Hifsi ALTINOK

DİFERENSİYEL DENKLEMLER

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Diferensiyel Denklem: Bir diferensiyel denklem, bir bilinmeyen fonksiyonu ve türevlerini içeren bir denklemdir.

Örneğin, aşağıdakiler y bilinmeyen fonksiyonunu içeren dif. denklemlerdir:

$$\frac{dy}{dx} = 5x+3 \qquad (1.1)$$

$$e^y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 \qquad (1.2)$$

$$4\frac{d^3y}{dx^3} + (\sin x)\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0 \qquad (1.3)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \qquad (1.5)$$

Eğer bilinmeyen fonksiyon sadece bir bağımsız değişkene bağlı ise dif. denklem bir Adi diferensiyel denklemdir. Eğer iki veya daha fazla bağımsız değişkene bağlı ise dif. denklem bir Kısmi diferensiyel denklemdir. Buna göre (1.1)–(1.4) denklemleri adi, (1.5) denklemi ise kısmi dif. denklemdir.

Bir dif. denklemin mertebesi, denklemde bulunan en yüksek türevin mertebesidir.

(1.1) denklemi birinci mertebeden bir dif. denklemdir.
(1.2), (1.4) ve (1.5) denklemleri ikinci mert. dif. denklemlerdir.
(1.3) denklemi üçüncü mertebeden dif. denklemdir.

(2)

Gösterim: $y', y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}$ ifadeleri genellikle y nin ilgili bağımsız değişkene göre, birinci, ikinci, üçüncü, ..., n-yinci türevlerini gösterir. Böylece eğer bağımsız değişken x ise, $y'' \equiv \frac{d^2y}{dx^2}$, eğer p ise $y'' \equiv \frac{d^2y}{dp^2}$ şeklindedir. Eğer bağımsız değişken t ise genellikle $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}, \ldots$ sembolleri sırasıyla $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3y}{dt^3}, \ldots$ türevlerini gösterir.

Çözümler: y bilinmeyen fonksiyonunun ve x bağımsız değişkeninin bir dif. denkleminin I aralığı üzerinde bir çözümü, I'daki her x için dif. denklemi özdeş olarak sağlayan bir $y(x)$ fonksiyonudur.

Örnek: c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere, $y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ fonksiyonunun $y'' + 4y = 0$ denkleminin bir çözümü olup olmadığını inceleyelim:

$$y' = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x$$

$$y'' = -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x$$

$$y'' + 4y = (-4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x) + 4(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$$

$$= (-4c_1 + 4c_1)\sin 2x + (-4c_2 + 4c_2)\cos 2x$$

$$= 0$$

olur. O halde $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ fonksiyonu tüm x değerleri için verilen diferensiyel denklemi sağlar.

Başlangıç – Değer ve Sınır Değer Problemleri :

Bir diferensiyel denklem ve bilinmeyen fonk. ve türevleri üzerinde tümü bağımsız değişkenin aynı değerinde verilen koşullar, birlikte bir başlangıç değer problemi oluşturur. Eğer yardımcı koşullar bağımsız değişkenin birden fazla değerinde verilirse problem bir sınır- değer problemi olur.

örneğin, $y'' + 2y' = e^x$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 2$ bir başlangıç değer problemidir.

$y'' + 2y' = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(1) = 1$ bir sınır- değer problemidir.

2. BÖLÜM

BIRINCI MERTEBEDEN ADI DIFERENSIYEL DENKLEMLER

2.1. TAM DIFERENSIYEL DENKLEMLER

Birinci mertebeden bir adi lineer dif. denklem,

$$G(x,y,y') = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

şeklinde yazıldığı gibi

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad \ldots\ldots \qquad (2.1)$$

şeklinde de yazılabilir. Eğer varsa, bu dif. denklemin çözümünün

$$f(x,y) = c$$

şeklinde bir kapalı fonksiyon olması gerekir.

Tamlık Testi : Eğer $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ sürekli fonksiyonlarsa ve $x\,o\,y$ - düzleminde bir dikdörtgen bölge üzerinde sürekli birinci kısmi türevleri varsa, ayrıca

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

eşitliği sağlanıyorsa (2.1) dif. denklemi tam dif. denklemdir.

Çözüm Metodu : Bir $F(x,y) = c$ fonksiyonunun tam diferensiyeli

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

şeklinde yazıldığından

$$M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{ve} \quad N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

olur. $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ eşitliğinde her iki tarafın x'e göre kısmi integrali alınırsa

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \phi(y) \quad \ldots\ldots \quad (2.2)$$

elde edilir. Burada $\phi(y)$ integrasyon sabitidir.

Şimdi de y'ye göre kısmi türev alınırsa,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right] + \frac{d\phi}{dy}$$

bulunur. Diğer taraftan $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ olduğundan bu değer son denklemde yerine yazılırsa

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right] + \frac{d\phi}{dy}$$

bulunur. Gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$\frac{d\phi}{dy} = \varphi(y) \quad \ldots\ldots \quad (2.3)$$

olur. (2.3) eşitliğinde y'ye göre integral alınırsa $\phi(y)$ fonksiyonu bulunur. $\phi(y)$ nin bulunan değeri

(2.2) denkleminde yerine yazılırsa verilen dif. denkleminin $F(x,y)=c$ genel çözümü bulunmuş olur.

ÖRNEK ! $(\underbrace{2x+e^y}_{M})\,dx + \underbrace{xe^y}_{N}\,dy = 0$ dif. denklemini çözünüz.

Çözüm ! Öncelikle denklemin Tam dif. denklem (TDD) olup olmadığına bakalım.

$$M(x,y) = 2x+e^y \quad , \quad N(x,y) = xe^y \quad \text{dır.}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x+e^y) = e^y \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(xe^y) = e^y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ olduğundan}$$

verilen denklem TDD'dir.

Bu nedenle $F(x,y)=c$ şeklinde bir genel çözümü vardır. Şimdi amacımız bu $F(x,y)$ fonksiyonunu bulmaktır.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = 2x+e^y \text{ eşitliğinde } x\text{'e göre integral}$$

alınırsa,

$$F(x,y) = \int (2x+e^y)\,dx + \phi(y)$$

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = x^2 + xe^y + \phi(y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

olur. Burada $\phi(y)$ integrasyon sabitinin değerini bulmamız gerekir. $(*)$ eşitliğinde y'ye göre kısmi türev alınırsa

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xe^y + \frac{d\phi}{dy} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (**)$$

olur. Diğer taraftan

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = xe^y$$

olduğundan, bu değer $(**)$'da yerine yazılırsa

$$\cancel{x}e^y = \cancel{x}e^y + \frac{d\phi}{dy} \Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = 0 \Rightarrow \phi(y) = c_0$$

bulunur. $\phi(y)$ nin bu değeri (*) denkleminde yerine yazılırsa

$$F(x,y) = x^2 + xe^y + c_0 = c_1$$

elde edilir. $c = c_1 - c_0$ alınırsa soruda verilen dif. denklemin çözüm ailesi

$$\boxed{x^2 + xe^y = c}$$

olur. Burada c nin her değeri için dif. denklemin bir özel çözümü bulunur.

ÖRNEK : $\underbrace{3x(xy-2)}_{M}\,dx + (\underbrace{x^3+2y}_{N})\,dy = 0$ denklemini çözünüz

Çözüm : $M = 3x(xy-2)$ ve $N = x^3+2y$ verilmiştir.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 \quad \text{olup} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan verilen denklem bir TDD'dir.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = 3x(xy-2)$$

eşitliğinde her iki tarafın x'e göre integrali alınırsa

$$F(x,y) = \int 3x(xy-2)\,dx + \phi(y)$$

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = x^3y - 3x^2 + \phi(y) \quad \ldots\ldots \quad (*)$$

olur. Şimdi de her iki tarafın y'ye göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + \frac{d\phi}{dy} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (**)$$

olur. Diğer taraftan $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ olduğundan bu değer (**)'da yerine yazılırsa

$$\cancel{x^3}+2y = \cancel{x^3}+\frac{d\phi}{dy} \Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = 2y \Rightarrow \phi(y) = y^2 + c_0$$

bulunur. $\phi(y)$ nin bu degeri ⊛ 'da yerine yazılırsa

$$F(x,y) = x^3y - 3x^2 + y^2 + c_0 = c_1 \qquad (c = c_1 - c_0)$$

$$\Rightarrow \qquad x^3y - 3x^2 + y^2 = c$$

genel çözümü bulunur.

ÖRNEK: $(y\cos x + 2xe^y)\,dx + (\sin x + x^2e^y + 2)\,dy = 0$

denklemini çözünüz.

Çözüm: $M = y\cos x + 2xe^y$ ve $N = \sin x + x^2e^y + 2$ dir.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2xe^y \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x + 2xe^y$$

old. $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ dir. O halde denklem TDD'dir.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = y\cos x + 2xe^y$$

x'e göre integral

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = \int (y\cos x + 2xe^y)\,dx + \phi(y)$$

$$F(x,y) = y\sin x + x^2e^y + \phi(y) \quad \ldots\ldots \quad ⊛$$

y'ye göre türev

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin x + x^2e^y + \frac{d\phi}{dy} \quad \ldots\ldots\ldots \quad ⊛⊛$$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$ degeri ⊛⊛ 'da yerine yazılırsa

$$\cancel{\sin x}+\cancel{x^2e^y}+2 = \cancel{\sin x}+\cancel{x^2e^y}+\frac{d\phi}{dy} \Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = 2 \Rightarrow \phi = 2y + c_0$$

$\phi(y)$ nin degeri ⊛ 'da yerine yazılırsa

$$F(x,y) = y\sin x + x^2e^y + 2y + c_0 = c_1$$

$$\Rightarrow \quad y\sin x + x^2e^y + 2y = c$$

genel çözümü bulunur.

2.2. İNTEGRASYON ÇARPANI :

Eğer (2.1) denklemi Tam dif. denklem değilse başka metotlar kullanılır. Bunlardan biri, eğer varsa, dif. denklemin integrasyon çarpanını bulmaktır. Buna göre eğer (2.1) denklemi bir $\mu(x,y)$ fonksiyonu ile çarpıldığında tam dif. denklem olursa $\mu(x,y)$'ye integrasyon çarpanı denir.

Tam dif. denklem olmayan bir dif. denklem

$$M dx + N dy = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (2.4)$$

olsun. Bu denklemin bir integrasyon çarpanı μ ise

$$\mu M dx + \mu N dy = 0 \qquad \ldots\ldots \qquad (2.5)$$

denklemi bir TDD olur. Bu durumda (2.4) ile (2.5)'in genel çözümleri aynı olur.

Eğer

$$f(x) \equiv \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

sadece x'e bağlı bir fonksiyon ise o zaman

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

elde edilir.

Eğer

$$g(y) \equiv \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

sadece y'ye bağlı bir fonksiyon ise o zaman

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy}$$

bulunur.

(9)

ÖRNEK: $(x-y)dx - dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Burada $M = x-y$ ve $N = -1$ 'dir.

$\frac{\partial M}{\partial y} = -1$ ve $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$ olup $-1 \neq 0$ old. TDD değildir.

μ integrasyon çarpanını bulmaya çalışalım:

$$f(x) \equiv \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{-1}(-1-0) = 1$$

bulunur. Buradan $f(x)$'in sadece x'e bağlı olduğu söylenebilir.

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int 1 . dx} = e^{x}$$

old. integrasyon çarpanı $\mu = e^{x}$ dir. Verilen dif. denklemin bütün terimleri e^{x} ile çarpılırsa

$$e^{x}(x-y)dx - e^{x}dy = 0$$

elde edilir. Bu ise bir TDD 'dir. Şimdi bu denklemi önceden bildiğimiz yolla çözelim. Yani $F(x,y)$ çözümünü bulalım.

int.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M' = e^{x}(x-y)$$

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = \int e^{x}(x-y)dx + \phi(y)$$

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = xe^{x} - e^{x} - ye^{x} + \phi(y) \quad \ldots\ldots \quad (*)$$

türev

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x} + \frac{d\phi}{dy}$$

bulunur. Diğer taraftan $\frac{\partial f}{\partial y} = N' = -e^{x}$ olduğundan

$$-e^{x} = -e^{x} + \frac{d\phi}{dy} \Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = 0 \Rightarrow \phi(y) = c_0$$

olup (*) 'da yerine yazılırsa

$$F(x,y) = xe^{x} - e^{x} - ye^{x} + c_0 = c_1$$

$$\boxed{xe^{x} - e^{x} - ye^{x} = c}$$

bulunur.

ÖRNEK : $y\,dx + (3+3x-y)\,dy = 0$ denklemini çözünüz. (10)

Çözüm : Denklem TDD değildir. İntegrasyon çarpanı bulalım!

$$f(x) \equiv \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{3+3x-y}(1-3)$$

fonksiyonu sadece x'e bağlı olmayıp y'ye de bağlıdır. Şimdi de sadece y'ye bağlı olup olmadığını kontrol edelim.

$$g(y) \equiv \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{y}(3-1) = \frac{2}{y}$$

fonksiyonu sadece y'ye bağlı olduğundan int. çarpanı

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2\ln y} = e^{\ln y^2} = y^2$$

bulunur. Soruda verilen denklemin tüm terimleri y^2 ile çarpılırsa,

$$y^3 dx + y^2(3+3x-y)\,dy = 0$$

olur. Bu denklem TDD'dir.

int.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M' = y^3$$

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = \int y^3 dx + \phi(y)$$

$$F(x,y) = xy^3 + \phi(y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

türev

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + \frac{d\phi}{dy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N' = y^2(3+3x-y) \quad \text{olduğundan}$$

$$y^2(3+3x-y) = 3xy^2 + \frac{d\phi}{dy} \Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = 3y^2 - y^3$$

$$\Rightarrow \quad \phi(y) = y^3 - \frac{y^4}{4} + c_0$$

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = xy^3 + y^3 - \frac{y^4}{4} + c_0 = c_1$$

$$\boxed{xy^3 + y^3 - \frac{y^4}{4} = c}$$

genel çözümü bulunur.

