آرین شکر - ۹۵۲۴۴۰۳

قسمت اول :

۲.۲ - برای کمینه کردن مقدار متوسط risk ابتدا باید مقادیر l_1 و l_2 را مستقیما با تعریف کتاب تشکیل دهیم :

$$l_1 = \sum_{k=1}^{2} \lambda_{k1} P(\underline{x}|\omega_k)P(\omega_k) = \cancel{\lambda_{11} P(\underline{x}|\omega_1)P(\omega_1)} + \lambda_{21} P(\underline{x}|\omega_2)P(\omega_2) = \lambda_{21} P(\underline{x}|\omega_2)P(\omega_2)$$

$$l_2 = \sum_{k=1}^{2} \lambda_{k2} P(\underline{x}|\omega_k)P(\omega_k) = \lambda_{12} P(\underline{x}|\omega_1)P(\omega_1) + \cancel{\lambda_{22} P(\underline{x}|\omega_2)P(\omega_2)} = \lambda_{12} P(\underline{x}|\omega_1)P(\omega_1)$$

اکنون می‌دانیم که براساس مقایسه‌ی بین l_1 و l_2، کلاس $\underline{x}$ با توجه به کمینه‌ی متوسط ریسک مشخص می‌شود. بنابراین برای یافتن حد آستانه باید معادله‌ی $l_1 = l_2$ را حل کنیم :

$$l_1 = l_2 \Rightarrow \lambda_{21} P(\underline{x}|\omega_2)P(\omega_2) = \lambda_{12} P(\underline{x}|\omega_1)P(\omega_1)$$

$$\Rightarrow \frac{P(\underline{x}|\omega_2)}{P(\underline{x}|\omega_1)} = \frac{\lambda_{12} P(\omega_1)}{\lambda_{21} P(\omega_2)}$$

اکنون اگر فرض کنیم که $P(\underline{x}|\omega_1) = N(0, \sigma^2)$، $P(\underline{x}|\omega_2) = N(1, \sigma^2)$ آنگاه داریم :

$$\frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0-1}{\sigma}\right)^2}}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)^2}} = \frac{\lambda_{12} P(\omega_1)}{\lambda_{21} P(\omega_2)} \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_0-1}{\sigma}\right)^2 - \left(\frac{x_0}{\sigma}\right)^2\right]} =$$

$$e^{\frac{2x_0-1}{2\sigma^2}} = \frac{\lambda_{12} P(\omega_1)}{\lambda_{21} P(\omega_2)} \Rightarrow \frac{2x_0-1}{2\sigma^2} = \ln \frac{\lambda_{12} P(\omega_1)}{\lambda_{21} P(\omega_2)}$$

$$\Rightarrow 2x_0 - 1 = 2\sigma^2 \ln \frac{\lambda_{12} P(\omega_1)}{\lambda_{21} P(\omega_2)} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2} + \sigma^2 \ln \frac{\lambda_{12} P(\omega_1)}{\lambda_{21} P(\omega_2)} = -\left(-\left(\frac{1}{2} + \sigma^2 \ln \frac{\lambda_{12} P(\omega_1)}{\lambda_{21} P(\omega_2)}\right)\right)$$

$$= -\left(-\frac{1}{2} - \sigma^2 \ln \frac{\lambda_{12} P(\omega_1)}{\lambda_{21} P(\omega_2)}\right) = -\left(-\frac{1}{2} + \sigma^2 \ln \frac{\lambda_{21} P(\omega_2)}{\lambda_{12} P(\omega_1)}\right) = \boxed{\frac{1}{2} - \sigma^2 \ln \frac{\lambda_{21} P(\omega_2)}{\lambda_{12} P(\omega_1)}}$$

2.3. خطای دسته بندی اشتباه برای هر کلاس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon_1 := \text{خطای تشخیص اشتباه کلاس } \omega_1 = \int_{R_2} p(\underline{x}|\omega_1)\,dx$$

$$\varepsilon_2 := \text{خطای تشخیص اشتباه کلاس } \omega_2 = \int_{R_1} p(\underline{x}|\omega_2)\,dx$$

