

# Dengeli Arama Ağaçları

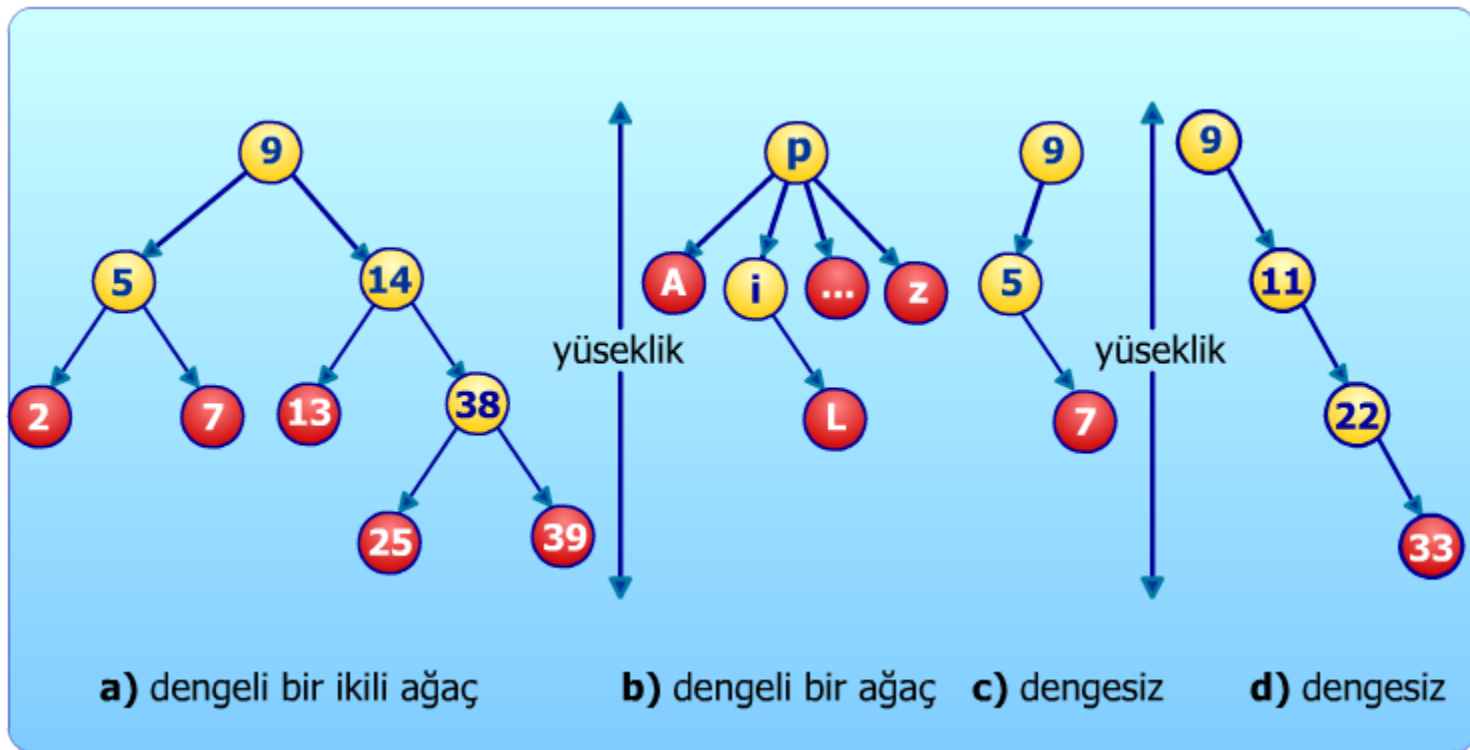
## (Balanced Search Tree)

- AVL tree
- 2-3 ve 2-3-4 tree
- Splay tree
- Red-Black Tree
- B- tree

# DENGELİ AĞAÇ (BALANCED TREE)

- Dengeli ağaç (balanced tree), gelişmesini tüm dallarına homojen biçimde yansıtan ağaç şeklidir; tanım olarak, herhangi bir düğüme bağlı altağaçların yükseklikleri arasındaki fark, şekil a) ve b)'de görüldüğü gibi, **en fazla 1 (bir)** olmalıdır. Bir dalın fazla büyümesi ağacın dengesini bozar ve ağaç üzerine hesaplanmış karmaşıklık hesapları ve yürütme zamanı bağıntılarından sapılır. Dolayısıyla ağaç veri modelinin en önemli getirisi kaybolmaya başlar.
- Yapılan istatistiksel çalışmalarda, ağacın oluşturulması için gelen verilerin rastgele olması durumunda ağacın dengeli olduğu veya çok az sapma gösterdiği gözlenmiştir [HIBBARD-1962].

# DENGELİ AĞAÇ (BALANCED TREE)



# Yükseklik Dengeli Ağaçlar

- BST operasyonlarını daha kısa sürede gerçekleştirmek için pek çok BST dengeleme algoritması vardır. Bunlardan bazıları;
  - Adelson-Velskii ve Landis (AVL) ağaçları (1962)
  - Splay ağaçları (1978)
  - B-ağacı ve diğer çok yönlü arama ağaçları (1972)
  - Red-Black ağaçları (1972)
    - Ayrıca Simetrik İkili B-Ağaçları(Symmetric Binary B-Trees) şeklinde de bilinir

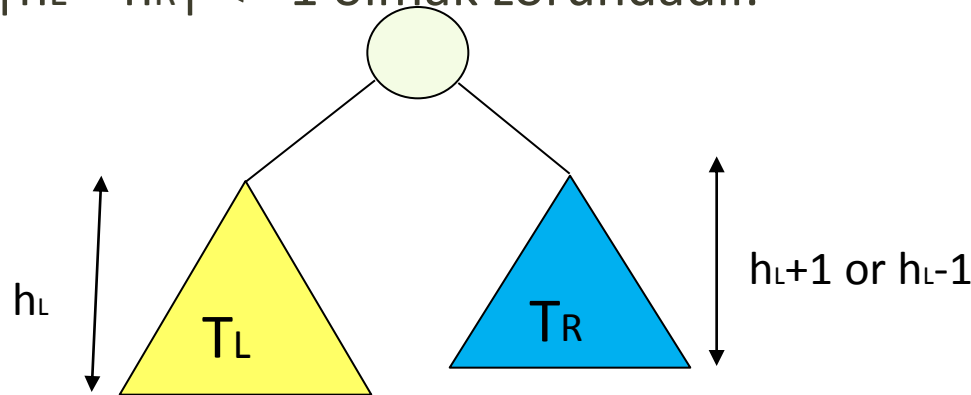
# AVL TREE

# AVL AĞAÇLARI

- AVL( G.M. Adelson-Velskii and E.M. Landis) yöntemine göre kurulan bir ikili arama ağacı, **ikili AVL arama ağacı** olarak adlandırılır.
- AVL ağacının özelliği, sağ alt ağaç ile sol alt ağaç arasındaki yükseklik farkının **en fazla bir düğüm** olmasıdır. Bu kural ağacın tüm düğümleri için geçerlidir.
- Normal ikili arama ağaçları için ekleme ve silme algoritmaları, ikili AVL ağaçları üzerinde ağacın yanlış şekil almasına, yani ağacın dengesinin bozulmasına neden olur.

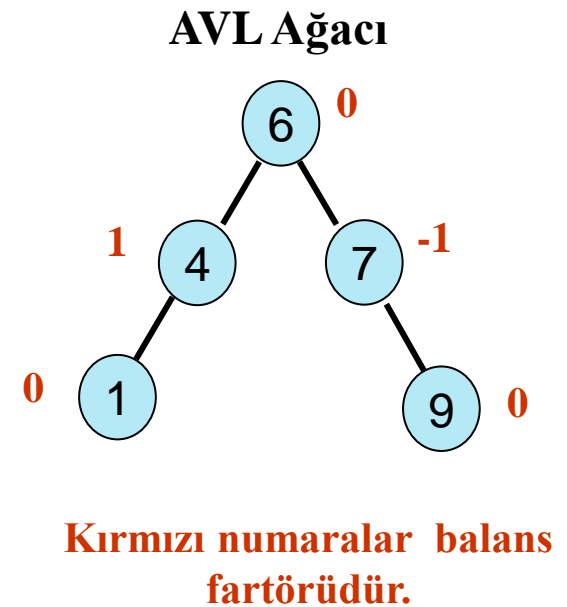
# AVL Ağaçları: Tanım

1. Tüm boş ağaç AVL ağacıdır.
2. Eğer T boş olmayan  $T_L$  ve  $T_R$  şeklinde sol ve sağ alt ağaçları olan ikili arama ağacı ise, T ancak ve ancak aşağıdaki şartları sağlarsa AVL ağacı şeklinde isimlendirilir.
  1.  $T_L$  ve  $T_R$  AVL ağaçları ise
  2.  $h_L$  ve  $h_R$   $T_L$  ve  $T_R$  nin yükseklikleri olmak üzere  $|h_L - h_R| \leq 1$  olmak zorundadır.



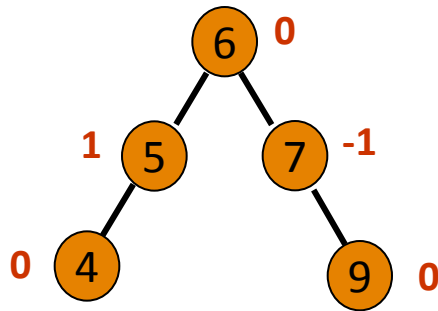
# AVL Ağaçları

- AVL ağaçları dengeli ikili arama ağaçlarıdır.
- $solh = \text{yükseklik}(\text{sol altağaç})$ , ve  $sagh = \text{yükseklik}(\text{sağ altağaç})$  ise
- Bir düğümdeki denge faktörü =  $solh - sagh$
- AVL ağaçlarında balans faktörü sadece -1, 0, 1 olabilir.
  - Eşit ise **0**
  - Sol fazla ise **1**
  - Sağ fazla ise **-1**
- Her bir düğümün sol ve sağ alt ağaçlarının yükseklikleri arasındaki fark en fazla 1 olabilir.

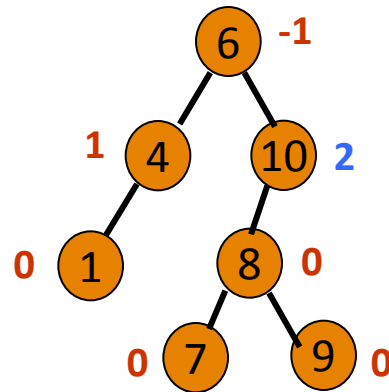




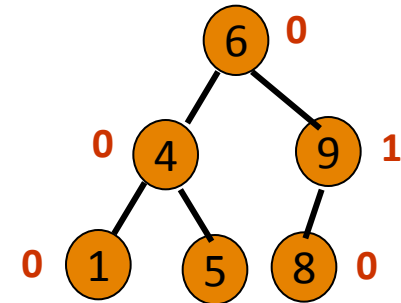
# AVL Ağaçları: Örnekler



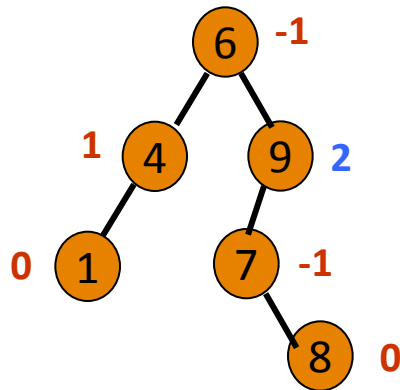
AVL Ağacı



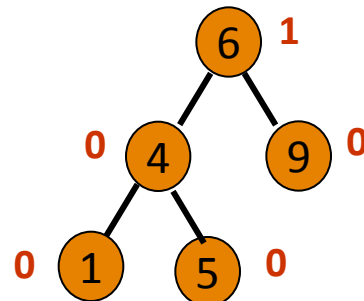
AVL Ağacı Değildir



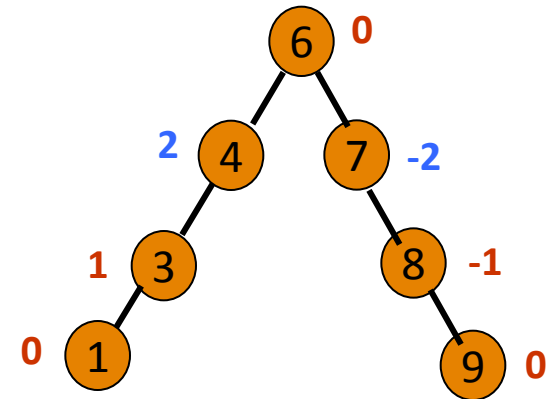
AVL Ağacı



AVL Ağacı Değildir



AVL Ağacı

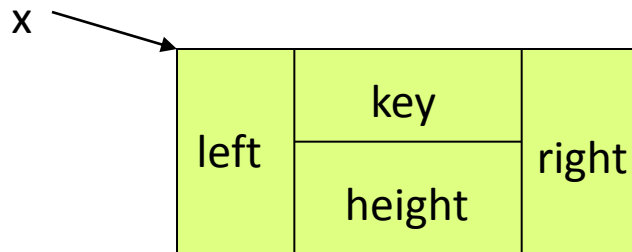


AVL Ağacı Değildir

Kırmızı numaralar balans faktörüdür.

# AVL Ağacı: Gerçekleştirim

- AVL ağacının gerçekleştirimi için her  $x$  düğümünün yüksekliği kaydedilir.
- $x$ 'in balans faktörü =  $x$ 'in sol alt ağacının yüksekliği –  $x$ 'in sağ alt ağacının yüksekliği
- AVL ağaçlarında, “bf” sadece  $\{-1, 0, 1\}$  değerlerini alabilir.



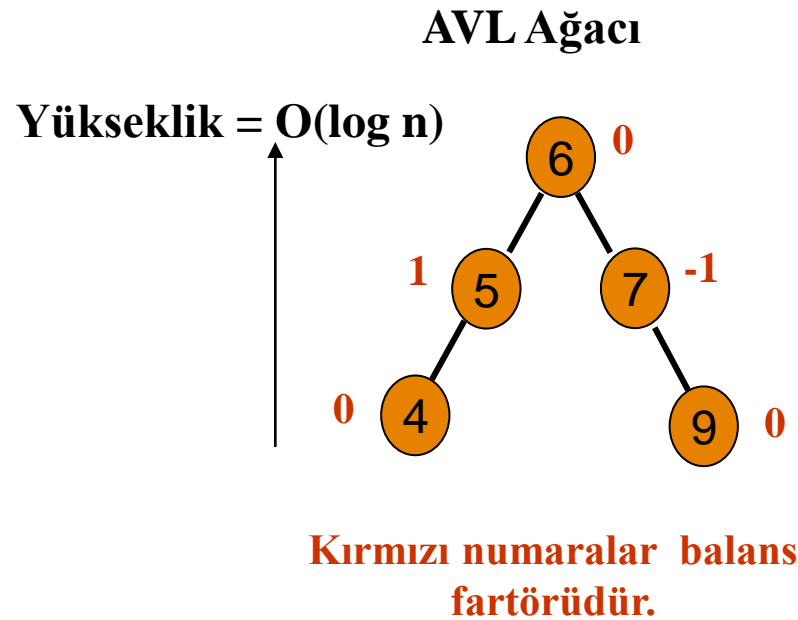
```
class AVLDugumu
{
    int deger;
    int yukseklık;
    AVLDugumu sol;
    AVLDugumu sag;
}
```

## AVL AĞAÇLARI

- Normal ikili arama ağaçlarında fonksiyonların en kötü çalışma süreleri  $T_w = O(n)$  dir. Bu durum lineer zaman olduğundan çok kötü bir sonuç yaratır.
- AVL ağaç veri modeli oluşturularak bu kötü çalışma süresi ortadan kaldırılır.
- AVL ağaçları için  $T_w = O(\log n)$ 'dir.

