Groupes profinis et Topologie

A~Z / Justin Carel

Last updated December 17, 2022

Dans ce document, nous allons nous intéresser aux groupes profinis. Quelques résultats généraux seront donnés, puis il sera montré que la complétion profinie (par rapport à une famille de sous-groupe) coïncide avec la complétion usuelle par les suites de Cauchy pour la topologie engendrée par ces mêmes sous-groupes. Le développement de la seconde section est fortement inspiré de [CF67].

1 Rappels sur les groupes topologiques

Définition 1.1. *Un groupe G est dit topologique s'il est muni d'une topologie pour laquelle la multiplication $G \times G \to G$ et l'inverse $G \to G$ sont continues.*

Exemple 1.1. Les groupes additifs $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ainsi que $\mathbb{Z}^\times, \mathbb{Q}^\times, \mathbb{R}^\times, \mathbb{C}^\times$ sont topologiques si on les munit de la norme usuelle. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont topologiques si on les munit de la norme $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ induite par la valuation p-adique. Les ouverts de $\mathbb{Z}$ sont alors donnés par les classes de résidus mod p^k.

Ces groupes vérifient quelques propriétés élémentaires (voir [Rot15] pour une preuve):

- Pour tout $g \in G$, les translations $x \mapsto gx$ et $x \mapsto xg$ sont des homéomorphismes.
- Si $U \subseteq G$ est ouvert, gU est ouvert.
- Tout sous-groupe ouvert est fermé. Quand G est compact, un sous-groupe est ouvert si et seulement s'il est fermé d'index fini.
- Si $f : G \to Y$ est continue en 1, elle est continue partout.

Définition 1.2. *Un espace topologique X est dit totalement discontinu si toutes ses composantes connexes sont réduites à un point.*

Exemple 1.2. Tout espace ultramétrique est totalement discontinu. En particulier, $\mathbb{Q}$ muni de la norme p-adique est totalement discontinu.

Lemme 1.1. *Un groupe topologique G est totalement discontinu si et seulement si 1 est l'intersection de tous ses voisinages ouverts-fermés.*

Preuve.

⇒) Pour tout a de G il existe une fonction continue $f : G \to \{0, 1\}$ pour laquelle $f(1) \neq f(a)$. Ainsi $f^{-1}(f(1))$ est un ouvert-fermé contenant 1 mais pas a, et 1 est bien l'intersection de ses voisinages ouverts-fermés.

⇐) Pour tout a de G il existe un voisinage ouvert-fermé de 1 ne contenant pas a, donc la composante connexe de 1 est $\{1\}$. Soit $a \in G$ et C sa composante connexe. L'ensemble $a^{-1}C$ est connexe et contient 1, donc $a^{-1}C = \{1\}$ d'où $C = \{a\}$. □

Lemme 1.2. *Un groupe compact G est totalement discontinu si et seulement si tout voisinage de 1 contient un sous-groupe normal ouvert. On dit que les sous-groupes normaux ouverts forment une **base de voisinages** de 1.*

Preuve. Voir [MZ55, p.56]. $\square$

2 Groupes profinis

Soit I un ensemble dirigé, ie I est partiellement ordonné et tout $i, j \in I$ possède un majorant $i, j \leq m \in I$. Une famille de groupes topologiques $(G_i)_I$ forme un système inverse si elle est munie de morphismes continus $\theta_i^j : G_j \to G_i$ pour tout i, j, vérifiant

$$\theta_i^i = 1_{G_i} \text{ et } \theta_i^j \theta_j^k = \theta_i^k \quad (\forall\, i \leq j \leq k).$$

Étant donné un second système inverse $(H_j)_J$, on appelle morphisme de systèmes inverses $\phi : (G_i)_I \to (H_i)_J$ la donnée d'une application croissante $\varphi : J \to I$ et de morphismes continus $\phi_j : G_{\varphi j} \to H_j$ faisant commuter le diagramme suivant pour tout $i \leq j$ de J:

$$\begin{tikzcd} G_{\varphi j} \arrow[r, "\phi_j"] \arrow[d, "\theta_{\varphi i}^{\varphi j}"'] & H_j \arrow[d, "\tau_i^j"] \\ G_{\varphi i} \arrow[r, "\phi_i"'] & H_i \end{tikzcd}$$

