-DİNAMİK SİSTEMLER-

Benzetim Modelleme

HELİN YARDIMCI
15260563
2019 DERS NOTLARI

BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ:

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x) \qquad x(t_0) = X_0$$

$X(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots X_n(t)] \rightarrow$ Sistem durum vektörü

$X(0) = [x_1(0), x_2(0), \ldots X_n(0)] \rightarrow$ ilgili başlangıç durumları

ÖRNEK:

Aşağıdaki denklemler ile gösterilen bir sistem düşünelim.

$$\alpha'' + 2\beta'\alpha + \beta^2\alpha = \cos t$$
$$\beta' + \alpha\beta = 4$$

başlangıç durumlarına bağlı ;

$$\alpha(0) = 2$$
$$\alpha'(0) = -1$$
$$\beta(0) = 1$$

$\Rightarrow$ İki dinamik durum değişkenleri ve birinci, ikinci dereceden diferansiyel denklemler olduğu için üçüncü dereceden bir sistemdir. Bu yüzden üç tane birinci dereceden bir diferansiyel denklem sistemi olarak tanımlamak mümkündür.

$$x_1 = \alpha(t) \qquad x_2 = \alpha'(t) \qquad x_3 = \beta(t)$$

$$x_2' + 2x_3'x_1 + x_3^2x_1 = \cos t$$
$$x_3' + x_1 \cdot x_3 = 4$$

x_1', x_2', x_3' 'ü yalnız bırakmalıyım.

$$\begin{bmatrix} x_2' = \cos t - 2x_3'x_1 - x_3^2x_1 \\ x_3' = 4 - x_1 \cdot x_3 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak:

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = \cos t - 2x_3'x_1 - x_3^2x_1$$
$$x_3' = 4 - x_1 \cdot x_3$$

x_1' i bulurken de şöyle düşünebilirim:

$\left.\begin{matrix} x_2 = \alpha'(t) \\ x_1 = \alpha(t) \end{matrix}\right\}$ ise $x_1' = x_2$ diyebilirim.

$$x_1(0) = 2$$
$$x_2(0) = -1$$
$$x_3(0) = 1$$

* 3 birleşik durum vektörü $X = [x_1, x_2, x_3]$ olarak tanımlanır.

$$F = [x_2, \cos t - 2x_3'x_1 + x_3^2x_1]$$
$$X(0) = [2, -1, 1]$$
$$t_0 = 0$$

ÖRNEK: $x'' + 2x' + 5y = 0$ $\quad x(0)=0 \quad x'(0)=0 \quad y(0)=1$ 1. dereceden diferansiyel denklem olarak yazınız.

$x' + 2y = y'$

Çözüm

$z(t) = x'(t)$ alırsak,

$$\left.\begin{array}{l} z' + 2z + 5y = 0 \\ z + 2y = y' \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z' = -2z - 5y \\ y' = z + 2y \end{array} \qquad x(0)=0 \quad z(0)=0 \quad y(0)=1$$

EULER YÖNTEMİ

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = F(t,x)$$

$\boxed{x(t+h) = x(t) + h \cdot F(t,x)}$ → Euler dent. aslında budur.

$t_0 \leq t \leq t_n$ ve $k = 0,1,2, \ldots n$ için;

* $t \equiv t_k = h.k + t_0$ → sürekli zamanlı t yerine yeni bir ayrık k değişkeni tanımlamak uygundur.

$$t_k = h.(k+1) + t_0$$

$$x(h(k+1) + t_0) = [x(hk+t_0) + h.\, F(hk+t_0,\, x(hk+t_0))]$$

* Yeni bir ayrık $x(k)$ değişkenini şu şekilde gösterebiliriz:

$$\boxed{x(k+1) = [x(k) + h.\, F(t(k), x(k))]} \quad k = 0,1,2, \ldots n$$

⇒ Zaman değişkeni t ise; sinyal sürekli ya da analog olarak alınmıştır ve durum $x(t)$'dir.

⇒ Zaman ayrık (kesikli) ise; durum değişkeni $x(k)$'dır. Sürekli zamanın ayrık zamanla yer değiştirdiği bu işleme **ayrıklaştırma** denir.

⇒ Denklemin sağ tarafında değişkenler k, sol tarafında ise $k+1$'dir. Bunu x değişkeninin güncellestirilmesi olarak ifade ederiz.

ÖRNEK: $x' = x^2 t \quad x(1) = 3$ şeklinde tanımlanmış bir sistemi düşünelim.

$t_0 = 1 \quad x(t_0) = 3$

GERÇEK ÇÖZÜM:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 t \quad \text{ve} \quad x(1) = 3$$

$$\int_3^x \frac{dx}{x^2} = \int_1^t t.dt$$

$$-\frac{1}{x}\Big|_3^x = \frac{t^2}{2}\Big|_1^t \qquad -\frac{1}{x} + \frac{1}{3} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$x(t) = \frac{6}{5-3t^2}$$

Fakat açık çözümün bilinmediğini farzedersek euler yöntemini çalıştırabiliriz. Keyfi verilmiş $h = 0,05$ adım uzunluğu ile eşit ayrık sistem başlangıç koşulları ile karakterize edilmiştir.

EULER ÇÖZÜMÜ

$t_0 = 1 \qquad x(t_0) = 3$

$\frac{1}{20}$' de diyebiliriz.

$t_{k+1} = t_k + h \Rightarrow t_{k+1} = t_k + 0,05$

$x(k+1) = x(k) + h \cdot F(t(k), x(k))$

$x(k+1) = x(k) + \frac{1}{20} \cdot x^2(k) \cdot t_k \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, n$

NOT: t'nin eski değeri x güncellemesine ihtiyaç duyar fakat x t'nin güncellemesine ihtiyaç duymaz.

* $k = 0$ için $h = 0,05$

$t_0 = 1 \qquad x(1) = 3$

$t_{k+1} = t_k + h$

$t_1 = 1 + 0,05$

$\boxed{t_1 = 1,05}$

1. Adım

$X_g = \frac{6}{5 - 3t^2} = \frac{6}{5 - 3 \cdot 1^2} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$

$X_{euler} = x(k+1) = x(k) + \frac{1}{20} \cdot x^2(k) \cdot t_k$

$= x(1) = 3 + \frac{1}{20} \cdot 0 \cdot 1$

$\boxed{x(1) = 3}$

$t_{k+1} = t_k + h = t_2 = t_1 + h$

$= 1,05 + 0,05 = 1,10$

$\boxed{t_2 = 1,10}$

* $k = 1$ için

2. Adım

$t_{k+1} = t_k + h = t_2 = 1,05 + 0,05 = 1,10$

$X_g = \frac{6}{5 - 3t^2} = \frac{6}{5 - 3 \cdot \underbrace{(1,05)^2}_{t_1}} = \boxed{3,55}$

$X_{euler} = x(k+1) = x(k) + \frac{1}{20} x^2(k) t_k$

$= x(2) = x(1) + \frac{1}{20} x^2(1) \cdot t_1$

$= x(2) = 3 + \frac{1}{20} \cdot 9 \cdot (1,05)$

$\boxed{x(2) = 3,45}$

* $k = 2$ için

3. Adım

$t_{k+1} = t_k + h \qquad t_3 = t_2 + h$

$t_3 = 1,10 + 0,05$

$t_3 = 1,15$

$X_{euler} = x(k+1) = x(k) + \frac{1}{20} \cdot x^2(k) \cdot t_k$

$= (3,45) + \frac{1}{20} \cdot (3,45)^2 \cdot (1,10)$

$= 4,10$

$X_g = \frac{6}{5 - 3t^2} = \frac{6}{5 - 3(1,10)^2} = \boxed{4,38}$

- Dikkat edilirse t'nin eski degeri x güncellesmesine ihtiyac duyor fakat x, t'nin güncellemesine ihtiyac duymaz.

```
t = 1
x = 3
print t, x
for k=1 to n
    x = x+hx^2 t
    t = t+h
    print t, x
    next k
```

MATLAB PROGRAMI

```
to=1 ; %baslangıc zamanı
xo= 3 ; % baslangıc kosulu
x = [xo];
t = [to];
xg = [6/(5-3*to^2)];% Mutlak cözüm
h = 0.05 ;
for i=1:5
  xyeni = xo+h*xo^2*to;
  to = to+h;
  xg = [xg 6/(5-3*to^2)];
  x = [x xyeni];
  t = [t to];
  xo = xyeni;
end
plot (t,x,'r-d')
hold on
plot (t, xg,'k-s')
```

* $n=6$ icin verilen algoritmanın yaklasık cözümü tabloda gösterilmistir.

k	0	1	2	3	4	5	6
tk	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
x(t)	3.00	3.55	4.38	5.81	8.82	19.20	-85.71
x(k)	3.00	3.45	4.07	4.99	6.42	8.89	13.83

⇒ Euler yönteminin uygulanması baslangıc noktasından daha cok sapmaması icin önemlidir, aynı zamanda h adım uzunlugunun hassas secilmesi gereklidir.

* Doğru cözüm elde etmenin bir yolu h adım uzunlugunun azaltılmasıdır.

H değerinin azaltılması iki büyük engele sahiptir.

1) Ilki, verilen bir noktadaki cözümü tahminetmek icin daha fazla hesaplama gerecektir.

2) ikincisi, veri gösteriminde bir sonraki makine sınırlamalarından dolayı, h cok fazla küçük olabilir.

ÖR

Her hesaplamanın sonucunda bir prosedürün sonuclarının cıktısını almaktan ziyade hesabın periyodik sonuc cıktılarının alınması daha yararlıdır.

- Bu "kontrol break" adı verilen bir islem uygulanarak gerceklestirilir. Bir kontrol break iciçe döngüler yoluyla calısır.

```
t = 1
x = 3
print t,x
for i=1 to n
  for j = 1 to m
    x = x+hx^2 t
    t = t+h
  next j
  print t,x
next i
```

Dış döngü i (i=1,2,...n) indeksi kullanarak kontrol eder, iç döngü j (j=1,2,...m) indeksi kullanır.

TAYLOR - YÖNTEMİ

* Euler yöntemi, Taylor teoreminin özel bir durumu olarak düşünülebilir.

$$x(t+h) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{\wedge} i(t)}{i!} h^{\wedge} i$$

$x' = F(t,x)$

Euler güncelleştirme formülü ;

$$x(t+h) = x(t) + h.F(t,x)$$

Bu formül daha yüksek mertebeli yaklaşım kullanılarak genişletilebilir. Mesela ikinci dereceden yaklaşım şu formülü verir.

$$\underbrace{\underbrace{x(t+h) = x(t) + h.x'(t)}_{\text{euler yöntemi}} + \frac{1}{2}h^2 x''(t)}_{\text{Taylor yöntemi}}$$

* $x'' = \frac{d}{dF} F(t,x) = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} F(t,x)$

$$x(t+h) = x(t) + h.x'(t) + \frac{1}{2}h^2 \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} F(t,x)\right)$$

Bu formülü aşağıdaki şekilde Euler gibi ayrıklaştırabiliriz ;

$$t_{k+1} = t_k + h$$
$$x(t+h) = x(t) + h.F + \frac{1}{2} \cdot h^2 \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} F\right)$$

ÖRNEK: $x' = x^2 t$ taylor tekniğini uygulayınız. ($h = 0{,}05$) ($x(1) = 3$)

Çözüm

$$\frac{\partial F}{\partial t} = x^2 \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 2xt$$

Aynı

$$\left[x(k+1) = x(k) + h.x^2(k)t_k + \frac{1}{2}h^2\left(x^2(k) + (2x(k)t_k) \cdot x^2(k) \cdot t_k\right)\right]$$
$$x(k+1) = x(k) + h.x^2(k)t_k + h^2 x^2(k)\left(\frac{1}{2} + x(k)t_k^2\right)$$

0. adım

$\boxed{t_0 = 1}$

$$X_g = \frac{6}{5-3t^2} = \frac{6}{5-3} = 3$$

$\boxed{x(t) = 3}$ $\quad$ $x(1)=3$

$\boxed{x(k) = 3}$

(k=0 için)

1. Adım

$t_1 = t_k + h$

$t_1 = 1 + 0{,}05$

$\boxed{t_1 = 1{,}05}$

$$X_g = \frac{6}{5-3t^2} = \frac{6}{5-3\cdot(1{,}05)^2} = \boxed{3{,}55 = x(t)}$$

$$x(k+1) = x(k) + h.x^2(k).t_k + h^2 x^2(k)\left(\frac{1}{2} + x(k).t_k^2\right)$$
$$= 3 + \frac{1}{20}\cdot 3^2 \cdot 1 + \left(\frac{1}{20}\right)^2 \cdot 3^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + 3 \cdot 1^2\right)$$
$$= 3 + \frac{9}{20} + \frac{1}{400} \cdot 9 \cdot \frac{7}{2}$$
$$= \boxed{3{,}53 = x(k)}$$

ÖRNEK: $x''+2x'+5y=0$, $x'+2y=y'$ $x(0)=0$, $x'(0)=0$, $y(0)=1$;
bu sistemi $h=0.1$ adım büyüklüğü olarak $[0,10]$ aralıgında Euler yöntemi ile çözümünü veren algoritmayı yazınız.

$\boxed{\dot{x}(0)=z(0)}$

```
h=0,1;
x(0)=0;
y(0)=1;
z(0)=0;
for h=0.0 : 0.1 : 10
1  x(k+1) = x(k) + h z(k)
2  y(k+1) = y(k) + h (z(k) + 2y(k))
3  z(k+1) = z(k) + h(-2 * z(k) - 5y(k))
```

$$\begin{bmatrix} a = x(t) \\ b = \dot{x}(t) \\ c = y(t) \end{bmatrix}$$

$b' + 2b + 5c = 0$

$b + 2c = c'$

$b' = -2b - 5c$

$c' = b + 2c$

$a' = b$

```
to = 0
xo = 0
yo = 1
t = [to]
x = [xo]
y = [yo]
z = [zo]
h = 0,1
for h=0:0.1:10
xyeni = xo + h*zo
yyeni = yo + h* (zo+2*yo)
zyeni = zo + h* (-2 *zo - 5 *yo)
to = to+h
x = [xyeni]
y = [yyeni]
z = [zyeni]
xo = [xyeni]
yo = [yyeni]
zo = [zyeni]
end
```

$x(0)$'a $x(0)$

$y(0)$'a $y(0)$

$x'(0)$'a $z(0)$ denilmiş

Daha sonra döngü kurulmuş

$b = \dot{x}(t)$ olduğundan

$x'(t) = b$ olmuş.

Yani $\boxed{a' = b}$

Daha sonra sırasıyla

1) $x(t) \longrightarrow a$ (türevini yazarsak)

$a = x(t)$ ise

$a' = b$

yani $\rightarrow x(k+1) = x(k) + h \cdot z(k)$

2) $y(t) \Rightarrow c$

$\underbrace{c'}_{y'} = b + 2c$

yani

$y(k+1) = y(k) + h\left(z(k) + 2y(k)\right)$.

3) $x'(t) \rightarrow b$

$\underbrace{b'}_{z} = -2b - 5y$

yani

$z(k+1) = z(k) + h(-2 * z(k) - 5y(k))$

(k = 1 için) 2. Adım

$t_{k+1} = t_k + h$
$t_2 = t_1 + h$
$t_2 = 1{,}05 + 0{,}05$
$\boxed{t_2 = 1{,}1}$

$x_g = \frac{6}{5-3t^2} = \frac{6}{5-3(1{,}1)^2} = 4{,}38 = x(t)$

$x(k+1) = x(k) + h \cdot x^2(k) \cdot t_k + h^2 x^2(k)\left(\frac{1}{2} + x(k) t_k^2\right)$

$x(2) = 3{,}53 + \frac{1}{20} \cdot (3{,}53)^2 \cdot (1{,}05) + \left(\frac{1}{20}\right)^2 \cdot (3{,}53)^2 \left(\frac{1}{2} + (3{,}53) \cdot (1{,}05)^2\right)$

$= 3{,}53 + 0{,}654 + (0{,}03115) \cdot (4{,}391)$
$= 3{,}53 + 0{,}654 + 0{,}136$
$x(2) = 4{,}30 = x(k)$

k	0	1	2	3	4	5	6
t_k	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1,25	1,30
x(t)	3.00	3.55	4.38	5.81	8.62	19,20	-85,71
x(k)	3.00	3.53	4.32	5.61	8.05	13,89	36,66

* Taylor, Euler yöntemine göre daha doğru sonuçlar elde eder.

RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ

* Daha önceki örneklerde birinci dereceden denklemlere Euler, ikinci dereceden denklemlere Taylor teknikleri uygulanıp karşılaştırıldı.
* Dördüncü dereceden bir yaklaşım sıklıkla şu şekilde kullanılır.

$$x(t+h) = x(t) + h \cdot x'(t) + \frac{1}{2} h^2 x''(t) + \frac{1}{6} h^3 x^3(t) + \frac{1}{24} h^4 x^4(t)$$

Bununla birlikte bu formülü uygulamak için, Taylor için yapıldığı ilk önce F'i birkaç kez ayırmak gereklidir. F için bir analitik formül kullanılamıyor olabileceği için çoğu zaman bu imkansızdır ve en iyi ihtimalle sıkıcı olabilir.

$K_1 = F(t_k, x(k))$
$K_2 = F(t_k + \frac{1}{2}h, x(k) + \frac{1}{2} h K_1)$
$K_3 = F(t_k + \frac{1}{2}h, x(k) + \frac{1}{2} h K_2)$
$K_4 = F(t_k + h, x(k) + h K_3)$
$t_{k+1} = t_k + h$
$x(k+1) = x(k) + \frac{1}{6} h (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$

Bu klasik bir runge-kutta algoritmasıdır. İki avantajı vardır:
1) Doğru çözümdür (4. dereceden Taylor'la eşdeğerdir)
2) Türev hesaplaması gerektirmediğinden kullanımı kolaydır.

ÖRNEK: $x' = x^2 t$ $\quad x(1) = 3$ runge-kutta yöntemini uygulayınız. $(h = 0{,}05)$

ÇÖZÜM

$t_0 = 1$

$x_g = 3$

$x(t) = 3$

0. adım

1. adım (k yerine 0 koyup)

$t_{k+1} = t_k + h$

$t_1 = t_0 + h = 1 + 0{,}5 = 1{,}05$ // $\boxed{t_1 = 1{,}05}$

$\boxed{x_g = \frac{6}{5 - 3\cdot(1{,}05)^2} = 3{,}55}$

$x_g = 3{,}55$

$K_1 = F(t_k, x(k))$

$F(1, 3) = 1 \cdot 3^2 = 9$

$K_2 = F(t_k + \frac{1}{2}h, x(k) + \frac{1}{2}hK_1) = (\frac{1}{40}) \cdot (\frac{129}{40})$

$= F(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20}, 3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20}\cdot 9) = (1{,}025)\cdot(3{,}225)^2$

$= (1{,}025)\cdot(10{,}400625)$

$= (1{,}025)\cdot(10{,}400625)$

$= 10{,}66$

$K_3 = F(t_k + \frac{1}{2}h, x(k) + \frac{1}{2}hK_2)$

$= F(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20}, 3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20}\cdot(10{,}66))$

$= (1{,}025)\cdot(3{,}2665)^2$

$= 10{,}93$

$K_4 = F(t_k + h, x(k) + hK_3)$

$= F(1 + \frac{1}{20}, 3 + \frac{1}{20}\cdot(10{,}93))$

$= F(\frac{21}{20}, 3 + \frac{10{,}93}{20})$

$= F(1{,}05, \underbrace{3{,}5465}_{}$) → karesini al. ikisini topla.

$= 13{,}20$

K_5 = Yok !!!!!!

$x(k+1) = x(k) + \frac{1}{6}h(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$

$= 3 + \frac{1}{6}\cdot 0{,}05\,(9 + 2\cdot(10{,}66) + 2\cdot(10{,}93) + 13{,}20)$

$= 3{,}544$ //

Sözde Kod!

```
input t,x
print t,x
for k=1 to n
k1 = t x^2
k2 = (t + 1/2 h)(x + 1/2 h K1)^2
k3 = (t + 1/2 h)(x + 1/2 h K2)^2
K4 = (t+h) (x+hK3)^2
x = x + 1/6 h(K1+2K2+2K3+K4)
t = t+h
print t,x
next
```

MATLAB KODU

```
to = 1;
xo = 3;
x = [xo]
t = [to];
Xg = [6/5-3* to^2];
h = 0,05;
for i = 1:5
    K1 = to * xo^2;
    K2 = (to+1/2*h)(xo+1/2*h.K1)^2
    K3 = (to+1/2*h)(xo+1/2*h.K2)^2
    K4 = (to+h) (xo+h*K3)^2
Xyeni = xo + 1/6*h(K1+2*K2+2*K3+K4)
to = to+h;
Xg = [Xg 6/(5-3*to^2)];
x = [x Xyeni];
t = [t to];
xo = Xyeni;
end
plot (t,x,'r-d')
plot (t,xg,'k-s')
hold on
```

ADAPTİF RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ

- Daha popüler heuristliklerden (çözümlerden) biri dördüncü ve beşinci dereceden farklı mertebelerin kullanımı ile bir çözüm hesaplamaktır.
- Eğer sonuçlar benzer ise h değeri büyütülür. $(3 \times h)$
- Eğer sonuçlar benzer değilse h değeri küçültülür $(h/10)$

SÖZDE KODU

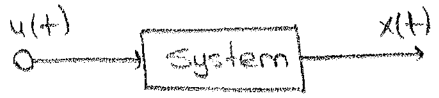
```
t = to;
x = xo;
print t,x
   for k=1 to n
         4. dereceden Runge - Kutta ile x'i bul.
         5. dereceden Runge - Kutta ile y'yi bul.
   if |x-y| < ε then
          x = y
          t = t+h
          h = 3h
      else
          h = h/10
          goto [1]
      end if
          print t,x
          next k
```

YÜKSEK DERECEDEN SİSTEMLER

* Herhangi bir diferansiyel denklemler toplamını birinci dereceden denklemler kümesine eşdeğer hale getirmek mümkündür.

$$x' = F(t, x, y) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y' = G(t, x, y) \qquad y(t_0) = y_0$$

ÖRNEK:



$x'' + 3xx' = u(t)$
$u(t) = t \quad t \geq 0$
$x(0) = 2$
$x'(0) = 1$

Yandaki blok diyagramı ile gösterilen sistemi düşünelim. 2. dereceden bir diferansiyel denklem olduğu için 2 durum değişkeni olmalıdır. Bunlardan birini $x(t)$ çıkışı olarak, diğerini $y(t) = x'(t)$ olarak tanımlarız. Böylece;

- Euler yöntemi uygulayalım.

Çözüm: $y(t) = x'(t)$

$$y' + 3xy = t \Rightarrow y' = t - 3xy$$

$x(0) = 2 \qquad x' = y$
$y(0) = 1 \qquad x(0) = 2$
$\qquad\qquad y(0) = 1$

EULER

$$t_{k+1} = t_k + h$$
$$x(k+1) = x(k) + h \cdot x'(k) = x(k) + h \cdot y(k)$$
$$y(k+1) = y(k) + h \cdot y'(k) = y(k) + h \cdot [t_k - 3x(k) \cdot y(k)]$$

(EULER) SÖZDE KODU:

```
t=0
x=2
y=1
print t,x,y
for k=1 to n
    x1=x+h·y
    y1=y+h·(t-3xy)
    x=x1
    y=y1
    t=t+h
    print t,x,y
    next k
```

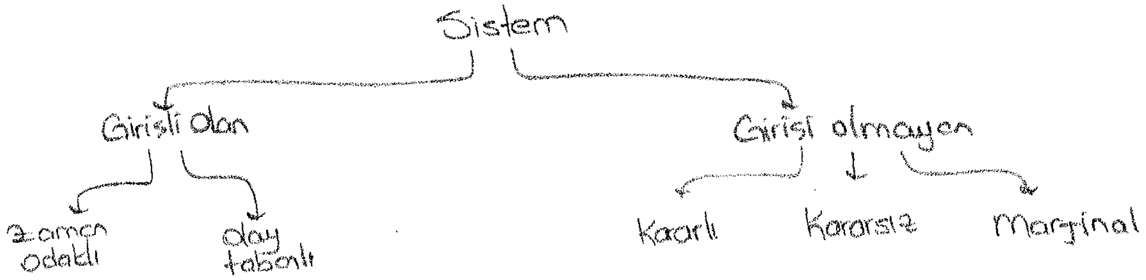
MATLAB KODU:

```
to=0
xo=2
yo=1
x=[xo]
y=[yo]
h=0,5
for i=1:n
xyeni =xo+h*yo
yyeni =yo+h*(to-3*xo*yo)
to=to+h
x=[x xyeni]
y=[y yyeni]
t=[t to]
xo=[xyeni]
yo=[yyeni]
end
```

OTONOM DİNAMİK SİSTEMLER

⇒ Otonom sistemler hiçbir girişe sahip olmayan kendi kendine çalışan sistemlerdir.
⇒ Otonom sistemler dış ortamdan etkilenmezler ve dış etkenlerden bağımsız olarak çalışırlar.
⇒ Eğer sistem lineer (doğrusal) ise 3 tip tepkiden bahsedilir.

1- Kararlı: Çıktı kısa bir tepkiden sonra 0'a doğru yaklaşır.
2- Kararsız: sınırlama olmaksızın doğal tepki artar. (sürekli artar)
3- Marjinal: Tepki periyodik ve sınırlıdır.



Zaman Odaklı

Girişler eş zamanlıdır.

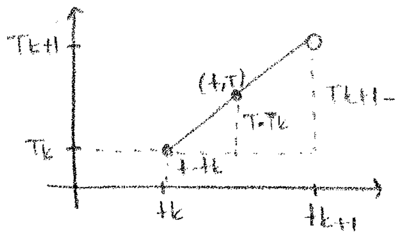
Olay Tabanlı

Girişler eş zamanlı değil.

* Kaotik Sistem: Belirli bir popülasyonu düzenleyen bir sistem düşünülsün. Popülasyon oranıyla artma oranı doğru orantılıdır.

