MANTIK MATEMATİĞİ

Mantık Matematiğinin tarifi

- İngiliz bilim adamı George Boole 1850'li yıllarda sadece iki durumda bulunabilen (Doğru veya Yanlış, Evet veya Hayır v.b) mantıksal önermelerin, sembollerle gösterilebilen mantıksal operatörler kullanarak cebirsel eşitlikler veya deyimler şeklinde ifade edilebileceğini göstermiştir. Böylece kendine has kuralları olan mantık matematiğinin temeli oluşturulmuştur. Buna Boole Cebri denir.
- 1940'lı yıllarda ise Amerikalı bir Elektrik Mühendisi olan Claude Shannon , tamamen 2 tabanlı Sayılara dayalı Boole Cebrindeki veya Mantık matematiğinde kullanılan operatörlerin fonksiyonlarını ve cebrik denklemleri elektronik devreler kullanarak elektriksel işaretlerle ifade etmeyi sağlayan bir düzenleme yapmıştır. Buna ***ikili Boole cebri***, ***şalt cebri (Switching algebra)***'de denir. Bu kitapta sayısal devreler için önemli olan ikili Boole cebri üzerinde durulacaktır. İkili Boole cebrinde değişmezler kümesi olarak K ={0,1} alınır, + ve . işaretleri ise mantıksal toplama ve mantıksal çarpma işlemlerini ifade edecektir. – sembolü ise tekli mantıksal değil işlemini gösterecektir [R].
- Sayısal elektroniği oluşturan devre elemanlarının temel hammaddesi tabiatta en fazla bulunan silisyum olduğuna göre ve bu konudaki akademik çalışmalar da devam edeceğine göre, günümüzde sayısal elektronikteki gelişmenin, en üst sınırın henüz yarısına bile erişemediği kolaylıkla söylenebilir.

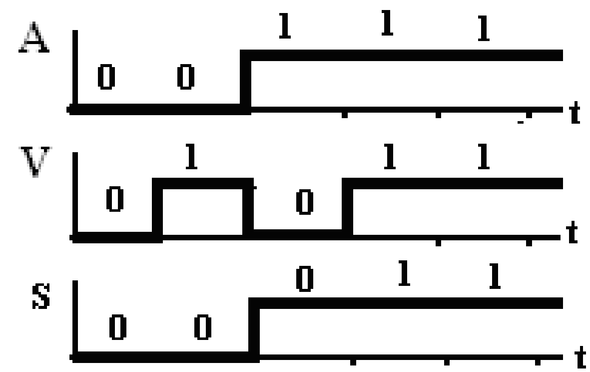
Mantıksal İşlemler (Operatörler)

- **VE (AND) İşlemi (Mantıksal Çarpma, Kesişim):** İki veya daha fazla mantıksal veriyi biribirine bağlayarak bir önerme oluşturur. Bu önerme sadece bağlanan veriler doğru olduğu zaman doğrudur. Diğer durumlarda sonuç yanlıştır. Örnek, ***"Ali VE Veli gelirse giderim"*** mantıksal cümlesini, cebirsel eşitlik halinde ifade edebilmek için aşağıdaki tanımlamalar yapılırsa;
- *Ali'nin gelmesi → 1 (Evet, Doğru, Olumlu)*
- *Ali'nin gelmemesi → 0 (Hayır, Yanlış, Olumsuz)*
- *Veli'nin gelmesi → 1 (Evet, Doğru, Olumlu)*

  Veli'nin gelmemesi → 0 (Hayır, Yanlış, Olumsuz)
- *Giderim → 1 (Evet, Doğru, Olumlu)*
- *Gidemem → 0 (Hayır, Yanlı, Olumsuz)*

İki girişli VE bağlacının Tanım (Doğruluk) Tablosu

A	V	S		
0	0	0	Ali gelmedi, Veli gelmedi;	gidemem
0	1	0	Ali gelmedi, Veli geldi;	gidemem
1	0	0	Ali geldi, Veli gelmedi;	gidemem
1	1	1	Ali geldi, Veli geldi;	giderim



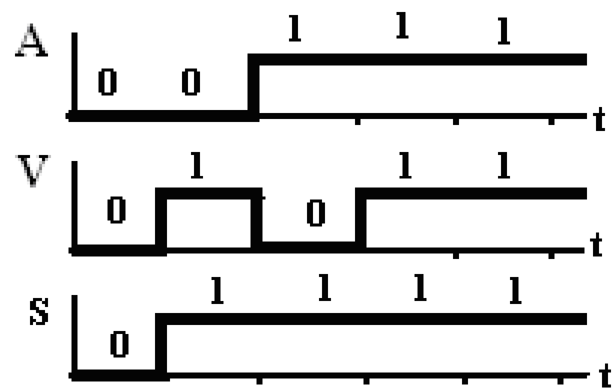
İki girişli VE bağlacının Fonksiyon Denklemi;

$S = A \bullet V$
$S = A \wedge V$
$S = A \cap V$

- **<u>VEYA (OR) İşlemi (Mantıksal Toplama, Birleşim):</u>**İki veya daha fazla mantıksal veriyi birbirine bağlayarak bir önerme (cebirsel eşitlik) oluşturur. Öyle ki tüm verilerden sadece bir tekinin bile doğru olması sonucun doğru olması için yeterlidir. Örneğin *" Ali **VEYA** Veli gelirse giderim"* mantıksal tümcesini cebirsel eşitlik haline getirelim:
- *Ali'nin gelmesi → 1 (Evet, Doğru, Olumlu)*
- *Ali'nin gelmemesi → 0 (Hayır, Yanlış, Olumsuz)*
- *Veli'nin gelmesi → 1 (Evet, Doğru, Olumlu)*
- *Veli'nin gelmemesi → 0 (Hayır, Yanlış, Olumsuz)*
-
- *Giderim → 1 (Evet, Doğru, Olumlu)*
- *Gidemem → 0 (Hayır, Yanlı, Olumsuz)*