اکنون با استفاده از فرمول متوسط ریسک داریم:

$$R = P(\omega_1)\, r_1 + P(\omega_2)\, r_2$$

$$= P(\omega_1)\left[\lambda_{11}\int_{R_1} p(\underline{x}|\omega_1)\,dx + \lambda_{12}\int_{R_2} p(\underline{x}|\omega_1)\,dx\right]$$

$$+ P(\omega_2)\left[\lambda_{21}\int_{R_1} p(\underline{x}|\omega_2)\,dx + \lambda_{22}\int_{R_2} p(\underline{x}|\omega_2)\,dx\right] \qquad (I)$$

از طرفی از آنجایی که مرز R_1 و R_2 با یک نقطه (در این مسئله) مشخص می‌شود، میدانیم که:

$$\int_{R_1} p(\underline{x}|\omega_1)\,dx + \int_{R_2} p(\underline{x}|\omega_1)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\underline{x}|\omega_1)\,dx = 1$$

$$\int_{R_1} p(\underline{x}|\omega_2)\,dx + \int_{R_2} p(\underline{x}|\omega_2)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\underline{x}|\omega_2)\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_{R_2} p(\underline{x}|\omega_1)\,dx = \varepsilon_1 \quad , \quad \int_{R_1} p(\underline{x}|\omega_1)\,dx = 1 - \varepsilon_1$$

$$\int_{R_1} p(\underline{x}|\omega_2)\,dx = \varepsilon_2 \quad , \quad \int_{R_2} p(\underline{x}|\omega_2)\,dx = 1 - \varepsilon_2$$

با جایگذاری در (I) داریم:

$$R = P(\omega_1)\left[\lambda_{11}(1-\varepsilon_1) + \lambda_{12}\varepsilon_1\right] + P(\omega_2)\left[\lambda_{21}\varepsilon_2 + \lambda_{22}(1-\varepsilon_2)\right]$$

$$= \lambda_{11}P(\omega_1) - \lambda_{11}P(\omega_1)\varepsilon_1 + \lambda_{12}\varepsilon_1 P(\omega_1) + \lambda_{21}\varepsilon_2 P(\omega_2) + \lambda_{22}P(\omega_2) - \lambda_{22}\varepsilon_2 P(\omega_2)$$

$$= P(\omega_1)\lambda_{11} + P(\omega_2)\lambda_{22} + P(\omega_1)(\lambda_{12} - \lambda_{11})\varepsilon_1 + P(\omega_2)(\lambda_{21} - \lambda_{22})\varepsilon_2$$

2.5 . از آنجایی که با یک مسئله‌ی دو کلاسه‌ی تک بعدی روبرو هستیم می‌توانیم بگوییم که برای دسته‌بندی x باید l_{12} (likelihood ratio) را با مقدار حد آستانه‌ی $\frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}\frac{\lambda_{21}-\lambda_{22}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}}$ مقایسه کنیم. بنابراین نقطه‌ی decision boundary در (حد آستانه) $= l_{12}$ اتفاق می‌افتد. پس داریم:

$$\frac{p(x|\omega_1)}{p(x|\omega_2)} = \underbrace{\cancel{\frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}}}_{1 \text{ (equiprobable classes)}} \frac{\lambda_{21}-\lambda_{22}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}}$$

از آنجایی که هر دوی $p(x|\omega_1)$ و $p(x|\omega_2)$ به ازای $x<0$ برابر صفر خواهند بود و بنابراین تاثیری در محاسبه‌ی حد آستانه نخواهند داشت، فرض می‌کنیم $x \geq 0$. بنابراین داریم:

$$\frac{\frac{x}{\sigma_1^2} e^{\left(\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}\right)}}{\frac{x}{\sigma_2^2} e^{\left(\frac{-x^2}{2\sigma_2^2}\right)}} = \frac{\lambda_{21}-\lambda_{22}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}} \Rightarrow e^{x^2\left[\frac{1}{2\sigma_2^2}-\frac{1}{2\sigma_1^2}\right]} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{\lambda_{21}-\lambda_{22}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}}$$