NOT: Yaygın integrasyon çarpanları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Terimler	integrasyon çarpanları			
$y\,dx - x\,dy$	$-\frac{1}{x^2}$,	$\frac{1}{y^2}$,	$-\frac{1}{xy}$,	$-\frac{1}{x^2+y^2}$
$y\,dx + x\,dy$	$\frac{1}{xy}$,	$\frac{1}{x^2+y^2}$,	$\frac{1}{(xy)^n}$,	$n>1$, $n \in \mathbb{N}$

ÖRNEK : $x\,dy - y\,dx = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Bu denklem bir TDD değildir. Tablodaki 1. denkleme uygun olduğu için $\mu = \frac{1}{x^2}$ bir integrasyon çarpanı olarak alınabilir. Verilen denklem $\frac{1}{x^2}$ ile çarpılırsa

$\frac{y}{x}$ 'in türevi

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0 \Rightarrow d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

$\frac{y}{x}$ 'in türevi

int.

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = c \Rightarrow \boxed{y = cx}$$

Yukarıda verilen dif. denklem için $-\frac{1}{y^2}$ ve $\frac{1}{xy}$ fonksiyonları da birer integrasyon çarpanlarıdır. Bu durumda

$$-\frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \Rightarrow \dots \boxed{y = cx}$$

olur, diğer taraftan $\frac{1}{xy}$ int. çarpanı ile

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{xy} = \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \ln y - \ln x = \ln c$$

$$\Rightarrow \ln\frac{y}{x} = \ln c \Rightarrow \frac{y}{x} = c \Rightarrow \boxed{y = cx}.$$

<u>ÖRNEK</u> : $(3x^2 - y)dx + x\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

<u>Çözüm</u> : Verilen denklemi yeniden yazalım:

$$3x^2dx + \underbrace{x\,dy - y\,dx} = 0$$

denklemi tablodaki 1. denklemin eksilisi olduğundan $\frac{1}{x^2}$ ile çarparsak

$$3\,dx + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3\,dx + d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \xrightarrow{\text{integral}} \Rightarrow \quad 3x + \frac{y}{x} = C \quad \text{bulunur.}$$

<u>ÖRNEK</u> : $(y - xy^2)\,dx + (x + x^2y^2)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

<u>Çözüm</u> : TDD değildir. Ayrıca $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ ve $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ ifadeleri sadece x'e ve y'ye bağlı değildir. O halde verilen dif. denklemi yeniden düzenlenirse

$$\left(\underbrace{y\,dx + x\,dy}\right) + \left(-xy^2dx + x^2y^2dy\right) = 0$$

olur. Bu denklemin soldaki parçası tablodaki 2. denklemle aynı olduğundan integrasyon çarpanı $\mu = \frac{1}{(xy)^2}$ alınır ve bu denklemin tüm terimleri $\frac{1}{(xy)^2}$ ile çarpılırsa

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^2} + \frac{-xy^2dx + x^2y^2dy}{(xy)^2} = 0$$

$\mu = \frac{1}{(xy)^2}$ seçilirse dx'in önündeki y^2, dy nin 〃 x^2 gideceği için integral alınabilecektir.

$$\left(\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}\right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^2} = \int \frac{1}{x}\,dx - \int dy$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{xy} = \ln|x| - y + C$$

kapalı çözümü bulunur.

ÖRNEK : $y\,dx + (x - yx^2)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\underbrace{y\,dx + x\,dy} - x^2y\,dy = 0$

denkleminin her iki tarafı $\frac{1}{(xy)^2}$ ile çarpılırsa

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^2} - \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \frac{d(xy)}{(xy)^2} - \frac{dy}{y} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{xy} - \ln y = c$$

Not: 1 $d(xy)$ ifadesi (xy) nin diferensiyeli demektir.

$$d(xy) \equiv 1.dx.y + 1.dy.x = y\,dx + x\,dy$$

Not: 2 Eğer $\frac{1}{xy}$ ile çarpılırsa dy nin önündeki x gitmiyor. Amaç dx 'in önündeki fonksiyon sadece x'e, dy nin önündeki de sadece y'ye bağlı olmasıdır ve böylece integral alınabilsin.

2.3. DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Eğer bir dif. denklem,

$$A(x)dx + B(y)dy = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

şeklinde yazılabilirse bu denkleme değişkenlerine ayrılabilen diferensiyel denklem denir. Bu şekilde yazılabilen denklemler çözülebilirdir.

ÖRNEK : $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $x\,dx + y\,dy = 0 \Rightarrow \int x\,dx + \int y\,dy = c_1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = c}$$

ÖRNEK: $y\,dx - x\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \ln x - \ln y = \ln c_0$

$$\Rightarrow \ln \frac{x}{y} = \ln c_0 \Rightarrow \frac{x}{y} = c_0 \Rightarrow y = \frac{1}{c_0} x \Rightarrow \boxed{y = cx}$$

ÖRNEK: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ denklemini çözünüz

Çözüm: $y\,dy - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$ denkleminde integral alınırsa

$\frac{1}{2} y^2 + \sqrt{1-x^2} = c_0 \Rightarrow y^2 + 2\sqrt{1-x^2} = c$ bulunur.

ÖRNEK: $(3x+8)(y^2+4)\,dx - 4y(x^2+5x+6)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\frac{3x+8}{x^2+5x+6}\,dx - \frac{4y}{y^2+4}\,dy = 0$

$$\Rightarrow \frac{3x+8}{(x+2)(x+3)}\,dx - \frac{4y}{y^2+4}\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right)dx - 2 \cdot \frac{2y}{y^2+4}\,dy = 0$$

$$\Rightarrow 2\ln|x+2| + \ln|x+3| - 2\ln(y^2+4) = \ln c$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 \cdot (x+3) = c \cdot (y^2+4)^2$$

bulunur.

Not: $\int \frac{3x+8}{(x+2)(x+3)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}\right)dx \Rightarrow A = 2,\ B = 1$ bulunur.
(Basit kesirlere ayırma)

2.4. HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Birinci mertebeden bir lineer adi dif. denklemin $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ şeklinde verildiğini biliyoruz. Eğer $\frac{y}{x}$ veya $\frac{x}{y}$ nin,

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \ldots \ldots \quad (2.6)$$

şeklinde bir g fonksiyonu bulunabilirse o zaman $f(x,y)$ fonksiyonuna homojen fonksiyon ve yukarıdaki denkleme de homojen dif. denklem denir.

Eğer bir $F(x,y)$ fonksiyonunda x yerine tx ve y yerine ty yazıldığında fonksiyon

$$F(tx, ty) = t^n F(x,y)$$

şeklinde yazılabilirse, bu fonksiyona n-yinci dereceden homojen fonksiyon denir.

Bir homojen dif. denklem, $v = \frac{y}{x}$ dönüşümü yapılarak değişkenlerine ayrılabilen bir şekle dönüşür. Bu durumda

$$\frac{dy}{dx} = v + x \cdot \frac{dv}{dx} \quad \ldots \ldots$$

dır. (2.6) nın çözümü, dif. denklemi

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} \quad \ldots \ldots \quad (2.7)$$

halinde yeniden yazarak ve $x = yu$ $\left(u = \frac{x}{y}\right)$ dönüşümünü ve ilgili

$$\frac{dx}{dy} = u + y\frac{du}{dy}$$

türevini (2.7) denkleminde kullanarak da elde edilir.

Not: Homojen dif. denklemlerde integrasyon çarpanı $\mu = \frac{1}{Mx+Ny}$ dir

ÖRNEK : $(x^2+y^2)\,dx - xy\,dy = 0$ denklemini çözünüz. 16

Çözüm : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+y^2}{xy} = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

şeklinde yazılabildiği için verilen denklem homojendir.

$y = vx$ dönüşümü yapılırsa $v = \frac{y}{x}$ olacağından

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \frac{1}{v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}$$

$$\Rightarrow v\,dv - \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{2} - \ln x = c_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \ln x = c_0 \Rightarrow y^2 = x^2 \ln x^2 + cx^2$$

ÖRNEK : $(3x^2-y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2-y^2}{2xy} = \dfrac{3}{2}\dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{y}{x}$, $y = vx$ alınırsa

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3}{2v} - \frac{1}{2}v$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{v} - v\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3\,dx}{x} = \frac{2v\,dv}{1-v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{3\,dx}{x} + \frac{2v\,dv}{v^2-1} = 0$$

$$\Rightarrow 3\ln x + \ln(v^2-1) = \ln c$$

$$\Rightarrow \ln x^3(v^2-1) = \ln c$$

$$\Rightarrow x^3(v^2-1) = \ln c$$

$$\Rightarrow x^3\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right) = \ln c \Rightarrow x(y^2-x^2) = c$$

ÖRNEK : $(y-x)dx+(x+y)dy=0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y}=\frac{\frac{x-y}{x}}{\frac{x+y}{x}}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

şeklinde yazılabildiği için verilen dif. denklem homojendir. $y=vx$ dönüşümü yapılırsa $v=\frac{y}{x}$ olacağından

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v}{1+v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1-2v-v^2}{1+v}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{(1+v)\,dv}{v^2+2v-1}=0$$

$$\Rightarrow \ln x+\frac{1}{2}\ln(v^2+2v-1)=\ln c$$

$$\Rightarrow x^2-2xy-y^2=c$$

ÖRNEK : $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-x\,dy=0$, $y(1)=0$ başlangıç-değer problemini çözünüz.

Çözüm : $$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

old. denklem homojendir. $y=vx$ dönüşümü yapılırsa

$$v+x\frac{dv}{dx}=v+\sqrt{1+v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} \Rightarrow \frac{dx}{x}-\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}=0$$

$$\Rightarrow \ln x-\ln\left(v+\sqrt{1+v^2}\right)=\ln c_1$$

$$\Rightarrow \ln x-\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)=\ln c_1$$

$$\Rightarrow y+\sqrt{x^2+y^2}=cx^2$$ bulunur.

$x=1$ ve $y=0$ için $c=1$ olduğundan çözüm

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2$$

şeklindedir.

ÖRNEK : $y' = \dfrac{2y^4 + x^4}{xy^3}$ denklemini çözünüz.

ÇÖZÜM : Denklem $y' = f(x,y)$ biçiminde, yani $f(x,y) = \dfrac{2y^4+x^4}{xy^3}$ dır.

$$f(tx, ty) = \frac{2(ty)^4 + (tx)^4}{(tx)(ty)^3} = \frac{\cancel{t^4}(2y^4+x^4)}{\cancel{t^4}(xy^3)} = f(x,y)$$

olduğundan verilen denklem homojendir. $y = vx$ alalım :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^4+x^4}{xy^3} \Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2(vx)^4 + x^4}{x(vx)^3}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^4+1}{v^3} \Rightarrow \frac{dx}{x} - \frac{v^3 dv}{v^4+1} = 0$$

$$\Rightarrow \ln x - \frac{1}{4}\ln(v^4+1) = -\ln k$$

$$\Rightarrow \ln x + \ln k = \ln (v^4+1)^{1/4}$$

$$\Rightarrow xk = (v^4+1)^{1/4}$$

$$\Rightarrow xk = \left(\left(\frac{y}{x}\right)^4 + 1\right)^{1/4}$$

$$\Rightarrow y^4 = c_1 x^8 - x^4, \quad (c_1 = k^4)$$

bulunur.

II. yol: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{xy^3}{2y^4+x^4}$ şeklinde ters çevrilirse $x = yu$ $\left(u = \frac{x}{y}\right)$

dönüşümü yapılarak

$$u + y\frac{du}{dy} = \frac{(yu)\cdot y^3}{2y^4 + (yu)^4}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{2+u^4}{u+u^5}\,du = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} + \int \frac{2+u^4}{u+u^5}\,du = c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

$$\int \frac{2+u^4}{u+u^5}\,du = \int\left(\frac{2}{u} - \frac{u^3}{1+u^4}\right)du = 2\ln u - \frac{1}{4}\ln(1+u^4)$$

değeri (*) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\ln y + 2\ln u - \frac{1}{4}\ln(1+u^4) = C$$

$$\Rightarrow \quad k y^4 u^8 = 1 + u^4 \qquad \left(C = -\frac{1}{4}\ln k\right)$$

$$\Rightarrow \quad k y^4 \left(\frac{x}{y}\right)^8 = 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y^4 = c_1 x^8 - x^4 \qquad (c_1 = k^4)$$

genel çözümü bulunur.

ÖRNEK : $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ denkleminı çözünüz.

Çözüm : $f(tx,ty) = \dfrac{2(tx)(ty)}{(tx)^2-(ty)^2} = \dfrac{\cancel{t^2}(2xy)}{\cancel{t^2}(x^2-y^2)} = f(x,y)$

veya $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2-y^2} = \dfrac{\frac{2xy}{y^2}}{\frac{x^2-y^2}{y^2}} = \dfrac{2\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}-1} \equiv g\left(\frac{x}{y}\right)$

şeklinde yazılabildiği için denklem homojendir. $y = vx$ dönüşümü yapılırsa

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2x(vx)}{x^2-(vx)^2}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = -\frac{v(v^2+1)}{v^2-1} \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{v^2-1}{v(v^2+1)}dv = 0$$

bulunur. Integral alınırsa

$$\int\frac{dx}{x} + \int\left(-\frac{1}{v} + \frac{2v}{v^2+1}\right)dv = \ln k$$

$$\ln x - \ln v + \ln(v^2+1) = \ln k$$

$$x(v^2+1) = kv$$

$$x\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right) = k\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2 = ky$$

20

NOT! Bazı diferensiyel denklemlerin homojen olup olmadıklarını görmek kolay olmayabilir. Örneğin,

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax+by+c}{px+qy+r}\right) \quad \ldots \ldots \quad (2.8)$$

denkleminin homojen olup olmadığı ilk bakışta anlaşılamaz. Bunun için $x = X+h$ ve $y = Y+k$ dönüşümleri yapılırsa

$$\left.\begin{aligned} ah+bk+c &= 0 \\ ph+qk+r &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2.9)$$

denklemleri elde edilir ve bu denklemlerden h ile k bulunur.

