Lecture Note for Class 17

徐逸凡

2018年5月29日

目录

1　问题一

1.1　问题描述

设$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$是n个非负实数，且$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$。$Y_1,\ldots,Y_n$是$n$个独立同分布的随机变量，$Y_i \sim Bernoulli(p)$（其中$p \geq \frac{1}{2}$）。证明不等式

$$P(\sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i \geq \frac{1}{2}) \geq p.$$

1.2　推广

如果Y_i服从其他的概率分布，如何选取β和γ使得不等式$P(\sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i \geq \beta) \geq \gamma$成立。例如$Y_i$的分布列为$P_Y(x_j) = p_j$，$j = 1,2,3$，那么不等式

$$P(\sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i \geq \frac{x_1+x_2+x_3}{3}) \geq P(Y \geq \frac{x_1+x_2+x_3}{3})$$

是否成立？

1.3　EKR定理

EKR定理（Erdos－Ko－Rado theorem）的表述如下：设$\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$，$k \leq \frac{n}{2}$，$\mathcal{F}$中的元素两两相交不空，则有

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

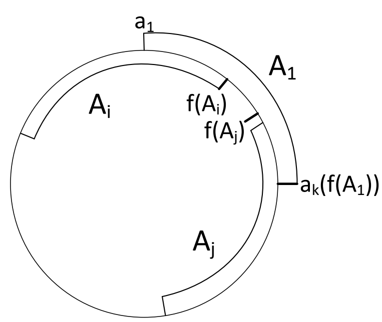
证明如下：设样本空间S是1到n的圆排列全体。每个圆排列出现的概率相等，均为$\frac{1}{(n-1)!}$。将$\mathcal{F}$中的元素编号，令

$$X_i = \begin{cases} 1 & \mathcal{F}\text{中第}i\text{个元素连续地出现在圆排列中}, \\ 0 & \mathcal{F}\text{中第}i\text{个元素没有连续地出现在圆排列中}. \end{cases}$$

$E[X_i] = \frac{k!(n-k)!}{(n-1)!}$。令$X = \sum_{i=1}^{|\mathcal{F}|} X_i$，$X$表示$\mathcal{F}$中的在圆排列中连续出现的元素的个数。

$$E[X] = \sum_{i \in \mathcal{F}} E[X_i] = |\mathcal{F}| \frac{k!(n-k)!}{(n-1)!}.$$

接下来我们证明，对$\forall \sigma \in S, X(\sigma) \geq k$。设$\{A_1, \ldots, A_t\}$是$\mathcal{F}$中连续出现在圆排列$\sigma$上的元素全体。构造$\{A_1, \ldots, A_t\}$ 到$[k]$的映射f。$f(A_1) = k$。$\forall 2 \leq i \leq t, A_1 \cap A_i \neq \emptyset$，考虑到$A_1$和$A_i$在圆排列$\sigma$上都是连续的一段，所以在圆排列$\sigma$ 上A_1和A_i有重叠的一段。将A_1 在σ上的连续的一段顺时针依次设为$a_1, \ldots, a_k$。如果$a_1 \in A_i$，则$f(A_i) = \max(j | a_j \in A_i)$；如果$a_1 \notin A_i$，则$a_k \in A_i$，$f(A_i) = \max(j | a_j \notin A_i)$。



易验证f是一个单射，所以$t \leq k$，即$X(\sigma) \leq k$。因此$E[X] \leq k$，即$|\mathcal{F}| \frac{k!(n-k)!}{(n-1)!} \leq k$，则

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

在这里等号是能取到的。令$\mathcal{F}$中的任意一个元素都包含1，其余$k-1$个数在剩余$2, \ldots, n$中选取，则$|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{k-1}$。

1.4　证明

首先，不失一般性，假设$\forall A \subseteq [n], \sum_{i\in A} \alpha_i \neq \frac{1}{2}$（这一点的正确性需要分析上的严格证明）。设

$$M_k = \sharp\left\{A \in \binom{[n]}{k} : \sum_{i\in A} \alpha_i > \frac{1}{2}\right\},\ k = 1, \ldots, n.$$

则有

$$P(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i \geq \frac{1}{2}) = \sum_{k=1}^{n} M_k p^k (1-p)^{n-k}.$$

关于M_k，有等式

$$M_k + M_{n-k} = \binom{n}{k}. \tag{1}$$

证明如下：在$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$中取出$k$个数有$\binom{n}{k}$种取法。如果取出的$k$个$\alpha_i$的和大于$\frac{1}{2}$，那么这种取法在$M_k$中被算了一次；如果取出的$k$ 个α_i的和小于$\frac{1}{2}$，那么没取的$n-k$个α_i在M_{n-k}中被算了一次。因此$M_k + M_{n-k} = \binom{n}{k}$。