اکنون این معادله را برای $x=x_0$ (نقطه‌ی decision boundary) حل می‌کنیم:

$$x_0^2\left(\frac{1}{2\sigma_2^2}-\frac{1}{2\sigma_1^2}\right) = \ln\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{\lambda_{21}-\lambda_{22}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}}\right) \Rightarrow x_0^2 = \frac{2\sigma_2^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2-\sigma_2^2}\left[\ln\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{\lambda_{21}-\lambda_{22}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{\frac{2\sigma_2^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2-\sigma_2^2}\left[\ln\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{\lambda_{21}-\lambda_{22}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}}\right)\right]}$$

نکته‌ی مهم این است که چون فرض کردیم $x \geq 0$ بنابراین فقط مقدار مثبت پاسخ بالا قابل قبول است.

2.7 ۱۹. از آنجایی که ماتریس Σ برای هر سه کلاس برابر است می‌توانیم جملات درجه‌ی دوی تابع discriminant و log-likelihood را نادیده بگیریم و سه تابع discriminant $g_i(x)$ برای $i=1,2,3$ به صورت زیر تشکیل دهیم:

$$g_i(\underline{x}) = \underline{w}_i^T \underline{x} + w_{i0}$$

$$\underline{w}_i = \Sigma^{-1} \underline{\mu}_i$$

$$w_{i0} = \ln P(\omega_i) - \frac{1}{2} \underline{\mu}_i^T \Sigma^{-1} \underline{\mu}_i$$

برای محاسبه‌ی g_i ها به موارد زیر نیاز داریم:

$$\underline{P(\omega_i) = \frac{1}{3}} \; ; \quad i = 1,2,3$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.4 \\ 0.4 & 1.8 \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow g_1(\underline{x}): \quad \underline{w}_1 = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.07 \\ 0.04 \end{bmatrix}$$

$$w_{10} = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\approx -1.1 - 0.055 = -1.155$$

$$g_1\left(\begin{bmatrix} 1.6 \\ 1.5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.07 & 0.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 1.155 = -0.983$$

$$g_2(\underline{x}): \quad \underline{w}_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.1 \\ 1.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.51 \\ 0.72 \end{bmatrix}$$

$$w_{20} = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2.1 & 1.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.1 \\ 1.9 \end{bmatrix} \approx -1.1 + 2.2695 = 1.1695 \approx 1.7$$

$$g_2\left(\begin{bmatrix} 1.6 \\ 1.5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1.51 & 0.72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6 \\ 1.5 \end{bmatrix} + 1.7 = 5.196 \approx 5.2$$

$$g_3(\underline{x}): \quad \underline{w}_3 = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.5 \\ 2.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.75 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$w_{20} = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1.5 & 2.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.5 \\ 2.0 \end{bmatrix} \approx -1.1 + 2.8125 = 1.7125 \approx 1.7$$

$$g_3\left(\begin{bmatrix} 1.6 \\ 1.5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1.75 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6 \\ 1.5 \end{bmatrix} + 1.7 = 1.15$$

$$\Rightarrow g_1(\underline{x}) < g_3(\underline{x}) < g_2(\underline{x}) \longrightarrow$$ کلاس نقطه‌ی داده شده 2 است

b) مکان هندسی نقاط خواسته شده تمامی بیضی‌هایی هستند که x,y آن‌ها برابر مقدار زیر است :

$$d_m(x,y|\Sigma) = \sqrt{\begin{bmatrix} x-2.1 & y-1.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-2.1 \\ y-1.9 \end{bmatrix}}$$

به کد ضمیمه شده برای این سؤال مراجعه کنید .