DENEYSEL VERİ İŞLEME

* Modeller olayların ideallestirilmesi olmasına rağmen gerçekçi benzetimler oluşturmak için modele gerçek veriyi uygulamak istenir.
* Gerçek sıcaklık profili fiziksel ölçümlerden alınarak elde edilir.
* Bu ölçümler daha gerçekçi sonuçlara yol açar.
* $T(t)$'nin değerleri bitişik veri noktaları arasında bilinmezken $n+1$ ile n arasındaki çizgi segmentlerine lineer interpolasyon uygulamak mümkündür.
* Aşağıdaki şekilde 2 bitişik $(t_k, \hat{T}_k)$ ile $(t_{k+1}, \hat{T}_{k+1})$ veri noktalarını gösteren fonksiyon parçasını düşünelim



$$\frac{T-\hat{T}_k}{t-t_k} = \frac{\hat{T}_{k+1}-\hat{T}_k}{t_{k+1}-t_k} \rightarrow \text{ise } T(t) = \frac{\hat{T}_{k+1}-\hat{T}_k}{t_{k+1}-t_k}(t-t_k)+\hat{T}_k$$

ÖRNEK: Aşağıda verilen bir sıcaklık profilinden alınan veri kümesini düşünelim. Veri kümesine lineer interpolasyon uygulayınız.

k	t_k	T_k
0	0	0
1	1	5
2	2	8
3	4	-6
4	5	-6
5	7	6
6	8	3
7	9	-4

```
function interp(t)
if t<0 then "undefined"
if 0≤t<1 then interp=5t
if 1≤t<2 then interp=3t+2
if 2≤t<4 then interp=-7t+22
if 4≤t<5 then interp=-6
if 5≤t<7 then interp=6t-36
if 7≤t<8 then interp=-3t+27
if 8≤t<9 then interp=-7t+59
if t>9 then "undefined"
return
```

İşlem Kısmı

$x_0\ y_0 = 0\ 0$, $x_1\ y_1 = 1\ 5$
$y=mx+n$; $0=m\cdot 0+n$, $n=0$; $5=mx+n$, $5=m+0$, $m=5t$

$x_0\ y_0 = 1\ 5$, $x_1\ y_1 = 2\ 8$
$y=mx+n$; $5=m+n$; $8=2m+n$; $3=m$; $5=3+n$, $n=2$; $3t+2$

$x_0\ y_0 = 2\ 8$, $x_1\ y_1 = 4\ -6$
$y=mx+n$; $8=2m+n$; $-6=4m+n$; $-14=2m$, $m=-7$; $8=-14+n$, $n=22$; $-7t+22$

$x_0\ y_0 = 4\ -6$, $x_1\ y_1 = 5\ -6$
$y=mx+n$; $-6=4m+n$; $-6=5m+n$; $0=m$; $-6=0+n$, $n=-6$; -6

$x_0\ y_0 = 5\ -6$, $x_1\ y_1 = 7\ 6$
$y=mx+n$; $-6=5m+n$; $6=7m+n$; $12=2m$, $m=6$; $-6=30+n$, $n=-36$; $6t-36$

$x_0\ y_0 = 7\ 6$, $x_1\ y_1 = 8\ 3$
$y=mx+n$; $6=7m+n$; $3=8m+n$; $-3=m$; $6=-21+n$, $n=27$; $-3t+27$

$x_0\ y_0 = 8\ 3$, $x_1\ y_1 = 9\ -4$
$y=mx+n$; $3=8m+n$; $-4=9m+n$; $-7=m$; $3=-56+n$, $n=59$; $-7t+59$

devam

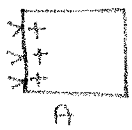
$$
T(t) = \begin{cases}
\text{undefined}, & t < 0, \\
5t, & 0 \leq t < 1, \\
3t + 2, & 1 \leq t < 2, \\
-7t + 22, & 2 \leq t < 4, \\
-6, & 4 \leq t < 7, \\
6t - 36, & 5 \leq t < 7, \\
-3t + 27, & 7 \leq t < 8, \\
-7t + 59, & 8 \leq t \leq 9, \\
\text{undefined}, & t > 9.
\end{cases}
$$

```
function interp(t)
      input t
        if t < t(0) or t > t(n) then
              "error"
          else
              k-1
              while t > t(k) and t ≤ t(n)
                    k = k+1
              end while
                 interp = (T̂k+1 - T̂k)/(tk+1 - tk) (t - tk) + T̂k
            end if
                return
```

$$\text{interp} = \frac{\hat{T}_{k+1} - \hat{T}_k}{t_{k+1} - t_k}(t - t_k) + \hat{T}_k$$

MATLAB SIMULINK

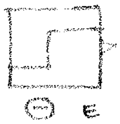
- Simulink, MATLAB ile birlikte bütünleşik olarak çalışan bir simulasyon ortamıdır.



→ Gelen sinyalleri toplar. (Add)

→ Çarpan bloğu (Gain)

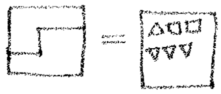
→ İntegral Alıcı



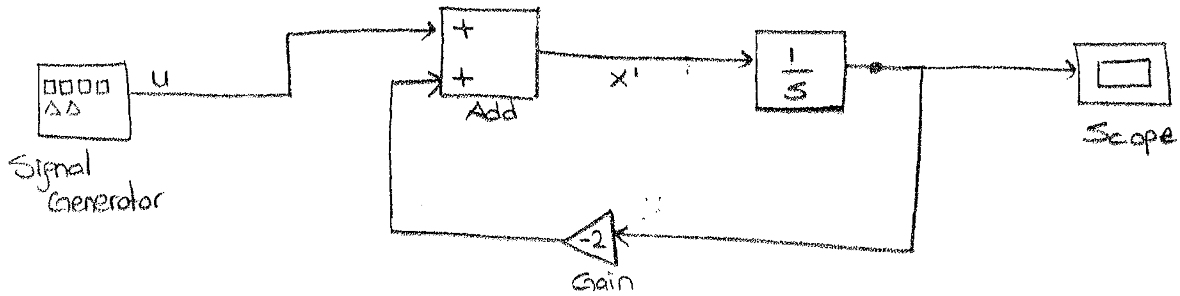
→ Birim basamak fonksiyonu (step)

→ Scope
Sinyali göstermearacı

→ Sinyal generatörü

$u(t) =$ 

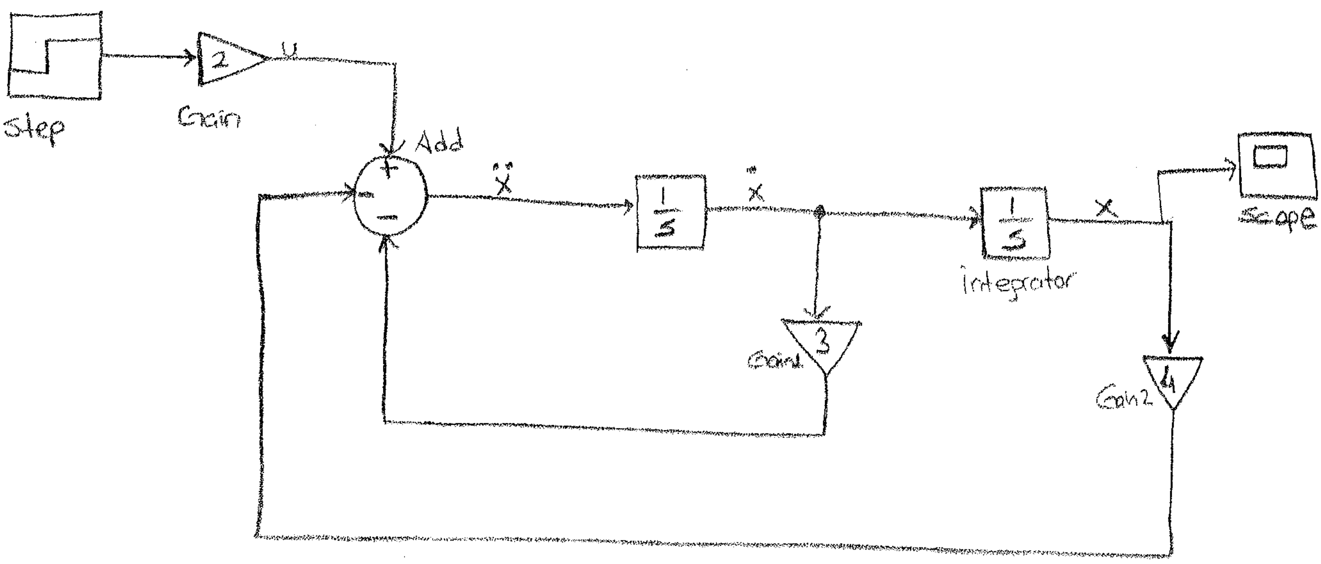
ÖRNEK: $x'(t) = -2x(t) + u(t)$ çiz.



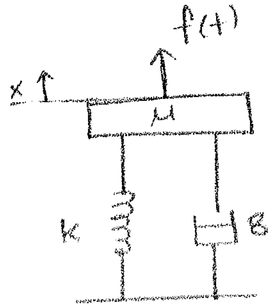
ÖRNEK: $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x(t) = 2u(t)$ çiz.

Düzenlersek;

$$\ddot{x} = 2u(t) - 3\dot{x} - 4x(t)$$



ÖRNEK: Dinamik sistem örneği (Kütle – Yay – Sönüm Sistemi)



Sistemin matematiksel modeli:

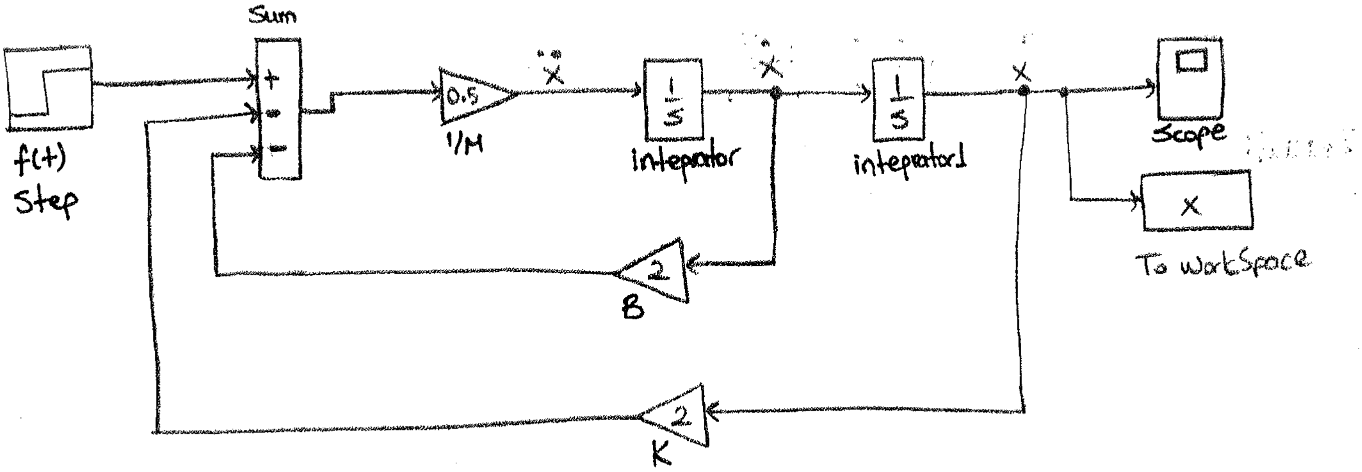
$$\ddot{x} = \frac{1}{M}\left(-B\dot{x} - Kx + f(t)\right)$$

M = 2 kg ; B = 2 Ns/m ; K = 2 N/m olsun.

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{1}{2}\left(-2\dot{x} - 2x + f(t)\right)}$$

Çözüm

Çözüm



SİSTEMİN PERFORMANS ÖLÇÜTLERİ

Sistemin Performans Ölçütleri

- Çevrim zamanı: Bir ürünün üretilme zamanı.
- Doluluk (Kullanım) Oranı: Ekipmanın veya personelin üretken olduğu zaman yüzdesi.
- Bekleme zamanı: Bir müşterinin servis görebilmek için veya bir parçanın işlenebilmesi için kuyrukta geçirdiği ortalama zaman.
- Kalite: Doğru özelliklere sahip ürün yüzdesi
- Maliyet: Sistemin maliyeti.

SİSTEMLER

KESİKLİ SİSTEM

Sistemin durum değişkenleri, zamanın sadece kesikli noktalarında değişir.

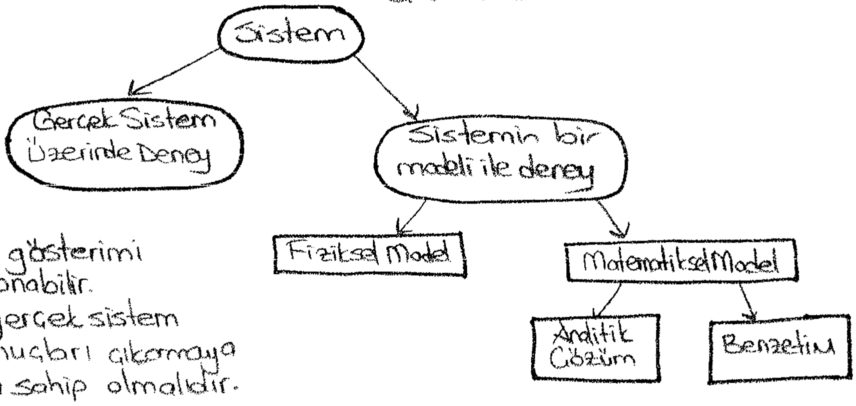
Ör: Banka kesikli bir sistemdir. Müşteri sayısı, sisteme yeni bir müşteri geldiğinde veya müşteri servisini tamamladığında değişir.

SÜREKLİ SİSTEM

Sistemin durum değişkenleri zaman içinde sürekli olarak değişir.

Ör: Havada bir uçağın hareketi sürekli sisteme örnektir. Hız ve pozisyon gibi durum değişkenleri sürekli olarak değişir.

SİSTEMLERİN ÇÖZÜMÜ



Model: - Bir sistemin gösterimi olarak tanımlanabilir.
- Bir model, gerçek sistem hakkında gerekli sonuçları çıkarmaya izin verecek detaya sahip olmalıdır.

MODEL

Fiziksel Modeller

* Gerçeğe benzer ama simülatör

Matematiksel Modeller

* İşin içinde matematiksel denklemler, programlar ve yazılımlar olabilir.

Benzetim Modelleri 3 ana grupta toplanabilir;

- Statik (Static) veya Dinamik (Dynamic),
- Belirli (Deterministic) veya Olasılıklı (Stochastic)
- Kesikli (Discrete) veya Sürekli (Continuous)

Statik Benzetim Modeli

Sistemin belirli bir anındaki gösterimidir. Monte-Carlo benzetim modelleri bu türe uygun modellerdir.

Dinamik Benzetim Modeli

Sistemin çalışma zamanına göre (bir aralık veya tüm çalışma zamanı dikkate alınarak) yapılan modellemedir.

ÖRNEK: Bir banka için kurulan bir benzetim modeli 8 saatlik bir çalışma zamanı dikkate alınarak çalıştırılır.

Belirli Benzetim Modeli

Rassal değişken içermeyen benzetim modelidir. Bu modellerde verilen GİRDİ seti için bir ÇIKTI seti vardır.

Olasılıklı Benzetim Modeli

Bir veya birden fazla rassal değişken içeren benzetim modelidir. Banka örneğinde varışlar arası zaman aralığı ve servis zamanları rassal değişkenlerdir.

ZAMAN DİLİMLEME (eşit zaman aralıklarında)

Zaman akışını kontrol etmenin en kolay yoludur. Benzetimde zaman akışının nasıl ele alınabileceğini göz önüne almak önemlidir.

dt zaman dilimi uzunluğu için, (t ile $(t+dt)$) aralığında ortaya çıkan değişimlere ilişkin, model $(t+dt)$ anında güncellenir.

* Eğer zaman dilimi model davranışına göre aşırı geniş olursa, ortaya çıkan durum değişmelerinin bazılarının benzetimini yapmak olanaksız olacağından, gerçek sisteminkinden daha kaba olacaktır. Diğer yandan zaman dilimi aşırı küçük olursa model gereksiz yere sıkça incelenir ve bu aşırı bilgisayar çalıştırmalarına yol açar.

ÖRNEK:

İş Numarası	Yığın Büyüklüğü	Beklenen Sipariş Günü
1	200	1
2	400	8
3	100	14
4	200	18

Makine A: (Yığın büyüklüğü / 50 + 1) gün
Makine B: (Yığın büyüklüğü / 100 + 3) gün

Her iş önce makine A'da yığın olarak bitirildikten sonra makine B'de yığın olarak başlar ve tamamlanır. (varsayım)

Bir atölye şekilde görülen dört siparişi kabul ederse son yığın ne zaman tamamlanacaktır?

Çözüm   Beklenen iş süreleri

iş numarası	Makine A	Makine B
1	$(200/50+1)=5$	$(200/100+3)=5$
2	$(400/50+1)=9$	$(400/100+3)=7$
3	$(100/50+1)=3$	$(100/100+3)=4$
4	$(200/50+1)=5$	$(200/100+3)=5$

Atölye : zaman dilimleme benzetimi

	Kuyruktaki İşler		İşlem gören işler	
gün	A makinesi için	B makinesi için	Makine A	Makine B
1	–	–	1	–
2	–	–	1	–
3	–	–	1	–
4	–	–	1	–
5	–	–	1	–
6	–	–	–	–
7	–	–	–	1
8	–	–	–	1
9	–	–	2	1
10	–	–	2	1
11	–	–	2	1
12	–	–	2	–
13	–	–	2	–
14	3	–	2	–
15	3	–	2	–
16	3	–	2	–
17	–	–	2	–
18	4	–	3	2
19	4	–	3	2
20	–	3	3	2
21	–	3	4	2
22	–	3	4	2
23	–	3	4	2
24	–	–	4	2
25	–	4	4	3
26	–	4	–	3
27	–	4	–	3
28	–	–	–	3
29	–	–	–	4
30	–	–	–	4
31	–	–	–	4
32	–	–	–	4 4

A makinesi başlar.

Sonra B makinesi başlar.

A'nın 8. gün başlaması gereklidir. Zaten A'nın B'yi beklemesine gerek yoktur.

Daha sonra 3. işe başladı

B'nin 2. işi başlar.

A'nın 3. işine 14. günde başlaması gerekiyordu ama 14 dolu olduğu için bekledi

A'nın 4. işinin 18. gün başlaması gerekiyordu ama dolu olduğu için bekledi.

SONRAKİ OLAY TEKNİĞİ

* Bu yaklaşımda, yalnızca bir durum değişmesinin olacağı bilindiğinde yoklanır ve güncellenir.

* Bu durum değişmeleri genellikle olay olarak adlandırılır ve zaman olaydan olaya aktarıldığı için sonraki olay tekniği olarak adlandırılır.

Bi önceki örneği sonraki olay tekniği ile çözümlersek;

İş numarası	Geliş Zamanı	Makine A Başlama	Makine A Bitiş	Makine B Başlama	Makine B Bitiş
1	1	1	5	6	10
2	8	8	16	17	23
3	14	17	19	24	27
4	18	20	24	28	32

Zaman Dilimle mi? Sonraki Olay Tekniği mi?
Hangi yöntem avantaj sağlar?

Zaman dilimlerne daha fazla bilgi tutar ve fazla bilgiyi kontrol ediyor, ancak sonraki olay tekniği ise sadece başlangıç ve bitişi tuttuğundan daha avantajlı.

⇒ Zaman dilimlernede çok küçük aralık seçilirse yeni iş var mı yok mu kontrol eder.
⇒ " " " büyük " " bir sürü birikir ve ona göre iş yapar.

Stokastik mi? Deterministik mi?

⇒ Eğer bir sistemin davranışı tamamıyla tahmin edilebiliyorsa deterministiktir.
⇒ Eğer bir sistemin " " " edilemiyorsa stokostiktir.
⇒ Deterministik benzetim modeli hiçbir zaman stokastik eleman içermez.
⇒ Stokastik benzetim modellerinde olasılık dağılımları kullanılır.

ÖRNEK

Çok kullanıcılı bir makine sistemi mekanik olarak arızalanma gerilimini 2 disk birimini içerir. Eğer bir disk arızalanıp servise giderse kullanıcıdan yeniden yüklemeye gelen kaydedilen dosyaları kaydeder. Yeniden yükleme manyetik bir alanda tutulan yedeklenmiş dosyaların diske kopyalanmasıyla oluşur. Fakat bu iş zahmetli olup yeni bir politika gerekmektedir.

Buna göre;

Tamir ve Bakımdan Sonraki Gün	Arıza Olasılığı
1	0.05
2	0.15
3	0.20
4	0.30
5	0.20
6	0.10
>6	0.00

⇒ Bizim stokastik için olasılık dağılımlarını bulmamız gerekiyor. Çünkü bu sistem arızalanmasını tahmin etmek zordur.

	(Benzetimde kullanılır) Kümülatif Olasılık	(Rassal Değişken) Birikimli Olasılık
1)	0 + 0.05 = 0.05	0.00 – 0.04
2)	0.05 + 0.15 = 0.20	0.05 – 0.19
3)	0.20 + 0.20 = 0.40	0.20 – 0.39
4)	0.40 + 0.30 = 0.70	0.40 – 0.69
5)	0.70 + 0.20 = 0.90	0.70 – 0.89
6)	0.90 + 0.10 = 1	0.90 – 0.99

Rassal değişkenler üretilir, birikimli olasılığa göre hangi aralıktaysa ona göre o gün bozulmuştur. Misal 0.27 dersem, 3. günüm bozulmuştur.

Amaç: Bu şekilde rassal değişkenler üreterek 50 günde ne kadar maliyet verecek.

→ Kafamızdan bir rassal sayı verirsek;
Örneğin = 93 olsun. Bu sayı 6. gün ile ilişkili olduğundan 0.93 rassal sayısıyla ilişkili

* 50 günde ne kadar maliyet verir dersem ?

Rassal Sayı	Ömür	Arıza Zamanı
0.93	6	6
0.27	3	9
0.36	3	12
0.30	3	15
0.57	4	19
⋮		⋮
		50

50'ye geldiğinde bulunmuş oluyor.

ÖRNEK: Fırat Üniversitesi personellerine günlük duyurular göndermektedir. Duyuruların sabah 08.00-10.00 saatleri arasında gelme olasılığı %40, 10.00-12.00 arası gelme olasılığı %20, 13.00-15.00 arası gelme olasılığı %25, 15.00'dan sonra gelme olasılığı ise %15'tir. Her gönderilen mailin hazırlanma süresi 10 dakikadır. Buna göre ?

a) Bu sistem deterministic mi stokastik mi ? Sebebi ile açıklayın.

⇒ Eğer bir sistemin davranışı bütünüyle tahmin edilemiyorsa stokastiktir. Sistemin davranışı olasılığa dayandığından tahmin edilemiyor. Bu yüzden stokastiktir.

b) Bu sistem bilgisayarda benzetimi için bir yöntem öneriniz ?

⇒ Olayların oluşma olasılıkları yazılarak kümilatif olasılıklar hesaplanır.

Zaman	Olasılık
08.00-10.00	0.40
10.00-12.00	0.20
13.00-15.00	0.25
15.00-	0.15
Diğer durumlar	0.0
Toplam	1.0

'Önemli'

Zaman	Kümilatif Olasılık
08.00-10.00	0.00 - 0.40
10.00-12.00	0.40 - 0.60
13.00-15.00	0.60 - 0.85
15.00-	0.85 - 1.00
Diğer durumlar	0.0.
Toplam	1.0

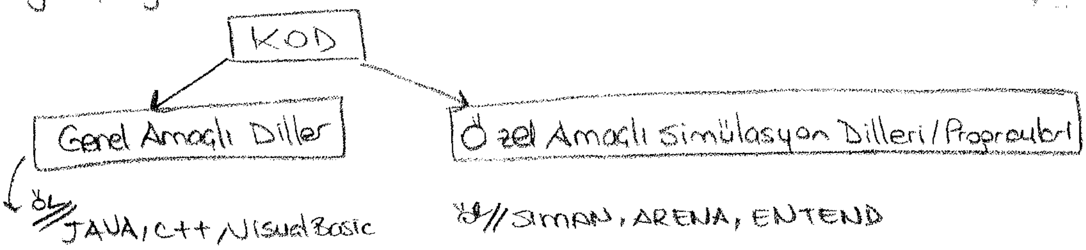
⇒ Benzetimi yapmak için [0,1] aralığında rastgele bir sayı üretilir ve bu sayı hangi aralığa denk geliyorsa mailin gelme zamanı o aralıktadır. Bu şekilde benzetim yapılarak sistem modellenebilir.

* Kesikli bir benzetim modeli; her zaman kesikli bir sistemin benzetimi için kullanılmaz. Belirli bir sistem için kesikli veya sürekli modelin kullanılacağına dair kararı çalışmanın amacına bağlıdır.

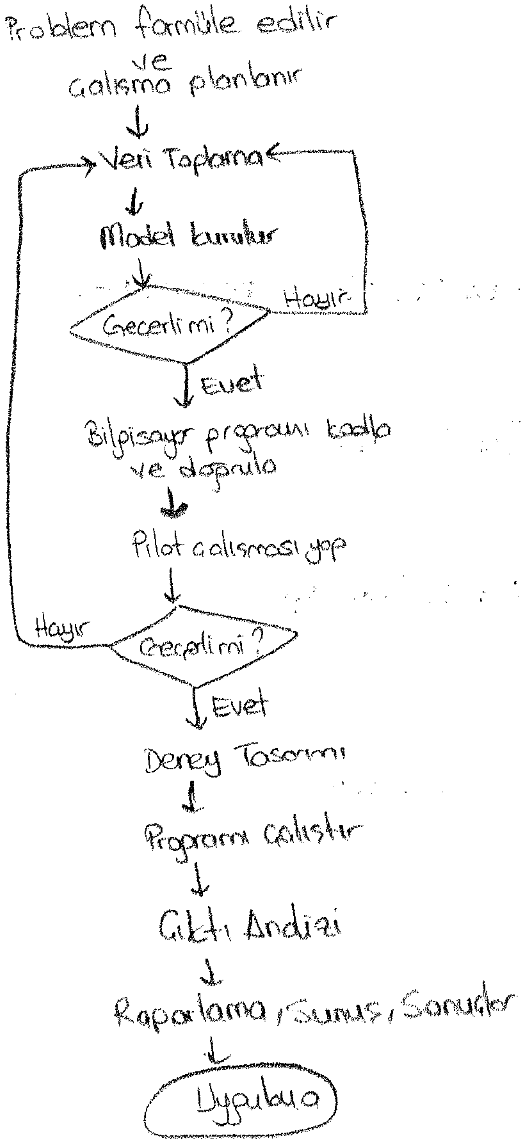
Örneğin ; çevre yolunda trafik akışının modellenmesi, arabaların hareketi ve özellikleri önemli ise kesikli bir modeldir. Arabaların hareketi bir bütün olarak dikkate alınıyorsa, trafik akışı ; sürekli bir model olarak diferansiyel eşitlikler ile tanımlanabilir.

BENZETİM AŞAMALARI

1) Problemin Tanımı ve Çalışma Planı
2) Veri Toplama ve Model Tanımı
3) Geçerli mi?
4) Bilgisayar programının kodlanması ve doğrulama



5) Programın Pilot Deneyleri
6) Geçerli mi?
7) Deney Tasarımı
8) Deneyler
9) Çıktı Analizi
10) Raporlar, Sonuçlar
11) Uygulama



MONTE CARLO BENZETİM METODU

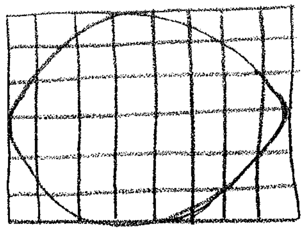
⇒ Monte Carlo benzetim modeli ; olasılık teorisi üzerine kurulu bir sistemdir.
⇒ Monte Carlo metodunda ; istatiksel ve matematiksel tekniklerle bir deneyi ya da çözülmesi gereken fiziksel bir olayı tesadüfi sayıları defalarca kullanarak simüle edip çözmek esastır.

⇒ Monte Carlo benzetimi genellikle statik benzetim modelinde kullanılır.
↳ zaman yok o yüzden statik

STATİK MONTE CARLO BENZETİMİ TANIMI

Monte Carlo yöntemi direkt analitik yaklaşımların mümkün olmadığı fonksiyonların integralinin sayısal elde edilmesinin bir yoludur.

ÖRNEK: π sayısı bilinmeden dairenin alanı hesaplanmaya çalışılır.



→ Dairenin içinde yer alan karelerin sayılması bize π sayısının hesaplanmasına olanak verir.
→ Geniş kare içinde → n tane kare
→ Dairenin içinde → m tane kare
Varsa dairenin alanı m/n ile karenin alanının çarpımı olacaktır.

Karenin Alanı $= 4r^2$
Dairenin Alanı $= \pi r^2$

Dairenin Alanı = Karenin Alanı $\times \frac{m}{n}$

$$\pi r^2 = 4r^2 \times \frac{m}{n}$$

$$\pi = 4 \cdot \frac{m}{n}$$

SUBJEKTİF OLASILIKLAR

Olasılık tahmini temel varsayımlara dayanır ve bunlar olasılığı değişik şekilde tanımlamayı sağlar.

Önsel Sav: Tüm sonuçlar hakkında bilgi sahibi olduğumuz durumdur.
Örneğin, 6 yüzlü bir zarın her bir çıktısının olasılığı 1/6 dır.

Göreli Sıklık Sav: Çıktıları üreten süreci anlamadığımızda fakat onların göreli sıklıklarını hesaplamak için yeterli veriye sahip olduğumuz durum.
↓
Monte Carlo'nun kullandığı.