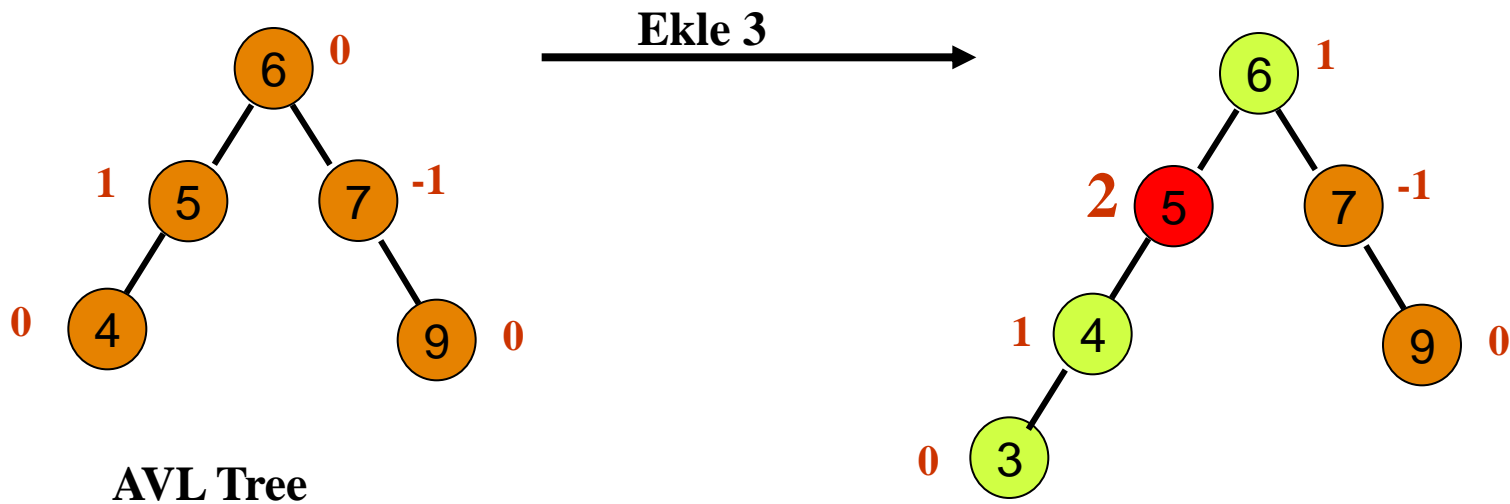
# AVL Ağaçları

- N düğümlü bir AVL ağacının yüksekliği daima  $O(\log n)$  dir.
- Peki nasıl?



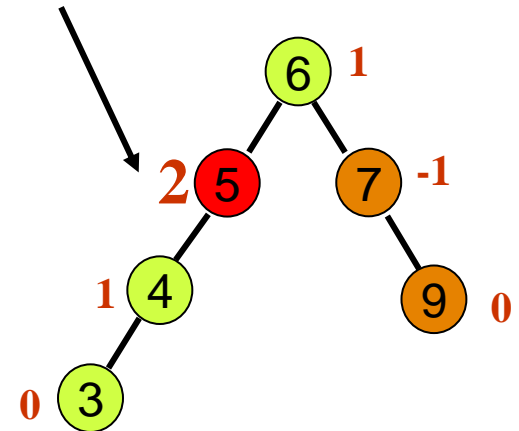
# AVL Ağaçları: Şanslı ve Şanssız

- Şanslı:
  - Arama süresi  $O(h) = O(\log n)$
- Şansız
  - Ekleme ve silme işlemleri ağacın dengesiz olmasına neden olabilir.

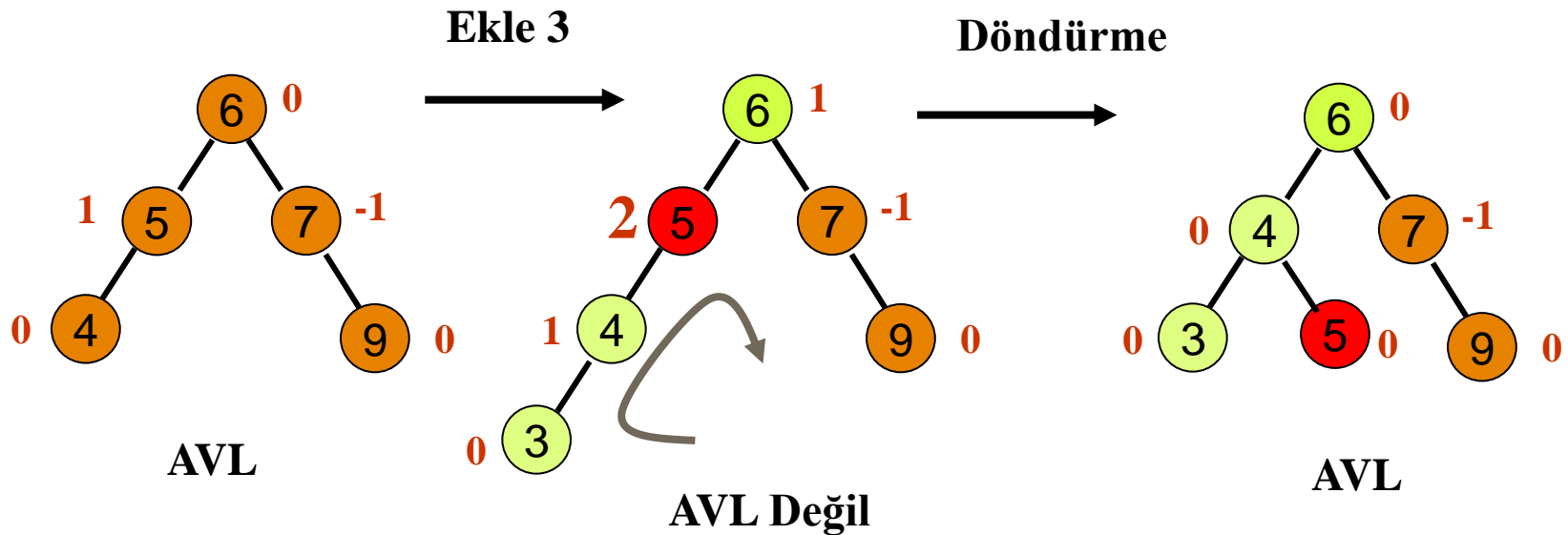


## AVL Ağacında Dengenin Sağlanması

- **Problem:** Ekleme işlemi bazı durumlarda **ekleme noktasına göre kök olan bölgelerde** balans faktörün 2 veya -2 olmasına neden olabilir.
- **Fikir:** Yeni düğümü ekledikten sonra
  1. Balans faktörü düzelterek köke doğru çık.
  2. Eğer düğümün balans faktörü 2 veya -2 ise ağaç bu düğüm üzerinde döndürülerek düzeltilir.



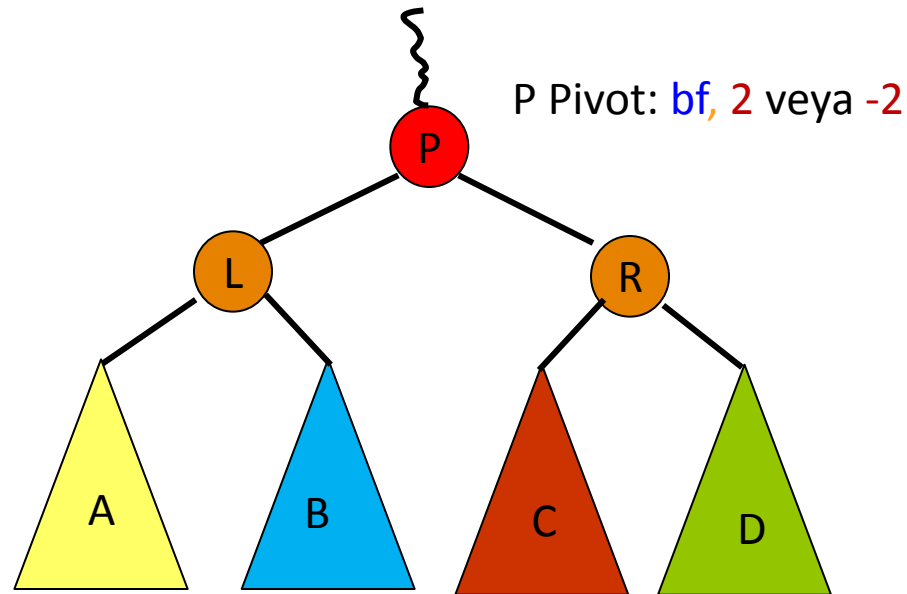
## Denge Sağlama: Örnek



### Yeni düğümü ekledikten sonra

1. Balans faktörü düzelterek köke doğru çık.
2. Eğer düğümün balans faktörü 2 veya -2 ise ağaç bu düğüm üzerinde döndürülerek düzeltilir.

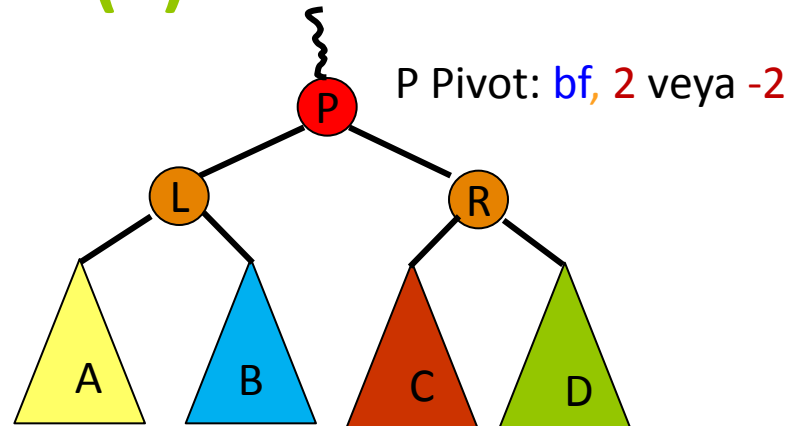
## AVL Ağacı - Ekleme (1)



- **P** düğümünün dengeyi bozan düğüm olduğu düşünülürse.
  - **P pivot** düğüm şeklinde isimlendirilir.
  - Eklemeden sonra köke doğru çıkarken bf 'nin 2 veya -2 olduğu ilk düğümdür.

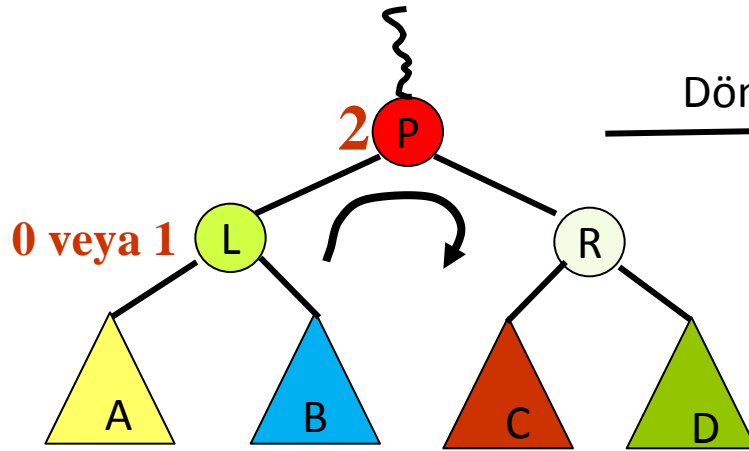


## AVL Ağacı - Ekleme (2)



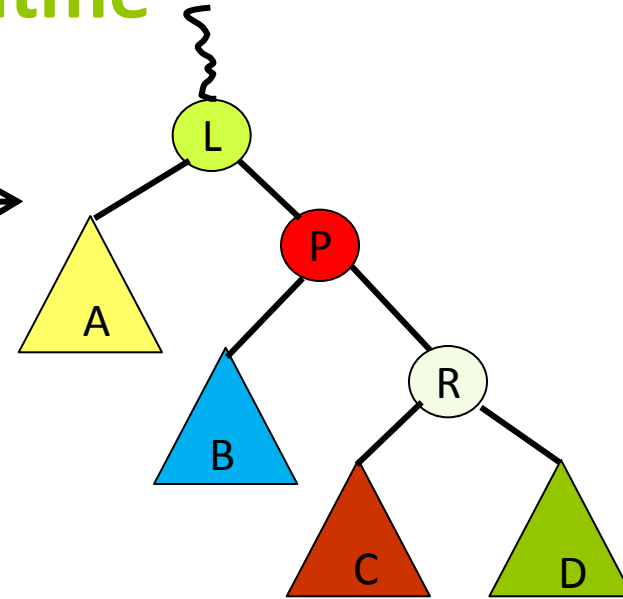
- 4 farklı durum vardır:
  - **Dış Durum** (tek döndürme gerektiren) :
    1. P'nin sol alt ağacının soluna eklendiğinde (LL Dengesizliği).
    2. P'nin sağ alt ağacının sağına eklendiğinde (RR Dengesizliği)
  - **İç Durum** (2 kez döndürme işlemi gerektiren) :
    3. P'nin sol alt ağacının sağına eklendiğinde (RL Dengesizliği)
    4. P'nin sağ alt ağacının soluna eklendiğinde (LR Dengesizliği)

## LL Dengesizliği & Düzeltme



Ekleme işleminden sonra ağaç

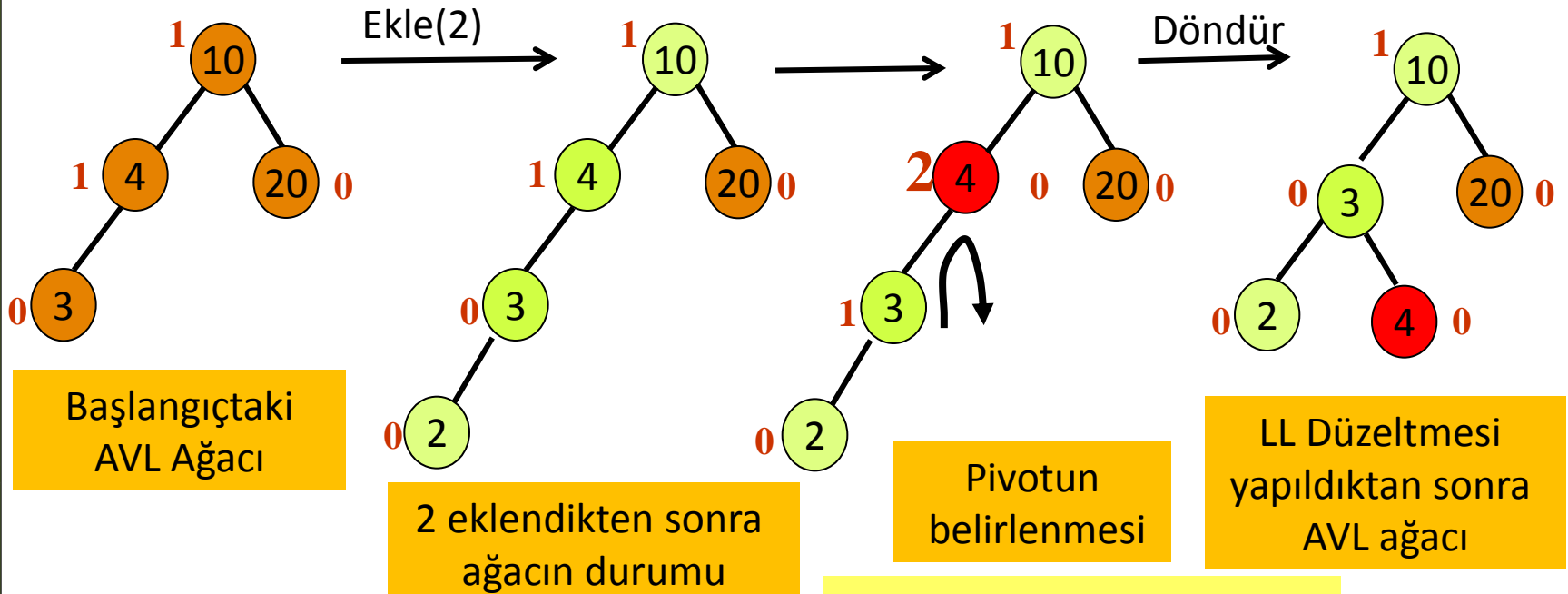
Döndürme



LL Düzeltmesinden sonra ağaç

- LL Dengesizliği: P'nin sol alt ağacının soluna eklendiğimizde (A alt ağacına)
  - P'nin bf si 2
  - L'nin bf si 0 veya 1
- Düzeltme: P etrafında sağa doğru tek dönderme.

