方便.

事实上，在电阻网络中，关于 trainsient/recurrent 有如下定理.

定理 A random walk on $N = (G, c)$ is transient if and only if there is a flow (u_{xy}) of finite energy satisfying

$$\sum_{xy \in E(G)} u_{xy}^2 r_{xy} < \infty$$

in which no current leaves at any vertex but some positive enters at some vertex.

定理 A random walk on $N = (G, c)$ is recurrent if and only if for every $\epsilon > 0$ there is a function (V_x) on $V(G)$ such that $V_s \geq 1$ for some s and $V_x = 0$ for all but finitely many vertices and

$$\sum_{xy \in E(G)} (V_x - V_y)^2 c_{xy} < \epsilon$$