Öznel Bakış: Önsel veya göreli sıklık yaklaşımının ikisinin birden uzantısı olarak bakılan durum. Bir para atışı yapılırsa yazı gelme olasılığında olduğu gibi tura gelme olasılığının da 0.5 olması.

* Çözüm üretilemeyen yerlerde Monte Carlo'ya başvurulur.

ÖRNEK: $I = \int_a^b g(x)\,dx$ integralini çözelim.

* G(x) fonk. analitik çözümü olmayan bir fonk. olsun.
* Bu deterministik problemi monte carlo ile çözelim.

1. Adım

$y = (b-a)\cdot g(x) \quad a \leq x \leq b$ (Yeni rassal değişken)

2. Adım

x, [a,b] aralığında düzgün dağılıma sahip sürekli bir rassal değişken

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & d.d \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(y) &= E[(b-a)\cdot g(x)] \\ &= [(b-a)\cdot E(g(x))] \\ &= (b-a)\cdot \int_a^b g(x)\cdot f(x)\cdot dx \\ &= (b-a)\cdot \int_a^b g(x)\cdot \frac{1}{b-a}\cdot dx \end{aligned}$$

$\boxed{E(y) = \int_a^b g(x)dx}$ → Buranın integrali bize y'yi verir. Bu yüzden monte Carlo uygulanabilir.

3. Adım

$$E(y) = y_{ort} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = (b-a) \times \frac{\sum_{i=1}^{n} g(x_i)}{n}$$

Buradan $X_1, X_2, X_3 - - - X_n \sim U(a,b)$ rassal değişkenlerdir.

ÖRNEK: $I = \int_0^{\pi} \sin x \cdot dx$ integralini çözelim.

$y = (b-a)\,g(x) = \pi \cdot \sin x$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & 0 \le x \le \pi \\ 0 & d.d \end{cases}$$

$$E(y) = E'[\pi \cdot g(x)]$$
$$= \pi \cdot E(g(x))$$
$$= \pi \int_0^{\pi} g(x) \cdot f(x) \cdot dx$$
$$= \pi \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cdot dx$$

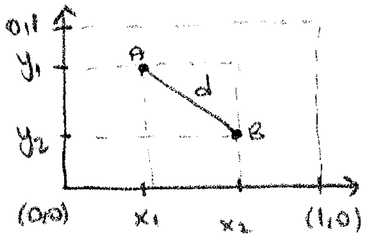
$$E(y) = \int_0^{\pi} \sin x\, dx \longrightarrow E(\bar{y}) = \pi \frac{\sum_{i=1}^{n} \sin x_i}{n}$$

Monte Carlo uyguladık.

Değer verirsem
$n = 10, 20, 40, 80, 160$ için
$\downarrow$ 2,213 $\downarrow$ 1,951 $\downarrow$ 1,989 $\downarrow$ 1,993

ÖRNEK: Kenarları birim uzunlukta olan bir kare düşünün. Bu kare içinde rassal seçilen A ve B noktaları olsun. A ve B arası d uzunluğunda d'nin 0.8'den küçük olma olasılığı nedir?

Açıklama: Monte Carlo tekniğiyle rassal olarak 1000 adet A ve B noktaları üreterek d'nin 0.8'den küçük olma olasılığını bulun. Yaklaşımı açıkla, akış şemasını çiz.



$A = (x_1, y_1)$
$B = (x_2, y_2)$

$d = \left[\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}\right]$

iki nokta arasındaki uzaklık formülü. (Öklid mesafesi)

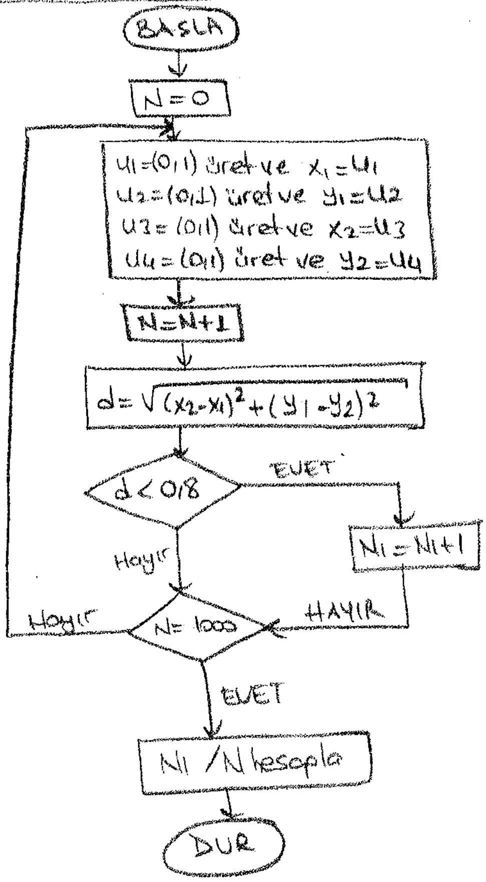
- Bu formül kullanılarak d'nin 0,8'den küçük olma olasılığı bulunur.

N_1 = d'nin 0.8'den küçük olduğu sayaç
N = 1000 deneme

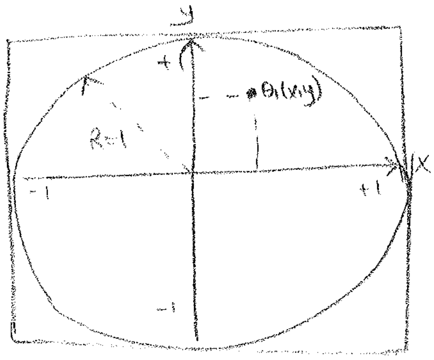
<u>KODU</u>

```
function alan=monteCarlo(n)
 %n := nokta sayısı
   N1 = 0
   N = 0
 for i=1:n
    x1 = rand
    y1 = rand
    x2 = rand
    y2 = rand
d = sqrt.[(x2 - x1)^2 + (y2-y1)^2];
    if (d<0.8)
    N1= N1+1 ;
   end
    N=N+1
   end
 alan= N1 /N;
```

<u>AKIŞ ŞEMASI</u>



ÖRNEK! Yanda verilen şekil gibi bir karenin içine teğet olarak yerleştirilmiş bir çember düşünelim. Karenin bir kenarı 2 birim veya çemberin yarıçapı R = 1 br olsun. (Birim çember) Karenin içinde koordinatları (x,y) olan rastgele bir Q nok. seçilsin Q nok. koordinatları $x^2+y^2 <= 1$ şek. seçilmişse, Q nok. çemberin içinde aksi halde nokta çemberin dışında demektir. Bu durumda Q noktasının çemberin içinde kalma olasılığı?



$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Çember Alanı} = \pi r^2 \\ \text{Karenin Alanı} = 2r \times 2r\end{array}\right\} \; P(x^2+y^2<1) = \frac{Ç.A}{K.A} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}}$$

- Karenin içini n adet nokta ile doldurursak, m de çemberin içinde kalan nokta kabul edersek

$$\boxed{p(x^2+y^2<1) = \frac{\text{Çemberin içinde kalan noktalar}}{\text{karenin içinde kalan noktalar}} = \frac{m}{n}}$$

Neden $x^2+y^2<1$ olasılığı?
Neden 1 ?
Çünkü yarıçap = 1, çemberin içinde olup olmadığını bulacağız.

- Bir önceki denklemle bu denklem birleştirilirse

$\frac{\pi}{4} = \frac{m}{n}$ dersek; $\boxed{\pi = \frac{4m}{n}}$ bulunur.

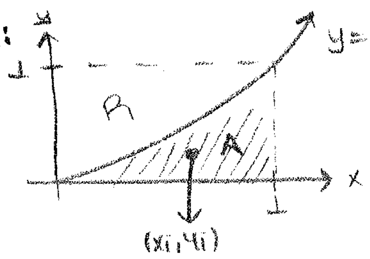
KODU!

```
function pi = montecarlo1(n)
%pi : pi sayısı
%n : nokta sayısı
cember = 0; %cemberin içinde olan noktaların sayısı
sayac = 0; % karenin içindeki noktaların sayısı
for i = 1:n
     x = rand;
     y = rand;
  if (x^2 + y^2) <= 1)
     cember = cember+1;
  end
     sayac = sayac+1;
  end
pi = 4* cember /sayac;
```

Çıktı:

```
>> pi = montecarlo1(1000000)
   pi = 3.1415
```

ÖRNEK:



Şekilde görülen $y=x^2$ eğrisi ile x ekseni arasında kalan alanı bulmak için monte-carlo metodunu kullanınız.

Çözüm

1) Eğer kare içerisinde rastgele noktalar (x_i, y_i) işaretleyip, bu noktaların eğrinin altında olup olmadıklarını belirler ve bunu toplam nokta sayısına oranlarsak, A alanının R karesine olan oranını yaklaşık olarak elde edebiliriz.

$$Q(x_i, y_i) = \frac{\text{Eğrinin altında olma oranı}}{\text{Karenin Alanı}} = \frac{y=\int_0^1 x^2}{1} = \frac{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1}{1} = \frac{1}{3} = 0{,}333$$

2) Toplam nokta sayısı $= n$

Eğrinin altında kalan nokta sayısı $= m$

$\frac{m}{n} \rightarrow$ aranan noktanın eğrinin altında kalma olasılığı

3) İki denklemi eşitlersek;

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$$

MATLAB KODU:

```
function egrialan = xkare(n)
        egri = 0 ;
        sayac = 0;
            for i=1:n
                x=rand;
                y=rand;
            if ( y < x*x)   → egrinin altindaysa (A alanı içinde)
                                          egri = egri+1
                egri = egri+1 ;
            end
                sayac = sayac+1;   → değilse sayacı arttır
            end
                egrialan = egri/sayac;   → eğrinin altında kalma olasılığı
```

ÖRNEK! 0 ile 100 arasında bulunan sayılar içinden rastgele seçilen bir sayının 11'e tam bölünme olasılığı?

1. Yol

- Analitik Çözüm
- Matematiksel sonuç

* 0 ile 100 arasında 11'e tam bölünen sayıları alıp, bunları tüm sayılara oranlarız.

- $\underbrace{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99}_{9 \text{ adet}}$,

$P = \frac{9}{100} = 0{,}09$ olasılık

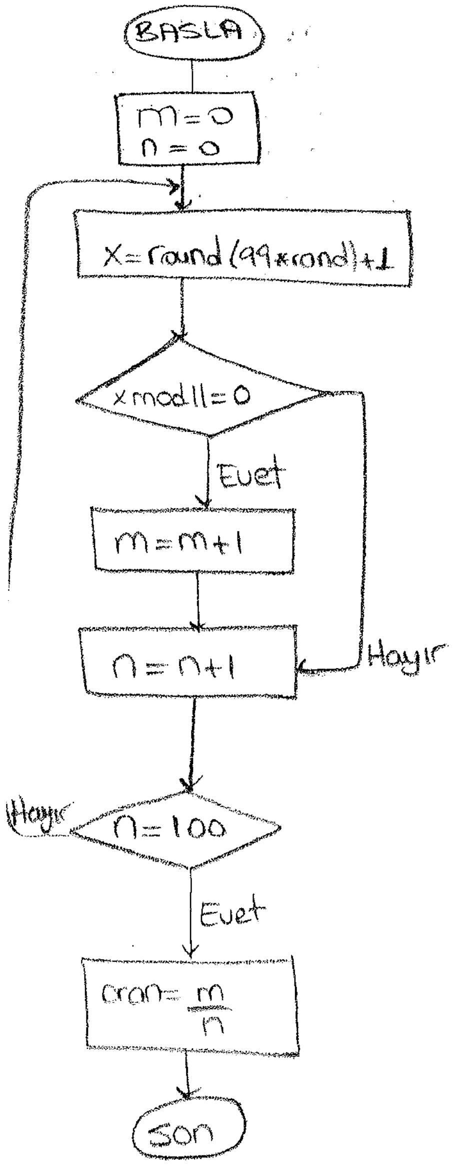
2. Yol (Monte Carlo)

* 0 - 100 arasında n tane sayı seçmemizi ister.
* n tane sayıdan m tanesinin 11'e tam bölündüğünü kabul edersek

$$P = \frac{m}{n}$$

* Programlama esnasında rastgele seçilecek her sayı değeri için n artarken, m değeri seçilen sayının 11'e tam bölünmesi durumda arttırılmalıdır.

AKIŞ ŞEMASI



MATLAB KODU

```
function sonuc=montecarlo(n)
(m) bol =0;  % 11'e bölünebilen sayı
(n) sayac=0;
  for i=1:n  % n ise nokta sayısı (sayı)
  x =round(99*rand)+1 ;
  sonuc = mod (x,11);
  if(sonuc = =0)
    bol=bol+1 ;  (m=m+1)
  end
(n=n+1)  sayac=sayac+1;  % rastgele seçilen sayılar
  end
  sonuc=bol/sayac;  (m/n)
```

ÖRNEK: 4. sınıfta olan üniversite öğrencisine ailesinin 3 yıl içinde aylık gönderdiği para miktarı gösterilmiştir. Monte Carlo benzetim modelini kullanarak öğrenciye 4. yılında gönderilecek para miktarını tespit et.

1. yıl

Aylar	Miktar
1	→ 200
2	→ 400
3	→ 300
4	→ 300
5	→ 400
6	→ 100
7	→ 400
8	→ 300
9	→ 400
10	→ 400
11	→ 500
12	→ 300

2. yıl

Aylar	Miktar
1	→ 300
2	→ 200
3	→ 400
4	→ 300
5	→ 400
6	→ 500
7	→ 100
8	→ 400
9	→ 400
10	→ 200
11	→ 400
12	→ 500

3. yıl

Aylar	Miktar
1	→ 200
2	→ 200
3	→ 400
4	→ 300
5	→ 200
6	→ 500
7	→ 300
8	→ 200
9	→ 200
10	→ 100
11	→ 300
12	→ 200

ÇÖZÜM:

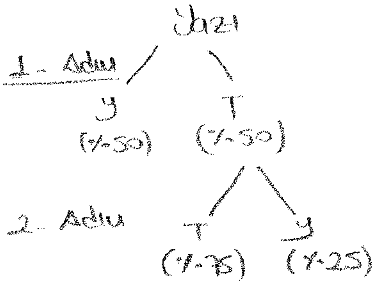
Gönderilen Miktar	Frekans	Olasılık
100	3	0.0833
200	8	0.222
300	10	0.277
400	11	0.305
500	4	0.111
	= 36	

⇒

Miktar	Kümülatif Olasılık	
100	0.0833	→ 0.0833
200	0.305	→ 0.0833 − 0.305
300	0.583	→ 0.305 − 0.583
400	0.888	→ 0.583 − 0.888
500	1	→ 0.888 − 1

```
function para=hesaplama(n)
F1 = 0    F3 = 0    F5 = 0
F2 = 0    F4 = 0
for i=1:n
    x=rand;
if (0<x<0.0833)
    F1 = F1+1;
    end
if (0.0833<x<0.305)
    F2 = F2+1;
    end
if (0.305<x<0.583)
    F3 = F3+1;
    end
if (0.583<x<0.888)
    F4 = F4+1;
    end
if (0.888<x<1)
    F5 = F5+1;
    end
    end
para = (F1+F2+F3+F4+F5)*100
```

ÖRNEK: Bir madeni para ile oynanan yazı tura oyunu şu şekilde çalışır. Para atıldığında yazı gelirse bir sonraki aşamada tura veya yazı gelme olasılığı %50'dir. Bununla birlikte eğer tura gelirse sonraki aşamada tura gelme şansı %75 dir. Monte Carlo ile Tura gelme olasılığı?

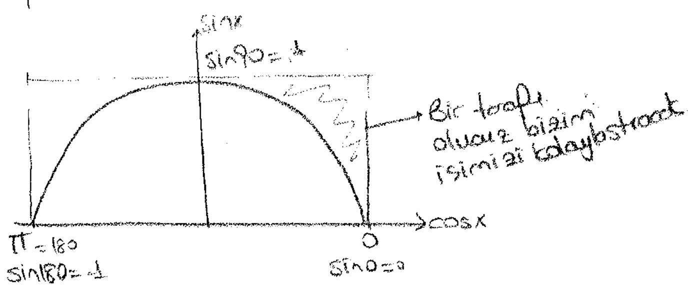


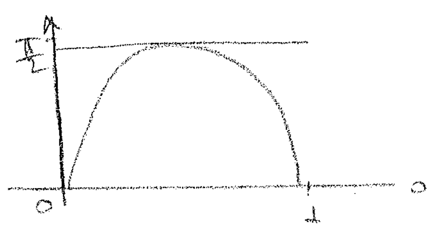

```
function para = montecarlo(n)
yazı = 0;
Tura = 0;
Sayac = 0;
Olasılık = 0.5;
for i = 1 : n
 yazı = rand;
 Tura = rand;
   if (rand < olasılık)
      Tura = Tura + 1;
      Sayac = sayac + 1;
      olasılık = 0.75;
      end
 yazı = yazı + 1;
 sayac = sayac + 1;
 olasılık = 0.25;
     end
 para = tura/sayac;
```

ÖRNEK: a) Monte Carlo benzetimi nedir? Kısaca açıkla.

⇒ Monte Carlo metodunda istatiksel ve matematiksel tekniklerle bir deneyi ve çözülmesi gereken bir fiziksel olayı tesadüfi sayıları defalarca kullanarak simülasyon edilip çözülmesidir.

b) 0 ile π aralığında sin(x)'in integralini (0'dan π'ye sin(x)'in altında kalan alanı) Monte Carlo benzetimi ile bulmak için gerekli açıklamaları yaparak problem çözümünün akış şemasını çiziniz.





* Verilen aralıktaki tüm değerleri bir dikdörtgen içine alırız.
* N adet nokta olduğu kabul edilir. m adet noktada sinx eğrisinin altında olduğu kabul edilir.
* $P = \frac{m}{n}$ bize çözümü verir.

KODU

```
function sonuc = montecarlo(n)
 x_max = 3,14159;   (pi değeri)
 y_max = 1 ;
 sayac = 0 ;
 for i = 1 : n
     x = rand * x_max ;
     y = rand * y_max ;
     if ( y < sin(x) )
         sayac = sayac + 1 ;
            end
          end
   sonuc = (sayac / n) * x_max * y_max ;
```

Özel amaçlı Benzetim Dilleri ile Genel Amaçlı Dillerin Karşılaştırılması

1) Benzetim dilleri kullanılarak programlama zamanı azaltılır, programlamada gerekli özelliklerin birçoğu benzetim dilinde mevcuttur.

2) Benzetim modelleri benzetim diliyle kodlandığında değiştirilmesi daha kolaydır.

3) Benzetim dili kullanıldığında, programlama hatasını bulmak daha kolaydır. Bu programlarda hata türleri belirlenmiş ve kodlanmıştır.

4) Çoğu benzetim dili, programın çalışması sırasında dinamik depolama özelliğine sahiptir. Bu durum, özellikle büyük boyutlu problemlerin çalıştırılmasında önemlidir.

* Diğer taraftan; birçok benzetim modeli genel amaçlı dillerle yazılır.
  - Örneğin karmaşık hesaplamalar için benzetim dilleri uygun değildir.
  - Genel amaçlı diller programlamada daha çok esneklik sağlar.
  - Bir çok analist, genel amaçlı dilleri biliyor ama benzetim dillerini bilmiyor.
  - Benzetim dilinin kullanılacağı bilgisayarda düzeltmelerin yapılması gerekebilir.

Benzetim Yazılımlarının Sınıflandırılması

1) Benzetim Dili: Çeşitli uygulamalar için gerekli (kodlama) özelliklerine sahip olabilen, genel bir bilgisayar paketidir.
Modelleme yeteneğine sahiptir.
Dezavantajı: Karışık Sistemlerde modelleme yaparken kodlamanın ve programın doğruluğunun belirlenmesinin uzun zaman almasıdır.

2) Simülatör: Belirli sistemlerin benzetimini yapabilen bir bilgisayar paketidir. Simülatör kullanıldığında, modelin kodlanmasına gerek kalmayabilir veya çok az ihtiyaç duyulur.
- Piyasada çeşitli simülatörler vardır.

* Simülatörlerde; bir sistemin benzetimi menüler ve grafikler yardımı ile gerçekleştirilir.

BENZETİM

Sistemlerin benzetimini yaparken simülatör kullanmanın;

Avantajları
- Benzetim modelinin simulatör ile kodlama zamanı, benzetim diline göre çok azdır.

- Birçok simülatör sistemlerle ilgili özel modelleme yapısına sahiptir. Bu özellik, programlama bilgisine sahip olmayan kişilerin simülatörü tercih etmesini sağlamaktadır.

Dezavantajları
- Belirli sistemler için geliştirildikleri için kullanım alanları kısıtlıdır.

STOKASTİK ÜRETEÇLER

RASSAL SAYI ÜRETEÇLERİNDEN İSTENEN ÖZELLİKLER

(1) Rassallık (2) Büyük Period (3) Yeniden Üretilebilirlik (4) Hesaplama Etkinliği

TEK DÜZE DAĞILIMLI RASTGELE SAYILAR

- Dil derleyicileri [0,1] aralığında tek düze dağılımlı rastgele sayılar için olanak sağlar. Böyle yordamlar U(0,1) olarak bilinir.
- Örneğin; BASIC dilinde RND çağrısı 0 <= x <= 1 aralığında bir x kesri döndürülecektir.
- Bu, ayrık bir rastgele değişkendir; fakat pratikte sürekli olduğu varsayılır.
- 100 defa RND fonksiyonunu çağırırsak;

%10'u 0 ile 0.1 aralığında
%10'u 0.1 ile 0.2 aralığında
⋮
%10'u 0.9 ile 1.00 aralığında dağılımlar oluşacaktır.

RASSAL SAYI ÜRETİMİ İÇİN TEKNİKLER

* Orta Kare Yöntemi * LCG * Hull - Dobell Yöntemi

1) ORTA KARE YÖNTEMİ

1) m basamaklı ve tek sayı (başlangıç değeri olarak alınır)
2) Bu sayının karesi alınır. Sonucun ortasından m basamaklı sayı alınır.
3) Bu sayı rassal sayı olarak kaydedilir.
4) Elde edilen sayının tekrar karesi alınır. Ortasında m basamaklı sayı tekrar rassal sayı olarak kaydedilir.
5) İstenilen sayıda rassal sayı üretene kadar bu işlemlere devam edilir.

ÖRNEK: * $X_0 = 5497$ (m=4 basamaklı)

$(X_0)^2 = 30\underbrace{2170}_{4\text{ basamaklı}}09$ $\qquad U_1 = \frac{2170}{10000} = 0{,}2170$ (U(0,1) olduğunda)

↳ 1. rassal sayımız

* $X_1 = 2170$ (m= 4 basamaklı)

$(X_1)^2 = 4\underbrace{7089}_{4\text{ basamaklı}}00$ $\qquad U_2 = \frac{7089}{10000} = 0{,}7089$

↳ 2. rassal sayımız

* $X_2 = 7089$ (m=4 basamaklı)

$(X_2)^2 = 50\underbrace{2539}_{4\text{ basamaklı}}21$ $\qquad U_3 = \frac{2539}{10000} = 0{,}2539$

↳ 3. rassal sayımız

* 4 basamaklı olduğu için 5 basamaklıya böldük ki 0 ile 1 arasında değer çıksın.

DEZAVANTAJLARI

* İlk sayı ve tekrar uzunluğu (periyod) arasındaki ilişkiyi önceden bilmek mümkün değildir.
* Elde edilen sayılar rassal olmayabilir. Yani dizide dejenerasyon söz konusu olabilir.

2) LCG (Linear Congruential Generators = Lineer Eşleşiksel Üreteçler)

(TEK DÜZE DAĞITIMLI RASTGELE SAYILAR)

* Tek düze rastgele sayı üreteçlerinin çoğu LCG şeklindedir.
* LCG deterministik olup bir algoritmaya bağlıdır.
* Başlamak için bir ilk değer çekirdeğe (z_0) ihtiyaç duyar.
* Bu çekirdek ve z_k dizisinin ardışıl terimleri bir LCG formülüne uygulanır.
* Ardından z_k, $0 \leq U_k < 1$ aralığında bir U_k akışına normalize edilir.

$\boxed{z_0 : \text{Çekirdek}}$ $\boxed{z_{k+1} = (a \cdot z_k + c) \bmod m}$

$\boxed{U_k = \frac{z_k}{m}}$

a = çarpan
c = artım
m = genlik

ÖRNEK 8 $a=5$ $c=3$ $m=16$ ve $z_0=7$ değerleri ile LCG kullanarak oluşturulan sayı dizisini belirleyelim.

Çözüm

$z_0 = 7$

$U_0 = \frac{z_0}{m} = \frac{7}{16} = 0,4375$

$z_{k+1} = (a \cdot z_0 + c) \bmod m$

$z_1 = (5 \cdot 7 + 3) \bmod 16$

$z_1 = 6$

$U_1 = \frac{z_1}{m} = \frac{6}{16} = 0,375$

$z_2 = (5 \cdot 6 + 3) \bmod 16$

$z_2 = 1$

$U_2 = \frac{1}{16} = 0,0625$

$z_3 = (5 \cdot 1 + 3) \bmod 16$

$z_3 = 8$

$U_3 = \frac{8}{16} = 0.5$

$z_4 = (5 \cdot 8 + 3) \bmod 16$

$z_4 = 11$

$U_4 = \frac{11}{16} = 0,6875$

k	Z_k	U_k
0	7	0.4375
1	6	0.375
2	1	0.0625
3	8	0.500
4	11	0.688
5	10	0.625
6	5	0.312
7	12	0.750
8	15	0.938
9	14	0.875
10	9	0.563
11	0	0.000
12	3	0.188
13	2	0.125
14	13	0.813
15	4	0.250
16	7	0.4375

* Dizinin ilk 17 elemanı yandaki gibi.
* m adet tekrar için m farklı sayının oluştuğu durumda seçilen LCG'nin tam periyoda sahip olduğu söylenir.
* m tekrarlı durum için m tane farklı rastgele sayı oluştuğundan LCG seçimi tam periyoda sahiptir. (m=16)
* Z_k'nın bir tekrarında tam bir döngü izler.
* Buradaki LCG tam periyoda sahiptir.

$U_{16} = \frac{Z_{16}}{m} = \frac{7}{16} = 0,4375$ (U_0'ın aynısı)

- Bu yüzden max m farklı değer üretir dedik.

* Tam periyoda sahip olup olmadığı uygun a, c ve m değerleri ile belirlenir. Bunun şartları ;

① c ile m aralarında asal (ikisinin de en büyük ortak böleni 1), $a = 1+4k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), $m = 2^b$ ve $c \neq 0$ ise ;

$$\boxed{\text{Periyot} = m = 2^b}$$

② Z_0 başlangıç değeri tek sayı, a değeri ; $a = 3+8k$ veya $a = 5+8k$ ($k = 0, 1, 2 \ldots$) $m = 2^b$ ve $c = 0$ ise ;

$$\boxed{\text{Periyot} = m/4 = 2^{b-2}}$$

③ a çarpanına bağlı ; en küçük k tamsayısı için ; $a^k - 1 \bmod m = 0$, m asal sayı, $c = 0$ ise ;

$$\boxed{\text{Periyot} = m - 1}$$

* Öyle bir k bulunacak ki olabilecek kadar küçük olacak ve m'e bölümü 0 olacak.

ÖRNEK: $a=13$ $m=2^6=64$ $z_0=1,2,3$ ve 4 için tam periyoda sahip olup olmadığını bulunuz. $(c=0)$

<u>Çözüm</u>

$m=2^6$ $z_0=1$ ve 3 için $a=5+8k=13$ $c=0$ ... kural 2

Periyot $= m/4 = 64/4 = 16$

$z_0=1$ ve 3 için periyot $=16$

* $z_0=2$ ve 4 hiçbir kurala uymadığı için tek tek bakarız.

i	x_i	x_i	x_i	x_i
0	1	2	3	4
1	13	26	39	52
2	41	18	59	36
3	21	42	63	20
4	17	34	51	4
5	29	58	23	52
6	57	50	43	
7	37	10	47	
8	33	2	35	
9	45	26	7	
10	9		27	
11	53		31	
12	49		19	
13	61		55	
14	25		11	
15	5		15	
16	1		3	

* $z_0=1$ ve 3 için 2. kural sağladığı için periyot $=16$ olmuştur.
2. kuralı sağladığından tam periyodu 16 çıkar.

