Modules injectifs, Dualité

A~Z / Justin Carel

Last updated March 18, 2023

Dans ce document, on s'intéressera au dual des modules projectifs: les modules injectifs. On rappellera tout d'abord quelques propriétés élémentaires, puis on exhibera une correspondance entre les images et sous-modules des modules finis de torsion sur un anneau principal. Finalement, on tentera sans grand succès d'explorer quelques propriétés de dualité.

1 Modules injectifs

Définition 1.1. *Un R-module E est **injectif** si $\mathrm{Hom}(-, E)$ est exact, c'est à dire si pour toute injection $i : A \to B$ la flèche $i^* : \mathrm{Hom}(B, E) \to \mathrm{Hom}(A, E)$ est surjective.*

On peut réécrire cette définition de manière visuelle. Pour toute injection $i : A \to B$ et morphisme $f : A \to E$, il existe une flèche $g : B \to E$ faisant commuter le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, dotted, "g"'] \end{tikzcd}$$

Proposition 1.1. *E est injectif si et seulement si toute suite exacte courte dont il est l'origine est séparée.*

Preuve.

- $\Rightarrow$) Si $E \xrightarrow{i} B$ est une injection, il suffit de prendre $f = 1_E$ dans le diagramme pour obtenir une rétraction $g : B \to E$.
- $\Leftarrow$) On prend A et B tels que dans le diagramme, et on pose D le pushout. L'application $E \to D$ est injective car $A \to B$ l'est, et la suite $0 \to E \to D \to D/E \to 0$ est séparée par hypothèse.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[r, hook, shift left] & D \arrow[l, dotted, shift left] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$\square$

Proposition 1.2. *Tout facteur direct S d'un module injectif E est injectif.*

Preuve.

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[r, hook, shift left] & E \arrow[l, two heads, shift left] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[u, dotted] \end{tikzcd}$$

$\square$

Proposition 1.3. *$\prod_I E_i$ est injectif si et seulement si tous les E_i le sont. En particulier, une somme finie de modules injectifs l'est.*

Preuve.

$$\begin{tikzcd}
 & \prod E_i \arrow[r, two heads, "\pi_i"] & E_i \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[ul, dashed, "g"'] \arrow[u, dotted, "g_i"']
\end{tikzcd}$$

□

Théorème 1.1 (Critère de Baer)**.** *Afin que E soit injectif, il suffit que pour tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$, toute flèche $\mathfrak{a} \to E$ se relève en $R \to E$.*

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[u] \arrow[r] & R \arrow[ul, dotted]
\end{tikzcd}$$

Preuve. On considère le diagramme usuel:

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

On appelle ***extension*** de $A \xrightarrow{f} E$ une flèche $M \xrightarrow{g} E$ vérifiant $A \subseteq S \subseteq B$ et $g|A = f$. Les extensions possèdent un ordre naturel pour lequel il existe un majorant de toute chaîne ascendante, puis Zorn fournit un élément maximal $S \xrightarrow{g} E$. Si $S \neq B$, considérons $b \in B \setminus S$. On veut étendre g en $\bar{g} : S + Rb \to E$ par

$$\bar{g}(m + rb) = g(m) + r\bar{g}(b)$$

pour un certain élément $\bar{g}(b)$. Pour que cette application soit bien définie, il faut et il suffit que si $rb \in S$ alors $r\bar{g}(b) = g(rb)$. Considérons donc l'idéal

$$\mathfrak{a} = (S : b) = \{r \in R \,|\, rb \in S\}\,.$$

On définit $h : \mathfrak{a} \to E$ par $h(r) = g(rb)$. Elle s'étend en $\bar{h} : R \to E$, et poser $\bar{g}(b) = \bar{h}(1)$ convient. Ainsi l'extension g n'est pas maximale, une contradiction. □

Corollaire 1.1. *Soit R un domaine commutatif et $Q = \operatorname{Frac} R$. Alors tout R-morphisme $\mathfrak{a} \to Q$ d'un idéal $\mathfrak{a}$ est scalaire, et Q est un R-module injectif.*

Preuve. Soit $\mathfrak{a} \xrightarrow{f} Q$ et $a \in \mathfrak{a}$. Pour tout b de $\mathfrak{a}$, on a $bf(a) = af(b)$ d'où $f(b) = bf(a)/a$. On peut l'étendre en $g : R \to Q$ par $g(r) = rf(a)/a$ donc Q est injectif d'après le critère de Baer.