İki girişli VEYA bağlacının tanım (doğruluk) tablosu

A	V	S		
0	0	0	Ali gelmedi, Veli gelmedi;	gidemem
0	1	1	Ali gelmedi, Veli geldi;	giderim
1	0	1	Ali geldi, Veli gelmedi;	giderim
1	1	1	Ali geldi, Veli geldi;	giderim



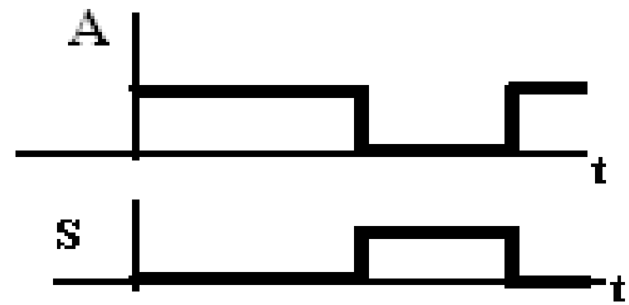
İki girişli VEYA bağlacının fonksiyon denklemi

$$S = A + V$$
$$S = A \vee V$$
$$S = A \cup V$$

- **<u>Değil (NOT) İşlemi (Tümleme İşlemi):</u>** Tek girişli tek çıkışlı bir bağlaçtır. Girişine verilen mantıksal değişkenin tersini alır. Yani giriş olumlu ise çıkış olumsuzdur veya tersidir. Örneğin **"Ali gelirse gitmem**" cümlesini eşitlik halinde göstermek için Değil bağlacının tanım tablosu ve fonksiyon denklemi aşağıda verilmiştir.

Değil bağlacının tanım tablosu

A	S		
0	1	Ali gelmedi	giderim
1	0	Ali geldi	gidemem



Değil bağlacının fonksiyon denklemi

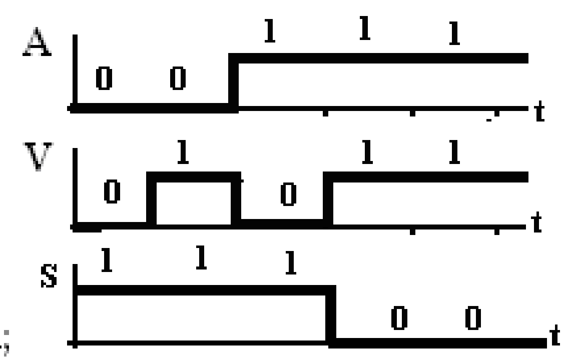
$S = A'$

$S = \overline{A}$

- **<u>VE-DEĞİL (NAND) İşlemi:</u>** Bu bağlaç VE bağlacının çıkışının tersinin(değilinin) alınması işlemidir. Örneğin ***“Ali Ve Veli gelirse gitmem”*** cümlesinin mantık matematiğindeki ifadesini açıklayalım. Ali ile Veli değişkenlerinin alabilecekleri değerler yukarıda açıklandığı gibidir. Buna göre bu ifadeyi tanımlayan doğruluk tablosu ve fonksiyon denklemi aşağıdaki gibi verilebilir.

İki girişli VE-DEĞİL bağlacının Tanım (Doğruluk) Tablosu

A	V	S		
0	0	1	Ali gelmedi, Veli gelmedi;	giderim
0	1	1	Ali gelmedi, Veli geldi;	giderim
1	0	1	Ali geldi, Veli gelmedi;	giderim
1	1	0	Ali geldi, Veli geldi;	gidemem



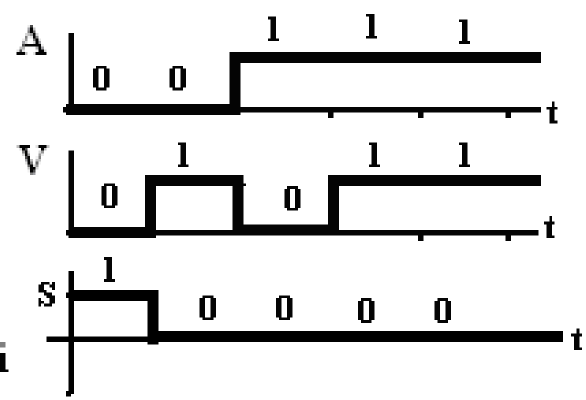
İki girişli VE-DEĞİL bağlacının Fonksiyon Denklemi;

$$S = \overline{A \bullet V} = (A\ .\ V)' = A \uparrow V$$
$$S = \overline{A \wedge V}$$
$$S = \overline{A \cap V}$$

- **<u>VEYA-DEĞİL (NOR) İşlemi:</u>** Bu bağlaç VEYA bağlacı çıkışının tersinin alınması işlemidir. Örneğin ***"Ali Veya Veli gelirse gitmem"*** mantıksal cümlesini karşılayan 2 girişli VEYA-DEĞİL bağlacının tanım tablosu ve fonksiyon denklemi aşağıdaki gibidir

İki girişli VEYA-DEĞİL bağlacının tanım (doğruluk) tablosu

A	V	S		
0	0	1	Ali gelmedi, Veli gelmedi;	giderim
0	1	0	Ali gelmedi, Veli geldi;	gidemem
1	0	0	Ali geldi, Veli gelmedi;	gidemem
1	1	0	Ali geldi, Veli geldi;	gidemem



İki girişli VEYA-DEĞİL bağlacının fonksiyon denklemi

$$S = \overline{A + V} = (A+V)' = A \downarrow V$$

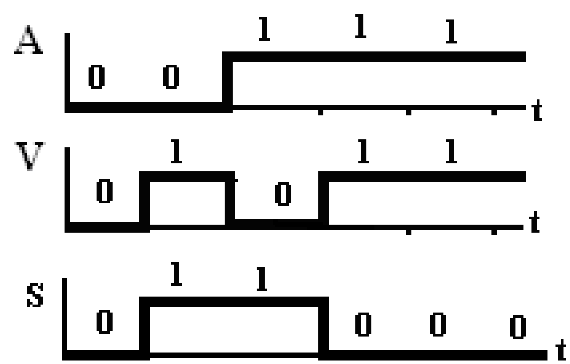
$$S = \overline{A \vee V}$$

$$S = \overline{A \cup V}$$

- **Özel –VEYA İşlemi (Exlucive- OR, EX-OR):** Ana bağlaçların kombinasyonundan oluşmuştur. İki veya daha fazla girişi olabilir. Çıkışın Doğru (Evet, Olumlu, 1) olabilmesi için girişlerin farklı olması gerekir.