* $z_0=2$ ve 4 için hiçbir kuralı sağlamadığı için tek tek bakarız.

$z_0=2$ için periyodu 8
$z_0=4$ için periyodu $=4$

$z_0=1$ ve 3 için kuralı sağladığından periyodiktir deriz.

ÖRNEK: $z_0=63$ $a=19$ $c=0$ $m=10^2=100$

<u>Çözüm</u>: $c=0$ $z_0=63$ tek sayı $a=3+8\underset{2}{k}=19$ $m=2^b \neq 10^2$ old. için hiçbir kuralı sağlamaz. Tek tek bakarız.

$z_0=63$

$z_{k+1}=z_1=(19\cdot 63+0) \bmod 100 = 97$

$z_2=(19\cdot 97+0) \bmod 100 = 43$

$z_3=(19\cdot 43+0) \bmod 100 = 17$

$z_4=(19\cdot 17+0) \bmod 100 = 23$

$z_5=(19\cdot 23+0) \bmod 100 = 37$

$z_6=(19\cdot 37+0) \bmod 100 = 3$

$z_7=(19\cdot 3+0) \bmod 100 = 57$

$z_8=(19\cdot 57+0) \bmod 100 = 83$

$z_9=(19\cdot 83+0) \bmod 100 = 77$

$z_{10}=(19\cdot 77+0) \bmod 100 = 63$ → 10. adımda kendini tekrar ediyor.

Periyot $=10$

3) HULL-DOBELL TEOREMİ

* Bu teorem tam periyodu elde etmek için gerekli ve yeterli şartları sağlar.
* LCG ancak ve ancak aşağıdaki üç şartı sağlıyorsa tam periyoda sahiptir.

I. a ve c asal olmalı.
II. m sayısının bölünebildiği bütün asal sayılara, a-1'de bölünebilmeli.
III. Eğer m 4'e bölünebiliyorsa a-1'de 4'e bölünmeli.

ÖRNEK: $a=5$ $c=3$ $m=16$ ve $z_0=7$

* 3 ve 5 asal (I. şart)
* 16'nın bölünebildiği asal sayılar: 2, $a-1=5-1=4$ a-1'de 2'ye bölünmeli. 4, 2'ye bölünür. (II. şart)
* Eğer $m=16$, 4'e bölünebiliyorsa, $a-1=5-1=4$ te 4 e bölünmeli. 4, 4'e bölünür. (III. şart)

- Bütün şartları sağladığı için tam periyoda sahiptir.

⇒ Bir bilgisayar uygulaması bu algoritmayı donanım açısından ele alır. Çünkü işlemler hesaplama ve hız açıklıdır.

⇒ İşlem makineye shift register kullanılarak yaptırılır.

⇒ m, 2'nin kuvveti şeklinde ele alınır.

* Yukarıdaki örnekte; $m=16=2^4$'tür. Dolayısıyla LCG 4-bit shift register ile tau sayıları gösterebilir.

$$R=[r_{-1}\ r_{-2}\ r_{-3}\ r_{-4}]$$

Register içeriği 4 bit olacaktır.

* $z_6=5$ olduğundan $R=[0101]$'dir. z_7'yi elde etmek için;
* $z_7=5 \cdot z_6+3$ $R=[11100]=28$ Buradaki baştaki 1 shift register 4 bit olduğundan kaybedilir. $28 \pmod{16}=12$ $R=[1100]$

* İkili nokta uygulandığında $(0.1100)_2=0.75$ dir.

→ Gerçek bilgisayarlarda farklı ölçüde üreteçler vardır. IBM'in RANDU üreteçleri, $a=2^{16}+3$ $c=0$ ve $m=2^{31}$ değerlerine sahiptir.

ÜRETEÇLERİN İSTATİKSEL ÖZELLİKLERİ

* Donanım hesaplanabilirliği için seçilen mod işlemi ve geniş bir periyoda sahip olmanın yanı sıra bir U[0,1] üreteci istatiksel anlamda iyi olmalıdır. Şu iki özelliği sağlaması önemlidir;

1) Üreteç Tek Düze Olmalı (Uniform): Herhangi bir 1 uzunluk aralığında oluşan sayıların miktarı, diğer bir 1 uzunluk aralığında oluşan sayıların miktarına yakın olmalıdır.

2) Dizi Bağımsız Olmalı: Herhangi bir sayı, bir sonrakine etkisini göstermemeli. Aksi halde dizi boşluk veya gruplama eğilimi gösterir.
   * Üreteçleri test etmek için teorik ve deneysel araçlar vardır.
   * Birinci özelliği test etmek için Chi-Square (Ki-Kare) testi uygulanır.

Kı-Kare Testi

* Beklenen frekans değerleri ile gözlenen frekans değerlerini karşılaştırıp aradaki uyuma bakılmasıdır.

Frekans Dağıtım Tablosu

Aralık Sayısı	Aralık	Deneysel Frekans (f_k)	Beklenen frekans (e_k)
1	$[0, 1/m]$	f_1	e_1
2	$[1/m, 2/m]$	f_2	e_2
3	$[2/m, 3/m]$	f_3	e_3
⋮	⋮	⋮	⋮
m	$[\frac{m-1}{m}, 1]$	f_m	e_m

* Bu test için FDT'den (Frequency Distribution Table) faydalanılır.
* m tane rastgele sayı oluşturulacak ve her birini bir m sınıfına atayarak $f_1, f_2, \ldots f_m$ frekansları çizelgeye geçirilir.
* Her bir sınıf için beklenen $e_k = \frac{n}{m}$ frekansı ile karşılaştırılır.

$$* \quad \boxed{X^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(f_k - e_k)^2}{e_k} = \frac{m}{n} \sum_{k=1}^{m} \left(f_k - \frac{n}{m}\right)^2}$$

* $V = m-1 \longrightarrow$ bağımsızlık derecesi

ÖRNEK: SNAFu olarak isimlendirilen U[0,1] üreteci 100 sayı üreterek test edilmiş ve frekansları sayılmıştır. Frekans değerleri aşağıda verilmiştir.

$(\alpha = 0.05)$ ← Soruda veriliyor

1) $0.00 \leq x < 0.25$
2) $0.25 \leq x < 0.50$
3) $0.50 \leq x < 0.75$
4) $0.75 \leq x < 1.0$

SONUÇLAR

$f_1 = 21$
$f_2 = 31$
$f_3 = 26$
$f_4 = 22$

Üretecin uniform olup olmadığını bulunuz.

Çözüm:

1. Adım: $n = 100$ (örnek sayısı)
$m = 4$ (aralık sayısı)

$$e_k = \frac{n}{m} = \frac{100}{4} = 25$$

→ her sınıfta olması beklenen sayıların sayısı.

2. Adım: (ki-kare testinin formülü);

$$x^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(f_k - e_k)^2}{e_k} = x^2 = \frac{4}{100}\left[(21-25)^2 + (31-25)^2 + (26-25)^2 + (22-25)^2\right] = 2.48$$

3. Adım: (Bağımsızlık derecesi $V = m-1$) (Slayt 18)

$V = 4 - 1 = 3$ → ki-kare tablosunun 3. satırı

x^2 değeri; $\alpha = \%95$ $x_c^2 = 7.81$ olduğu ki-kare tablosundan bulunabilir.

$x^2 < x_c^2$ olduğundan uniform olduğu söylenebilir.

TEK DÜZE OLMAYAN RASTGELE DEĞİŞKENLERİN ÜRETİMİ

* İsteğe bağlı sayıları oluşturabilmek için bilinen bazı algoritmalar;

1. Ters Dönüşüm Metodu
2. Red Metodu
3. Konvolüsyon Metodu

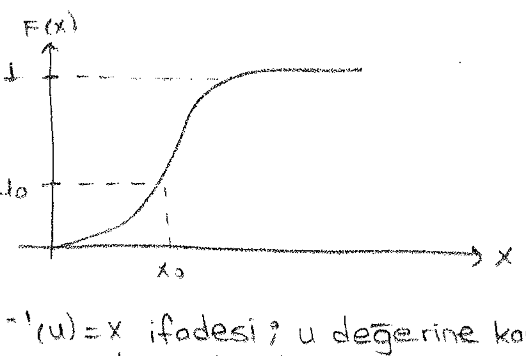
1) TERS DÖNÜŞÜM (INVERSE) METODU

f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonunun verildiğini kabul edelim. Amaç f(x)'ten bir rassal değişken üretmektir.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \qquad 0 \leq F(x) \leq 1$$

$u = f(x)$ için $x = F^{-1}(u)$ ters fonk.

$u \sim U(0,1)$



Yani X'e karşılık gelen U'ların üretilmesi gerek.

$F^{-1}(u) = x$ ifadesi; u değerine karşılık gelen x değerlerini belirler.
$0 \leq F(x) \leq 1$. F(x) artan bir fonksiyondur.

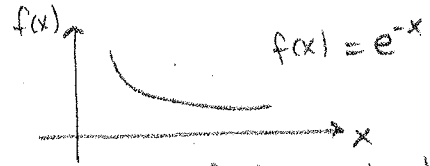
Algoritması:

1. $u \sim U(0,1)$ rastgele değişken üret.
2. $X = F^{-1}(u)$'dan X rastgele değerlerini hesapla.
3. RETURN

NOT: Hangi dağılımlar için rassal değişkenler üretilir.?

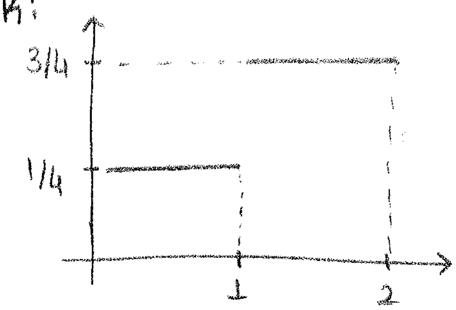
- → Üssel
- → Uniform
- → Üçgen dağılım
- → Sürekli ve ayrık deneysel dağılımlar

NOT: Üstel fonksiyonda $f(x)$ şöyledir;



$0 \leq f(x) \leq 1$ olmalı.

ÖRNEK:



$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & , \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Yukarıda verilen $f(x)$ parçalı fonksiyonu kullanarak ters dönüşüm yöntemiyle rassal değişken üretiniz.

Çözüm: 1) $0 \leq x \leq 1$ aralığı için;

$$U = f(x) = \int_0^x \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}x \Big|_0^x = \frac{1}{4}x \qquad (0 \leq x < 1)$$

$$U = \frac{1}{4}x \longrightarrow x = 4u \longrightarrow \left.\begin{array}{ll} x=0 \text{ için} & u=0 \\ x=1 \text{ için} & u=\frac{1}{4} \end{array}\right\} 0 \leq u \leq \frac{1}{4}$$

2) $1 \leq x \leq 2$ aralığı için;

$$U = f(x) = \int_0^1 \frac{1}{4}\,dx + \int_1^x \frac{3}{4}\,dx = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$u = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{4u}{3} + \frac{2}{3}} \Rightarrow \begin{array}{ll} x=1 \text{ için} & u = 1/4 \\ x=2 \text{ için} & u = 1 \end{array}$$

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 4u & , \quad 0 \leq u < 1/4 \\ \frac{4u}{3} + \frac{2}{3} & , \quad \frac{1}{4} \leq u < 1 \end{cases}$$

Devam :)

3) Algoritması :

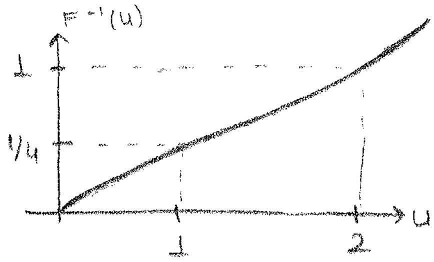
1) $u \sim u(0,1)$

2) if $u < 1/4$, $x = 4u$

3) if $u \geq 1/4$, $x = \frac{4u+2}{3}$

4) return

4) Grafik



ÖRNEK: Üstel dağılımdan rassal değişken üreten algoritmayı yazın.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{\frac{-x}{\beta}} & , x>0 \\ 0 & , dd \end{cases}$$

NOT

* $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$
* $\int e^x dx = e^x$
* $\int e^{-cx} . dx = -\frac{1}{c} e^{-cx}$

Çözüm

f(x) değerini hesapla.

$$U = f(x) = \underbrace{\int_0^x \frac{1}{\beta} e^{\frac{-x}{\beta}}} = -e^{\frac{-x}{\beta}} \Big|_0^x = -e^{\frac{-x}{\beta}} + 1$$

$$\frac{1}{\beta} \int_0^x e^{\frac{-x}{\beta}} = \frac{1}{\beta} \cdot -\beta \, e^{\frac{-x}{\beta}}$$

$$U = F(x) = 1 - e^{-x/\beta}$$

$$\underbrace{\log_e}_{\ln} e^{\frac{-x}{\beta}} = 1 - F(x) \; ------ \underbrace{\frac{-x}{\beta} = \ln(1 - F(x))}$$

$$X = -\beta + \ln(1 - F(x))$$

$$X = -\beta + \ln(1-u) \text{ ya da } x = -\beta \ln u$$

Algoritması

1) $u \sim u(0,1)$

2) $x = -\beta \ln u$

3) RETURN

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} 7 \cdot e^{-7x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

olasılık yoğunluk fonk. verilmiştir. Buna göre $F^{-1}(u) = ?$

ÇÖZÜM

Verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu ; aynı zamanda kümülatif olasılık yoğunluk fonksiyonudur. (Eğri altındaki alan)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} F(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 7 \cdot e^{7x}\,dx = 1 - e^{-7x} \Rightarrow \begin{cases} 1 - e^{-7x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = U = 1 - e^{-7x}$$

$u = 1 - e^{-7x} \rightarrow e^{-7x} = 1 - u$ (Her iki tarafın ln'ini alırsak)

$$-7x = \ln(1-u)$$

$$x = -\frac{\ln(u)}{7}$$

1. integral al
2. U'ya eşitle
3. x'i yalnız bırak

Son olarak rassal U değişkenleri üret. Buna karşılık gelen x'i hesapla.

$7 = 1$ olsun. Hesaplanan Ui'ler;

$U = 0.1306$ için $x_1 = -\ln(1-u) = 0.14$

$U = 0.0422$ için $x_2 = -\ln(1-u) = 0.0431$

$U = 0.6597$ için $x_3 = -\ln(1-u) = 1.078$

$U = 0.7915$ için $x_4 = -\ln(1-u) = 1.56$

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{24} & , 2 < x \leq 10 \\ 0 & , d.d \end{cases}$$

ters dönüşüm tekniğini uygula.

ÇÖZÜM

1) $f(x) = \int_0^x \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}x\Big|_0^x = \frac{x}{3} = u \quad \boxed{x = 3u}$

$\left.\begin{matrix} x = 0 \text{ için } u = 0 \\ x = 2 \text{ için } u = \frac{2}{3} \end{matrix}\right\} 0 \leq u < \frac{2}{3}$

2) $f(x) = \int_0^2 \frac{1}{3}\,dx + \int_2^x \frac{1}{24}\,dx = \frac{1}{3}x\Big|_0^2 + \frac{x}{24}\Big|_2^x = \frac{2}{3} + \frac{x}{24} - \frac{1}{12} = \frac{16 + x - 2}{24} = u \quad \boxed{x = 24u - 14}$

$\left.\begin{matrix} x = 2 \text{ için } u = \frac{2}{3} \\ x = 10 \text{ için } u = 1 \end{matrix}\right\} \frac{2}{3} < u \leq 1$

3) $$f^{-1}(u) = \begin{cases} 3u & 0 \leq u \leq \frac{2}{3} \\ 24u - 14 & \frac{2}{3} < u \leq 1 \end{cases}$$

4) Algoritması

1) $u \sim U(0,1)$
2) if $u < \frac{2}{3} \rightarrow x = 3u$
3) if $u \geq \frac{2}{3} \rightarrow x = 24u - 14$
4) RETURN

ÖRNEK: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-2) & 2 \le x \le 3 \\ \frac{1}{2}(2-\frac{x}{3}) & 3 < x \le 6 \\ 0 & d.d \end{cases}$ ters dönüşüm tekniğini uygulayınız.

Çözüm:

1\. Adım $\Rightarrow$ $F(x) = \int_2^x (\frac{x}{2} - 1)\,dx = \frac{x^2}{4} - x \Big|_2^x = \left(\frac{x^2}{4} - x\right) - (-1) = \frac{x^2 - 4x}{4} + 1$

$$u = \frac{x^2 - 4x + 4}{4} \rightarrow 4u = x^2 - 4x + 4 \qquad x^2 = 4u + 4$$
$$4u + 4 = x^2 - 4x \qquad \boxed{x = \sqrt{4u} + 2}$$

$\rightarrow$ $x = 2$ için $u = 0$; $x = 3$ için $u = \frac{1}{4}$ $\qquad 0 \le u < \frac{1}{4}$

2\. Adım $\Rightarrow$ $F(x) = \int_2^3 (\frac{x}{2} - 1)\,dx + \int_3^x (1 - \frac{x}{6})\,dx = \frac{x^2}{4} - x \Big|_2^3 + x - \frac{x^2}{12} \Big|_3^x$

$$= \frac{x^2 - 4x}{4} \Big|_2^3 + \frac{12x - x^2}{12} \Big|_3^x$$
$$= \left(\frac{-3}{4} - (-1)\right) + \left(\frac{12x - x^2}{12} - \frac{27}{12}\right)$$
$$u = \frac{1}{4} + \frac{12x - x^2 - 27}{12} = \frac{3}{12} + \frac{12x - x^2 - 27}{12}$$
$$(3)$$
$$u = \frac{12x - x^2 - 24}{12}$$
$$x^2 - 12x + 24 = -12u$$
$$x^2 - 12x + 36 - 12 = -12u$$
$$(x-6)^2 = 12 - 12u$$
$$x = \sqrt{12 - 12u} + 6$$

$x = 3$ için $u = \frac{1}{4}$

$x = 6$ için $u = 1$

$$\frac{1}{4} \le u \le 1$$

3\. Adım

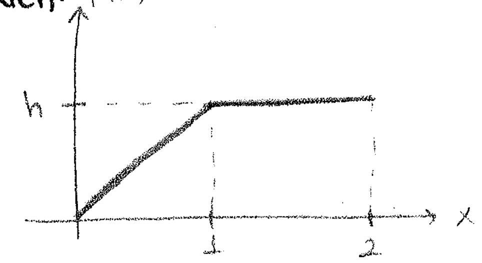
$$F^{-1}(u) = \begin{cases} \sqrt{4u} + 2, & 0 \le u < \frac{1}{4} \\ \sqrt{12 - 12u} + 6, & \frac{1}{4} \le u \le 1 \end{cases}$$

4\. Adım

Algoritması:

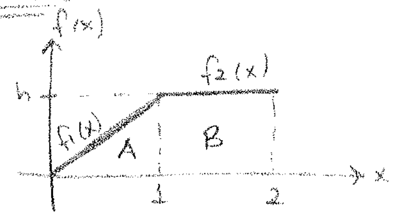
1) $u \sim U(0,1)$
2) if $u < \frac{1}{4}$ $x = \sqrt{4u} + 2$
3) if $u \ge \frac{1}{4}$ $x = \sqrt{12 - 12u} + 6$
4) RETURN

ÖRNEK:



f(x)'e uygun rassal değişken üreten algoritmayı tersdönüşüm ile çıkartınız.

Çözüm:



$f_1(x) = h \cdot x$ → orijinden geçer
$f_2(x) = h$ → sabit

(0,1) aralığında çalıştığımızdan eğri altındaki alan maksimum 1 olabilir.

$$A + B = 1$$

$$1 \cdot h + \frac{1 \cdot h}{2} = 1 \qquad \boxed{h = \frac{2}{3}}$$

$$F(x) = \begin{cases} hx, & 0 \leq x \leq 1 \\ h, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{3}, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

1) $U = \int_0^x \frac{2}{3}x\,dx = \frac{1}{3}x^2$

$u = \frac{1}{3}x^2 \qquad 3u = x^2$
$x = \sqrt{3u}$

$x = 0$ için $u = 0$
$x = 1$ için $u = \frac{1}{3}$

2) $U = \int_0^1 \frac{2}{3}x\,dx + \int_1^x \frac{2}{3}\,dx$

$= \frac{1}{3}x^2 \Big|_0^1 + \frac{2}{3}x \Big|_1^x$

$u = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

$u = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

$x = \frac{3u+1}{2}$

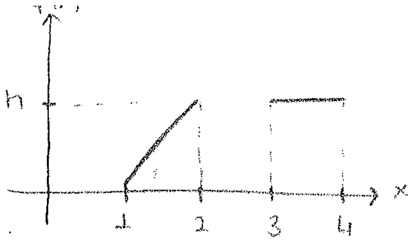
$x = 1$ için $u = \frac{1}{3}$
$x = 2$ için $u = 1$

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} \sqrt{3u}, & 0 \leq u \leq \frac{1}{3} \\ \frac{3u+1}{2}, & \frac{1}{3} \leq u \leq 1 \end{cases}$$

Algoritması:

1) $u \sim U(0,1)$
2) if $u < \frac{1}{3} \rightarrow x = \sqrt{3u}$
3) if $u > \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{3u+1}{2}$
4) RETURN

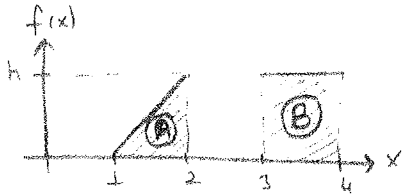
ÖRNEK:



f(x) fonksiyonundan ters dönüşüm tekniği ile rassal değişken üreten algoritmayı yazınız.

Çözüm:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & 1\leq x\leq 2 \\ f_2(x) & 3\leq x\leq 4 \end{cases}$$



$A+B=1$

$\frac{1\cdot h}{2}+1\cdot h=1$

$h=\frac{2}{3}$

* $f_1(x) \Rightarrow (1,0)$ noktasından geçmekte. Bir noktası verilen doğru denklemi;

$f_1(x)=m\cdot(x-x_1)$ ile bulunur. $m=\tan\alpha=\frac{h}{2-1}=\frac{2/3}{1}=2/3$

$f_1(x)=\frac{2}{3}\cdot(x-1) \longrightarrow f_1(x)=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$

$f_2(x) \Rightarrow$ sabit h noktasında olduğundan $f_2(x)=\frac{2}{3}$'tür.

$$F(x)=\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{2}{3} & , 1\leq x\leq 2 \quad (1) \\ \frac{2}{3} & , 3\leq x\leq 4 \quad (2) \end{cases}$$

1) $U=F(x)=\int_1^x\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)dx=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x\Big|_1^x=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}=u$

$3u=x^2-2x+1$

$3u=(x-1)^2 \longrightarrow x=1+\sqrt{3u}$

$x=1$ için ; $u=0$

$x=2$ için ; $u=1/3$

$0\leq u\leq\frac{1}{3}$

2) $u=F(x)=\int_1^2\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)dx+\int_3^x\frac{2}{3}dx=\frac{1}{3}+\frac{2x}{3}-2=\frac{2x}{3}-\frac{5}{3}$

$u=\frac{2x-5}{3}$ $\quad 3u=2x-5 \quad x=\frac{3u+5}{2}$

$x=3$ için ; $u=\frac{1}{3}$

$x=4$ için ; $u=1$

$\frac{1}{3}\leq u\leq 1$

Sonuç

$$F^{-1}(u)=\begin{cases} 1+\sqrt{3u} & , 0\leq u\leq\frac{1}{3} \\ \frac{3u+5}{2} & , \frac{1}{3}\leq u\leq 1 \end{cases}$$

Algoritması

1) $u \sim U(0,1)$
2) if $0\leq u<\frac{1}{3}$
2) if $\frac{1}{3}\leq u<1$
4) RETURN

ÖRNEK:

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1\le x\le 2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases} \qquad F^{-1}(x)=?$$

Çözüm :

1) $U=F(x)=\int_0^x x\,dx=\frac{x^2}{2} \longrightarrow u=\frac{x^2}{2} \rightarrow \boxed{x=\sqrt{2u}} \qquad 0\le x\le 1$

$x=0$ için ; $u=0$
$x=1$ için ; $u=\frac{1}{2}$ $\Big\}\ 0\le u\le \frac{1}{2}$

2) $u=F(x)=\int_0^1 x\,dx+\int_1^x (2-x)\,dx=\frac{1}{2}+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2} \qquad 1\le x\le 2$

$=-\frac{x^2}{2}+2x-1=\frac{-x^2+4x-2}{2}$

$u=1-\frac{(2-x)^2}{2}$

$1-u=\frac{(2-x)^2}{2} \rightarrow 2-2u=(2-x)^2$

$\boxed{x=2-\sqrt{2-2u}}$

$x=1$ için ; $u=\frac{1}{2}$
$x=2$ için ; $u=1$
$\frac{1}{2}\le u\le 1$

$$F^{-1}(u)=\begin{cases}\sqrt{2u}, & 0\le u\le\frac{1}{2} \\ 2-\sqrt{2-2u}, & \frac{1}{2}\le u\le 1\end{cases}$$

Algoritması
1) $u\sim U(0,1)$
2) if $u<\frac{1}{2}$
3) if $u>\frac{1}{2}$
4) RETURN

ÖRNEK:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b \\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases} \qquad F^{-1}(x)=?$$

Çözüm :

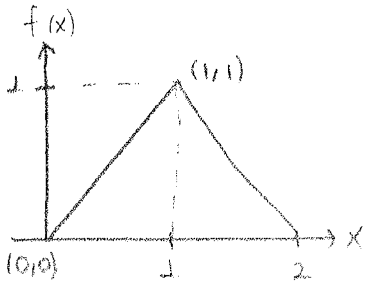
$$F(x)=U=\int_a^x \frac{1}{b-a}\,dx=\frac{x}{b-a}-\frac{a}{b-a} \qquad a\le x\le b$$

$$U=\frac{x}{b-a}-\frac{a}{b-a} \Rightarrow u+\frac{a}{b-a}=\frac{x}{b-a} \qquad x=u\cdot(b-a)+a$$

$x=a$ için ; $u=0$
$x=b$ için ; $u=1$

$$F^{-1}(u)=\{\,u(b-a)+a,\ 0\le u\le 1$$

Ters Dönüşüm Tekniğiyle Üçgen Fonk. Rassal Sayı Üretimi



$x_0 y_0 = 0\,0$ $\quad x_1 y_1 = 1\,1$

$y = mx+n$ $\quad 0 = n$ $\quad \boxed{y = x}$ $\quad 1 = m+n$ $\quad \boxed{m = 1}$

$x_0 y_0 = 1\,1$ $\quad x_1 y_1 = 2\,0$

$y = mx+n$ $\quad 1 = m+n$ $\quad \boxed{n=2}$ $\quad 2m+n = 0$ $\quad \boxed{m = -1}$

$\boxed{y = -x+2 = 2-x}$

1. Adım

$$F(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

2. Adım

(1) $F(x) = \int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{2} = u \qquad x = \sqrt{2u}$

$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \text{ için } u=0 \\ x=1 \text{ için } u=\frac{1}{2} \end{array} \right\}$

(2) $F(x) = \int_0^1 x\,dx + \int_1^x (2-x)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^x - \frac{x^2}{2}\Big|_1^x$

$= \frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2}$

$= \left(2x - \frac{x^2}{2} - 1\right) = u$

X'i u cinsinden yazmak gerek.

