

# A solution for the phone broken problem

Zhanghao Wu

516030910593

**问题描述** 假设我有一部手机，它每天可能处于三个状态——正常工作、维修和报废。当天处于正常工作状态，第二天有 99.5% 概率继续正常工作，有 0.5% 的概率第二天送去维修；处于维修状态的手机，第二天有 90% 概率可以正常使用，5 概率第二天继续维修，5% 的概率第二天报废；处于报废阶段的手机，永远只能报废了。假设开始时手机是可以正常使用，那么在手机报废前期望有多少天手机可以正常使用？

**解答** 不妨假设，正常工作、维修和报废分别为 markov chain 上的三个状态 1,2,3。假设  $h_{ij}$  为从状态  $i$  到  $j$  的期望步数，则不难发现，

$$h_{12} = p_{12} + p_{11}(1 + h_{12})$$

$$h_{23} = p_{23} + p_{22}(1 + h_{23}) + p_{21}(1 + h_{13})$$

$$h_{13} = h_{12} + h_{23}$$

解得， $h_{12} = 200$ ， $h_{13} = 3820$ 。又可得， $h_{21} = p_{21} + p_{22}(1 + h_{21}) \Rightarrow h_{21} = 1$ 。也就是，期望意义上，每隔 200 天会送修一次，维修的期望时间为 1 天。假设最后一次维修为事件 A，最后一次维修到报废所花的期望时间

$$t = p_{22|A}(t + 1) + p_{23|A} = \frac{1}{2}(t + 1) + \frac{1}{2} \Rightarrow t = 2$$

所以从开始使用到倒数第二次维修后的总正常使用时间为

$$t_1 = \frac{h_{12}}{h_{12} + h_{21}}(h_{13} - h_{12} - t) = 3600$$

因此，总正常使用时间为

$$t_{norm} = t_1 + h_{12} = 3800(days)$$

PS: 此解答与汪陶磊、刘畅共同讨论得到