İki girişli EX-OR bağlacının tanım tablosu

A	V	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



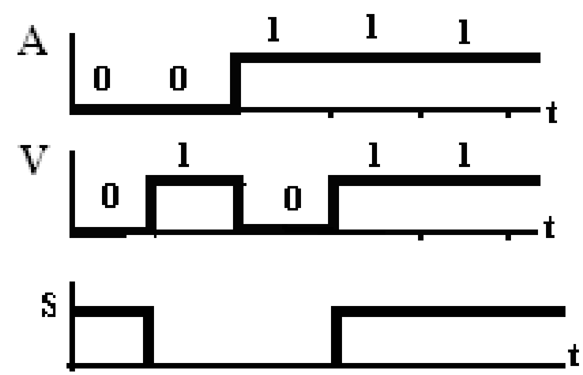
İki girişli EX-OR bağlacının fonksiyon denklemi

$$S = A \oplus V = \overline{A}.V + A.\overline{V}$$

- **<u>Özel –VEYA-DEĞİL İşlemi (Exlucive- NOR, EX-NOR):</u>** İki veya daha fazla giriş olabilir. Çıkışın olumlu (Doğru, Evet,1) olması için girişlerin aynı anda biribirine eşit olması gerekir.

İki girişli EX- NOR bağlacının tanım tablosu

A	V	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



İki girişli EX- NOR bağlacının fonksiyon denklemi

$S = A \odot V = \overline{A}.\overline{V} + A.V$

Temel Tanımlamalar

$1' = 0$ (1.a)	$0 + 0 = 0$ (2.a)	$1 + 1 = 1$ (3.a)	$0 + 1 = 1 + 0 = 1$ (4.a)
$0' = 1$ (1.b)	$1 . 1 = 1$ (2.a)	$0 . 0 = 0$ (3.a)	$0 . 1 = 1 . 0 = 0$ (4.a)

Mantık Matematiğinde tanımlar, özellikler ve temel kuralları

- Sayısal sistemler için önemli olan İkili Boole Cebri (Anahtarlama- Şalt Cebri) olduğundan bunda sonra, *Boole Cebri* teriminden *İkili Boole Cebri* veya *Mantık Matematiği* deyimi anlaşılmalıdır.
- Boole Cebri ile normal Cebir'in bazı özellikleri karşılaştırıldığında;
- Boole CebrindeBölme ve Çıkarma işlemi yoktur.
- Boole Cebrindeki her elemanın kendisi ve Tümleyeni vardır. Normal cebirde tümleme yoktur.
- Boole Cebrinde sadece 0,1 elemanları olduğu halde, normal cebir $-\infty$, $+\infty$ arasındaki sayılara uygulanabilir.
- **$X1 + (X2.X3) = (X1+X2).(X1+X3)$** İşlemi normal cebirde geçerli değildir.

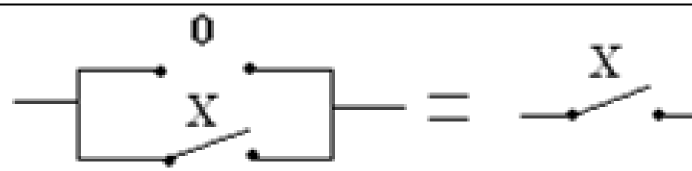
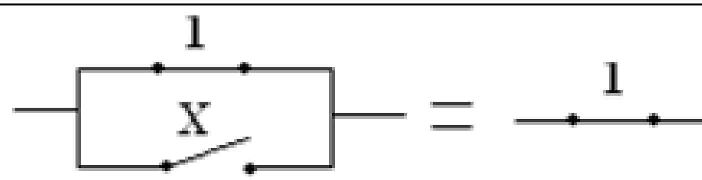
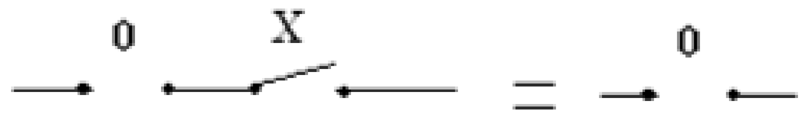
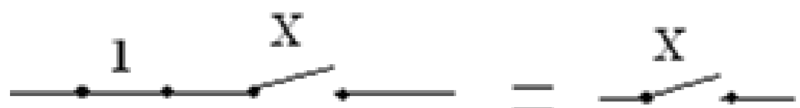
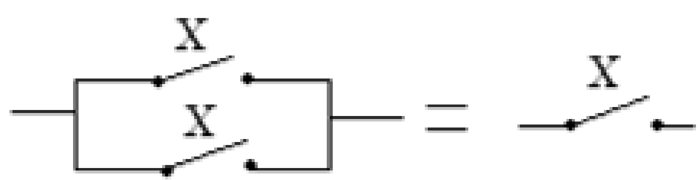
Aksiyomlar ve özellikler

- **Düalite (Karşıtlık) özelliği:** Herhangi bir Boole eşitliğinde, lojik toplamın yerine (+), lojik çarpım (.), veya çarpımın yerine toplam, toplamın yerine çarpım konularak veya sabitelerden 0 yerin 1, 1 yerine 0 konularak elde edilen yeni eşitliğe birinci eşitliğin dualitesi (Karşıtı) alınmıştır denir. Eğer ilk eşitlik doğruysa, düali olan 2.eşitlikte doğrudur. Örneğin;
- **X + X’ = 1 eşitliğinin duali X.X’ = 0’dır.**

- **Komutatiflik (Yer değiştirebilme) kuralı:**
- **X . Y = Y . X (A1.a)**
- **X + Y = Y + X (A1.b)**
- **Assosiyatiflik (Birleşebilme) kuralı:**
- **X1 . X2 . X3 = (X1 . X2) .X3 = (X1 . X3) . X2 (A2.a)**
- **X1 +X2 + X3 = (X1 + X2) + X3 = (X1 + X3) + X2 (A2.b)**