2 ile çarparsak

$4x - x^2 - 2 = 2u$

2 ile çıkartırsak

$-/4x - x^2 - 4 = 2u - 2$

$-x^2 - 4x + 4 = 2 - 2u$

$(x-2)^2 = 2 - 2u$

$x - 2 = \sqrt{2(1-u)}$

$x = \sqrt{2(1-u)} + 2$

$x = 1$ için $u = \frac{1}{2}$

$x = 2$ için $u = 1$

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} \sqrt{2u}, & 0 \leq u \leq \frac{1}{2} \\ \sqrt{2(1-u)} + 2, & \frac{1}{2} \leq u \leq 1 \end{cases}$$

DENEYSEL DAĞILIMDAN RASSAL SAYI ÜRETİMİ

Elimizde model yok sadece veri varsa bu verilerden de sayı üretebiliriz. Rassal sayı üretirken alg. kullanmak gerekir.

1) Deneysel olınan veriler sıralanır. $x(1) < x(2) < x(3) \ldots < x(n)$
2) Veriler aralıklara bölünür. $x(0) = 0$
3) Her bir aralığın olasılığı hesaplanır. Aralık sayısı n ise olasılık $\frac{1}{n}$ 'dir.
4) Her bir aralık için eğim bulunur.
5) $x = F^{-1}(u)$ u değeri, $\frac{(i-1)}{n} \leq u \leq \frac{i}{n}$ ile hesaplanır.

(Kümülatif olasılıklar kullanılarak değişken üretimi sağlanır.)

Eğim ai ile gösterilir.

$$a_i = \frac{x(i) - x(i-1)}{\frac{i}{n} - \frac{(i-1)}{n}} = \frac{x(i) - x(i-1)}{1/n}$$

$$\boxed{F^{-1}(x) = x(i-1) + a_i\left(u - \frac{(i-1)}{N}\right)}$$

ÖRNEK: Bir itfaiye servisine 5 tane çağrı aşağıdaki şekilde gelmektedir. 2.76 dk, 1.83 dk, 0.8 dk, 1.45 dk, 1.24 dk da çapirmiş. Buna göre, bu verilerden rassal sayı üretimini ters dönüşüm tekniği? (R=0,71)

Çözüm: Gözlemler → 2.76, 1.83, 0.8, 1.45, 1.24

Küçükten büyüğe → 0.8 < 1.24 < 1.45 < 1.83 < 2.76

n = 5 → gözlem sayısı

$\frac{1}{n} = \frac{1}{5} = 0,2$ → olasılık

(Veri sayısı az olduğu için kullandık)

0.0 – 0.8	0.8 – 1.24	1.24 – 1.45	1.45 – 1.83	1.83 – 2.76
1	2	3	4	5

$x_{i-1} < x < x_i$ (x_{i-1} ile x_i arasında rastgele sayı üreteceğiz)

$$\boxed{a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{1/n} \text{ (eğim)}}$$

$$\boxed{X = F^{-1}(u) = x_{i-1} + a_i\left(u - \frac{(i-1)}{n}\right)}$$

$$\boxed{\frac{i-1}{n} < u \leq \frac{i}{n}}$$

i	Aralık	Olasılık (1/N)	Kümülatif Olasılık (i/n)	Eğim (ai)
1	$0 < x \leq 0.8$	0,2	0.2	4
2	$0.8 < x \leq 1.24$	0,2	0.4	2.2
3	$1.24 < x \leq 1.45$	0,2	0.6	1,05
4	$1.45 < x \leq 1.83$	0,2	0.8	1,9
5	$1.83 < x \leq 2.76$	0,2	1.0	4,65

→ 0.71 bu aralığa denk gelmekte.

Eğimler

$\frac{0.8-0}{0.2} = 4$

$\frac{1.24-0.8}{0.2} = \frac{0,44}{0,2} = 2,2$

$\frac{1.45-1.24}{0,2} = 1,05$

$\frac{1,83-1,45}{0,2} = 1,09$

$\frac{2,76-1,83}{0,2} = 4,65$

$U = 0.71$ için; $\frac{i-1}{n} < 0{,}71 \leq \frac{i}{n}$ → $\frac{3}{5} < u \leq \frac{4}{5}$ (4. aralıkta)

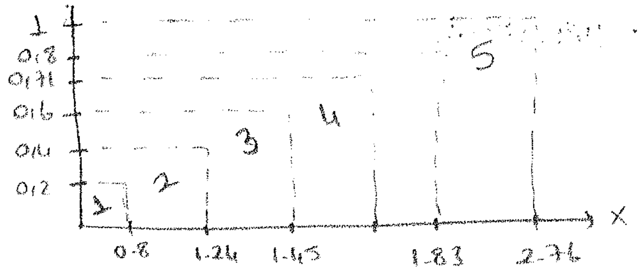
$$X = x_{i-1} + a_i\left(u - \frac{(i-1)}{n}\right)$$

$$= x_{(4-1)} + a_4\left(u - \frac{(4-1)}{5}\right)$$

$$= x_3 + 1.9\left(0.71 - \frac{3}{5}\right)$$

$$= 1.45 + 1.9\,(0.71 - 0.6)$$

$$= 1.66 \text{ (4. aralıkta)}$$



* Veri sayımız çok ise yani 1000 sayı üretilmişse aralıkların frekansına bakmak ve kümülatif frekanslara bakmak gerekir. Daha önce hesaplamış olduğumuz eğim fonk.

$$a(i) = \frac{x(i) - x(i-1)}{c(i) - c(i-1)}$$

$c(i) \to$ kümülatif frekans

$u \to$ rassal değişken

$$\boxed{X = F^{-1}(u) = x(i-1) + a_i\,(u - c_{i-1})}$$!

ÖRNEK: Bir teknik serviste 100 bilgisayar tamir için gönderiliyor. Bu bilgisayarlardan 31 tanesi 0,25 saat ile 0,5 saat arasında, 10 tanesi 0,5 ile 1,0 aralığında, 25 tanesi 1,0 ile 1,5 saat arasında, 34 tanesi 1,5 ile 2,0 saat arasında tamir ediliyor. Buna göre herhangi bir bilgisayar gönderildiğinde bunun tamir süresini bulan yöntemi geliştir. ($X_0 = 25$)

Çözüm

i	Aralık	Frekans	(olasılık) Göreceli Frekans	Kümülatif Frekans $\to C$	Eğim
1	$0{,}25 < X \leq 0{,}5$	31	0,31	0.31	0,81
2	$0{,}5 < X \leq 1{,}0$	10	0,1	0.41	5,0
3	$1{,}0 < X \leq 1{,}5$	25	0,25	0.66	2,0
4	$1{,}5 < X \leq 2{,}0$	34	0,34	1.0	1,47

Eğimler

$$\frac{0{,}5 - 0{,}25}{0{,}31 - 0} = 0{,}81$$

$$\frac{1{,}0 - 0{,}5}{0{,}41 - 0{,}31} = 5{,}0$$

$$\frac{1{,}5 - 1{,}0}{0{,}66 - 0{,}41} = 2{,}0$$

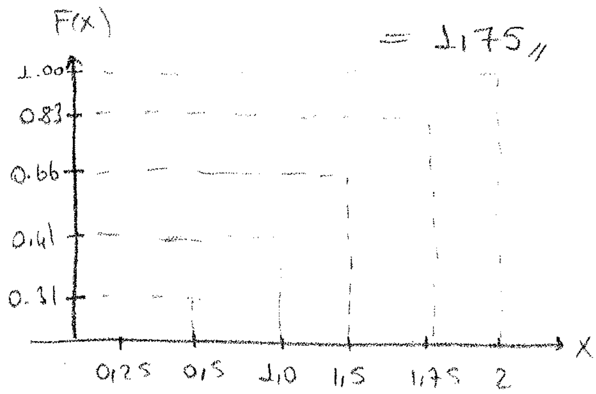
$$\frac{2{,}0 - 1{,}5}{1{,}0 - 0{,}66} = 1{,}47$$

$$\boxed{X = x(i-1) + a_i\,(R - C(i-1))}$$

$R = 0{,}83$

$C_{i-1} < u \leq C_i \to 0{,}66 < 0.83 \leq 1.0$ olduğundan 4. aralıkta

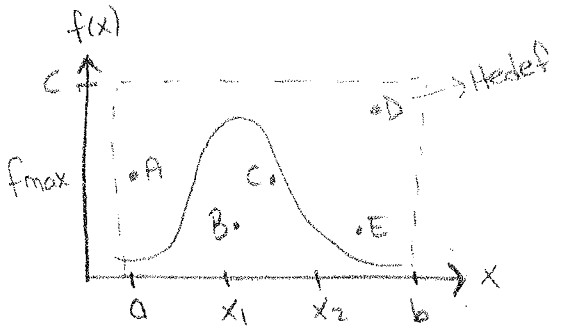
$$X = F^{-1}(u) = X(4-1) + a_4\,(0{,}83 - 0{,}66)$$
$$= X_3 + a_4\,(R - C_3)$$
$$= 1{,}5 + 1{,}47\,(0{,}83 - 0{,}66)$$
$$= 1{,}75$$



REDDETME TEKNİĞİ (KABUL–RET YÖNTEMİ)

- Sürekli ve sınırlı olan bir f(x) olasılık yoğunluk fonk. rassal değişken üretmek için kullanılan genel bir metoddur. Sürekli bir x rassal değişkeni için f(x)'i 0 ile fmax arasındadır.

$$0 \leq f(x) \leq f_{max} \quad , a \leq x \leq b \text{ 'dir.}$$



→ $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq c$

→ Alg. hedef alanına düşen nok. dizisini seçer.

→ x, y koordinatları için;

$x = a+b-a \cdot RND$

$y = c * RND$

→ A, D, E hedef içinde olsada, eğrinin dışında olduğu önemsenmez.

→ B ve C, X_1 ve X_2 nok. için iki rastgele değişkendir.

$$\boxed{\begin{array}{l} x = a+b-a \cdot RND \\ y = c * RND \\ \text{if } y > fx \text{ then goto } 1 \\ \text{print } x \end{array}}$$

Diyelimki X_1 ve X_2 rassal sayı üretilsin. X_1 B'ye denk geliyorsa eğrinin içinde kalıyorsa kabul et, eğrinin dışında kalıyorsa reddet. Ta ki doğrulama yapana kadar devam et.

$x = a + (b-a) * rand$ ※ a ile b aralığında rassal sayı üretme

$y = c * rand$

➡ Amaç kara-kutuya denk gelen değerlerden seçim yapmak

D - E → önemsenmez, eğrinin dışında kaldığından

B - C → eğrinin altında kaldığından ret yöntemi (reddetme) olur.

REDDETME TEKNİĞİ ADIMLARI

1. Adım ⇒ t fonk. tanımla, her x_i için $t(x) \geq f(x)$ olmalı.

2. Adım ⇒ $C = \int_{-\infty}^{\infty} t(x)dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = 1$ $\quad \boxed{c = \int t(x)\, dx}$

   t(x) fonk. bir olasılık yoğunluk fonksiyonu değildir. Çünkü $c > 1$

3. Adım ⇒ $rx = \frac{t(x)}{c}$ olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

4. Adım ⇒ r(x) olasılık yoğunluk fonksiyonundan y rassal değişkeni aşağıdaki algoritma ile üretilebilir.

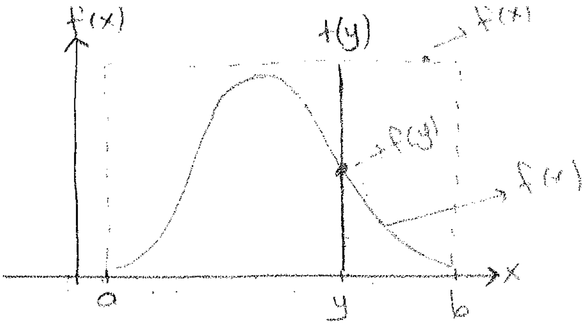
   1. r(x) yoğunluk fonksiyonundan y rassal değişkeni üret.

      $U_1 \sim u(0,1)$; $y = x$

   2. $U_2 \sim u(0,1)$ üret (y'den bağımsız)

   3. $U_2 \leq \frac{f(y)}{t(y)}$ ise $x = y$ and return

ÖRNEK:



Yandaki şekilde Reddetme Yöntemine göre düzenle.

1. Adım : $t(x) = q$ olsun.

2. Adım : $c = \int_a^b t(x)\,dx = \int_a^b q \cdot dx = q \cdot (b-a)$

3. Adım : $r(x) = \frac{t(x)}{c} = \frac{q}{q \cdot (b-a)} = \frac{1}{b-a}$

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & d.d \end{cases}$$

4. Adım :

1) $u_1 \sim u(0,1)$ üret. $y = a + u_1 \cdot (b-a)$
2) $u_2 \sim u(0,1)$ üret
3) $u_2 \leq \frac{f(y)}{t(y)}$ ise, $x = y$

Return değilse GOTO 1

Ters dönüşüm metodu kullanılarak $r(x)$ yoğunluk fonk. $[a,b]$ aralığında fonk. üretebiliriz.

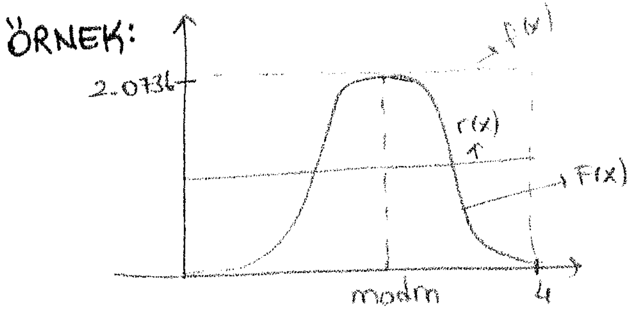
$$R(x) = \int_a^y r(x)\,dx = u$$

$$= \int_a^y \frac{1}{b-a}\,dx = u$$

$$u = \frac{y-a}{b-a} \rightarrow u \cdot (b-a) + a = y$$

$$\boxed{y = u \cdot (b-a) + a}$$

ÖRNEK:



Beta (4,3) dağılımdan rassal değişken üreten algoritmayı reddetme yöntemine göre düzenleyin.

NOT

for $x > 2$

$r(x) = (x-1)\cdot r(x-1)$

$r(1) = 1$

$$F(x) = \frac{x^3(1-x)^2}{B(x_1,x_2)} \qquad B(x_1,x_2) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(3)}{\Gamma(7)}$$

$$B(x_1,x_2) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(3)}{\Gamma(7)} = \frac{3!2!}{6!} = \frac{1}{60} =$$

$$f(x) = \begin{cases} 60x^3(1-x)^2 & 0<x<1 \\ 0 & dd \end{cases}$$

Maksimum f(x) için; $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -120x^3(1-x) + 180x^2(1-x)^2$$
$$= 60x^2(1-x)(3-5x) = 0$$

Çözüm kümesi : $x=0 \quad x=1 \quad x=0,6$ ve $f(0,6) = 2,0736$

$$t(x) = \begin{cases} 2,0736 & 0\le x\le 1 \\ 0 & dd \end{cases}$$

$$c = \int_0^1 2,0736\,dx = 2,0736x \Big|_0^1 = 2,0736$$

$$r(x) = \frac{t(x)}{c} = \frac{2,0736}{2,0736} = 1$$

$$r(x) = \begin{cases} 1, & 0\le x\le 1 \\ 0, & d.d \end{cases}, \quad R(x) = \int_0^x 1\cdot dx = x\Big|_0^x = \boxed{u = x}$$

Algoritması

1) $u_1 \sim u(0,1)$ üret, $y = x = u_1$

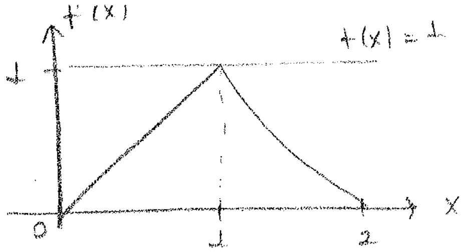
2) $u_2 \sim u(0,1)$ üret

3) $u_2 \le \dfrac{60y^3(1-y^2)}{2,0736}$ ise $x=y$

Return

değilse GOTO 1

ÖRNEK!



$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

Reddetme yöntemine göre üret.

Çözüm

1. Adım $\rightarrow$ $t(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & d.d \end{cases}$

2. Adım $\rightarrow$ $c = \int_0^2 t(x)\,dx = \int_0^2 1 \cdot dx = x \Big|_0^2 = 2$

3. Adım $\rightarrow$ $r(x) = \dfrac{t(x)}{c} = \dfrac{1}{2}$, $R(x) = \int_0^x \dfrac{1}{2} \cdot dx = \dfrac{1}{2}x = u$ $\boxed{x = 2u}$

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

$x = 0$ için $u = 0$
$x = 2$ için $u = 1$

$$f^{-1}(u) = \begin{cases} 2u, & 0 \leq u \leq 1 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

4. Adım $\rightarrow$
1) $u_1 \sim U(0,1)$ üret, $y = x = 2u_1$
2) $u_2 \sim U(0,1)$ üret
3) $y \leq 1$ ve $u_2 \leq \dfrac{y}{1} \rightarrow x = y$
$y > 1$ ve $u_2 \leq \dfrac{(2-y)}{1} \rightarrow x = y$
ve RETURN değilse GOTO 1

ORTA KARE YÖNTEMİ

- İlk olarak 1946'da Von Neumann tarafından önerilmiştir.
  * m basamaklı ve tek sayı (başlangıç değeri olarak alınır)
  * sayının karesi alınır
  * elde sonucun ortasındaki m kadar sayı alınır
  * rassal bir sayı olarak kaydedilir
  * tekrar aynı işlemler yapılır ve istenilen sayıda rassal sayı elde edene kadar devam ede

    ① m basamaklı x sayısı
    ② $y < m^2$
    ③ y'nin ortasından m basamaklı sayı al.
    ④ $y < u^2$
    ⑤ ... git

ÖRNEK

$X_0 = 5497$ olarak seçilsin. Orta kare yöntemiyle 3 sayı üretiniz.

$X_0 = 5497$ (4 basamaklı) $(m = 4)$

$X_0^2 = (5497)^2 = 30\underbrace{2170}09$ → ortasında kalan m = 4 basamaklı sayı = 2170

① $X_1 = 2170 \longrightarrow U_1 = 2170 / 10000$

$U_1 = \underbrace{0,217}_{\text{1. rassal sayı}}$ (0,1) aralığında olduğundan

$X_1^2 = (2170)^2 \longrightarrow X_1^2 = 4\underbrace{7089}00$ → 7089

② $X_2 = 7089$ $U_2 = \underbrace{0,7089}_{\text{2. rassal sayı}}$

$X_2^2 = (7089)^2 \Rightarrow X_2^2 = 50\underbrace{2539}21$ → 2539

③ $X_3 = 2539 \longrightarrow U_3 = \underbrace{0,2539}_{\text{3. rassal sayı}}$

Tekniğin Dezavantajları

→ İlk sayı ve dizinin tekrar uzunluğu arasındaki ilişkiyi (periyot) önceden bilmek mümkün değildir.

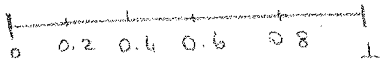
→ Elde edilen sayılar rassal olmayabilir. Yani dizide dejenerasyon söz konusu olabilir.

RASSAL SAYI ÜRETEÇLERİ

Düzgün (Uniform) Dağılım

Düzgün dağılımda X rastgele değişkeni ele alınan A ve B aralığında eşit olasılıklara göre dağılım gösterir. Bu dağılım türü sistem hakkında çok az bilgi varsa kullanılır.

Math.random() [0,1)



bize verilen sayı N = 1000 $\underset{\text{aralık}}{n} = 5$

$$\frac{1000}{5} = 200 \text{ sayı olur}$$

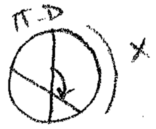
X kesikli (ayrık sayı) ise;

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a+1} , & x = a, a+1, \ldots b \\ 0 , & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

X sürekli bir değişken ise;

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} , & a \leq x \leq b \\ 0 , & d.d \end{cases}$$

Rulet Tekerliği

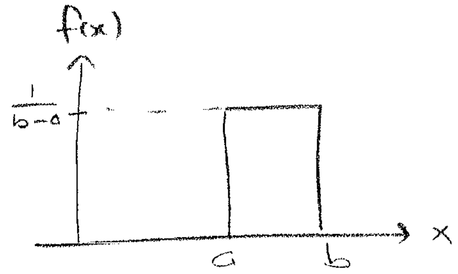


$0 \leq X < \pi.D$ D → çap

$f(x) = h = \text{sabit}$

$$\int_a^b f(t)\cdot dt = \int_0^{\pi D} h\cdot dt = h\cdot \pi D = 1$$

$$h = \frac{1}{\pi D}$$



Normal Dağılım

Sürekli bir olasılık dağılımıdır. Pratikte birçok rastgele fiziksel olayların çalışılması için kullanılmaktadır. (Burada sistemin davranışı bilinmekle beraber)

$$f(x) = \frac{1}{6_X\sqrt{2\pi}}\, e^{-\left(\frac{x-\mu_X}{6_X}\right)^2}$$

ortalama

$\mu_X = 0$

X = rassal değişken

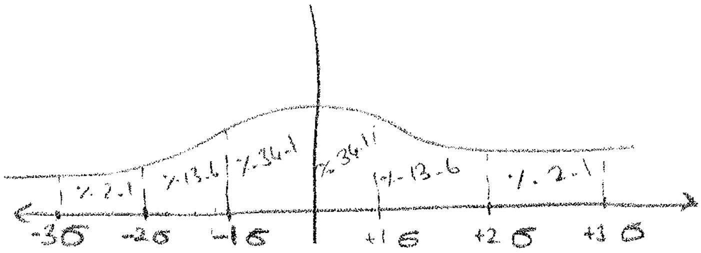
standart sapma $6_X = 1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

z score normalizasyon

Boyuttan bağımsız veya büyüklükten bağımsız bir sonuç elde edilmesini sağlar.

$$z = \frac{x - M_x}{\sigma_x} \qquad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$



$34.1 + 34.1 = \%68.2$'si $-1\sigma < x < 1\sigma$ arasında olur.

$\%68.2 + 13.6 + 13.6 = \%95.4$'ü $-2\sigma < x < 2\sigma$ arasında olur.

$\%95.4 + 2.1 + 2.1 = \%99.6$'sı $-3\sigma < x < 3\sigma$ arasında olur.

Üstel Dağılım

Gerçekleşme sıklığı poisson dağılımına göre olan belli bir olayın gerçekleşmesine kadar geçen süreyi modellemek için kullanılır. Örneğin bir süpermarkette 2 müşterinin bankaya geliş süresini hesaplamak veya bir makinenin 2 parçalanma zamanları arasındaki süreyi modellemek veya 1 hastanede doğan 2 çocuğun doğum zamanları arasındaki süreyi modellemek için kullanılan yöntemdir.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$\lambda \rightarrow$ dağılım parametresi

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot dx$$

$$P(\lambda \leq x) \longrightarrow 1 - e^{-\lambda x}$$

$$M = E(x) = \frac{1}{\lambda} \qquad \sigma = var(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

ÖRNEK

Bir süpermarket kasasına gelişler üstel dağılımla yapılmaktadır. $M = 0,1$ (ortalama) saatte müşteri geliyor. Saat 8.30 da açılan süpermarketi 8.50'ye kadar kimsenin gelmeme olasılığı, saat 9.00'a kadar ortalama gelecek müşteri sayısını bul.

$M = 0,1 \rightarrow \frac{1}{\lambda} \rightarrow \lambda = 10 \frac{\text{müşteri}}{\text{saat}}$

$M = \frac{1}{\lambda}$

$$P\left(X > \frac{20}{60}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{20}{60}\right)$$
$$= 1 - \left(1 - e^{-10 \cdot \frac{20}{60}}\right)$$
$$= 1 - 1 + e^{-3.3}$$
$$= 0.036$$

8.30'da 8.50'ye kadar kimse gelmeme olasılığı

$\lambda = 0,5$

$\left(\frac{30}{60}\right) \cdot 10 = 5$ müşteri

9'da gelmesi

Poisson Dağılımı

Zaman ve mekan olarak birbirinden tamamen bağımsız ve rastgele gerçekleşen olaylar için belirli bir süre içinde aynı olayın ortaya çıkma sayısını gösteren rastgele değişken poisson dağılımıyla gösterilir.

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-k}}{k!} \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$

k parametresi olasılığını aradığımız olayın oluş sayısı, λ parametresi ise birim zamanda olayın oluşma oranı. Eğer bir sisteme birim zamanda geliş oranı λ poisson dağılımına uygun ise varışlar arası zamanı belirlemek için kullanılır.

$$a = \lambda \cdot t$$

$$P(X=k) = \frac{a^k \cdot e^{-a}}{k!} \text{ olur.} \qquad P(X \leq k) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \ldots$$

ÖRNEK

Bir makine bakım atölyesine gelen günlük ortalama makine sayısı 18'dir. Buna göre bu atölye için 1 saatlik süre içinde hiç makine gelmeme olasılığını bulun, bu süre diliminde 3 makine gelme olasılığını bulunuz.

λ gün = 18 makine/gün
(8 saatlik çalışma)

$$\lambda \text{ saat} = \frac{18}{8} = 2.25 \text{ makine/saat}$$

$$P(X=0) = \frac{(2.25)^0 \cdot e^{-2.25}}{0!} = 0.1054 = \%10.54 \Big\} \text{Hiç makine gelmeme olasılığı}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X<3)$$
$$= 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{(2.25)^k \cdot e^{-2.25}}{k!} = \%39{,}7$$

Rastgele Sayıların Özellikleri

Rastgele sayılar bütün ayrık zamanlı sistemlerin temel elemanıdır. Birçok programlama dili rastgele sayı üretmek için nesne, fonksiyon, metotlar kullanır. Rastgele sayılar servis zamanlarını ve varışlar arası zaman gibi simülasyonları yapmak için kullanılır.

* Uniform → Eğer [0,1) aralığı n parçaya bölünüyorsa her bir aralıktaki gözlemlerin sayısı N/n'dir.

* İndependence → Belirli bir aralıktaki gözlemlenebilen değerlerin önceki değerlere bağlı olmaması

Rassal Sayı Üreteçler

- Hızlı olması
- Taşınabilir olması
- Olabildiğince en uzun periyoda sahip olması

Rastgele sayıların tekrar edilebilmesi gerekir.
En önemlisi ise rassal sayı üretmek için kullanılan metotlar, düzgün dağılım ve bağlı olmama özelliğini sağlamalıdır.

RASTGELE SAYILARIN TESTİ

Rastgele sayıların üretildikten sonra test edilmesi için 2 özelliğe bakılır. Bunlar uniform olması ve bağımlı olmama özelliğidir. Testler 2 kategoriye ayrılır. Birincisi ;

Frekans Testi

Frekans testinde bir rassal sayı üretecinin uniform olup olmadığı test edilir. Bu amaçla 2 yöntem kullanılır. Bunlar Chi Square ve Kolmogorov Smirnov testleridir

Frekans Testleri

a) Kolmogorov Simirnov Testi

Bu test uniform dağılımın sürekli kümülatif dağılımı $f(x)$ ile deneysel kümülatif fonsiyonu $SN(x)$'i karşılaştırır. Bu karşılaştırma N adet örnek için yapılır. Buradaki $F(x)$ şöyle bir fonksiyondur aslında. $F(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1$, Eğer rastgele sayı üreticinden ürettiğimiz sayılar $R_1, R_2, \ldots R_N$ ise

$$SN(x) = \frac{SAY(R_1, R_2, R_3 \ldots R_N \leq x)}{N}$$

N ne kadar büyük olursa $SN(x)$, $F(x)$'i o kadar iyi tahmin edebilir

$$D = \max |F(x) - SN(x)|$$

D'nin örnekleme dağılımı N değerine bağlı bir tablodan elde edilir.

Adım 1 : Rastgele üretilen sayıları küçükten büyüğe sırala

$$R(1) < R(2) < R(3) < \ldots < R(N)$$

Adım 2 : $D^+ \left(\frac{i}{N} - R(i)\right)$

$D^- \ (R(i) - (i-1))/N$

Adım 3 : $D = \max(D^+, D^-)$

Adım 4 : α değerini tablodan bul.

