Exposé SIMI: Familles continues d'objets

Justin Carel

Last updated April 30, 2024

En informatique, une famille de types est souvent vue comme ça:

$$\varphi : I \to \mathsf{Type}$$

où à chaque $i : I$ on associe le type $\varphi(i)$. En maths, on considère souvent des choses comme ceci:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"] \\ B \end{tikzcd}$$

où à chaque $b \in B$ on associe la fibre $X(b) = \pi^{-1}b$. Dans cet exposé, on va voir des liens très forts entre ces deux points de vue, notamment lorsque B est munie d'une structure topologique.

1 Pour les types et les ensembles

Sans structure supplémentaire, la correspondance est très facile. À une fonction $\varphi : I \to \mathsf{Type}$ on peut associer le type ***somme***

$$\sum_{i:I} \varphi(i),$$

dont les membres sont des paires (i, x) avec $i : I$ et $x : \varphi(i)$. On dispose bien sûr d'une projection $\pi_1 : \sum_I \varphi(i) \to I$.

À l'inverse, si $\pi \colon X \to B$ est une fonction entre deux ensembles on en déduit un foncteur

$$\begin{aligned} \varphi \colon B &\to \mathsf{Set} \\ b &\mapsto X(b) \end{aligned}$$

où B est considéré comme une catégorie discrète (c'est à dire que B possède pour objets ses éléments en tant qu'ensemble, et pour tout $b, c \in B$ on a $|\operatorname{Hom}(b, c)| = \delta_{bc}$).

2 Pour les espaces topologiques

Soyons honnêtes: pour les ensembles cette correspondance ne sert essentiellement à rien. Tout l'intérêt du point de vue $X \to B$ réside en la structure supplémentaire dont on peut munir B. Supposons donc que X et B sont des espaces topologiques et π une application continue. La situation devient tout de suite bien plus subtile ! En effet, il est de très mauvais goût de considérer B comme une catégorie discrète; toute l'information intéressante s'évanouit aussitôt. Il nous faut donc prendre en compte le caractère local que nous permet de considérer la topologie sur B.

Idéalement, notre nouvelle notion devrait correspondre à l'ancienne dans le cas où B possède la topologie discrète. Remarquons déjà que dans ce cas très précis, une famille de points $(x_b)_{b \in B}$ où $x_b \in X(b)$ détermine une section *continue* de π. Plus généralement, c'est à ces sections que nous allons nous intéresser.

À tout ouvert U de B, on associe

$$\mathscr{F}(U) = \{ s : U \to X \mid s \text{ est continue et } \pi s = 1_U \}.$$

Remarquons que si $V \subseteq U$ sont deux ouverts, on dispose d'une application de restriction $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$, qui à toute section $s \in \mathscr{F}(U)$ associe $s|_V \in \mathscr{F}(V)$. Lorsque $W \subseteq V \subseteq U$, les restrictions sont bien entendu compatibles. On a ainsi construit un foncteur contravariant

$$\begin{aligned} \mathscr{F} : \mathsf{Open}_B^{\mathsf{op}} &\to \mathsf{Set} \\ U &\mapsto \{\text{sections continues}\}\,. \end{aligned}$$

En outre, si on dispose d'une famille de sections $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$, qui est compatible au sens où pour tout i, j on a

$$s_i|_{U_j} = s_j|_{U_i} \in \mathscr{F}(U_i \cap U_j),$$

alors il existe un unique recollement s défini sur $U = \bigcup U_i$. Dans le cas où B est discret, cela entraîne que $\mathscr{F}$ est déterminé par ses valeurs sur les points. On retombe bien sur la version précédente pour les ensembles.