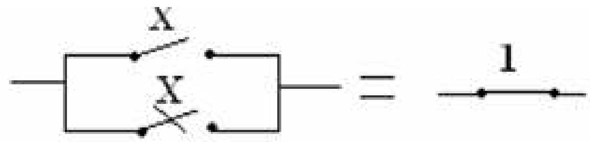
- **Distrübütivlik (Dağılma) Kuralı:**
- **X1 . (X2 + X3) = X1 . X2 + X1 . X3 (A3.a)**
- **X1 + (X2 . X3) = (X1 + X2) . (X1 + X3) (A3.b)**
  (Normal cebirde bu geçerli değil)

Teoremler

1	**X + 0 = X (T1.a)**	
	X + 1 = 1 (T1.b)	
2	**Yutma özelliği** **X . 0 = 0 (T2.a)**	
	X . 1. = X (T2.b)	
3	**Sabit kuvvetlilik teoremi** **X + X = X (T3.a)** **X . X = X (T3.b)**	

4 Tümleme teoremi

$X + X' = 1$ (T4.a)



$X . X' = 0$ (T4.b)

5 Dönüşüklülük teoremi

$(X')' = X$

6 DE-Morgan Teoremleri

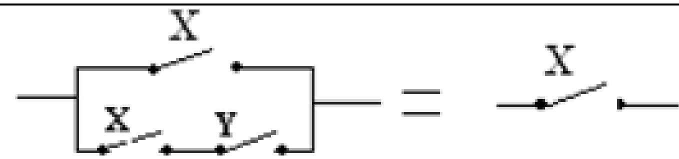
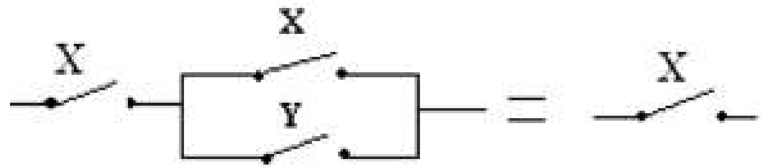
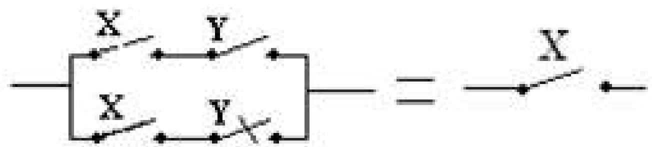
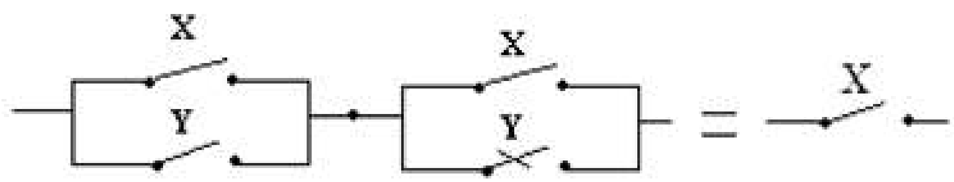
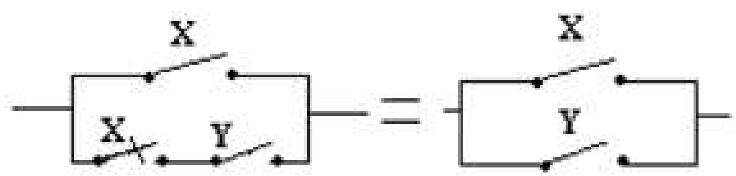
En az 2 değişkenin lojik toplamlarının tümleyeni, değişkenlerin tümleyenlerinin (terslerinin) lojik çarpımına eşittir. (D.M.1)

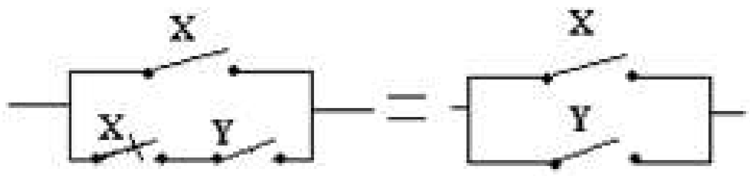
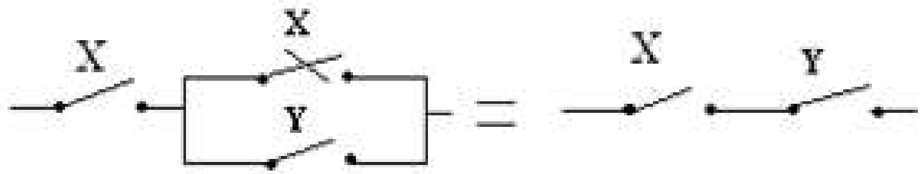
En az 2 değişkenin lojik çarpımlarının tümleyeni, değişkenlerin tümleyenlerinin (terslerinin) lojik toplamına eşittir. (D.M.2)

X1	X2	$\overline{\overline{X1.X2}}$	$\overline{X1.X2}$	$\overline{\overline{X1+X2}}$	$\overline{X1+X2}$	$\overline{X1}$	$\overline{X2}$	$\overline{X1}.\overline{X2}$	$\overline{X1}+\overline{X2}$
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0	0	0

$$\overline{X1 . X2} = \overline{X1} + \overline{X2} \quad \text{D.M.1}$$

$$\overline{X1 + X2} = \overline{X1} . \overline{X2} \quad \text{D.M.2}$$

7	**X + X.Y = X (T7a)**	
	X .(X+Y)= X (T7b)	
8	**X.Y+X.Y'=X (T8a)**	
	(X+Y).(X+Y')=X (T9b)	
9	**X+X'Y = X+Y 9a**	

9	**$X+X'Y = X+Y$ 9a**	
	$X.(X'+Y) = X.Y$ 9b	
10	**Biform kareler konsensüslerini yutarlar.** **$E_1. x + E_2.x' + E_1.E_2 = E_1 x + E_2 x'$** **$(E_1+x).(E_2 + x').(E_1+E2) = (E_1+x).(E_2+x')$**	İlgili tanımlar Bölüm4.3'dedir.
11	**Biform kareler arasında dönüşüm özelliği** **$x.E_1+x'E_2 = (x+E_2)(x'+E_1)$**	İlgili tanımlar Bölüm 4.3'dedir.

