Probability Theory: Lecture note

May 15, 2018

Class 15

Jingxiao Chen

1.母函数(Generating function)

定义

对于数列a_n及其母函数$g(z)$

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} \to g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

利用g(z)求E(x), Var(x)

$$E(x) = \sum n a_n = g'(1)$$

$$E(x^2) - E(x) = g''(1)$$

$$Var(x) = g''(1) + g'(1) - [g'(1)]^2$$

从E(x), Var(x)求g(z)

$$a_j = \frac{1}{j!} g^{(j)}(0)$$

由唯一性定理得左右两边两两对应，这条性质非常重要，我们可以同过g的性质得到E，Var的性质

例1

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_j z_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i z_i <=> a_i = b_i$$

思考题如何证明上式的正确性

定义 卷积

$$c_i = \sum_{j=0}^{l} a_j b_{j-1}$$

性质 对于随机变量a,b,c 若a,b独立同分布，且有$g_a(z)g_b(z) = g_c(z)$ 则$c = a + b$

例2

$P(T = j) = p_j = q^{j-1}p \quad j \geq 1$几何分布

$$g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j z_j = \frac{p}{q} \sum_{j=1}^{\infty} (q \cdot z)^j = (\frac{pz}{1 - qz})^n$$

例3: 负二项分布（抛硬币问题）

描述 假设有一组独立的伯努利数列，每次实验有两种结果“成功”和“失败”。每次实验的成功概率是p，失败的概率是1−p。我们得到一组数列，当预定的“非成功”次数达到r次，那么结果为“成功”的随机次数会服从负二项分布

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

其母函数

$$\begin{aligned}
g_{S_n}(z) &= (g_T(z))^n \\
&= (\frac{pz}{1 - qz})^n \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{n-1} \cdots \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^(k-n) z^k
\end{aligned}$$

由$(\frac{g(z)}{z}^n) = (\frac{p}{1-qz})^n$有

$$P(s_n = h + j) = \binom{n+j-1}{j} p^n q^j = \binom{-n}{j} p^n (-q)^j$$

此外，我们利用$g_X(z) = E(z^X)$可以得到很多东西例如，若x1,x2独立，

$$E(z^{x1+x2}) = E(z^{x1})E(z^{x2})$$

2.拉普拉斯变换(Laplace transform) $L_x(\lambda)$

定义拉普拉斯变换对于随机变量X，参数$\lambda \in [0, \infty]$，有函数$L_x(\lambda)$

$$\text{连续：} L_x(\lambda) = E(e^{-\lambda x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u} f(u) du$$

$$\text{离散：} L_x(\lambda) = E(e^{-\lambda x}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{j\lambda} \text{（可能不存在）}$$

若x1,x2独立：

$$E(e^{-\lambda(x1+x2)}) = E(e^{-\lambda x1})E(e^{-\lambda x2})$$

3.矩母函数(moment generating function) $M_x(t)$

定义矩母函数对于随机变量X，参数t,有函数$M_x(t)$

$$\begin{aligned} M_x(t) &= E(e^{tx}) \\ &= E(1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \cdots) \\ &= 1 + E(x)t + \frac{E(x^2)}{2!}t^2 + \cdots \end{aligned}$$

本质上讲，矩母函数即是矩的母函数
若x1,x2独立：

$$M_{x_1}(t)M_{x_2}(t) = M_{x_1+x_2}(t)$$

4.特征函数(characteristic function) $\varphi_x(\theta)$

定义特征函数对于随机变量x

$$\varphi_x(\theta) = E(e^{i\theta x})$$

我们可以另$t = i\theta$从而与矩母函数进行类比。
由于涉及到傅里叶变换相关知识，在这里不再进行更多的介绍。

5.常见分布

几种常见分布的矩母函数和特征函数

	$M_x(t)$	$\varphi(t)$
Bernoulli	$1-p+pe^t$	$1-p+pe^{it}$
Geomatic	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$	$\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
$Poisson(\lambda)$	$e^{\lambda(e^t-1)}$ $(t<\lambda)$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Normal $N(\mu,s^2)$	$e^{t\mu+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$	$e^{it\mu-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$

正态分布n阶矩 若$X\sim N(0,1)$

$$M_x(\theta)=\int_{\infty}^{\infty}e^{\theta x}\varphi(x)dx$$

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty}exp(\theta x-\frac{x^2}{2})dx\\&=e^{\frac{\theta^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-\theta)dx\\&=e^{\frac{\theta^2}{2}}\end{aligned}$$

我们可以得到

$$1+\frac{\theta^2}{2}+\frac{1}{2!}(\frac{\theta^2}{2})^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^n}{n!}E(X^n)$$

从中取一项$\frac{1}{n!2^n}=\frac{E(X^{2n})}{2n!}$,明显有

$$\begin{cases}E(X^{2n+1})=0\\E(X^{2n})=\frac{(2n)!}{n!2^n}\end{cases}$$

性质 对于两个独立的随机变量X1,X2

$$\begin{aligned}X_1&\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)\\X_2&\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow X_1+X_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

证明

$$\begin{aligned}M_{x1+x2}(\theta)&=M_{x1}(\theta)M_{x2}(\theta)\\&=e^{\mu_1\theta+\frac{\sigma_1^2}{2}\theta^2}e^{\mu_2\theta+\frac{\sigma_2^2}{2}\theta^2}\\&=e^{(\mu_1+\mu_2)\theta+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}\theta^2}\\&\overset{\text{暂记}}{=}M_x(\theta)\end{aligned}$$

由唯一性定理可知$M_{x1+x2}(\theta)=M_x(\theta)$唯一

6.中心极限定理(Central Limit Theorem)

描述 对于随机变量$X_i\sim X$, $E(X)=\mu$, $Var(X)=\sigma^2$
记

$$Z_n=\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

下式成立

$$\lim_{n\to\infty} P(a \le Z_n \le b) = F(b) - F(a) = \int_{\infty}^{b} \frac{e^{-\frac{\theta^2}{2}}}{\sqrt{2n}} dx$$

证明 对于特征函数$\varphi_{x-\mu}(\theta) = \varphi(\theta)$ 则

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n} &= \prod_{j=1}^{n} \varphi(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}) \\ &= (\varphi(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}))^n\end{aligned}$$

定理 Levy's Continuity Theorem

$$\varphi'(\theta) = iE((x-\mu)e^{i\theta(x-\mu)})$$

$$\varphi''(\theta) = -E((x-\mu)^2 - e^{i\theta(x-\mu)})$$

由上面两式子在0处泰勒展开

$$\varphi(\theta) = 1 + 0 - \frac{\sigma^2\theta^2}{2} + \theta^2 h(\theta)$$

$$(\varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = -\sigma^2)$$

注意到当$\theta \to 0$有$h(\theta) \to 0$

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(\theta) &= \prod_{j=1}^{m} \varphi(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}) \\ &= (\varphi(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}))^n \\ &= e^{n\log(1-\frac{\theta^2}{2n}+\frac{\theta^2}{n\sigma^2}h(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}))}\end{aligned}$$

又由洛必达法则可以得到

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(\theta) = e^{-\frac{\theta^2}{2}}$$

由唯一性定理可得，此时趋向于一个分布