Définition 2.1. *Soit B un espace topologique. On appelle* ***préfaisceau*** *sur B un foncteur contravariant de* Open_B *vers* Set. *Un* ***faisceau*** *est un préfaisceau qui vérifie additionnellement une propriété d'unique recollement.*

Plus précisément, un préfaisceau $\mathscr{F}$ est un faisceau si et seulement si pour tout recouvrement $U = \bigcup_I U_i$ et famille de sections $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$, compatibles au sens où

$$s_i|_{U_j} = s_j|_{U_i} \in \mathscr{F}(U_i \cap U_j) \quad \forall i, j$$

il existe un unique recollement $s \in \mathscr{F}(U)$ vérifiant $s|_{U_i} = s_i$ pour tout i.

Les morphismes de (pré)faisceaux sont donc les transformations naturelles, c'est à dire qu'un élément $f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ représente la donnée, pour tout ouverts $V \subseteq U \subseteq X$, d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathscr{G}(U) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \cdot|_V} & & \big\downarrow{\scriptstyle \cdot|_V} \\ \mathscr{F}(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathscr{G}(V). \end{array}$$

Étant donné une section $s \in \mathscr{F}(U)$, on écrira souvent fs en lieu de $f_U s$ par abus de langage. Les catégories des préfaisceaux et faisceaux sur X sont respectivement notées[1] PSh_X et Sh_X.

Remarque 2.2. Cela ne nous sera pas utile dans cet exposé, mais on peut également considérer la catégorie des faisceaux à valeurs dans les groupes abéliens, les modules sur un anneau, etc... Elles sont abéliennes et disposent naturellement d'un foncteur exact à gauche $\Gamma : \mathscr{F} \to \mathscr{F}(X)$. Possédant en outre assez d'injectifs, cela permet de définir les groupes de cohomologie d'un faisceau abélien $\mathscr{F}$ par

$$H^i(X, \mathscr{F}) = R^i\Gamma(\mathscr{F}),$$

le i-ème foncteur dérivé à droite de Γ. Ces objets sont d'extrême importance en géométrie, notamment via la *suite longue de cohomologie* qui à toute suite exacte courte

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$$

de faisceaux abéliens associe la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathscr{F}(X) \to \mathscr{G}(X) \to \mathscr{H}(X) \\ &\to H^1(X, \mathscr{F}) \to H^1(X, \mathscr{G}) \to H^1(X, \mathscr{H}) \\ &\to H^2(X, \mathscr{F}) \to H^2(X, \mathscr{G}) \to H^2(X, \mathscr{H}) \\ &\to \dots \end{aligned}$$

permettant de caractériser le défaut de recollement.

[1] Des termes anglophones "presheaf" et "sheaf".

Exemple 2.3. Exercice: dans chaque cas, s'assurer qu'il s'agit bien d'un faisceau (on peut sauter les deux derniers).

- Si $X \to B$ est une application continue entre espaces topologiques, ses sections forment un faisceau sur B.
- Si X et Y sont des espaces topologiques, $\mathsf{Top}(-, Y)$ est un faisceau sur X.
- Si X est un espace topologique et E un ensemble, on peut construire le ***faisceau constant***

$$\underline{E}(U) = \{f : U \to E \mid f \text{ est localement constante}\}.$$

  Plus généralement, un faisceau est dit constant s'il est isomorphe à un certain $\underline{E}$.
- Si X est une variété (différentielle, analytique, complexe, ...) définie par un atlas (U_i, φ_i), on peut définir un faisceau de structure

$$\mathscr{O}_X(U) = \{f : U \to k \mid \forall i, f\varphi_i \text{ est régulière}\}$$

  où k dénote le corps de base. Deux atlas sont équivalents si et seulement s'ils induisent le même faisceau de structure.
- En particulier, cela définit les faisceaux $\mathscr{C}^k$ et $\mathscr{C}^\omega$ des fonctions $\mathcal{C}^k$ et analytiques de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, ainsi que $\mathscr{O}$ des fonctions holomorphes $\mathbb{C}^n$ vers $\mathbb{C}$.
- Si X est un espace métrique, le préfaisceau des fonctions uniformément continues vers $\mathbb{R}$ n'est en général pas un faisceau: la propriété d'uniforme continuité n'est pas locale.
- Si $\mathscr{F}$ est un faisceau sur X et $U \subseteq X$ ouvert, on peut construire le faisceau restreint $\mathscr{F}|_U(V) = \mathscr{F}(V)$ sur U.
- Si $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ sont deux faisceaux sur un espace topologique X, on peut construire le faisceau