Exemple 2.1. Pour un premier rationnel p, les groupes $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{\mathbb{N}^*}$ munis des projections naturelles forment un système inverse. La famille $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathbb{N}^*}$ ordonnée par divisibilité forme un système inverse. Plus généralement, si $(H_i)_I$ est une famille décroissante de sous-groupes normaux de G, alors $(G/H_i)_I$ est un système inverse.

Définition 2.1. *On dit que $(a_i) \in \prod G_i$ est un **fil** s'il est compatible avec les (π_i^j), ie si $\pi_i^j a_j = a_i$ pour tout $i \leq j$ de I. On appelle **limite projective** de (G_i) le sous-groupe $L = \varprojlim G_i$ des fils, muni de la topologie induite par les projections naturelles $\pi_i : L \to G_i$.*

Exemple 2.2. La limite projective des $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ constitue l'ensemble des entiers p-adique $\mathbb{Z}_p$. La limite projective des $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ constitue la complétion profinie de $\mathbb{Z}$, notée $\hat{\mathbb{Z}}$. Plus généralement, on appelle ***complétion profinie*** $\widehat{G}$ de G la limite projective des G/H_i où les H_i sont les sous-groupes normaux d'index fini de G.

Remarque 2.1. Un morphisme de systèmes inverses $\phi : (G_i)_I \to (H_j)_J$ se relève en un morphisme continu entre leur limite projective $\psi : \varprojlim G_i \to \varprojlim H_i$, où $\psi(x_i)_I = (\phi_j\, x_{\varphi j})_J$.

Lemme 2.1. *Quand les G_i sont munis de la topologie discrète, $\varprojlim G_i$ est un sous-groupe fermé de $T = \prod G_i$. Si de plus les G_i sont finis, alors $\varprojlim G_i$ est compact.*

Preuve. Si $(x_k) \in T$ n'est pas dans L, alors on trouve $i \leq j$ tels que $\theta_i^j x_j \neq x_i$. L'ensemble $U = \prod_I U_k$ défini par $U_k = G_k$ si $k \notin \{i, j\}$ et $U_k = \{x_k\}$ sinon est ouvert, contient (x_k), et est disjoint de L. Ainsi $T \setminus L$ est ouvert. Si de plus les G_i sont finis alors ils sont compacts, d'où T est compact par Tychonoff, soit L est compact en tant que fermé d'un compact. $\square$

Définition 2.2. *On dit que L est **profini** s'il est la limite projective de groupes finis discrets.*

Théorème 2.1. *Un groupe topologique G est profini si et seulement si il est compact et totalement discontinu. Dans ce cas, $G \cong \varprojlim G/H_i$ où les H_i couvrent tous les sous-groupes ouverts d'index fini de G.*

Preuve. Tirée de [CF67, p.118].

$\Rightarrow$) Nous avons déjà vu qu'un groupe profini est compact. Montrons que $T = \prod G_i$ est totalement discontinu. Si $1 \neq x \in T$, on trouve i tel que $x_i \neq 1$. Alors $U = \prod U_k$, défini par $U_k = G_k$ si $k \neq i$ et $U_k = \{1\}$ sinon, est un (sous-groupe normal) ouvert-fermé contenant 1 mais pas x. Il suit que 1 est l'intersection de ses voisinages ouverts-fermés, soit que T est totalement discontinu. Comme L possède la topologie restreinte, il l'est lui aussi.

