Introduction to Probability
Markov Chain 2

Yan Hao
ACM Class,2016
2018 年 4 月 18 日

摘要

该节主要对马尔可夫链做出了进一步的介绍。

第一部分讨论了函数在马尔可夫链上的作用，即马尔可夫链经函数作用后是否仍是马尔可夫链。首先给出了两个马尔可夫链的例子，这两个例子正好可以通过特定函数作用由一个转化为另一个。接着，给出了一个马尔可夫链映射后不再是马尔可夫链的例子。最后，给出了一个马尔可夫链经映射后仍为马尔可夫链的充分条件。

第二部分给出了两个定理。第一个定理为马尔可夫链不可约等价于强连通。第二个定理为，每一个马尔可夫链都有且只有一个稳定分布。随后分别从三个方面证明了第二个定理，即矩阵证明，不动点证明，概率论证明。

目录

1 Function on Markov Chain

1.1 Problem

已知有马尔可夫链 M_1

$$M_1 = (X_0, X_1, X_3, ..., X_n)$$

若有映射 f 作用在 M_1 上，得到 M_2

$$M_2 = \left(f_{(X_1)}, f_{(X_2)}, f_{(X_3)}, ..., f_{(X_n)}\right)$$

问：在 f 满足什么条件的情况下 M_2 是马尔可夫链？在什么情况下 M_2 不是马尔可夫链？

1.2 Examples of Markov Chain

1.2.1 Ehrenfest urn

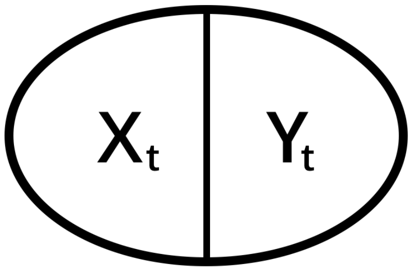


图 1: 篮球分割问题

如图 1 所示，假设共有 n 个篮球，t 时刻在 X 篮筐里有 X_t 个篮球，在 Y 篮筐里有 Y_t 个篮球. 每一时刻随机地从这 n 个篮球里选择一个，放入另一个篮筐里.

- 状态变化由 (1) 描述

$$\begin{cases} X_t + Y_t = n \\ X_t = X_t + 1, Y_t = Y_t - 1 \ / \ X_t = X_t - 1, Y_t = Y_t + 1 \end{cases} \tag{1}$$

- 状况集表示：$(0, 1, 2, 3, ..., n)$, 即用 X 筐或 Y 筐中篮球的数量描述特定状态.

1.2.2 Hypercube

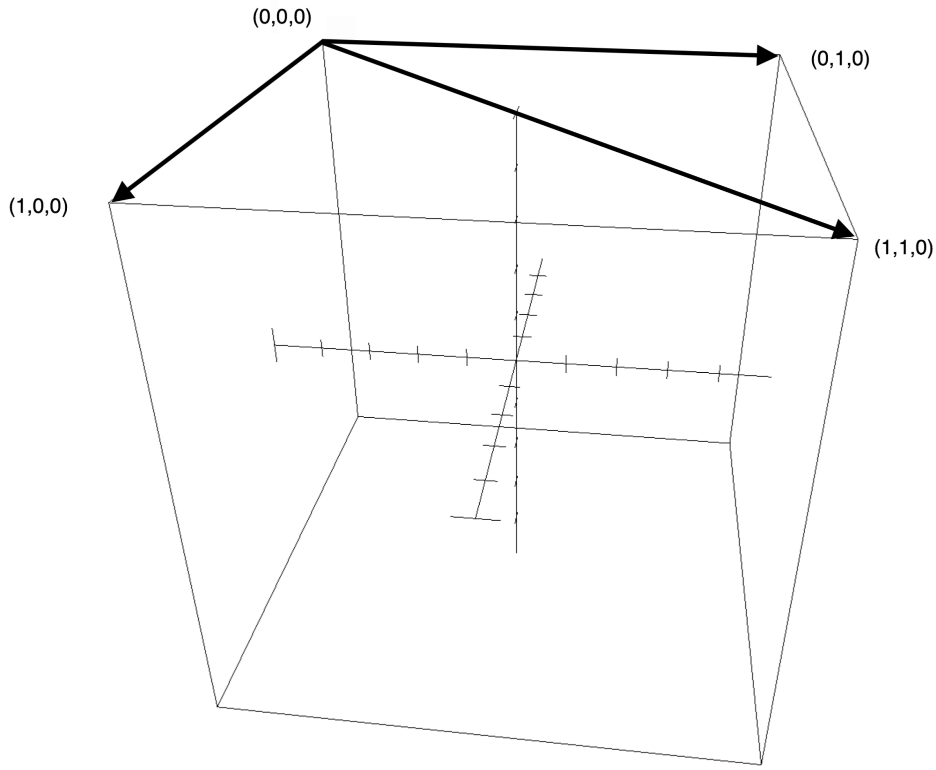


图 2: 立方体上的随机游走

- 假设立方体的每一个顶点上都有若干小球，随机地沿着边游走（该模型用立方体上的随机游走表示马尔可夫链从一个状态到下一个状态）
- 每一个顶点表示一个状态，共 2^3 个状态
- 每条边的边权表示从一点到另一点的可能性大小，即

$$P_{(i,j)} \begin{cases} \frac{1}{3}\ (i \text{ is adjacent to } j) \\ 0\ (i \text{ is not adjacent to } j) \end{cases} \tag{2}$$