ÖRNEK: $\dfrac{dy}{dx} = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y+1}\right)^2$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Bu denklem (2.8) tipindedir. Burada $a=0$, $b=1$, $c=2$, $p=1$, $q=1$, $r=1$ dir. Bu değerler (2.9)'da yerine yazılırsa

$$\left.\begin{aligned} k+2 &= 0 \\ h+k+1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan $k=-2$ ve $h=1$ bulunur. Bu durumda

$$x = X+1$$
$$y = Y-2$$

dönüşümleri elde edilir. Bu değerler dif. denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{dY}{dX} = 2\frac{Y^2}{(X+Y)^2}$$

elde edilir. Bu denklem homojen olduğundan $Y = V \cdot X$ dönüşümü uygulanırsa,

$$V + X\frac{dV}{dX} = 2 \cdot \frac{\left(\frac{Y}{X}\right)^2}{\frac{(X+Y)^2}{X^2}} = \frac{2V^2}{(1+V)^2}$$

$$V - \frac{2V^2}{(1+V)^2} + X\frac{dV}{dX} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(1+V)^2}{V(1+V^2)}dV + \frac{dX}{X} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{V} + \frac{2}{1+V^2}\right)dV + \frac{dX}{X} = 0$$

$$\Rightarrow \ln V + 2\arctan V + \ln X = c$$

$$\Rightarrow \ln\frac{Y}{X} + 2\arctan\frac{Y}{X} + \ln X = c$$

$$\Rightarrow \ln Y + 2\arctan\frac{Y}{X} = c$$

$$\Rightarrow \ln(y+2) + 2\arctan\frac{y+2}{x-1} = c$$ bulunur.

2.5. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİF. DENKLEMLER

Bu tip denklemler içinde

$$a(x)\cdot\frac{dy}{dx} + b(x)y = c(x)$$

şeklindeki lineer dif. denklemler önemli bir yer tutar. Bir I aralığında eğer $a(x) \neq 0$ ise bu denklemin bütün terimleri $a(x)$ ile bölünürse

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad \ldots \quad (2.10)$$

denklemi elde edilir. Burada $P(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ ve $Q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$ dir.

Eğer $Q(x)=0$ ise $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad \ldots \quad (2.11)$

olur ve bu denkleme (2.10) denkleminin homojen kısmı denir ve çözümü

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx \Rightarrow y = ce^{-\int P(x)dx}$$

olur.

Eğer $Q(x) \neq 0$ ise (2.10) dif. denkleminin genel çözümü

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx + c \right] \quad \ldots \quad (2.12)$$

şeklinde olur.

ÖRNEK : $\frac{dy}{dx} - 2xy = x$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $P(x) = -2x$ ve $Q(x) = x$ dir.

$$y = e^{\int 2x dx} \cdot \left[\int x \cdot e^{-\int 2x dx} dx + c \right]$$

elde edilir. Buradan

$$y = e^{x^2} \left[\int x e^{-x^2} dx + c \right]$$

$$y = e^{x^2} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} + c \right] = -\frac{1}{2} + c e^{x^2}$$

$\Big\{$ Not : $\int x e^{-x^2} dx \Rightarrow -x^2 = u \Rightarrow -2x dx = du \Rightarrow x dx = -\frac{du}{2}$

$-\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$ $\Big\}$

ÖRNEK : $y' + \left(\frac{1}{x}\right) y = \sin x$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $P(x) = \frac{1}{x}$ ve $Q(x) = \sin x$ dır.

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}} \cdot \left[\int \sin x \cdot e^{\int \frac{dx}{x}} dx + c \right] \qquad e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$y = e^{-\ln x} \left[\int \sin x \cdot e^{\ln x} dx + c \right]$$

$$y = \frac{1}{x} \left[\int x \sin x dx + c \right]$$

$$y = \frac{1}{x} \left(-x\cos x + \sin x + c \right)$$

Not: $\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x \, dx}_{dv} = ?$ T $\left\{ \begin{array}{ll} x = u, & \sin x dx = dv \\ dx = du, & -\cos x = v \end{array} \right\}$ i $\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$

Kısmi integrasyon

$\int x \sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx$

$= -x\cos x + \sin x$

ÖRNEK : $e^x\left[y-3(e^x+1)^2\right]dx+(e^x+1)\,dy=0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $(e^x+1)\dfrac{dy}{dx}+e^x y-3e^x(e^x+1)^2=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}+\frac{e^x}{e^x+1}\,y=3e^x(e^x+1)$$

denklemine dönüşür. Burada $P(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $Q(x)=3e^x(e^x+1)$.

$$y=e^{-\int\frac{e^x dx}{e^x+1}}\cdot\left[\int 3e^x(e^x+1)\cdot e^{\int\frac{e^x dx}{e^x+1}}\,dx+c\right]$$

$$\Rightarrow \quad y=e^{-\ln(e^x+1)}\cdot\left[\int 3e^x(e^x+1)\cdot e^{\ln(e^x+1)}\,dx+c\right]$$

$$=\frac{1}{e^x+1}\left[3\int e^x(e^x+1)^2\,dx+c\right] \qquad \left\{\begin{array}{c} e^x+1=u \\ e^x dx=du \\ \int e^x(e^x+1)^2dx=\int u^2du \\ =\dfrac{u^3}{3}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{e^x+1}\cdot\left[(e^x+1)^3+c\right]$$

ÖRNEK : $\dfrac{du}{dx}+2x^2u=2x^2$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $P(x)=2x^2$, $Q(x)=2x^2$ dır.

$$u=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx+c\right]$$

$$\Rightarrow \quad u=e^{-\frac{2}{3}x^3}\left[\int 2x^2\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}\,dx+c\right]$$

$$\Rightarrow \quad u=e^{-\frac{2}{3}x^3}\left(e^{\frac{2}{3}x^3}+c\right)$$

bulunur.

$\Big\{$ **Not**: $\int 2x^2 e^{\frac{2x^3}{3}}dx=?$ $\quad \dfrac{2x^3}{3}=u \Rightarrow 2x^2dx=du \Rightarrow$

$\Rightarrow \int e^u du = e^u+c = e^{\frac{2x^3}{3}}+c.$ $\Big\}$

2.6. BERNOULLI DENKLEMİ

Birinci mertebeden bir adi diferensiyel denklem,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = y^n \cdot Q(x) \quad \ldots\ldots \quad (2.13)$$

şeklinde ise bu dif. denkleme Bernoulli denklemi denir. Bu denklemi çözmek için önce denklemin bütün terimleri y^{-n} ile çarpılırsa

$$y^{-n} \cdot \frac{dy}{dx} + P(x)\, y^{1-n} = Q(x) \quad \ldots\ldots \quad (2.14)$$

elde edilir. $v = y^{1-n}$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)\, y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

bulunur. Bu bağıntı (2.14)'de yerine yazılırsa

$$\frac{dv}{dx} + A(x) \cdot v = B(x) \quad \ldots\ldots \quad (2.15)$$

denklemi elde edilir. $\{ A(x) = (1-n)P(x)$ ve $B(x) = (1-n)Q(x) \}$

ÖRNEK : $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{y^2}{x}$ denklemini çözünüz.

ÇÖZÜM : Verilen denklem Bernoulli dif. denklemidir. $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = -\frac{1}{x}$ ve $n = 2$ dir. Denklem y^{-2} ile çarpılırsa

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y^{-1} = -\frac{1}{x} \quad \ldots\ldots \quad (*)$$

olur. Burada $\boxed{v = y^{-1}}$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = -y^{-2} \cdot \frac{dy}{dx}$$

olacağından bu eşitlikten

$$-\frac{dv}{dx} = y^{-2} \frac{dy}{dx}$$

bulunur ki bulunan bu değer (*)'da yerine yazılırsa

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x} v = \frac{1}{x}$$

elde edilir.

$$v = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int Q(x) \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} \cdot dx + c \right]$$

$$v = \frac{1}{x} \left[\int dx + c \right] = \frac{1}{x} [x + c]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{x} [x + c] \Rightarrow y = \frac{1}{1 + \frac{c}{x}}$$

ÖRNEK : $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = y^3 x^{-2}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Denklemi y^{-3} ile çarpalım:

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y^{-2} = x^{-2} \quad \text{.............} \quad (*)$$

olur. $v = y^{-2}$ dönüşümü yapılırsa $\frac{dv}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$ olacağından

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dv}{dx}$$

ifadesi $(*)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$-\frac{1}{2} \frac{dv}{dx} + \frac{2}{x} v = x^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} - \frac{4}{x} v = -2x^{-2}$$

$$\Rightarrow v = e^{\int \frac{4}{x} dx} \cdot \left[\int -2x^{-2} e^{-\int \frac{4}{x} dx} dx + c \right]$$

$$= x^4 \left[\int -2x^{-2} \cdot x^{-4} dx + c \right] = x^4 \left[\frac{2}{5} x^{-5} + c \right]$$

$$\Rightarrow v = \frac{2}{5x} + cx^4 \Rightarrow y^{-2} = \left(\frac{2}{5x} + cx^4 \right)$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{2}{5x} + cx^4 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

bulunur.

ÖRNEK : $x\dfrac{dy}{dx}+y=-2x^6y^4$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=-2x^5y^4$ denklemi y^{-4} ile çarpılırsa

$$y^{-4}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-3}=-2x^5 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

olur. $v=y^{-3}$ dönüşümü yapılarak $\dfrac{dv}{dx}=-3y^{-4}\dfrac{dy}{dx}$ ifadesi bulunur ve $(*)$ eşitliğinde bu ifadeler yerine yazılırsa

$$-\frac{1}{3}\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=-2x^5$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx}-\frac{3}{x}v=6x^5$$

$$\Rightarrow v=e^{\int\frac{3}{x}dx}\left[\int 6x^5\cdot e^{-\int\frac{3}{x}dx}dx+c\right]$$

$$v=x^3\left[\int 6x^5\cdot x^{-3}\cdot dx+c\right]$$

$$v=x^3(2x^3+c)$$

$$y^{-3}=x^3(2x^3+c) \Rightarrow y=\frac{1}{x}(2x^3+c)^{-\frac{1}{3}}$$ bulunur.

ÖRNEK $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{2x}=xy^{-3}$, $y(1)=2$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm $y^3\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{2x}y^4=x$, $v=y^4$, $\dfrac{dv}{dx}=4y^3\dfrac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\frac{dv}{dx}+\frac{1}{2x}v=x \Rightarrow \frac{dv}{dx}+\frac{2}{x}v=4x$$

$$\Rightarrow y^4=x^2+cx^{-2}$$ bulunur.

$y(1)=2$ olduğundan $x=1$ ve $y=2$ için

$$2^4=1^2+c \Rightarrow c=15$$ olup

$$y^4=x^2+15x^{-2}$$

bulunur.

2.7. RICCATI DİFERENSİYEL DENKLEMİ

<u>Tanım</u> : $$\frac{dy}{dx} = q_1(x) + q_2(x)\,y + q_3(x)\cdot y^2 \quad \ldots \quad (2.16)$$

şeklindeki dif. denkleme Riccati diferansiyel denklemi denir. Bu tür denklemleri analitik olarak çözmek mümkün değildi.

Eğer y_1 özel çözümü biliniyorsa genel çözüm

$$y = y_1 + \frac{1}{v} \quad \ldots \quad (2.17)$$

bağıntısı yardımıyla çözülür. y_1, (2.16) ile verilen denklemin bir çözümü olduğuna göre

$$y_1' = q_1 + q_2\,y_1 + q_3\,y_1^2$$

olur. (2.17) 'den

$$y' = y_1' - \frac{v'}{v^2} \quad \ldots \quad (2.18)$$

elde edilir. (2.16) denkleminde (2.17) ve (2.18) bağıntıları yerlerine yazılırsa

$$y_1' - \frac{v'}{v^2} = q_1 + q_2\left(y_1 + \frac{1}{v}\right) + q_3\left(y_1 + \frac{1}{v}\right)^2$$

olur. Bu denklem düzenlenirse

$$\frac{dv}{dx} = -(q_2 + 2q_3 y_1)\,v - q_3$$

elde edilir ki bu denklem v'ye göre birinci mertebeden lineer dif. denklemdir. Bu denklem ise daha önceki metotlarla çözülebilir.

<u>NOT!</u> Riccati denklemlerinde $y = y_1 + \frac{1}{v}$ dönüşümü yerine bazen $y = y_1 + z$ dönüşümü de yapılabilir.

<u>NOT!</u> Riccati denklemlerindeki y_1 özel çözümü analitik olarak bulunamadığı için genelde deneme-yanılma yöntemiyle tespit edilir.

ÖRNEK : $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$ denkleminin özel bir (28)

çözümü $y_1 = x$ olduğuna göre denklemin genel çözümü nedir?

Çözüm : Bu denklem $q_1 = 1 + x^2$, $q_2 = -2x$ ve $q_3 = 1$ şeklinde verilen bir Riccati denklemidir.

$y = y_1 + \frac{1}{v} = x + \frac{1}{v}$ dönüşümü yapılırsa $y' = 1 - \frac{v'}{v^2}$ olur. y ve y' ifadelerini verilen denklemde yerlerine yazarsak

$$1 - \frac{v'}{v^2} = 1 + x^2 - 2x\left(x + \frac{1}{v}\right) + \left(x + \frac{1}{v}\right)^2$$

yazılabilir. Gerekli işlemler ve sadeleşmelerden sonra

$$v' = -1 \Rightarrow v = -x + c \qquad \left\{ y = x + \frac{1}{v} \Rightarrow v = \frac{1}{y-x} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y-x} = -x + c$$

$$\Rightarrow y = x + \frac{1}{c-x}$$

bulunur.

