# Modules injectifs

A∼Z / Justin Carel

Last updated January 31, 2023

Dans ce document, on s'intéressera au dual des modules projectifs: les modules injectifs. On passera rapidement sur quelques propriétés élémentaires, puis on étudiera certains résultats intéressants. Il sera notamment donné une caractérisation des anneaux Noethériens, et on montrera que pour les modules finiment générés de torsion sur un anneau principal, sous-modules et quotients sont en correspondance. Les anneaux considérés ne sont pas nécessairement commutatifs; quand cela n'est pas précisé, on suppose que les modules sont à gauches.

## 1 Modules injectifs

**Définition 1.1.** *Un $R$-module $E$ est **injectif** si $\mathrm{Hom}(-, E)$ est exact, ie si pour toute injection $i : A \to B$ la flèche $i^* : \mathrm{Hom}(B, E) \to \mathrm{Hom}(A, E)$ est surjective.*

On peut réécrire cette définition de manière visuelle. Pour toute injection $i : A \to B$ et morphisme $f : A \to E$, il existe une flèche $g : B \to E$ faisant commuter le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, dotted, "g"'] \end{tikzcd}$$

**Proposition 1.1.** *$E$ est injectif si et seulement si toute suite exacte courte dont il est l'origine est séparée.*

*Preuve.*

$\Rightarrow$) Si $E \xrightarrow{i} B$ est une injection, il suffit de prendre $f = 1_E$ dans le diagramme pour obtenir une rétraction $g : B \to E$.

$\Leftarrow$) On prend $A$ et $B$ tels que dans le diagramme, et on pose $D$ le pushout. L'application $E \to D$ est injective car $A \to B$ l'est, et la suite $0 \to E \to D \to D/E \to 0$ est séparée par hypothèse.

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & E \arrow[r, hook, shift left] & D \arrow[l, dotted, shift left] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$\square$

**Proposition 1.2.** *Tout facteur direct $S$ d'un module injectif $E$ est injectif.*

*Preuve.*

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[r, hook, shift left] & E \arrow[l, shift left] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[u, dotted] \end{tikzcd}$$

$\square$

**Proposition 1.3.** *$\prod_I E_i$ est injectif si et seulement si tous les $E_i$ le sont. En particulier, une somme finie de modules injectifs l'est.*

*Preuve.*

$$\begin{tikzcd} & \prod E_i \arrow[r, two heads, "\pi_i"] & E_i \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[ul, dashed, "g"'] \arrow[u, dotted, "g_i"'] \end{tikzcd}$$

□

Nous allons voir que la seule obstruction à l'injectivité d'un module est le relèvement d'une flèche partant d'un idéal en flèche partant de l'anneau tout entier. Cela n'est pas une grande surprise: si on imagine qu'un module $M$ est une somme d'idéaux et quotients de $R$, alors le relèvement de $f : A \to E$ en $M \to E$ se réduit bien au problème de relever une flèche d'un idéal.

En effet, comme $\mathrm{Hom}(\bigoplus_I X_i, Y) = \prod_I \mathrm{Hom}(X_i, Y)$, relever une flèche partant d'une somme revient à la relever selon chacune de ses composantes. De plus, le théorème de correspondance prédit qu'un sous-module d'un quotient de $R$ correspond exactement à un sous-module de $R$, depuis lequel on peut relever puis passer au quotient.

Bien entendu, de nombreux modules ne sont pas de cette forme. La preuve du théorème ci-après n'aura donc rien à voir avec l'intuition tout juste présentée et emploiera plutôt le lemme de Zorn; toute extension intermédiaire $g$ de $f$ sera relevée "d'un cran" en $\bar{g}$. L'obstruction à cette opération se présentera alors sous la forme d'une condition de compatibilité entre $g$ et $\bar{g}$, dont la résolution correspondra exactement au relevé d'une flèche partant d'un idéal.

**Théorème 1.1** (Critère de Baer)**.** *Afin que $E$ soit injectif, il suffit que pour tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$, toute flèche $\mathfrak{a} \to E$ se relève en $R \to E$.*

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[u] \arrow[r] & R \arrow[ul, dotted] \end{tikzcd}$$

*Preuve.* On considère le diagramme usuel:

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

On appelle ***extension*** de $A \xrightarrow{f} E$ une flèche $M \xrightarrow{g} E$ vérifiant $A \subseteq S \subseteq B$ et $g|A = f$. Les extensions possèdent un ordre naturel pour lequel il existe un majorant de toute chaîne ascendante, puis Zorn fournit un élément maximal $S \xrightarrow{g} E$. Si $S \neq B$, considérons $b \in B \setminus S$. On veut étendre $g$ en $\bar{g} : S + Rb \to E$ par

$$\bar{g}(m + rb) = g(m) + r\bar{g}(b)$$

pour un certain élément $\bar{g}(b)$. Pour que cette application soit bien définie, il faut et il suffit que si $rb \in S$ alors $r\bar{g}(b) = g(rb)$. Considérons donc l'idéal

$$\mathfrak{a} = (S : b) = \{r \in R \,|\, rb \in S\}\,.$$

On définit $h : \mathfrak{a} \to E$ par $h(r) = g(rb)$. Elle s'étend en $\bar{h} : R \to E$, et poser $\bar{g}(b) = \bar{h}(1)$ convient. Ainsi l'extension $g$ n'est pas maximale, une contradiction. □

**Corollaire 1.1.** *Soit $R$ un domaine commutatif et $Q = \mathrm{Frac}\, R$. Alors tout $R$-morphisme $\mathfrak{a} \to Q$ d'un idéal $\mathfrak{a}$ est scalaire, et $Q$ est un $R$-module injectif.*

*Preuve.* Soit $f : \mathfrak{a} \to Q$ et $a \in \mathfrak{a}$. Pour tout $b$ de $\mathfrak{a}$, on a $bf(a) = af(b)$ d'où $f(b) = bf(a)/a$. On peut l'étendre en $g : R \to Q$ par $g(r) = rf(a)/a$ donc $Q$ est injectif d'après le critère de Baer.

**Lemme 1.1.** *Un module $M$ est semisimple si et seulement si tout sous-module est un facteur direct, ie si toute suite exacte $0 \to A \to M \to B \to 0$ est séparée.*

*Preuve.* Voir [Rot15, Proposition B-2.29 p.334]. □

**Proposition 1.4.** *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *$R$ est semisimple (à gauche).*
2. *Tout $R$-module est semisimple.*
3. *Tout $R$-module est injectif.*
4. *Tout $R$-module est projectif.*
5. *Toute suite exacte de $R$-modules est séparée.*

*Preuve.* Les quatre derniers points sont trivialement équivalents, et impliquent évidemment le premier. Supposons $R$ semisimple, et considérons un module $M$. Alors $M$ est quotient d'un certain module libre $L$. Ce dernier étant semisimple en tant que somme directe de modules simples, $M$ l'est. $\square$

## 2 Modules divisibles

**Définition 2.1.** *On dit qu'un module $D$ est **divisible** si pour tout $m \in D$ et $0 \neq r \in R$, il existe $n$ vérifiant $m = rn$.*

**Lemme 2.1.**

- *Si $R$ est un domaine, $Q = \operatorname{Frac} R$ est divisible.*
- *Toutes somme et produit de modules divisibles sont divisibles. En particulier, tout $Q$-espace vectoriel l'est.*
- *Tout quotient d'un module divisible est divisible.*

**Lemme 2.2.** *Soit $R$ un domaine et $M$ un $R$-module. Les propositions suivantes sont équivalents:*

1. *$M$ est divisible sans-torsion.*
2. *$M$ est un $Q$-espace vectoriel, où $Q = \operatorname{Frac} R$.*
3. *Pour tout $r \in R$, $[r] : m \mapsto rm$ est un isomorphisme.*

*Preuve.*

$1 \Rightarrow 2)$ Soit $p/q \in Q$ et $m \in M$. Il existe un $n \in M$ tel que $qn = m$, unique car $M$ est sans-torsion. On peut donc définir $\frac{p}{q}m = pn$, et laisser la vérification facile des axiomes d'un espace vectoriel au lecteur qui a du temps à perdre.

$2 \Rightarrow 3)$ $[p/q]$ est d'inverse $[q/p]$.

$3 \Rightarrow 1)$ $M$ est sans-torsion par injectivité de $[r]$, et divisible par surjectivité. $\square$

**Corollaire 2.1.** *Si $R$ est un domaine commutatif, alors tout module divisible sans-torsion $M$ est injectif.*

*Preuve.* Soit $\mathfrak{a} \xrightarrow{f} V$. Pour tout $a, b \in \mathfrak{a}$ on a $af(b) = bf(a)$ d'où $f(b) = ba^{-1}f(a)$: $f$ s'étend en $\left[a^{-1}f(a)\right] : R \to V$. $\square$

Il est souvent bien plus simple de vérifier la divisibilité d'un module plutôt que son injectivité. Ainsi on montrera parfois cette seconde propriété en utilisant la première, par exemple dans le cas des groupes abéliens.

