

**TD 1**

---

**Exercice 1 – Échauffement : probas discrètes, continues**

---

**Q 1.1** Répondez en quelques lignes aux questions suivantes (en français, pas de manière formelle).

**Q 1.1.1** Quelle est la relation entre les notions d'événement, événement élémentaire et univers ?

**Q 1.1.2** De quoi a-t-on besoin pour construire un espace probabilisé sur un ensemble  $E$  dénombrable (pensez à ce que représente un élément de  $E$ ) ?

**Q 1.1.3** Qu'est ce qu'une variable aléatoire et à quoi cela sert ?

**Q 1.2** On considère que pour une journée, il pleut avec une probabilité  $p$  et qu'il ne pleut pas avec une probabilité  $(1 - p)$  de manière indépendante des autres jours. Comment s'appelle la loi qui permet de modéliser la variable aléatoire indiquant le nombre de jours consécutifs où il pleut avant un jour sans pluie ? Quel est son espérance et sa variance ?

**Q 1.3** Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements « tirer un roi » et « tirer un pique » sont-ils indépendants ? incompatibles ? quelle est la probabilité de « tirer un roi ou un pique » ?

---

**Exercice 2 – Probabilités continues**

---

Considérons dans cet exercice les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  représentant respectivement le niveau d'embouteillage et la météo à un instant donné.

**Q 2.1** Définir la notion de densité de probabilité et ses propriétés élémentaires. Qu'appelle-t-on densité jointe ? densité marginale ?

**Q 2.2** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de l'espace probabilité  $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ , que vaut  $\mathbb{E}(X)$  (en l'exprimant par une intégrale sur  $\Omega$  et par une intégrale sur  $\mathbb{R}$  ?

**Q 2.3** Exprimer  $\mathbb{E}(X|Y = y)$ .

**Q 2.4** On observe pendant un certain nombre d'années les embouteillages et la météo, on dispose de ces données sous la forme d'un ensemble  $E = \{(x_i, y_i)\}$ ,  $i$  indiquant le numéro de l'observation et  $x_i$  et  $y_i$  respectivement le niveau d'embouteillage et la météo lors de cette observation. Quel rapport entre  $\mathbb{E}(X)$  et  $\frac{1}{|E|} \sum_i x_i$  ? où se retrouve le  $p(x)$  dans cette somme ? Exprimez de manière analogue  $\mathbb{E}(X|Y = y)$

---

**Exercice 3 – Classifieur Bayésien (auteur : F. Rossi)**

---

**Q 3.1**

On considère la base de données des votes effectués par les membres de la Chambre des représentants des EUA en 1984 sur 16 propositions importantes. Chaque individu est un membre de la Chambre décrit par 17 variables nominales. La variable Parti prend les modalités Démocrate et Républicain. Les autres variables, V1 à V16 représentent les votes et prennent les valeurs OUI, NON et NSP (pour une absence de vote). Il y a 267 représentants démocrates et 168 représentants républicains.

|              | NON | NSP | OUI |     |            |     |     |    |     |
|--------------|-----|-----|-----|-----|------------|-----|-----|----|-----|
| Républicains | V1  | 134 | 3   | 31  | Démocrates | V1  | 102 | 9  | 156 |
|              | V2  | 73  | 20  | 75  |            | V2  | 119 | 28 | 120 |
|              | V3  | 142 | 4   | 22  |            | V3  | 29  | 7  | 231 |
|              | V4  | 2   | 3   | 163 |            | V4  | 245 | 8  | 14  |
|              | V5  | 8   | 3   | 157 |            | V5  | 200 | 12 | 55  |
|              | V6  | 17  | 2   | 149 |            | V6  | 135 | 9  | 123 |
|              | V7  | 123 | 6   | 39  |            | V7  | 59  | 8  | 200 |
|              | V8  | 133 | 11  | 24  |            | V8  | 45  | 4  | 218 |
|              | V9  | 146 | 3   | 19  |            | V9  | 60  | 19 | 188 |
|              | V10 | 73  | 3   | 92  |            | V10 | 139 | 4  | 124 |
|              | V11 | 138 | 9   | 21  |            | V11 | 126 | 12 | 129 |
|              | V12 | 20  | 13  | 135 |            | V12 | 213 | 18 | 36  |
|              | V13 | 22  | 10  | 136 |            | V13 | 179 | 15 | 73  |
|              | V14 | 3   | 7   | 158 |            | V14 | 167 | 10 | 90  |
|              | V15 | 142 | 12  | 14  |            | V15 | 91  | 16 | 160 |
|              | V16 | 50  | 22  | 96  |            | V16 | 12  | 82 | 173 |

**Q 3.1.1** Combien de valeurs différentes sont possibles pour le vecteur des votes ?

**Q 3.1.2** Soit le vecteur de vote d'un représentant :

$V = (\text{OUI}, \text{NON}, \text{NSP}, \text{OUI}, \text{NON}, \text{OUI}, \text{OUI}, \text{OUI}, \text{NON}, \text{NON}, \text{OUI}, \text{NON}, \text{NON}, \text{NON}, \text{NON}, \text{OUI})$

Comment estimer s'il est républicain ou démocrate ? **Q 3.2** On considère deux populations, les hommes H de taille moyenne 1,74m avec un écart type de 0,07m et les femmes F de taille moyenne 1,62m avec un écart type de 0,065m (chiffres INSEE 2001). La population H contient  $|h|$  individus et la population F,  $|f|$  individus. On suppose que les répartitions des tailles sont gaussiennes au sein de chaque sous-population.

On choisit aléatoirement uniformément un individu dans la population totale et on veut déterminer en fonction de sa taille uniquement de quelle sous-population il est issu : il s'agit donc de classer les individus en fonction d'une variable continue.

**Q 3.2.1** On note G la variable aléatoire indiquant le genre d'une personne choisie au hasard. Donner la loi de G.

**Q 3.2.2** On note T la variable aléatoire donnant la taille d'une personne choisie au hasard. Donner la densité de T. Donner  $P(G = f | T = t)$ .

**Q 3.2.3** Donner le classifieur bayésien optimal.

**Q 3.2.4** On suppose que  $|h| = |f|$ . Préciser les décisions prises par le classifieur optimal. Comment interpréter cette stratégie de décision ?

**Q 3.3** De combien de paramètres est constitué le classifieur bayésien ?