Introducción a la Lógica Difusa para la representación de información imprecisa

Maria-Amparo Vila
vila@decsai.ugr.es

Grupo de Investigación en Bases de Datos y Sistemas de Información Inteligentes https://idbis.ugr.es/
Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Granada

Descripción

a) El concepto de conjunto difuso
   1. Definición y propiedades más simples
   2. Conectivos y operaciones con conjuntos difusos.
   3. Relaciones difusas. Propiedades
b) El concepto de número difuso.
   1. Definición. Números difusos L-R.
   2. Operaciones con números difusos
   3. Ordenación de números difusos
c) El concepto de etiqueta lingüística.
   1. Definición general
   2. Ejemplos y casos particulares

El concepto de conjunto difuso

$\star$**Definición**

- X un conjunto cualquiera, (referencial o universo de discurso)
- A conjunto difuso sobre $X \equiv \mu_A : X \longrightarrow [0,1]$
- μ_A se denomina función de pertenencia.

Intuitivamente:

A es un conjunto con los bordes no definidos. μ_A generaliza a la función indicador:

$$\forall x \in X \ \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si está claro que } x \in A \\ 0 & \text{si está claro que } x \in X - A \\ \alpha \in (0,1) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El concepto de conjunto difuso

⋆ α-**corte:** $\forall\alpha \in [0,1] A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}$; $A = \bigcup_{\alpha\geq 0}^{1} A_\alpha$
⋆ **Moda:** α-corte de nivel 1.
⋆ **Soporte:** $\{x \in X | \mu_A(x) \geq 0\}$

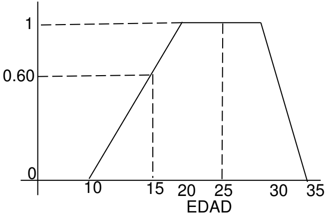
⋆ **Semántica de los conjuntos difusos: ideas básicas**
- Toda propiedad imprecisa definida sobre un conjunto genera un conjunto difuso.
- Sea P una propiedad imprecisa sobre X, $\mu_p(x) =$ grado de cumplimiento de x de la propiedad P.
- En algunos casos la propiedad P se describe a su vez como un subconjunto difuso sobre otro referencial y el grado de cumplimiento puede calcularse:

El concepto de conjunto difuso

⋆ **Semántica de los conjuntos difusos: ideas básicas**

Ejemplo:

"Ser joven" se puede representar como un subconjunto difuso de edad:



Si Juan tiene 15 años, $\mu_{joven}(Juan) = 0.60$

- "Joven" se denomina también **etiqueta lingüística** y su representación como conjunto difuso de edades "**Representación semántica"**

El concepto de conjunto difuso

⋆ **Inclusión** $\forall A, B$ difusos sobre X,

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow \forall x \in X \mu_a(x) \leq \mu_B(x)$$

⋆**Unión** $\forall A, B$ difusos sobre X, $A \bigcup B = C$ tal que:

$$\forall x \in X \; ; \; \mu_c(x) = \mu_A(x) \bigoplus \mu_B(x) = u(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Inicialmente, $u(x, y) = \max(x, y) = x \bigvee y$
⋆**Intersección** $\forall A, B$ difusos sobre X, $A \bigcap B = C$ tal que

$$\forall x \in X \; ; \; \mu_c(x) = \mu_A(x) \bigodot \mu_B(x) = i(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Inicialmente, $u(x, y) = \min(x, y) = x \bigwedge y$
⋆**Complementación** $\forall A$ difuso sobre X, $\overline{A} = C$ tal que

$$\forall x \in X \; ; \; \mu_C(x) = \neg\mu_A(x) = n(\mu_A(x))$$

Inicialmente, $n(x) = 1 - x$

El concepto de relación difusa

Dados dos referenciales X, e Y se define **Relación Difusa** sobre $X \times Y$, R como un subconjunto difuso tal que:

$$\mu_R : X \times Y \longrightarrow [0, 1]$$

- **Semáticamente** una relación difusa refleja conexiones imprecisas (graduales) entre elementos de dos conjuntos.
- Si $X \equiv Y$ una relación difusa R puede cumplir las propiedades:

1. *Reflexiva:* $\forall x \in X, \mu_R(x, x) = 1$
2. *Simétrica:* $\forall x, y \in X, \mu_R(x, y) = \mu_r(y, x)$
3. *Antismétrica:* $\forall x, y \in X \mu_R(x, y) \bigwedge \mu_R(y, x) = 0$
4. *Max-min transitiva*
   $\forall x, y \in X, \mu_R(x, y) \geq max_{z \in X}(\mu_R(x, z) \bigwedge \mu_R(z, y))$

El concepto de relación difusa

- Una relación difusa puede ser:

De similitud si es:

. Reflexiva

. Simétrica

. Max-min transitiva

De orden Difuso si es:

. Reflexiva

. Antisimétrica

. Max-min transitiva

El concepto de relación difusa

- Una relación difusa puede ser:

De semejanza si es:

.Reflexiva

.Simétrica

De preorden si es:

. Reflexiva

. Antisimétrica

Números difusos

*** Definición**

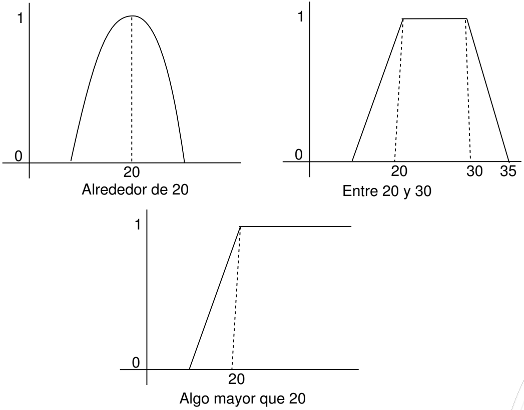
Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de números reales. A, subconjunto difuso de $\mathcal{R}$ es un número difuso sii:

$$\forall\alpha \in [0,1]\ ;\ A_\alpha = [a,b]$$

- Sea $mod(A) = \{x \in \mathcal{R}/\mu_A(x)01\}$:
  .Si $mod(A) = \{x\} \Longrightarrow A$ es *unimodal*
  .Si $mod(A) = [a,b] \Longrightarrow A$ es *un intervalo difuso*
- Notaremos por $\mathcal{D}$ el conjunto de números difusos reales.

Números difusos

Ejemplos y significado intuitivo



Números difusos

***Representación L-R de números difusos**

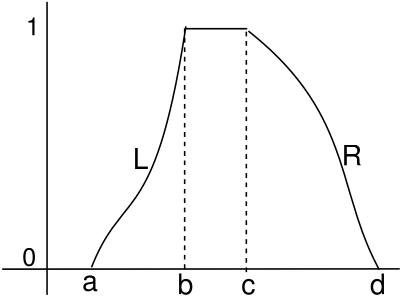
Todo numero difuso A se puede representar por $(d1, m, n, d2)_{LR}$, donde:

- Los cuatro valores reales $(d1, m, n, d2)$ verifican:
  $m \leq n, d1 \geq 0, d2 \geq 0,\ m \neq \infty\ ;\ n \neq \infty$
- Las dos funciones, verifican:
  - $L(.)$ monotona creciente, continua a la derecha, con $L(a) = 0$
  - $R(.)$ monotona decreciente, continua a la izquierda co $R(d) = 0$
- de forma que:

$$\forall x \in \mathcal{R}\ ;\ \mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq m - d1 \text{ o } x \geq n + d2 \\ 1 & \text{si } x \in [m, n] \\ L(x) & \text{si } x \in [m - d1, m] \\ R(x) & \text{si } x \in [n, n + d2] \end{cases}$$

Números difusos

Graficamente:



Números difusos

*** Aritmética con números difusos**

- Forma general: sean $A, B \in \mathcal{D}$ y $*$ una operación aritmética $(+, -, \times, \div)$, definimos $C = A * B$ como el conjunto difuso cuya función de pertenencia es:

$$\forall z \in \mathcal{R}; \mu_C(z) = sup\, min_{z=x*y}(A(x), b(y)$$

Puede probarse que C es un número difuso.