ÖRNEK : $y' = 2\tan x \sec x - y^2 \sin x$ denkleminin özel bir çözümü $y_1 = \sec x$ olduğuna göre denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm : $y = y_1 + \frac{1}{v} = \sec x + \frac{1}{v}$ dönüşümü yapalım. $\left\{ \begin{array}{l} (\sec x)' = \tan x \cdot \sec x \\ (\operatorname{cosec} x)' = -\cot x \cdot \operatorname{cosec} x \end{array} \right\}$

$y' = \tan x \cdot \sec x - \frac{v'}{v^2}$ old. y ve y' ifadeleri denklemde yazılırsa

$$\tan x \cdot \sec x - \frac{v'}{v^2} = 2\tan x \cdot \sec x - \left(\sec x + \frac{1}{v}\right)^2 \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow v' - (2\tan x)v - \sin x = 0$$

lineer dif. denklemi elde edilir.

$$v = e^{\int 2\tan x dx} \cdot \left[\int \sin x \cdot e^{-\int 2\tan x dx} dx + c \right]$$

$$= e^{-2\ln\cos x} \cdot \left[\sin x \cdot e^{2\ln\cos x} dx + c \right]$$

$$\vartheta = \frac{1}{\cos^2 x}\left[\int \cos^2 x \cdot \sin x \, dx + c\right]$$

$$\vartheta = \frac{1}{\cos^2 x}\left[-\frac{\cos^3 x}{3} + c\right] = \frac{c_1 - \cos^2 x}{3\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \quad y = \sec x + \frac{3\cos^2 x}{c_1 - \cos^2 x}$$

ÖRNEK : $y' + y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{4}{x^2} = 0$ denkleminin özel bir çözümü $y_1 = \frac{2}{x}$ ile verilmiştir. Denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm : $y = y_1 + \frac{1}{\vartheta} = \frac{2}{x} + \frac{1}{\vartheta}$ dön. yapılırsa $y' = -\frac{2}{x^2} - \frac{\vartheta'}{\vartheta^2}$ olur.

Bu ifadeler verilen denklemde yerine yazılırsa

$$\left(-\frac{2}{x^2} - \frac{\vartheta'}{\vartheta^2}\right) + \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{\vartheta}\right) - \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vartheta' - \frac{5}{x}\vartheta = -1$$ lineer dif. denklemi bulunur.

$$\Rightarrow \quad \vartheta = e^{\int \frac{5}{x}dx}\left[\int (-1) \cdot e^{-\int \frac{5}{x}dx} dx + C\right]$$

$$= e^{5\ln x}\left[\int - e^{-5\ln x} dx + c\right]$$

$$= x^5\left[\int - x^{-5} dx + c\right]$$

$$= x^5\left[-\frac{x^{-4}}{-4} + c\right]$$

$$\Rightarrow \quad \vartheta = \frac{x}{4} + c x^5$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{2}{x} + \frac{4}{x + 4c x^5}$$

genel çözümü bulunur.

NOT: Bazen $y = y_1 + \frac{1}{v}$ dönüşümü yerine $y = y_1 + z$ dönüşümü de yapılabilir.

ÖRNEK: $y' + xy^2 - y = \frac{1}{x^2}$ denkleminin özel bir çözümü $y_1 = \frac{1}{x}$ olduğuna göre denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y = y_1 + z = \frac{1}{x} + z$ dön. yapılırsa $y' = -\frac{1}{x^2} + z'$ olur.

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{x^2} + z'\right) + x\left(\frac{1}{x} + z\right)^2 - \left(\frac{1}{x} + z\right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad z' + z = -xz^2$$ Bernoulli denklemi bulunur.

Her iki taraf z^{-2} ile çarpılırsa

$$z^{-2} \cdot z' + z^{-1} = -x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

olur. $v = z^{-1}$ dönüşümü yapılırsa $\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx} = -1 \cdot z^{-2} \cdot \frac{dz}{dx}$ olur ki $(*)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{dv}{dx} - v = x$$ lineer denklemi bulunur.

$$\Rightarrow \quad v = e^{\int 1 dx}\left[\int x e^{-\int dx} dx + c\right]$$

$$= e^{x}\left[\int x e^{-x} dx + c\right]$$

$$= e^{x}\left[-xe^{-x} - e^{-x} + c\right]$$

$$\Rightarrow \quad v = -x - 1 + ce^{x}$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{1}{v} = \frac{1}{-x-1+ce^{x}}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{x} + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{-x-1+ce^{x}}$$

genel çözümü bulunur.

Çözümlü SORULAR
(Birinci Mert. Adi Dif. Denklemler)

(1) $3x(xy-2)dx + (x^3+2y)dy = 0$ tam dif. denkleminı çözünüz.

Çözüm : $M = 3x(xy-2)$ ve $N = (x^3+2y)$ dır.

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2$ ve $\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$ olup $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ old. denklem

Tam dif denklemdir.

$\frac{\partial f}{\partial x} = M = 3x^2y - 6x$ eşitliğinde integral alınırsa

$$F(x,y) = \int (3x^2y - 6x)\,dx + \phi(y)$$

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = x^3y - 3x^2 + \phi(y) \quad \dots\dots \quad (*)$$

bulunur. y'ye göre türev alınırsa

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + \frac{d\phi}{dy} \quad \dots\dots \quad (**)$$

olur. $\frac{\partial f}{\partial y} = N = x^3 + 2y$ eşitliği (**)'da yerine yazılırsa

$$x^3 + 2y = x^3 + \frac{d\phi}{dy}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\phi}{dy} = 2y \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = y^2 + C_0$$

bulunur. $\phi(y)$ nin bu değeri (*) eşitliğinde yerine

yazılırsa

$$F(x,y) = x^3y - 3x^2 + y^2 + C_0 = C_1$$

$$\Rightarrow \quad x^3y - 3x^2 + y^2 = C$$

genel çözümü bulunur.

2) $(2xy - y)\,dx + (x^2 - x)\,dy = 0$ tam dif. denklemini çözünüz.

Çözüm: $M = 2xy - y$ ve $N = x^2 - x$ dir.

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x - 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x - 1$ olup $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ old.

denklem TDD'dir.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y$ eşitliğinde integral alınırsa

$F(x,y) = \int (2xy - y)\,dx + \phi(y)$

$\Rightarrow \quad F(x,y) = x^2 y - yx + \phi(y) \quad \ldots \ldots (*)$

y'ye göre türev

$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - x + \frac{d\phi}{dy} \quad \ldots \ldots (*)(*)$

elde edilir. $\frac{\partial f}{\partial y} = N = x^2 - x$ eşitliği $(*)(*)$'da yerine yazılırsa

$x^2 - x = x^2 - x + \frac{d\phi}{dy}$

$\Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = 0 \Rightarrow \phi(y) = c_0$ bulunur.

$\phi(y)$ nin bu değeri $(*)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$F(x,y) = x^2 y - yx + c_0 = c_1$

$\Rightarrow x^2 y - yx = c$

genel çözümü bulunur.

(3) $(2x+y\cos(xy))\,dx + x\cos(xy)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $M = 2x+y\cos(xy)$ ve $N = x\cos(xy)$ verilmiş.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 1\cdot\cos(xy) - y\cdot x\cdot\sin(xy) \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 1\cdot\cos(xy) - xy\sin(xy) \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ old. TDD'dir.}$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = M = 2x+y\cos(xy)$ ifadesinde integral alınırsa

$$F(x,y) = \int[2x+y\cos(xy)]\,dx + \phi(y)$$

$$f(x,y) = x^2 + y\cdot\frac{1}{y}\cdot\sin(xy) + \phi(y)$$

$$f(x,y) = x^2 + \sin(xy) + \phi(y) \quad \text{bulunur.}$$

Türev

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy) + \frac{d\phi}{dy}$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = N = x\cos(xy)$ olduğundan

$$x\cos(xy) = x\cos(xy) + \frac{d\phi}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = 0 \Rightarrow \phi(y) = C_0$$

$$\Rightarrow F(x,y) = x^2+\sin(xy) + C_0 = C_1$$

$$\Rightarrow x^2 + \sin(xy) = C$$

genel çözümü bulunur.

4) $(2xy\cos x^2 - 2xy + 1)\,dx + (\sin x^2 - x^2)\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

<u>Çözüm</u> :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 2x\cos x^2 - 2x \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2x\cos x^2 - 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ denklem TDD'dir.}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy\cos x^2 - 2xy + 1$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \int (2xy\cos x^2 - 2xy + 1)\,dx + \phi(y)$$

$$\Rightarrow F(x,y) = 2y\underbrace{\int x\cos x^2 dx}_{I_1} - 2y\int x\,dx + \int dx + \phi(y)$$

$$\left\{\begin{aligned} & I_1 = \int x\cos x^2 dx = ? \qquad x^2 = u \Rightarrow 2x\,dx = du \Rightarrow x\,dx = \frac{du}{2} \\ & \Rightarrow \int x\cos x^2 dx = \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u = \frac{1}{2}\sin x^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow F(x,y) = 2y\cdot\frac{1}{2}\sin x^2 - 2y\frac{x^2}{2} + x + \phi(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = \sin x^2 - x^2 + \frac{d\phi}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = N = \sin x^2 - x^2 \quad \text{eşitliğinden faydalanılırsa}$$

$$\sin x^2 - x^2 = \sin x^2 - x^2 + \frac{d\phi}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = 0 \Rightarrow \phi(y) = C_0$$

$$\Rightarrow F(x,y) = y\sin x^2 - yx^2 + x = C$$

genel çözümü bulunur.

5 $(x^2+3y^2)dx + 2xy\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 6y$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2y$ olup TDD değildir.

$$f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{2xy}(6y-2y) = \frac{2}{x}$$

fonksiyonu sadece x'e bağlıdır. Bu nedenle

$$\mu = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$\Rightarrow \mu = x^2$ integral çarpanıdır.

Soruda verilen denklemin tüm terimleri x^2 ile çarpılırsa denklem TDD'ye dönüşür.

$$x^2(x^2+3y^2)dx + x^2(2xy)dy = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x^4+3x^2y^2)}_{M_1}dx + \underbrace{2x^3y}_{N_1}dy = 0$$

denklemi TDD'dir.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M_1 = x^4 + 3x^2y^2$$ eşitliğinde integral alınırsa

$$F(x,y) = \int (x^4+3x^2y^2)dx + \phi(y)$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{x^5}{5} + x^3y^2 + \phi(y) \quad (*)$$ ve türev alınırsa

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 2x^3y + \frac{d\phi}{dy} \quad (**)$$

bulunur. $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N_1 = 2x^3y$ ifadesi (**)'da yerine yazılırsa

$$2x^3y = 2x^3y + \frac{d\phi}{dy} \Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = 0 \Rightarrow \phi(y) = C_0$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{x^5}{5} + x^3y^2 = C$$

genel çözümü bulunur.

6 $(y^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Denklem TDD değildir.

$y^2 dx = \underbrace{y\,dx - x\,dy}$ olarak yazılabildiğinden integral

çarpanı $\frac{1}{y^2}$ alınırsa

$$\frac{y^2 dx}{y^2} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} \Rightarrow dx = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$$

$$\Rightarrow \quad dx = d\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow \int dx = \int d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{x}{y} + c$$

7 $\cos y \frac{dy}{dx} + 2x - 2x\sin y = 0$ denklemini değişkenlerine ayırarak çözünüz.

Çözüm : $\cos y \frac{dy}{dx} = 2x(\sin y - 1)$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x(\sin y - 1)}{\cos y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\cos y}{2x(\sin y - 1)}$$

$$\Rightarrow \quad \int 2x\,dx = \int \frac{\cos y\,dy}{\sin y - 1}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \ln|\sin y - 1| + c$$

$$\Rightarrow \quad \sin y - 1 = e^{x^2 + c}$$

8) $\sin x \cos y\, dx + \cos x \sin y\, dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm:
$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} + \int \frac{\sin y}{\cos y}\, dy = 0$$

$$\Rightarrow \; -\ln(\cos x) - \ln(\cos y) = -\ln c$$

$$\ln(\cos x) + \ln(\cos y) = \ln c$$

$$\ln(\cos x \cdot \cos y) = \ln c$$

$$\cos x \cdot \cos y = c$$

9) $(xy + 2x + y + 2)\, dx + (x^2 + x)\, dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm:
$$[y(x+1) + 2(x+1)]\, dx + [x^2 + x]\, dy = 0$$

$$(x+1)(y+2)\, dx + (x^2+x)\, dy = 0$$

$$\frac{x+1}{x^2+x}\, dx + \frac{dy}{y+2} = 0$$

$$\Rightarrow \; \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+x}\, dx + \int \frac{dy}{y+2} = 0$$

$$\Rightarrow \; \frac{1}{2} \left[\int \frac{2x+1}{x^2+x}\, dx + \int \frac{dx}{x^2+x} \right] + \int \frac{dy}{y+2} = 0$$

$$\frac{1}{2} \left[\int \frac{2x+1}{x^2+x}\, dx + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \right. + \int \frac{dy}{y+2} = 0$$

$$\Rightarrow \; \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+x) + \ln(x) - \ln(x+1) \right] + \ln(y+2) = \ln c$$

$$\Rightarrow \; \frac{1}{2} \; \frac{(x^2+x) \cdot x \cdot (y+2)}{x+1} = c$$

$$\Rightarrow \; x^2 (y+2) = c$$

10 $(x^2 - xy + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$
homojen dif. denklemini çözünüz.

Çözüm: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy} = \dfrac{x}{y} - 1 + \dfrac{y}{x}$ $\left(\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}\right)$

olup denklem homojendir. Dolayısıyla $\boxed{y = vx}$ dönüşümü uygulanırsa, $\left\{ v = \dfrac{y}{x} \right\}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}$$

$$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} - 1 + \cancel{v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{v\,dv}{1-v}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} - \int \frac{v\,dv}{v-1} = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{v-1+1}{v-1}\,dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int dv - \int \frac{dv}{v-1} = 0$$

$$\ln x - v - \ln(v-1) = c$$

$$\ln x - \frac{y}{x} - \ln\left(\frac{y}{x} - 1\right) = c$$

genel çözümü bulunur.

(39)

(11) $y\,dx = (x + \sqrt{y^2 - x^2})\,dy$ homojen denk. çözünüz.