- 该分布是可逆的，即

$$\Pi_i P_{ij} = \Pi_j P_{ji}$$

  因此立方体总的质量分布没有改变，可以认为是平稳分布, 即

$$\Pi P = \Pi$$

- 推广：若度数为 n，则可表示 2^n 个状态

1.3 Analysis

1.3.1 Examples of $f_{(M)}$

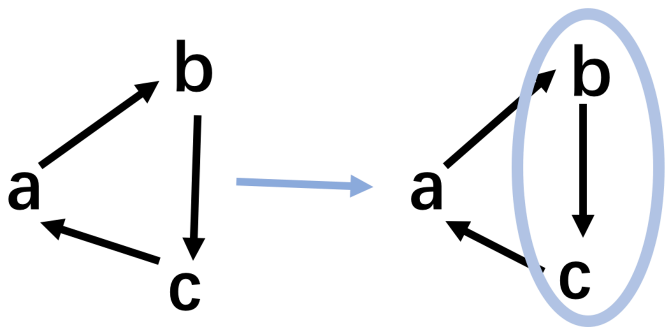
- M_1 经过映射后得到的 M_2 仍是马尔可夫链：
  将 1.2.2 中 Hypercube 中的状态映射到 1.2.1 中 Ehrenfest urn 的状态中.

f 的作用: 若向量有 n 个维度是 1，则将该向量映射为 n

$$
\begin{gathered}
(0,0,0,...,0) \rightarrow 0 \\
\left\{\begin{array}{l} (1,0,0,..,0) \\ (0,1,0,..,0) \\ ...... \\ (0,0,0,..,1) \end{array}\right. \quad \rightarrow 1 \\
......
\end{gathered} \tag{3}
$$

依此类推，则 f 将一个马尔可夫链映射为了另一个马尔可夫链

- M_1 经过映射后得到的 M_2 不再是马尔可夫链：



1. 映射前：$a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow a$ 下一个状态只与当前状态有关，因此是马尔可夫链
2. 映射后，状态集变为两个，即 $(a, \{b,c\})$ 设 t 时刻状态 S_t 为 b, c, 则

$$S_{t-1} = \{b,c\} \rightarrow S_{t+1} = a$$

$$S_{t-1} = a \rightarrow S_{t+1} = \{b,c\}$$

下一个状态不但与当前状态有关，还与上一个状态有关，因此不是马尔可夫链

f 将一个马尔可夫链映射为了一个非马尔可夫链

1.3.2 sufficient condition

- $$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \Longleftrightarrow x \xrightarrow{f} [x]$$
  即 f 作用在 M_1 上等价于把原本的数据集划分为等价类
- lemma 1
  If $P_{(x,[y])} = P_{(x',[y])}$ is true whenever $[x] = [x']$, then $([x_1], [x_2], [x_3], ..., [x_n])$ is Markov Chain.
- 若 f 不满足 lemma 1 的条件，M_2 是否有可能是马尔可夫链？试给出分析

2 Theorem

2.1 Irreducible and Strongly Connected

前提：马尔可夫链可以表示为 n 阶实数方阵 A，其中 $A(i,j) = 1$ 表示由状态 i 可以到达状态 j，$A(i,j) = 0$ 表示由状态 i 无法到达状态 j.

Theorem1: 矩阵 A 是不可约的当且仅当与 A 对应的有向图 S(A) 是强连通的.

proof:

- 强连通的概念：一个有向图中任意两点 v1、v2 间存在 v1 到 v2 的路径及 v2 到 v1 的路径.
- 不可约的概念：对于矩阵 $A = R^{n*n}$, 如果存在置换矩阵 P，使得
  $$PAP^T = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
  则矩阵 A 可约，否则 A 不可约
- lemma2:
  矩阵 A_1 是有向图 D 的邻接矩阵。矩阵 A_2 也是 D 的邻接矩阵的充分必要条件是存在置换阵 P，使得 $A_2 = PA_1P - 1$
- 由以上三条可知，经置换操作后的矩阵 A_2 与矩阵 A_1 表示的是同一个有向图。因此若某一矩阵不可约，则其形式一定为
  $$A = \begin{pmatrix} B & C \\ E & D \end{pmatrix}$$
  即该矩阵的四个模块之间彼此连通

2.2 Stational Distribution

Theorem: 对于所有有限状态的马尔可夫链，存在且仅存在一个平稳状态 π(stational distribution)