2.10.

$$l_{12} \equiv \frac{P(\underline{x}|\omega_1)}{P(\underline{x}|\omega_2)} >(<)\ \theta$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^l |\Sigma_1|}} e^{-\frac{1}{2}\overbrace{((\underline{x}-\underline{\mu}_1)^T \Sigma_1^{-1} (\underline{x}-\underline{\mu}_1))}^{d_m^2(\underline{\mu}_1,\underline{x}|\Sigma_1)}}}{\dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^l |\Sigma_2|}} e^{-\frac{1}{2}\underbrace{((\underline{x}-\underline{\mu}_2)^T \Sigma_2^{-1} (\underline{x}-\underline{\mu}_2))}_{d_m^2(\underline{\mu}_2,\underline{x}|\Sigma_2)}}} >(<)\ \theta$$

$$\xrightarrow[\text{از هر دو طرف}]{\ln} \ln\left[\sqrt{\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|}}\, e^{-\frac{1}{2}(d_m^2(\underline{\mu}_1,\underline{x}|\Sigma_1) - d_m^2(\underline{\mu}_2,\underline{x}|\Sigma_2))}\right] >(<)\ \ln\theta$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|} - \frac{1}{2}\left[d_m^2(\underline{\mu}_1,\underline{x}|\Sigma_1) - d_m^2(\underline{\mu}_2,\underline{x}|\Sigma_2)\right] >(<)\ \ln\theta$$

$$\xrightarrow[\text{جهت نامساوی‌ها عوض می‌شود}]{\times(-2)} \boxed{d_m^2(\underline{\mu}_1,\underline{x}|\Sigma_1) - d_m^2(\underline{\mu}_2,\underline{x}|\Sigma_2) + \ln\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|} <(>) -2\ln\theta}$$

2.12.

$$(a).\quad l_{12} \equiv \frac{P(\underline{x}|\omega_1)}{P(\underline{x}|\omega_2)} >(<)\ \cancel{\frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}\,\frac{\lambda_{21}-\lambda_{22}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}}}^{\,1}$$

$$l_{12} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^T(x-\mu_1)\right)}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^T(x-\mu_2)\right)}} = \cancel{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}^{\,1} e^{\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^T(x-\mu_1) + \frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^T(x-\mu_2)\right)} >(<)\ 1$$

$$\xrightarrow{\ln} \frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\mu_2)^T(x-\mu_2) - (x-\mu_1)^T(x-\mu_1)\right] >(<)\ \ln 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\times 2\sigma^2} (x-\mu_2)^T(x-\mu_2) - (x-\mu_1)^T(x-\mu_1) >(<)\ 0$$

$\rightarrow x^T(\mu_1-\mu_2)+(\mu_1-\mu_2)^T x \;>(<)\; \|\mu_1\|^2-\|\mu_2\|^2$

$\rightarrow A + A^T \;>(<)\; \theta$; $A = x^T(\mu_1-\mu_2)$, $\theta = \|\mu_1\|^2 - \|\mu_2\|^2$

(b) $l_r \;>(<)\; \frac{\lambda_{21}-\lambda_{22}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}} = 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\mu_2)^T(x-\mu_2)-(x-\mu_1)^T(x-\mu_1)\right] >(<) \ln 2$

$\Rightarrow (x-\mu_2)^T(x-\mu_2) - (x-\mu_1)^T(x-\mu_1) >(<) 2\sigma^2\ln 2$

$\Rightarrow A + A^T \;>(<)\; \theta$; $A = x^T(\mu_1-\mu_2)$, $\theta = \|\mu_1\|^2-\|\mu_2\|^2+2\sigma^2\ln 2$

برای مشاهده‌ی نتایج آزمایشات خواسته شده به کد ضمیمه شده برای این سوال مراجعه کنید.