Çözüm: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x + \sqrt{y^2 - x^2}}{y}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{x + \sqrt{y^2 - x^2}}{y}}{\frac{y}{y}} = \frac{\frac{x}{y} + \sqrt{\frac{y^2 - x^2}{y^2}}}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

old. denklem homojendir. $x = uy$ dönüşümü yapılırsa

$\dfrac{dx}{dy} = u + y\dfrac{du}{dy}$ türevi yukarıda yerine yazılırsa

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

$$\Rightarrow u + y\frac{du}{dy} = u + \sqrt{1 - u^2}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$\ln y = \arcsin u + \ln c$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = \arcsin\frac{x}{y}$$

$$\frac{y}{c} = e^{\arcsin\frac{x}{y}} \Rightarrow y = c \cdot e^{\arcsin\frac{x}{y}}$$

Not: Bu denklem $y = vx$ dönüşümü yapılarak da çözülebilir. Fakat integral işlemleri uzun süreceği için $x = uy$ dönüşümü tercih edilmiştir.

40

(12) $y' = \dfrac{2y+x}{x}$ homojen dif. denklemini çözünüz.

Çözüm : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y+x}{x} = 2\dfrac{y}{x}+1$

$y = vx$ dönüşümü yapalım :

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x}+1$$

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = 2v+1$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = v+1$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{v+1}$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln(v+1) + \ln c_1$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln\left(\frac{y}{x}+1\right) + \ln c_1$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{y+x}{x}\right)c_1$$

$$\Rightarrow x^2 = (y+x)\,c_1$$

$$y + x = \frac{x^2}{c_1}$$

$$\Rightarrow y + k = cx^2$$

genel çözümü bulunur.

13) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y+6}{2x+y+2}$ homojen dif. denklemini çözünüz.

Çözüm: $\left.\begin{matrix} a=1, & b=-2, & c=6 \\ p=2, & q=1, & r=2 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} 1.h-2k+6=0 \\ 2h+1.k+2=0 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} h=-2 \\ k=2 \end{matrix}$

$\left.\begin{matrix} x = X-2 \\ y = Y+2 \end{matrix}\right\}$ dönüşümü yapalım.

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-2-2Y-4+6}{2X-4+Y+2+2} = \frac{X-2Y}{2X+Y} = \frac{1-2\frac{Y}{X}}{2+\frac{Y}{X}}$$

$\Rightarrow$ $Y = VX$ dönüşümü yapılırsa

$$V + X\frac{dV}{dX} = \frac{1-2V}{2+V} \Rightarrow X\frac{dV}{dX} = \frac{1-4V-V^2}{2+V}$$

$\Rightarrow$ $\frac{dX}{X} + \frac{2+V}{V^2+4V-1} = 0$ eşitliğinde integral alınırsa

$$\ln X + \frac{1}{2}\ln(V^2+4V-1) = \ln c$$

$$\ln X + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{Y^2}{X^2} + 4\frac{Y}{X} - 1\right) = \ln c$$

$$\ln(x+2) + \ln\left(\frac{(y-2)^2}{(x+2)^2} + 4\frac{y-2}{x+2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} = \ln c$$

$$(x+2)\cdot\sqrt{\frac{(y-2)^2}{(x+2)^2} + 4\frac{y-2}{x+2} - 1} = c$$

genel çözümü bulunur.

42

(14) $$\frac{dy}{dx} = \frac{3x-y+1}{3y-x+5}$$ homojen denklemini çözünüz.

Çözüm : $$\frac{dy}{dx} = \frac{3x-y+1}{-x+3y+5} \Rightarrow \begin{array}{l} a=3, \ b=-1, \ c=1 \\ p=-1, \ q=3, \ r=5 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3h-k+1=0 \\ -h+3k+5=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} h=-1 \\ k=-2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = X-1 \\ y = Y-2 \end{array}\right\}$$ dönüşümü yapalım :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3X-3-Y+2+1}{3Y-6-X+1+5} = \frac{3X-Y}{3Y-X} = \frac{3-\frac{Y}{X}}{3\frac{Y}{X}-1}$$

$$\Rightarrow V + X\frac{dV}{dX} = \frac{3-V}{3V-1} \Rightarrow \frac{dX}{X} = \frac{(3V-1)\,dV}{3-3V^2}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dX}{X} + \frac{1}{3}\underbrace{\int\frac{3V-1}{V^2-1}}_{I} = 0 \quad \dots\dots \quad (*)$$

$$I = \int\frac{3V-1}{V^2-1}\,dV = \int\left(\frac{A}{V-1}_{(V+1)} + \frac{B}{V+1}_{(V-1)}\right)dV \Rightarrow A=1, \ B=2$$ bulunur.

$$\int\frac{dX}{X} + \frac{1}{3}\left(\int\frac{1}{V-1}\,dV + 2\int\frac{dV}{V+1}\right) = \ln c$$

$$\Rightarrow \ln X + \frac{1}{3}\left(\ln(V-1) + 2\ln(V+1)\right) = \ln C$$

$$\Rightarrow \ln\left(X \cdot (V-1)^{\frac{1}{3}} \cdot (V+1)^{2/3}\right) = \ln c$$

$$\Rightarrow \ln\left(X \cdot \left(\frac{Y}{X}-1\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{Y}{X}+1\right)^{2/3}\right) = \ln c$$

$$\Rightarrow (x+1) \cdot \left(\frac{y+2}{x+1} - 1\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{y+2}{x+1} + 1\right)^{\frac{2}{3}} = c$$

genel çözümü bulunur.

15) $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$ denklemini çözünüz (Bernoulli)

Çözüm: Her iki taraf y^{-3} ile çarpılırsa

$$(*) \ldots \boxed{y^{-3}\frac{dy}{dx} + y^{-2} = x} \Rightarrow \quad v = y^{-2} \text{ dönüşümü yapılırsa}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$ bulunur. Buradan $y^{-3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}$

olup (*) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + v = x \Rightarrow \frac{dv}{dx} - 2v = -2x$$

lineer denklemine dönüşür. Bunun çözümü ise

$$v = e^{-\int(-2)dx}\left[\int(-2x)\cdot e^{-\int 2dx}\cdot dx + c\right]$$

$$= e^{2x}\left[\underbrace{\int e^{-2x}\cdot(-2x)dx}_{\text{(Kısmi Int.)}} + c\right]$$

$$\Rightarrow v = e^{2x}\left(xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + c\right)$$

olur. $v = y^{-2}$ olduğuna göre

$$y^{-2} = e^{2x}\left(xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + c\right)$$

genel çözümü bulunur.

Not: $\int(-2x)e^{-2x}dx = ?$. $\left\{ \begin{array}{ll} u = -2x, & e^{-2x}dx = dv \\ du = -2dx, & -\frac{1}{2}e^{-2x} = v \end{array} \right\}$

$$\int(-2x)e^{-2x}dx = xe^{-2x} - \int e^{-2x}dx = xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

(44)

(16) $dx - 2xy^{-1}dy = x^4 dy$ denkleminin çözünüz. (Bernoulli)

Çözüm: Denklemin her tarafı dy ile bölünürse Bernoulli denklemi elde edilir. Ayrıca denklemin her iki tarafını da x^4 ile bölersek

$$x^{-4}\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x^{-3} = 1 \quad \dots\dots\dots \quad (*)$$

haline gelir. $v = x^{-3}$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dy} = -3x^{-4}\frac{dx}{dy}$$

$$\Rightarrow \quad x^{-4}\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{3}\frac{dv}{dy}$$

bulunur. Böylece $(*)$ denklemi

$$-\frac{1}{3}\frac{dv}{dy} - \frac{2}{y}v = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dy} + \frac{6}{y}v = -3$$

lineer denklemi elde edilir. Buradan

$$v = e^{-\int \frac{6}{y}dy}\left[\int (-3).\, e^{\int \frac{6}{y}dy} dy + c\right]$$

$$= e^{-6.\ln y}\left[\int -3\, e^{6\ln y} dy + c\right]$$

$$= y^{-6}\left[\int y^6(-3)\, dy + c\right]$$

$$\Rightarrow \quad x^{-3}y^6 = -\frac{3}{7}x^7 + c$$

genel çözümü bulunur.

45

(17) $y' + \frac{2}{x} y = \sqrt{y}$ dif. denklemini çözünüz. (Bernoulli)

Çözüm: Her iki taraf $y^{-\frac{1}{2}}$ ile çarpılırsa

(*)$\ldots$ $y^{-\frac{1}{2}} y' + \frac{2}{x} y^{\frac{1}{2}} = 1$ bulunur. $v = y^{\frac{1}{2}}$ dönüşümü ile

$v' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' \Rightarrow y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' = 2v'$ olacağından (*) denklemde

yerine yazılırsa $2v' + \frac{2}{x} v = 1 \Rightarrow v' + \frac{1}{x} v = \frac{1}{2}$

lineer dif. denklemi elde edilir. Genel çözüm:

$$v = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int \frac{1}{2} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c \right]$$

$$= e^{-\ln x} \left[\int \frac{1}{2} e^{\ln x} dx + c \right] = \frac{1}{x} \left[\int \frac{1}{2} x \, dx + c \right]$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{x} \left[\frac{1}{4} x^2 + c \right] \Rightarrow y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{x} \left[\frac{1}{4} x^2 + c \right].$$

(18) $xy' (x\sin y + y^{-1}) = 1$ denklemini çözünüz. (Bernoulli)

Çözüm: $x \frac{dy}{dx} (x \sin y + \frac{1}{y}) = 1 \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = x^2 \sin y$

denklemin her iki tarafı da x^{-2} ile çarpılırsa

$x^{-2} \frac{dx}{dy} - \frac{x^{-1}}{y} = \sin y$, $\quad v = x^{-1}$ olsun. $\frac{dv}{dy} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$

$\left(\frac{dv}{dy} = -x^{-2} \frac{dx}{dy} \right)$

$$\Rightarrow -\frac{dv}{dy} + \frac{1}{y} v = \sin y$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dy} - \frac{1}{y} v = -\sin y \quad \text{lineer dif. denk. bulunur.}$$

$$\Rightarrow v = e^{-\int -\frac{1}{y} dy} \left[\int -\sin y \, e^{\int -\frac{1}{y} dy} dy + c \right]$$

$$= \frac{1}{y} \left[\underbrace{\int -y \sin y \, dy}_{\text{(Kısmi int.)}} + c \right] \Rightarrow y x^{-1} = y \cos y - \sin y + c$$

(19) $x^2y' - 2\ln x - e^{2y + \frac{4\ln x}{x}} = 0$ denklemini çözünüz. (Bernoulli)

__Çözüm__ Denklemi $x^2y' - 2\ln x = e^{2y} \cdot e^{\frac{4\ln x}{x}}$ olarak yazalım ve her iki tarafı x^2'ye bölüp daha sonra e^{-2y} ile çarparsak

$$e^{-2y}y' - \frac{2\ln x}{x^2}e^{-2y} = \frac{1}{x^2}e^{\frac{4\ln x}{x}}$$

Bernoulli denklemi elde edilir.

$v = e^{-2y}$ dönüşümü ile $v' = -2e^{-2y}\cdot y'$ olur. Böylece

$$-\frac{v'}{2} - \frac{2\ln x}{x^2}v = \frac{1}{x^2}e^{\frac{4\ln x}{x}}$$

$$\Rightarrow v' + \frac{4\ln x}{x^2}v = -\frac{2}{x^2}e^{\frac{4\ln x}{x}}$$

lineer dif. denklemi elde edilir. Genel çözümü ile

$$v = e^{-4\int \frac{\ln x}{x^2}dx}\left[\int\left(-\frac{2}{x^2}\right)e^{\frac{4\ln x}{x}} \cdot e^{4\int\frac{\ln x}{x^2}dx}dx + c\right]$$

$$= e^{4\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)} \cdot \left[\int\left(-\frac{2}{x^2}\right)\cdot e^{\frac{4\ln x}{x}} \cdot e^{-4\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)}dx + c\right]$$

$$= e^{4\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)} \cdot \left[\underbrace{\int\left(-\frac{2}{x^2}\right)\cdot e^{-\frac{4}{x}}}dx + c\right]$$

$$\left\{ -\frac{4}{x} = u \Rightarrow \frac{4}{x^2}dx = du \Rightarrow -\frac{2}{x^2}dx = -\frac{du}{2} \right\}$$

$$\left\{ -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^{-4/x} + c \right\}$$

$$= e^{4\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)} \cdot \left[-\frac{1}{2}e^{-4/x} + c\right]$$ bulunur.

__Not__ : $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = ?$ Kısmi int. uygularsa $\ln x = u$, $\frac{dx}{x} = du$, $\frac{dx}{x^2} = dv$, $-\frac{1}{x} = v$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = uv - \int v\,du = -\frac{1}{x}\ln x + \int\frac{dx}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c = -\left(\frac{\ln x + 1}{x}\right) + c$$

(20) $\frac{dy}{dx} + e^x - 3y + e^{-x} \cdot y^2 = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = e^x$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

<u>Çözüm</u>: $y = y_1 + z = e^x + z$, $\frac{dy}{dx} = e^x + \frac{dz}{dx}$

dönüşümlerini verilen denklemde yerine yazarsak,

$$e^x + \frac{dz}{dx} + e^x - 3(e^x + z) + e^{-x} \cdot (e^x + z)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} - z = -e^{-x} \cdot z^2$$

Bernoulli denklemi elde edilir. Bunun için denklemin her iki tarafını z^{-2} ile çarpalım.

$$z^{-2}\frac{dz}{dx} - z^{-1} = -e^{-x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

denklemi elde edilir. Burada $v = z^{-1}$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx} = -z^{-2}\frac{dz}{dx}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$z^{-2}\frac{dz}{dx} = -\frac{dv}{dx}$$

ifadesi ile $v = z^{-1}$ bağıntısı (*) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$-\frac{dv}{dx} - v = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} + v = e^{-x}$$ lineer denklemi elde edilir.