接下来我们证明如果$k \leq \frac{n}{2}$，则

$$M_k \leq \binom{n-1}{k-1}. \tag{2}$$

证明如下：注意到当$k \leq \frac{n}{2}$时，如果$\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k} > \frac{1}{2}, \alpha_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} > \frac{1}{2}$，那么$\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}\} \cap \{\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_k}\} \neq \emptyset$（否则$1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geq \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k} + \alpha_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} > 1$，矛盾）。由**EKR**定理可知$M_k \leq \binom{n-1}{k-1}$。

利用关于M_k的两个条件(1)(2)，可以证明

$$\sum_{k=1}^{n} M_k p^k (1-p)^{n-k} \geq p. \tag{3}$$

因为$p = p(p+1-p)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$，要证式(3)，即证

$$\sum_{k=1}^{n} p^k (1-p)^{n-k} \left[M_k - \binom{n-1}{k-1}\right] \geq 0.$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} p^k(1-p)^{n-k}\left[M_k - \binom{n-1}{k-1}\right] \\
= &\sum_{k<\frac{n}{2}} p^k(1-p)^{n-k}\left[M_k - \binom{n-1}{k-1}\right] + \sum_{k\ge\frac{n}{2}} p^k(1-p)^{n-k}\left[M_k - \binom{n-1}{k-1}\right].
\end{aligned}$$

上式第二项

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\ge\frac{n}{2}} p^k(1-p)^{n-k}\left[M_k - \binom{n-1}{k-1}\right] = \sum_{j\le\frac{n}{2}} p^{n-j}(1-p)^{j}\left[M_{n-j} - \binom{n-1}{n-j-1}\right] \\
= &\sum_{j\le\frac{n}{2}} p^{n-j}(1-p)^{j}\left[\binom{n}{j} - M_j - \binom{n-1}{j}\right] = \sum_{j\le\frac{n}{2}} p^{n-j}(1-p)^{j}\left[\binom{n-1}{j-1} - M_j\right] \\
\ge &\sum_{j<\frac{n}{2}} p^{n-j}(1-p)^{j}\left[\binom{n-1}{j-1} - M_j\right].
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} p^k(1-p)^{n-k}\left[M_k - \binom{n-1}{k-1}\right] \\
= &\sum_{k<\frac{n}{2}} \left[p^k(1-p)^{n-k} - p^{n-k}(1-p)^k\right]\left[M_k - \binom{n-1}{k-1}\right] \ge 0.
\end{aligned}$$

上式的不等号成立是因为$p^k(1-p)^{n-k} - p^{n-k}(1-p)^k \le 0$（由$k < \frac{n}{2}, p \ge \frac{1}{2}$可推出），$M_k - \binom{n-1}{k-1} \le 0$。至此我们证明了

$$P(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i \ge \frac{1}{2}) \ge p.$$

2 问题二

2.1 问题描述

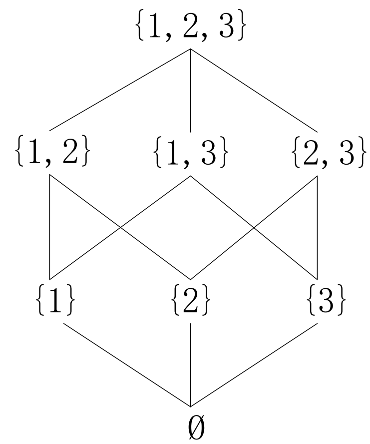
在样本空间$2^{[n]}$中，$X_1, \ldots, X_n$是n 个事件，$X_i = \{A \in 2^{[n]} | i \in A\}$。给定一个$E \subseteq 2^{[n]}$，问是否存在$2^{[n]}$上的概率分布$P$，使得

$$\{i_1, \ldots, i_t\} \in E \iff P(X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_t}) = P(X_{i_1}) \ldots P(X_{i_t}). \quad (5)$$

（在这里我们需要对E加一个限制条件：$\forall A \in 2^{[n]}$且$|A| < 2$，则$A \in E$。因为当$|A| = 0, 1$时，$P(\cap_{i \in A} X_i) = \prod_{i \in A} P(X_i)$一定成立。）

2.2 证明

$(2^{[n]}, \subseteq)$是一个偏序集，画出来是一个hypercube。



$\forall A \in 2^{[n]}$，$P(\cap_{i \in A} X_i) = \sum_{A \subseteq B} P(B)$。从图上来看，$P(\cap_{i \in A} X_i)$是从$A$到$[n]$的hypercube的上所有顶点的概率之和（从$A$ 到$[n]$的hypercube与从$\emptyset$到$[n] - A$的hypercube是同构的）。例如，$P(X_2) = P(\{2\}) + P(\{1, 2\}) + P(\{2, 3\}) + P(\{1, 2, 3\})$。