سمت دوم:

: مسئله 1

a) $l_1 = \lambda_{11}\, p(\underline{x}|\omega_1)P(\omega_1) + \lambda_{21}\, p(\underline{x}|\omega_2)P(\omega_2)$

$l_2 = \lambda_{12}\, p(\underline{x}|\omega_1)P(\omega_1) + \lambda_{22}\, p(\underline{x}|\omega_2)P(\omega_2)$

BME $\rightarrow \lambda_{ki}$ = kronecker's delta

$\rightarrow l_1 = p(\underline{x}|\omega_1)P(\omega_1)$, $l_2 = p(\underline{x}|\omega_2)P(\omega_2)$ $\xrightarrow[\text{classes}]{\text{equiprobable}}$ $l_1 = p(\underline{x}|\omega_1)$, $l_2 = p(\underline{x}|\omega_2)$ $\Big|$ $l_1 > l_2 \rightarrow R_1$, $l_2 > l_1$

b) solve $l_1 = l_2$ from (a) w.r.t $x - x_0$:

$$l_1 = l_2 \Rightarrow \cancel{\frac{1}{\pi b}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x_0-a_1}{b}\right)^2} = \cancel{\frac{1}{\pi b}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x_0-a_2}{b}\right)^2} \quad ; \; a_2 > a_1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_0-a_1}{b}\right)^2 - \left(\frac{x_0-a_2}{b}\right)^2 = 0 \xrightarrow{b \neq 0} (x_0-a_1)^2 - (x_0-a_2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x_0 - a_1 - x_0 + a_2)(x_0 - a_1 + x_0 - a_2) = 0 \Rightarrow (a_2 - a_1)(2x_0 - a_1 - a_2) = 0$$

$(a_2 - a_1) \geq 0$ because we knew $a_2 > a_1 \Longrightarrow 2x_0 = a_1 + a_2 \longrightarrow x_0 = \frac{a_1+a_2}{2}$, $x > x_0 \rightarrow R_1$, $x < x_0 \rightarrow R_2$

(چون $l_1 - l_2 = 0$ را حل کردیم)

$$c)\; P_e = P(\omega_1)\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{\pi b}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x_0-a_1}{b}\right)^2} + P(\omega_2)\int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{\pi b}\cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x_0-a_2}{b}\right)^2}$$

first we integrate $\int \frac{1}{\pi b}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x_0-a_i}{b}\right)^2}dx = I$: $I = \frac{1}{\pi b}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x_0-a_i}{b}\right)^2}dx$ $\xrightarrow[\frac{x_0-a_i}{b}=u]{\text{تغییر متغیر}}$

$$I = \frac{1}{\pi b}\int \frac{1}{1+u^2}d(ub+a_i) = \frac{1}{\pi b}\int \frac{1}{1+u^2}\, b\, du = \frac{1}{\pi}\arctan(u) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x_0-a_i}{b}\right)$$

$$\rightarrow P_e = P(\omega_1)\cdot\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x_0-a_1}{b}\right)\right]_{x_0}^{+\infty} + P(\omega_2)\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x_0-a_2}{b}\right)\right]_{-\infty}^{x_0}$$

$P(\omega_1) = P(\omega_2) = P$

$$= \frac{P}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{a_2-a_1}{2b}\right)\right) + \frac{P}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{a_1-a_2}{2b}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{P}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \underbrace{\arctan\left(\frac{a_2-a_1}{2b}\right) + \arctan\left(\frac{a_1-a_2}{2b}\right)}_{\rightarrow 0} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{P}{\pi}(\pi) = \boxed{P}$$

d) a') $l_1 = p(\underline{x}|w_1)P(w_1)$

$l_2 = p(\underline{x}|w_2)P(w_2)$

$\longrightarrow l_{12} \equiv \dfrac{p(\underline{x}|w_1)}{p(\underline{x}|w_2)}$ Compare with threshold $= \dfrac{P(w_2)}{P(w_1)} = \dfrac{2/3}{1/3} = 2$

$\rightarrow l_{12} > 2 \rightarrow R1$

$l_{12} < 2 \rightarrow R2$

b') solve $l_{12} = 2$ from a' for $x = x_0$:

$$\frac{p(\underline{x}|w_1)}{p(\underline{x}|w_2)} = \frac{\frac{1}{\pi b}\cdot\frac{1}{1+(\frac{x_0-a_1}{b})^2}}{\frac{1}{\pi b}\cdot\frac{1}{1+(\frac{x_0-a_2}{b})^2}} = \frac{1+(\frac{x_0-a_2}{b})^2}{1+(\frac{x_0-a_1}{b})^2} = 2 \rightarrow 1+(\frac{x_0-a_2}{b})^2 = 2+2(\frac{x_0-a_1}{b})^2$$