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})(U) = \mathrm{Hom}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U).$$

- Si $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un morphisme de faisceaux abéliens, $(\ker f)(U) = \ker f_U$ est un faisceau. Attention, poser naïvement $(\mathrm{coker}\, f)(U) = \mathrm{coker}\, f_U$ ou $(\mathrm{im}\, f)(U) = \mathrm{im}\, f_U$ ne fournit qu'un préfaisceau en général.
- Plus généralement, toutes les petites limites de faisceaux abéliens peuvent être définies terme-à-terme. Ce n'est pas le cas des colimites.

Ayant associé à tout espace X au dessus de B le faisceau de ses sections, on n'a résolu que la moitié du problème. En effet, on a réussi à passer du point de vue "objets paramétrés continuement par les fibres" à "familles compatibles indexées par les ouverts". Comment revenir en arrière ?

Imaginons que $\pi : X \to B$ soit une application gentille, disons un homéomorphisme local[2]. Que dire de la topologie de X, ne connaissant que les sections continues $\mathscr{F}$ de π ? Une première remarque serait que si $s \in \mathscr{F}(U)$, alors $s(U)$ est ouvert. Mieux encore, une partie $V \subseteq X$ est ouverte si pour toute section $s \in \mathscr{F}(U)$, la préimage $s^{-1}(V)$ est ouverte. Et finalement, quitte à restreindre suffisamment π au voisinage d'un point x, elle admet une unique section au voisinage de $b = \pi(x)$.

Armés de ces observations, tentons de reproduire l'espace X à partir seulement du faisceau $\mathscr{F}$. Une première notion qui apparaît cruciale est celle de section définie au voisinage d'un point $b \in B$, dont on a vu qu'elle serait analogue à un point $x \in X(b)$. C'est assez clair à construire: on pose

$$\mathscr{F}_b = \operatorname*{colim}_{U \ni b} \mathscr{F}(U) = \left\{ \langle U, s\rangle \;\middle|\; \begin{array}{c} b \in U, s \in \mathscr{F}(U), \text{ et } \langle U, s\rangle = \langle V, t\rangle \\ \text{s'il existe } b \in W \subseteq U \cap V \text{ tel que } s|_W = t|_W. \end{array} \right\}$$

Ainsi, les éléments de la ***fibre de $\mathscr{F}$ en*** b sont de manière très formelle les sections définies au voisinage de b que l'on identifie dès qu'elles coïncident au voisinage de b.

[2] C'est à dire que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage $x \in U$ tel que $\pi(U)$ soit ouvert et $\pi|_U$ un homéomorphisme.

Notons que cette construction ne dépend pas de la connaissance de X, ni même du fait que $\mathscr{F}$ soit un faisceau. Continuons sur cette lancée et supposons $\mathscr{F}$ un simple préfaisceau sur B; on s'intéresse à la somme disjointe

$$X' = \coprod_{b\in B} \mathscr{F}_b.$$

Remarquons que toute section $s \in \mathscr{F}(U)$ détermine une fonction

$$\begin{aligned} s : U &\to X' \\ b &\mapsto s_b = \langle U, s\rangle \in \mathscr{F}_b \end{aligned}$$

