



6 - Compléments

ALAIN QUARTIER-LA-TENTE

Objectifs de cette séquence

- Présenter quelques compléments sans exercice associé

Sommaire

1. Régresseurs externes et TBATS

1.1 Régresseurs externes classiques

2. Modèles ECM

Régresseurs externes classiques

Dans certaines méthodes (régression linéaire, ARIMA, etc. mais pas ETS) permettent de rajouter des régresseurs externes qui peuvent aider à l'analyse/prévision

- polynômes sur les dates (e.g. tendance linéaire) (on peut s'aider de `forecast::tslm()`)

Régresseurs externes classiques

Dans certaines méthodes (régression linéaire, ARIMA, etc. mais pas ETS) permettent de rajouter des régresseurs externes qui peuvent aider à l'analyse/prévision

- polynômes sur les dates (e.g. tendance linéaire) (on peut s'aider de `forecast::tslm()`)
- indicatrices sur la périodicité (avec variable de contraste) :
 - Sur les jours de la semaine
 - Sur les mois/trimestres

Régresseurs externes classiques

Dans certaines méthodes (régression linéaire, ARIMA, etc. mais pas ETS) permettent de rajouter des régresseurs externes qui peuvent aider à l'analyse/prévision

- polynômes sur les dates (e.g. tendance linéaire) (on peut s'aider de `forecast::tslm()`)
- indicatrices sur la périodicité (avec variable de contraste) :
 - Sur les jours de la semaine
 - Sur les mois/trimestres
- Régresseurs JO :
 - On compte le nombre de lundis, mardis, ... dans le mois et on construit des variables contraste (en faisant des éventuels regroupement)
 - Régresseurs sur les jours fériés (éventuellement regroupés avec dimanches) + éventuels effets graduels (notamment fêtes mobiles)

Régresseurs de Fourier

Lorsque la périodicité est trop élevée ou lorsqu'il y a plusieurs saisonnalités, ajouter des indicatrices peut être trop coûteux.

Solution : ajouter des variables sinusoïdales aux fréquences étudiées !

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \quad \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \quad \text{avec } 0 < k < m$$

Généralement $k \ll m$ lorsque m est grand

Régresseurs de Fourier

Lorsque la périodicité est trop élevée ou lorsqu'il y a plusieurs saisonnalités, ajouter des indicatrices peut être trop coûteux.

Solution : ajouter des variables sinusoïdales aux fréquences étudiées !

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \quad \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \quad \text{avec } 0 < k < m$$

Généralement $k \ll m$ lorsque m est grand

- Pour séries mensuelles : $m = 12$
- Pour les séries hebdomadaires $m = 365.25/7 \simeq 52$
- Pour les séries journalières $m = 365.25$ pour saisonnalité annuelle, $m = 365.25/12 \simeq 30$ pour saisonnalité mensuelle.

TBATS (1)

Une transformation de Box-Cox est utilisée :

$$y_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{y_t^\lambda - 1}{\lambda} & \text{if } \lambda \neq 0 \\ \log(y_t) & \text{if } \lambda = 0 \end{cases}$$

Ensuite un modèle avec *Trigonometric seasonality, ARMA errors, Trend and Seasonal components* est calculé : c'est tout ce que l'on a vu dans les précédents cours.

Voir `?forecast::tbats()`

TBATS (2)

$$\begin{cases} y_t^{(\lambda)} = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \sum_{i=1}^T s_{t-m_i}^{(i)} + d_t \text{ and } d_t \sim \text{ARMA}(p, q) \\ l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha d_t \\ b_t = \phi b_{t-1} + \beta d_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{k_i} s_{j,t}^{(i)} \\ s_{j,t}^{(i)} = s_{j,t-1}^{(i)} \cos \omega_j + s_{j,t-1}^{*(i)} \sin \omega_j + \gamma_1^{(i)} d_t \\ s_{j,t-1}^{*(i)} = s_{j,t-1}^{(i)} \sin \omega_j + s_{j,t-1}^{*(i)} \cos \omega_j + \gamma_2^{(i)} d_t \end{cases} \quad \text{and } \omega_j = \frac{2\pi j}{m_i}$$

Notation : $TBATS(\omega, p, q, \phi, \langle m_1, k_1 \rangle, \dots, \langle m_J, k_J \rangle)$ avec

