概率论问题解答

田博宇

2018 年 5 月 8 日

1 Ergodicity 定理的表述和证明

If P is irreducible and aperiodic, then there is a unique stationary distribution π such that

$$\forall x, \lim_{t\to\infty} P^t(x,\cdot) = \pi$$

PROOF:

构造 coupling distribution 如下：

• 若 $X_t \neq Y_t$, 根据 P, 独立地选取 X_{t+1} 和 Y_{t+1}

• 若 $X_t = Y_t$，根据 P, 选取 X_{t+1}，并且令 $Y_{t+1} = X_{t+1}$

由定理（可参照 Class12 的 notes）:

$$\|X^t - Y^t\|_{TV} = inf(P(X^t \neq Y^t))$$

存在 t^*, 使得 $\forall x, y$, $P^{t^*} > 0$. 故存在 $\epsilon > 0$ 满足对任意初始状态 X_0, Y_0

$$P(X^{t^*} \neq Y^{t^*}|X_0, Y_0) \leq 1 - \epsilon$$

同理得：

$$P(X^{2t^*} \neq Y^{2t^*}|X^{t^*} \neq Y^{t^*}) \leq 1 - \epsilon$$

则：

$$\begin{aligned} P(X^{2t^*} \neq Y^{2t^*}|X_0, Y_0) &= P(X^{t^*} \neq Y^{t^*} \wedge X^{2t^*} \neq Y^{2t^*}|X_0, Y_0) \\ &= P(X^{2t^*} \neq Y^{2t^*}|X^{t^*} \neq Y^{t^*})P(X^{t^*} \neq Y^{t^*}|X_0, Y_0) \\ &\leq (1-\epsilon)^2 \end{aligned}$$

则对任意正整数 k > 0，有

$$P(X^{kt^*} \neq Y^{kt^*}|X_0, Y_0) \leq (1-\epsilon)^k$$

当 $k \to$ inf, $P(X^{kt^*} \neq Y^{kt^*}|X_0, Y_0) \to 0$ 则有：

$$\lim_{t\to\infty} P(X^t \neq Y^t|X_0, Y_0) \to 0$$

由 coupling lemma, 有：

$$\|P^t(x,\cdot) - P^t(y,\cdot)\|_{TV} \leq P(X^t \neq Y^t) \to 0, \ when\ t\ \to 0$$

令 $\sigma = \lim_{t\to\infty} P^t(x, \cdot)$，则有

$$\begin{aligned}\sum_x \sigma(x)P(x,y) &= \sum_x \lim_{t\to\infty} P^t(z,x)P(x,y) \quad \forall z \\ &= \lim_{t\to\infty} P^{t+1}(z,y) = \sigma(y)\end{aligned}$$

即为 $\sigma P = \sigma$

同时，由于 $\| \lim_{t\to\infty} P^t(x, \cdot) - \lim_{t\to\infty} P^t(y, \cdot)\|_{TV} \to 0$, σ 唯一