Bien qu'il s'agisse momentanément d'un simple ensemble, l'étude de X au paragraphe ci-dessus suggère de le munir de la topologie finale par rapport aux sections de $\mathscr{F}$. En d'autres termes, une partie $V \subseteq X$ est ouverte si et seulement si pour tout $s \in \mathscr{F}(U)$, la préimage $s^{-1}V$ est un ouvert de B. On peut visualiser X' comme une famille d'espaces $\mathscr{F}_b$ que l'on recolle selon la topologie de B. Ainsi, on emploiera par la suite la notation très suggestive

$$X' = \int_B \mathscr{F}_b \,\mathrm{d}b.$$

Lemme 2.4. *L'application $\pi' : X' \to B$ qui à $s_b \in \mathscr{F}_b$ associe b est continue. C'est même un homéomorphisme local !*

Preuve. Pour le caractère localement homéomorphe il faut, étant donné un élément $s_b = \langle U, s\rangle \in X'$, montrer qu'il existe un voisinage $s_b \in V$ pour lequel $\pi'(V)$ est ouvert et $\pi'|_V$ est un homéomorphisme.

Considérons déjà $V = s(U) = \{s_c \,|\, c \in V\}$. Il s'agit d'un ouvert ! En effet, si $t \in \mathscr{F}(U')$ alors

$$t^{-1}(V) = \{c \in U\cap U' \,|\, t_c = s_c\} = \{c \in U \cap U' \,|\, \text{il existe } c \in W \subseteq U\cap U' \text{ tel que } t|_W = s|_W\}$$

est clairement encore ouvert. Qui plus est, s et $\pi'|_V$ vérifient par définition $s\pi'|_V = 1_V$ et $\pi'|_V s = 1_U$. Ainsi $\pi'|_V$ est bien un homéomorphisme. $\square$

Enfer et damnation ! Si l'application originale $\pi : X \to B$ n'était pas déjà un homéomorphisme local, on n'a absolument aucune chance de retomber dessus. Mais qu'a-t-on construit, au juste ? On a un foncteur qui va des préfaisceaux vers les espaces étalés[3] sur B, qui mis à la lumière de la première construction donne le grand carré suivant:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Et}/B \arrow[d] & \mathsf{PSh}_B \arrow[l] \\ \mathsf{Top}/B \arrow[r] & \mathsf{Sh}_B . \arrow[u] \arrow[ul, phantom, "\sim"] \end{tikzcd}$$

Les flèches verticales représentent l'oubli. Bien qu'il n'y aie aucune chance de retomber sur nos pattes en faisant le tour complet du carré, tout n'est pas perdu. On a déjà vu, dans le cas des espaces étalés, que la topologie était correctement caractérisée par le faisceau des sections. Inversement, il est possible de montrer que la composée $\mathsf{Sh}_B \to \mathsf{Et}/B \to \mathsf{Sh}_B$ est naturellement isomorphe à l'identité. On a ainsi déterminé une équivalence de catégories

$$\mathsf{Et}/B \longleftrightarrow \mathsf{Sh}_B,$$

ce qui répond partiellement à la question initiale. On a seulement réussi à caractériser ces familles continues d'objets qui se comportent bien vis à vis de leurs fibres. C'est déjà pas mal.

3 Faisceauification et étalification

On est quand même capable de dire certaines choses des foncteurs[4] $(-)_{\mathsf{et}} : \mathsf{Top}/B \to \mathsf{Et}/B$ et $(-)^+ : \mathsf{PSh}_B \to \mathsf{Sh}_B$. Ils sont en fait adjoints respectivement à droite et à gauche de l'oubli ! Autrement dit, on a les égalités naturelles pour tout espace étalé $E \to B$, espace topologique $X \to B$, préfaisceau $\mathscr{F}$, et faisceau $\mathscr{G}$:

$$\mathsf{Top}_B(E, X) = \mathsf{Et}_B(E, X_{\mathsf{et}}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) = \mathrm{Hom}(\mathscr{F}^+, \mathscr{G}).$$

[3] Un autre nom pour les homéomorphismes locaux de codomaine B.

[4] Attention, notations non standards.