Buradan $v = e^{-\int 1 dx}\left[\int e^{-x} \cdot e^{\int 1 dx} dx + c\right]$.

$$\Rightarrow v = e^{-x}(x + c)$$

$$\Rightarrow z^{-1} = e^{-x}(x + c) \Rightarrow z = e^x / (x + c)$$

$$\Rightarrow y = y_1 + z = e^x + \frac{e^x}{x + c}$$ bulunur.

(48)

(21). $y' - 2(x-1)y = -y^2 - x^2 + 2x + 1$ Riccati denklemının bir özel çözümü $y_1 = x$ ise genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y = y_1 + \frac{1}{u} = x + \frac{1}{u}$, $y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$

dönüşümlerini verilen denklemde yerine yazalım:

$$\left(1 - \frac{u'}{u^2}\right) - (2x-2)\left(x + \frac{1}{u}\right) = -\left(x + \frac{1}{u}\right)^2 - x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow \; -\frac{u'}{u^2} + \frac{2}{u} = -\frac{1}{u^2} \quad \Rightarrow \quad u' - 2u = 1$$

lineer denklemi elde edilir. Bunun çözümü

$$u = e^{\int 2dx}\left[\int 1 \cdot e^{-\int 2dx} dx + c\right]$$

$$u = -\frac{1}{2} + ce^{2x}$$

$$\Rightarrow \; y = x + \frac{1}{u} \text{ old. } \quad \frac{1}{y-x} = -\frac{1}{2} + ce^{2x}$$

$$\Rightarrow \; y - x = \frac{1}{-\frac{1}{2} + ce^{2x}}$$

$$\Rightarrow \; y = x + \frac{1}{-\frac{1}{2} + ce^{2x}}$$

genel çözümü bulunur.

3. BÖLÜM

1

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN UYGULAMALARI

1) Artma ve Azalma Problemleri

k orantı sabitini ve $N(t)$ sürekli fonksiyonu da artan veya azalan madde miktarını göstersin. Madde miktarının değişim hızı $\frac{dN}{dt}$ değerinin eldeki madde miktarına orantılı olduğunu kabul edersek o takdirde

$$\frac{dN}{dt} = kN \quad \text{veya} \quad \frac{dN}{dt} - kN = 0$$

denklemi geçerlidir.

ÖRNEK: Bir ülkenin nüfusunun o anda ülkede yaşayan insanların sayısıyla orantılı bir hızla arttığı biliniyor. Eğer nüfus 2 yıl sonra 2 katına çıkarsa ve 3 yıl sonra 20.000 ise başlangıçta ülkede kaç kişi yaşıyordu?

Çözüm: N : ülkede herhangi bir t anında yaşayan insan sayısı
N_0 : başlangıçtaki insan sayısı

olsun. $\frac{dN}{dt} - kN = 0 \Rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int k\,dt$

$\Rightarrow \ln N = kt + c_1 \Rightarrow N = e^{kt+c_1} \Rightarrow N = e^{c_1} \cdot e^{kt}$

$\Rightarrow \boxed{N = c\,e^{kt}}$ bulunur.

$t=0$ anında başlangıçtaki sayı $N = N_0$ olsun.

$N_0 = c.e^0 \Rightarrow N_0 = c \Rightarrow \boxed{N = N_0 \cdot e^{kt}}$ bulunur.

$t=2$ için (2 yıl sonra) $N = 2N_0$ dır. (şimdikinin 2 katı old.)

$N = N_0 e^{kt}$ denkleminde yerine yazılırsa

$2\cancel{N_0} = \cancel{N_0} e^{k \cdot 2} \Rightarrow \ln 2 = \ln e^{k \cdot 2} \Rightarrow \ln 2 = 2k \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{\ln 2}{2} \cong \frac{0{,}693}{2} \cong 0{,}347$

$\Rightarrow 20000 = N_0 e^{(0{,}347) \cdot 3} \Rightarrow N_0 = \frac{20000}{e^{(0{,}347) \cdot 3}} = \boxed{7062}$ kişi

(2)

ÖRNEK : Belirli bir radyoaktif maddenin, miktarı ile orantılı bir hızla yok olduğu bilinmektedir. Eğer başlangıçta 50 mg madde varsa ve 2 saat sonra maddenin başlangıçtaki kütlesinin % 10 'unun yok olduğu gözlenmişse

a) Herhangi bir t anında kalan madde kütlesi için bir ifade

b) 4 saat sonra maddenin kütlesini

c) Maddenin başlangıçtaki kütlesinin yarısına indiği zamanı

bulunuz.

Çözüm : a) N, herhangi bir t anındaki madde miktarı olsun.

$\frac{dN}{dt} - kN = 0$ olduğundan $N = ce^{kt}$ dir.

$t=0$ anında (yani başlangıçta) 50 gr madde olduğundan

$t=0$ ve $N=50$ için $50 = ce^{k.0} \Rightarrow \boxed{c=50}$ dir.

Böylece $N = 50e^{kt}$ bulunur.

$t=2$ anında 50 mg nin % 10 'u yani 5 mg kaybolmuştur.

Yani $t=2$ için $N = 50-5 = 45$ mg 'dir.

$\Rightarrow 45 = 50 \cdot e^{2k} \Rightarrow e^{2k} = \frac{9}{10} \Rightarrow \ln e^{2k} = \ln\frac{9}{10} \Rightarrow 2k = \ln\frac{9}{10}$

$\Rightarrow k = \frac{1}{2}\ln(0,9) = -0,053$ bulunur. O halde

$N = 50e^{kt} \Rightarrow \boxed{N = 50 \cdot e^{-0,053 \cdot t}}$ matematiksel ifadesi bulunur.

b) $t=4 \Rightarrow N = 50 \cdot e^{-0,053 \cdot 4} = 40,5$ mg

c) $N = \frac{50}{2} = 25$

$\Rightarrow 25 = 50 \cdot e^{-0,053t} \Rightarrow e^{-0,053t} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \ln e^{-0,053t} = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow -0,053t = -0,693$

$\Rightarrow t \cong 13$ saat

ÖRNEK : Bir bakteri kültürünün miktarı ile orantılı bir hızla arttığı biliniyor. 1 saat sonra kültürde 1000 bakteri lifi ve 4 saat sonra 3000 lif gözlenmiştir. Herhangi bir t anındaki kültürdeki yaklaşık lif sayısını gösteren matematiksel ifade ve başlangıçtaki kültür içindeki yaklaşık lif sayısını bulunuz.

Çözüm : N : t anındaki kültürdeki lif sayısı olsun.

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0 \Rightarrow N = Ce^{kt}$$

$$\left.\begin{array}{ll} t=1 \Rightarrow & 1000 = C.e^{k.1} \\ t=4 \Rightarrow & 3000 = Ce^{4k} \end{array}\right\}$$

Taraf tarafa bölünürse

$$\frac{1}{3} = e^{-3k} \Rightarrow 3 = e^{3k} \Rightarrow k = \frac{1}{3}\ln 3 \Rightarrow k \cong 0,366$$

$$1000 = Ce^{k} \Rightarrow 1000 = C.e^{0,366} \Rightarrow C = 694$$

$$\Rightarrow N = Ce^{kt} \Rightarrow N = 694\, e^{0,366.0} \Rightarrow N_0 = 694 \text{ bulunur.}$$

$t=0$ anında (Başlangıçtaki)

ÖRNEK : Bir bakteri, miktarı ile orantılı olarak artmaktadır. Başlangıçta 2 doz bakteri vardır. 2 gün sonra ise bu 3 doz olmuştur.

10 gün sonraki miktarı bulunuz.

Çözüm : $N = Ce^{kt} \Rightarrow$ $t=0$ için $2 = Ce^{k.0} \Rightarrow C = 2$ dir.

2 gün sonra $N = 3$ old.

$$3 = 2.e^{2k} \Rightarrow k = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} \cong 0,2025 \text{ bulunur.}$$

10 gün sonraki miktar ise $t = 10$ için

$$N = 2e^{0,2025.10} \cong 15,19 \text{ doz.}$$

(4)

ÖRNEK: Bir salgın hastalık teorisine göre hasta nüfusun değişim hızı, hastalığı yakalamış nüfus ile hasta olmayanların sayısının çarpımı ile orantılıdır. Bu teoriyi kontrol etmek için 500 tane farenin 5'ine hastalık bulaştırılmıştır. Teorinin doğru olduğu varsayılırsa farelerin yarısının hasta olması için ne kadar zaman geçer?

Çözüm: "N : t anındaki hasta fare sayısı" olsun.

$N_0 = 5$ başlangıçtaki hasta fare sayısı

$500 - N$: Hasta olmayan fare sayısı

Hasta nüfusun değişim hızı, hasta ve hasta olmayanların sayısının çarpımı olduğundan

$$\frac{dN}{dt} - k \cdot N \cdot (500 - N) = 0$$

yazılabilir. (Burada değişim hızı sadece hasta sayısı ile orantılı değildir.)

$$\frac{dN}{N \cdot (500-N)} - k\,dt = 0 \Rightarrow \frac{1}{N(500-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{500-N} \Rightarrow A = \frac{1}{500} = B.$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{\frac{1}{500}}{N} + \frac{\frac{1}{500}}{500-N} \right) dN - \int k\,dt = c_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{500} \left(\ln N - \ln(500-N) \right) - kt = c_1$$

$$\Rightarrow \frac{N}{500-N} = e^{500(c_1 + kt)} \Rightarrow \frac{N}{500-N} = c\,e^{500kt} \text{ bulunur.}$$

$t = 0$ için $N = 5$ verildiğinden

$$\frac{5}{495} = c\,e^{500 \cdot 0} \Rightarrow c = \frac{1}{99}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{500-N} = \frac{1}{99} \cdot e^{500kt} \Rightarrow N = 250 \text{ için } t = ?$$

$$\Rightarrow \frac{250}{500-250} = \frac{1}{99} e^{500kt} \Rightarrow \ln 99 = 500kt$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 99}{500k}$$

Not: Soruda k'yı bulabilecek kadar veri olmadığı için sonuç k'ya bağlı çıkmıştır.

2) Sıcaklık Problemleri

Newton'un soğuma yasası, bir cismin sıcaklığının zamanla değişim hızının, cisimle onu çevreleyen ortam arasındaki sıcaklık farkına orantılı olduğunu ifade eder. T cismin sıcaklığını, $T_ç$ de çevreleyen ortamın sıcaklığını göstersin. O zaman cismin sıcaklığının zamanla değişim hızı $\frac{dT}{dt}$ olur. Newton'un soğuma yasası

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_ç) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + kT = kT_ç$$

Burada k oranti sabitidir. Newton yasasında, T nin $T_ç$ 'den büyük olduğu bir soğuma sürecinde $\frac{dT}{dt}$ yi negatif yapmak ve T nin $T_ç$ 'den küçük olduğu bir ısınma probleminde ise $\frac{dT}{dt}$ 'yi pozitif yapmak için k'yı negatif seçmek gerekir.

ÖRNEK : $100°F$ sıcaklıktaki bir metal çubuk sabit $0°F$ sıcaklıktaki bir odaya yerleştiriliyor. Eğer 20 dak. sonra sıcaklık $50°F$ ise

a) Çubuk $25°F$ 'ye ne kadar sürede düşer?

b) 10 dak. sonraki sıcaklığı bulunuz.

Çözüm : $T_ç = 0$ verilmiş. Bu nedenle

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + kT = 0 \Rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{kT}{T}dt$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} = -k\,dt \Rightarrow \ln T = -kt + c_1$$

$$\Rightarrow T = e^{-kt + c_1} \Rightarrow T = c \cdot e^{-kt}$$ bulunur.

$t=0$ anında $T=100$ olduğundan

$$100 = C \cdot e^{-k \cdot 0} \Rightarrow C = 100$$

bulunur. Böylece $T = 100 \cdot e^{-kt}$ olur.

$t=20$ anında $T=50$ olduğundan

$$50 = 100 e^{-20k} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-20k} \Rightarrow k \cong 0{,}035$$

$\Rightarrow T = 100 \cdot e^{-0{,}035 \cdot t}$ matematiksel ifadesi bulunur.

Buna göre

a) $T=25$ ise $25 = 100 \cdot e^{-0{,}035 \cdot t}$

$$\Rightarrow -0{,}035t = \ln \frac{1}{4} \Rightarrow t = 39{,}6 \text{ dak. bulunur.}$$

b) $t=10$ için $T=?$

$$T = 100 \cdot e^{-0{,}035 \cdot 10} = 70{,}5\,°F$$

bulunur.

ÖRNEK : $50\,°F$ sıcaklıktaki bir cisim, sıcaklığı $100\,°F$ olan bir ortama yerleştirilmiştir. Eğer 5 dak. sonra cismin sıcaklığı $60\,°F$ ise

a) Cismin $75\,°F$ sıcaklığa ulaşması için gereken zamanı

b) 20 dak. sonraki sıcaklığı bulunuz.

Çözüm : a) $T_a = 100$ verilmiş.

$$\frac{dT}{dt} + kT = 100k \Rightarrow T = Ce^{-kt} + 100 \text{ olur.}$$

$t=0$ için $T=50$ verildiğinden

$$50 = c\,e^{-k.0} + 100 \Rightarrow C = -50$$

$$\Rightarrow \boxed{T = -50 \cdot e^{-kt} + 100}$$ bulunur.

$t = 5$ anında $T = 60\,°F$ olduğundan

$$60 = -50 \cdot e^{-5k} + 100 \Rightarrow e^{-5k} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow -5k = \ln\frac{4}{5} \Rightarrow k \cong 0{,}045$$ olup

$$\boxed{T = -50 \cdot e^{-0{,}045t} + 100}$$ matematiksel ifadesi bulunur.

a) $T = 75\,°F \Rightarrow 75 = -50 \cdot e^{-0{,}045t} + 100$

$$\Rightarrow e^{-0{,}045t} = \frac{1}{2} \Rightarrow -0{,}045t = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow t = 15{,}4 \text{ dak.}$$

b) $t = 20$ ise $T = ?$

$$T = -50 \cdot e^{-0{,}045 \cdot 20} + 100 = 79{,}5\,°F$$ bulunur.