# LL Dengesizliği Düzeltme Örneği (1)

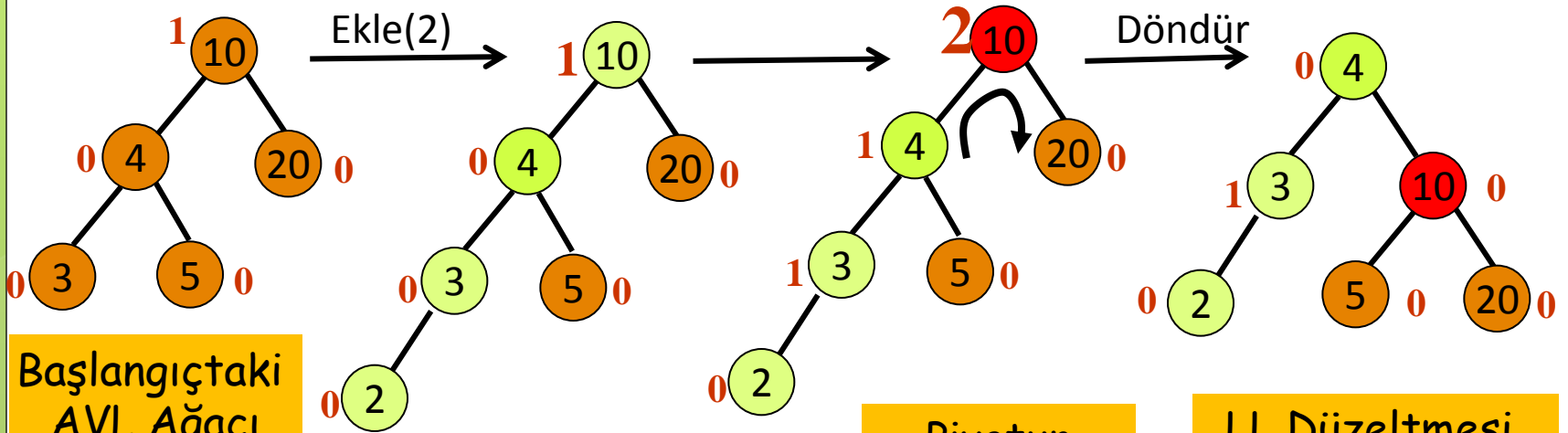


Balans faktörü  
düzelterek köke doğru  
ilerle

Dengesizliğin türünün  
belirlenmesi

- **LL Dengesizliği:**
  - **P(4)**'ün **bf** si 2
  - **L(3)**'ün **bf** si 0 veya 1

## LL Dengesizliği Düzeltme Örneği (2)



Başlangıçtaki  
AVL Ağacı

2 eklendikten sonra  
ağacın durumu

Pivotun  
belirlenmesi

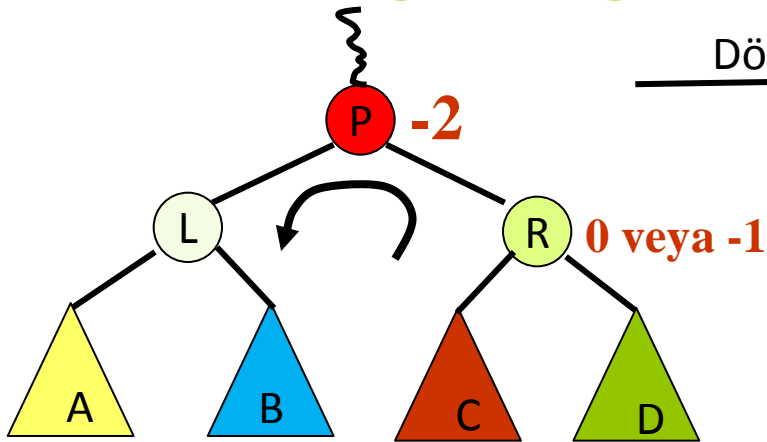
LL Düzeltmesi  
yapıldıktan sonra  
AVL ağacı

Balans faktörü  
düzelterek köke  
doğru ilerle

Dengesizliğin türünün  
belirlenmesi

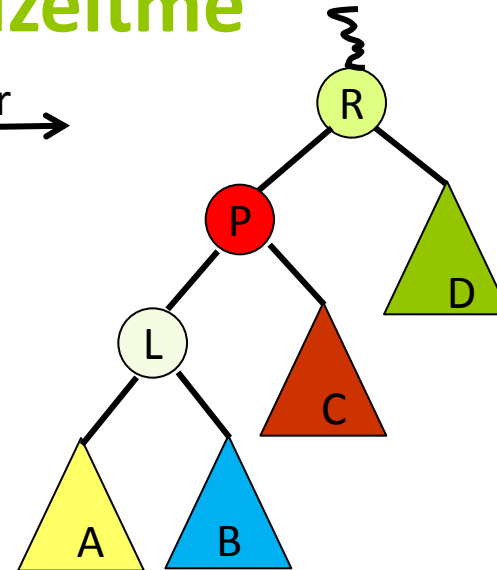
- LL Dengesizliği:
  - P(4)'ün bfsi 2
  - L(3)'ün bfsi 0 veya 1

## RR Dengesizliği & Düzeltme



Ekledikten sonra

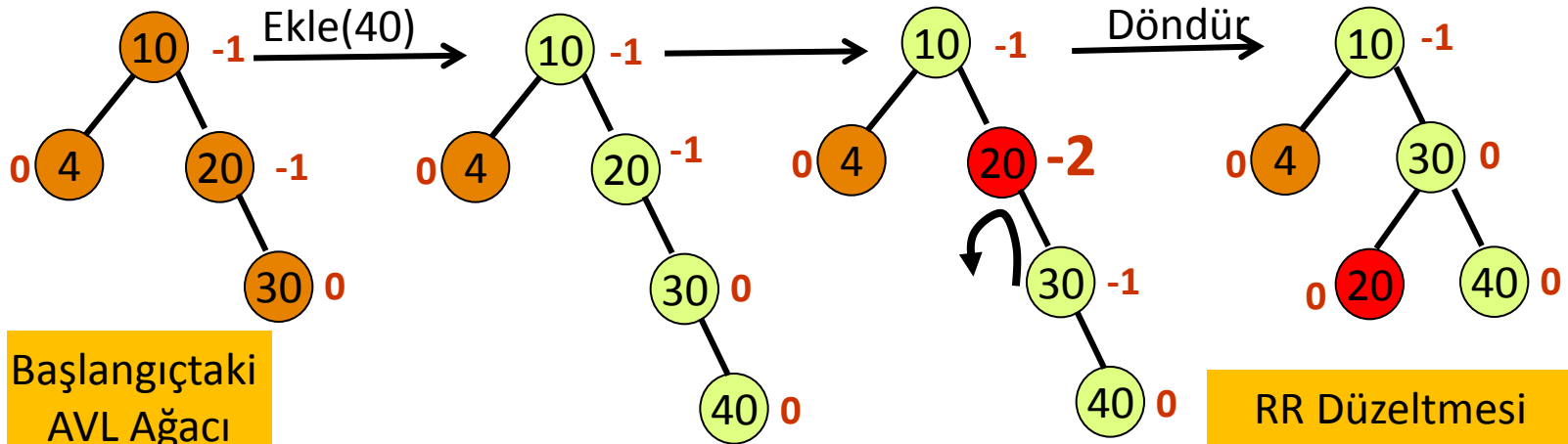
Döndür →



RR Düzeltmesi yapıldıktan sonra

- **RR Dengesizliği:** P'nin sağ alt ağacının sağına eklendiğinde (D alt ağacına eklendiğinde)
  - $P \rightarrow bf = -2$
  - $R \rightarrow bf = 0 \text{ veya } -1$
- **Düzeltme:** P etrafında sola doğru tek dönderme

## RR Dengesizliği Düzeltme Örneği (1)



Balans faktörü  
düzelterek köke doğru  
ilerle

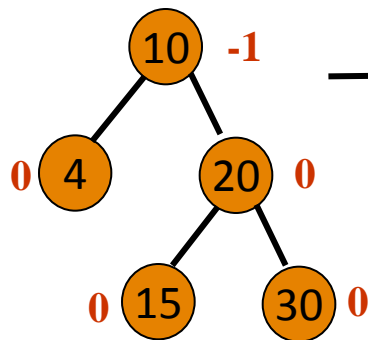
Pivotun  
belirlenmesi

Dengesizliğin türünün  
belirlenmesi

RR Düzeltmesi  
yapıldıktan sonra  
AVL ağacı

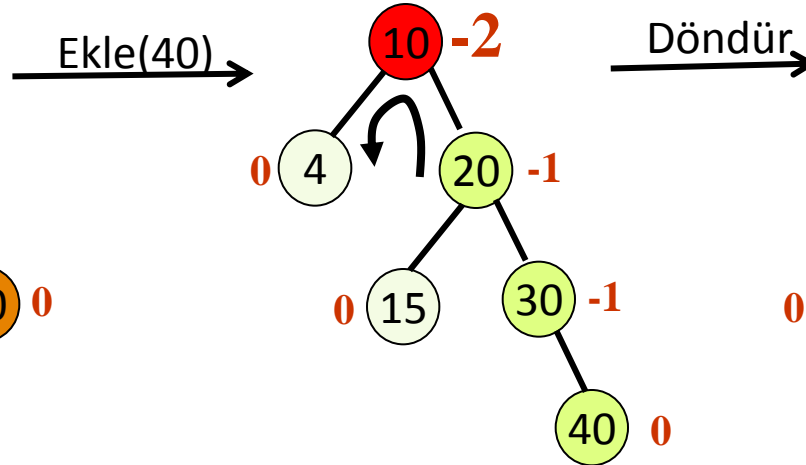
- **RR Dengesizliği:**
  - $P(20) \rightarrow bf = -2$
  - $R(30) \rightarrow bf = 0$  veya  $-1$

## RR Dengesizliği Düzeltme Örneği (2)



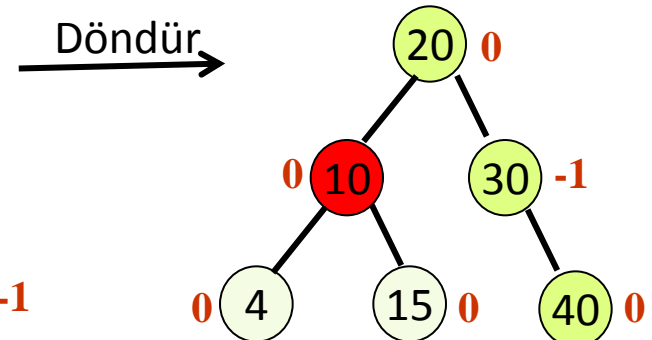
Başlangıçtaki  
AVL Ağacı

Balans faktörü düzelterek köke  
doğru ilerle ve 10'u pivot olarak  
belirle



40 eklendikten sonra  
ağacın durumu

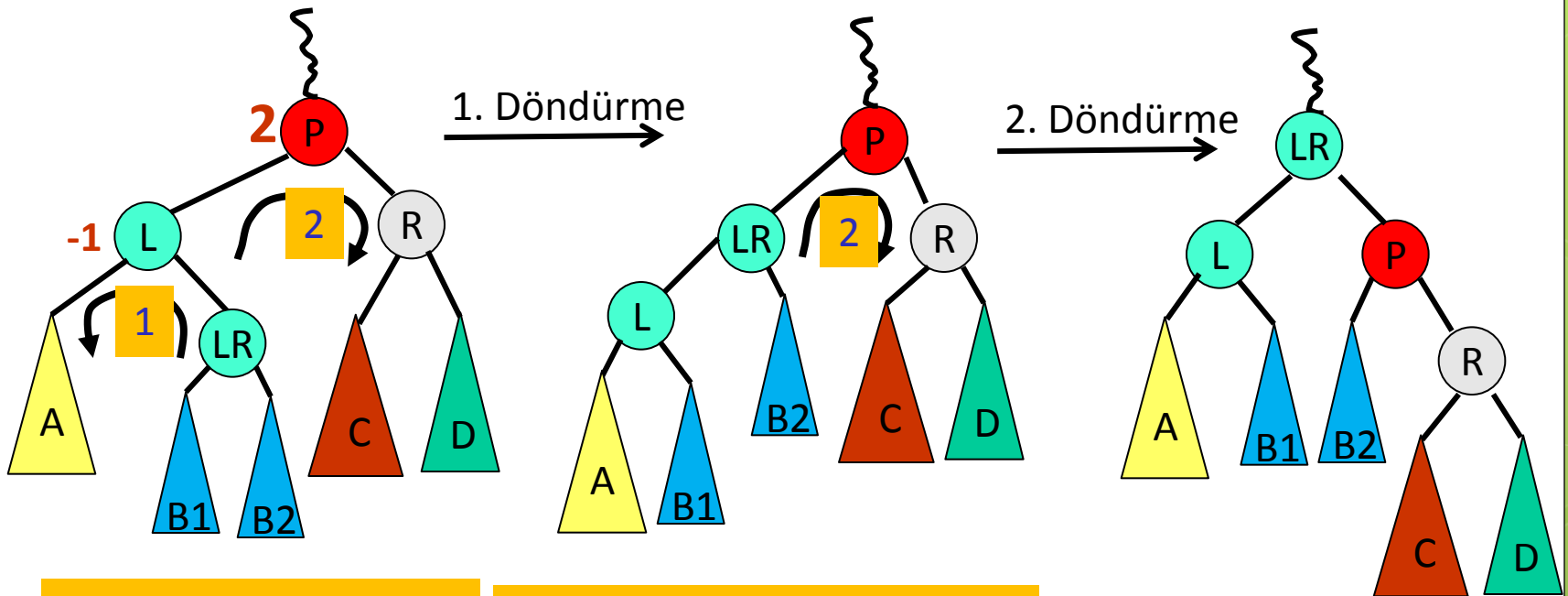
Dengesizliğin türünün  
belirlenmesi



RR Düzeltmesi  
yapıldıktan sonra  
AVL ağacı

- RR Dengesizliği:
  - $P(10) \rightarrow bf = -2$
  - $R(20) \rightarrow bf = 0$  veya  $-1$

# LR Dengesizliği & Düzeltme



Eklemeden sonra ağaç

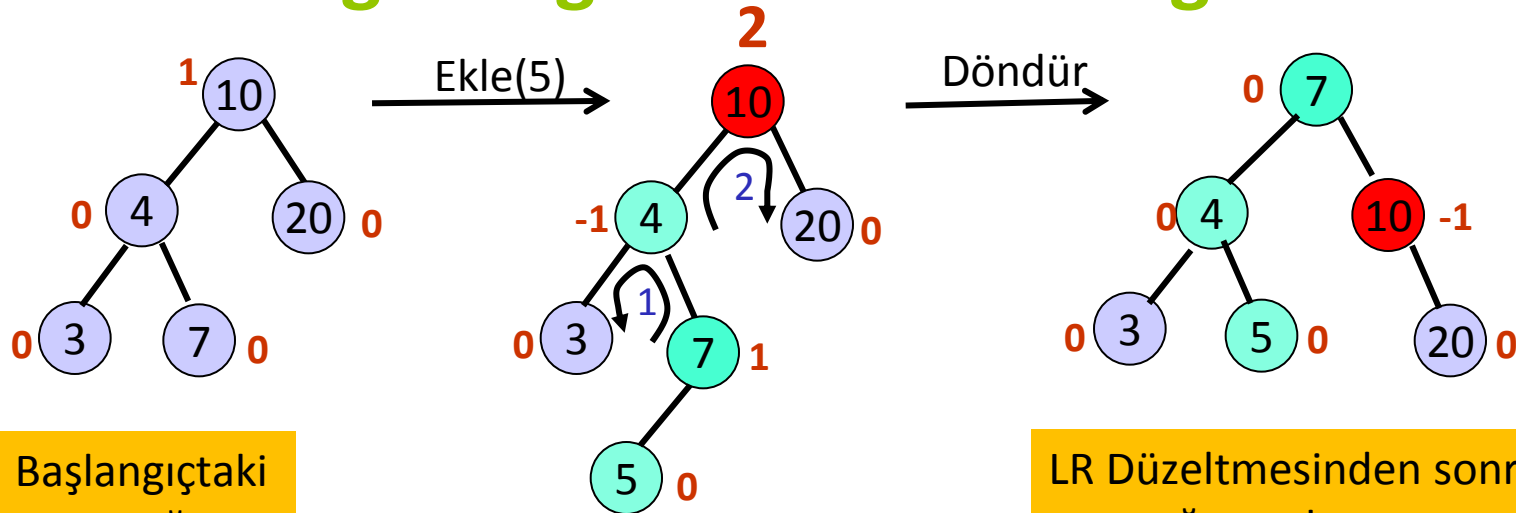
1. Döndürmeden sonra ağaç

LR Düzeltmesinden sonra

- **LR Dengesizliği:** P'nin sol alt ağacının sağına eklendiğinde (LR ağacına)
  - $P \rightarrow bf = 2$
  - $L \rightarrow bf = -1$
- **Düzeltme:** L & P etrafında 2 kez döndürme