- ω = paramètre de Box-Cox
- (p, q) = $\text{ARMA}(p, q)$
- ϕ = paramètre d'amortissement
- m_1, \dots, m_J les périodicités et k_1, \dots, k_J le nombre de termes de fourrier

TBATS (3)

```
library(forecast)
tbats(USAccDeaths)
```

```
TBATS(1, {0,0}, -, {<12,5>})
```

```
Call: tbats(y = USAccDeaths)
```

Parameters

```
Alpha: 0.5950012
```

```
Gamma-1 Values: -0.01207202
```

```
Gamma-2 Values: 0.01159708
```

Seed States:

```
      [,1]
[1,] 9357.62824
[2,] -999.76784
[3,] 279.84741
[4,] -193.88870
```

Analyse des données haute fréquence

Pour les séries à haute fréquence (hebdomadaires, journalières, horaires, etc.)

- Les effets calendaires peuvent être relativement importants (notamment les jours fériés)

Analyse des données haute fréquence

Pour les séries à haute fréquence (hebdomadaires, journalières, horaires, etc.)

- Les effets calendaires peuvent être relativement importants (notamment les jours fériés)
- On peut utiliser des modèles avec des régresseurs externes (e.g. fourrier)

Analyse des données haute fréquence

Pour les séries à haute fréquence (hebdomadaires, journalières, horaires, etc.)

- Les effets calendaires peuvent être relativement importants (notamment les jours fériés)
- On peut utiliser des modèles avec des régresseurs externes (e.g. fourrier)
- TBATS

Analyse des données haute fréquence

Pour les séries à haute fréquence (hebdomadaires, journalières, horaires, etc.)

- Les effets calendaires peuvent être relativement importants (notamment les jours fériés)
- On peut utiliser des modèles avec des régresseurs externes (e.g. fourrier)
- TBATS
- On peut combiner des modèles STL + ETS ou ARIMA sur série désaisonnalisée

Analyse des données haute fréquence

Pour les séries à haute fréquence (hebdomadaires, journalières, horaires, etc.)

- Les effets calendaires peuvent être relativement importants (notamment les jours fériés)
- On peut utiliser des modèles avec des régresseurs externes (e.g. fourrier)
- TBATS
- On peut combiner des modèles STL + ETS ou ARIMA sur série désaisonnalisée

Analyse des données haute fréquence

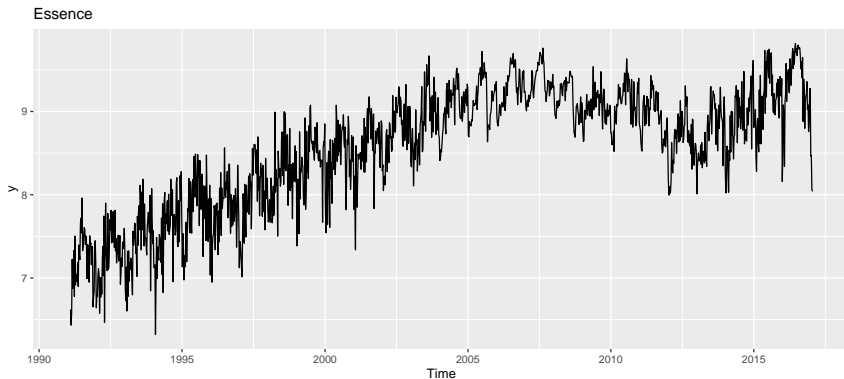
Pour les séries à haute fréquence (hebdomadaires, journalières, horaires, etc.)

- Les effets calendaires peuvent être relativement importants (notamment les jours fériés)
- On peut utiliser des modèles avec des régresseurs externes (e.g. fourrier)
- TBATS
- On peut combiner des modèles STL + ETS ou ARIMA sur série désaisonnalisée

Voir <https://otexts.com/fpp2/weekly.html> et <https://otexts.com/fpp3/weekly.html> pour des exemples

Exemples (1)

```
library(forecast);library(ggplot2);library(patchwork)
y <- fpp2::gasoline
autoplot(y, main = "Essence")
```