İspatlar

DE-Morgan Teoremlerinin ispatı: İki durumlu boole cebrinin özelliğinden dolayı bir ispat şekli de; eşitlikteki değişkenlerin alabilecekleri değerlere göre eşitliği sağındaki ve solundaki terimlerin alacakları değer bir tablo halinde oluşturulur. Her durum için eşitliğin sağı ve solu biri birine eşit ise teorem doğrulanmış olur..

$X1$	$X2$	$\overline{\overline{X1.X2}}$	$\overline{X1.X2}$	$\overline{\overline{X1+X2}}$	$\overline{X1+X2}$	$\overline{X1}$	$\overline{X2}$	$\overline{X1}.\overline{X2}$	$\overline{X1}+\overline{X2}$
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0	0	0

$$\overline{X1 \,.\, X2} = \overline{X1} + \overline{X2} \quad \text{D.M.1}$$

$$\overline{X1 + X2} = \overline{X1} \,.\, \overline{X2} \quad \text{D.M.2}$$

Değişik Teoremlerin İspatı

- $\underline{X + X.Y = X} \rightarrow X(1+Y) = X.1 = X$ T7a
- $\underline{X.(X+Y) = X} \rightarrow X.X + X.Y = X + X.Y = X$ T7b

- $\underline{X.Y+X.Y'=X} \rightarrow X(Y+Y') = X.1 = X$ T8a

- $\underline{(X+Y).(X+Y') = X} \rightarrow X.X + X.Y' + Y.X + Y.Y'$ T8b

  $= X + X.Y' + Y.X + 0$

  $= X(1+Y'+Y) = X.1 = X$

- $\underline{X+X'Y = X+Y} \rightarrow X + X.Y + X'Y$ T9a
- $= X + Y(X+X')$

  $= X + Y.1 = X + Y$

- $\underline{X.(X'+Y) = X.Y} \rightarrow X.X' + X.Y = 0 + X.Y = X.Y$ T9b

Örnek Uygulamalar

- **1-** A’.B + A.B +A’.B’ = B + A’ **eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz**.
- **Çözüm:** Bu tür uygulamalarda eşitliğin sol tarafında işlem yapılarak sağ tarafa eşit olduğu gösterilir.

  A’(B +B’) + A.B = A’.1 + A.B

  = A’ + A.B = A’+ B ‘dir. (Teorem 9a’dan)
- **2-** Ç = [A.(B+C) . (B’+C’) + A’.B’ . (A+C)] **eşitliğini daha kısa olarak ifade ediniz.**

  Ç = [(A.B + A.C). (B’+C’)+ A’.B’.A + A’.B’.C]

  Ç= [A.B.B’+A.B.C’+A.C.B’+A.C.C’+A’B’A + A’B’.C]

  Ç= [0 + A.B.C’ + A.B’.C + 0 + A’.B’.C] = A.B.C’ + B’.C (A+A’)

  Ç= A.B.C’ + B’.C.1

  Ç= A.B.C’ + B’.C
- **3-** Ç = A.B+A’.C.D+A’.B.D+A’.C.D’+A.B.C.D **eşitliğini daha kısa olarak ifade ediniz.**

  Ç = AB+ABCD+A’C(D+D’)+A’BD = AB(1+CD)+A’C.1+A’BD

  Ç=AB+A’C+A’BD = AB+A’C+A’BD = B(A+A’D) + A’C

  = B(A+D)+A’C

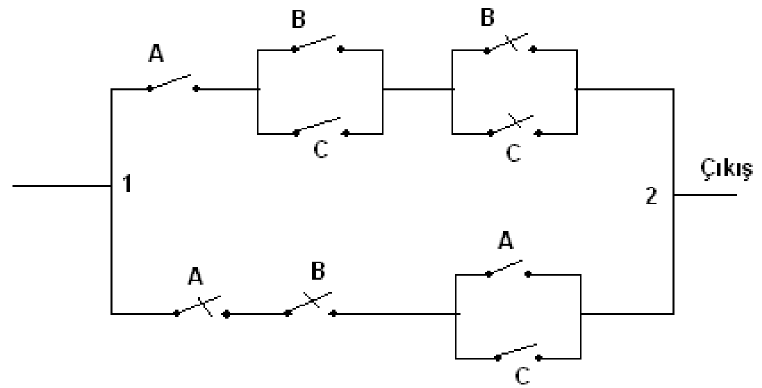
  4- (X+Y)’.Z +XY’ =Y’.(X+Z) **olduğunu gösteriniz.**

  (X+Y)’.Z + X.Y’= X’.Y’.Z + X.Y’ = Y’.(X +X’Z) = Y’.(X+Z)

  De-Morgan teoremi ve T9a kullanılarak yapıldı.

Aşağıdaki anahtarlı devrenin fonksiyon denklemini elde ediniz ve teoremleri kullanarak kısaltınız.

- **Çözüm:** 1 ve 2 noktalarını birleştiren 2 parelel kol vardır. Paralel kollar VEYA bağlacını sağlar.

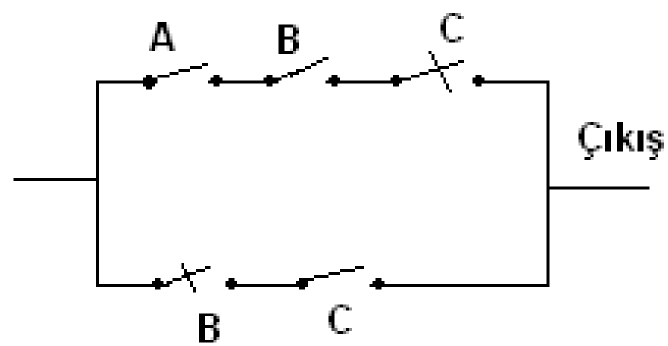


Ç =[A.(B+C).(B'+C')]+[A'.B.(A+C)]

Ç=[A.B.B'+A.B.C'+A.C.B'+A.C.C'] + [A'.B'.A + A'.B'.C]

Ç = [0+A.B.C'+A.B'.C+0] + [0+A'.B'.C]

- Çıkış = A.B.C' + B'.C.(A+A')
- Çıkış = A.B.C' + B'.C.1
- Ç = A.B.C' + B'.C elde edilir.



