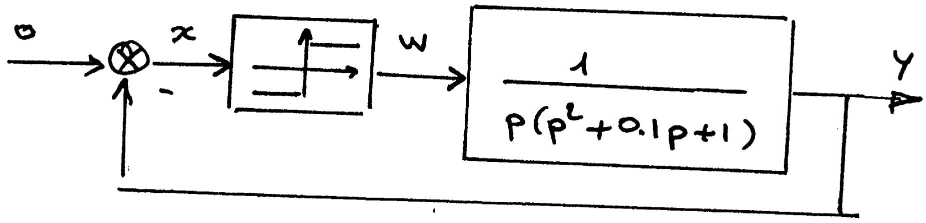
Corrigé de la PC 1ère Harmonique

Nota. Les 2 premières questions se font avec le minimum de calculs. Il ne s'agit donc pas de tracer précisément le lieu de Nyquist de la partie linéaire puis le lieu critique de la non-linéarité. On cherche simplement à comprendre les phénomènes et à les caractériser plus qualitativement que quantitativement.

1) Dans cette question, le système considéré est le suivant :



La non-linéarité est de classe A (symétrique, monoforme sans hystérésis). Le gain équivalent est donc réel et le lieu critique est porté par l'axe réel négatif dans le plan complexe.

Intuitivement, en fonction de l'amplitude du signal d'entrée on conçoit sans calcul que le gain équivalent peut varier de l'infini à 0.

$$\begin{cases} \text{si } x_0 = \varepsilon, \; w = M & \dfrac{w}{x_0} \to \infty \\ \text{si } x_0 \to \infty, \; w = M & \dfrac{w}{x_0} \to 0 \end{cases}$$

Le lieu critique $(-1/N)$ est donc tout l'axe réel négatif, parcouru de 0 à $-\infty$ quand $x_0 \uparrow$.

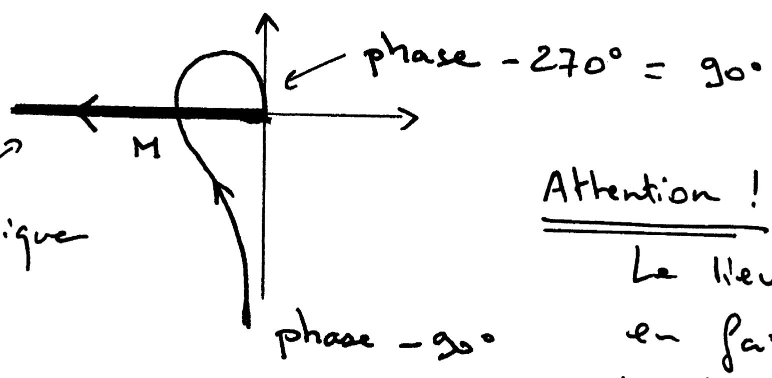
Voyons maintenant l'allure du lieu de Nyquist pour voir s'il y a risque ou non d'intersection avec le lieu critique.

$$L(p) = \frac{1}{p(p^2+0.1p+1)}$$

$$L(j\omega)\Big|_{\omega=0} \sim \frac{1}{j\omega} \quad : \text{Phase } -90°$$

$$L(j\omega)\Big|_{\omega=\infty} \sim \frac{1}{(j\omega)^3} \quad : \text{Phase } -270°.$$

Comme il n'y a pas de numérateur, la phase est toujours décroissante et le lieu intercepte nécessairement le lieu critique.



Attention !

Le lieu de Nyquist e[st] en fait plus compli[qué] du fait de la surtens[ion] (cf. planches).