# LR Dengesizliği Düzeltme Örneği



Başlangıçtaki  
AVL Ağacı

Balans faktörü  
düzelterek köke doğru  
ilerle ve 10'u pivot  
olarak belirle

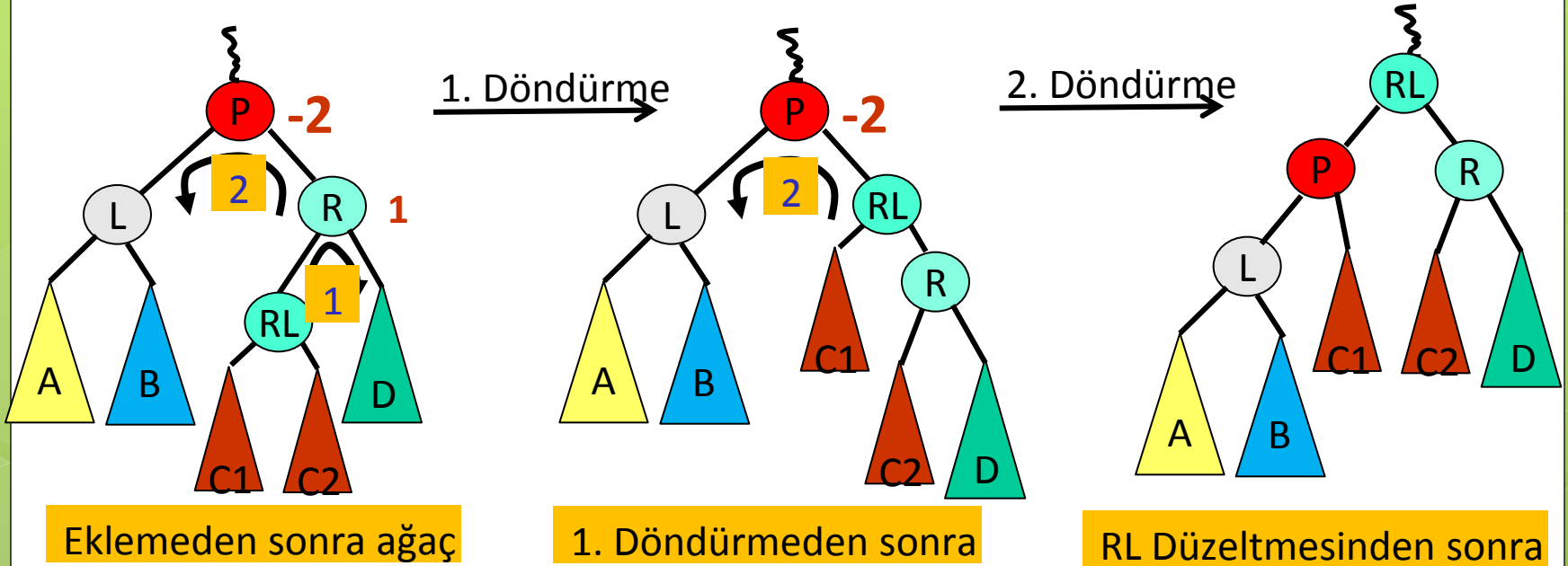
2 eklendikten sonra  
ağacın durumu

Dengesizliğin türünün  
belirlenmesi

LR Düzeltmesinden sonra  
ağacın durumu

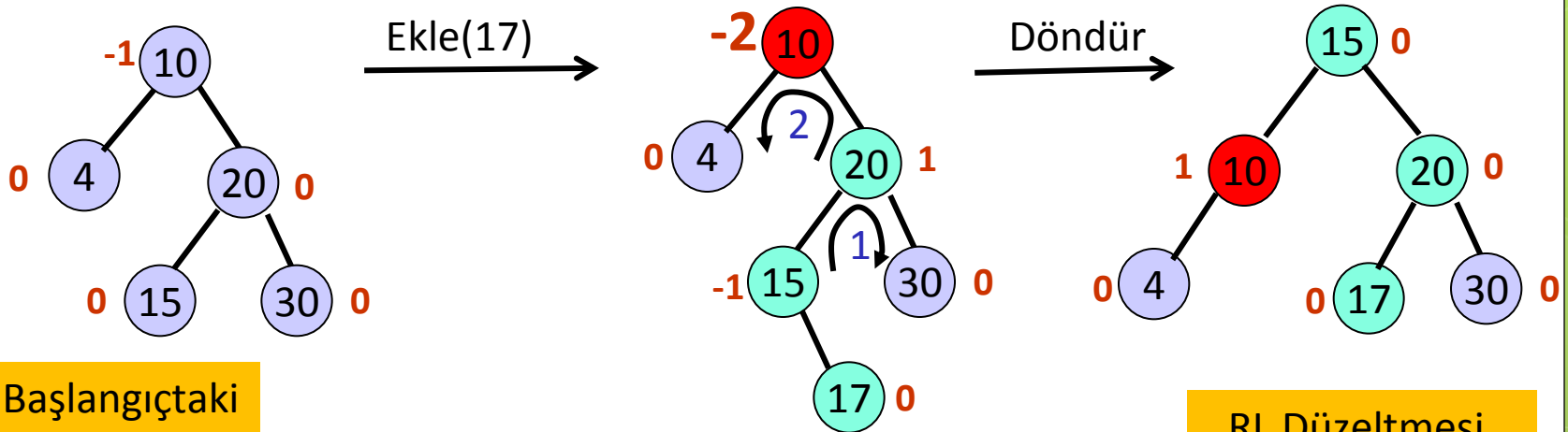
- LR Dengesizliği:
  - $P(10) \rightarrow bf = 2$
  - $L(4) \rightarrow bf = -1$

## RL Dengesizliği & Düzeltme



- **RL Dengesizliği:** P'nin sağ alt ağacının soluna eklendiğinde (RL alt ağacına)
  - $P \rightarrow bf = -2$
  - $R \rightarrow bf = 1$
- **Düzeltme:** R & P etrafında 2 kez döndürme.

## RL Dengesizliği Düzeltme Örneği



Başlangıçtaki  
AVL Ağacı

Balans faktörü  
düzelterek köke doğru  
ilerle ve 10'u pivot  
olarak belirle

17 eklendikten sonra  
ağacın durumu

Dengesizliğin türünün  
belirlenmesi

RL Düzeltmesi  
yapıldıktan sonra  
AVL ağacı

- **RL Dengesizliği:**
  - $P(10) \rightarrow bf = -2$
  - $R(20) \rightarrow bf = 1$

# AVL AĞAÇLARI

- AVL Ağaçlarının C Kodları İle Yazılmış Bazı Fonksiyonları
- **Fonksiyon 1.** AVL Ağacı İçim Düğüm Tanımı
- 
- `struct AvlDugum{`
- `ElementType eleman;`
- `AvlAgac sol;`
- `AvlAgac sag;`
- `int yukseklik;`
- `}`

# AVL AĞAÇLARI

- **Fonksiyon 2.** Bir AVL Düğümünün Yüksekliğini Döndüren Fonksiyon
- 
- `static int yukseklik (Pozisyon P)`
- `{`
- `if (P == NULL)`
- `return -1;`
- `else`
- `return P -> yukseklik;`
- `}`

# AVL AĞAÇLARI

- **Fonksiyon 3.** AVL Ağacı İçin Ekleme Fonksiyonu
- AvlAgac Ekleme (ElementType x, AvlAgac T) {
- if (T == NULL) {
- T = malloc (sizeof (struct AvlDugum));
- If (T == NULL)
- printf ("yer yok!");
- else
- {
- T -> eleman = x;
- T -> yukseklik = 0;
- T -> sol = T -> sag = NULL;
- }
- }
- }

## AVL AĞAÇLARI

- else
- If ( $x < T \rightarrow \text{eleman}$ ) {
- $T \rightarrow \text{sol} = \text{Ekleme}(x, T \rightarrow \text{sol});$
- If( $\text{yukseklık}(T \rightarrow \text{sol}) - \text{yukseklık}(T \rightarrow \text{sag}) == 2$ )
- If( $x < T \rightarrow \text{sol} \rightarrow \text{eleman}$ )  $T = \text{SolTekDondurme}(T);$
- else  $T = \text{Sol\_SagCiftDondurme}(T);$  }
- else
- If ( $x > T \rightarrow \text{eleman}$ ) {
- $T \rightarrow \text{sag} = \text{Ekleme}(x, T \rightarrow \text{sag});$
- If ( $\text{yukseklık}(T \rightarrow \text{sag}) - \text{yukseklık}(T \rightarrow \text{sol}) == 2$ )
- If ( $x > T \rightarrow \text{sag} \rightarrow \text{eleman}$ )  $T = \text{SagTekDondurme}(T);$
- else  $T = \text{Sag\_SolCiftDondurme}(T);$  }
- $T \rightarrow \text{yukseklık} = \max(\text{yukseklık}(T \rightarrow \text{sol}), \text{yukseklık}(T \rightarrow \text{sag})) + 1;$
- return T; }

# AVL AĞAÇLARI

- **Fonksiyon 4.** AVL Ağacı İçin Sola Doğru Tek Döndürme (LL) Fonksiyonu
- static Pozisyon SolTekDondurma (Pozisyon k2)
- {
- Pozisyon k1;
- k1 = k2 -> sol;
- k2 -> sol = k1 -> sag;
- k1 -> sag = k2;
- k2 ->yukseklık = max(yukseklık(k2 -> sol), yukseklik(k2 ->sag)) + 1;
- k1 -> yukseklik = max (yukseklık (k1 -> sol) ,k2 -> yukseklik) + 1;
- return k1;
- }



## AVL AĞAÇLARI

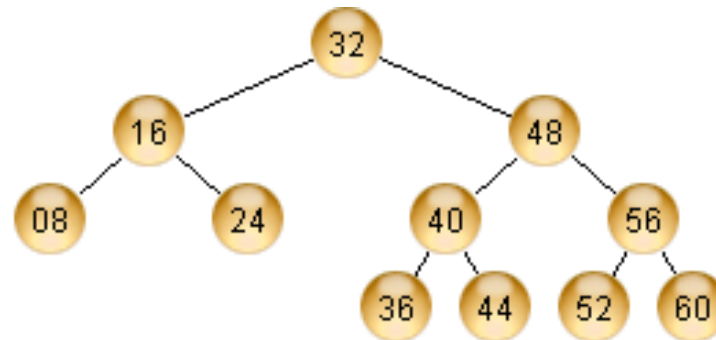
- **Fonksiyon 5.** AVL Ağacı İçin Sol-Sağ Çift Döndürme
- static Pozisyon Sol\_SagCiftDondurma (Pozisyon k3)
- {
- k3 -> sol = SagTekDondurma (k3 -> sol);
- return SolTekDondurma (k3);
- }

## AVL AĞAÇLARI

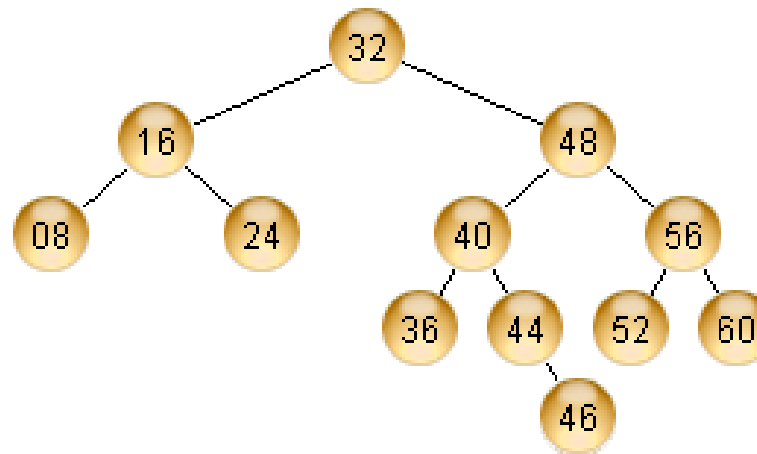
- C# veya java sola döndürme
- `public int solaDondur(AVLTreeNode k1, AVLTreeNode k3)`
- `{`
- `k3.leftNode = k1.rightNode;`
- `k1.rightNode = k3.leftNode.leftNode;`
- `k3.leftNode.leftNode = k1;`
- `k3.yukseklık = yukseklikBul(k3);`
- `k3.leftNode.yukseklık = yukseklikBul(k3.leftNode);`
- `k1.yukseklık = yukseklikBul(k1);`
- `}`

# AVL AĞAÇLARI

● Örnek:

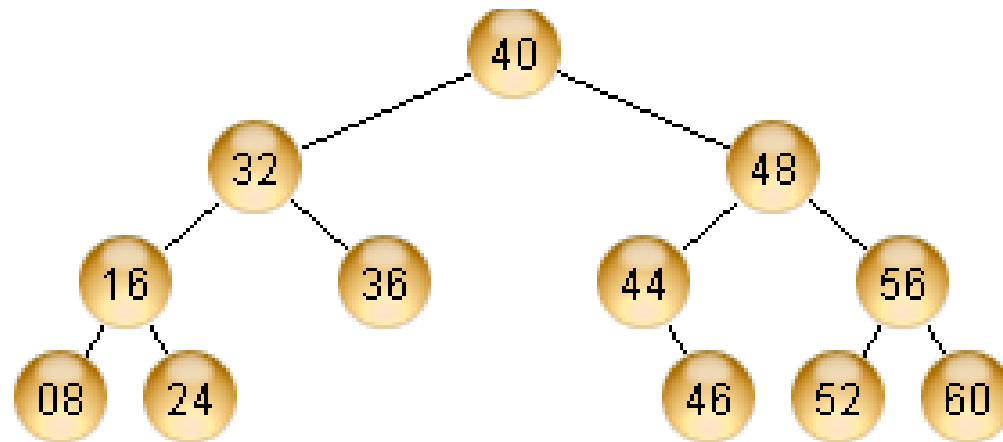


● 46, eklendi



# AVL AĞAÇLARI

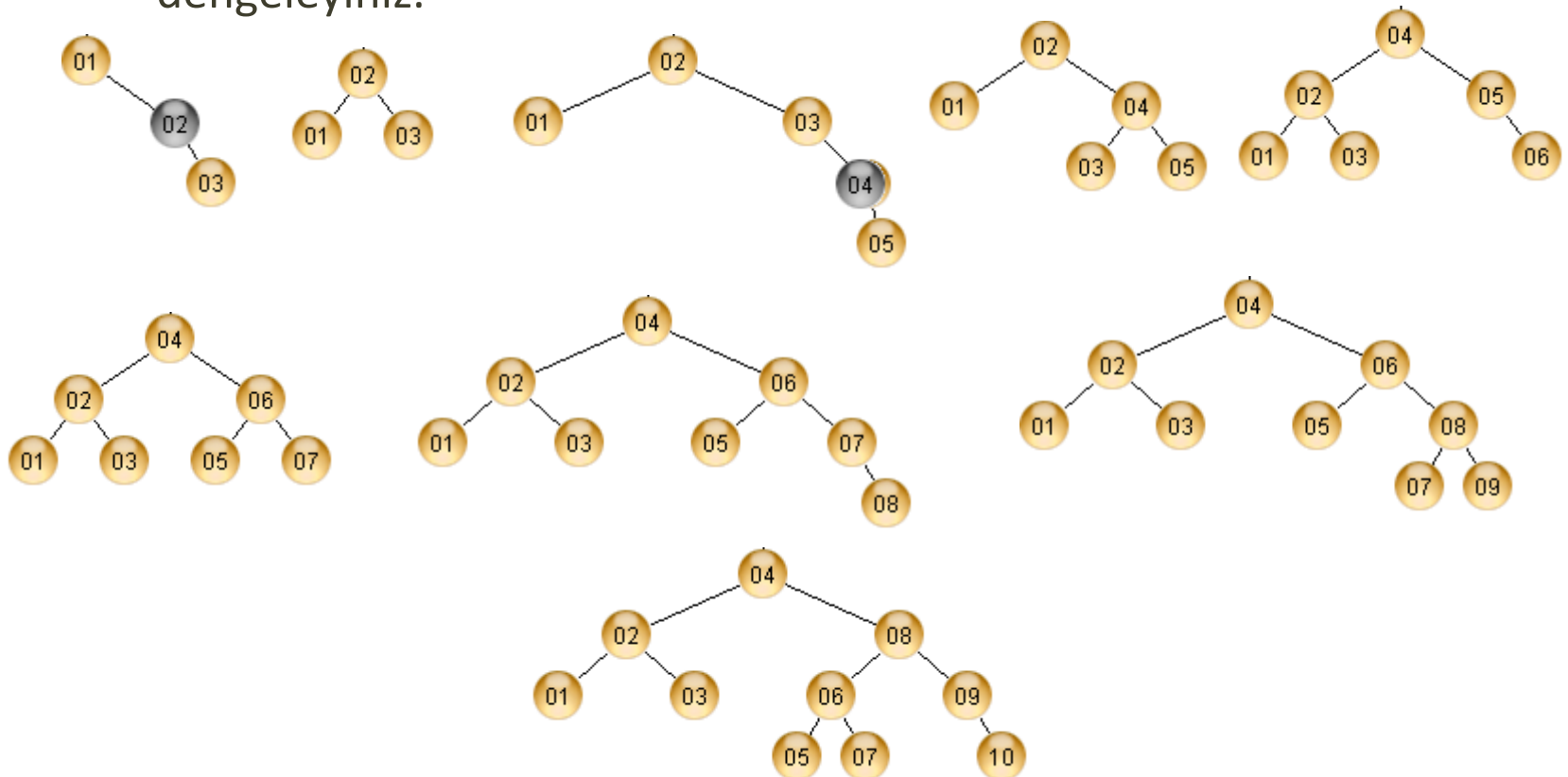
- Örnek:



- Dengeli AVL ağacı

# AVL AĞAÇLARI

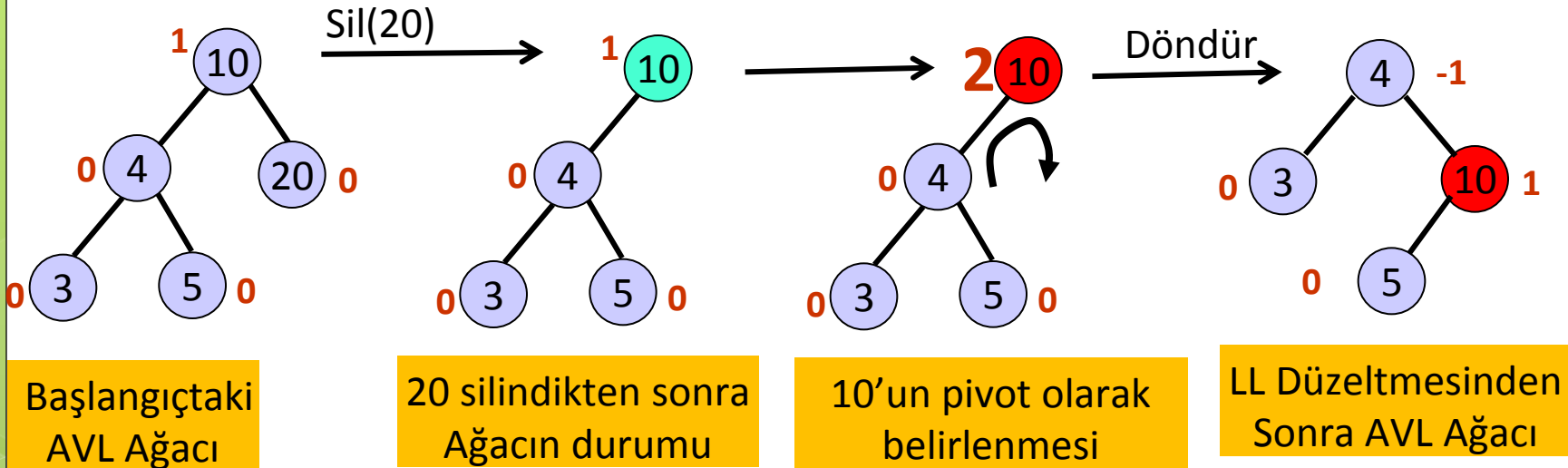
- Örnek: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 ağacı oluşturup adım adım dengeleyiniz.