- Para el caso de números difusos en forma L-R con las mismas fuciones asociadas se tiene que:

$\forall A, B \in \mathcal{D}\ \ ;\ A = (d1, m, n, d2)_{LR}\ ;\ B = (d1', m', n', d2')_{LR}$:
$A + B = (d1 + d1', m + m', n + n', d2 + d2')_{LR}$
$A - B = (d1 - d1', m - m', n + n', d2 + d2')_{LR}$
$\forall v \in \mathcal{R}\ \ ;\ vA = (vd1, vm, vn, vd2)_{LR}$

Números difusos

*** Comparaciones con números difusos**

- El problema es complejo cuando los números se solapan.

Dos enfoques básicos

A) Metodos crisp, deciden cuando un número es mayor(menor) que otro. Se basan en una "función ordenadora": $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{R}$

$$\forall A, B \in \mathcal{D} A \geq B \Longleftrightarrow f(A) \geq f(B)$$

B)Métodos difusos, generan relaciónes difusas orden en el conjunto $\mathcal{D}$.

$$\forall A, B \in \mathcal{D} \; ; \; \mu_{\geq}(A, B) = g(A| \geq B)$$

donde $g(A| \geq B)$ es la medida del difuso A con respecto al difuso que representa la propiedad imprecisa "ser mayor que B".

Concepto de etiqueta lingüística

•**Definicion:**

$\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n\}$ *conjunto de etiquetas lingüísticas: valoraciones imprecisas de alguna propiedad:*

Ejemplos

$\{L_1, \ldots, L_n\} = \{$Alto, Medio, Bajo$\}$

$\{L_1, \ldots, L_n\} = \{$Muy Bueno, Bueno, Regular, Malo, Muy Malo$\}$

. Los conjuntos de etiquetas definen jerarquías de valores sobre las variable que representan.

. Un problema importante asociado es el de la *Granularidad*

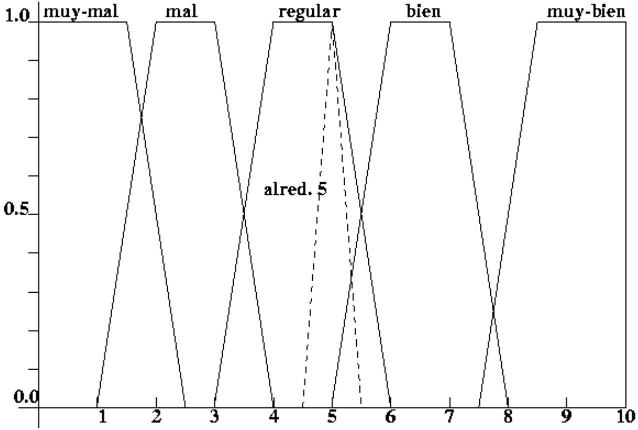
. Siempre existe una relación de semejanza definida en $\mathcal{L}$.

$$\forall l_i, l_j \in \mathcal{L} \; s_{ij} = \text{ grado de parecido entre } l_i \text{ y } l_j$$

Concepto de etiqueta lingüística

Si un conjunto de etiquetas tiene un referencial subyacente, estas poseen **representación semántica** como conjuntos difusos

-*Ejemplo*



Concepto de etiqueta lingüística:

Conjuntos de etiquetas destacados

- **Valoraciones de certeza:** el referencial es el [0,1]
  - Probabilisticas: $\{L_1, \ldots, L_n\} = \{$Casi seguro, Muy Probable, Probable , Poco Probable, Improbable$\}$
  - Posibilisticas $\{L_1, \ldots, L_n\} = \{$Casi seguro, Muy Posible, Posible , Poco Posible, Casi Imposible$\}$

-**Valoraciones asociadas al control difuso:** el referencial es el [-1,1]
◦ $\{L_1, \ldots, L_n\} = \{$Positivo alto, Positivo, Nulo, Negativo , Negativo bajo$\}$

- **Cuantificadores:** tienen conjuntos numéricos como referencial

Concepto de etiqueta lingüística:

⋆ **Variable lingüística** Variable que toma valores lingüísticos valorados en un referencial numérico

⋆ **Problemas asociados al trabajo con etiquetas**

- Obtención de las etiquetas asociadas a una variable de un problema (Control difuso)
- Analisis de la granularidad en la representación de la información mediante etiquetas: (bases de datos, decisión)
- Operaciones con etiquetas: sumas, agregaciones etc...(decisión, optimización, bases de datos etc..)

Las etiquetas son la base de la Computación con Palabras o "Soft Computing" en sentido estricto