B3313 - Tuan Tu PHUNG & Son Tung TRAN
B3306 - Aurélia INARD & Emma DRAPEAU

TP MATLAB - Transformée de Fourier

I. La fonction Transformée de FOURIER discrète - Application

- La période d'échantillonnage Te est : Te = (b-a)/N avec N = 32768 échantillons et l'intervalle de a = -5 secondes à b = 5 secondes.

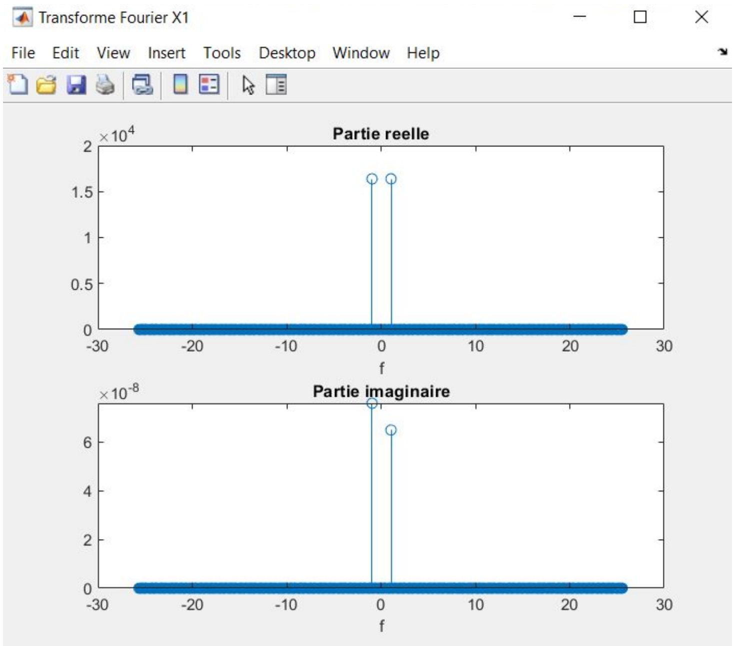
D'où Te = 0.305 ms.

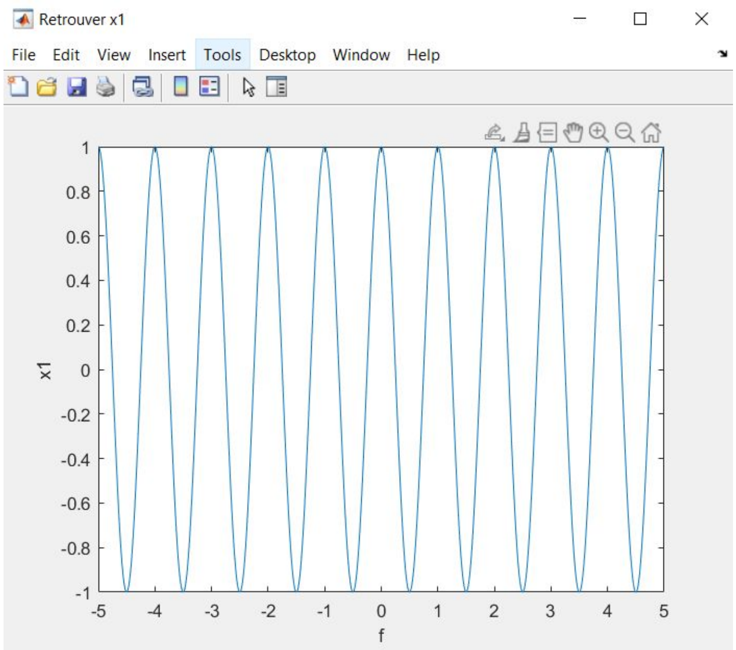
- La fréquence d'échantillonnage Fe est : 1/Te.

D'où Fe = 3276.8 Hz

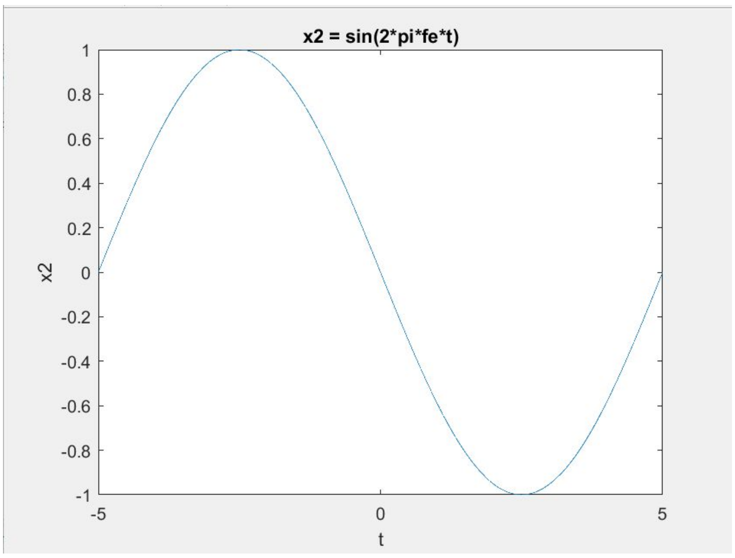
Affichage des fonctions

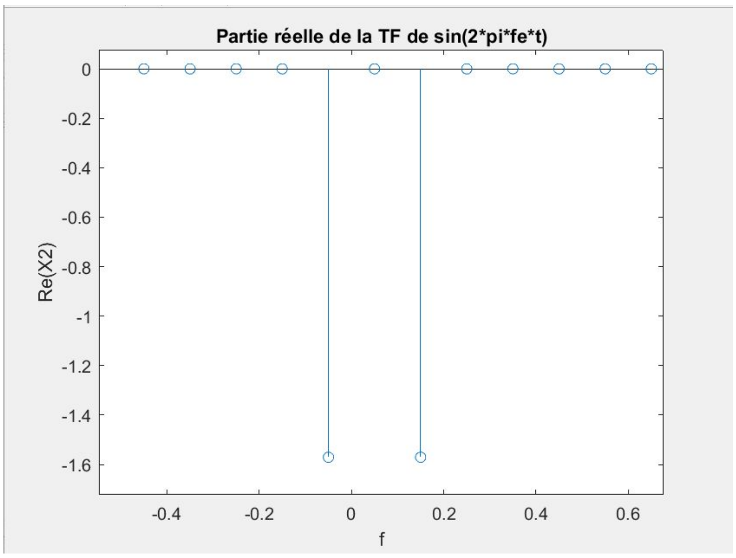
- x1 = cos(2πft) avec f=1:





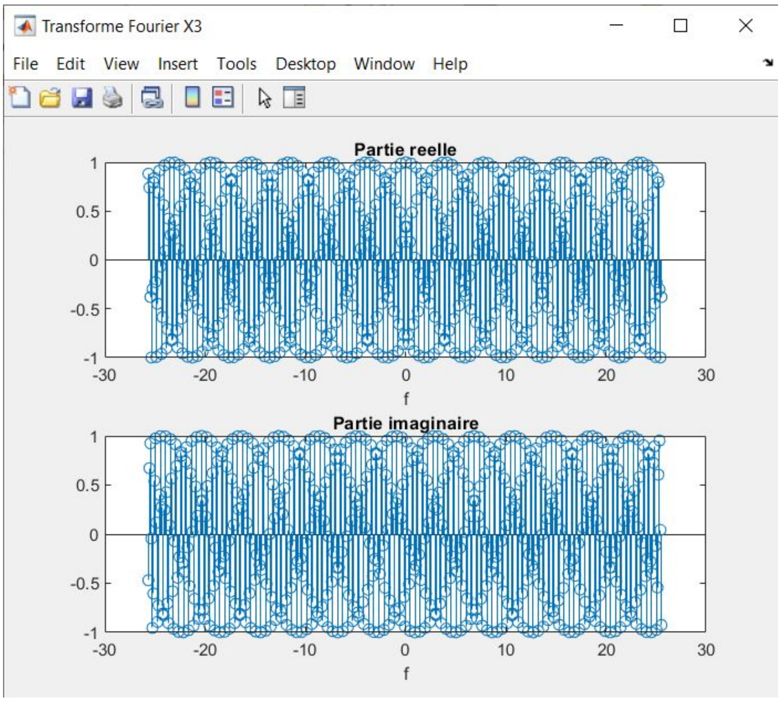
- x2 = sin(2πft) avec f = 0.1:

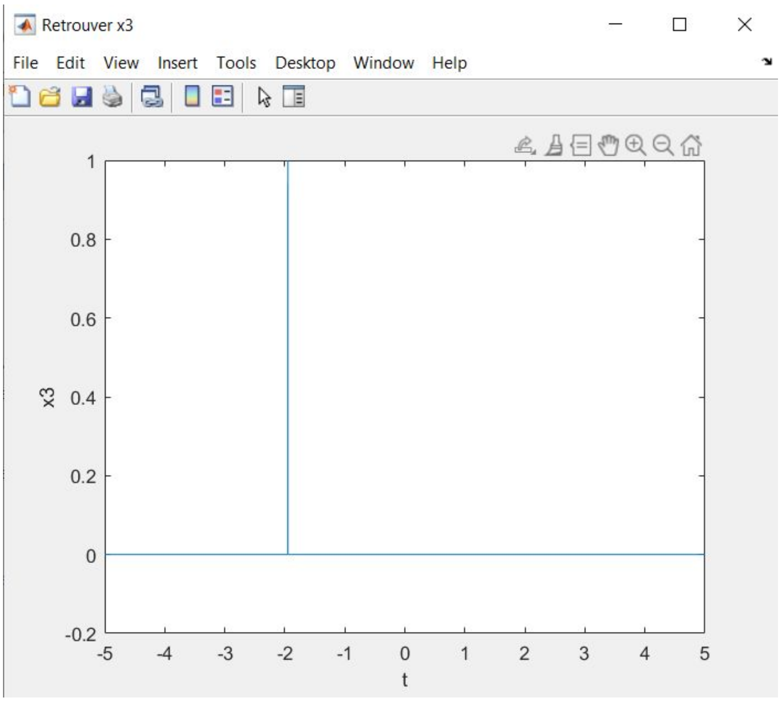




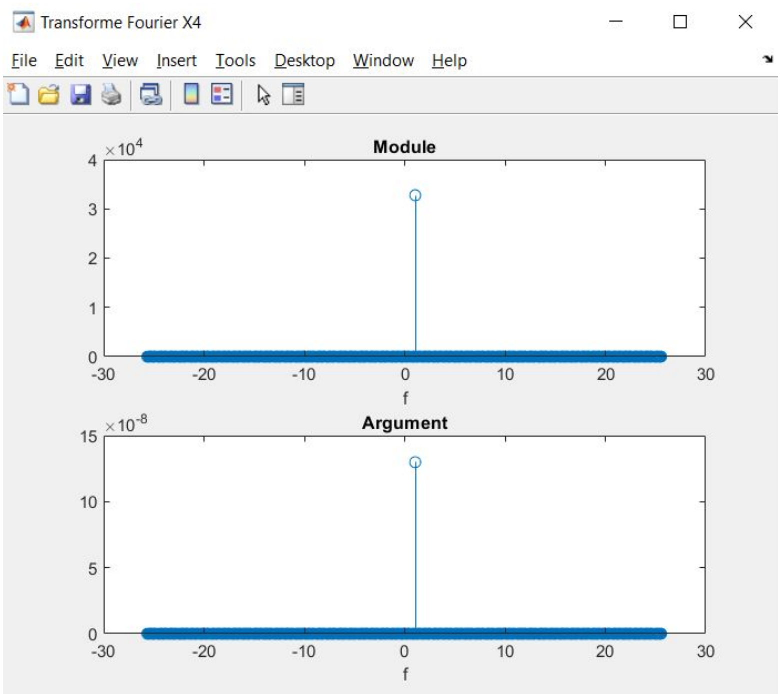
B3313 - Tuan Tu PHUNG & Son Tung TRAN
B3306 - Aurélia INARD & Emma DRAPEAU

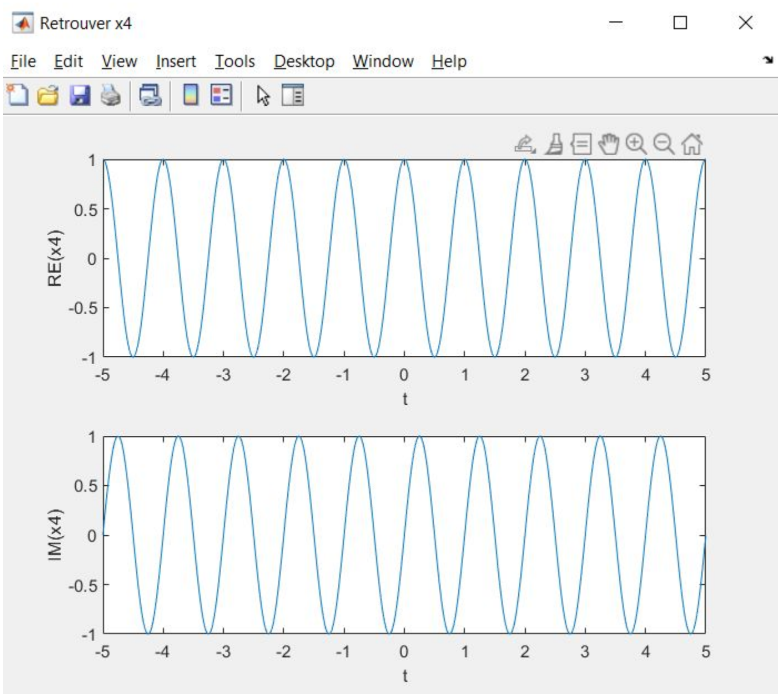
- x3 = δ(t-Δt) avec Δt = -1.9485:





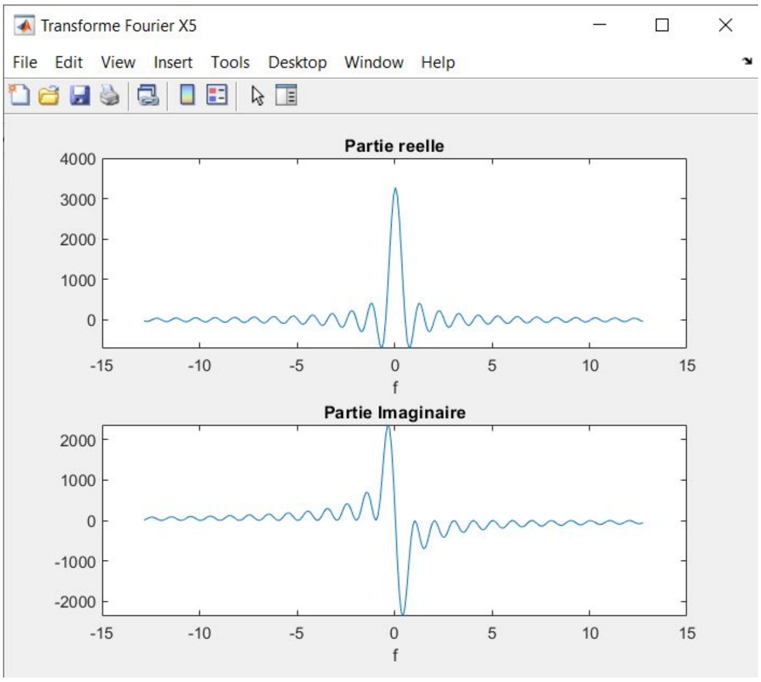
- x4 = $e^{i2\pi ft}$:

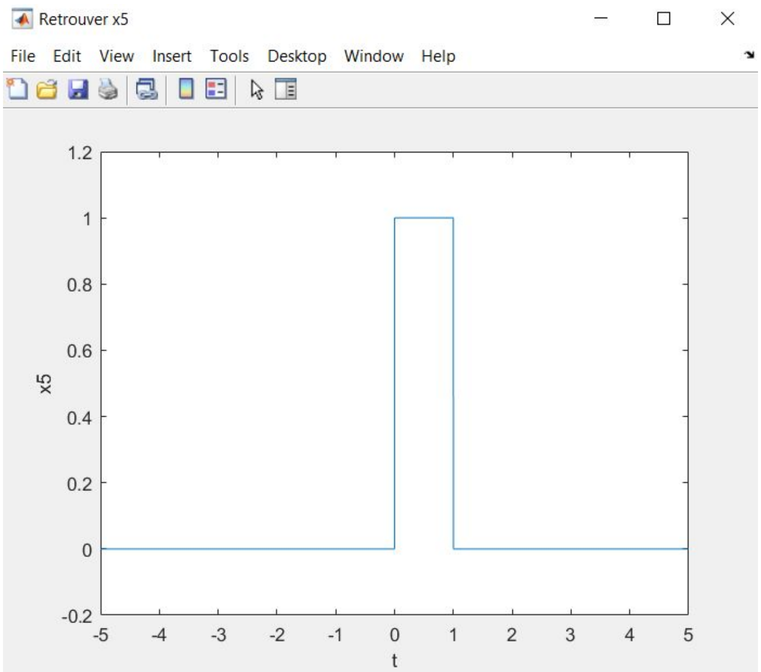




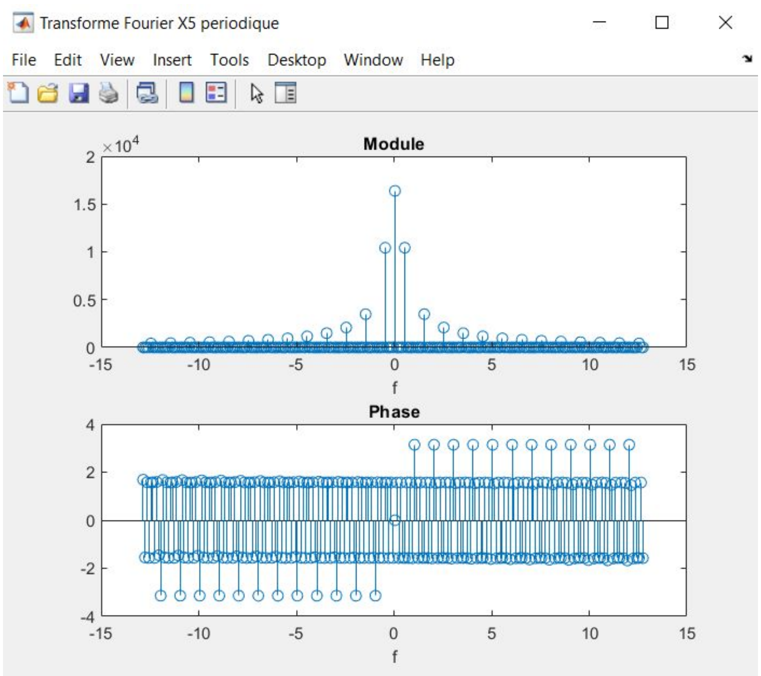
B3313 - Tuan Tu PHUNG & Son Tung TRAN
B3306 - Aurélia INARD & Emma DRAPEAU

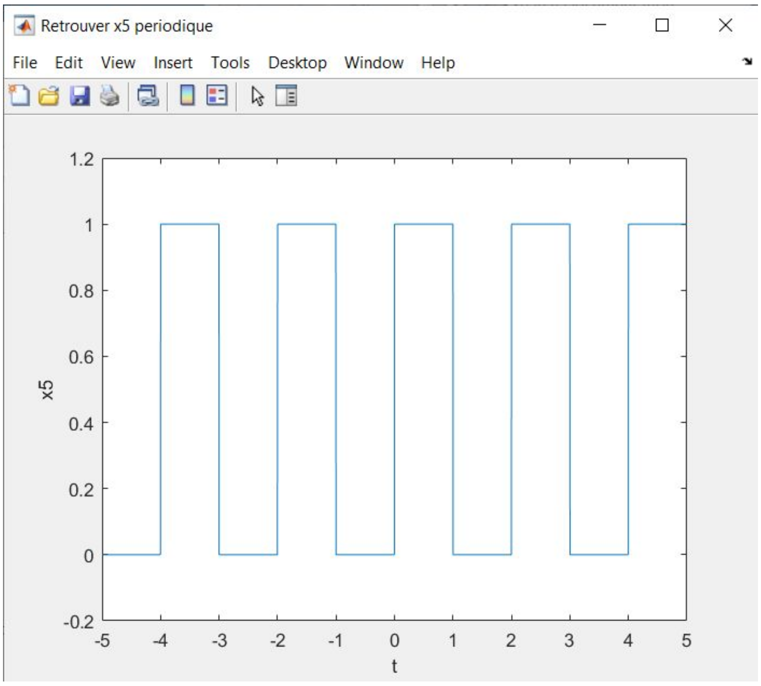
- $x5 = rect_{0.1}(t)$:





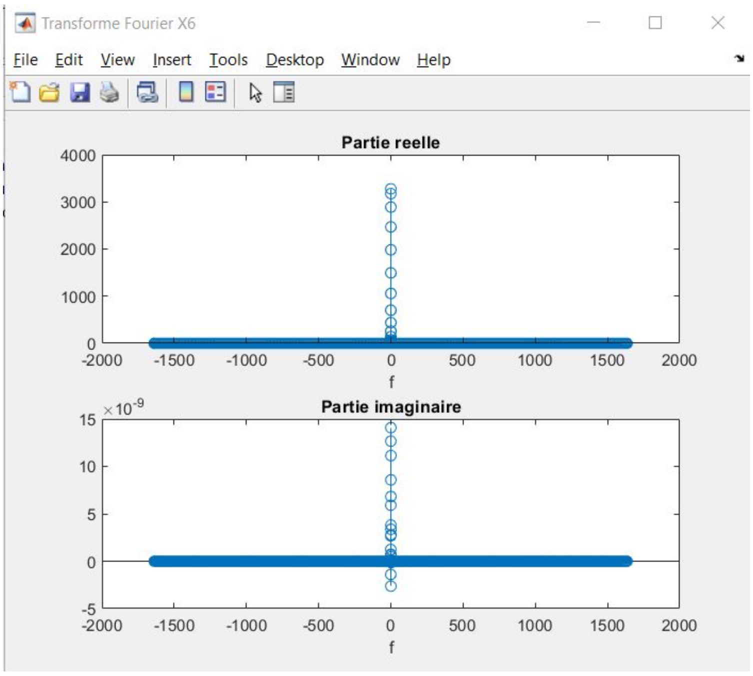
- x5 périodique :

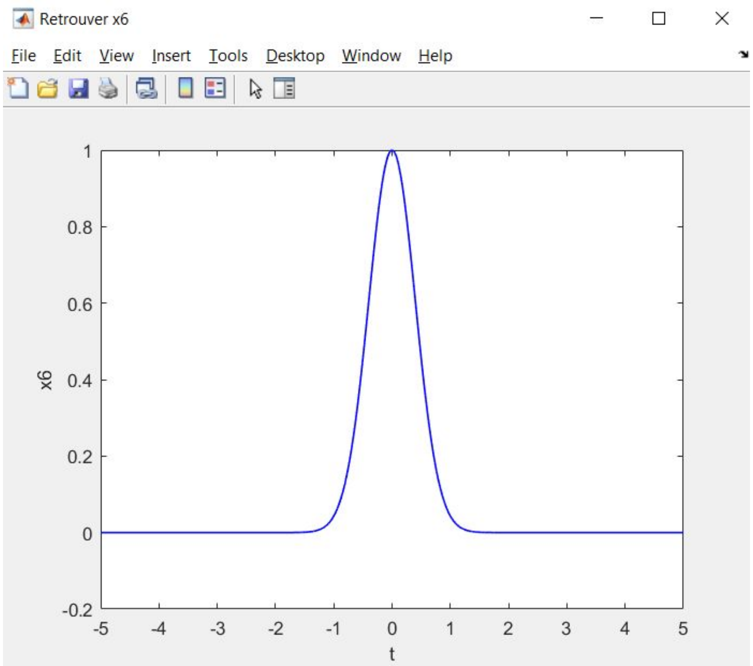




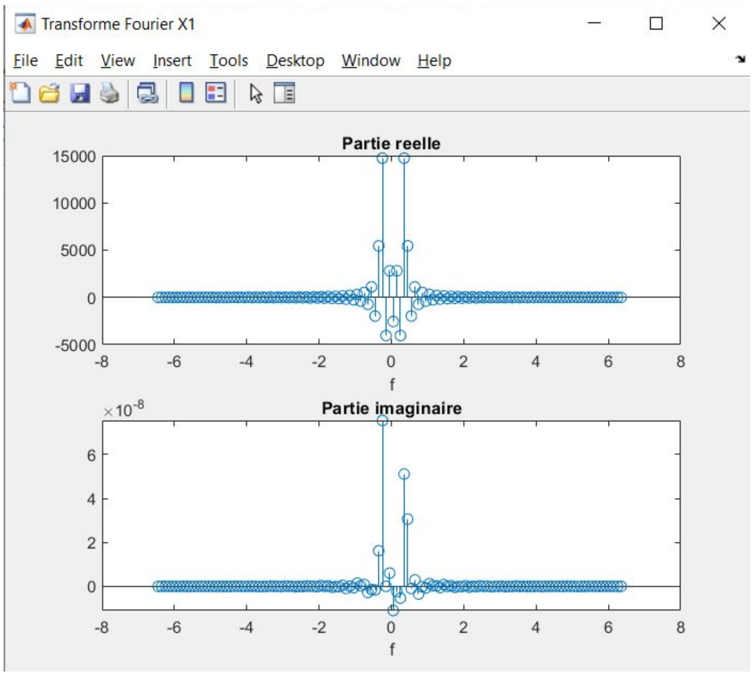
B3313 - Tuan Tu PHUNG & Son Tung TRAN
B3306 - Aurélia INARD & Emma DRAPEAU

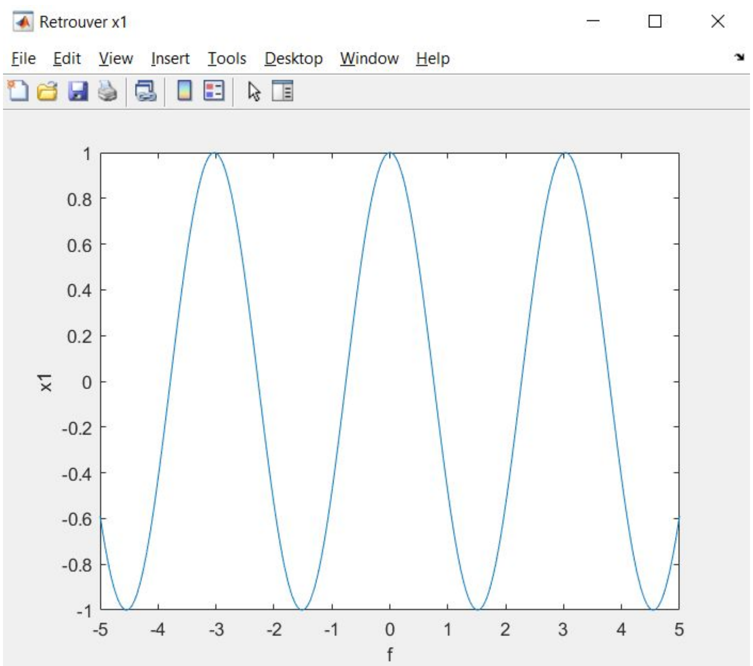
- X6 (théorique) = e^{-f^2} , mais notre résultat X6 donne une valeur de 3277 en f=0. La raison de ce phénomène est que notre fonction de transformée Fourier peut recadrer notre rang de valeurs.