2 Modules divisibles

Définition 2.1. *On dit qu'un module D est* ***divisible*** *si pour tout $m \in D$ et $0 \neq r \in R$, il existe n vérifiant $m = rn$.*

Lemme 2.1.
- *Si R est un domaine, $Q = \operatorname{Frac} R$ est divisible.*
- *Toutes somme et produit de modules divisibles sont divisibles. En particulier, tout Q-espace vectoriel l'est.*
- *Tout quotient d'un module divisible est divisible.*

Lemme 2.2. *Soit R un domaine et M un R-module. Les propositions suivantes sont équivalentes:*
1. *M est divisible sans-torsion.*
2. *M est un Q-espace vectoriel, où $Q = \operatorname{Frac} R$.*
3. *Pour tout $r \in R$, $[r] : m \mapsto rm$ est un isomorphisme.*

Preuve.

1 ⇒ 2) Soit $p/q \in Q$ et $m \in M$. Il existe un $n \in M$ tel que $qn = m$, unique car M est sans-torsion. On peut donc définir $\frac{p}{q}m = pn$, et laisser la vérification facile des axiomes d'un espace vectoriel au lecteur s'il a du temps à perdre.

2 ⇒ 3) $[p/q]$ est d'inverse $[q/p]$.

3 ⇒ 1) M est sans-torsion par injectivité de $[r]$, et divisible par surjectivité. ☐

Corollaire 2.1. *Si R est un domaine commutatif, tout module divisible sans-torsion V est injectif.*

Preuve. Soit $\mathfrak{a} \xrightarrow{f} V$. Pour tout $a, b \in \mathfrak{a}$ on a $af(b) = bf(a)$ d'où $f(b) = bf(a)/a$: f s'étend en $\big[f(a)/a\big] : R \to V$. ☐

Il est souvent plus simple de vérifier la divisibilité d'un module plutôt que son injectivité. Ainsi on montrera parfois cette seconde propriété en utilisant la première, par exemple dans le cas des groupes abéliens.

Lemme 2.3. *Si R est un domaine, tout module injectif est divisible. Quand R est principal à gauche, la réciproque est vraie.*

Preuve.

- Soit M un module injectif, $m \in M$, et $r \in R$. On pose $f : Rr \to M = ar \mapsto am$, qui est bien définie car R est un domaine. Il existe une extension $g : R \to M$ de f, pour laquelle $rg(1) = g(r) = m$.
- Soit M un module divisible et $f : \mathfrak{a} \to M$. On écrit $\mathfrak{a} = Ra$ pour un certain $a \in R$. Par divisibilité, il existe $m \in M$ tel que $f(a) = am$ et on peut étendre f en $g : R \to M = r \mapsto rm$. ☐

Corollaire 2.2. *Tout groupe abélien A s'injecte dans un groupe abélien injectif.*

Preuve. Il existe un groupe abélien libre L pour lequel

$$A = L/K = \left(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_i\right)\Big/K \hookrightarrow \left(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q}_i\right)\Big/K.$$

Or $(\bigoplus_I \mathbb{Q}_i)/K$ est divisible en tant que quotient de modules divisibles, donc injectif. ☐

3 Dualité

On fixe R un anneau commutatif principal qui n'est pas un corps, et $Q = \operatorname{Frac} R$ son corps des fractions. Dans cette section, inspirée de [Rot15, Exercice B-4.57], nous allons montrer que toute image d'un module finiment généré de torsion est isomorphe à un sous-module. Nous utiliserons pour cela les outils développés dans la section précédente, et introduirons un nouvel objet, le dual d'un module.

Définition 3.1. *Si M est un R-module, son **dual** est le module $M^* = \operatorname{Hom}(M, Q/R)$.*

Lemme 3.1. *Le foncteur dual est exact.*

Preuve. Q/R est divisible et R principal, donc Q/R est injectif. ☐

Lemme 3.2. *Si M est un R-module fini de torsion, $M^* \simeq M$.*

Preuve. On décompose M en somme de modules cycliques:

$$M^* = \operatorname{Hom}\left(\bigoplus_{i=1}^n R/d_iR,\, Q/R\right) \cong \bigoplus_{i=1}^n \operatorname{Hom}(R/d_iR,\, Q/R) = \bigoplus_{i=1}^n (R/d_iR)^*.$$

Il suffit donc de montrer le résultat pour R/dR, $0 \neq d \in R$. L'application $\mathrm{ev}_1 : (R/dR)^* \to Q/R$ qui à f associe $f(1)$ est injective, d'image $(Q/R)[d] = \{k/d + R \mid k \in R\} \simeq R/dR$. ☐

Théorème 3.1. *Si M est un R-module fini de torsion et N un sous-module, alors M/N s'injecte dans M et le quotient de M par son image est isomorphe à N. En d'autres termes, il existe une suite exacte*

$$0 \to M/N \to M \to N \to 0.$$

Preuve. L'exactitude de $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ implique celle de $0 \to (M/N)^* \to M^* \to N^* \to 0$, et passer à l'isomorphisme entre le module et son dual donne une suite exacte $0 \to M/N \to M \to N \to 0$. □