$$\Rightarrow b^2+(x_0-a_2)^2 = 2b^2+2(x_0-a_1)^2 \Rightarrow 2(x_0-a_1)^2-(x_0-a_2)^2+b^2=0$$

$$\Rightarrow 2x_0^2-4x_0a_1+2a_1^2-x_0^2+2x_0a_2-a_2^2+b^2=0$$

$$\Rightarrow x_0^2+\underbrace{(-4a_1+2a_2)}_{B}x_0+\underbrace{(2a_1^2-a_2^2+b^2)}_{C}=0 \rightarrow x_0 = \frac{-B\pm\sqrt{B^2-4C}}{2}$$

$$x_0^2+Bx_0+C=0 \xrightarrow{\text{مشتق اول}} 2x_0+B \xrightarrow{\text{مشتق دوم}} 2 \longrightarrow$$

جهت تقعر رو به بالا

$$\begin{cases} x_0 > \dfrac{-B+\sqrt{B^2-4C}}{2} \cup x_0 < \dfrac{-B-\sqrt{B^2-4C}}{2} \longrightarrow R1 \Leftarrow \\ \dfrac{-B-\sqrt{B^2-4C}}{2} < x_0 < \dfrac{-B+\sqrt{B^2-4C}}{2} \longrightarrow R2 \end{cases}$$

e) $l_{12} = \dfrac{p(\underline{x}|w_1)}{p(\underline{x}|w_2)}$ Compare with $\dfrac{P(w_2)}{P(w_1)}\dfrac{\lambda_{21}-\lambda_{22}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}} = \dfrac{1/4}{3/4}\cdot\dfrac{2-0}{1-0} = \dfrac{2}{3}$

برای محاسبه مرز تصمیم‌گیری دقیقاً مانند قسمت d عمل می‌کنیم.

f) first we need to determine the decision boundary:

$$\frac{p(\underline{x}|w_2)}{p(\underline{x}|w_1)} = \frac{1+(\frac{x_0-a_2}{b})^2}{1+(\frac{x_0-a_1}{b})^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1+(x_0-4)^2}{1+(x_0-1)^2} = \frac{2}{3} \rightarrow 3+3(x_0-4)^2 = 2+2(x_0-1)^2$$

$$\Rightarrow 3(x_0-4)^2-2(x_0-1)^2+1=0 \Rightarrow$$

$$3x_0^2 - 24x_0 + 48 - 2x_0^2 + 4x_0 - 2 + 1 = 0 \Rightarrow x_0^2 - 20x_0 + 47 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{01} = 10-\sqrt{53} \\ x_{02} = 10+\sqrt{53} \end{cases}$$

$$R(\alpha_1|\underline{x}) = \cancel{\lambda_{11}\int_{R_1} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(x-1)^2}dx} \xrightarrow{} 0 + \lambda_{12}\int_{R_2} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(x-1)^2}dx$$

$$= \int_{R_2} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(x-1)^2}dx = \frac{1}{\pi}\Big[\mathrm{Arctan}\,(x-1)\Big]_{10-\sqrt{53}}^{10+\sqrt{53}} \approx 0.148$$

$$R(\alpha_2|\underline{x}) = \lambda_{21}\int_{R_1} p(\underline{x}|\omega_2)dx + \cancel{\lambda_{22}\int_{R_2} p(\underline{x}|\omega_2)\,d\underline{x}} = \lambda_{21}\int_{R_1} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(x-4)^2}dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{10-\sqrt{53}} \frac{1}{1+(x-4)^2}dx + \int_{10+\sqrt{53}}^{+\infty} \frac{1}{1+(x-4)^2}dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\Big[\mathrm{Arctan}\,(x-4)\Big]_{-\infty}^{10-\sqrt{53}} + \Big[\mathrm{Arctan}\,(x-4)\Big]_{10+\sqrt{53}}^{+\infty}\right)$$