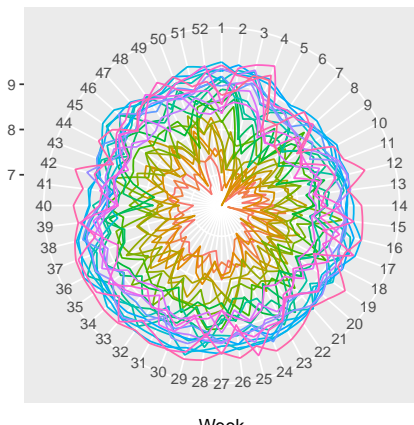
Exemples (2)

```
frequency(y)
```

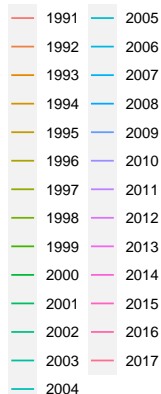
```
[1] 52.17857
```

```
ggseasonplot(y, polar = TRUE)
```

Seasonal plot: y



year



Exemples (3)

```
# Saisonnalité annuelle et mensuelle :
tbats <- tbats(y, seasonal.periods = c(365.25/7, 365.25/12/7))
arima_fourier <- auto.arima(y, seasonal = FALSE, xreg = fourier(y,K=5))
tbats
```

TBATS(1, {0,0}, 0.8, {<4.35,6>, <52.18,1>})

Call: tbats(y = y, seasonal.periods = c(365.25/7, 365.25/12/7))

Parameters

Alpha: 0.2350472

Beta: -0.03474354

Damping Parameter: 0.800008

Gamma-1 Values: -0.0002755258 6.336552e-05

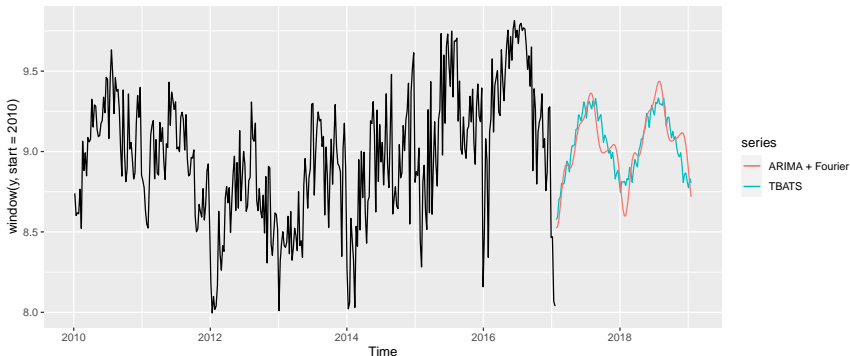
Gamma-2 Values: 5.566591e-05 5.769457e-05

Seed States:

```
[,1]
[1,] 6.949478933
[2,] 0.021926676
[3,] -0.030850684
[4,] 0.006212825
[5,] -0.009773578
```

Exemples (4)

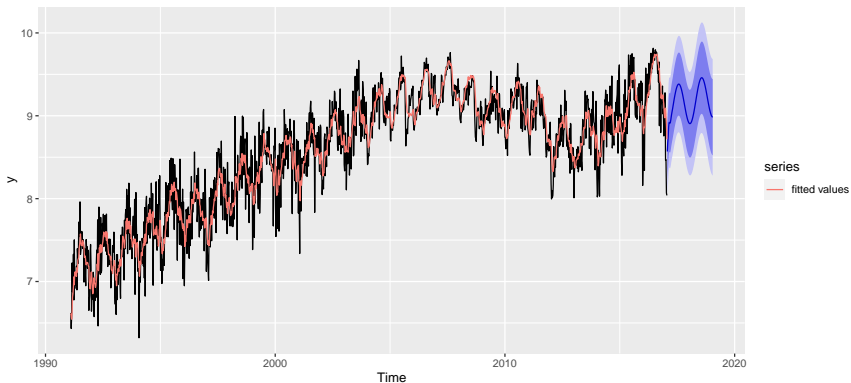
```
autoplot(window(y, start = 2010)) +  
  autolayer(forecast(tbats, h = 52*2)$mean, series="TBATS")+  
  autolayer(forecast(arima_fourier, h = 52*2, xreg = fourier(y, K=5, h = 52*2)  
            series = "ARIMA + Fourier")
```



Exemples analyse de K (1)