Adım 5 : Eğer $D < D_\alpha$ ise üreteç uniform dağılım gösterir. Diğer durumda ise uniform dağılım göstermez.

ÖRNEK

Bir rassal sayı üreteci ile üretilen sayılar 0.44, 0.81, 0.14, 0.05, 0.93 olarak alınmıştır. α değerini 0.05 olarak bunun uniform dağılıma sahip olup olmadığına bak

i	1	2	3	4	5
$R(i)$	0.05	0.14	0.44	0.81	0.93
i/N	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\{i/N - R(i)\}$	0.15	$\boxed{0.26}$	0.16	—	0.07
$\{R(i) - (i-1)/N\}$	0.05	–	0.04	$\boxed{0.21}$	0.13

$N = 5$

$$\boxed{D_\alpha = 0.565}$$

Uniform Table

N	D=0.01	D=0.05
1		
2		
3		
4		
5		0.565

$D = \max(D^+, D^-)$

$D = \max(0.26, 0.21)$

$0.26 < \underbrace{0.565}_{D_\alpha}$ olduğundan bu rassal sayı üreteci uniformdur.

* Sayı azsa kullanışlıdır.

b) Chi - Square Testi

Bu testin amacı rassal sayı üretecinin yine uniform olup olmadığını test etmek.

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{O_i - E_i}{E_i}\right)^2$$ ya da direkt olarak şöyle yazabiliriz :

$$X_0^2 = \frac{n}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} (F_k - E_i)^2\right]$$

O_i = i. aralık için bize gözlenen sayısını
E_i = i. sınıf veya aralık için beklenen sayı

ÖRNEK

Aralık	Frekans
$0 \le x < 0.25$	21
$0.25 \le x < 0.50$	31
$0.50 \le x < 0.75$	26
$0.75 \le x < 1.0$	+ 22
	100

$\alpha = 0.05$

100 sayı üretilerek test edilmiş. Üretecin uniform olup olmadığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$E_i = \frac{N}{n} = \frac{100}{4} = 25$$

N: Rassal sayı
n: Aralık sayısı

$$X_0^2 = \frac{4}{100}\left[(21-25)^2 + (31-25)^2 + (26-25)^2 + (22-25)^2\right]$$

$$X_0^2 = 2.48$$

Bağımsızlık derecesi V ile ifade edilir.

$$V = \underset{n}{4} - 1 = 3$$

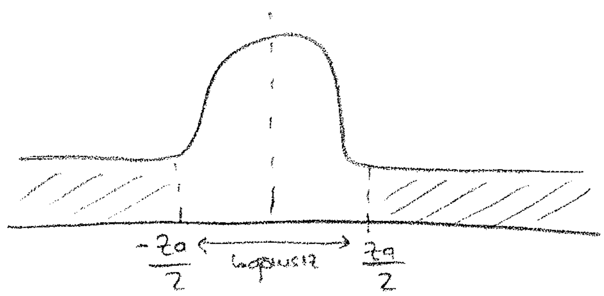
$$\boxed{V = m-1}$$

$V=3$ için $\alpha = 0{,}05$ $\underline{X_\alpha^2 = 7.81}$ ise $X_0^2 < X_\alpha^2$ uniformdur.

Otokorelasyon Testi

Bu test bir rassal sayı üretecinde üretilen sayıların arasındaki bağımsızlıkla ilgilidir. Yani üretilen sayılar arasında bir bağlantı olup olmadığını test etmek amacıyla kullanılır. Bu test her R sayı için otokorelasyon hesaplamasına dayalıdır.

l : adım boyutu ρ_{il} = otokorelasyon $\sigma_{\rho il}$: standart sapma



$R_i, R_{i+l}, R_{i+2l}, R_{i+3l} \ldots R_{i+(m+1)l}$

$$\boxed{i + (m+1)l \le N}$$

$$\boxed{z_0 = \frac{\rho_{il}}{\sigma_{\rho il}}}$$

$$\boxed{\rho_{il} = \frac{1}{m+1}\left[\sum_{k=0}^{m} R_{i+kl} \cdot R_{i+(k+1)l}\right] - 0.25}$$

$$\boxed{\sigma_{\rho il} = \frac{\sqrt{13m+7}}{12(m+1)}}$$

ÖRNEK

0.12	0.01	0.23	0.28	0.89	0.31	0.44	0.28	0.83	0.93
0.99	0.15	0.33	0.35	0.51	0.41	0.60	0.27	0.75	0.88
0.68	0.49	0.05	0.43	0.93	0.98	0.19	0.36	0.69	0.87

Yukarıda verilen sayılar içerisinde 3, 8 ve 13. sayı için arada bir bağımlılık olup olmadığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$N = 30$ $\qquad \underbrace{R_i}_{3},\ \underbrace{R_{i+l}}_{8},\ \underbrace{R_{i+2l}}_{13}$ $\qquad l = 5,\ i = 3$

$l = 5$

$i + (m+1)\,l \leq N$

$3 + (m+1)5 \leq 30$

$5(m+1) \leq 27$

$m+1 \leq 5.4$

$m \leq 4.4$

$m = 4$ → Tam sayı olmalı

$$P_{35} = \frac{1}{4+1} = \left(\left((0.23\times0.28)+(0.28\times0.33)+(0.33\times0.27)+(0.27\times0.05)+(0.05\times0.36)\right)\right) - 0{,}25$$

$$= \frac{1}{5}\left(\left(0{,}0644 + 0{,}0924 + 0.0891 + 0.0135 + 0.018\right)\right) - 0{,}25$$

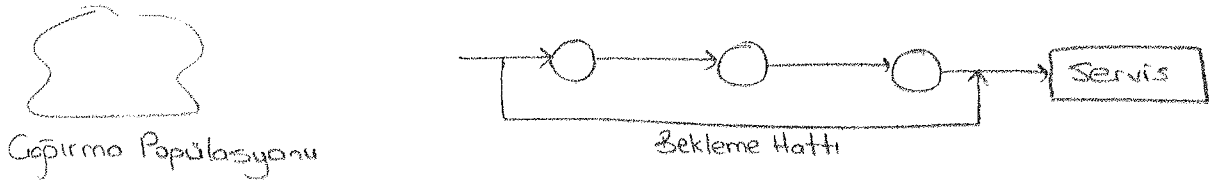
$$= \frac{1}{5}(0{,}2774) - 0{,}25 = -0{,}1945$$

$$\sigma_{p35} = \frac{\sqrt{13\cdot 4+7}}{12(4+1)} = 0.1280 \qquad z_0 = \frac{-0.1935}{0.1280} = -1.51$$

$-1{,}96 < -1{,}51 < 1.96$ → bağımsız.

-KUYRUK MODELLERİ-

Sistemin performansını ölçmek için kullanılır.



* Kuyrukta 2 tane parametre vardır

<u>Müşteri</u> ⇒ Servisi kullanan kişidir.

<u>Servis</u> ⇒ Sadece müşterilere, hizmet veren nesnelerdir.

Örnek olarak, bir havaalanında piste uçakların inmesi bir <u>kuyruk problemidir.</u> Havadaki uçaklar, servis görmeyi bekleyen <u>müşterilerdir.</u> Pist ise <u>servistir.</u>

* Kuyruk modelleri; üretim sistemlerinde, bilgisayar sistemlerinde, ulaşım sistemlerinde kullanılır. Kuyruk modelleri; matematiksel veya analizle çözülmektedir. Bu modeller kuyruk sistemlerinin performansını değerlendirmede analizcilere güçlü bir araç sunar.

* <u>Temel Performans Ölçütleri</u>
  - Servisten faydalanma
  - Bekleme hattının uzunluğu
  - Müşterilerin gecikmeleri

* <u>Giriş Parametreleri</u>
  - Müşterilerin varış oranı
  - Müşterilerin servis zamanı
  - Servis çalışma oranı
  - Servis sayısı

* Kuyruk teorisi ile simülasyon analizi giriş parametrelerini bir fonk. olarak sistem performans ölçümlerini tahmin etmek için kullanılır.

* Basit sistemler için performans ölçütleri kolaylıkla ölçülebilir ama karmaşık sistemlerde simülasyon gereklidir.

* <u>Kuyruk Sistemlerine Bazı Örnekler</u>

Sistem	Müşteri	Servis
Banka	Müşteriler	Veznеler
Otel	İnsanlar	Resepsiyon Görevlisi
Hastane	Hastalar	Dr / Hemşire / Yatak
Bilgisayar	Eposta / işler	CPU, I/O, disk
Montaj Hattı	Üretilen Birimler	İşçiler / makineler
Havaalanı	Uçaklar / Yolcular	Pist / Güvenlik birimleri / X-ray cihazı

* <u>Kuyruk Sisteminin Bileşenleri</u>
  - Varış Süreci
  - Servis süreleri
  - Kuyruk disiplini
  - Sistemde izin verilen müşteri sayısı
  - Müşterilerin geldiği yığının genişliği

Varışlar arası ortalama zaman $= E(a) = \frac{1}{\lambda}$

Servisler " " " $= E(s) = \frac{1}{\mu}$

Kuyruk Disiplini

1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6

- 6 → Yığın Genişliği (Çağırma popülasyon kaynağı) → genellikle ∞
- 5 → Sistemde izin verilen müşteri sayısı
- 4 → Paralel Servis Sayısı (Genellikle FIFO)
- 3 → Servis Sayısı
- 2 → Servis Süreci
- 1 → Varış Süreci

*** 1 ve 2 yerine ;**

M → üstel dağılım
D → sabit servis, deterministik
Ek → Erlang Dağılımı
G → Genel Dağılım

*** 4 yerine ;**

FIFO → ilk giren ilk çıkar (First in first out)
SIRO → Rassal sırada servis
PRI → Öncelikli servis
GD → Genel kuyruk disiplini

* M / D / 3 / PRI / 50 / ∞

- 3 → 3 servis
- D → Deterministik
- M → Üstel
- 50 → Sistemde max 50 müşteri

*** Kuyruk Sisteminin Temel Performans Ölçütleri**

Pn → n tane müşteri olma olasılığı
L → Sistemde ortalama müşteri sayısı
LQ → Kuyrukta ortalama müşteri sayısı
W → Sistemde ortalama bekleme zamanı
WQ → Kuyrukta ortalama bekleme zamanı

T → Periyot
N → adet

$$L = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot T_i$$

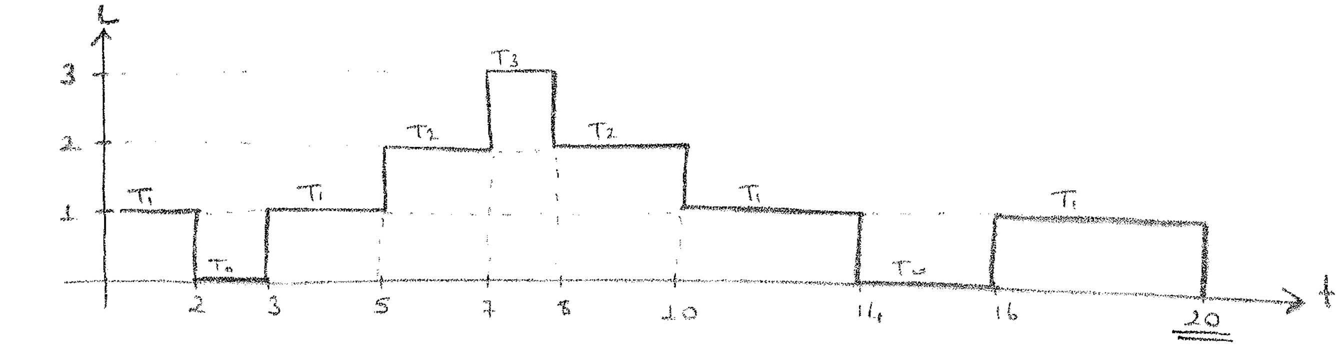
$$LQ = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot Q_i$$

$$W = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} W_i$$

$$WQ = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} W_{iQ}$$

FIFO
(ilk giren ilk çıkar)

ÖRNEK



a) Sistemde ortalama müşteri sayısı ? (L)

$T_0 = 1+2 = 3$

$T_1 = 2+2+4+4 = 12$

$T_2 = 2+2 = 4$

$T_3 = 1$

$$L = \frac{0\cdot 3 + 1\cdot 12 + 2\cdot 4 + 3\cdot 1}{20} = 1.15 \text{ müşteri}$$

b) Şekildeki kuyruk sisteminin G/G/1/N/K olduğu düşünülüyor. $N \geq 3$ ve $K \geq 3$ ise t anında $L_Q(t)$ yani kuyrukta bekleyen müşteri sayısı ?

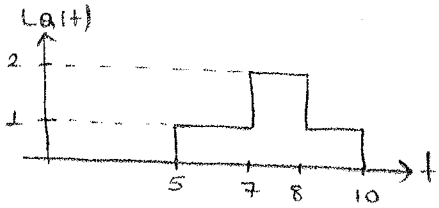
$$L_Q(t) = \begin{cases} 0, & L(t) = 0 \\ L(t) - 1, & L(t) \geq 1 \end{cases}$$

$T_0Q = 2+2+4+4 = 12$

$T_1Q = 2+2 = 4$

$T_2Q = 1$

$$L_Q = \frac{0\cdot 12 + 1\cdot 4 + 2\cdot 1}{20} = \frac{0+4+2}{20} = 0{,}3 \text{ müşteri}$$



Grafiği

c) Bu sisteme kaç tane müşteri varış yapmıştır ve her bir müşterinin sistemde harcadığı zaman ? Her bir müşterinin kuyrukta harcadığı ortalama zaman ?

$N = 5$

FIFO kuralıysa;

Varış	Ayrılış	
0	2	$\to W_1 = 2$
3	8	$\to W_2 = 5$
5	10	$\to W_3 = 5$
7	14	$\to W_4 = 7$
16	20	$\to W_5 = 4$

Kaç tane müşterinin varış yaptığını gösteriyor.

Kuyrukta bekleme zamanları;

$W_1Q = 0$ (ilki her zaman 0)

$W_2Q = 0$ ($2-3=-1$ yani 0)

$W_3Q = 3$ $(8-5)$

$W_4Q = 3$ $(10-7)$

$W_5Q = 0$ ($14-16=-2$ yani 0)

Toplam gecikme $= 3+3 = 6$

$$W = \frac{2+5+5+7+4}{5} = 4.6 \text{ sn}$$

$$W_Q = \frac{3+3}{5} = 1{,}2 \text{ sn}$$

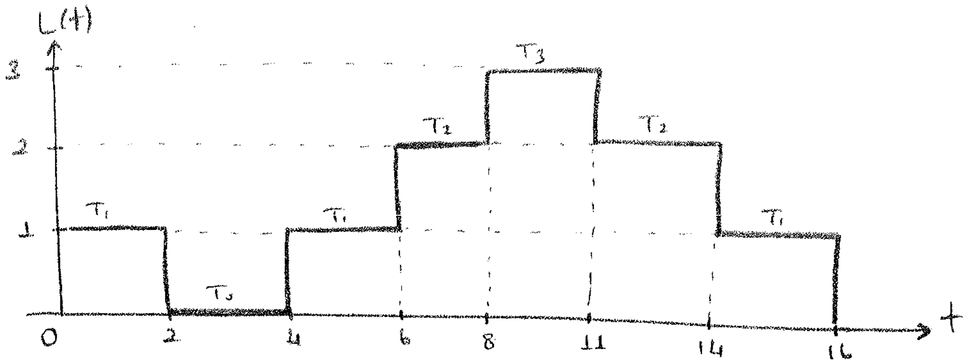
ÖRNEK

Aşağıdaki her bir sistemde FIFO ile çalışan tek servisli bir kuyruk sistemi için müşterilerin zaman üzerindeki sayıları verilmiştir. Buna göre ?

a) Zaman ağırlıklı ortalama müşteri sayısı ?

b) Müşterilerin sistemde ortalama harcadığı zaman ?

c) Müşterilerin kuyrukta ortalama harcadığı zaman ?



a) $T_0 = 2 \quad (4-2)$

$T_1 = 2+2+2 = 6$ $\quad (8-6) \quad (16-14)$

$T_2 = 2+3 = 5$

$T_3 = 3 \quad (11-8)$

$$L = \frac{0\cdot 2 + 1\cdot 6 + 2\cdot 5 + 3\cdot 3}{16} = 1{,}56 \text{ müşteri}$$

b)

Varış	Ayrılış	
0	2	$W_1 = 2$
4	11	$W_2 = 7$
6	14	$W_3 = 8$
8	16	$W_4 = 8$

$$W = \frac{2+7+8+8}{4} = 6{,}25 \text{ sn}$$

c) $W_1Q = 0$ (ilki 0 olur)

$W_2Q = 0 \quad (2-4)$

$W_3Q = 5 \quad (11-6)$

$W_4Q = 6 \quad (14-8)$

$$WQ = \frac{5+6}{4} = 2{,}75 \text{ sn}$$

Toplam gecikme $= 5+6 = 11$

ÖRNEK

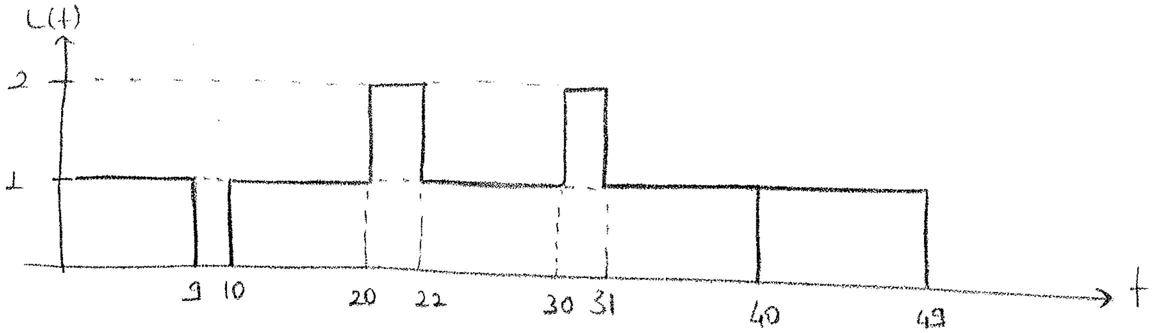
5 tane müşteri için servis zamanları ;

$S_1 = 9$
$S_2 = 12$
$S_3 = 9$
$S_4 = 9$
$S_5 = 9$

NOT: İlk hasta 0. dk da varış yapıyor. Her 10 dk'da bir hasta geliyor.

Çözüm

Önce grafiğe dökelim.



Varış	Ayrılış	
0	9	$\longrightarrow W_1 = 9$
10	22	$\longrightarrow W_2 = 12$
20	31	$\longrightarrow W_3 = 11$
30	40	$\longrightarrow W_4 = 10$
40	49	$\longrightarrow W_5 = 9$

$$W = \frac{9+12+11+10+9}{5} = 10{,}2 \text{ sn}$$

Kuyrukta ortalama bekleme zamanı ?

$W_1Q = 0$
$W_2Q = 0 \quad (9-10=-1)$
$W_3Q = 2 \quad (22-2)$
$W_4Q = 1 \quad (31-30)$
$W_5Q = 0 \quad (40-40)$

$$\frac{2+1}{5} = 0{,}6 \text{ sn} = W_q$$

Toplam gecikme $= 2+1 = 3$

ÖRNEK

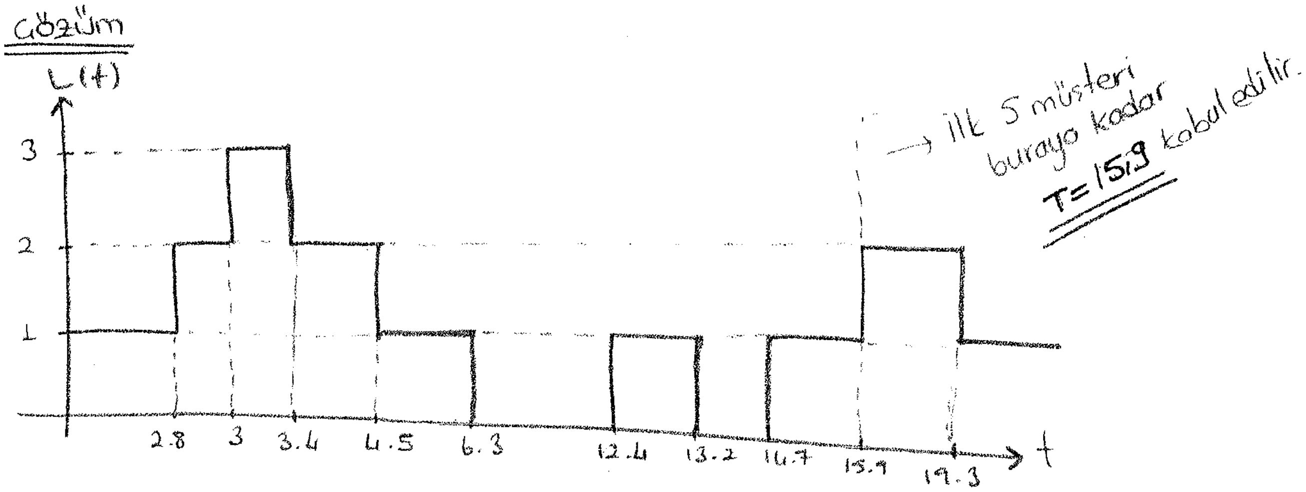
Bir banka 2 memura sahiptir. Bir müşteri geldiğinde müsait olan memurlardan biri tarafından hizmet görür. Eğer 2 memur da meşgul ise müşteriler tek bir kuyruk oluşturarak FIFO prensibine göre hizmet alır. Banka daha çok memura ihtiyacının olup olmadığını belirlemek istiyor. Bu amaçla müşterilerin bankada harcadığı zamanı bilmek istiyor. 5 müşteri için varışlar arası zaman ve servis zamanları verilmiştir. İlk müşteri 0 anında varış yapıyor.

Varışlar arası zaman ; 2.8, 0.2, 9.4, 2.3, 1.2
(λ)

Servis zamanı ; 6.3, 0.6, 1.5, 0.8, 4.6
(μ)

Buna göre bekleyen müşterilerin sayısını, servislerin durumunu, toplam gecikmeyi, servisin doluluk oranını bulunuz.

Çözüm



* Kuyrukta bekleyen müşteri sayısı ?

- Sistemde 2 memur var.
  Bu nedenle L(t)=2 özel dikkate alınır.
  Bu yüzden sadece 1 müşteri kuyrukta beklemiş.

* İlk 5 müşteriden bahsediyoruz.

- Bu nedenle T=15.9 alınır

Servisin durumu için.

* Soruda bize varışlar ve servisler hakkında zaman bilgisi verilmişse, ayrılış zamanlarını bulabilir

Varış	Servis	Ayrılış
→ 0	6.3	6.3
2.8	0.6	3.4
3.0	1.5	4.5
12.4	0.8	13.2
14.7	4.6	19.3
15.9		

M / M / 1 KUYRUĞU

Tek servisci vardır.
Gelen müşteri sayısı ∞ 'dur.
Gelişler poisson dağılımdadır.
Hizmet süresi ise üstel dağılımdadır.
En önemli parametreleri varış oranı ve servis oranıdır.

$$\boxed{P = \frac{\lambda}{M}}$$ ⟹ servisin doluluk oranı

$$\boxed{L = \frac{\lambda}{M - \lambda}}$$ ⟹ Sistemde ortalama müşteri sayısı

$$\boxed{Lq = \frac{\lambda^2}{M(M - \lambda)}}$$ ⟹ Kuyrukta ortalama müşteri sayısı

$$\boxed{W = \frac{1}{M - \lambda}}$$ ⟹ müşterinin sistemde harcadığı ortalama zaman

$$\boxed{Wq = \frac{\lambda}{M(M - \lambda)}}$$ ⟹ Müşterinin kuyrukta harcadığı ortalama zaman

$$\boxed{P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{M}\right)}$$ ⟹ Hiç müşteri gelmeme olasılığı

$$\boxed{P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{M}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{M}\right)^n}$$ ⟹ n tane müşteri gelme olasılığı

ÖRNEK

Tek kuaförün çalıştığı bir kuaför salonuna müşteriler exp. dağılım gösteren varışlar arası zaman ve servis zamanları ile uğraşır. Varış oranı λ ve servis zamanı M saat başına 2 ve 3 olarak ifade edilmiştir. Buna göre bu kuyruk sisteminin performans ölçütleri ?

Çözüm

M / M / 1 kuyruğu

$\lambda = 2 \ \frac{\text{müşteri}}{\text{saat}}$ $\quad M = 3 \ \frac{\text{müşteri}}{\text{saat}}$

$$P = \frac{\lambda}{M} = \frac{2}{3} \quad //$$

$$L = \frac{2}{3-2} = 2 \quad // \text{ (sis. ort. müş. sayısı)}$$

$$W = \frac{1}{3-2} = 1 \quad // \text{ (müş. sis. har. ort. zaman)}$$

$$Wq = \frac{2}{3(3-2)} = \frac{2}{3} \text{ saat}$$

$$Lq = \frac{4}{3(3-2)} = \frac{4}{3} \text{ müşteri}$$

$$P_0 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{9}$$

$$P_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

$$P_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$$

$$P \geq 4 = 1 - \sum_{i=1}^{3} P_n$$

ÖRNEK

Müşteriler 12 dk'da bir ortalama hızda ve poisson dağılıma uygun olarak varış yaparlar. Servis hızı ortalama 8 dk/müşteri şirket yönetimi bu hizmet için performans düzeyinin belirlenmesini ister. Buna göre performans ölçütleri ?

$$\lambda = 12 \frac{\text{müşteri}}{\text{dk}} = \frac{60}{12} = 5 \text{ müşteri/saat}$$

$$\mu = 8 \frac{\text{müşteri}}{\text{dk}} = \frac{60}{8} = 7.5 \text{ müşteri/saat}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{5}{7.5} = 0{,}33$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{5}{7.5-5} = \frac{5}{2.5} = 2 \text{ müşteri}$$

$$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{25}{7.5(7.5-5)} = 1{,}33 \text{ müşteri}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{7.5-5} = 0{,}4 \text{ saat} = 24 \text{ dk}$$

$$W_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{5}{7.5(7.5-5)} = 0{,}266 \text{ saat} = 16 \text{ dk}$$

ÖRNEK

Servis süresi 4 dk ise servis zamanının 3 dk'dan kısa olma olasılığı ?

$$\mu = 4 \frac{\text{müşteri}}{\text{dk}} \Rightarrow \frac{60}{4} = 15 \frac{\text{müşteri}}{\text{saat}}$$

$$P\left(x < \frac{3}{60}\right) = 1 - e^{-15 \cdot \frac{3}{60}} = 0{,}527$$

ÖRNEK

Bir hastanenin acil servisine hastalar exp bir şekilde dağılım oluşturan bir varış zamanı ve servis zamanı ile ulaşmaktadır. Saat başına 6 hasta gelmekte ve tek doktorun olduğu acil serviste saatte 10 hasta olup hizmet verilmektedir. Buna göre ;

a) Servisin doluluğu ?

b) Sistemde 2 den fazla hasta olma olasılıkları ?

c) Hastaların kuyrukta harcadığı ortalama zaman ?