Ici, on cherche juste à met[tre] en évidence l'existence d'au m[oins] un cycle limite, sans calculs

$$\boxed{\text{La figure ci-dessus met en évidence l'existence d'un cycle limite stable.}}$$

En faisant le minimum de calculs, on peut maintenant apporter qq précisions sur ce cycle limite.

pulsation : $\mathrm{Im}(L(j\omega_c)) = 0$.

$$L(j\omega) = \frac{1}{-0.1\,\omega^2 + j\omega(1-\omega^2)} = \frac{-0.1\,\omega^2 - j\omega(1-\omega^2)}{\omega^2 D}$$

$$\mathrm{Im}[L(j\omega)] = \frac{\omega^2-1}{\omega D} \Rightarrow \boxed{\omega_c = 1}$$

$$\left(D = (\omega^2-1)^2 + 0.01\,\omega^2 \right)$$

Amplitude :

$$|L(j\omega_c)| = \frac{1}{|-0.1\,\omega_c^2|} = 10 = \frac{1}{N(x_0)}$$

$$\Rightarrow \underline{N(x_0) = 0.1}$$

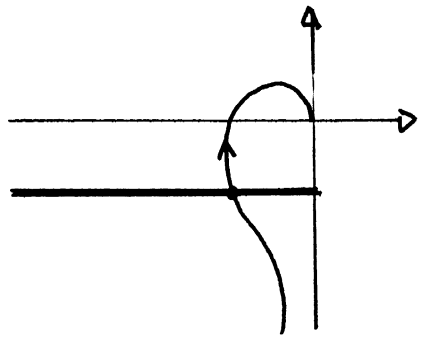
C'est seulement maintenant qu'on a besoin de calculer le gain équivalent. Dans le cas d'une non-linéarité de type relais, le gain est donné par :

$$N(x_0) = \frac{4M}{\pi x_0}$$

On en déduit donc : $\boxed{x_0 = \frac{40M}{\pi}}$

2) Si on remplace le relais par par un relais avec hystérésis, le gain équivalent est maintenant complexe. On montre alors que lieu critique est porté par une ½ droite parallèle à l'axe réel négatif, d'ordonnée -

$-\frac{\pi h}{4M}$



On peut donc s'attendre à ce que la pulsation de l'oscillation limite diminue :

$$\mathrm{Im}\,(L(j\omega_c)) = \frac{\omega_c^2 - 1}{\omega_c\, D(\omega_c)} = -\frac{\pi h}{4M}$$

On peut s'attendre également à ce que $|L(j\omega_c)|$ augmente ce qui implique une diminution de $N(x_0)$ et donc une augmentation de l'amplitude x_0.

On a en effet :

$$N(x_0) = \frac{4M}{\pi x_0}\, e^{-j\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{h}{x_0}}$$

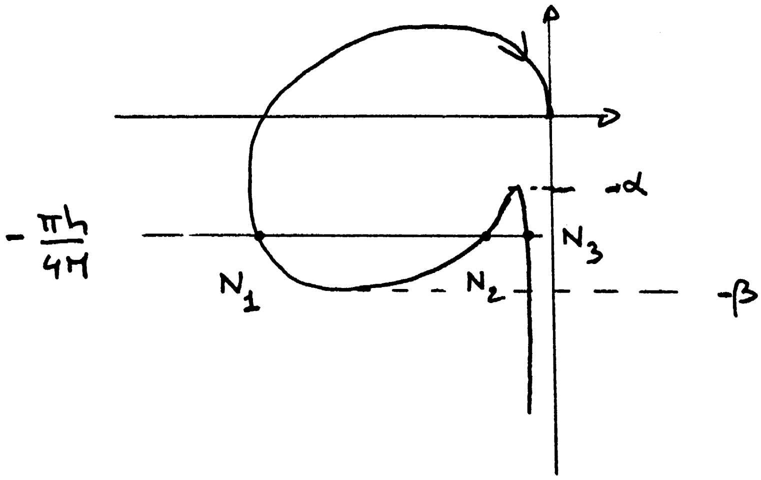
$$\Rightarrow \quad |N(x_0)| = \frac{4M}{\pi x_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_0 = \frac{4M}{\pi\,|N(x_0)|}}$$

Ceci dit sur cette dernière conclusion, il faut rester prudent car le lieu de Nyquist est plus compliqué que ceux que nous avons tracés jusqu'à présent.