Forecasts from Regression with ARIMA(3,1,5) errors

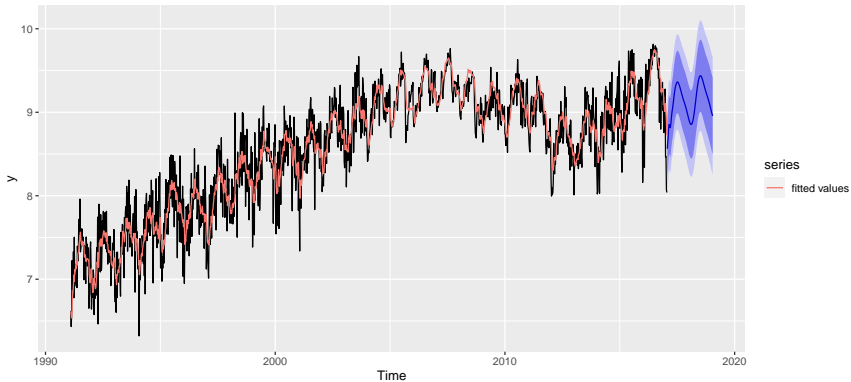
$K = 1$, AICc = 222.9



Exemples analyse de K (2)

Forecasts from Regression with ARIMA(3,1,5) errors

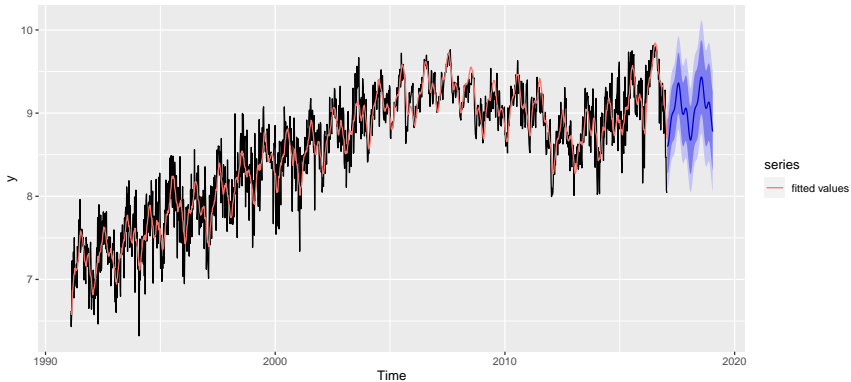
$K = 2$, AICc = 209.0



Exemples analyse de K (3)

Forecasts from Regression with ARIMA(0,1,1) errors

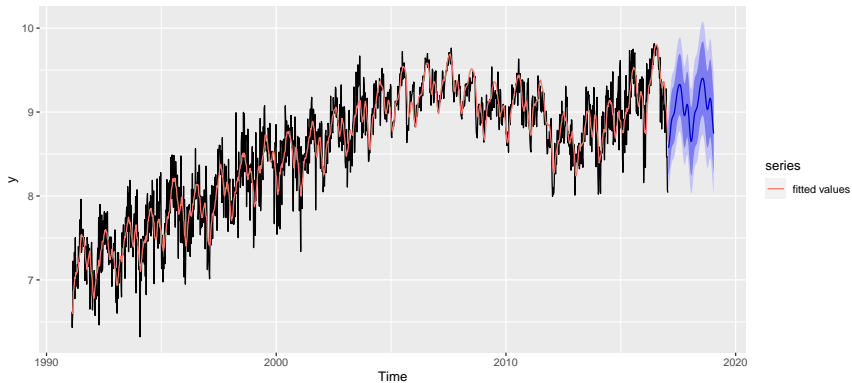
$K = 3$, AICc = 124.3



Exemples analyse de K (4)

Forecasts from Regression with ARIMA(0,1,1) errors

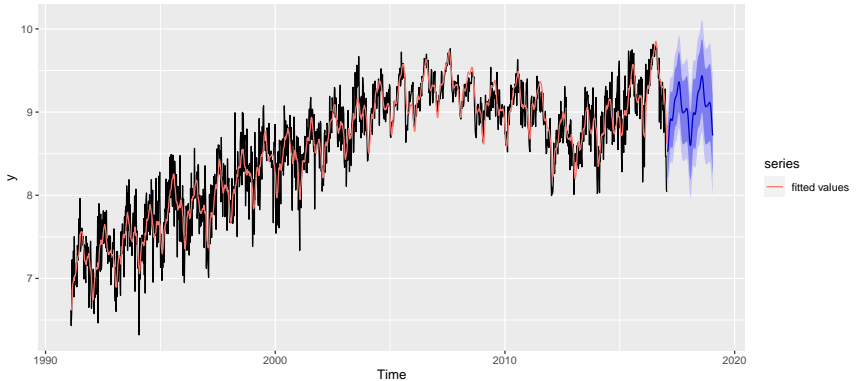
$K = 4$, AICc = 109.1



Exemples analyse de K (5)