$$\approx 0.47$$

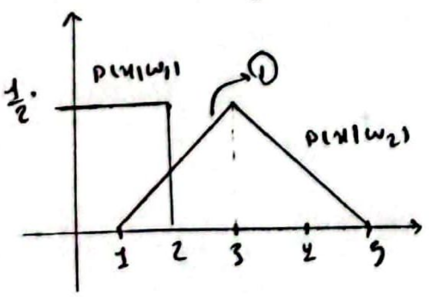
مسئله 2 :

a) برای یافتن BME باید $l_1 = l_2$ قرار دهیم تا حد آستانه مشخص شود:

$$l_1 = p(\omega_1)\,p(\underline{x}|\omega_1) \xrightarrow{l_1=l_2} 0.2\,p(\underline{x}|\omega_1) = 0.8\,p(\underline{x}|\omega_2)$$

$$l_2 = p(\omega_2)\,p(\underline{x}|\omega_2)$$

برای یافتن نقطه‌ی تقاطع نمودار و با توجه به شکل دو نمودار مشخص است نیاز scale کردن ($p(\underline{x}|\omega_1)$ با 0.2 و $p(\underline{x}|\omega_2)$ با 0.8 ، خط ① از نمودار $p(\underline{x}|\omega_2)$ یا با قسمت عمودی و یا با قسمت افقی $p(x|\omega_1)$ تقاطع خواهد داشت. بنابراین برای یافتن نقطه‌ی تقاطع معادله‌ی زیر را حل می‌کنیم:



معادله‌ی خط ①: $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

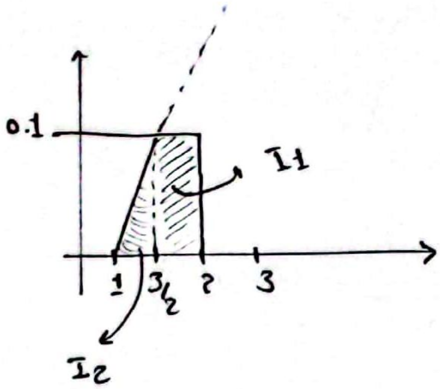
$\frac{1}{2} \times 0.2$ = معادله‌ی خط ① برحسب x

$$\Rightarrow y - 0 = \frac{0.8\times\frac{1}{2} - 0}{3-1}(x-1)$$

$$\Rightarrow y = 0.2x - 0.2$$

$\Rightarrow 0.1 = 0.2x - 0.2 \Rightarrow 0.2x = 0.3 \Rightarrow x = 1.5 < 2 \longrightarrow$ با قسمت افقی $p(x|\omega_1)$ تداخل دارد ⇐ نقطه‌ی آستانه ⇐ $\boxed{x_0 = \frac{3}{2}}$

$$\rightarrow \begin{array}{l} x > x_0 \rightarrow \omega_2 \\ x < x_0 \rightarrow \omega_1 \end{array}$$



b) یافتن خطای BME:

$$P_e = P(\omega_1)\underbrace{\int_{x_0}^{+\infty} p(x|\omega_1)\,dx}_{I_1} + P(\omega_2)\underbrace{\int_{-\infty}^{x_0} p(x|\omega_2)\,dx}_{I_2}$$

$$= 0.2 \times (0.5 \times 0.1) + 0.8 \times \left(\frac{0.5 \times 0.1}{2}\right)$$

$$= 0.01 + 0.02 = \underline{0.03}$$

c) برای پیدا کردن خطای BMR مشابه (a) عمل می‌کنیم و $l_1 = l_2$ قرار می‌دهیم:

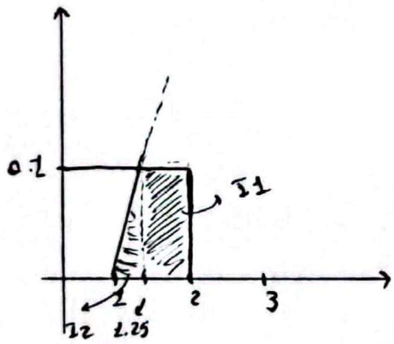
$$l_1 = \cancel{\lambda_{11}\, p(\underline{x}|\omega_1) P(\omega_1)} + \lambda_{21}\, p(\underline{x}|\omega_2) P(\omega_2) = 2 \times 0.8 \times p(\underline{x}|\omega_2) = 1.6\, p(\underline{x}|\omega_2)$$

$$l_2 = \lambda_{12}\, p(\underline{x}|\omega_1) P(\omega_1) + \cancel{\lambda_{22}\, p(\underline{x}|\omega_2) P(\omega_2)} = 0.2\, p(\underline{x}|\omega_1)$$

اکنون هم بر دلیل معادله‌ی خط بست ① از نمودار $p(\underline{x}|\omega_2)$ را بدست می‌آوریم و با 0.1 تقاطع می‌دهیم:

$$y - 0 = \left(\frac{1.6 \times \frac{1}{2} - 0}{3 - 1}\right)(x - 1) \Rightarrow y = 0.4x - 0.4 \Rightarrow 0.1 = 0.4x_0 - 0.4 \Rightarrow x_0 = 1.25 \;\left(= \frac{5}{4}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x < x_0 \rightarrow \omega_1 \\ x > x_0 \rightarrow \omega_2 \end{cases}$$



d) با توجه به نمودار روبه‌رو داریم:

$$R(\alpha_1|\underline{x}) = \lambda_{12} \underbrace{\int_{R_2} p(\underline{x}|\omega_1)\,dx}_{I_1} = 0.75 \times 0.1 = \underline{0.075}$$

$$R(\alpha_2|\underline{x}) = \lambda_{21} \underbrace{\int_{R_1} p(\underline{x}|\omega_2)\,dx}_{I_2} = 2 \times \frac{0.25 \times 0.1}{2} = \underline{0.025}$$

e)

$$R = P(\omega_1) R(\alpha_1|\underline{x}) + P(\omega_2) R(\alpha_2|\underline{x})$$

$$= 0.2 \times 0.075 + 0.8 \times 0.025 = \underline{0.035}$$

مسئله‌ی 3 . a)

$$R(\alpha_i|x) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}\, p(\omega_j|x) \quad ; \quad i=1,2$$

Risk = Expected Loss

$$R(\alpha_3|x) = \frac{1}{2}(\lambda_{31}+\lambda_{32}) = b$$

$$R(\alpha_1|x) = a\,p(\omega_2|x) = a(1-p(\omega_1|x))$$

$$R(\alpha_2|x) = a\,p(\omega_1|x) = a(1-p(\omega_2|x))$$

b) باید عمل با کمترین میزان ریسک انتخاب شود. بنابراین فقط وقتی rejection می‌زنیم که:

$$b < a(1-p(\omega_i|x)) \quad ; \quad \forall i = 1,2$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} < (1-p(\omega_i|x)) \rightarrow \frac{b}{a} - 1 < -p(\omega_i|x) \rightarrow \boxed{p(\omega_i|x) < 1 - \frac{b}{a}} \quad ; \quad \forall i = 1,2$$

← بنابراین اگر تمامی احتمالات پسین از یک حد آستانه کمتر بودند، عمل rejection را انجام می‌دهیم. در غیر این صورت عمل i را انتخاب می‌کنیم که:

$$a(1-p(\omega_i|x)) < a(1-p(\omega_j|x)) \quad ; \quad \forall i,j = 1,2 \quad i \neq j$$

که برای مسئله‌ی فعلی داریم:

$$\underbrace{1-p(\omega_1|x) < 1-p(\omega_2|x)}_{\hookrightarrow\ p(\omega_2|x) < p(\omega_1|x)} \longrightarrow \text{اکشن } 1$$

$$\underbrace{1-p(\omega_2|x)}_{p(\omega_1|x)} < \underbrace{1-p(\omega_1|x)}_{p(\omega_2|x)} \longrightarrow \text{اکشن } 2$$

← بنابراین کلاس با بزرگترین احتمال پسین انتخاب می‌شود.
عمل متناظر