ÇÖZÜM

a) M / M / 1 $\longrightarrow$ poisson dağılım $\quad P = \dfrac{\lambda}{M} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$ (%60)

b) $P(x>2) = 1 - P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$$= 1 - \left(\left(\frac{e^{-6} \cdot 6^0}{0!} \right) + \left(\frac{e^{-6} \cdot 6^1}{1!} \right) + \left(\frac{e^{-6} \cdot 6^2}{2!} \right) \right) = 0.938$$

c) $$W_Q = \frac{\lambda}{M(M-\lambda)} = \frac{6}{10(10-6)} = \frac{6}{40} = 0.15$$

ÖRNEK

Ortalama servis süresinin 2.5 dk, ortalama varış süresinin 4 dk olduğu müşterinin servis almadan önce beklediği ortalama süre ? Ortalama kuyruk uzunluğu ? Sistemdeki ortalama müşteri sayısı ?

$$E(S) = \frac{1}{M} \Rightarrow 2.5 = \boxed{M = 0{,}4 \text{ müşteri/dk}}$$

$$E(A) = \frac{1}{\lambda} \longrightarrow 4 = \frac{1}{\lambda} = \boxed{\lambda = 0{,}25 \text{ müşteri/dk}}$$

Bu değerlerle bulabiliriz

ÖRNEK

Bir mağazada saatte ortalama 12 müşteri kasaya ödeme için gelir. Bir kasiyerin bir müşteriye ayırdığı zaman ortalama 4 dk dır. Buna göre servisin doluluk oranı ?

$$\lambda = 12 \ \frac{\text{müşteri}}{\text{saat}}$$

$$M = 4 \ \frac{\text{dk}}{\text{müşteri}} \longrightarrow \frac{60}{4} = 15 \ \frac{\text{müşteri}}{\text{saat}}$$

$$P = \frac{\lambda}{M} = \frac{12}{15} = 0{,}8 \ (\%80)$$

ÖRNEK : Bir sehirde ender rastlanan bir hastaliktan, bir hafta icinde ortalama ölen kisi sayısı 4'tür. Belli bir hafta icinde bu hastaliktan,

a) Hic kimsenin ölmemesi

b) En az 2 kisinin ölmesi

c) 3 kisinin ölmesi olasılıklarını hesaplayınız.

X : bir haftada bu hastaliktan ölenlerin sayısı

$$P(X=k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!} \qquad k = 0,1,2,\ldots \quad \lambda = 4$$

a) $P(X=0) = \dfrac{e^{-4} \cdot 4^0}{0!} = 0.0183$ //

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1))$

$$= 1 - \left(\frac{e^{-4} \cdot 4^0}{0!} + \frac{e^{-4} \cdot 4^1}{1!} \right)$$

$$= 1 - (0.0183 + 0.0733) = 1 - 0.0916 = 0.9084$$ //

c) $P(X=3) = \dfrac{e^{-4} \cdot 4^3}{3!} = 0.195$ //

Servis Prosesi

S_i = i. müsterinin servis zamanı

$S_1, S_2, \ldots$ rassal degiskenler

$E(s)$ = Bir müsterinin servis zamanı ortalaması

$\mu = 1/E(s)$ = Servis oranı (Birim zamanda servis gören müsteri sayısı)

ÖRNEK : Ortalama servis zamanı 2 dakika ise, servis oranı ;

$$\mu = 1/E(s) = 1/2 = 0.5 \text{ servis/dakika}$$

- Kuyruk sistemlerinde en önemli parametre trafik yogunlugudur.

$$\rho = (\text{Varis oranı}) / [(\text{servis oranı}) * c]$$

c : servis sayısı

$$\rho = L / (\mu * c) = [1/E(a)] / [\{1/E(s)\} * c] = E(s)/[E(a)*c]$$

Bir Kuyruk Sisteminin Bileşenleri

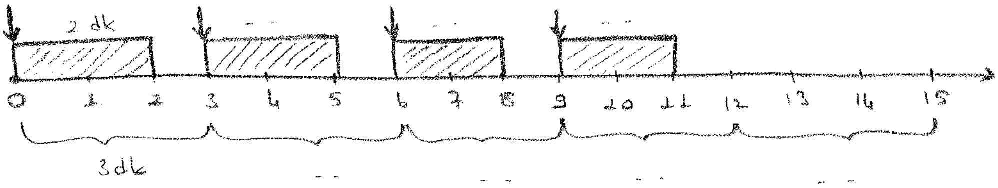
Trafik Yoğunluğu (ρ)

$\rho < 1$ ise servis $(1-\rho)$ oranında boştur.

$\rho = 1$ ise servis % 100 doludur ve kuyruk yoktur.

$\rho > 1$ ise sistemde sürekli artan bir kuyruk oluşur.

ÖRNEK: 3 dakikada bir servisin olduğu bir sistemde servis zamanı 2 dakika olsun. Gelişler ve servis süreleri bir zaman çizelgesinde gösterilirse;



$\rho = E(s)/E(a) = 2/3 = 0{,}667$ (Doluluk oranı)

$= (1-\rho) = 1 - 0{,}677 = 0{,}333$ (servisin boş kalma oranı)

Analitik ve benzetim modelinde $\rho < 1$ olduğu kabul edilir.

MODELDEKİ FORMÜLLERİN ÖZETİ

Varışlar

Varış hızı $\rightarrow \lambda$

"t" sürede "k" varışını olma olasılığı $\rightarrow \dfrac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}$

Varışlar arasındaki ortalama zaman $\rightarrow 1/\lambda$

Herhangi bir varışın "t" süre içinde gerçekleşme olasılığı $\rightarrow 1 - e^{-\lambda t}$

Müteakip varışın "t" zamanı içinde düşmeme olasılığı $\rightarrow e^{-\lambda t}$

Hizmet

Hizmet hızı $\rightarrow \mu$

"t" sürede "k" hizmetin verilme olasılığı $\rightarrow \dfrac{(\mu t)^k \cdot e^{-\mu t}}{k!}$

Ortalama hizmet zamanı $\rightarrow 1/\mu$

Hizmetin "t" süresinde tamamlanma olasılığı $\rightarrow 1 - e^{-\mu t}$

Servis süresinin "t" süresinden büyük olma olasılığı $\rightarrow e^{-\mu t}$

i. müşterinin kuyrukta bekleme zamanı = i. müşterinin servise alınma zamanı − i. müşterinin sisteme varış zamanı

sistemde i. müşterinin bekleme zamanı = i. müşterinin kuyrukta bekleme zamanı + i. müşterinin servis zamanı

KUYRUK SİSTEMLERİ (ÖRNEKLER)

1) Bir hidrolik pompa tamircisi, bozuk bir pompayı ortalama 30 dakikada tamir etmektedir. Tamirciye onarılması için 8 saatte 10 bozuk pompa gelmektedir. Tamirci bir günde ne kadar süre boşta kaldığını ve dükkanında ortalama kaç bozuk pompanın bulunduğunu bilmek istemektedir.

ÇÖZÜM

Birim zamanda tamirciye gelen pompa sayısı $\lambda = \frac{10}{8} = 5/4 \frac{\text{bozuk pompa}}{\text{saat}}$

Saatte tamir edilen pompa sayısı $\mu = \frac{60}{30} = 2$

Tamircinin boşta kalma olasılığı $\longrightarrow 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{5/4}{2} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

doluluk

Tamirci bir günde (8 saatte) 3 saat boş kalacaktır.

Tamircide bulunan ortalama bozuk pompa sayısı $\longrightarrow L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{5/4}{2 - 5/4} = \frac{5}{3}$ bozuk pompa

2) Bir otomatik uç dolabını OUD kullanmak amacıyla 10 dakikada bir işçi gelişi olmaktadır. Bir OUD işlemi ortalama 3 dakika sürmektedir. Buna göre;

a) Gelen bir işçinin sırada bekleme olasılığı nedir?

b) Kuyrukta en az bir işçinin olduğu durumda bekleyen ortalama kişi sayısı nedir?

c) OUD'de işlem yapmak için gelen işçinin kuyrukta en az 3 dakika beklemeyi firma kabul ettiği durumda Atölye müdürü ikinci bir OUD daha kuracaktır. Bu durumda ikinci bir OUD kurabilmek için gelişler ne kadar daha artmalıdır?

ÇÖZÜM

$\lambda = \frac{1}{10} = 0{,}1$ işçi/dakika — Birim zamanda OUD'ye gelen işçi sayısı

$\mu = \frac{1}{3} = 0{,}33$ işçi/dakika — Birim zamanda OUD'yi kullanan işçi sayısı

a) Sistemin dolu olma olasılığı

$1 - P_0 = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}1}{0{,}33} = 0{,}3$ — OUD'yi kullanmak için gelen bir işçi %30 olasılıkla beklemek durumunda kalacaktır

b) Kuyrukta bekleyen ortalama isci sayısı

$$L_q = \frac{(0,1)^2}{0,33(0,33-0,1)}$$

c) OUD'yi kullanmak için gelen iscinin kuyrukta en az 3 dakika beklemesi uygun oldupu durumda olusacak gelislere λ^* diyelim.

$$W_p = \frac{\lambda^*}{\mu(\mu-\lambda^*)} \qquad 3 = \frac{\lambda^*}{0,33(0,33-\lambda^*)} = \frac{\lambda^*}{0,1089-0,33\lambda^*}$$

$$3(0,1089 - 0,33\lambda^*) = \lambda^*$$

$$0,3267 - 0,99\lambda^* = \lambda^* \longrightarrow 0,3267 = 1,99\lambda^* = \lambda^* = 0,16 \text{ kisi}$$

0,16 kisi	1 dakika
1 kisi	x dakik

$x = 6,25$ dakika

⇒ İkinci OUD kurulması için gelislerin 10 dakikada 1 isci depil, 6,25 dak. 1 isci olarak olusması gerekmekte.

3) Bir fabrikada, iscilerin el takım almak üzere gittipi bir takımhane görevlisine her 5 dakika 9 isci gelmekte ve görevli 5 dakikada 10 isci istepini yerine getirmektedir. Buna göre;

Birim zamanda takımhaneye gelen isci sayısı $= \lambda = \frac{9}{5} = 1,8$ isci/dak.

Birim zamanda takım verilen isci sayısı $= \mu = \frac{10}{5} = 2$ isci/dak.

a) Takımhanede bulunan ortalama isci sayısı?

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{1,8}{2-1,8} = 9 \text{ isci}$$

b) Takımhane kuyrupunda bekleyen ortalama isci sayısı

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(1,8)^2}{2(2-1,8)} = 8,1 \text{ isci}$$

c) İscilerin takımhanede gecirdikleri ortalama süre

$$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{2-1,8} = 5 \text{ dakika}$$

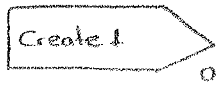
d) İscilerin kuyrukta bekledikleri ortalama süre?

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1,8}{2(2-1,8)} = \frac{1,8}{0,4} = 4,5 \text{ dk.}$$

ARENA MODÜLLERİ

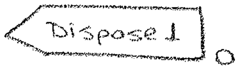
1. CREATE

Bir simülosyon modelinde varlıklar icin baslangıc noktasını tasarlar.



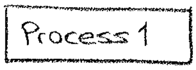
2. DISPOSE

Bir simülosyon modelinde varlıklar icin son noktayı tasarlar.



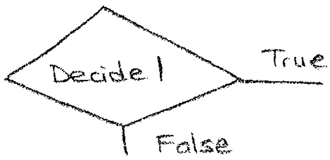
3. PROCESS

Bir simülasyon modelinde ana process metodunu tasarlar. Kullanılacak kaynakları elde eder.



4. DECIDE

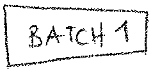
Bu modül sistemde karar verme processi icin izin verir. Karar alınmasında bir veya daha fazla duruma (kosula) ya da bir veya daha fazla olasılığa dayanarak secmeyi icerir.
Durumlar, özellik degerlerine, degisken degerlerine, varlık tiplerine ya da bir ifadeye dayanabilir.
İkili ihtimal ya da ikili durumdan herhangi biri secildiginde, Decide modülünün iki cıkıs noktası vardır. Dogru veya yanlıslar icin birer cıkıs noktası vardır.



2 - way by Condition : 2'li durum
2 - way by Chance : 2'li secim
N - way by Condition : Coklu durum
N - way by Chance : Coklu secim

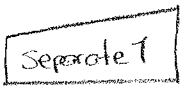
5. BATCH

Bu modül, simülasyon modülü icinde gruplama mekanizmasını tasarlar.



6. SEPARATE

Bu modül, coklu varlıkların icine gelen bir varlıgı kopyalamakta ya da önceden olusturulan bir varlık yıgınını bölmekte kullanılabilir.



7. ASSIGN

Bu modül, degiskenlere varlık özelliklerine, varlık tiplerine, varlık resimlerine yada sistem depiskenlerine yeni deper atanması icin kullanılır. Tek bir assign modülle coklu atamalar yapılabilir.

Assign 1

8. RECORD

Bu modül, simülasyon modelinde istatistikleri biriktirmekte kullanılır.

Record 1

9. HOLD

Bu modülde eger varlık bir sinyal icin tutuluyorsa, sinyal modülü varlıpa sonraki modüle gecmek icin izin vermede kullanılır.

Hold 1

10. MATCH

Match modülü farklı kuyruklarda bekleyen varlıkları belli sayılarda gruplar, bir araya getirir. Match komutunun islev görebilmesi icin belirtilen kuyruklarda en azından bir varlık olması gerekir.

Match 2

11. ROUTE

Route (rota) modülü, belirtilen bir istasyona bir varlıpı transfer eder veya istasyona ziyaret sırasında, sonraki istasyona gezen birimi tanımlamak icin kullanılır.

Route 1

12. STATION

Route komutu kullanıldıpında gezen birimin gidecepi yerleri tanımlamak icin kullanılır. Station modülü hareketli kaynakları veya duropan olmayan kaynakların oldupu ilpili park alanına sahip olabilir.

Station 1

13. ACCESS

Access modülü, varlıpın bir istasyondan diperine hareketi icin konveyörün bir yada daha fazla hücresine yer tahsis eder.

Access 1

14. CONVEY

Convey modülü aracılığıyla bulunduğu istasyondan belirtilen varış istasyonuna taşır.

Convey 1

15. EXIT

Bu modül Access modülü ile conveyöre alınan gezen birimi herhangi bir işlem için konveyörden almaya yarar.
Convey komutu ile taşınan bir gezen birim mutlaka ilgili istasyona geldiğinde processe girmeden önce conveyörden alınmalıdır. Aksi halde taşıyıcı sürekli dolu görünecek bu da yanıltıcı sonuçlar doğuracaktır.

Exit 1

16. REQUEST

İstek modülü, bir varlığa bir taşıyıcı ünitesini tayin eder ve varlığın yerine üniteye hareket eder.

Repuest 1

17. TRANSPORT

Bu modül yine gezen birimin taşınmasında kullanılır. Bu modülde taşıyıcı sınırlaması vardır. İstediğimiz kadar taşıyıcıyı biz tanımlarız. Repuest komutu ile çağrılan taşıyıcı Transport modülü ile ilgili istasyona gittikten sonra Free modülü ile mutlaka boşaltılmalıdır.

Transport 1

18. FREE

Bu modül varlığın en son pay edilmiş taşıyıcısını salıvermek için kullanılır. Eğer sırada taşıyıcı istemek veya pay etmek için bekleyen bir varlık varsa, taşıyıcı o varlığa verilir.

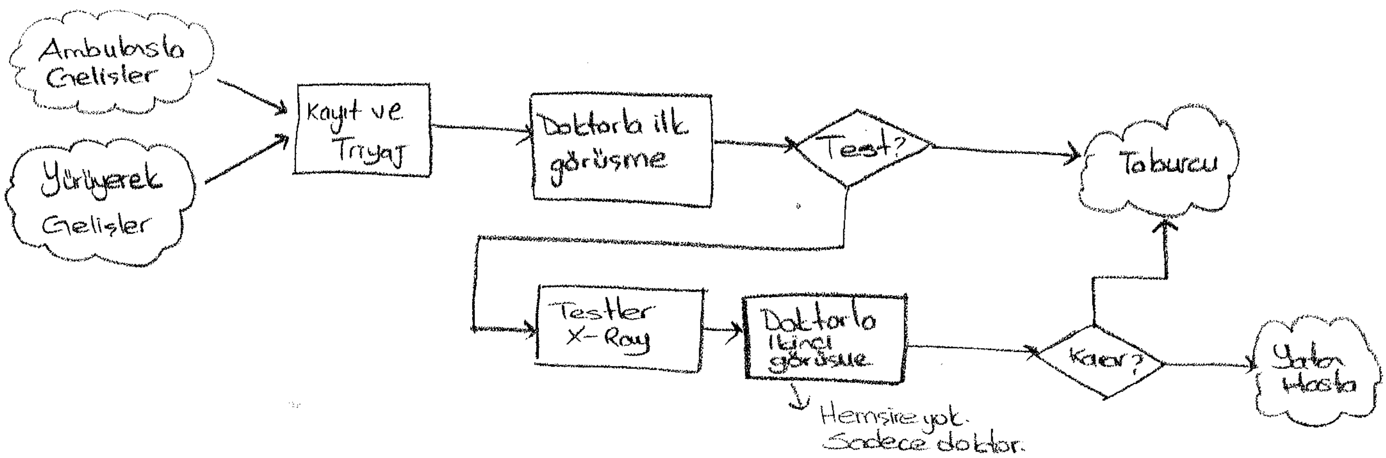
Free 1

ACİL SERVİS MODÜLÜ

Bu bölümde bir hastanenin Acil Servis (AS)'nın benzetim modeli yaratılacaktır.

* İki şekilde hasta gelişi olmaktadır; yürüyerek ve ambulansla
* Her iki hasta tipi içinde; gelişlerinden hemen sonra kayıt ve triyaj yapılmaktadır.
* Triyaj sonucunda hastalara kırmızı/sarı/yeşil renklerinden birisi verilerek öncelikler dirilmektedir.
* Gerçek hayatta bu önceliğe göre hastalar doktor muayenesi için kuyruğa girdiklerine rağmen biz şimdilik bu modelde doktorla ilk görüşme için yine FIFO bir kuyruk olduğunu varsayalım. Ayrıca doktorla ilk görüşme sırasında bir hemşirenin de hazır bulunması gerekmektedir.

Acil Servis Sürecinin Şematik gösterimi



Süreler	Değer
* Ambulans gelişleri arası süre	Üssel dağılım (ortalama 30 dk)
* Yürüyerek gelişler arası süre	" " " 5 dk
* Kayıt ve tiryaj süresi (1 hemşire)	Üçgensel " (en az 2 dk, genelde 5 dk, en çok 10 dk)
* Doktorla ilk görüşme (1 hemşire 1 doktor)	Kırmızı hastalar: Lognormal dağılım (ort: 30 dk std sapma 15 dk) Sarı hastalar: Üssel dağılım (ort. 20 dk) Yeşil hastalar: Üçgensel dağılım (en az 5 dk, genelde 8 dk, en çok 12 dk)
* Testler ve X-Ray	Tüm hastalar için; üçgensel dağılım (en az 20 dk, genelde 40 dk, en çok 60 dk)
* Doktorla ikinci görüşme	Tüm hastalar için; üçgensel dağılım (en az 5 dk, genelde 10 dk, en çok 15 dk)

Oranlar

* Triyaj rengi oranları

Ambulansla gelenler için;
%70 kırmızı
%30 sarı

Yürüyerek gelenler için;
%1 kırmızı
%19 sarı
%80 yeşil

* Test ihtiyacı oranları

Sarı ve kırmızı hastalar için;
%10 ihtiyaç var
%90 ihtiyaç yok

Yeşil hastalar için test istenmiyor.

* İkinci doktor görüşmesi sonrası doktorun hastayı taburcu etme kararı

Tüm hastalar için;
%20 hasta yatsın
%80 taburcu olsun.

Kaynaklar

* Doktor sayısı ⟶ 3
* Hemşire 〃 ⟶ 6
* Test makinesi ⟶ 1

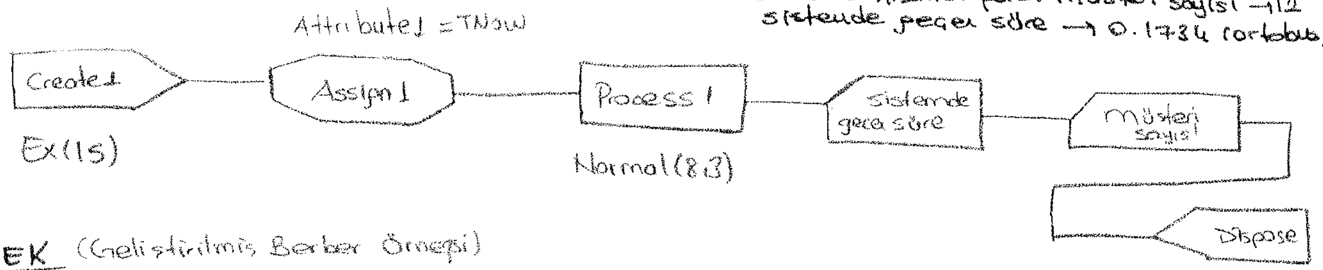
* Her modelleme projesinde olduğu gibi bu projede de bir amacımızın olması gerekmektedir. Bu örnekte;
  - İlk doktor muayenesi için bekleme zamanının 10 dk'yı geçmemesini,
  - Doktorun kullanım oranının %70'i geçmemesini istiyoruz.

ÖRNEK (Berber örneği)

Gelişler arası süre Ex(15) olan ve tıraş süreleri normal (8,3) dağılımına uyan bir berberde 200 dk çalışılması durumunda oluşacak hizmet gören müşteri sayısı, hizmet görenlerin ortalama sistemde geçirdiği süre ve kuyruk durumlarını gösteren Arena simülasyonunu yapınız.

Run → Setup → Replication Length
(200 minutes)

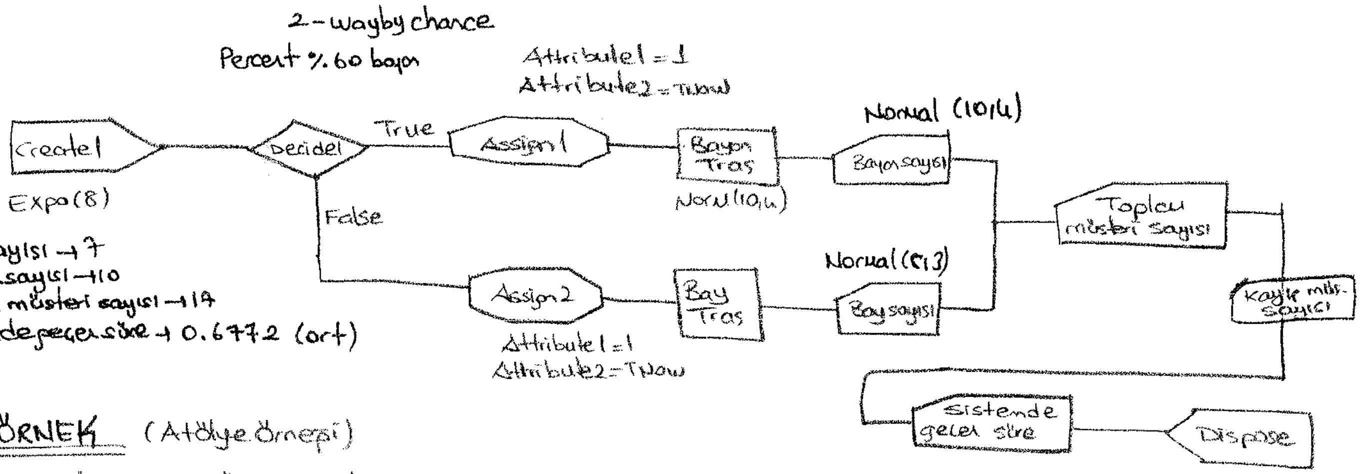
Sistemde hizmet gören müşteri sayısı → 12
sistemde geçen süre → 0.1734 (ortalama)



ÖRNEK (Geliştirilmiş Berber Örneği)

Gelişlerarası süre Ex(8), gelen müşterilerin %60'ının bayan %40'ının bay olduğu, bayan ve bay müşteriler için ayrı ayrı tıraş koltuklarının bulunduğu ve tıraş sürelerinin bayanlar için normal (10,4), baylar için normal (8,3) dağılımına uyan bir berberde 200 dk çalışılması durumunda hizmet gören müşteri sayısı, hizmet gören bay ve bayan sayıları hizmet görenlerin ortalama sistemde geçirdiği süreleri (bay ve bayan için ayrı), kayıp müşteri sayısını ve kuyruk durumlarını gösteren Arena simülasyonunu yapınız.

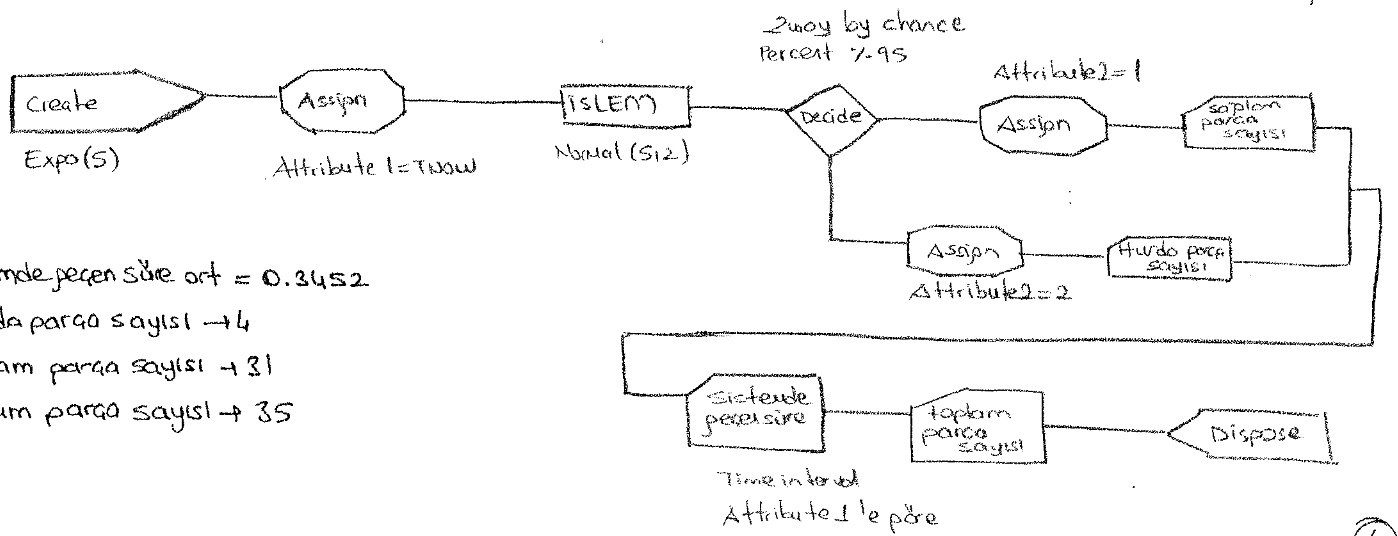
ay sayısı → 7
Bayan sayısı → 10
oplam müşteri sayısı → 14
istemde geçen süre → 0.6772 (ort)



ÖRNEK (Atölye Örneği)

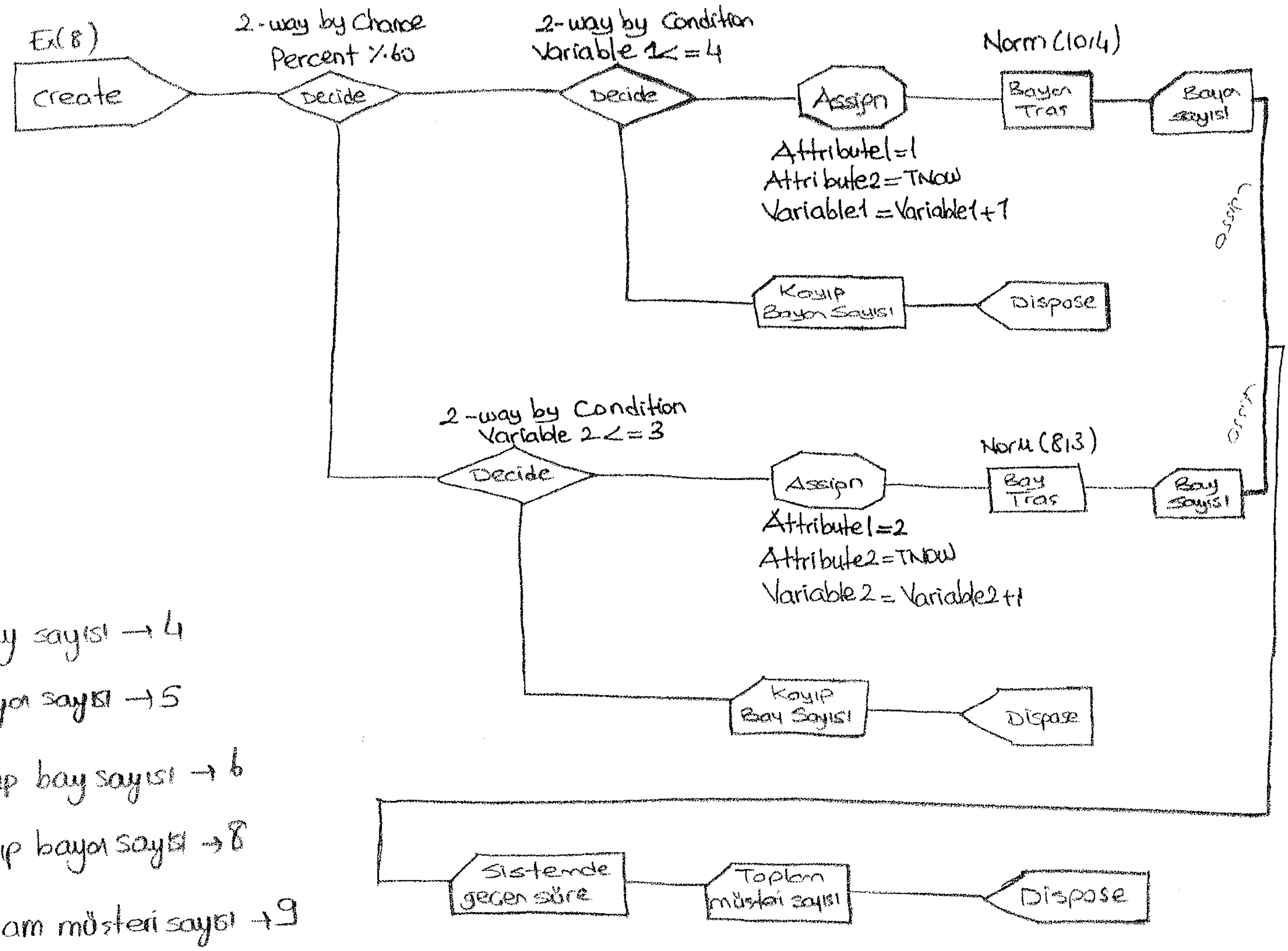
Gelişlerarası süre Ex(5) olan, gelen parçaların %5'inin hurda %95'inin sağlam olduğu, işlem süresinin normal (5,2) dağılımına uyan bir atölyede işlem gören parça sayıları, sistemde geçen süreler ve kuyruk durumunu veren Arena simülasyonunu yapınız. (sağlam ve hurda sayısı ayrı ayrı)

Sistemde geçen süre ort = 0.3452
Hurda parça sayısı → 4
Sağlam parça sayısı → 31
Toplam parça sayısı → 35



ÖRNEK

Gelişlerarası süre Ex(8) olan, gelen müşterilerin %60'ı bayan, %40'ının bay olduğu, bayan ve bay müşteriler için ayrı ayrı tıraş koltuklarının bulunduğu bayanlar için bekleme salonu kapasitesinin 5 kişi, baylar için 4 kişi olduğu ve tıraş sürelerinin bayanlar için normal (10,4) baylar için normal (8,3) dağılımına göre 200 dakika çalıştırılması durumunda oluşacak hizmet gören müşteri sayısı, hizmet gören bay ve bayan sayılarını, hizmet görenlerin ortalama sistemde geçirdiği süreleri (bay ve bayan için ayrı ayrı), kayıp müşteri sayısını ve kuyruk durumlarını gösteren Arena simülasyonunu yapınız.