ÖRNEK : Suyun $100\,°C$'de kaynadığı ve soğurken ilk 20 dakikada sıcaklığın $10\,°C$ düştüğü bilinmektedir.

a) Çevre sıcaklığı $0\,°C$ olan bir kazandaki suyun sıcaklığının zamanla değişimini veren bağıntıyı bulunuz.

b) Kazandaki su sıcaklığının $90\,°C$'den $80\,°C$'ye düşmesi için geçen süreyi bulunuz.

c) 90 dak. sonra kazandaki su sıcaklığının kaç °C olacağını hesaplayınız.

Çözüm:

a) $T_q = 0$ olarak verildiğine göre denklem

$$\frac{dT}{dt} + kT = 0 \Rightarrow T = 100\,e^{-kt}$$ dir.

(t=0 anında T=100 verildiğinden c=100 bulunuyor)
(ilk örnekten)

(8)

Su ilk 20 dakikada $10^\circ C$ soğuduğundan kazandaki su sıcaklığı $T = 100 - 10 = 90^\circ C$ olur. Bu durumda

$$90 = 100\, e^{-k.20} \Rightarrow k = +0,005$$

bulunur. Buradan

$$T = 100\, e^{-0,005t}$$

bağıntısı elde edilir.

b) $T = 80$ alırsa, suyun $100^\circ C$'den $80^\circ C$'ye düşmesi için geçen zaman

$$80 = 100\, e^{-0,005t} \Rightarrow t = 44,6 \text{ dak.}$$

olarak bulunur. Suyun $100^\circ C$'den $90^\circ C$'ye düşmesi için geçen süre 20 dak. olduğuna göre suyun $90^\circ C$'den $80^\circ C$'ye düşmesi için geçen zaman $44,6 - 20 = 24,6$ dakika olur.

c) $t = 90$ dak. sonra su sıcaklığı

$$T = 100 . e^{-0,005 \cdot 90} \Rightarrow T = 63,8\ ^\circ C$$

olarak elde edilir.

(9)

3) Seyreltme Problemleri

Başlangıçta içinde "a" lb (ağırlık birimi) tuz içeren "V_0" galon (hacim birimi) tuzlu su çözeltisi olan bir tank düşünelim. Galon başına "b" lb tuz içeren bir başka çözelti tanka "e" gal/dak hızla dökülüyor ve aynı zamanda karıştırılmış çözelti tanktan "f" gal/dak hızla boşaltılıyor. Problem, herhangi bir t anında tanktaki tuz miktarını bulmaktır.

Buna göre tuz miktarını veren denklem

> Herhangi bir t anında tanktaki çözeltinin hacmi $V_0 + (e-f)t$ 'dir.

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{f}{V_0 + (e-f)t} \cdot Q = b \cdot e$$

şeklindedir. (Q, herhangi bir anda tanktaki tuz miktarıdır; a: başlangıçta tanktaki tuz miktarıdır) ($Q_0 = a$)

ÖRNEK: Bir tankta başlangıçta 20 lb tuz içeren 100 gal bir çözelti vardır. $t=0$ anında tanka 5 gal/dak hızla saf su dökülmeye başlanıyor, aynı zamanda iyi karıştırılan karışım tanktan aynı hızla boşaltılıyor. Herhangi bir t anında tanktaki tuz miktarını bulunuz.

Çözüm: $a = 20$ lb, $V_0 = 100$ gal, $b = 0$ lb (saf su old.)
$e = 5$ ve $f = 5$ gal/dak

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{5}{100+(5-5) \cdot t} \cdot Q = 0.5 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{20} Q = 0$$

lineer denklemi bulunur. Bu denklemin çözümü $Q = Ce^{-t/20}$ dir. $t=0$ anında $Q = a = 20$ verilmiş. Bu değerleri yazarsak

$$20 = Ce^{-0/20} \Rightarrow C = 20 \text{ bulunur.}$$

Böylece $Q = 20 \cdot e^{-t/20}$ bulunur.

(10)

ÖRNEK : Bir tankta başlangıçta 1 lb tuz içeren 100 gal tuzlu çözelti vardır. $t=0$ anında tanka, galon başına 1 lb tuz içeren bir başka çözelti 3 gal/dak hızla dökülmeye başlanıyor; aynı zamanda iyi karıştırılan karışım tanktan aynı hızla boşaltılıyor.

a) Herhangi bir t anında tanktaki tuz miktarını

b) tanktaki karışımda 2 lb tuz bulunduğu zamanı

bulunuz.

(galon başına 1 lb tuz içeren başka çözelti

Çözüm : **a)** $a = 1$, $v_0 = 100$, $b = 1$, $e = f = 3$ gal/dak.

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{3}{100+(3-3)t} Q = 1.3 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + 0{,}03.Q = 3$$

$\Rightarrow$ $Q = c.e^{-0{,}03t} + 100$ ifadesi bulunur.

$t=0$ anında $Q = a = 1$ verildiğinden

$$1 = c.e^{-0{,}03.0} + 100 \Rightarrow c = -99$$ ve böylece

$$Q = -99.e^{-0{,}03t} + 100$$

bulunur.

b) $Q = 2$ olduğunda $t = ?$

$$2 = -99.e^{-0{,}03t} + 100 \Rightarrow e^{-0{,}03t} = \frac{98}{99}$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{0{,}03} \ln \frac{98}{99}$$

$\Rightarrow$ $t \cong 0{,}34$ dakika bulunur.

(11)

ÖRNEK : 50 galonluk bir tankta 10 galon saf su vardır. $t=0$ anında galon başına 1 lb tuz içeren bir çözelti 4 gal/dak hızla tanka dökülmeye başlanıyor; aynı zamanda iyi karıştırılan karışım, tanktan 2 gal/dak hızla boşaltılıyor.

a) Tankın taşacağı zamanı

b) Taşma anında tanktaki tuz miktarını bulunuz.

Çözüm : a) $a=0$ (Tankta başlangıçta sadece saf su olduğundan tuz miktarı sıfırdır.)

$b=1$, $e=4$; $f=2$ ve $v_0=10$ dur.

Herhangi bir t anında tanktaki çözeltinin hacmi

$v_0 + et - ft = 10 + 2t$ olarak verilir.

$10 + 2t = 50 \Rightarrow t = 20$ dak bulunur.

(t kadar süre sonra tankta 50 gal su olmalı.)

b) $$\frac{dQ}{dt} + \frac{2}{10+2t} Q = 1.4$$

denkleminin çözümü

$$Q = e^{-\int \frac{2}{10+2t}dt} \left[\int 4 e^{\int \frac{2\,dt}{10+2t}} dt + c \right]$$

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{40t + 4t^2 + C}{10+2t}$$

bulunur. $t=0$ 'da $Q=a=0$ verildiğinden

$$0 = \frac{40.0 + 4.0^2 + C}{10+2.0} \Rightarrow C=0$$ bulunur.

Taşma olduğunda Q 'yu arıyoruz ki bu an (a) çözümünden $t=20$ 'dir. Böylece

$$Q = \frac{40.20 + 4.20^2}{10 + 2.20} = 48 \text{ lb.}$$

bulunur.

4) Serbest Düşüş Problemleri

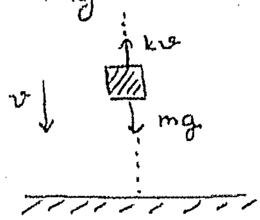
Sadece g yer çekimi ve cismin hızıyla orantılı hava direncinin etkisinde dikey olarak düşen m kütleli bir cismi göz önüne alalım. Burada yer çekimi ve kütlenin sabit kaldığı ve uygunluk için aşağı yön pozitif kabul edilecektir.

"F" cisme t anında etki eden net kuvvet ve "v" cismin t anındaki hızı olmak üzere elimizdeki problemde cisme etkiyen iki kuvvet vardır:

(1) yer çekiminden doğan, cismin "w" ağırlığı ile verilen ve "mg" 'ye eşit olan kuvvet

(2) hava direncinden doğan, $k \geq 0$ bir orantı sabiti olmak üzere, $-kv$ ile verilen kuvvettir. (Bu kuvvet hıza karşı old. negatiftir)

Sonuçta cismin üzerindeki net kuvvet $F = mg - kv$ dir.



$F = m\dfrac{dv}{dt}$ formülünde yerine yazılırsa

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \quad \cdots \cdots \quad (3.1)$$

olarak elde edilir. Eğer hava direnci ihmal edilirse veya yoksa $k = 0$ old.

$$\frac{dv}{dt} = g \quad \cdots \cdots \quad (3.2)$$

olur. Burada m, cismin kütlesi, g ise yerçekimi kuvvetidir.

Uyarı: (3.1) ve (3.2) denklemleri sadece verilen koşullar sağlandığı zaman geçerlidir. Bu denklemler, örneğin, eğer hava direnci hızla değil, hızın karesi ile orantılı ise veya yukarı yön pozitif seçilmişse geçerli değildir.

Limit Hız: Dikey olarak düşen bir cisme etkiyen hava direnç kuvvetiyle yer çekimi kuvvetinin eşit olduğu anda cismin hızı sabit hale gelir. Bu hıza limit hız denir. Yani cismin ulaşacağı en yüksek hızdır. $\boxed{v_l = \dfrac{mg}{k}}$ $(k > 0)$

13

ÖRNEK : 5 lb kütleli bir cisim, 100 ft yükseklikten sıfır ilk hızla düşürülüyor. Hava direnci olmadığını kabul ederek

a) Herhangi bir t anında cismin hızının ifadesini,

b) Herhangi bir t anında cismin konumunun ifadesini,

c) yere ulaşması için gereken zamanı bulunuz.

ÇÖZÜM :

a) Hava direnci olmadığından $\frac{dv}{dt} = g$ 'dir. Bu denklem lineerdir ve değişkenlerine ayrılabilirdir. Çözümü ise

$$v = gt + c$$

dir. $t=0$ iken $v=0$ dır. (Cismin ilk hızı sıfırdır).
Buradan $0 = g \cdot 0 + c \Rightarrow c = 0$ olur. ve böylece

$$v = gt$$

bulunur. $g = 32\ ft/sn^2$ kabul edilirse $v = 32t$ bulunur.
$\{1\ ft \cong 0,30\ mt.\quad g = 9,8\ m/sn^2\}$

b) $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 32t$ dir. Bu denklemin çözümü

$x = 16t^2 + c_1$ şeklindedir.

Ancak $t=0$ 'da $x=0$ dır. Böylece

$0 = 16 \cdot 0^2 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$ olur. Buradan

$x = 16t^2$ elde edilir.

c) $x = 100$ iken $t = ?$

$t = \sqrt{\frac{100}{16}} = 2,5$ sn bulunur. $\left\{ \begin{array}{l} x = 16t^2 \\ \Rightarrow t = \sqrt{\frac{x}{16}} \end{array} \right\}$

(14)

ÖRNEK : 2 lb kütleli bir cisim, sıfır ilk hızıyla bırakılıyor ve hızının karesi ile orantılı bir hava direncinin etkisinde kalıyor. Herhangi bir t anında cismin hızının ifadesini bulunuz.

Çözüm : Hava direncinden oluşan $-kv^2$ dır. Bu nedenle

$$mg - kv^2 = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow 2\frac{dv}{dt} = 64 - kv^2 \text{ dır.}$$

$\leftarrow$ ($m=2$, $g=32$ dır.)

Denklem düzenlenirse

$$\frac{2}{64-kv^2}\,dv - dt = 0 ,$$

denklemi elde edilir. Basit kesirler yardımıyla

$$\frac{2}{64-kv^2} = \frac{2}{(8-\sqrt{k}v)(8+\sqrt{k}v)} = \frac{\frac{1}{8}}{8-\sqrt{k}v} + \frac{\frac{1}{8}}{8+\sqrt{k}v}$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8-\sqrt{k}v} + \frac{1}{8+\sqrt{k}v}\right)dv - dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{8-\sqrt{k}v} + \frac{1}{8+\sqrt{k}v}\right)dv - \int dt = c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{\sqrt{k}}\ln|8-\sqrt{k}v| + \frac{1}{\sqrt{k}}\ln|8+\sqrt{k}v|\right] - t = c$$

$$\Rightarrow \frac{8+\sqrt{k}v}{8-\sqrt{k}v} = c_1 e^{8\sqrt{k}t} \qquad (c_1 = \pm e^{8\sqrt{k}c})$$

olarak yazılabilir. $t=0$'da $v=0$ verildiğinden $c_1 = 1$ bulunur ve hız

$$\frac{8+\sqrt{k}v}{8-\sqrt{k}v} = e^{8\sqrt{k}t} \Rightarrow v = \frac{8e^{8\sqrt{k}t} - 8}{\sqrt{k} + v e^{8\sqrt{k}t}}$$

şeklindedir.

(15)

ÖRNEK : 64 lb ağırlığında bir cisim 10 ft/sn ilk hızla 100 ft yükseklikten atılıyor. Hava direncinin cismin hızı ile orantılı olduğunu kabul edelim. Eğer limit hızın 128 ft/sn olduğu biliniyorsa

a) Herhangi bir t anında cismin hızının ifadesini

b) Herhangi bir t anında cismin konumunun ifadesini

bulunuz. { 1 lb = 0,45 kg , 1 slug = 14,6 kg }

Çözüm :

a) Burada $w = 64$ lb, $w = mg$ olduğundan

$mg = 64 \Rightarrow m.32 = 64 \Rightarrow m = 2$ slug bulunur.

$v_l = 128$ ft/sn verildiğinden $128 = \frac{64}{k} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$ çıkar.

