概率论笔记 3

周久钦

目录

1 车祸现场

昨夜有一辆出租车出了车祸. 已知平时这条路上有 15% 的概率出现白车, 85% 的概率出现黑车. 那晚某位证人看到的车是白车, 且证人有 20% 的概率看错. 请问出车祸的车是黑车的概率大, 还是白车的概率大?

1 定理 (全概率定理) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一组互不相容的事件, 形成样本空间的一个分割 (每一试验结果必定使得其中一个事件发生). 又假定对每一个 i, $P(A_i)>0$. 则对于任何一个事件 B, 只要它满足 $P(B)>0$, 下列公式成立

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n) \end{aligned}$$

2 定理 (贝叶斯准则) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一组互不相容的事件. 形成样本空间的一个分割 (每一个实验结果必定使得其中一个事件发生). 又假定对每一个 i, $P(A_i)>0$. 则对于任何一个事件 B, 只要它满足 $P(B)>0$, 下列公式成立

$$\begin{aligned} P(A_i|B) &= \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)} \end{aligned}$$

解答 设 A_1 是该车为白车, A_2 是该车为黑车, B 是证人看到的车是白车. 根据贝叶斯准则

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} \\ &= \frac{0.15 \times 0.8}{0.15 \times 0.8 + 0.85 \times 0.2} \\ &= \frac{12}{39} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

所以是黑车的概率大.

作业 用全概率公式和贝叶斯准则估计明天太阳升起的概率.

2 矩阵测试

若 $AB = C$, 显然有 $ABr = Cr$ ($A, B \in F_2^{n \times n}$, $r \in F_2^n$). 所以可以通过任取 $r \in F_2^n$, $ABr = Cr$ 是否成立来检测 $AB = C$ 是否成立.

评注 对于给定的矩阵 ABC, 有 $AB = C$ 以及 $AB \neq C$.

当 $AB = C$ 时, $P(ABr = Cr) = 1$.

当 $AB \neq C$ 时, $P(ABr = Cr) = \frac{ker(AB-C)}{F_2^n} \leq 1/2$. 即测不出来的概率小于 1/2. 多次重复测试后, $P(\cap_{i=0}^n ABr_i = C_i) \leq 1/2^n \leq \epsilon$.

所以总的测不出来的概率小于 ϵ.

作业 解决上述问题.

3 社会风评

假设路人绝对诚实. 现在随机找一个人来做实验: 先抛一枚硬币, 正面朝上就问他的生日是否是前半年, 反面朝上就问他有没有偷过东西. 如此重复 150 次. 现在在 150 人中, 有 60 人回答 YES, 请问该社会中有多少比例的人偷过东西?

解答

$$
\begin{aligned}
0.5 \times 0.5 + 0.5 \times x &= \frac{60}{150} \\
\Rightarrow x &= 0.3
\end{aligned}
$$

评注 问题涉及到统计, 不是完全的概率.

4 哈迪-温伯格定律

在理想情况下, 种群的基因频率不变. 记 A 的频率为 p, a 的频率为 q, 即 $P(A) = p$, $P(a) = q$.

基因类型	AA	Aa	aa
频率	p^2	$2pq$	q^2

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow P(A) &= p^2 + pq = p \\
P(a) &= q^2 + pq = q
\end{aligned}
$$

所以基因频率不变.

作业 将该定律推广到多种基因的情况, 验证定律是否仍然成立.

解答 考虑有 n 种基因 $x_i, i = 1, 2, ..., n$.

对应的基因频率分别是 $p_i, i = 1, 2, ..., n$.

则对于任意的 $k = 1, 2, 3, ..., n$

$$\begin{aligned} P(x_k) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{n} \frac{n-i}{n} p_k^{n-i}(1-p_k)^i \\ &= p_k \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{n-1} p_k^{n-1-i}(1-p_k)^i \\ &= p_k \end{aligned}$$

所以哈迪-温伯格定律在多种基因的情况下仍然成立.

3 定理 (独立性) 两个事件 A 和 B 称为互相独立的, 如果他们满足

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

若 B 还满足 $P(B) > 0$, 则独立性等价于

$$P(A|B) = P(A)$$

.

4 定理 (一组事件的独立性) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件, 若它们满足

$$\forall S \subset [n], P(\cap_{i \in S} A_i) = \prod_{i \in S} P(A_i)$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为相互独立事件.

作业 对于 $\forall T \subset 2^{[n]}$, 试构造一个 [n] 的概率分布, 使得

$$P(\cap_{E \in T} E) = \prod_{E \in T} P(E)$$

.

例 给定一个集合

$$\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$P(a) = P(b) = \frac{1}{8}$$

$$P(c) = P(d) = P(e) = P(f) = \frac{3}{16}$$

又

$$E_1 = \{a, d, e\}$$

$$E_2 = \{a, c, e\}$$

$$E_3 = \{a, c, d\}$$

计算可得

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{2}$$

但

$$P(E_1 \cap E_2) \neq P(E_1) \times P(E_2)$$

所以不是合法的概率分布.

作业 ABC 三人每人各有一个骰子, 上面有一些正整数. 三人掷骰子点数分别记为 ABC. 如图

A	2	2	6	6	7	7
B	1	1	5	5	9	9
C	3	3	4	4	8	8

有 $P = P(A > B) = P(B > C) = P(C > A) = \frac{5}{9}$, 试在保持等式成立的情况下

1. 只修改骰子面值, 尽可能提高 P 值.
2. 讨论骰子面数大于六面的情况.

作业 下无向图中每条边有 p 的概率断裂, 试求图联通的概率.