

Solution

概率论, 2018 春季学期

姓名: 王天哲 学号: 516030910591 班级: F1603024

1. Problem

考虑有 2 个 6 个面写着任意数字的骰子, 抛出每个面的概率任意, 现在问能否抛出后的和能否是 2,3,4,...,11,12 等概率的所有数。

Solution.

我们考虑将这两个骰子用母函数 f 和 g 表示。记 $f = \sum_{i=1}^6 p_i * x^{q_i}, g = \sum_{i=1}^6 r_i * x^{s_i}$ 。容易发现我们可以通过让两个骰子一个增加相同的数, 一个减少相同的数使得所有的点数都为整数。

于是我们可以固定 $q_i, s_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 为整数。

从而原问题等价于 $f * g = \frac{1}{11} * x^2 * \frac{x^{11}-1}{x-1}$ 能否分成 2 个至多为 6 项的实系数多项式的乘积。

我们注意到 $R[x]$ 为 UFD (唯一分解整环), 也就是说 $\frac{1}{11} * x^2 * \frac{x^{11}-1}{x-1}$ 存在唯一分解。

只需要考虑 $fg = \frac{1}{11} * x^2 * \prod_{k=1}^5 (x^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{11}x + 1)$ 能否分成 2 个至多为 6 项的实系数多项式的乘积。

通过利用程序枚举 32 种可能验证, 可得不存在成立的分解方法。

下附验证程序以及运行结果:

```
1 #include<bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3 const double pi = acos(-1), eps = 1e-10;
4 double a[10];
5 double t[10][111];
6 double x[111], y[111], tmp[111];
7 bool ok(double *x) {
8     int cc = 0;
9     for (int i = 0; i < 50; ++i) {
10         if (x[i] < -eps) return 0;
11         if (x[i] > eps) ++cc;
12     }
13     return cc <= 6;
14 }
15 void work(double *x, int p) {
16     for (int j = 0; j <= 50; ++j) tmp[j] = 0;
17     for (int j = 0; j <= 50; ++j)
18         for (int k = 0; k <= 2; ++k) tmp[j + k] += x[j] * t[p][k];
19     for (int j = 0; j <= 50; ++j) x[j] = tmp[j];
20 }
21 int main() {
22     for (int i = 1; i <= 5; ++i) a[i] = 2 * cos(2. * pi * i / 11);
23     for (int i = 1; i <= 5; ++i) {
24         t[i][0] = 1;
25         t[i][1] = -a[i];
26         t[i][2] = 1;
27     }
28     for (int s = 0; s < 32; ++s) {
29         for (int i = 1; i <= 50; ++i) x[i] = y[i] = 0;
30         x[0] = y[0] = 1;
31         for (int i = 1; i <= 5; ++i) if (s >> (i - 1) & 1) {
32             work(x, i);
33         } else work(y, i);
34         printf("%d : %d %d\n", s, ok(x), ok(y));
35         if (ok(x) && ok(y)) {
36             cout << s << endl;
37             puts("OK");
38             return 0;
39         }
40     }
41     puts("Failed to factorize!");
42     return 0;
43 }
```

```
0 : 1 0
1 : 0 0
2 : 0 0
3 : 0 0
4 : 1 0
5 : 0 0
6 : 0 0
7 : 0 1
8 : 1 0
9 : 0 0
10 : 1 0
11 : 0 1
12 : 1 0
13 : 0 1
14 : 0 0
15 : 0 1
16 : 1 0
17 : 0 0
18 : 1 0
19 : 0 1
20 : 1 0
21 : 0 1
22 : 0 0
23 : 0 1
24 : 1 0
25 : 0 0
26 : 0 0
27 : 0 1
28 : 0 0
29 : 0 0
30 : 0 0
31 : 0 1
Failed to factorize!

-----
Process exited after 0.1998 seconds with return value 0
请按任意键继续. . .
```

□