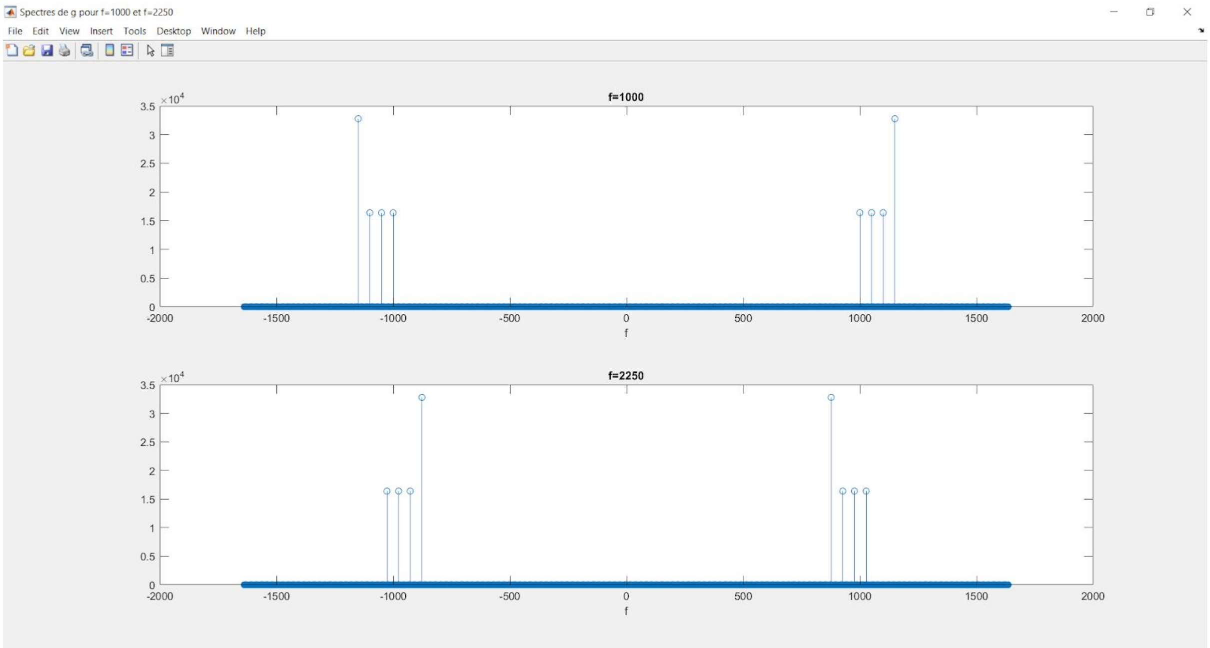
- On va essayer d'échantillonner une fonction sur un nombre non entier de période. On échantillonne par exemple x1 avec f=0.33 pour retrouver un nombre de périodes non-entier entre a et b. On voit que la transformée Fourier contient plusieurs pics, c'est parce que pour calculer la TF, la fonction Matlab va considérer que notre fonction x1 est périodique de période (b-a), mais (b-a) = 10 n'est pas un multiple de T = 1/0.33 = 3, donc la période est mal-prise et la Transformée est erronée : on voit qu'il y a du "bruit" autour des deux pics normalement attendus.





II. Échantillonnage et aliasing

- Pour g_{1000}, on attend les spectres de fréquences 1000, 1050, 1100 et 1150, et celui de 1150 doit être d'amplitude 2. Pour g_{2250}, on attend les spectres de fréquences 2250, 2300, 2350 et 2400, et celui de 2400 doit aussi être d'amplitude 2.