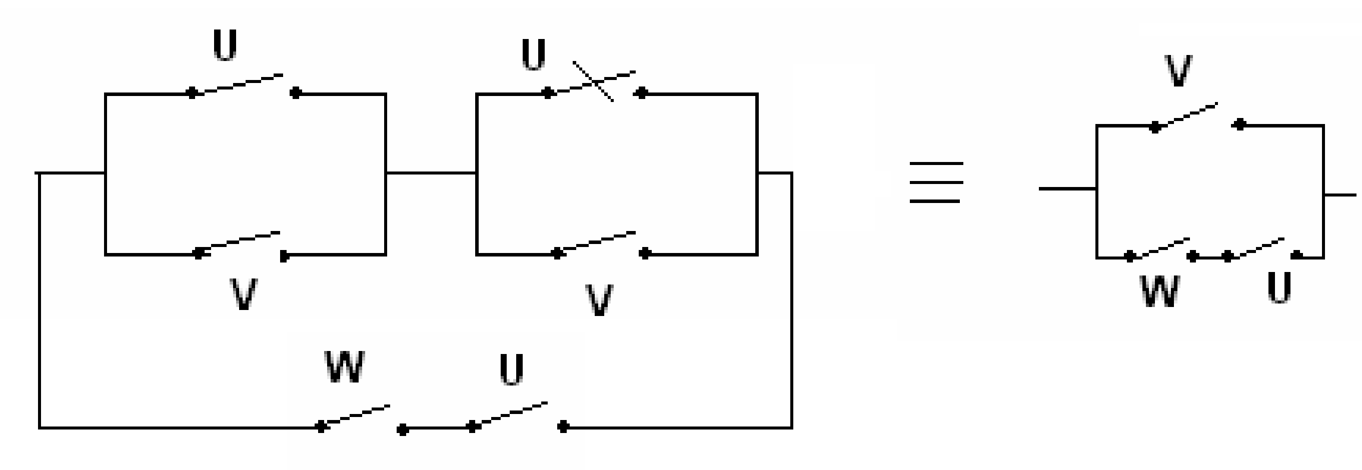
Ç=(U+V).(U’+V)+W.U denklemini teoremler yerdımıyla indirgeyiniz. Orijinal ve indirgenmiş denklemleri sağlayan anahtarlı devreleri çiziniz.

- Ç = (U+V).(U’+V)+W.U

  = U.U’+U.V+V.U’+V.V+W.U

  = 0+V (U+U’+1) + W.U

  Ç = V(1) + W.U = V+ W.U



Lojik İfadeler, Fonksiyon Denklemleri, Standart Biçimler

- Lojik değişkenler (X,Y,Z,…), sabitler (O,1) ve Mantık matematiği işlemleri (+, . , ’) kullanılarak oluşturulan deyimlere mantıksal (Boole) deyim veya mantıksal ifadesi denir [R]. Lojik ifadeler monoform ve biform ifade olarak iki ayrı guruba ayrılır.

- Monoform ifadelerde değişkenlerin sadece kendileri veya tümleyenleri bulunur. Örneğin **x1. x2’. x3. x4’** (monom – Çarpım) veya **x1+x2’+x3+x4’** (monal-Toplam)[E.H].

- x’e göre tanımlanmış Biform ifade de ise x ’in hem kendisi hem de tümleyeni bulunur. Örneğin

  x1 .x2 .x3’+x2’.x3+x1 .x4 .x5’

  ifadesi x2 ve x3 ’e göre biform bir ifadedir.[E.H]

Biform Kareler:[E.H]

E1(x2,x3,…,xn) ve E2 (x2,x3,….xn), değişkenleri arasında x_1 olmayan çok değişkenli iki ifade olsun. Buna göre:

- $\mathbf{E = E_1.x_1 + E_2.x_1'}$ ve bunun duali,
- $\mathbf{E_D = (E_1 + x_1) . (E_2+x_1')}$

- $\mathbf{x_1}$ **'** in biform kareleridir. Örneğin
- $\mathbf{x_1 (x_2+x_3') + x_1' (x_3+x_4)}$ x_1 için biform karelerdir.

- $\mathbf{E1.x + E_2.x'}$ biform karesinde $\mathbf{E_1.E_2}$ kesişimine konsensüs denir. Aynı şekilde
- $\mathbf{(E_1 + x_1) . (E_2+x_1')}$ binom karesinin konsensüsü de $\mathbf{E_1+E_2}$ birleşimidir.

Lojik İfadeler, Fonksiyon Denklemleri, Standart Biçimler-2

- Fonksiyon denklemleri de birer ifadedir ve tanım tablolarıyla beraber tanımlandığında bir problemin, ikili Boole Cebri uzayında sistematik olarak tanımlanmasını sağlar.
- Bu ifadeler değişik şekillerde oluşturulabildiği gibi, gerçekleştirme ve tanım tablosuyla kolaylıkla ilişkilendirme kolaylığı açısından 2 standart (Kanonik) formdan birinde yazılmaktadırlar. Bunlar,

1-Çarpımların Toplamı formu(I.Kanonik Form, 1'li açılım- Monomların birleşimi- ∑∏)

2-Toplamların Çarpımı formu(II.Kanonik Form, 0'lı açılım-Monalların kesişimi - ∏∑)

Bu ifadeleri için *minterim* ve *maksterim kavramları?*

- Tanım tablosunda herhangi bir sözcükten(kombinasyon) ***minterim*** yazmak için, sözcüğü oluşturan değişkenler 1 ise kendileri, 0 ise değilleri alınarak birbirleriyle VE bağlacı ile birleştirmek yeterlidir. Minterim'ler **m** harfi ve indis olarak sözcüğün ifade ettiği rakam (Sözcüğün MSB bitine göre) şeklinde sembolize edilir.
- Tanım tablosundan herhangi bir sözcük (kombinasyon) için ***maksterim*** yazmak için, sözcüğü oluşturan değişkenler 0 ise kendileri, 1 ise değilleri alınarak birbirleriyle VEYA bağlacı ile birleştirmek yeterlidir. Maksterim'ler **M** harfi ve indis olarak sözcüğün ifade ettiği rakam (Sözcüğün MSB bitine göre) şeklinde sembolize edilir.
- Bu tanımlara göre oluşturulan minterim ve maksterim'ler Tablo 4.1'de verilmiştir.