Bay sayısı → 4

Bayan sayısı → 5

Kayıp bay sayısı → 6

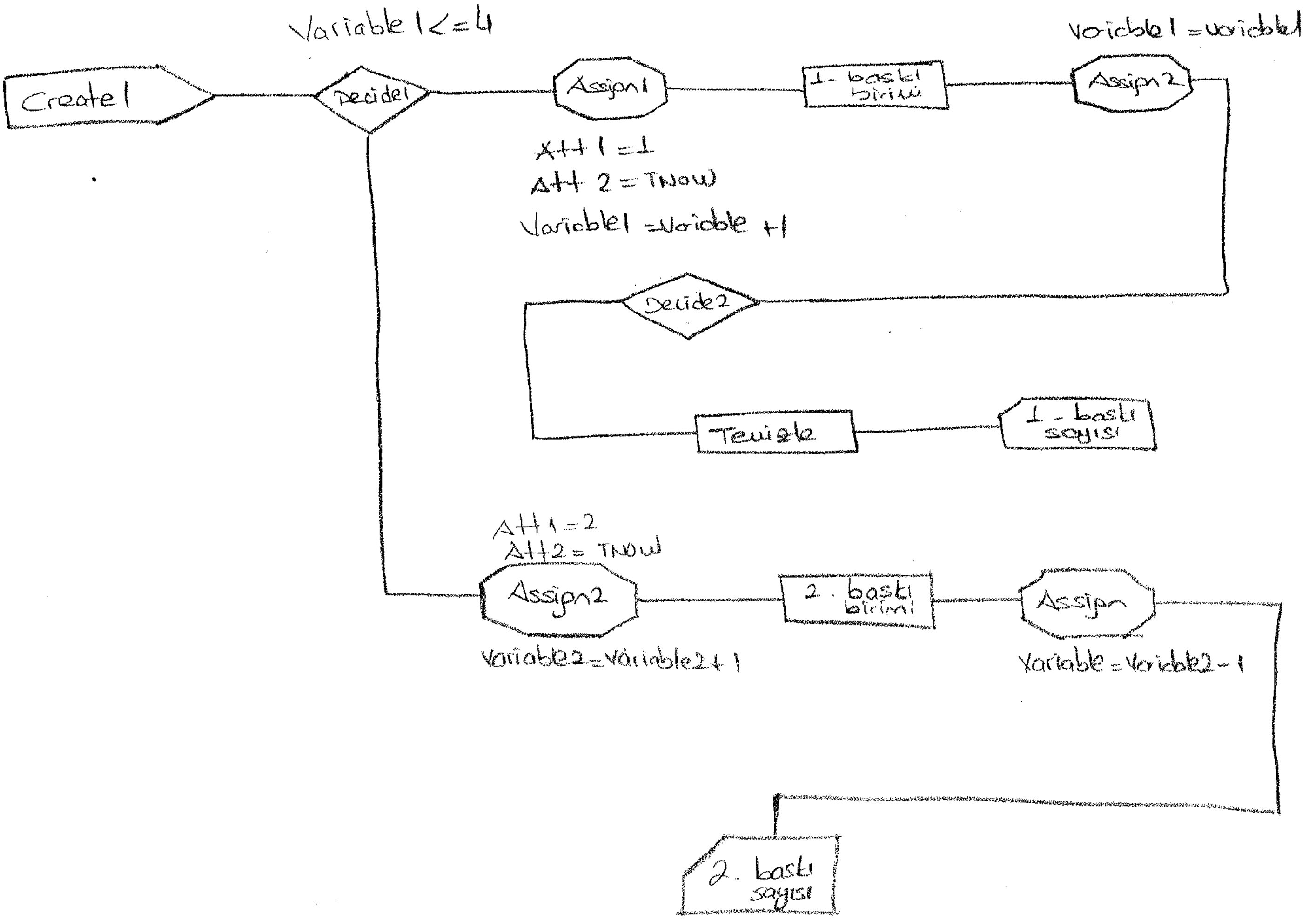
Kayıp bayan sayısı → 8

Toplam müşteri sayısı → 9

Sistemde geçen süre ort → 0,5001

ÖRNEK

Bir davetiye baskı sürecinde kapıt yığınları EXPO(10) varışlar arası zaman ile sisteme varmaktadır. Gelen kağıtlar için iki baskı birimi bulunmaktadır. Birincil ve ikincil. Bütün varışlar birincil baskı birimine yönlendirilmektedir. Eğer birincil baskı birimi önündeki kuyruk 5'ten az ise kağıt yığınları birincil baskı birimi önünde bir kuyruk oluşturur. Kağıt yığınlarının birincil baskı biriminde TRIA (9,12,15) süresince bir işlem görmektedir. Eğer birincil baskı biriminde 5 veya daha fazla kağıt var ise gelen işler ikincil baskı birimine yönlendirilecektir. İkincil baskı birimi sonsuz yığın kuyruğuna sahiptir. Birinci baskı birimi 25 davetiye bastıktan sonra temizleme için kapatılması gerekmektedir. Bu işlem EXPO(30) kadar süre almaktadır. Temizleme esnasında birincil baskı birimi önündeki kağıt yığın. Bu birim aktif olana kadar bekleyecektir. Bir simülasyonu Arena'da gerçekleştirerek her bir kaynağın kullanım oranlarını, bir davetiyenin sistemde geçirdiği zaman vb. istatistikleri hesaplayınız ve bunları grafiksel olarak gösteriniz. Simülasyonu 50 saat için çalıştırınız.

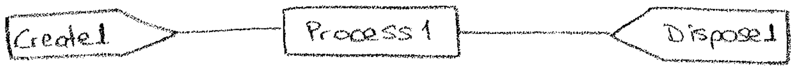


ÖRNEK

Herhangi bir tipteki varlıklar sistemimize gelmekte, işlem görmekte ve işi biten varlıklar sistemden ayrılmaktadır. Ancak işleme tabi tutulmaları için bir kaynağın (veya işlem yapan bir çalışanın veya makinenin) var olması gerektiğini ve eğer bu kaynaktan elimizde yoksa varlıkların kaynaktan elimizde olana kadar bekleyeceklerini biliyoruz. Birden fazla varlık kaynak için bekliyorsa, önce gelenin önce işlem göreceğini kabul ederiz.

Kuyruk Teorisi Notasyonu : M / M / n / FIFO

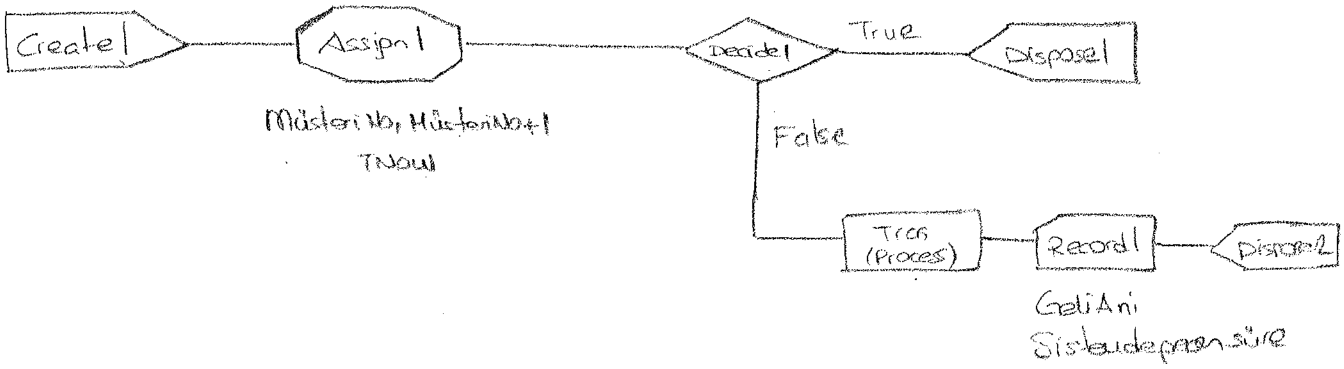
Sistemimizde gelişler arası sürenin ortalama 5 dk olduğunu, her bir varlığın ortalama 10 dakika işlem gördüğünü ve işlem yapan 2 sunucunun olduğunu kabul edelim.



* Varlıkların "Process" içerisinde ne kadar zaman geçireceğini belirtmek için öncelikle "Delay Type" seçilmelidir. Bu listede "constant" (sabit) seçilirse, varlıkların süreç içinde sabit bir süre kalacaklarını belirtmiş oluruz. Bizim problemimizde varlıklar üssel dağılımdan ortalama 10 dk kaldıklarına göre "Delay Type" olarak "Expression" seçilir ve alttaki listeden "EXPO (mean)" seçilir. Mean yazan yere 10 yazılır. "Units" bölümü "Minutes" olarak seçilmelidir. Böylece ortalaması 10 dk olan üssel dağılımdan değerler üretecektir.

ÖRNEK

Bir erkek kuaföründe tıraş kuyruğunun simülasyonu yapılmıştır. Kuaföre gelen müşteriler sıraya girer. Müşteri sırası FIFO mantığıyla çalışmaktadır. Bir müşteri kuaföre girdiğinde eğer tıraş kuyruğu 3 kişi ise kuaförden çıkmaktadır. Tıraş kuyruğu 3 kişiden az ise müşteri kuyruğa girerek tıraş olmaktadır.



ARENA MODÜLLERİ (ÖRNEKLER)

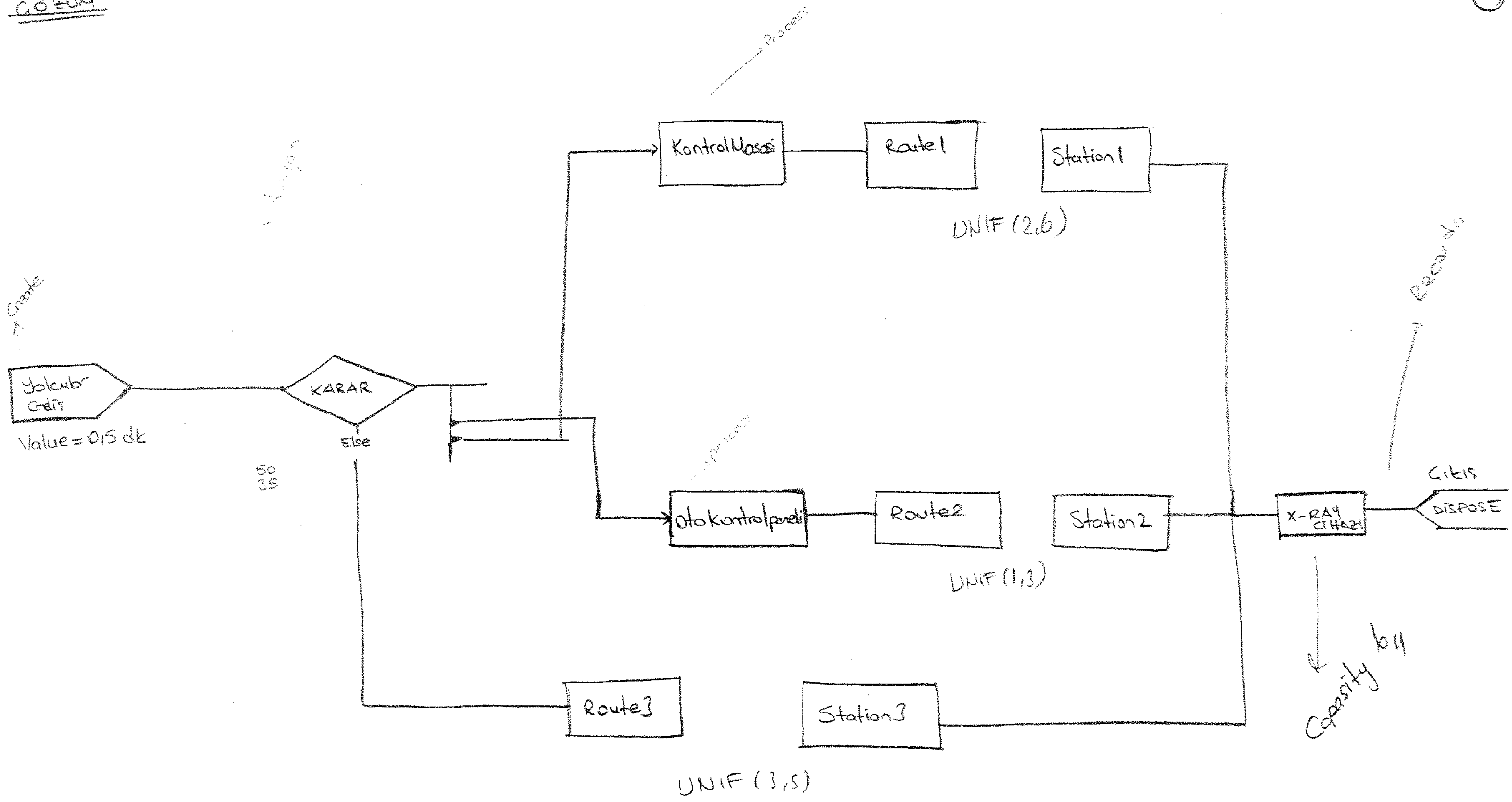
ÖRNEK

Bir havaalanı yönetimi en yoğun 8 saat için kontrol ve güvenlik işlemlerini modellemek istemektedir. Yolcular ana giriş kapısından gelişler arası süresi parametresi 0.5 dk olan üssel dağılıma göre giriş yapmaktadırlar. (Aksi belirtilmediği sürece bütün süreler dakikadır) Yolcuların %35'i sola dönerek kontrol masalarına, %50'si sağa dönerek otomatik kontrol panellerine, kalan %15'i ise kontrol işlemi yaptırmadan doğrudan güvenlik alanına ilerlemektedirler. Kontrol masalarına geçen yolcular parametreleri (1,2,5) dk olan üçgen dağılıma göre işlemlerini gerçekleştirmekte olup bu bölümde çalışan 2 personel bulunmaktadır. Kontrol masasında çalışan personel çalışmaya başladıktan 4 saat sonra sırayla yarımşar saatlik yemek molasına çıkmaktadır. Kontrol işlemini tamamlayan yolcular güvenlik alanına geçmekte olup yürüme süresi parametreleri (2,6) dk olan uniform dağılıma sahiptir. Otomatik kontrol panellerini kullanacak yolcular parametreleri (0.5,1,1.5) dk olan üçgen dağılıma göre işlemlerini gerçekleştirmekte olup bu bölümde mevcut 2 kontrol paneli bulunmaktadır. Otomatik kontrol işlemini tamamlayan yolcular güvenlik alanına geçmekte olup yürüme süresi parametreleri (1,3) dk olan uniform dağılıma sahiptir. Kontrol işlemi yaptırmayacak olan %15'lik kısım ise güvenlik alanına geçişte parametreleri (3,5) dk olan uniform dağılıma göre süre harcamaktadırlar. Güvenlik alanında ise X-ray cihazından geçiş, metal detektörle kontrol, valiz araması, laptop kontrolü gibi işlemleri içeren parametreleri (1,2,6) dk olan üçgen dağılımla güvenlik kontrolü gerçekleşmekte olup yolcuların kullanabileceği 6 güvenlik geçidi bulunmaktadır. Güvenlik kontrolü sonrasında yolcular uçak çıkış kapılarına ilerleyerek sistemden çıkmaktadırlar.

ÇÖZÜM

- İlk önce create modülüyle "Yolcular Geliş"
- Daha sonra %'likler olduğu için decide kullanırız. "KARAR" (N-way by chance)
- İşlem gerçekleştirme olduğu için process kullanacaz. (%35) "kontrol masası"
  - → Kontrol masasında çalışan personeller için schedule lazım.
    - t. personel 1 / t. personel 2 } half hours } Toplamda 16 schedule
- Route ve station kullanıyoruz, birbirine bağlıyoruz. (Yürüme süresi parametresi için) (Route1, Station1) (minutes) Route Time → UNIF(2,6)
- Şimdi otomatik kontrol panelleri için işlem yapıcaz process2 kullandık. "oto kontrol paneli" (%50)
  - (Capacity = 2 yaparsak 2 tane panel olur.)
  - → Yürüme süresi parametreleri için (Route2, station2) UNIF(1,3)
- (%15)'lik kısım için (Doğrudan güvenlik alanına gidenler) (işlem yaptırmayanlar) (Route3 ve Station3 kullandık) UNIF(3,5)
- 6 tane güvenlik için process 3 kullanıyoruz. "X-RAY CİHAZI" Capacity → 6

ÇÖZÜM


Create
Yolcular Giriş
Value = 0,5 dk
KARAR
Else
50
35
Process
Kontrol Masası
Route1
Station1
UNIF (2,6)
Process
Oto kontrol paneli
Route2
Station2
UNIF (1,3)
Route3
Station3
UNIF (3,5)
X-RAY CİHAZI
Capasity by 4
Record
Çıkış
DISPOSE

- Attribute atıyoruz. Sistemde geçirdikleri zamanı hesaplayabilmek için.

Assign

Type : Attribute
Value : TNOW → O anki zamanı üzerinde dolaşalır. Her gelen parçanın özel bir değeri olur.

- Arada geçen zamanı hesaplamak için "RECORD"

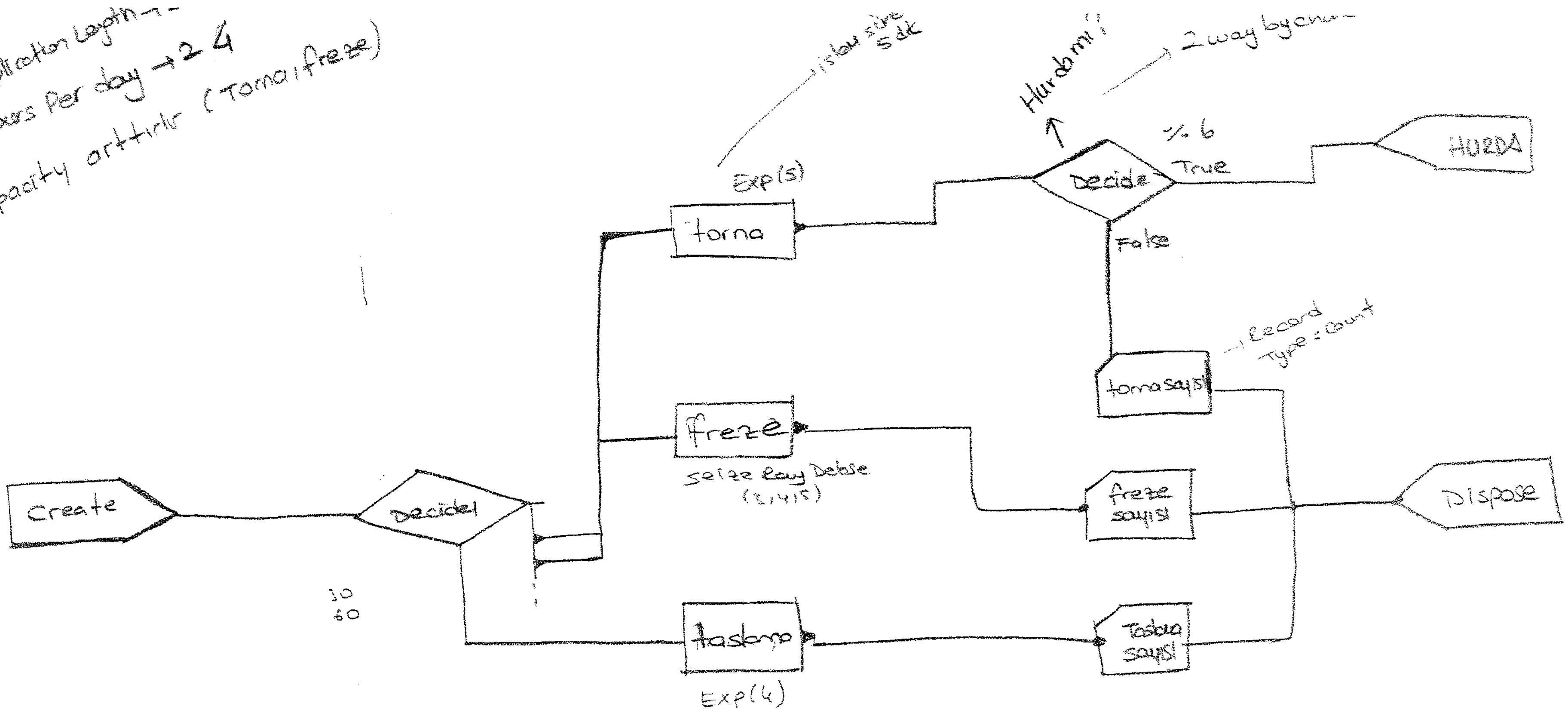
Record → Time Interval

ÖRNEK

Bir mekanik atölyesine işlenmek üzere gelen parçaların gelişler arası süresi ortalaması 1 dk olan üssel dağılıma uygundur. Atölyede 2 adet torna, 2 adet freze, 1 adet taşlama makineleri bulunmaktadır. Gelen parçaların %30'u tornada, %60'ı frezede, %10'u ise taşlamada işlenmektedir. Parçaların tornada işlem süresi 5 dk, taşlamada işlem süresi 4 dk, frezede işlem süresi ise parametreleri (3,4,5) dk olan üçgen dağılımdadır. Tornadan çıkan parçaların %6'sı hatalı çıkmakta olup hatalı parçalar hurdaya ayrılmaktadır. Sistemin simülasyon modelini kurunuz. Simülasyon modelinizi iki saat için çalıştırınız. Tornadan sağlam çıkan parça sayısını, frezeden ve taşlamadan çıkan parça sayısını, torna, freze ve taşlamanın kuyruğunda bekleyen ortalama parça sayısını, ortalama kaynak kullanım oranlarını belirleyiniz.

- İlk önce başlangıç için <u>create</u> koyduk.
- <u>Torna</u>, <u>freze</u>, <u>taşlama</u> makineleri için <u>process</u> koyarız. (3 tane)
  ↳ Tabi öncesinde <u>decide</u> (N - way by chance)
- Torna için bir <u>decide</u> koymamız gerekir.
- Tornadan, frezeden ... çıkan parça sayısı için <u>record</u> kullanmamız gerekir.

Replication Length → -
Hours Per day → 24
Capacity arttirılır (Torna, freze)



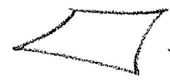
- Create'den başlıyor.
- Decide → işlem kararı alıyor.
- Record → Sayıları belirliyoruz.

ÖRNEK

Bir bankaya müşterilerin gelişler arası süresi ortalaması 1 dk olan üstel dagılıma uygundur. Gelen müşteriler önce numaratöre yönelmekte ve orada NORM (3,1) saniye de sıra alıp giselere yönelmektedir. Yapacakları işleme göre numaratörden numara alan müşteriler havale için 1 ve 2 nolu giseye, hesap işlemleri için 3 ve 4 nolu giseye, fatura ödemeleri için 5 ve 6 nolu giseye yönlendirilmektedir. Gise secimleri numaratör tarafından sırayla yapılmaktadır. Örneğin ilk gelen kişi havaleyi secerse numaratörde 1 nolu giseye daha sonra gelen kişi fatura ödemelerini secerse 5 nolu giseye ikin- kişi havaleyi secerse 2 nolu giseye yönlendirilecektir. Bankanın müşteri portföyü %25 havale için gelenler %40 fatura ödemeleri için gelenler %35 de hesap işleri için gelenler seklindedir. Havale, fatura ve hesap işleri için giselerdeki işlem süreleri sırasıyla NORM (3,2), NORM (4,1), NORM (5,1) dakikadır. Simülasyon modelini 10 saat için çalıştırınız. Her bir gisenin kuyruğunda ortalama bekleyen kişi sayısını ve ortalama bekleme süresini belirleyiniz. Kaynak kullanım oranlarını tespit ediniz.

1 2
3 4
5 6 } Sırayla,,

Numaratör için → process NORM (3,1) "MAKİNA"

Numaratörden sıra aldıktan sonra giseler →  → Decide

Assign için → 3 tane variable,, - havale (value = 1) - fatura (value = 5)
- hesap (value = 3)

Giseler için → 6 tane process,,

havale == 1 ise
true,,

2 way by condition ,,