$\Leftarrow$) Soit (H_i) la famille des sous-groupes normaux ouverts d'un compact totalement discontinu G, et soit $L = \varprojlim G/H_i$. Les H_i étant d'index fini, L est profini. L'application naturelle $f : G \to L, g \mapsto (g + H_i)_I$ est évidemment continue. Or $\bigcap H_i = 1$ car G est totalement discontinu, d'où f est injective. Soit $(a_i H_i) \in L$. Chaque $a_i H_i$ est fermé dans G, et comme il est compact l'ensemble $S = \bigcap a_i H_i$ est non vide. Chaque élément a de S vérifie $aH_i = a_i H_i$ pour tout $i \in I$, et ainsi f est un isomorphisme continu. Sa réciproque f^{-1} est elle aussi continue, d'où $G \cong L$ est profini. $\square$

3 Égalité des complétions

On suppose désormais que $I = \mathbb{N}$, et que $(H_i)_I$ est une chaîne décroissante de sous-groupes normaux d'index fini d'un groupe G, qui vérifie la propriété $\bigcap H_i = 1$. On munit G de la topologie dont une base est donnée par les cosets gH_i, et on pose $L = \varprojlim G/H_i$. Nous allons montrer dans cette section que G et L sont des espaces métriques, et que L coïncide avec la complétion de G par les suites de Cauchy.

Lemme 3.1. *L'application*

$$d_G : (g, h) \mapsto e^{-\sup\left\{i \in I \mid gh^{-1} \in H_i\right\}}$$

est une distance ultramétrique sur G, et la topologie induite par cette distance est la même que celle définie par les cosets.

Preuve. On a $d(g, h) = 0$ si et seulement si $gh^{-1} \in H_i$ pour tout i, ie $gh^{-1} \in \bigcap H_i = 1$. Si $g, h \in H_i$ alors $gh \in H_i$, d'où $d(f, h) \leq \max\big(d(f, g), d(g, h)\big)$. Finalement $d(g, h) = d(h, g)$ et $d(g, h) \geq 0$ trivialement. Ainsi d est une distance ultramétrique.

Maintenant, l'égalité

$$B_G(g, e^{-r}) = \left\{h \in G \mid \forall i < r, gh^{-1} \in H_i\right\} = \bigcap_{0 \leq i < r} gH_i$$

montre qu'une boule est ouverte pour la topologie des cosets. Réciproquement, si $h \in gH_r$ alors la boule $B_G(h, e^{-r-1})$ incluse dans gH_r contient h, montrant que le coset est un ouvert pour la distance. $\square$

Lemme 3.2. *L'application*

$$d_L : (g, h) \mapsto e^{-\sup\{i \in I \mid g_i = h_i\}}$$

est une distance ultramétrique sur L, et la topologie induite par cette distance est la même que celle définie par les cosets.

Preuve. Même preuve. $\square$

Corollaire 3.1. *L'application naturelle $f : G \to H, g \mapsto (\pi_i g)_I$ est une isométrie. On identifie donc G à son image dans L.*

Preuve. $-\log d_L(fg, fh) = \sup\{i \in I \mid (fg)_i = (fh)_i\} = \sup\left\{i \in I \mid \pi_i(gh^{-1}) = 1\right\} = -\log d_G(g, h)$. $\square$

Lemme 3.3. *$\tilde{G}$, la complétion de G par les suites de Cauchy, est un groupe topologique.*

Preuve. On rappelle que $\tilde{G} = \mathcal{C}/\sim$, où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des suites de Cauchy et $(x_n) \sim (y_n)$ si $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$. $\mathcal{C}$ est un sous-groupe de $G^{\mathbb{N}}$; si g et h sont de Cauchy, gh^{-1} aussi. Considérons l'ensemble $\mathcal{N}$ des suites tendant vers 1: elles constituent un sous-groupe normal de $\mathcal{C}$, et $x_n \sim y_n \iff x_n y_n^{-1} \in \mathcal{N}$. Ainsi $\tilde{G} = \mathcal{C}/\mathcal{N}$ est un groupe quotient, et en particulier un groupe. Sa métrique est donnée par

$$d_{\tilde{G}}([x_n], [y_n]) = \lim_{n \to \infty} d_G(x_n, y_n).$$

$\square$

Ces quelques lemmes montrent que la question de l'égalité des complétions est légitime. Nous allons exhiber un isomorphisme isométrique entre L et $\tilde{G}$ en employant le caractère minimal de la complétion. Cela aura pour conséquence de montrer que $\tilde{G}$ est compact et de déterminer ses sous-groupes normaux.