Forecasts from Regression with ARIMA(0,1,1) errors

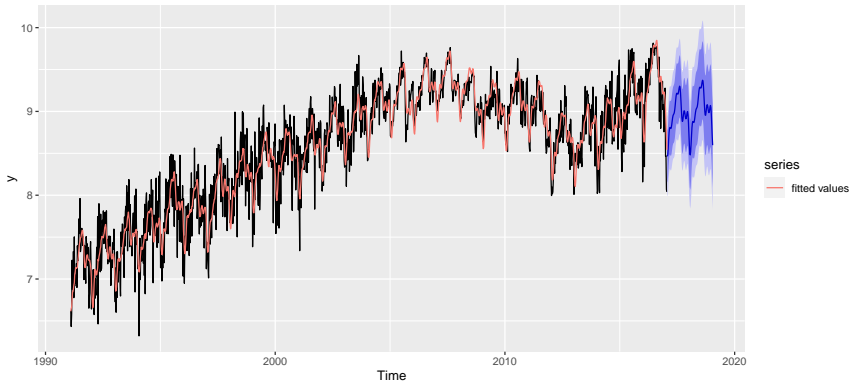
$K = 5$, AICc = 86.8



Exemples analyse de K (6)

Forecasts from Regression with ARIMA(0,1,3) errors

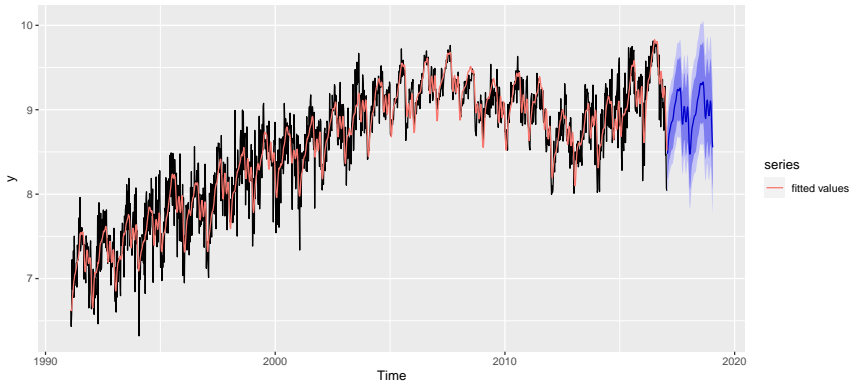
$K = 6$, AICc = 35.3



Exemples analyse de K (7)

Forecasts from Regression with ARIMA(0,1,3) errors

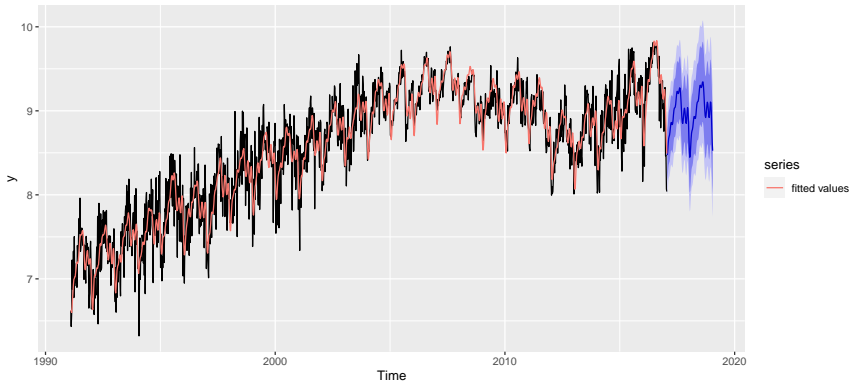
$K = 7$, AICc = 8.2



Exemples analyse de K (8)