Tablo 4.1. 4 değişkenli bir tanım tablosu için Minterim ve Maksterimlerin oluşturulması

abcd	F(a,b,c,d)	Minterimler	Maksterimler
0000	0	a'.b'.c'.d' (m_0)	a + b + c + d (M_0)
0001	1	a'.b'.c'.d (m_1)	a + b + c + d' (M_1)
0010	1	a'.b'.c .d' (m_2)	a + b + c'+ d (M_2)
0011	0	a'.b'.c .d (m_3)	a + b + c'+ d' (M_3)
0100	1	a'.b .c'.d' (m_4)	a + b'+ c + d (M_4)
0101	1	a'.b .c'.d (m_5)	a + b'+ c + d' (M_5)
0110	0	a'.b .c .d' (m_6)	a + b'+ c'+ d (M_6)
0111	0	a'.b .c .d (m_7)	a + b'+ c'+ d' (M_7)
1000	0	a .b'.c'.d' (m_8)	a'+ b + c + d (M_8)
1001	1	a .b'.c'.d (m_9)	a'+ b + c + d' (M_9)
1010	1	a .b'.c .d' (m_{10})	a'+ b + c'+ d (M_{10})
1011	1	a .b'.c .d (m_{11})	a'+ b + c'+ d' (M_{11})
1100	0	a .b. c'.d' (m_{12})	a'+ b'+ c + d (M_{12})
1101	0	a .b .c'.d (m_{13})	a'+ b'+ c + d' (M_{13})
1110	0	a .b .c .d' (m_{14})	a'+ b'+ c'+ d (M_{14})
1111	0	a .b .c .d (m_{15})	a'+ b'+ c'+ d' (M_{15})

- n değişkenli tanım tabloları için minterim ve maksterim oluşturma işlemi aynıdır.
- Tablodan da görüldüğü gibi, minterimler ile Maksterimler arasında, DE-Morgan teoremine göre aşağıdaki ilişki vardır.

$$\mathbf{m_i = (M_i)', \text{ veya } M_i = (m_i)'}$$

- Bu açıklamalardan sonra; fonksiyon denklemlerinin standart biçimlerini yazabiliriz.

Bir fonksiyon denklemini, Çarpımların Toplamı Standardına (I. Kanonik Form, 1’li açılım) **göre oluşturmak için;**

- Tanım tablosunda sonucu 1 olan satırlardan *minterim*’ler yazılır, VEYA bağlaçları ile biribilerine bağlanıp denklem oluşturulur. Tablo 4.1’deki tanım tablosuna göre, fonksiyon denklemi aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\mathbf{F(a,b,c,d) = \sum\prod 1,2,4,5,9,10,11}$$

$$\mathbf{= \sum_m 1,2,4,5,9,10,11}$$
$$\mathbf{= m_1+m_2+m_4 +m_5 + m_9+ m_{10}+ m_{11}}$$

- $\mathbf{F\ (a,b,c,d) = a'.b'.c'.d + a'.b'.c\ .d'+ a'.b\ .c'.d' + a'.b\ .c'.d + a\ .b'.c'.d + a\ .b'.c\ .d' + a\ .b'.c\ .d}$

Bir fonksiyon denklemini, Toplamların Çarpımı Standardına
(II. Kanonik Form, 0'lı açılım) **göre oluşturmak için;**

- Tanım tablosunda sonucu 0 olan satırlardan maksterim'ler yazılır,biribirlerine VE bağlaçları ile bağlanıp denklem oluşturulur. Tablo4.1'deki tanım tablosuna göre denklem aşağıdaki gibi oluşturulur.
- **F(a,b,c,d)=∏∑0,3,6,7,8,12,13,14,15**

$$=\prod_M 0,3,6,7,8,12,13,14,15$$

$$=M_0+M_3+M_6+M_7+M_8+M_{12}+M_{13}+M_{14}+M_{15}$$

$$F(a,b,c,d)=(a+b+c+d).\ (a+b+c'+d').\ (a+b'+c'+d).\ (a+b'+c'+d').(a'+b+c+d).(a'+b'+c+d).\ (a'+b'+c+d')(a'+b'+c'+d).(a'+b'+c'+d')$$

- Her iki gösterim formatında da giriş değişkenlerinden oluşturulacak sözcüklerin hepsinde değişken sıraları aynı olmalıdır.
- Her iki formattaki fonksiyon denklemleri tam açılım şeklindedir. Yani kısaltılmamış formdadırlar. Gerekirse indirgenebilirler.
- Her iki formattaki denklemler, aynı tanım tablosunu yansıtırlar.