## AVL AĞAÇLARI- Silme

- Silme işlemi ekleme işlemi ile benzerlik gösterir.
- AVL ağaçlarında silme işlemini yaparken özellikle çocukları olan düğümlerin silme işlemi farklı yapılarda gözükür. Amaç dengeyi bozmayacak düğümün öncelikle sağlanması.
- Soldaki en büyük çocuk veya Sağdaki en küçük çocuk yeni düğüm olur. **Önemli olan silme olayından sonra dengeleme işleminin yeniden sağlanmasıdır.** Bu işlem sırasında birden fazla döndürme işlemi yapılabilir.
- **Kural 1:** Silinen düğüm yaprak ise, problem yok dengeleme işlemi gerekiyorsa yap.
- **Kural 2:** Silinen düğüm çocukları olan bir düğüm ise ya soldaki en büyük çocuğu veya sağdaki en küçük çocuğu al. Bu işlem sırasında dengeleme için birden fazla döndürme işlemi yapılabilir.

# Silme Örneği (1)



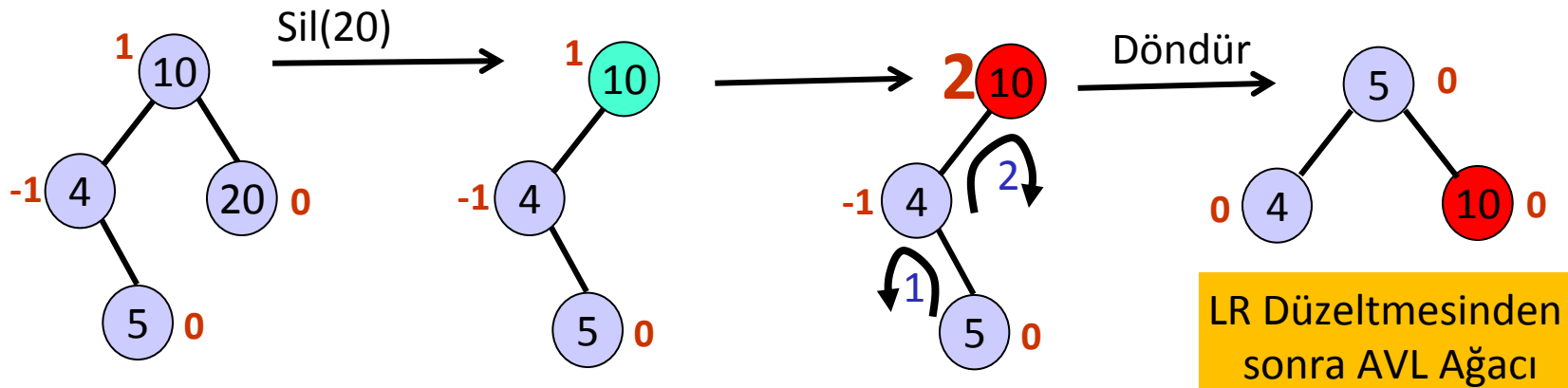
Balans faktörü  
düzelterek köke doğru  
ilerle

Dengesizliğin türünün  
belirlenmesi

LL Dengesizliği:

- **P(10)**'ün **bf**si 2
- **L(4)**'ün **bf**si 0 veya 1

## Silme Örneği (2)



Başlangıçtaki  
AVL Ağacı

20 silindikten sonra  
Ağacın durumu

10'un pivot olarak  
belirlenmesi

LR Düzeltmesinden  
sonra AVL Ağacı

Balans faktörü  
düzelterek köke doğru  
ilerle

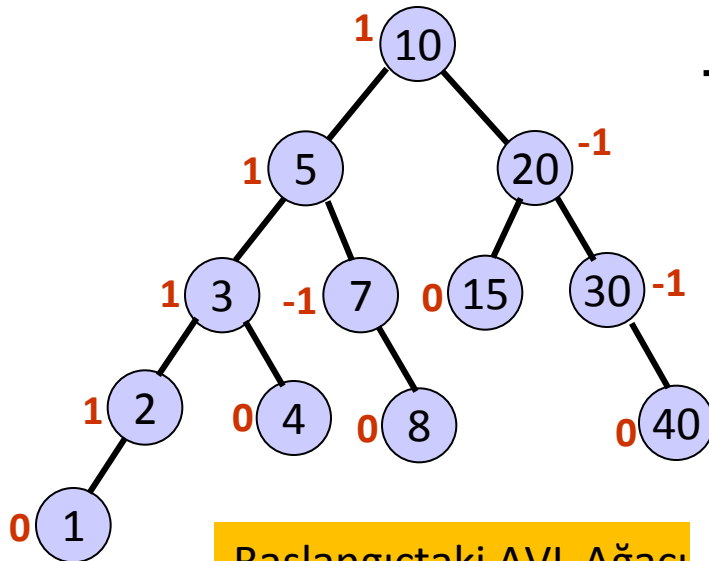
Dengesizliğin türünün  
belirlenmesi

**LR Dengesizliği:**

- $P(10) \rightarrow bf = 2$
- $L(4) \rightarrow bf = -1$

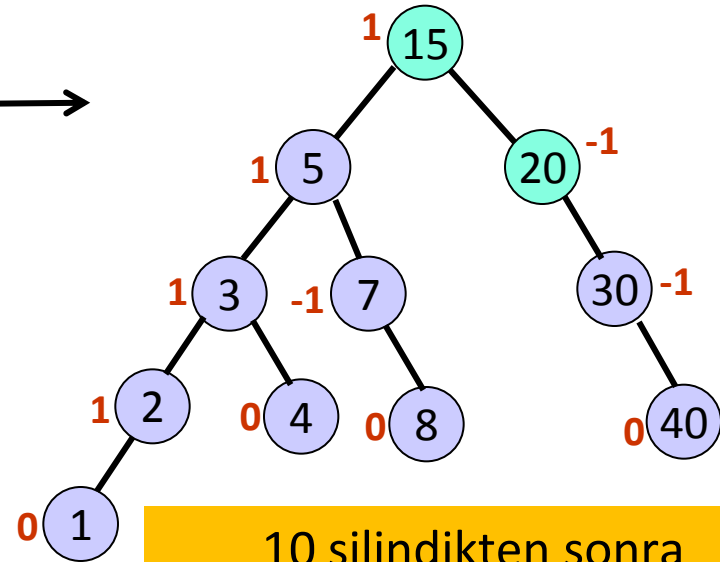


## Silme Örneği (3)



Başlangıçtaki AVL Ağacı

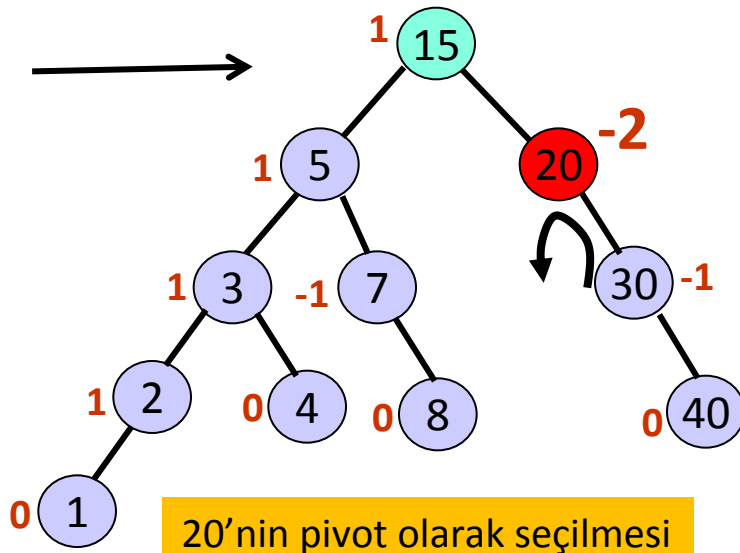
Sil(10) →



10 silindikten sonra 10 ve 15 (sağ alt ağaçtaki en küçük eleman) yer değiştirdi ve 15 silindi.

Balans faktörü düzelterek köke doğru ilerle

## Silme Örneği (3)

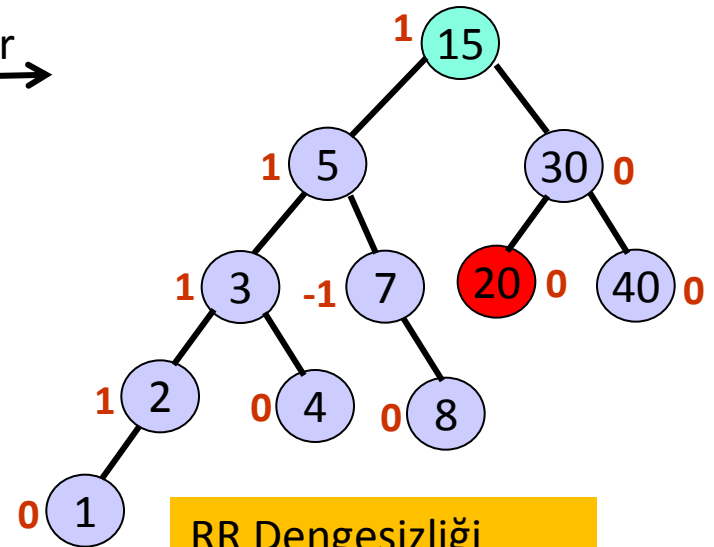


Dengesizliğin türünü  
belirle

RR Dengesizliği:

- $P(20) \rightarrow bf = -2$
- $R(30) \rightarrow bf = 0 \text{ veya } -1$

Döndür

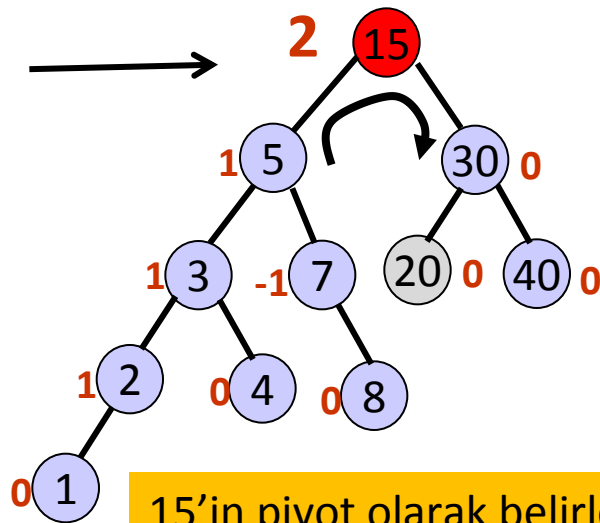


RR Dengesizliği  
düzeltildikten sonra

Yukardaki AVL ağacı  
mıdır?

Balans faktörü  
düzelterek köke doğru  
ilerle.

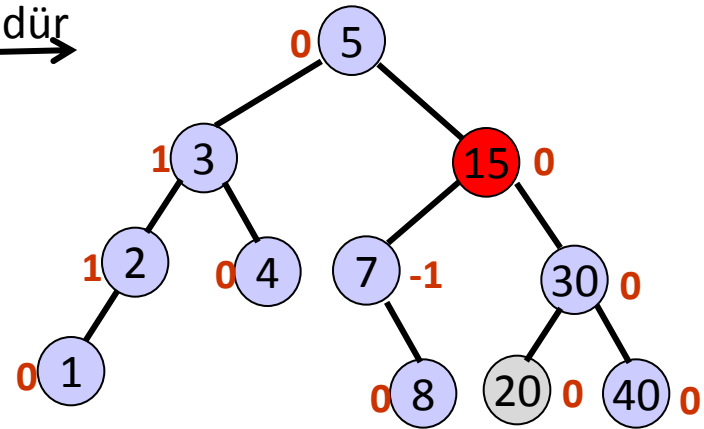
## Silme Örneği (3)



15'in pivot olarak belirlenmesi

Dengesizliğin türünü belirle

Döndür



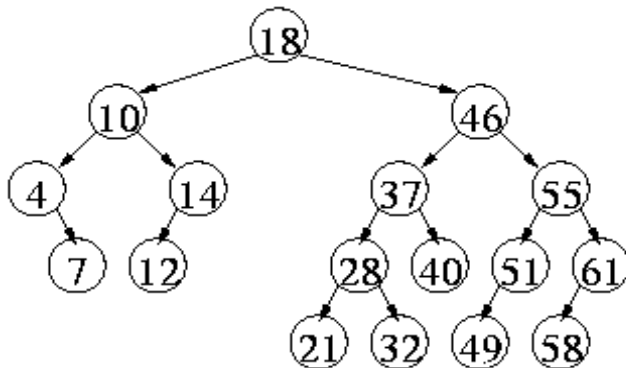
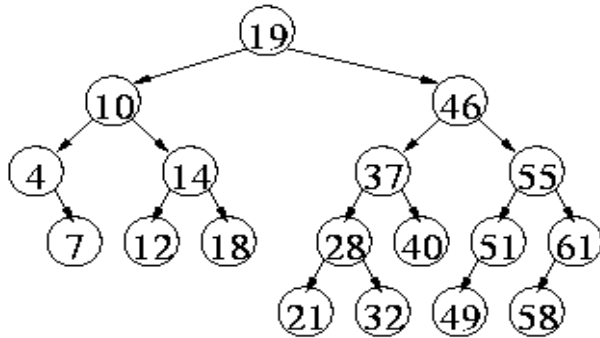
Düzeltilmiş AVL ağacı

LL Dengesizliği:

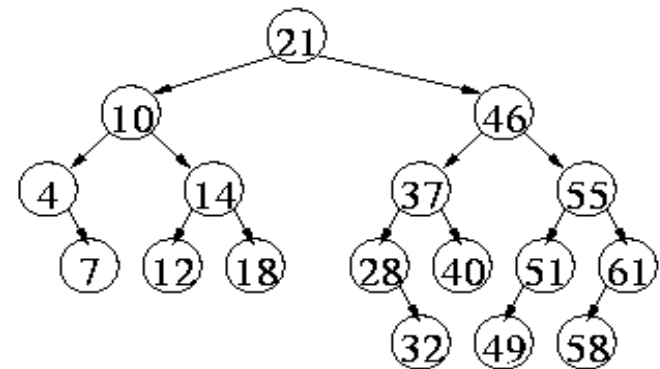
- $P(15) \rightarrow bf = 2$
- $L(5) \rightarrow bf = 0$  veya  $1$

# Silme Örneği– Kural 2

- 19 silindi (Soldaki en büyük düğüm veya sağdaki en küçük düğüm kök yapılır.