Forecasts from Regression with ARIMA(0,1,3) errors

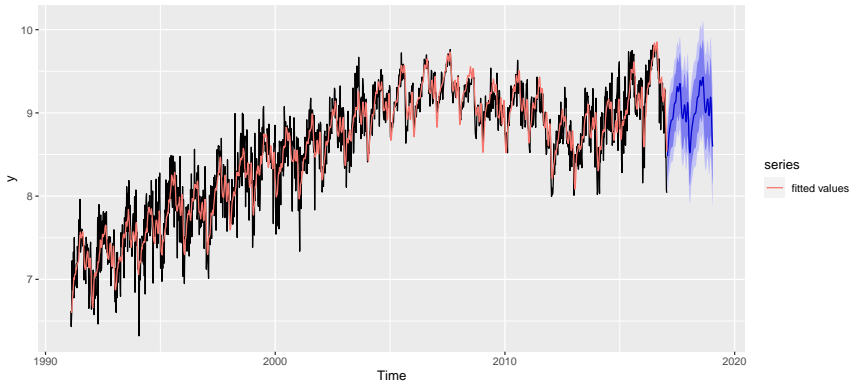
$K = 8$, AICc = 1.2



Exemples analyse de K (9)

Forecasts from Regression with ARIMA(4,1,1) errors

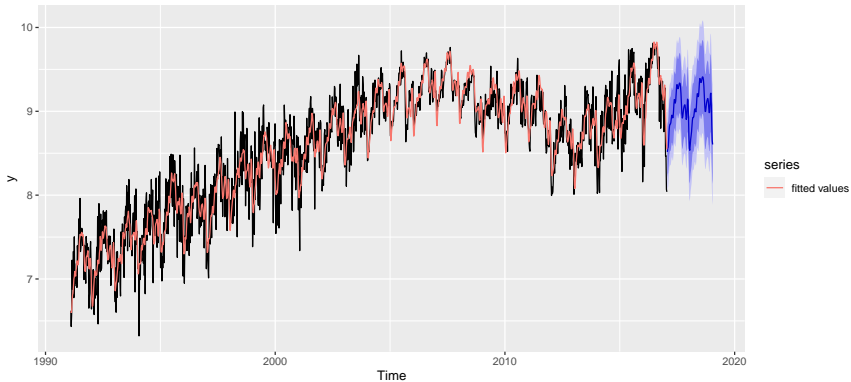
$K = 9$, $AICc = -7.3$



Exemples analyse de K (10)

Forecasts from Regression with ARIMA(4,1,1) errors

$K = 10$, AICc = -20.0



Sommaire

1. Régresseurs externes et TBATS

2. Modèles ECM

Modèles ECM

Les modèles à correction d'erreur (ECM) permettent de mettre en relation deux variables x_t, y_t non-stationnaires qui partagent la même tendance stochastique. Modèle suivant est utilisé :

$$\Delta y_t = \gamma + \underbrace{\sum_{i=1}^p \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^p \Delta x_{t-i}}_{\text{court terme}} + \alpha \underbrace{(y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 x_{t-1})}_{\text{long terme}} + \varepsilon_t$$

Modèles ECM

Les modèles à correction d'erreur (ECM) permettent de mettre en relation deux variables x_t, y_t non-stationnaires qui partagent la même tendance stochastique. Modèle suivant est utilisé :

$$\Delta y_t = \gamma + \underbrace{\sum_{i=1}^p \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^p \Delta x_{t-i}}_{\text{court terme}} + \alpha \underbrace{(y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 x_{t-1})}_{\text{long terme}} + \varepsilon_t$$

Peut s'estimer par double MCO : long terme puis court terme sur les résidus. On peut s'aider de `dynlm::dynlm()` ou utiliser le package `ecm`.

Modèles ECM

Les modèles à correction d'erreur (ECM) permettent de mettre en relation deux variables x_t, y_t non-stationnaires qui partagent la même tendance stochastique. Modèle suivant est utilisé :

$$\Delta y_t = \gamma + \underbrace{\sum_{i=1}^p \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^p \Delta x_{t-i}}_{\text{court terme}} + \alpha \underbrace{(y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 x_{t-1})}_{\text{long terme}} + \varepsilon_t$$

Peut s'estimer par double MCO : long terme puis court terme sur les résidus. On peut s'aider de `dynlm::dynlm()` ou utiliser le package `ecm`.

Pour que le modèle soit valide il faut que $y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 x_{t-1}$ soit stationnaire : on peut faire un test de racine unité sur les résidus ou appliquer le test de Johansen (`urca::ca.jo`).