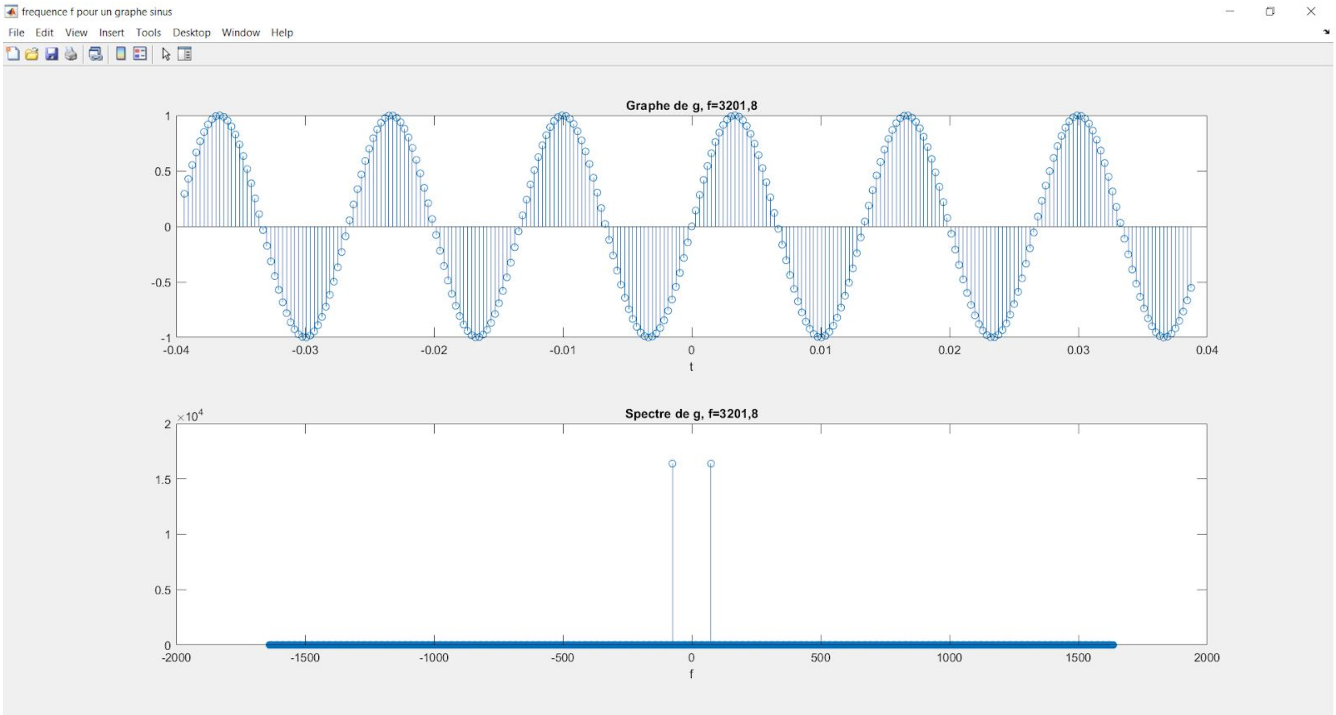


- Pour le g_{1000}, on voit que les fréquences présentées sont comme la théorie, mais pour g_{2250}, le graphe est inversé et pas du tout aux bonnes valeurs (autour des 1000 alors qu'elles devraient être vers 2250 et plus). C'est à cause du fait que notre fréquence d'échantillonnage est de 3276,8 Hz, donc on ne peut afficher que les fréquences entre -1638,4 Hz et 1638,4 Hz. Lorsqu'on fait un échantillonnage, on va aussi convoluer les spectres du signal avec les Diracs de Fe*n. Donc on aura les spectres centré autour les fréquences de -3276,8 Hz, 0, 3276,8 Hz, 6553,6 Hz, etc. En fait, ce qu'on voit sur le graphe est la partie fréquentielle [2250,2400] autour de -3276,8 Hz et la partie fréquentielle [-2400,-2250] autour de 3276,8 Hz.

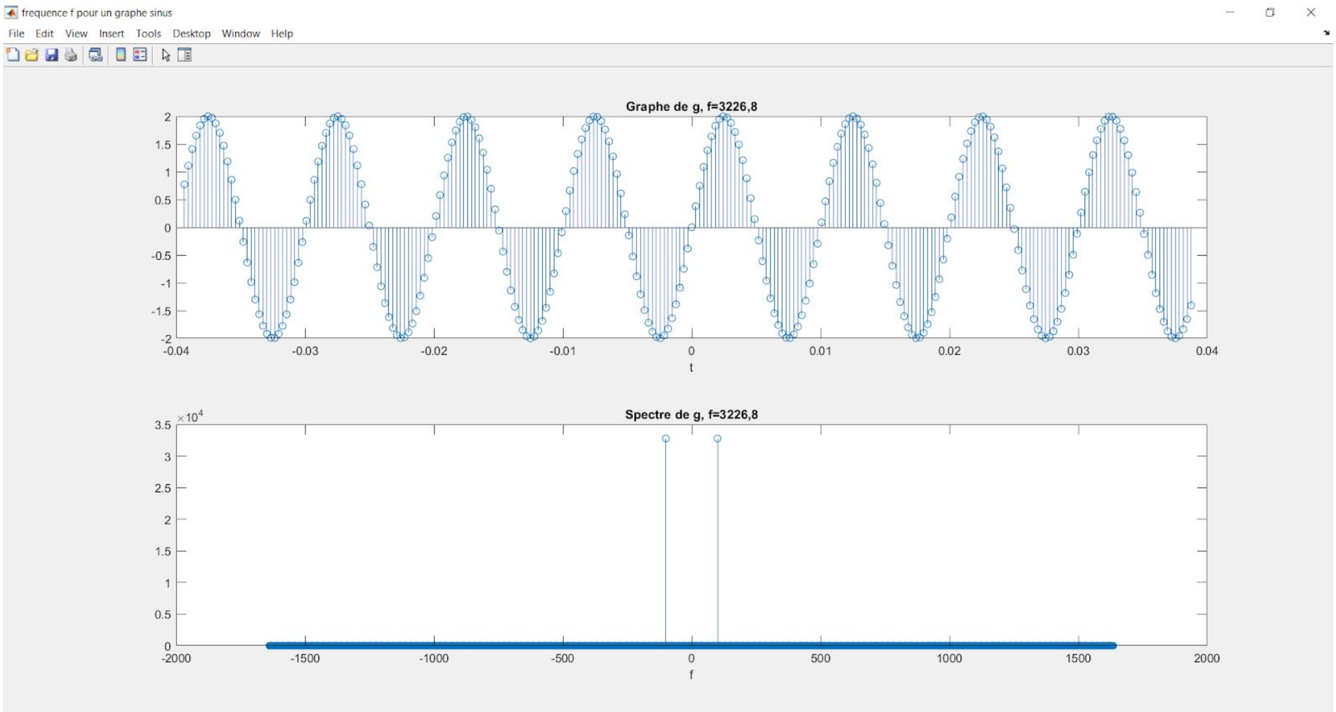
  Pour éviter ce problème, on doit choisir une fréquence d'échantillonnage Fe au moins deux fois supérieure à la fréquence maximale Fmax du signal. Pour le signal g_{1000}, on Fmax = 1150 Hz. Alors 2Fmax = 2300 Hz < Fe = 3277 Hz. Ainsi, l'échantillonnage représente le signal réel. Pour le signal g_{2250}, on Fmax = 2400 Hz. Alors 2Fmax = 4800 Hz > Fe = 3277 Hz. Donc l'échantillonnage est faussé et ne représente pas le signal réel.

- Pour obtenir un simple graphe sinusoïdal de g, il faut que nos 4 fréquences f, f+50, f+100, et f+150, et leurs valeurs négatives soient confondues, et nous donnent au final 4 fréquences. Pour arriver à ça, on a trouvé 2 façons:
  n*fe - 50 et n*fe - 75, avec n, un entier positif (dans ce cas-là, non nul). Avec f=n*fe - 75, f+50 et -(f+100) s'annulent, f+100 et -(f+50) s'annulent, et il ne nous reste que les 2 couples (f, -(f+150)) et (-f,f+150) qui sont confondus

aussi. Avec f=n*fe - 50, on a 3 couples qui s'annulent: (f, -(f-150)), (f+50, -(f+50) et (f+150, -f), et il ne reste que le couple -(f+150) et (f+150).