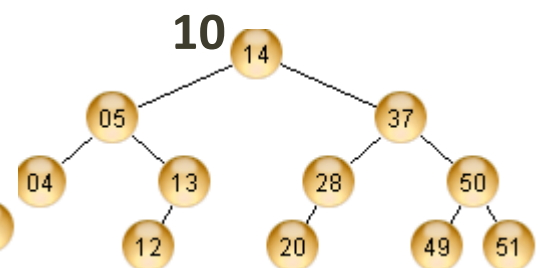
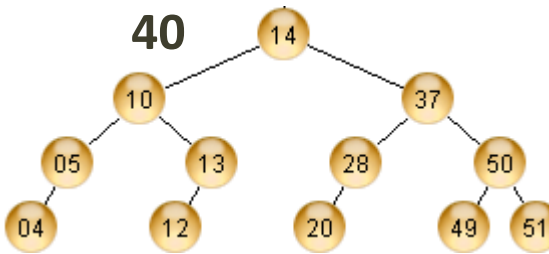
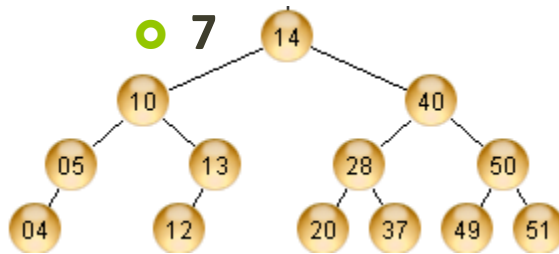
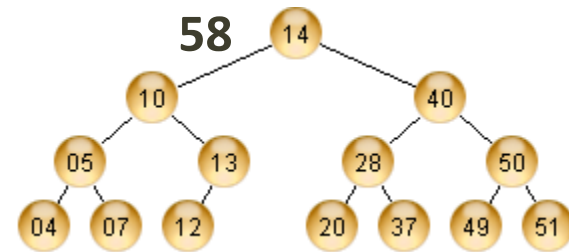
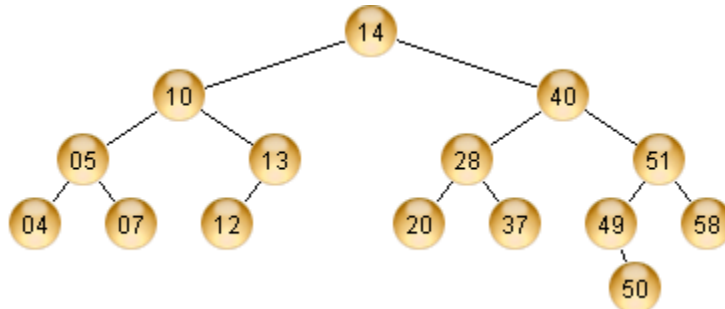


veya

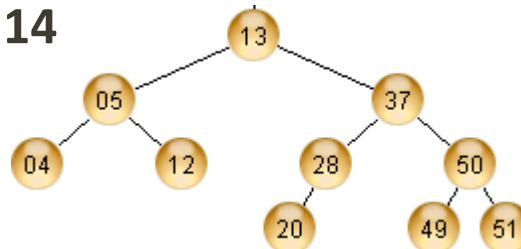


# Silme Örneği– Kural 1-2

- Örnek: Sırasıyla siliniz; 58 ,7, 40,10,14 (Silme işleminde Soldaki en büyük düğüm alınacak)

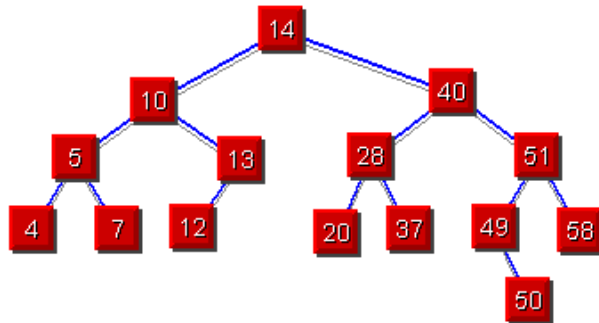


14

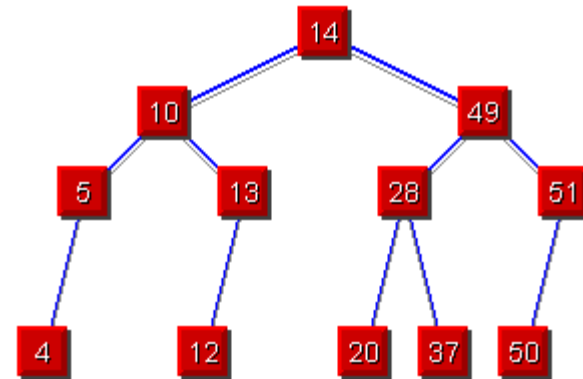


# Silme Örneği– Kural 1-2

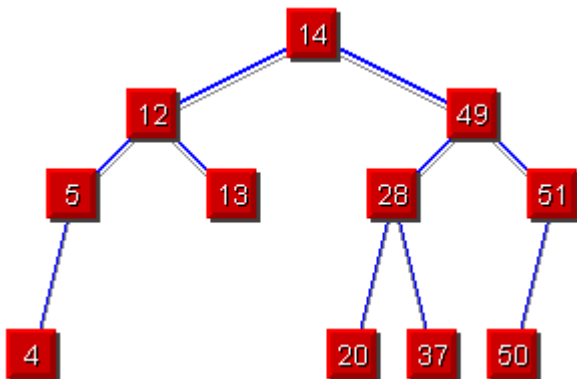
- Örnek: Sırasıyla siliniz; 58 , 7, 40,10,14 (Silme işleminde Sağdaki en küçük düğüm alınacak)



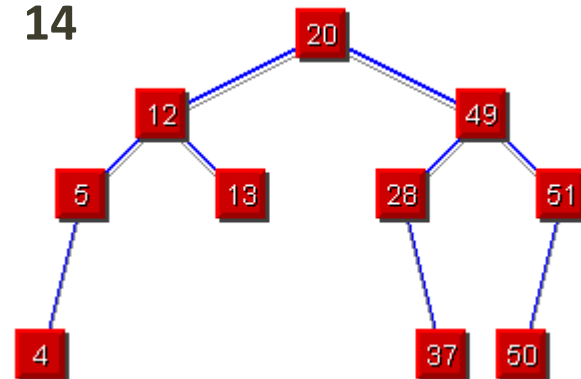
58,7,40



- 10

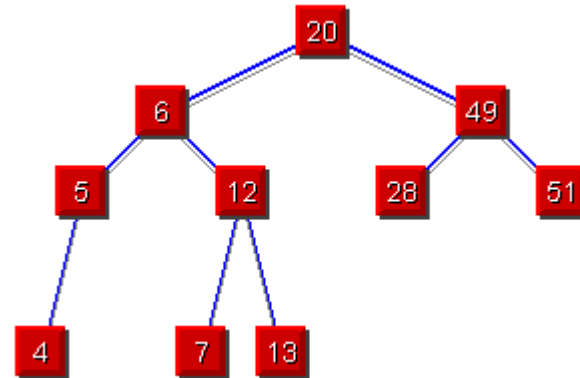
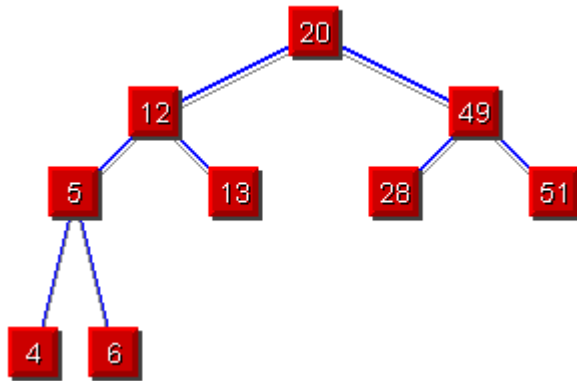


14

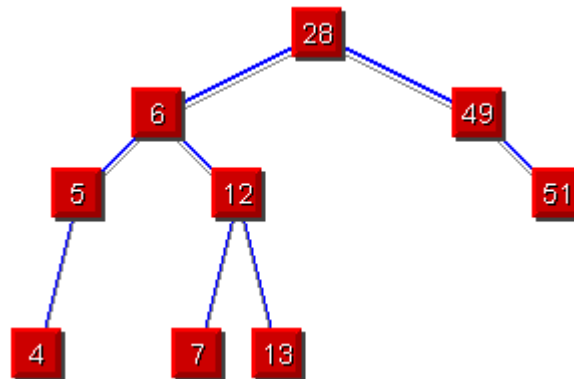


# Silme Örneği

- Örnek: Ağaca 7 ekleyip dengeleyiniz.



- Ağaçtan 20 değerini siliniz (Sağdaki en küçük düğüm alınacak)



## AVL -Arama (Bul)

- AVL ağacı bir tür İkili Arama Ağacı (BST) olduğundan arama algoritması BST ile aynıdır.
- $O(\log N)$  de çalışması garantidir.



# AVL Ağaçları – Özet

## ○ AVL Ağaçlarının Avantajları

1. AVL ağacı devamlı dengeli olduğu için Arama/Ekleme/Silme işlemi  $O(\log N)$  yapılır.
2. Düzeltme işlemi algoritmaların karmaşıklığını etkilemez.

## ○ AVL Ağaçlarının Dezavantajları:

1. Balans faktörü için ekstra yer gereklidir.
2. Yarı dengeli ağaçlarda AVL ağaçları kadar iyi performans verir ayrıca bu tür algoritmalarda balans faktör kullanılmaz
  - Splay ağaçları

## Ödev

- Uygulama : S,E,L,İ,M, K,A,Ç,T,İ AVL ağacını yapınız.
- Cevap: Kök düğümünün değeri L
- Yaprak düğümünün değerleri: A,İ,K,M,T
- **DSW metod (Recreate)**
  - - Yükseklikleri ağacı yeniden oluşturarak ayarlar
  - - Ağaçtan backbone elde eder ve ağacı yeniden oluşturur
  - - Colin Day, Quentin F. Stout ve Bette L.Warren tarafından geliştirilmiştir
- **Self-Adjusting Trees (Priority)**
  - - Kullanılma sıklığına göre ağacı sürekli düzenler
  - - Her elemana erişimde root'a doğru yaklaştırır.
- Kırmızı olarak belirtilen kısımları en kısa zamanda programı ile birlikte word belgesi olarak hazırlanıp teslim edilecektir.



# SPLAY TREE

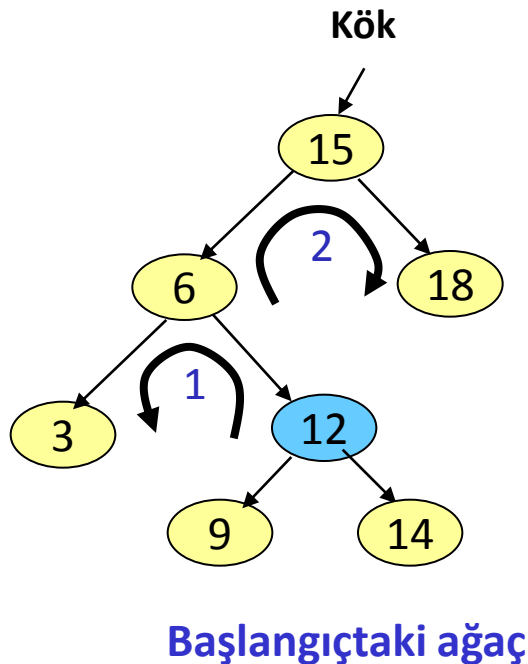
- AVL tree
- 2-3 ve 2-3-4 tree
- Splay tree
- Red-Black Tree
- B- tree

# Splay Ağaçları

- Splay ağaçları ikili arama ağaç yapılarından birisidir.
  - Her zaman dengeli değildir.
  - Arama ve ekleme işlemlerinde dengelemeye çalışılır böylece gelecek operasyonlar daha hızlı çalışır.
- Sezgiseldir.
  - Eğer X bir kez erişildi ise, bir kez daha erişilecektir.
  - X erişildikten sonra "splaying" operasyonu yapılır.
    - X köke taşınır.

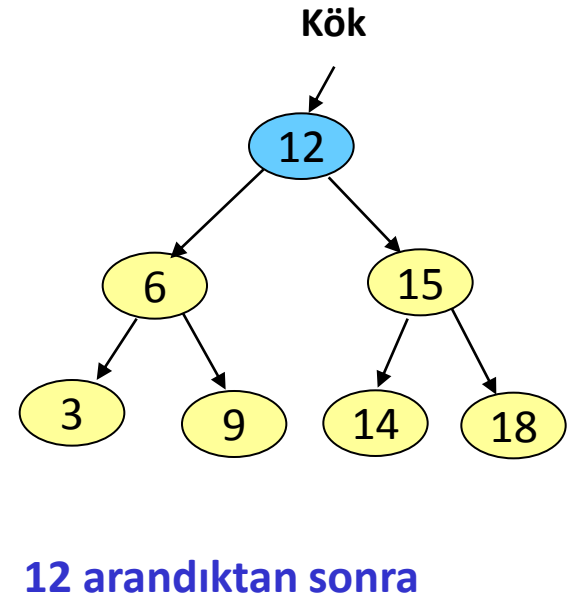
## Örnek

- Burada ağacın dengeli olmasının yanı sıra 12 ye  $O(1)$  zamanında erişilebiliyor.
- Aktif (son erişilenler) düğümler köke doğru taşınırken aktif olmayan düğümler kökten uzaklaştırılır.



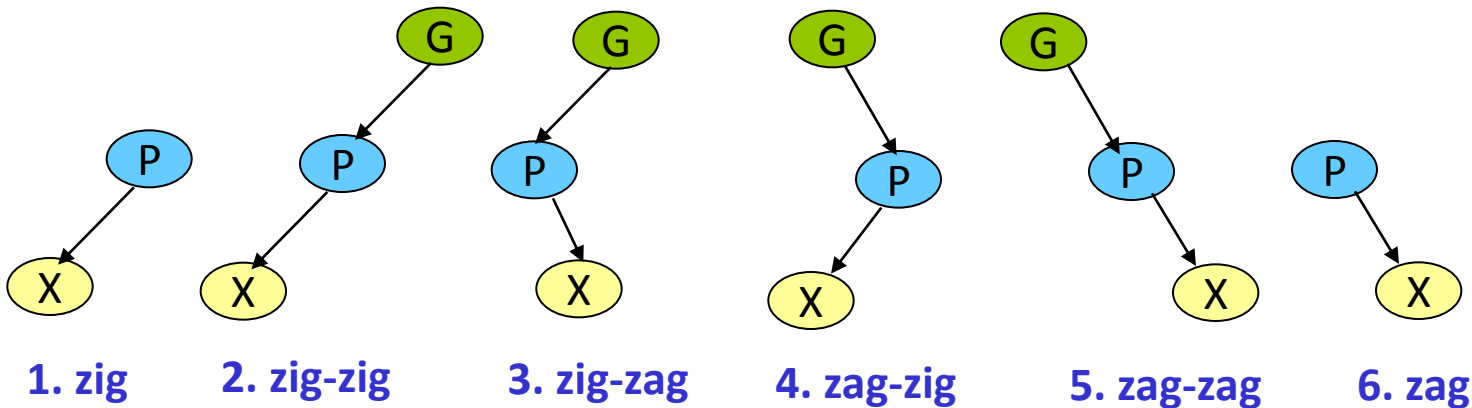
**Bul(12) den sonra**

**Splay ana düşünce:**  
Döndürme kullanarak  
**12'yi köke getir.**



## Splay Ağacı Terminolojisi

- X kök olmayan bir düğüm olsun. (ailesi olan)
- P düğümü X'in aile düğümü olsun.
- G düğümü X'in ata düğümü olsun.
- **G** ve **X** arasındaki yol düşünüldüğünde:
  - Her sağa gitme işlemine “**zig**” işlemi denilmektedir.
  - Her sola gitme işlemine “**zag**” işlemi denilmektedir.
- Toplam 6 farklı durum oluşabilir:

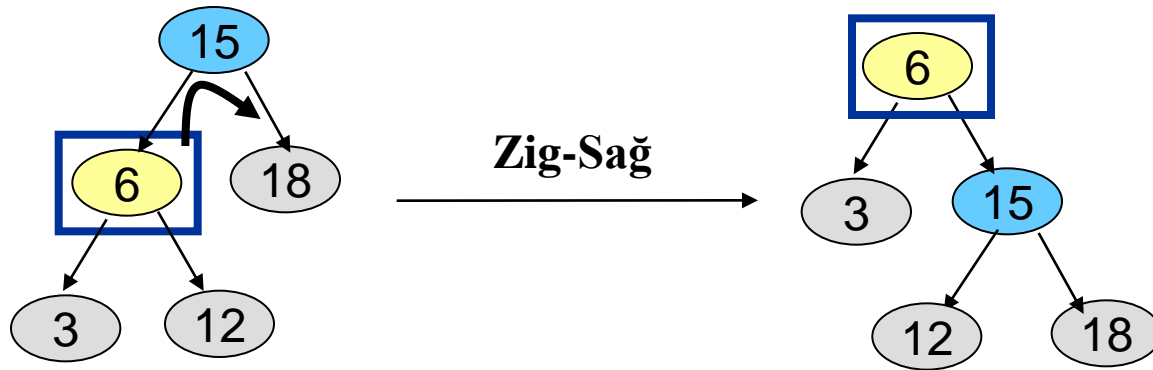


# Splay Ağaç İşlemleri

- X'e erişildiğinde 6 tane rotasyon işleminden birisi uygulanır:
  - Tek Dönme (X, P'ye sahip ama G'ye sahip değil)
    - zig, zag
  - Çift Dönme (X hem P'ye hem de G'ye sahip)
    - zig-zig, zig-zag
    - zag-zig, zag-zag

## Splay Ağaçları: Zig İşlemi

- “Zig” işlemi AVL ağacındaki gibi tek döndürme işlemidir.
- Örneğin erişilen elemanın 6 olduğu düşünülürse.