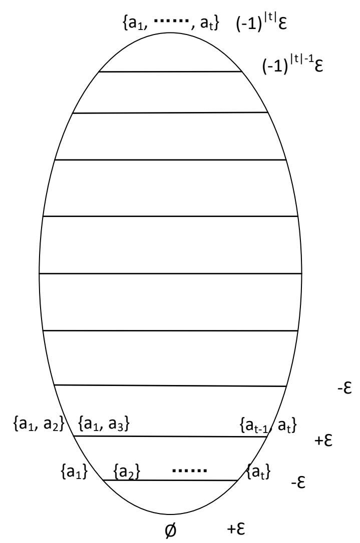
对于$E = 2^{[n]}$的情况，$\forall A \in 2^{[n]}$，令$P(A) = \frac{1}{2^n}$。在此概率分布下，$\forall A \in 2^{[n]}$，$P(\cap_{i \in A} X_i) = \sum_{A \subseteq B} P(B) = 2^{n - |A|} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{|A|}}$，所以

$$P(X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_t}) = \frac{1}{2^t} = P(X_{i_1}) \ldots P(X_{i_t})$$

对任意$\{i_1, \ldots, \imath_t\} \in 2^{[n]} = E$成立。

对于$E \subsetneq 2^{[n]}$的情况，可以采用逐步调整的方法使得**(5)**式成立。首先，对于$\forall A \in 2^{[n]}$，令$P(A) = \frac{1}{2^n}$。由第一种情况可知，$P(\cap_{i \in A} X_i) = \prod_{i \in A} P(X_i)$对任意$A \in 2^{[n]}$均成立。接下来取$A \in 2^{[n]}$ 且$A \notin E$，我们可

以调整一部分$P(B)$（$B \in 2^{[n]}$），使得$P(X_{i_1} \cap \ldots, \cap X_{i_t})$ 这种形式的概率只有$P(\cap_{i\in A} X_i)$被改变，其余均不变。为了区分，我们将调整后的概率分布记为P^*。具体操作如下，记从$\emptyset$ 到A的**hypercube**为$\mathscr{H}'$。$\mathscr{H}'$ 可以根据每个顶点含有多少个$[n]$ 中的数字分为$|A|+1$ 层。设$A=\{a_1,\ldots,a_t\}$，那么$\emptyset$是第0层，$\{a_1\},\ldots,\{a_t\}$是第1层，A是第t 层。取$\varepsilon=\frac{1}{2}\min_{B\in\mathscr{H}'}(P(B))$。$\forall B \in \mathscr{H}$，如果$B \in \mathscr{H}'$，则$P^*(B) = P(B) + (-1)^{|B|}\varepsilon$；若$B \notin \mathscr{H}'$，则$P^*(B)=P(B)$。



可以证明，

$$\forall B \in 2^{[n]}, P^*(\cap_{i\in B} X_i) \neq P(\cap_{i\in B} X_i) \iff B = A.$$

如果$B \not\subseteq A$，$\forall B' \supseteq B$，$B' \not\subseteq A$，则

$$P^*(\cap_{i\in B} X_i) = \sum_{B'\supseteq B} P^*(B') = \sum_{B'\supseteq B} P(B') = P(\cap_{i\in B} X_i).$$

如果$B \subsetneq A$，

$$
\begin{aligned}
P^*(\cap_{i\in B}X_i) &= \sum_{B'\supseteq B} P^*(B') \\
&= \sum_{B'\supseteq B \cap B'\subseteq A} P^*(B') + \sum_{B'\supseteq B\cap B'\nsubseteq A} P^*(B') \\
&= \sum_{B'\supseteq B \cap B'\subseteq A} \left(P(B') + (-1)^{|B'|}\varepsilon\right) + \sum_{B'\supseteq B\cap B'\nsubseteq A} P(B') \\
&= \sum_{B'\supseteq B} P(B') + \varepsilon \sum_{B'\supseteq B\cap B'\subseteq A} (-1)^{|B'|} \\
&= P(\cap_{i\in B}X_i) + (-1)^{|B|}\varepsilon \sum_{C\subseteq A-B} (-1)^{|C|} \\
&= P(\cap_{i\in B}X_i) + (-1)^{|B|}\varepsilon \sum_{i=0}^{|A|-|B|} \binom{|A|-|B|}{i} (-1)^i \\
&= P(\cap_{i\in B}X_i).
\end{aligned}
$$

再计算$P^*(\cap_{i\in A}X_i)$，

$$
\begin{aligned}
P^*(\cap_{i\in A}X_i) &= \sum_{A'\supseteq A} P^*(A') = P^*(A) + \sum_{A'\supsetneq A} P^*(A') \\
&= P(A) + (-1)^{|A|}\varepsilon + \sum_{A'\supsetneq A} P(A') \\
&= (-1)^{|A|}\varepsilon + P(\cap_{i\in A}X_i) \\
&\neq P(\cap_{i\in A}X_i).
\end{aligned}
$$