f = 3201,8 Hz

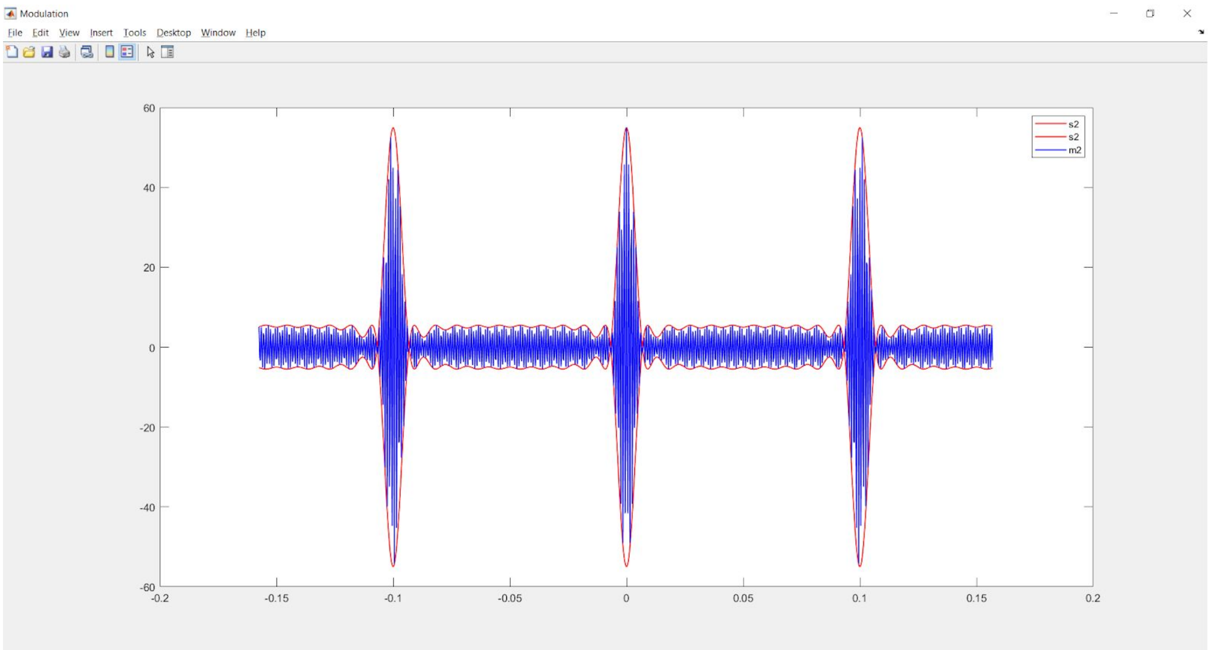


f = 3226,8 Hz

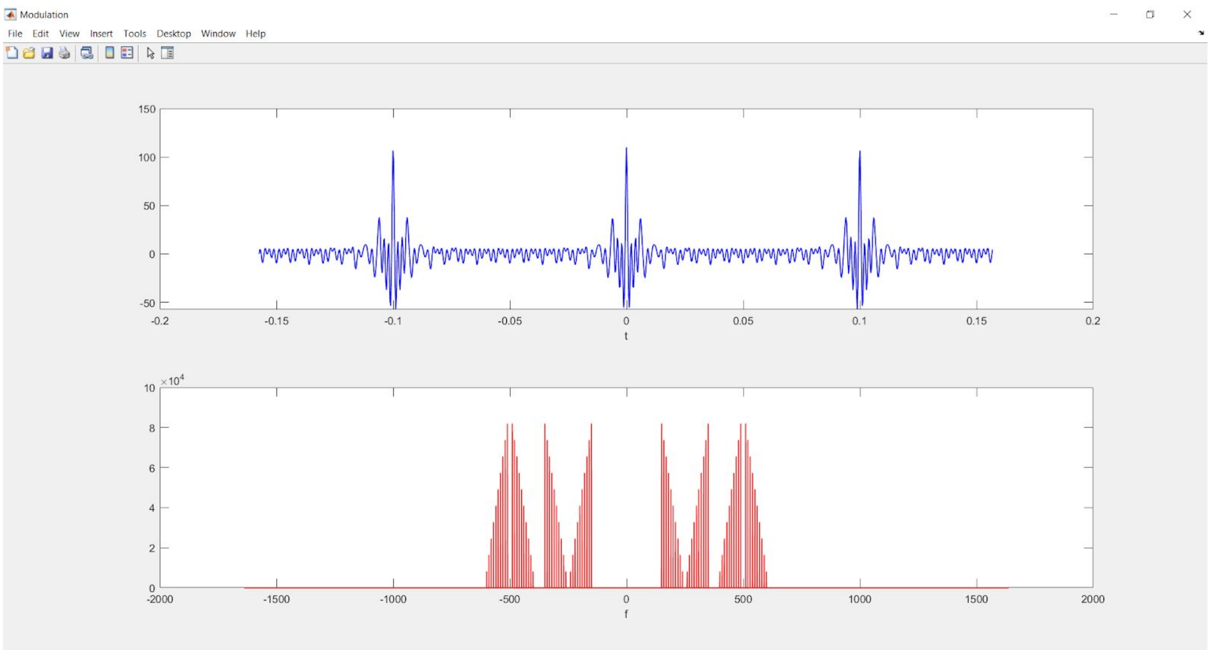
B3313 - Tuan Tu PHUNG & Son Tung TRAN
B3306 - Aurélia INARD & Emma DRAPEAU

III. Transmission par modulation d'amplitude

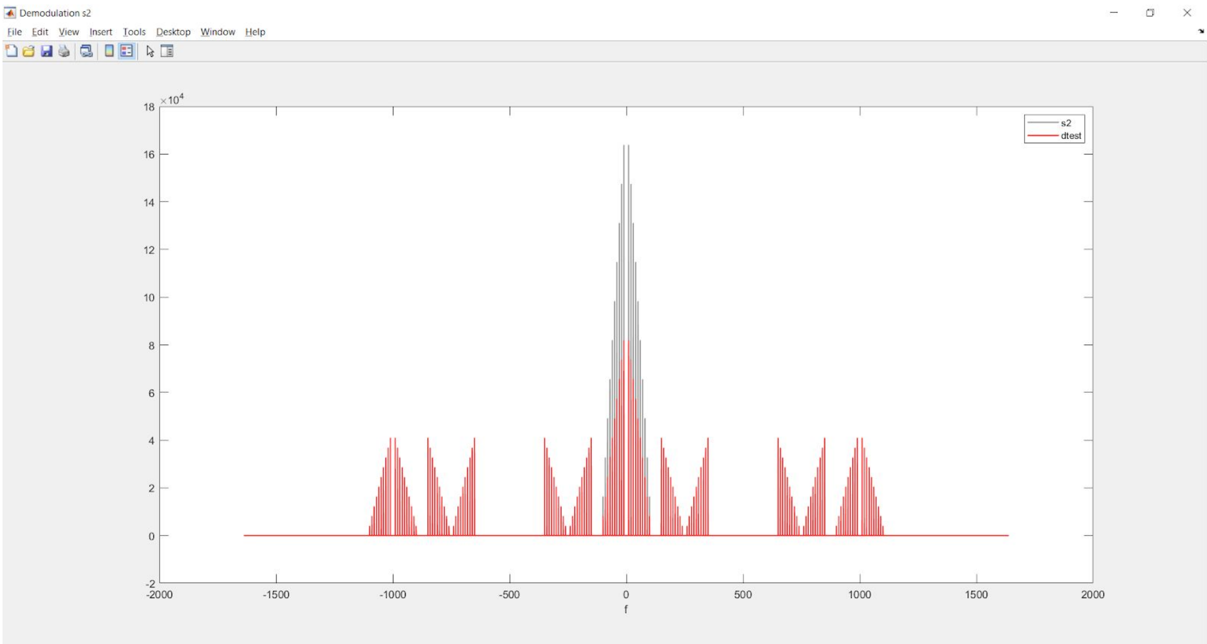
- Un signal modulé est un signal de base multiplié par une sinusoïde appelée porteuse, identifiable par une fréquence particulière, qui porte ainsi ce signal de base. Cela permet de “solidifier” l’information et de transmettre le signal dans un médium en comportant plusieurs sans que ce dernier ne soit trop perturbé par les autres. En représentation temporelle, on peut représenter un signal et sa modulation comme suivant (ici la modulation m2 à la fréquence f2 pour le signal s2) :



Ainsi, en ajoutant une autre modulation m1 de fréquence f1 à partir d’un signal s1 dans le même médium que m2, on obtient un signal m dans cet environnement, somme de m1 et de m2.