Cette complexité est due à l'amortissement très faible ($\delta = 0{,}05$) du second-ordre dans la fonction de transfert, qui est à l'origine d'une surtension importante.

3) On voit clairement sur le lieu exact, qu'en présence d'hystérésis on peut avoir 3 intersections avec le lieu critique, et donc 3 cycles limites.

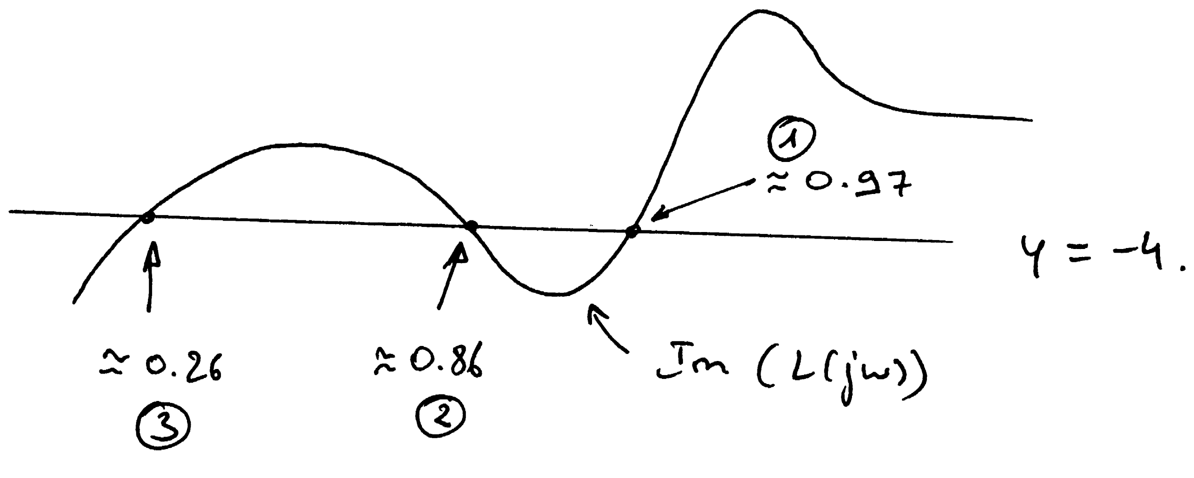


$$\begin{cases} \alpha = 2.6 \\ \beta = 5.6 \end{cases}$$

- $\frac{\pi h}{4M} < \alpha$: 1 seul cycle (stable) $\simeq$ situation précédente.
- $\alpha < \frac{\pi h}{4M} < \beta$: 3 cycles limites correspondant aux gains N_1, N_2, N_3.

  $\begin{cases} \text{cycles 1 et 3 : stables} \\ \text{cycle 2 : instable} \end{cases}$
- $\frac{\pi h}{4M} > \beta$: 1 seul cycle stable.

Pour $\frac{\pi h}{4M} = 4$, on lit directement les pulsations des cycles sur la planche fournie en regardant l'intersection avec la droite $y = -4$:



Validité de l'approximation.

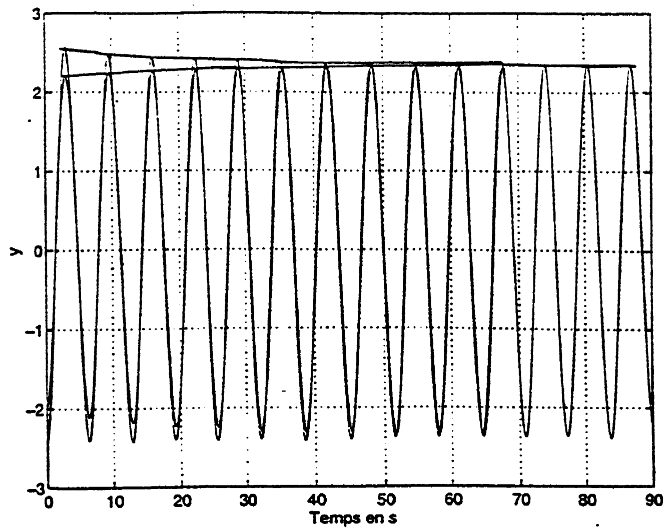
L'approximation est valable si la partie linéaire du système atténue suffisamment les harmoniques supérieures. Ici la non-linéarité étant symétrique, l'harmonique 2 est absente. Il s'agit donc de vérifier l'atténuation de l'harmonique 3.