**Lemme 2.3.** *Si $R$ est un domaine, tout module injectif est divisible. Quand $R$ est un PID à gauche, la réciproque est vraie.*

*Preuve.*

- Soit $M$ un module injectif, $m \in M$, et $r \in R$. On pose $f : Rr \to M = ar \mapsto am$, qui est bien définie car $R$ est un domaine. Il existe une extension $g : R \to M$ de $f$, pour laquelle $rg(1) = g(r) = m$.
- Soit $M$ un module divisible et $f : \mathfrak{a} \to M$. On écrit $\mathfrak{a} = Ra$ pour un certain $a \in R$. Par divisibilité, il existe $m \in M$ tel que $f(a) = am$ et on peut étendre $f$ en $g : R \to M = r \mapsto rm$. $\square$

**Remarque 2.1.** La définition de module divisible n'a a priori aucun intérêt quand $R$ n'est pas un domaine. On pourrait essayer de l'étendre en remplaçant la condition "$r \neq 0$" par "$r$ intègre", mais l'utilité d'une telle généralisation n'est pas claire: en effet, dans ce nouveau cadre il n'est même pas certain qu'un module injectif soit divisible.

**Corollaire 2.2.** *Tout groupe abélien $A$ s'injecte dans un groupe abélien injectif.*

*Preuve.* Il existe un groupe abélien libre $L$ pour lequel

$$A = L/K = \left(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_i\right)\Big/K \hookrightarrow \left(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q}_i\right)\Big/K.$$

Or $(\bigoplus_I \mathbb{Q}_i)/K$ est divisible en tant que quotient de modules divisibles, donc injectif. □

Il est possible de grandement améliorer ce résultat. Cependant, nous n'avons malheureusement pas encore les outils à disposition pour montrer la version plus générale. Nous nous contenterons donc de l'admettre pour le moment:

**Théorème 2.1.** *Tout module $M$ s'injecte dans un module injectif $E$. Il existe même un tel module minimal, appelé* ***l'enveloppe injective*** $\operatorname{Env} M$ *de $M$.*

**Théorème 2.2** (Bass-Papp)**.** *$R$ est Noethérien (à gauche) si et seulement si toute somme directe de modules injectifs est injective.*

*Preuve.*

⇒) Soit $E = \bigoplus_I E_i$ une somme de modules injectifs, et $f : \mathfrak{a} \to E$ une flèche provenant d'un idéal de $R$. On a $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, et l'image de chaque $a_i$ dans $E$ est à support fini. Il existe donc un nombre fini d'indices $J \subseteq I$ pour lesquels

$$\operatorname{im} f \subseteq F := \bigoplus_{j\in J} E_j \cong \prod_{j\in J} E_j.$$

Un produit de modules injectifs étant injectif, on étend $f$ en $R \to F \hookrightarrow E$.

⇐) Soit $(\mathfrak{a}_i)_I$ une chaîne ascendante d'idéaux de $R$, et soit $\mathfrak{a} = \bigcup_I \mathfrak{a}_i$. On injecte $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_i$ dans un module injectif $E_i$, et on considère $E = \bigoplus_I E_i$. L'application naturelle $i : \mathfrak{a} \to \prod_I E_i$ est à valeurs dans $\bigoplus_I E_i = E$. Ce dernier est injectif par hypothèse, donc on peut relever $i$ en un morphisme $f : R \to E$. Maintenant

$$i(\mathfrak{a}) = \operatorname{im} i \subseteq \operatorname{im} f = Rf(1),$$

mais $f(1)$ est à support fini: on trouve $k \in I$ vérifiant $i(\mathfrak{a})_k = 0$. Autrement dit $\mathfrak{a} \twoheadrightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{a}_k \hookrightarrow E_k$ est nulle, donc $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_k = 0$ et la chaîne ascendante stationne. □

**Proposition 2.1.** *Soit $R$ un PID, et $aR$ un idéal non-trivial. Alors $R/aR$ est un $R/aR$-module injectif.*

*Preuve.* Soit $bR/aR$ un idéal de $R/aR$, et soit $bR/aR \xrightarrow{f} R/aR$. Comme $a \in bR$, on trouve $r \in R$ tel que $a = rb$. En écrivant $f(b + aR) = c + aR$, on obtient

$$rc + aR = rf(b + aR) = f(rb + aR) = 0 + aR$$

d'où $rc = sa = srb$ pour un certain $s \in R$, soit $f(b + aR) = sb + aR$. On peut donc étendre $f$ en $[s] : R/aR \to R/aR$. □

## References


[Rot15] Joseph J. Rotman. *Advanced modern algebra. Part 1.* 3rd edition. Vol. 165. Grad. Stud. Math. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2015. ISBN: 978-1-4704-1554-9.