Traduites sous forme de diagrammes, ces adjonctions vérifient les propriétés universelles respectives:

$$\begin{tikzcd} X_{\mathsf{et}} \arrow[d] & E \arrow[l, dashed] \arrow[d] \\ B & X \arrow[l] \arrow[from=1-1, to=2-2] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{F}^+ \arrow[r, dashed] & \mathscr{G} \\ \mathscr{F}. \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Remarque 3.1. Puisque l'oubli $\mathsf{Sh}_B \to \mathsf{PSh}_B$ admet un adjoint à gauche, il commute aux limites. Cela démontre le dernier point de l'exemple 2.3. On peut également construire une colimite faisceautique comme le faisceauifié de la colimite terme à terme; c'est le point crucial qui fait des faisceaux abéliens une catégorie abélienne.

Remarque 3.2. L'équivalence de catégories $\mathsf{Et}/B \leftrightarrow \mathsf{Sh}_B$ peut se spécialiser en $\mathsf{Cov}/B \leftrightarrow \mathsf{LocConstSh}_B$, où Cov/B désigne la catégorie des revêtements sur B et $\mathsf{LocConstSh}_B$ celle des faisceaux localement constants (c'est à dire que l'on peut recouvrir B par des ouverts U pour lesquels $\mathscr{F}|_U$ est constant sur U) (cf. exemple 2.3). Par cette équivalence les revêtements triviaux deviennent les faisceaux constants.

Cette équivalence possède des conséquences frappantes; on sait par exemple par la topologie algébrique que si B est simplement connexe, tous ses revêtements sont triviaux. Alors tous les faisceaux localements constants sont constants, ce qui avec un peu de connaissance passées sous le temps implique que si $\mathscr{A}$ est un faisceau abélien localement constant alors $H^1(B, \mathscr{A}) = 0$.

Par exemple, si $B \subseteq \mathbb{C}$ est un ouvert simplement connexe, la suite exacte longue de cohomologie appliquée à

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}} \to \mathscr{O}|_B \xrightarrow{\partial_z} \mathscr{O}|_U \to 0$$

donne immédiatement que $\partial_z : \mathscr{O}(B) \to \mathscr{O}(B)$ est surjective, c'est à dire que les fonctions holomorphes sur B admettent une primitive. Ou encore, la suite

$$0 \to 2i\pi\underline{\mathbb{Z}} \to \mathscr{O}|_B \xrightarrow{\exp} \mathscr{O}|_B^\times \to 1$$

montre que ces fonctions possèdent un logarithme.

De nombreux énoncés d'existence en analyse se reformulent cohomologiquement; c'est le cas par exemple des théorèmes de Mittag-Leffler (permettant de spécifier les pôles et parties principales d'une fonction méromorphe) et de Weierstrass (permettant de spécifier les zéros et ordres d'une fonction holomorphe).

De manière plus générale, dès qu'un problème admet des solutions locales qu'il est question de recoller globalement, il est fort probable que l'obstruction à ce recollement s'exprime cohomologiquement.

4 Pour aller plus loin

Le contenu de cet exposé provient en immense partie de [Wed]. Le lecteur pourra se référer aux

- chapitre 3 pour la définition des faisceaux, l'équivalence avec les espaces étalés, et plus encore;
- chapitres 4 et 5 pour une introduction à la géométrie différentielle du point de vue des espaces annelés (un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux);
- chapitre 7 pour une toute première approche de la cohomologie, avec plusieurs descriptions explicites du H^1;
- chapitre 8 pour un traitement des fibrés de la géométrie différentielle, du point de vue des faisceaux;
- chapitre 9 pour construire des exemples concrets de faisceaux dont le H^1 est trivial;
- chapitres 10 et 11 pour une construction complète de la cohomologie des faisceaux, des applications en analyse et géométrie, l'équivalence avec la cohomologie singulière, et quelques théorèmes fondamentaux.

References

[Wed] Torsten Wedhorn. *Manifolds, Sheaves, and Cohomology*. Springer Studium Mathematik - Master. ISBN: 978-3-658-10632-4. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-658-10633-1.