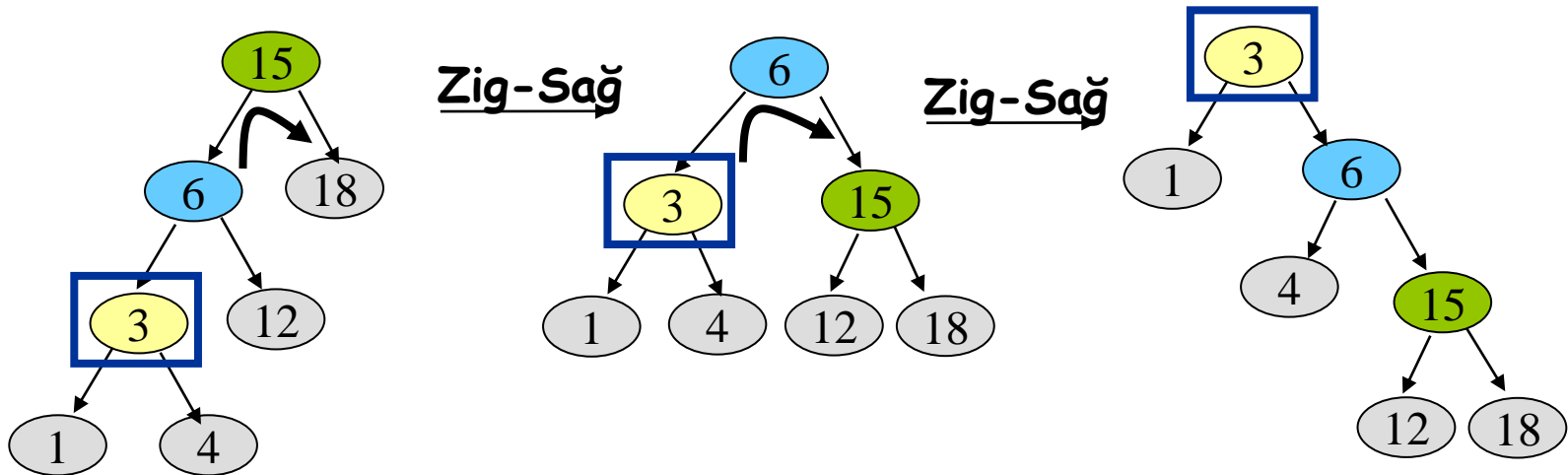


- “Zig-Sağ” işlemi 6’yı köke taşır.
- Bir sonraki işlemde 6’ya  $O(1)$  de erişilebilir.
- AVL ağacındaki sağ dönme işlemi ile benzerdir.



## Splay Ağaçları: Zig-Zig İşlemi

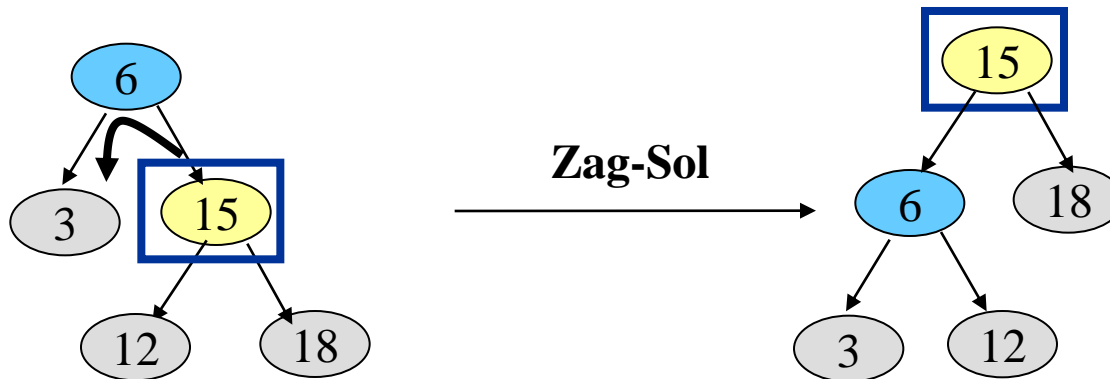
- “Zig-Zig” işlemi aynı türde 2 tane dönme işlemi içerir.
- Örneğin erişilen elemanın 3 olduğu düşünülürse.



- “zig-zig” işlemi ile birlikte 3 köke taşınmış oldu.
- Not: Aile - ata arasındaki döndürme önce yapılıyor.

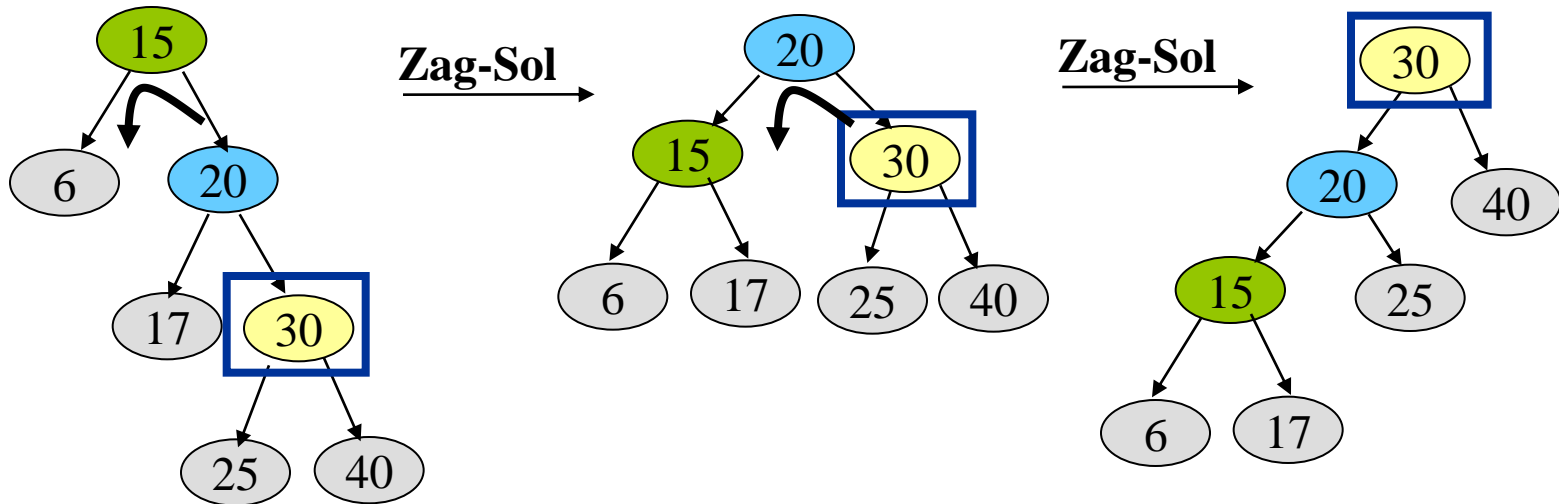
# Splay Ağaçları: Zag İşlemi

- “Zag” işlemi AVL ağacındaki gibi tek döndürme işlemidir.
- Örneğin erişilen elemanın 15 olduğu düşünülürse.
- “Zag-sol işlemi 15’i köke taşır.
- Bir sonraki işlemde 15’e  $O(1)$  de erişilebilir.
- AVL ağacındaki sol dönme işlemi ile benzerdir.



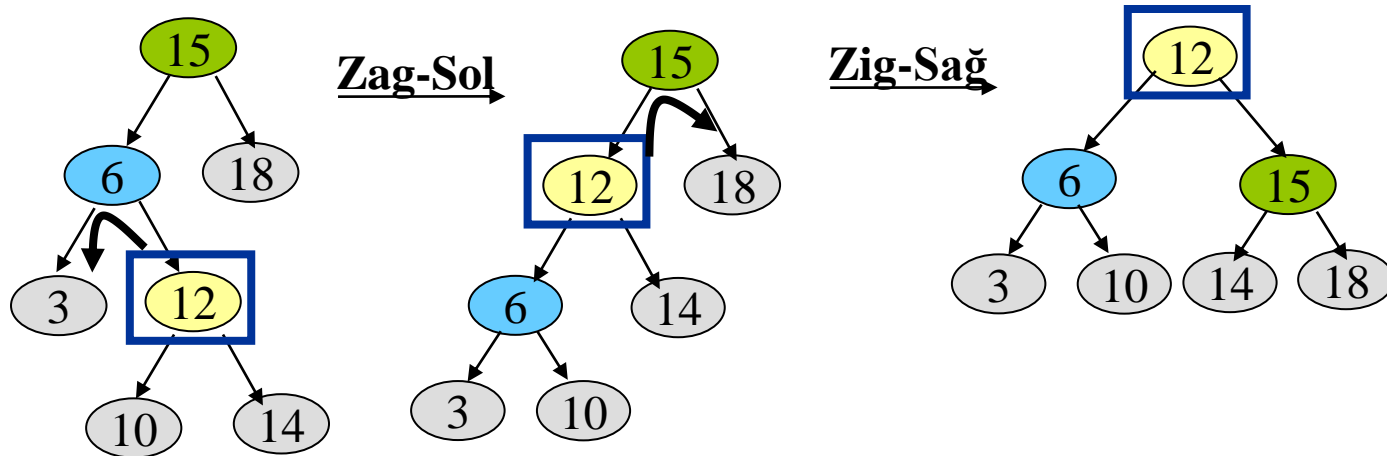
# Splay Ağaçları: Zag-Zag İşlemi

- “Zag-Zag” işlemi aynı türde 2 tane dönme işlemi içerir.
- Örneğin erişilen elemanın 30 olduğu düşünülürse.
- “zag-zag” işlemi ile birlikte 30 köke taşınmış oldu.
- Not: Aile - ata arasındaki döndürme önce yapılıyor.



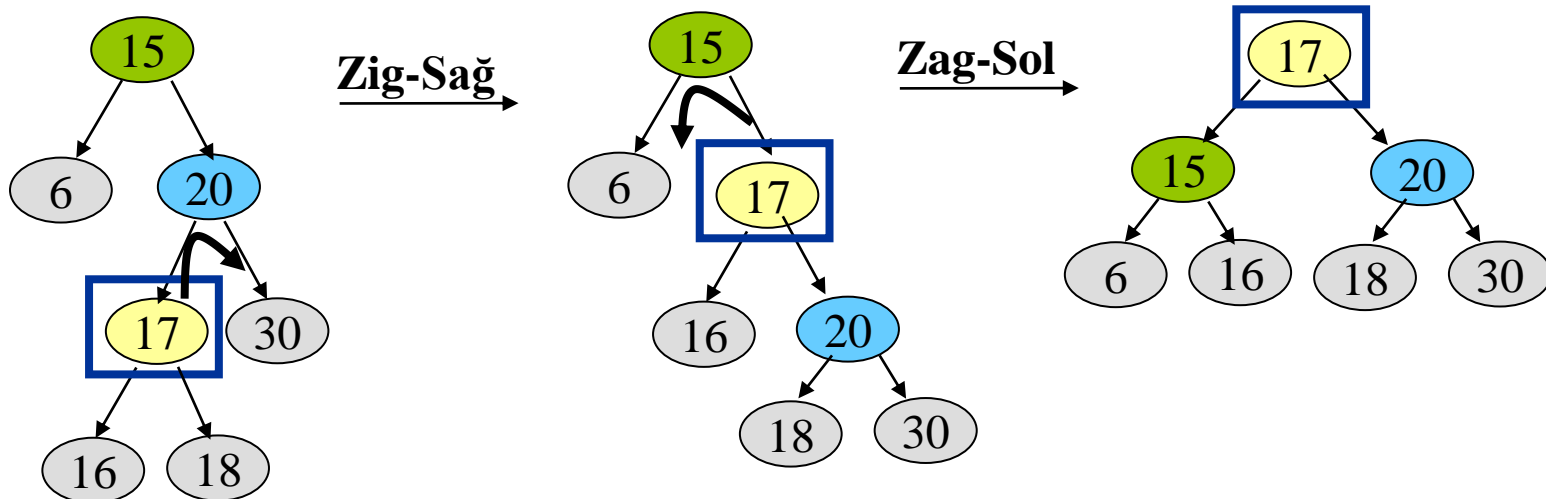
# Splay Ağaçları: Zig-Zag durumu

- Zig-zag durumunda X, P nin sağ çocuğu ve G'de atası olduğu durumdur.
- “Zig-Zag” durumu farklı türde 2 tane dönme işlemi içerir.
- Örneğin erişilen elemanın 12 olduğu düşünülürse.
- “zig-zag” işlemi ile birlikte 12 köke taşınmış oldu.
- AVL ağacındaki **LR dengesizliği**ni düzeltmek için kullanılan işlemler ile aynıdır.(önce sol dönme, daha sonra sağ dönme)