Bir Fonksiyonun tersi

- Fonksiyonun tersinin anlamı, tanım tablosundaki sonuç sütununda 0 ve 1'lerin yer değiştirmesidir. Buna göre F'(x,y,z) iki şekilde;
- **Fonksiyonun tersini çarpımların toplamı şeklinde yazmak:**
- F fonksiyonunda sonucu 0 olan minterimler VEYA bağlacı ile bağlanarak Eşitlik (c) deki gibi elde edilir.
- **Fonksiyonun tersini toplamların çarpımı şeklinde yazmak:**
- F fonksiyonunda sonucu 1 olan maksterimler VE bağlacı ile bağlanarak Eşitlik (d) deki gibi elde edilir.

x	y	z	F	*F'*
0	0	0	**0**	*1*
0	0	1	**1**	*0*
0	1	0	**0**	*1*
0	1	1	**1**	*0*
1	0	0	**0**	*1*
1	0	1	**1**	*0*
1	1	0	**0**	*1*
1	1	1	**1**	*0*

$$F(x,y,z) = \sum_m 1,3,5,7 \quad \text{(a)}$$

$$F(x,y,z) = \prod_M 0,2,4,6 \quad \text{(b)}$$

$$F'(x,y,z) = \sum_m 0,2,4,6 \quad \text{(c) veya}$$

$$F'(x,y,z) = \prod_M 1,3,5,7 \quad \text{(d)}$$

- **$F(x,y,z) = x'.y'.z+x'.y.z+x.y'.z + x.y.z$**

  şeklinde 1'li açılıma göre yazılmış fonksiyon denkleminin **$F'(x,y,z)$** tersinin "toplamların çarpımı" şeklinde bulunması için;
- *Denklemin Düali alınır*.
- $F_D(x,y,z)=(x'+y'+z).(x'+y+z).(x+y'+z).(x+y+z)$
- *Dualite fonksiyonda değişkenlerin tümleci alınır*. *Sonuç $F'(x,y,z)$ dir*.
- $F'(x,y,z) =(x''+y''+z').(x''+y'+z').(x'+y''+z').(x'+y'+z')$
- $F'(x,y,z) =(x+y+z').(x+y'+z').(x'+y+z').(x'+y'+z')$
- $F'(x,y,z) = \prod_M 1,3,5,7$

Fonksiyonun tersi DE-MORGAN teoremi ile de bulunabilir

$$F'(x,y,z) = (x'.y'.z + x'.y.z + x.y'.z + x.y.z)'$$

bu eşitliğe De-Morgan teoremini uygulayalım.

- $F'(x,y,z) = (x'.y'.z)'.(x'.y.z)'.(x.y'.z)'.(x.y.z)'$

Terimlerin herbirine tekrar De-Morgan' uygulanarak

- $F'(x,y,z) = (x''+y''+z').(x''+.y'+.z').(x'+y''+z').(x'+y'+z)$

- $F'(x,y,z) = (x+y+z').(x+y'+z').(x'+y+z').(x'+y'+z)$

$$= \prod_M 1,3,5,7$$

- **$F(x,y,z)= (x+y+z).(x+y'+z).(x'+y +z).(x'+y'+z)$** şeklinde 0'lı açılıma göre yazılmış fonksiyon denkleminin **$F'(x,y,z)$** tersinin çarpımların toplamı şeklinde bulunması;
- *Denklemin düali alınır.*

$F_D(x,y,z) = (x.y.z) . (x.y'.z) .(x'.y .z) .(x'.y'.z)$

- *Dualite fonksiyonda değişkenlerin tümleci alınır. Sonuç F'(x,y,z) dir.*
- $F'(x,y,z) =(x'.y'.z')+(x'.y''.z')+(x''.y'.z') +(x''.y''.z')$
- $F'(x,y,z) = (x'.y'.z') + (x'.y.z') +(x.y'.z') +(x.y.z')$
- $F'(x,y.z) = \sum_m$ **0,2,4,6**

Fonksiyonun tersi DE-MORGAN teoremi ile de bulunabilir.

- **$F'(x,y,z) = \{(x+y+z).(x+y'+z).(x'+y +z).(x'+y'+z)\}'$**

  bu eşitliğe DE-Morgan teoremi uygulanırsa

- **$F'(x,y,z) = (x+y+z)'+(x+y'+z)'+(x'+y +z)'$**

  $+(x'+y'+z)'$

Terimlere tekrar De-Morgan uygulayalım.

- **$F'(x,y,z) = (x'.y'.z)+(x'.y''.z')+(x''.y' .z')$**

  $+(x''.y''.z')$

- **$F'(x,y,z) = (x'.y'.z) + (x'.y.z') + (x .y' .z')$**

  $+ (x .y .z')$

  $= \sum m\ 0,2,4,6$

- Bir fonksiyonun kendisi ile tersi aynı standart formda da ifade edilebilir. Bunun için

  F_1(x,y,z) fonksiyon denkleminin tümleyenini yine 1'li açılıma göre almak için; tanım tablosunda sonucu 0 olan minterimler alınıp birbirleriyle VEYA bağlacı ile bağlanır.

$$F_1(x,y,z) = \sum m\ 0,2,4,6 \quad \text{ise}$$
$$F_1'(x,y,z) = \sum m\ 1,3,5,7 \quad \text{olur.}$$

- Aynı şekilde **F_0(x,y,z)** fonksiyon denkleminin tümleyenini yine 0'li açılıma göre almak için; tanım tablosunda sonucu 1 olan maksterimler alınıp birbirleriyle VE bağlacı ile bağlanır.

$$F_0(x,y,z) = \prod M\ 0,2,4,6 \quad \text{ise}$$
$$F_0'(x,y,z) = \prod M\ 1,3,5,7 \quad \text{olur.}$$

Standart formlar arası Dönüşüm

1'li açılıma göre yazılmış bir denklemin 0'lı açılıma veya 0'lı açılıma göre yazılmış bir denklemin 1'li açılıma çevrilmesi için aşağıdaki adımlar uygulanır.

- **Fonksiyonun tersi aynı standart formda yazılır.**
- $F_1(x,y,z) = \sum_m 1,3,5,7$ ise $F_1'(x,y,z) = \sum m\ 0,2,4,6$………1.Örnek
- $F_0(x,y,z) = \prod_M 0,1,2,5,7$ ise $F_0'(x,y,z) = \prod M\ 3,4,6$……2.örnek
- **Ters fonksiyonun bir defa daha tersi alınır. Standart formlar arası dönüşüm tamamlanmıştır;**
- $(F_1'(x,y,z))' = F_0(x,y,z) = \prod_M 0,2,4,6$ elde edilir….(1.örnek için)
- $(F_0'(x,y,z))' = F_1(x,y,z) = \sum_m 3,4,6$…… elde edilir….(2.örnek için).