Lemme 3.3. *Si M est fini de torsion et $f \in \operatorname{End}_R M$ est injective, alors f est un automorphisme.*

Preuve. M est une somme finie de modules de longueur finie, donc il est lui aussi de longueur finie. Ainsi la suite

$$M \supseteq fM \supseteq f^2M \supseteq \dots$$

doit stationner, c'est à dire qu'il existe un n pour lequel $f^{n-1}M = f^nM$. Alors si $m \in M$ il existe $m' \in M$ vérifiant $f^{n-1}m = f^nm'$, soit $m = fm'$ par injectivité: f est surjective. □

Proposition 3.1. *Il existe un isomorphisme naturel entre un R-module M et son bidual.*

Preuve. Considérons le morphisme d'évaluation $e : M \to M^{**}$ défini par $e_m : f \mapsto f(m)$. Si $m \neq 0$ est annulé par un $r \in R$ non-nul, on peut relever $sm \in \langle m \rangle \mapsto sm/r + R \in Q/R$ en un morphisme $f : M \to Q/R$ par injectivité de Q/R. En particulier $e_m f = fm \neq 0$, donc e est injective. Comme de plus M et son bidual sont isomorphes, de type fini, et de torsion, on en déduit que e est un isomorphisme. La naturalité est donnée par le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & N \arrow[d, "e"'] \\ M^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & N^{**} \end{tikzcd}$$

dont la commutativité est aisément vérifiée:

$$(f^{**}e_m)g = e_m(f^*g) = e_m(gf) = gfm = e_{fm}g.$$ □

Définition 3.2. *On appelle **dual** un endofoncteur contravariant $D : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ muni d'un isomorphisme naturel $\iota : 1_{\mathfrak{C}} \to D^2$.*

Exemple 3.1.
- Le foncteur $(-)^* = \operatorname{Hom}(-, Q/R) : \mathsf{FinTorMod}_R \to \mathsf{FinTorMod}_R$ tout juste considéré est un dual pour la catégorie des modules finiment générés de torsion sur un anneau principal R.
- Le foncteur $(-)^* = \operatorname{Hom}(-, k) : \mathsf{FinVec}_k \to \mathsf{FinVec}_k$ est un dual pour la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps k.

Théorème 3.2. *Si $\mathfrak{C}$ est une catégorie munie d'un dual D, un diagramme $F : J \to \mathfrak{C}$ admet une limite si et seulement si son dual DF possède une colimite.*

Remarque 3.1. Il sera uniquement montré que s'il existe une colimite pour DF, il en existe une pour F. La preuve dans l'autre sens est extrêmement similaire. De manière plus générale, on peut considérer cette preuve comme une sorte de recette qui permet de démontrer la "propriété duale" d'une propriété qu'on peut "exprimer avec des flèches".

Preuve. Soit F un foncteur, et $(u, \eta : DF \to \Delta u)$ la colimite de DF. Soit $(v, \mu : \Delta v \to F)$ un cône. On remarque que $D\Delta v = \Delta D v$, et dualiser donne les diagrammes suivants:

$$\begin{tikzcd}
\Delta u \arrow[dr, dashed, "\epsilon"'] & DF \arrow[l, "\eta"'] \arrow[d, "D\mu"] \\
& \Delta D v
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Delta D u \arrow[r, "D\eta"] & D^2 F \\
& \Delta D^2 v. \arrow[ul, "D\epsilon"] \arrow[u, "D^2\mu"']
\end{tikzcd}$$

La naturalité de $\iota : 1_{\mathfrak{C}} \to D^2$ montre désormais l'existence d'une flèche $\Delta v \to \Delta D u$ faisant commuter le diagramme.

$$\begin{tikzcd}
\Delta D u \arrow[r, "D\eta"] & D^2 F \arrow[r, "\iota_F^{-1}"] & F \\
& \Delta D^2 v \arrow[ul, "D\epsilon"] \arrow[u, "D^2\mu"'] & \Delta v \arrow[l, "\iota_v"] \arrow[u, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

L'unicité de cette flèche peut être laborieusement démontrée par la même technique. □

Remarque 3.2. Appliquer le théorème en remplaçant F par DF montre qu'un diagramme admet une colimite si et seulement si son dual admet une limite.

References

[Rot15] Joseph J. Rotman. *Advanced modern algebra. Part 1*. 3rd edition. Vol. 165. Grad. Stud. Math. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2015. ISBN: 978-1-4704-1554-9.