Théorème 3.1 (Propriété universelle de la complétion métrique)**.** *Soit X un espace métrique et $\tilde{X}$ sa complétion. Si $f : X \to Y$ est une isométrie telle que la fermeture de l'image de X soit complète, alors il existe une unique isométrie $\bar{f} : \tilde{X} \to Y$ étendant f. En particulier, $\tilde{X}$ est l'unique espace complet dans lequel X est dense.*

Preuve. On identifie X et son image dans $\tilde{X}$. Soit $f : X \to Y$ telle que $\overline{f(X)}$ soit complet. Si $x \in C$ et $x_n \longrightarrow x$ alors x_n est de Cauchy, $f(x_n)$ est de Cauchy, et elle tend vers un y dans $\overline{f(X)}$. On définit $\bar{f}(x) = y$.

Cette application est bien définie; si x_n et x'_n tendent toutes deux vers x alors $d(fx_n, fx'_n) = d(x_n, x'_n) \longrightarrow 0$ soit $\lim_n f(x_n) = \lim_n f(x'_n)$. De plus si $d(x, y) = r$, alors

$$d(\bar{f}x, \bar{f}y) \longleftarrow d(\bar{f}x_n, \bar{f}y_n) = d(fx_n, fy_n) = d(x_n, y_n) \longrightarrow r.$$

Si g est une autre isométrie étendant f, alors par continuité

$$g(x) \longleftarrow g(x_n) = f(x_n) = \bar{f}(x_n) \longrightarrow \bar{f}(x),$$

d'où $g = \bar{f}$. □

Lemme 3.4. *L est complet, et G est dense dans L.*

Preuve. Si $(x^n) \in L^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors $d_L(x^p - x^q) \leq e^{-r}$ à partir d'un certain rang. Autrement dit, les r premières coordonnées $(x_i^n)_{i \leq r}$ sont constantes à partir d'un certain rang N_r. Ainsi, x^n converge vers $(x_i^{N_i})_{i \in I}$ et L est complet. De plus, si $a = (a_i + H_i) \in L$ alors $(fa_i) \longrightarrow a$ donc L est la fermeture de G. □

Théorème 3.2. *Il existe un isomorphisme isométrique $\tilde{G} \to L$, où $\tilde{G}$ est la complétion de G et $L = \varprojlim G/H_i$.*

Preuve. On note $f : G \to L$ le morphisme isométrique de G dans L et $g : G \to L$ le morphisme isométrique de G dans $\tilde{G}$. Le lemme et théorème précédents donnent une isométrie bijective $h : \tilde{G} \to L$, vérifiant que si $gx_n \longrightarrow x$ alors

$$fx_n = hgx_n \longrightarrow hx.$$

Il suffit de montrer que h est un morphisme de groupes. Si $x, y \in \tilde{G}$ alors il existe $gx_n \longrightarrow x$ et $gy_n \longrightarrow y$. Ainsi par continuité du produit on obtient

$$h(xy) \longleftarrow hg(x_n y_n) = f(x_n y_n) = f(x_n)f(y_n) \longrightarrow h(x)h(y).$$ □

References

[CF67] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich. *Algebraic number theory.* English. Proceedings of an instructional conference organized by the London Mathematical Society (a NATO Advanced Study Institute) with the support of the International Mathematical Union. London and New York: Academic Press 1967. xviii, 366 p. 100 s. (1967). 1967.

[MZ55] Deane Montgomery and Leo Zippin. *Topological transformation groups.* eng. Interscience tracts in pure and applied mathematics. New York London: Interscience Publishers, 1955.

[Rot15] Joseph J. Rotman. *Advanced modern algebra. Part 1.* English. 3rd edition. Vol. 165. Grad. Stud. Math. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2015. ISBN: 978-1-4704-1554-9.