稳定分布 π 是一个（行）向量，它的元素都非负且和为 1，不随施加 P 操作而改变，定义为

$$\pi P = \pi$$

2.2.1 Proof 1

矩阵法证明

对于一个离散状态空间，对于 k 步转移后的状态，可以对转移矩阵求 k 次幂来求得。就是说，如果 P 是一步转移矩阵,P^k 即为 k 步转移后的转移矩阵。如果转移矩阵 P 不可约，并且是非周期的，则 P^k 收敛到一个每一列都是不同的平稳分布 π^*，并且

$$\lim_{k\to\infty} P^k = \pi^*$$

且独立于初始分布
以上由 Perron–Frobenius theorem 所指出, 参考如下
https://en.wikipedia.org/wiki/Perron%E2%80%93Frobenius_theorem

2.2.2 Proof 2

不动点法证明

2.2.3 Proof 3

概率论方法证明

- 对于所有状态 x，定义 x 的 hitting time:

$$\tau_x = \min\{t \geq 0, x_t = x\}$$

$$\tau_x^+ = \min\{t \geq 1, x_t = x\}$$

- lemma 3: For any state x,y of an irreducible chain, $E_x\left\{\tau_y^+\right\} < \infty$
  Proof of lemma 3:

$$\exists \varepsilon > 0 \; and \; r > 0, such \; that$$

$$\forall z, w \in \Omega, \; \exists j \leq r$$

$$s.t. \; P^j_{(z,w)} > \varepsilon$$

  利用 irreducible 的定义

$$P_x\left\{\tau_y^+ > kr\right\} < (1-\varepsilon)P_x\left\{\tau_y^+ > (k-1)r\right\}$$

以此类推......

$$P_x\left\{\tau_y^+ > kr\right\} < (1-\varepsilon)^k$$

  由于

$$\sum_{t\geq 0} tP_x\left\{\tau_y^+ = t\right\} = \sum_{t\geq 0} P_x\left\{\tau_y^+ > t\right\}$$

因此

$$\begin{aligned}
E_x\left\{\tau_y^+\right\} &= \sum_{t\geq 0} tP_x\left\{\tau_y^+ = t\right\} \\
&= \sum_{t\geq 0} P_x\left\{\tau_y^+ > t\right\} \\
&\leq \sum_{k\geq 0} rP_x\left\{\tau_y^+ > kr\right\} \\
&< r\sum_{k\geq 0}(1-\varepsilon)^k \\
&= \frac{r}{\varepsilon} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

$$\text{因此，} E_x\left\{\tau_y^+\right\} < \infty \text{成立}$$

- proof:
欲说明 $\pi(x) = \frac{1}{E_x\left\{\tau_x^+\right\}}$ s.t. $\pi P = \pi$ 且 $\sum_{x\in\Omega}\pi(x) = 1$

1.
$$\forall z\in\Omega\ \widetilde{\pi}(y) = E_z(number\ of\ visit\ to\ y\ before\ returning\ to\ z) \leq E_z\left\{\tau_z^+\right\}$$
$$\text{According to lemma 3, } E_z\left\{\tau_z^+\right\} \text{ is well defined}$$
$$\widetilde{\pi}(z) = 1$$

2.
$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\Omega}\widetilde{\pi}(x)P(x,y) &= \sum_{x\in\Omega}\sum_{t\geq 0} P_z(X_t = x, \tau_z^+ > t)P(x,y) \\
&= \sum_{t\geq 0}\sum_{x\in\Omega} P_z(X_t = x, \tau_z^+ > t)P(x,y) \\
&= \sum_{t\geq 0}\sum_{x\in\Omega} P_z(X_t = x, X_{t+1} = y, \tau_z^+ > t) \\
&= \sum_{t\geq 0} P_z(X_{t+1} = y, \tau_z^+ > t) \\
&= \sum_{t\geq 1} P_z(X_{t+1} = y, \tau_z^+ \geq t) \\
&= \sum_{t\geq 1}[P_z(X_{t+1} = y, \tau_z^+ = t) + P_z(X_{t+1} = y, \tau_z^+ > t)] \\
&= \sum_{t\geq 1} P_z(X_{t+1} = y, \tau_z^+ = t) + \widetilde{\pi}(y) - P_z(X_0 = y, \tau_z^+ > 0) \\
&= \widetilde{\pi}(y)
\end{aligned}$$
$$\text{因此} \Longrightarrow \widetilde{\pi}P = \widetilde{\pi}$$

3. 取 $z = x$
$$\pi = \frac{\widetilde{\pi}^{(z)}}{E_z\left\{\tau_z^+\right\}} \Longrightarrow \pi(x) = \frac{\widetilde{\pi}^{(x)}(x)}{E_x\left\{\tau_x^+\right\}} = \frac{1}{E_x\left\{\tau_x^+\right\}}$$

3 Contact Me

Email: honeyhaoyan@sjtu.edu.cn
以上笔记可能有很多缺漏，如有问题，请及时联系我，谢谢!