所以，我们可以将$\overline{E}$中的元素一个个取出来，然后调整概率分布P，使得等式$P(\cap_{i\in A}X_i) = \prod_{i\in A} P(X_i)$（$A$是从$\overline{E}$中的取出来元素）不再成立，而其他的等式或不等式不变。当$\overline{E}$的元素取完后，我们就得到满足式**(5)**的概率分布P。

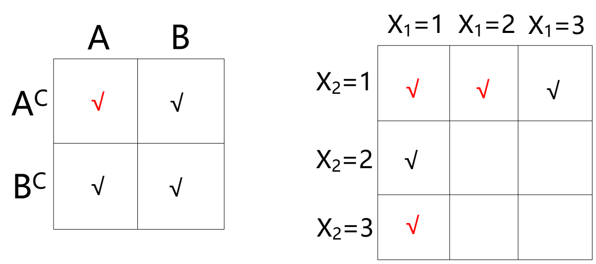
2.3 推广

设$X_1, \ldots, X_n$是n个取值范围为$[m]$的随机变量。$E \subseteq 2^{[n]}$。问是否存

在$X_1,\ldots,X_n$的联合分布P，使得

$$\{i_1,\ldots,i_t\}\in E \iff X_{i_1},\ldots,X_{i_t}\text{独立}.$$

这个推广与原问题的差别在于，如果事件A,B独立，那么$A,\overline{B}$独立，$\overline{A},B$独立，$\overline{A},\overline{B}$独立；但是，对随机变量而言，假设$X_1,X_2$都是取值范围为[3]的随机变量，$P(X_1=1,X_2=1)=P(X_1=1)P(X_2=1)$，这推不出$P(X_1=i,X_2=j)=P(X_1=i)P(X_2=j)$（其中$(i,j)\neq(1,1)$）。如下图右侧所示，任意一个格子的独立性在确认它所在的行或列其他所有格子的独立性后才可以被确定。



3 Markov chain tree theorem

给定一个马尔科夫链的转移矩阵P，P不可约，求平稳分布x（即$xP=x$）。因为$|I-P|=0$，所以

$$(I-P)^*(I-P)=(I-P)(I-P)^*=0.$$

可以证明$(I-P)^*$的任意一行归一化以后就是x。事实上，$(I-P)^*$的每一行都是相同的。

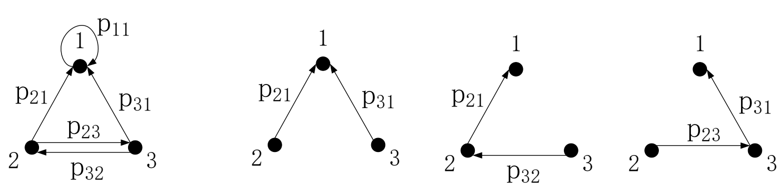
$$I-P=\begin{pmatrix} P_{12}+\cdots+p_{1n} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ P_{21} & P_{21}+p_{23}+\cdots+p_{2n} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{n1}+\cdots+p_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

设$(I-P)^* = (a_{ij})$。$\forall a_{ij} \in (I-P)^*$，$a_{ij}$是$a_{1j}, \ldots, a_{i-1,j}, a_{i+1,j}, \ldots, a_{n,j}$的加权平均，由此可推出$a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ 是相等的，即$(I-P)^*$的每一行都相同。

设马尔科夫链的转移概率图为G，G是有n个顶点的带权有向图（i到j的边权为p_{ij}）。所有有n个顶点、以i为根、所有顶点都指向其父亲的树构成的集合为T_i。$\forall \tau \in T_i$，$\omega(\tau)$表示这棵树所有边权之积。a_{ii}的值（即$(I-P)$ 去掉第i行第i列的代数余子式）为

$$a_{ii} = \sum_{\tau \in T_i} \omega(\tau).$$

上式说明$a_{ii} \geq 0$，所以$(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$归一化以后就是平稳分布$x$。



如上图所示的马尔科夫链转移概率图中，T_1就是右边三棵树。

$$a_{11} = p_{21}p_{31} + p_{21}p_{32} + p_{23}p_{31}.$$

关于Markov chain tree theorem的证明，同学们可以查阅有关文献（An Elementary Proof of the Markov Chain Tree Theorem）。

感谢金之涵同学在我整理笔记的过程中给予我很大的帮助！以上笔记中可能有很多错误和缺漏，如有问题，请及时联系我（xuyifan_frank@sjtu.edu.cn），谢谢！