Autrement dit, dans le cas précédent ($\frac{\pi h}{4M} = 4$) on pourra effectivement observer une oscillation limite C_i ($i = 1, 2, 3$) à la pulsation ω_i, c'est-à-dire une trajectoire fermée, elliptique dans l'espace de phase si l'atténuation à la pulsation $3\omega_i$ est correcte.

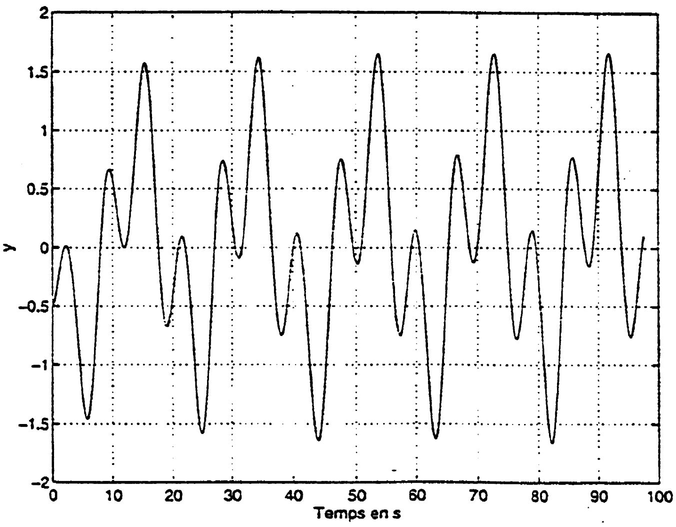
C1	$\omega_1 = 0.97$	$3\omega_1 = 2.9$	$G < 0.1$
C2	$\omega_2 = 0.86$	$3\omega_2 = 2.6$	$G < 0.1$
C3	$\omega_3 = 0.26$	$3\omega_3 = 0.78$	$G > 5$!!

On voit que l'atténuation est correcte pour C1 et C2. En revanche pour C3 on a une amplification de l'harmonique 3 qu'il faudrait donc prendre en compte dans l'analyse, en affinant le calcul du gain équivalent. Les calculs deviennent très compl[exes]. On devra ici recourir au calculateur.

Les planches ci-dessous visualisent les cycles C1 et C3 (C2 est instable donc difficile à observer), d'abord dans le domaine temporel, puis en projection dans le plan de phase.

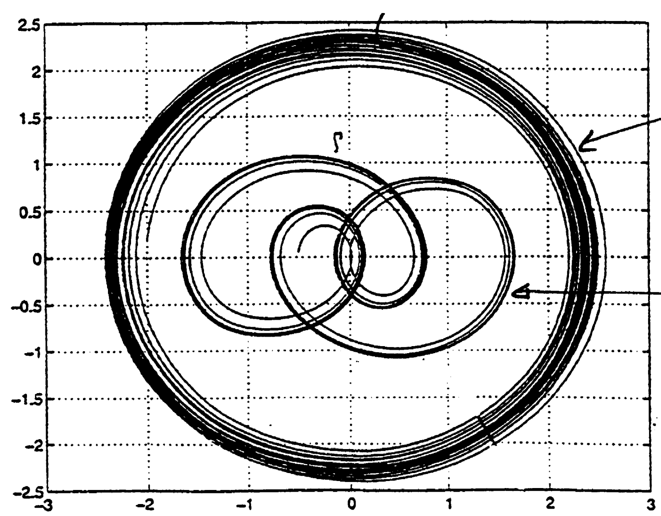


C1



C3

On voit claireme[nt]
2 harmoniques
dans ce signal



C1
Trajectoire elliptique

C3