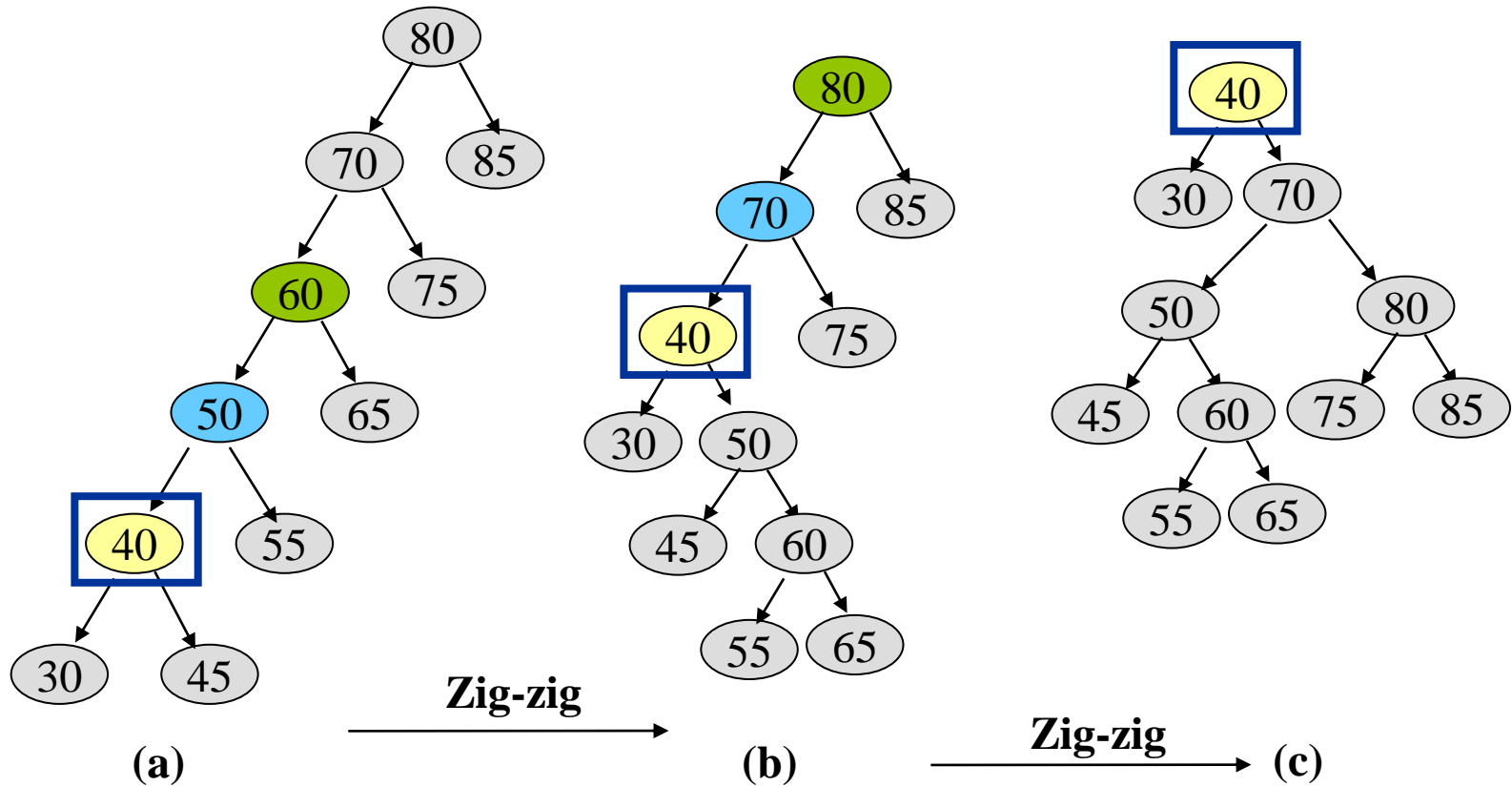


# Splay Ağaçları: Zag-Zig durumu

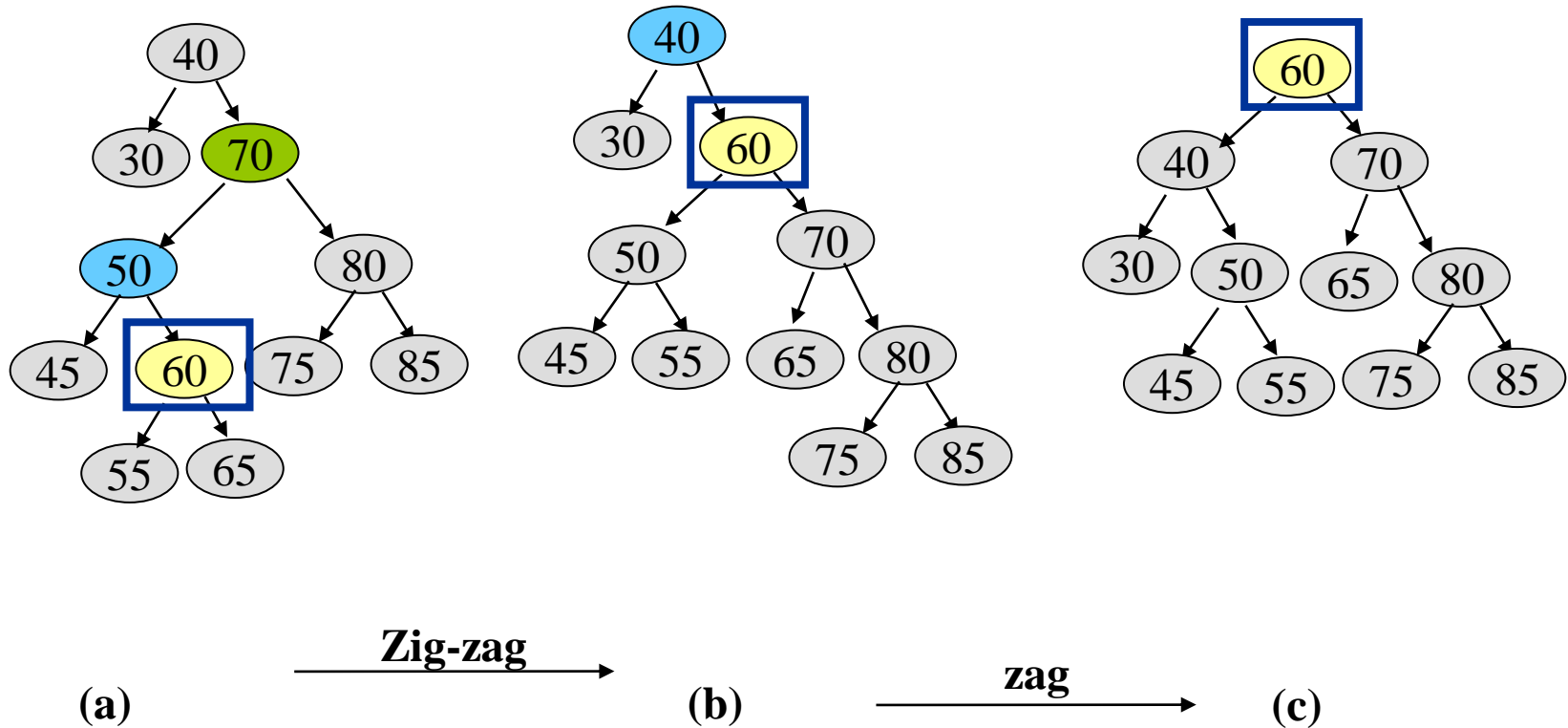
- Zag-Zig durumunda X, P nin sol çocuğu ve G'de atası olduğu durumdur.
- “Zag-Zig” durumu farklı türde 2 tane dönme işlemi içerir.
- Örneğin erişilen elemanın 17 olduğu düşünülürse.
- zag-zig” işlemi ile birlikte 17 köke taşınmış oldu.
- AVL ağacındaki **RL dengesizliği**ni düzeltmek için kullanılan işlemler ile aynıdır.(önce sağ dönme, daha sonra sol dönme)



## Splay Ağacı Örnek: 40'a Erişildiğinde



## Splay Ağacı Örnek: 60'a Erişildiğinde



## Diğer İşlemler Sırasında Splaying

- Splaying sadece Arama işleminden sonra değil Ekle/Sil gibi diğer işlemlerden sonra da uygulanabilir.
- **Ekle X:** X yaprak düğüme eklendikten sonra (BST işlemi) X'i köke taşı.
- **Sil X:** X'i ara ve köke taşı. Kökte bulunan X'i sil ve sol alt ağaçtaki en büyük elemanı köke taşı.
- **Bul X:** Eğer X bulunamazsa aramanın sonlandığı yaprak düğümü köke taşı.



# Splay Ağaçları – Özet

- Splaying işlemi ile ağaç genel olarak dengede kalıyor.
- **Analiz Sonucu:**  $N$  boyutlu bir Splay ağacı üzerinde  $k$  tane işlemin çalışma süresi  $O(k \log N)$  dir. Dolayısıyla tek bir işlem için çalışma zamanı  $O(\log N)$  dir.
- Erişilecek elemanların derinliği çok büyük olsa bile, arama işlemlerinin süresi bir süre sonra kısalmaktadır. Çünkü her bir arama işlemi ağacın dengelenmesini sağlıyor.

## Ödev

- A,V,L, A,Ğ,A,C,I,N,A,E,K,L,E,M,E elamanları sırası ile boş bir AVL ağacına ekleniyor.
- Her bir eleman eklendiğinde oluşan ağaçları çizerek gösteriniz.
- "V" ye erişim nasıl olur.

# Ödev

- S,P,L,A,Y,A,Ğ,A,C,I,N,A,E,K,L,E,M,E elemanları sırası ile boş bir Splay ağacına ekleniyor.
- Oluşan ağacı çizerek gösteriniz.
- "S" ye erişim nasıl olur.
- "A" ya erişim sağlandıktan sonra ağacın yapısını çizerek gösteriniz.
- Aşağıda verilen splay ağacına ait C programını Java veya C# ile yapınız.

# Örnek Program C++

- `#include<stdio.h>`
- `#include<malloc.h>`
- `#include<stdlib.h>`
- `struct node`
- `{ int data;`
- `struct node *parent;`
- `struct node *left;`
- `struct node *right;`
- `};`
- `int data_print(struct node *x);`
- `struct node *rightrotation(struct node *p,struct node *root);`
- `struct node *leftrotation(struct node *p,struct node *root);`
- `void splay (struct node *x, struct node *root);`
- `struct node *insert(struct node *p,int value);`
- `struct node *inorder(struct node *p);`
- `struct node *delete(struct node *p,int value);`
- `struct node *successor(struct node *x);`
- `struct node *lookup(struct node *p,int value);`

# Örnek Program C++

```

○ void splay (struct node *x, struct node *root)
○ {   struct node *p,*g;
○     /*check if node x is the root node*/
○     if(x==root)      return;
○     /*Performs Zig step*/
○     else if(x->parent==root)
○     {
○         if(x==x->parent->left)      root=rightrotation(root,root);
○         else                      root=leftrotation(root,root);
○     }
○     else
○     {   p=x->parent; /*now points to parent of x*/
○         g=p->parent; /*now points to parent of x's parent*/
○         /*Performs the Zig-zig step when x is left and x's parent is left*/
○         if(x==p->left&&g==p->left)
○         {   root=rightrotation(g,root);
○             root=rightrotation(p,root);
○         }

```

# Örnek Program C++

```

○      /*Performs the Zig-zig step when x is right and x's parent is right*/
○      else if(x==p->right&&g==p->right)
○      {   root=leftrotation(g,root);
○          root=leftrotation(p,root);
○      }
○      /*Performs the Zig-zag step when x's is right and x's parent is left*/
○      else if(x==p->right&&g==p->left)
○      {   root=leftrotation(p,root);
○          root=rightrotation(g,root);
○      }
○      /*Performs the Zig-zag step when x's is left and x's parent is right*/
○      else if(x==p->left&&g==p->right)
○      {   root=rightrotation(p,root);
○          root=leftrotation(g,root);
○      }
○      splay(x, root);
○  }
○  }

```

# Örnek Program C++

- struct node \*rightrotation(struct node \*p, struct node \*root)
- { struct node \*x;
- x = p->left;
- p->left = x->right;
- if (x->right!=NULL) x->right->parent = p;
- x->right = p;
- if (p->parent!=NULL)
- if(p==p->parent->right) p->parent->right=x;
- else
- p->parent->left=x;
- x->parent = p->parent;
- p->parent = x;
- if (p==root) return x;
- else return root;
- }

# Örnek Program C++

```
○ struct node *leftrotation(struct node *p,struct node *root)
○ {   struct node *x;
○     x = p->right;
○     p->right = x->left;
○     if (x->left!=NULL) x->left->parent = p;
○     x->left = p;
○     if (p->parent!=NULL)
○         if (p==p->parent->left) p->parent->left=x;
○         else
○             p->parent->right=x;
○     x->parent = p->parent;
○     p->parent = x;
○     if(p==root)
○         return x;
○     else
○         return root;
○ }
```



# Örnek Program C++

```

○ struct node *insert(struct node *p,int value)
○ {   struct node *temp1,*temp2,*par,*x;
○     if(p == NULL)
○     {   p=(struct node *)malloc(sizeof(struct node));
○         if(p != NULL)
○         {   p->data = value;
○             p->parent = NULL;
○             p->left = NULL;
○             p->right = NULL;
○         }
○     }
○     else
○     {   printf("No memory is allocated\n");
○         exit(0);
○     }
○     return(p);
○ } //the case 2 says that we must splay newly inserted node to root

```

# Örnek Program C++

```

○   else    {   temp2 = p;
○           while(temp2 != NULL)
○           {   temp1 = temp2;
○               if(temp2->data > value)      temp2 = temp2->left;
○               else if(temp2->data < value)  temp2 = temp2->right;
○               else
○                   if(temp2->data == value)  return temp2;
○           }
○       if(temp1->data > value)
○       {   par = temp1;//temp1 having the parent address,so that's it
○           temp1->left = (struct node *)malloc(sizeof(struct node));
○           temp1= temp1->left;
○           if(temp1 != NULL)
○           {   temp1->data = value;
○               temp1->parent = par;//store the parent address.
○               temp1->left = NULL;   temp1->right = NULL;           }
○       else {   printf("No memory is allocated\n");   exit(0);   }
○   }

```

# Örnek Program C++

```

○      else
○      {   par = temp1;//temp1 having the parent node address.
○          temp1->right = (struct node *)malloc(sizeof(struct node));
○          temp1 = temp1->right;
○          if(temp1 != NULL)
○          {   temp1->data = value;
○              temp1->parent = par;//store the parent address
○              temp1->left = NULL;  temp1->right = NULL;
○          }
○          else {   printf("No memory is allocated\n");   exit(0);   }
○      }
○
○  }
○  splay(temp1,p);//temp1 will be new root after splaying
○  return (temp1);
○  }

```

# Örnek Program C++

```
○ struct node *inorder(struct node *p)
○ {
○     if(p != NULL)
○     {
○         inorder(p->left);
○         printf("CURRENT %d\t",p->data);
○         printf("LEFT %d\t",data_print(p->left));
○         printf("PARENT %d\t",data_print(p->parent));
○         printf("RIGHT %d\t\n",data_print(p->right));
○         inorder(p->right);
○     }
○ }
```

# Örnek Program C++

```

○ struct node *delete(struct node *p,int value)
○ {   struct node *x,*y,*p1;   struct node *root;   struct node *s;   root = p;
○   x = lookup(p,value);
○   if(x->data == value)
○   {   //if the deleted element is leaf
○       if((x->left == NULL) && (x->right == NULL))
○       {   y = x->parent;
○           if(x==(x->parent->right))   y->right = NULL;
○           else   y->left = NULL;   free(x);
○       }
○       //if deleted element having left child only
○       else if((x->left != NULL) &&(x->right == NULL))
○       {   if(x == (x->parent->left))
○           {   y = x->parent;   x->left->parent = y;   y->left = x->left;   free(x);   }
○           else   {   y = x->parent; x->left->parent = y; y->right = x->left;   free(x);   }
○       }
○   }

```

# Örnek Program C++

```

○ //if deleted element having right child only
○ else if((x->left == NULL) && (x->right != NULL))
○ { if(x == (x->parent->left)) { y = x->parent; x->right->parent = y; y->left = x->right; free(x); }
○   else { y = x->parent; x->right->parent = y; y->right = x->right; free(x); }
○ }
○ //if the deleted element having two children
○ else if((x->left != NULL) && (x->right != NULL))
○ { if(x == (x->parent->left))
○   { s = successor(x);
○     if(s != x->right)
○       { y = s->parent;
○         if(s->right != NULL)
○           { s->right->parent = y; y->left = s->right; }
○         else y->left = NULL;
○         s->parent = x->parent; x->right->parent = s;
○         x->left->parent = s; s->right = x->right;
○         s->left = x->left; x->parent->left = s;
○       }
○   }

```

# Örnek Program C++

```

○   else { y = s; s->parent = x->parent;
○       x->left->parent = s; s->left = x->left;    x->parent->left = s; }
○       free(x); }
○       else if(x == (x->parent->right))
○       { s = successor(x);
○         if(s != x->right)
○         { y = s->parent;
○           if(s->right != NULL) {s->right->parent = y; y->left = s->right; }
○           else y->left = NULL;
○           s->parent = x->parent; x->right->parent = s;
○           x->left->parent = s; s->right = x->right;
○           s->left = x->left; x->parent->right = s;    }
○       else { y = s; s->parent = x->parent; x->left->parent = s;
○         s->left = x->left; x->parent->right = s;          }
○       free(x);
○       } } splay(y,root);
○   } else { splay(x,root); }
○   }

```

# Örnek Program C++

```

○ struct node *successor(struct node *x)
○ { struct node *temp,*temp2; temp=temp2=x->right;
○   while(temp != NULL) { temp2 = temp; temp = temp->left; }
○   return temp2; }
○ //p is a root element of the tree
○ struct node *lookup(struct node *p,int value)
○ { struct node *temp1,*temp2;
○   if(p != NULL)
○   { temp1 = p;
○     while(temp1 != NULL)
○     { temp2 = temp1;
○       if(temp1->data > value) temp1 = temp1->left;
○       else if(temp1->data < value) temp1 = temp1->right;
○       else return temp1;      }
○     return temp2;
○   }
○   else { printf("NO element in the tree\n"); exit(0); }
○ }

```



# Örnek Program C++

- struct node \*search(struct node \*p,int value)
- { struct node \*x,\*root; root = p; x = lookup(p,value);
- if(x->data == value) { printf("Inside search if\n"); splay(x,root); }
- else { printf("Inside search else\n"); splay(x,root); }
- }
- main()
- { struct node \*root;//the root element
- struct node \*x;//x is which element will come to root.
- int i; root = NULL; int choice = 0; int ele;
- while(1)
- { printf("\n\n 1.Insert"); printf("\n\n 2.Delete"); printf("\n\n 3.Search"); printf("\n\n 4.Display\n");
- printf("\n\n Enter your choice:");scanf("%d",&choice);
- if(choice==5) exit(0);
- switch(choice)
- { case 1: printf("\n\n Enter the element to be inserted:");
- scanf("%d",&ele); x = insert(root,ele);
- if(root != NULL) { splay(x,root);}
- root = x; break;

# Örnek Program C++

- struct node \*search(struct node \*p,int value)
- { struct node \*x,\*root; root = p; x = lookup(p,value);
- if(x->data == value) { printf("Inside search if\n"); splay(x,root); }
- else { printf("Inside search else\n"); splay(x,root); }
- }
- main()
- { struct node \*root;//the root element
- struct node \*x;//x is which element will come to root.
- int i; root = NULL; int choice = 0; int ele;
- while(1)
- { printf("\n\n 1.Insert"); printf("\n\n 2.Delete"); printf("\n\n 3.Search"); printf("\n\n 4.Display\n");
- printf("\n\n Enter your choice:");scanf("%d",&choice);
- if(choice==5) exit(0);
- switch(choice)
- { case 1: printf("\n\n Enter the element to be inserted:");
- scanf("%d",&ele); x = insert(root,ele);
- if(root != NULL) { splay(x,root);}
- root = x; break;

# Örnek Program C++

- case 2: if(root == NULL) { printf("\n Empty tree..."); continue; }
- printf("\n\n Enter the element to be delete:");
- scanf("%d",&ele); root = delete(root,ele); break;
- case 3: printf("Enter the element to be search\n");
- scanf("%d",&ele); x = lookup(root,ele); splay(x,root);        root = x; break;
- case 4: printf("The elements are\n");    inorder(root); break;
- default: printf("Wrong choice\n"); break;
- }    }
- int data\_print(struct node \*x)
- { if ( x==NULL ) return 0;
- else return x->data; }
- /\*some suggestion this code is not fully functional for example
- if you have inserted some elements then try to delete root then it may not work
- because we are calling right and left child of a null value(parent of root)
- which is not allowed and will give segmentation fault
- Also for inserting second element because of splaying twice(once in insert and one in main)
- will give error So I have made those changes but mainly in my cpp( c plus plus file) file,
- but I guess wiki will itself look into this and made these changes \*/