Lors de la démodulation, l'appareil reçoit le signal m, qu'il multiplie par une sinusoïde, dont la fréquence caractéristique dépend du signal qui l'intéresse. S'il s'intéresse au signal s2, il va alors multiplier m par la même sinusoïde que lors de la modulation, à la fréquence f2. Le spectre de fréquence du signal alors démodulé comparé au signal de départ et donc le suivant :



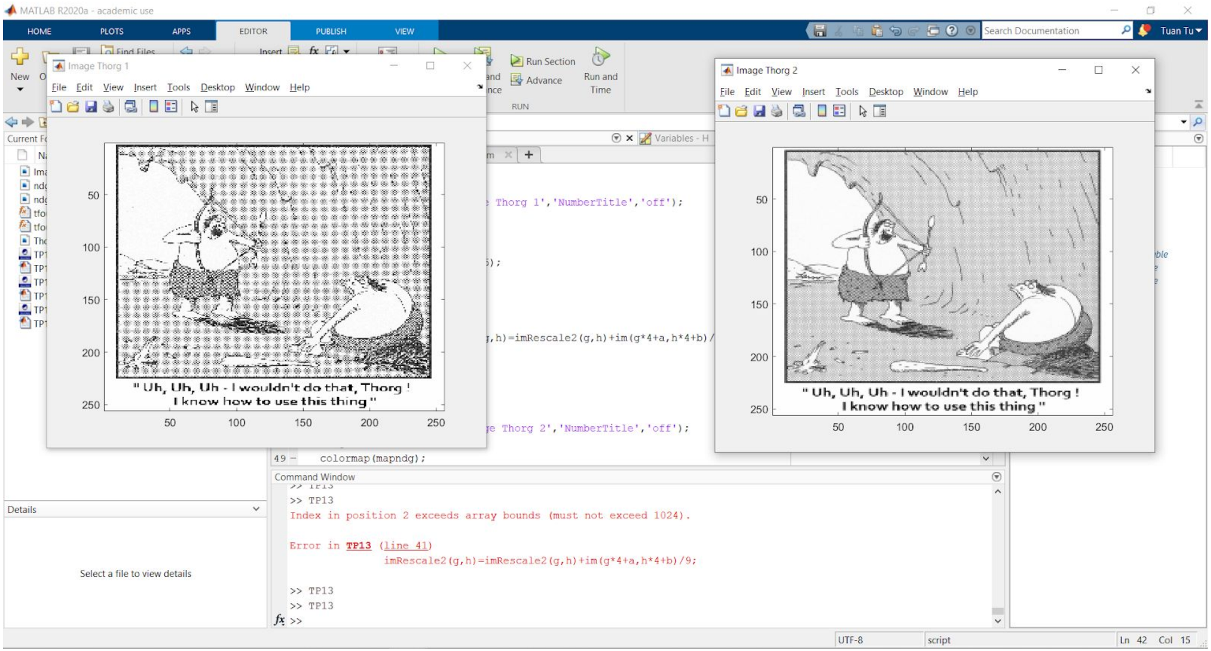
Après la démodulation, on obtient un spectre de fréquence d'amplitude divisée par deux si on garde la même fréquence pour la modulation et la démodulation.

Cette perte d'amplitude peut s'expliquer par une dissipation d'énergie sur les côtés lors de la démodulation. En variant un peu la fréquence de démodulation autour de la fréquence de modulation, on se rend compte qu'il y a en fait 4 "piques" semblables entre eux et égale au quart du signal de base qui se croise deux par deux le long du spectre des fréquences. Lorsque la fréquence de démodulation vaut celle de la modulation, les deux piques centraux sont parfaitement en phase et s'ajoutent, créant un signal valant la moitié du signal de base.

IV. Filtrages

En appliquant le filtre présenté avec une constante K d'une valeur quelconque, on obtient un assombrissement circulaire de l'image autour de l'abscisse du repère. On suppose donc que ce filtre est un passe-bas, ne laissant passer que les fréquences les plus basses et bloquant les fréquences les plus hautes. Si l'on place le repère du filtre au milieu de l'image, on obtient alors un cercle de lumière sur le centre de l'image, qui se réduit au fur et à mesure que K augmente.

Pour l'image Thorg, en prenant un pixel sur 4, on peut voir que la qualité de l'image est très endommagée lorsque l'on passe de 1024x1024 pixels à seulement 256x256. Pour améliorer le rendu, plutôt que de prendre un pixel sur 4 sans se soucier de ses voisins, nous avons essayé de faire la moyenne de ce point et de ses voisins (allant de quatre en quatre, de ses deux voisins les plus proches dans chaque direction, une moyenne donc de 9 pixel).



En faisant la moyenne des points autour du point sélectionné, on obtient en effet un meilleur rendu. Nous aurions pu peut-être encore l'améliorer, en prenant compte des pixel en diagonal, et plutôt que de s'intéresser aux directions seulement, peut-être faire la moyenne d'un carré de 5x5 pixel autour du pixel sélectionné.

V. Localisation de formes par Corrélation

- Cette méthode demande beaucoup de calcul. Quand deux signaux à chercher F sont très proches visuellement, il est possible que la corrélation associée soit proche également et donc que l'on ne sache pas quel est le signal F présent.
- Pour utiliser la convolution au lieu de la corrélation, il faut créer des images de F(-l,-c), c'est-à-dire les images subissent une rotation de 180 degrés. On a donc utilisé une fonction fournie par Matlab - rot90 pour faire ça.
- Dans l'image traitée 3, nous devons abaisser la précision pour le comptage des figures 3 à 254 au lieu de 255 (utilisée pour les figures 1 et 2). En effet, les valeurs dans la matrice de l'image traitée 3 qui correspondent à la place de la figure 3 dans l'image de départ sont de 254.9999999999998.
- Le nombre d'occurrences de la forme 1 est 1371, celui de la forme 2 est 1322, et 1403 fois pour la forme 3.