Modèles ECM

Les modèles à correction d'erreur (ECM) permettent de mettre en relation deux variables x_t, y_t non-stationnaires qui partagent la même tendance stochastique. Modèle suivant est utilisé :

$$\Delta y_t = \gamma + \underbrace{\sum_{i=1}^p \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^p \Delta x_{t-i}}_{\text{court terme}} + \alpha \underbrace{(y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 x_{t-1})}_{\text{long terme}} + \varepsilon_t$$

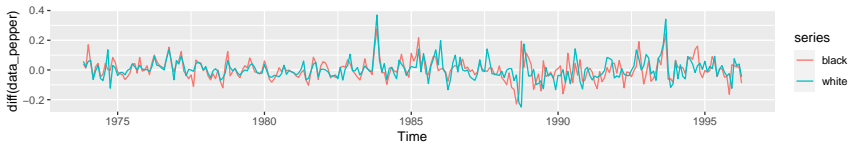
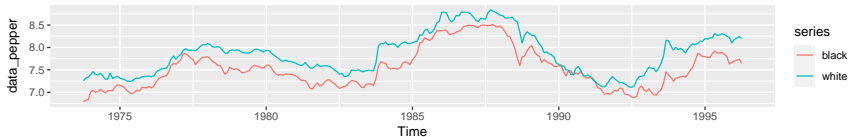
Peut s'estimer par double MCO : long terme puis court terme sur les résidus. On peut s'aider de `dynlm::dynlm()` ou utiliser le package `ecm`.

Pour que le modèle soit valide il faut que $y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 x_{t-1}$ soit stationnaire : on peut faire un test de racine unité sur les résidus ou appliquer le test de Johansen (`urca::ca.jo`).

Généralement $\alpha < 0$: s'interprète comme une force de rappel.

Exemple (1)

```
# install.packages("PepperPrice")
library(urca);library(dynlm);library(forecast);library(ggplot2)
data("PepperPrice", package = "AER")
# On passe au log pour analyser les différences comme des évolutions
data_pepper <- log(PepperPrice)
autoplot(data_pepper) / autoplot(diff(data_pepper))
```



Exemple (2)

```
# Séries sont dites I(1) :  
# Elles ne sont pas stationnaires  
tseries::kpss.test(data_pepper[, "black"])
```

KPSS Test for Level Stationarity

```
data: data_pepper[, "black"]  
KPSS Level = 0.60007, Truncation lag parameter = 5, p-value = 0.02263  
tseries::kpss.test(data_pepper[, "white"])
```

KPSS Test for Level Stationarity

```
data: data_pepper[, "white"]  
KPSS Level = 0.61733, Truncation lag parameter = 5, p-value = 0.02106  
# Mais les séries différenciées le sont  
tseries::kpss.test(diff(data_pepper[, "black"], 1))
```

Exemple (3)

KPSS Test for Level Stationarity

```
data: diff(data_pepper[, "black"], 1)
KPSS Level = 0.15877, Truncation lag parameter = 5, p-value = 0.1
tseries::kpss.test(diff(data_pepper[, "white"], 1))
```

KPSS Test for Level Stationarity

```
data: diff(data_pepper[, "white"], 1)
KPSS Level = 0.13062, Truncation lag parameter = 5, p-value = 0.1
# Le test de Johansen doit se lire de manière croissante avec r
# r=0 signifie qu'il n'y a pas de relation de co-intégration
# si on le rejette (test > valeurs critiques), on regarde le test suivant
# Dans notre cas il n'y a que deux tests car on a que deux variables
# Le test est plus général pour les cas où l'on fait des VECM
# (potentiellement plusieurs relations de cointegration)
# Ici on conclut qu'il y a bien relation de cointegration
summary(ca.jo(data_pepper))
```

Exemple (4)

```
#####
# Johansen-Procedure #
#####
```

Test type: maximal eigenvalue statistic (lambda max) , with linear trend

Eigenvalues (lambda):

```
[1] 0.04923322 0.01262841
```

Values of teststatistic and critical values of test:

	test	10pct	5pct	1pct
r <= 1	3.42	6.50	8.18	11.65
r = 0	13.58	12.91	14.90	19.19

Eigenvectors, normalised to first column:

(These are the cointegration relations)

	black.l2	white.l2
black.l2	1.0000000	1.0000000

Exemple (5)

```
white.l2 -0.8904272 -6.177004
```

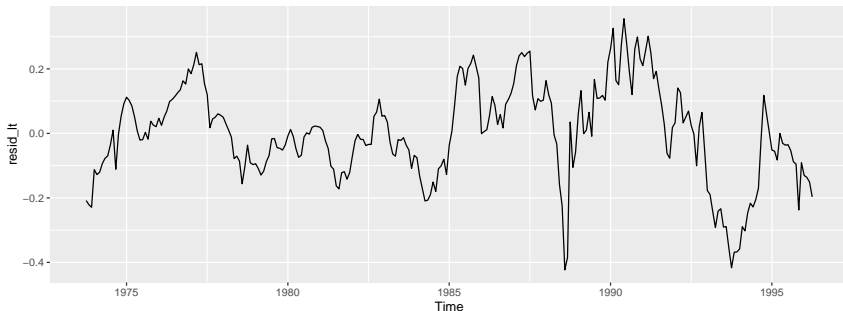
Weights W:

(This is the loading matrix)

```
           black.l2    white.l2  
black.d -0.07423986  0.001970073  
white.d  0.02088163  0.002811481
```

```
# On estime la relation de long-terme  
lm_lt <- lm(black ~ white, data = data_pepper)  
resid_lt <- ts(residuals(lm_lt), start = start(data_pepper),  
               frequency = frequency(data_pepper))  
autoplot(resid_lt)
```

Exemple (6)



```
# La série est bien stationnaire  
tseries::kpss.test(resid_lt)
```

KPSS Test for Level Stationarity

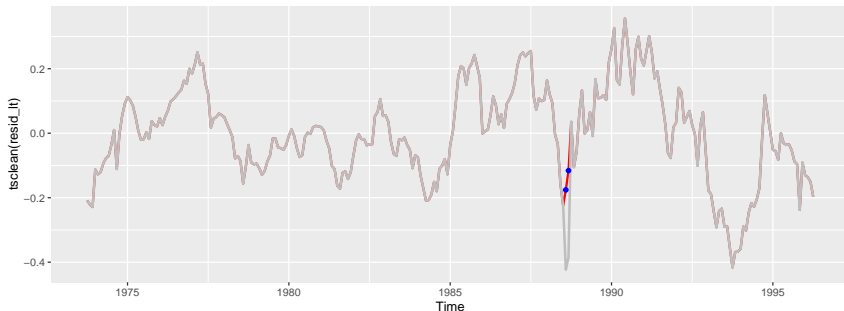
data: resid_lt

KPSS Level = 0.23504, Truncation lag parameter = 5, p-value = 0.1

Exemple (7)

```
# Rmq il y a quelques points atypiques que l'on pourrait corriger
# en ajoutant par exemple des indicatrices
# On peut aussi utiliser la fonction forecast::tsoutliers() pour les repérer
# En reprenant le code disponible ici
# https://robjhyndman.com/hyndsight/tsoutliers/ :
autoplot(tsclean(resid_lt), series="clean", color='red', lwd=0.9) +
  autolayer(resid_lt, series="original", color='gray', lwd=1) +
  geom_point(data = tsoutliers(resid_lt) %>% as.data.frame(),
            aes(x=time(resid_lt)[index], y=replacements), col='blue')
```

Exemple (8)



```
data <- ts.union(data_pepper, resid_lt)
colnames(data) <- c(colnames(data_pepper), "long_term")
# On a bien une force de rappel négative
summary(
  dynlm(diff(black, 1) ~ lag(diff(black, 1),-1) +
        lag(diff(white, 1),-1) +
        lag(long_term, -1), data = data)
)
```

Exemple (9)

Time series regression with "ts" data:

Start = 1973(12), End = 1996(4)

Call:

```
dynlm(formula = diff(black, 1) ~ lag(diff(black, 1), -1) + lag(diff(white,
1), -1) + lag(long_term, -1), data = data)
```

Residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-0.200930	-0.035547	-0.005632	0.028757	0.228076

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.001830	0.003876	0.472	0.63724
lag(diff(black, 1), -1)	0.327341	0.069431	4.715	3.92e-06 ***
lag(diff(white, 1), -1)	0.051700	0.069819	0.740	0.45966
lag(long_term, -1)	-0.072551	0.027006	-2.686	0.00768 **

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Exemple (10)

Residual standard error: 0.06345 on 265 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.144, Adjusted R-squared: 0.1343
F-statistic: 14.86 on 3 and 265 DF, p-value: 5.698e-09