Bu değerleri (3.1) formülünde yerine yazarsak

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{4} v = 32$$

lineer dif. denklemi elde edilir. Bunun çözümü ise

$$v = c e^{-\frac{t}{4}} + 128$$

bulunur. $t=0$ 'da $v=10$ verildiğinden

$$10 = c e^{-\frac{0}{4}} + 128 \Rightarrow c = -118 \text{ bulunur.}$$

Herhangi bir t anındaki hız

$$v = -118 . e^{-t/4} + 128$$

ile verilir.

b) x yerdeğiştirme olmak üzere $v = \frac{dx}{dt}$

olduğundan $\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -118 . e^{-t/4} + 128$

yazılabilir. Buradan $x = 472 . e^{-t/4} + 128t + c_1$ bulunur.

$t=0$ 'da $x=0$ old. $c_1 = -472$ ve böylece $x = 472 . e^{-t/4} + 128t - 472$ dir.

ÖRNEK ! (16) m kütleli bir cisim, v_0 ilk hızıyla yukarı doğru dikey olarak fırlatılıyor. Eğer cisim, hızıyla orantılı bir hava direncinin etkisinde ise

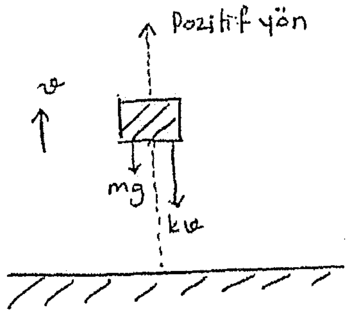
a) Hareketin denklemini

b) Herhangi bir t anındaki hızın ifadesini

c) Cismin maksimum yüksekliğe ulaşması için gereken zamanı bulunuz.

ÇÖZÜM : **a)** Cisim üzerinde iki kuvvet cismin hızına karşı koyacaktır. Bu kuvvetler mg yer çekimi ve kv hava direnci kuvvetidir. Her ikisi de aşağı doğru ve negatif yönde hareket ettiğinden cismin üzerindeki net kuvvet $-mg-kv$ dir. Böylece

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g \quad \dots\dots (*)$$



denklemi bulunur.

b) (*) denklemi lineerdir ve çözümü

$$v = c\, e^{-(k/m).t} - mg/k$$

dır. $t=0$ 'da $v = v_0$ dır. Buradan

$$v_0 = e^{-(k/m)t} - (mg/k) \Rightarrow c = v_0 + (mg/k) \quad \text{olur.}$$

Herhangi bir t anında cismin hızı

$$v = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right).e^{-(k/m)t} - \frac{mg}{k} \quad \dots\dots (*)(*)$$

olarak bulunur.

c) cisim $v=0$ olduğunda maksimum yüksekliğe çıkar. Böylece $v=0$ iken t'yi arıyoruz. (*)(*)'da $v=0$ yazılırsa

$$0 = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) e^{-(k/m).t} - \frac{mg}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-(k/m)t} = \frac{1}{1+\frac{v_0 k}{mg}} \Rightarrow -(k/m)\,t = \ln\left(\frac{1}{1+\frac{v_0 k}{mg}}\right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{v_0 k}{mg}\right)$$

elde edilir.

5) Elektrik Devreleri

Bir R direnci (ohm), bir L indüktörü (henry) ve bir elektromotiv kaynak (emf) E (Volt)'den oluşan basit bir RL devresinde I akım miktarını veren temel denklem

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L} \qquad \text{(Şekil 1)}$$

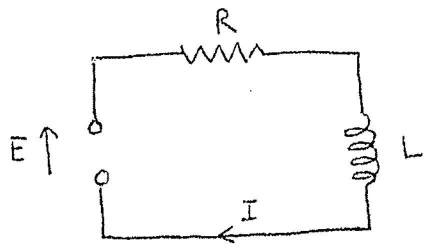
dır. Bir direnç, bir C sığacı (farad) ve bir emf'den oluşan ve İndüktans içermeyen bir RC devresi için sığaç üzerindeki q elektriksel yükünü (coulomb) veren denklem

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{E}{R} \qquad \text{(Şekil 2)}$$

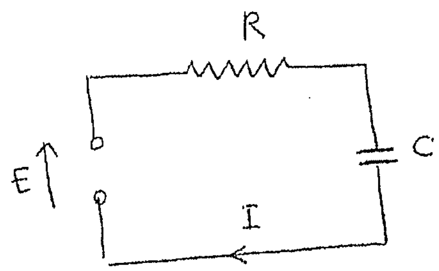
olur. q ve I arasındaki bağıntı ise

$$I = \frac{dq}{dt}$$

ile verilir.



Şekil 1



Şekil 2

ÖRNEK : Bir RL devresinde 5 volt emf, 50 ohm direnç ve 1 henry indüktans vardır. İlk akım sıfır ise herhangi bir t anında devredeki akımı bulunuz.

Çözüm : Burada $E=5$, $R=50$ ve $L=1$ dır. Buradan

$$\frac{dI}{dt} + 50I = 5 \Rightarrow I = ce^{-50t} + \frac{1}{10}$$ bulunur.

$t=0$'da $I=0$ verildiğinden $0 = ce^{-50.0} + \frac{1}{10} \Rightarrow c = -\frac{1}{10}$

olup herhangi bir t anındaki akım $I = -\frac{1}{10}e^{-50t} + \frac{1}{10}$ dır.

ÖRNEK : Bir RC devresinde emf (volt) $400\cos 2t$, (18) direnç 100 ohm ve sığaç 10^{-2} farad olarak veriliyor. Başlangıçta sığaç üzerinde hiç yük yoktur. Herhangi bir t anındaki akımı bulunuz.

Çözüm : Önce q yükünü bulup sonra akımı bulalım. Burada $E = 400\cos 2t$, $R = 100$ ve $C = 10^{-2}$ dır. Böylece

$$\frac{dq}{dt} + q = 4\cos 2t$$

olur. Bu denklem lineerdir ve çözümü

$$q = ce^{-t} + \frac{8}{5}\sin 2t + \frac{4}{5}\cos 2t$$

biçimindedir. $t=0$ 'da $q=0$ verildiğinden

$$0 = ce^{-0} + \frac{8}{5}\sin 2.0 + \frac{4}{5}\cos 2.0$$

$$\Rightarrow \quad c = -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \quad q = -\frac{4}{5}e^{-t} + \frac{8}{5}\sin 2t + \frac{4}{5}\cos 2t$$

bulunur. $I = \frac{dq}{dt}$ olduğundan

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{4}{5}e^{-t} + \frac{16}{5}\cos 2t - \frac{8}{5}\sin 2t$$

elde edilir.

4. BÖLÜM

YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLER

3.1. Giriş :

n-yinci mertebeden bir lineer dif. denklem

$$b_n(x)\cdot y^{(n)} + b_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots + b_2(x)\,y'' + b_1(x)\,y' + b_0(x)\cdot y = g(x) \quad \dots (4.1)$$

biçimindedir. Burada $g(x)$ ve $b_j(x)$ $(j=0,1,2,\dots,n)$ katsayıları sadece x değişkenine bağlıdır. Bir başka deyişle y'ye veya y nin herhangi bir türevine bağlı değillerdir.

Eğer $g(x) \equiv 0$ ise o zaman (4.1) denklemi homojendir. Aksi durumda homojen değildir. Eğer (4.1)'deki tüm $b_j(x)$ katsayıları sabitse bir lineer dif. denklem sabit katsayılıdır. Eğer bu katsayılardan biri veya daha fazlası sabit değilse (4.1) denklemi değişken katsayılıdır.

Şimdi (4.1) lineer dif. denklemini ve aşağıdaki n tane başlangıç koşulu ile verilen başlangıç-değer problemini düşünelim:

$$y(x_0) = C_0, \quad y'(x_0) = C_1, \quad y''(x_0) = C_2, \dots, \; y^{(n-1)}(x_0) = C_{n-1} \quad \dots (4.2)$$

Eğer $g(x)$ ve $b_j(x)$ $(j=0,1,2,\dots,n)$ fonksiyonları x_0'ı içeren bir I aralığında sürekli ise ve I'da $b_n(x) \neq 0$ ise o zaman (4.1) ve (4.2) ile verilen başlangıç-değer probleminin I'da tanımlı tek bir çözümü vardır.

$b_n(x) \neq 0$ olmak üzere (4.1) denklemi $b_n(x)$ ile bölünürse

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)\,y'' + a_1(x)\cdot y' + a_0(x)\cdot y = \phi(x) \quad \dots (4.3)$$

bulunur.

$L(y)$ operatörünü, $a_i(x)$ $(i=0,1,2,\dots,n-1)$ fonksiyonu verilen aralıkta sürekli olmak üzere

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y \quad \dots (4.4)$$

ile tanımlayalım. O zaman (4.3) denklemi

$$L(y) = \phi(x) \quad \dots \dots \dots \quad (4.5)$$

olarak yazılabilir ve özel durumda bir lineer homojen denklem

$$L(y) = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (4.6)$$

halinde ifade edilebilir.

<u>TANIM:</u> (<u>Lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık</u>):

Bir $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ fonksiyon kümesi verilsin. Eğer $x \in [a,b]$ için

$$c_1 \cdot y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad \dots \dots \quad (4.7)$$

eşitliğini sağlayan $c_1, c_2, \dots, c_n$ 'lerin hepsi sıfır değilse $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ fonksiyon kümesi $[a,b]$ aralığı üzerinde lineer bağımlıdır.

<u>ÖRNEK</u>: $\{x, 5x, 1, \sin x\}$ kümesi $[-1,1]$ üzerinde lineer bağımlıdır, çünkü

$$c_1 x + c_2 5x + c_3 \cdot 1 + c_4 \cdot \sin x = 0$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $c_1 = -5$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$ ve $c_4 = 0$ sabitleri vardır. ■

Eğer (4.7) eşitliğinin sağlanması yalnızca $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ olması halinde oluyorsa $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ fonksiyonlar kümesi $[a,b]$ aralığında lineer bağımsızdır.

3.2. <u>LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN TEMEL TEOREMİ</u>

<u>TEOREM</u> n-yinci mertebeden lineer homojen $L(y) = 0$ diferensiyel denkleminin birbirinden farklı m tane çözümü $y_1, y_2, \dots, y_m$ olsun. $(m \leq n)$. Bu durumda $c_1, c_2, \dots, c_m$

3

katsayıları keyfi sabit sayılar olmak üzere,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m$$

fonksiyonu da aynı denklemin bir çözümü olur.

TANIM : (Lineer kombinasyon) : $y_1, y_2, \dots, y_m$ herhangi m tane fonksiyon ve $c_1, c_2, \dots, c_m$ herhangi keyfi sabit sayılar olsun. Bu durumda

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m$$

ifadesine $y_1, y_2, \dots, y_m$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonu denir.

Bu tanımdan yararlanarak yukarıdaki teorem şöyle de ifade edilebilir : " Bir lineer homojen dif. denklemin çözümlerinin lineer kombinasyonu da bir çözümdür". Bu teorem, lineer homojen dif. denklemlerin Temel Teoremidir.

TANIM (Wronskian Determinantı) : $y_1, y_2, \dots, y_n$ gibi n tane fonksiyon verilsin ve bu fonksiyonlar her $x \in [a,b]$ için $(n-1)$-inci mertebeden türeve sahip olsun. Bu durumda $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarının wronskian'ı

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantıdır.

Eğer bu determinant sıfıra eşitse $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları lineer bağımlı olur, sıfırdan farklıysa lineer bağımsız olur.

4

Eğer $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonlarının herbiri

$$b_n(x)\, y^{(n)} + b_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + b_1(x)\, y' + b_0(x)\, y = 0 \quad . \; . \; . \quad (4.8)$$

denkleminin birer çözümü ise ve bu fonksiyonlar aynı zamanda kendi aralarında lineer bağımsız iseler bunların lineer kombinasyonu olan

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.9)$$

fonksiyonu da aynı denklemin bir çözümüdür.

(4.9) ile verilen y_h fonksiyonu verilen homojen denklemin genel çözümü veya homojen çözümüdür. Halbuki amacımız sadece (4.8) denkleminin genel çözümünü bulmak değil (4.1) denkleminin genel çözümünü bulmaktır. Bunun için değişik metotlar geliştirilmiş ve böylece (4.1) denkleminin bir özel çözümü olan y_p bulunabilmiştir. Ayrıca ifade edelim ki, y_h çözümü (4.8) denkleminin mertebesine eşit sayıda keyfi sabit sayı içerdiği halde, y_p çözümü herhangi bir sabit sayı içermez. Sonuç olarak $y = y_h + y_p$ fonksiyonu (4.1) denkleminin genel çözümüdür.

Öyleyse, homojen olmayan bir dif. denklemin genel çözümünü bulmak için önce denklemin homojen kısminin y_h homojen çözümünü bulmak, sonra denklemin y_p özel çözümünü bulmak ve sonunda bunları toplayıp $y = y_h + y_p$ şeklinde yazmak gerekmektedir.

ÖRNEK : $\{\sin 3x, \cos 3x\}$ kümesinin wronskianı bulunuz.

Çözüm :

$$W = \begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x \\ (\sin 3x)' & (\cos 3x)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x \\ 3\cos 3x & -3\sin 3x \end{vmatrix}$$

$$= -3\sin^2 3x - 3\cos^2 3x = -3(\sin^2 3x + \cos^2 3x) = -3$$

ÖRNEK : $\{x, x^2, x^3\}$ kümesinin wronskianını bulunuz.

Çözüm :

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ x' & (x^2)' & (x^3)' \\ x'' & (x^2)'' & (x^3)'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3$$

ÖRNEK : $y'' + 9y = 0$ denkleminin iki çözümünün $y_1 = \sin 3x$ ve $y_2 = \cos 2x$ olduğu biliniyorsa genel çözümünü bulunuz.

Çözüm : y_1 ve y_2 nin wronskianı -3 tür ve sıfırdan farklıdır. O halde lineer bağımsız olduğundan verilen denklemin genel çözümü

$$y = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 2x$$

olur.

ÖRNEK : $y'' - 2y' + y = 0$ denkleminin iki çözümü e^{-x} ve $5e^{-x}$ tir. Genel çözüm $y = c_1 e^{-x} + c_2 5e^{-x}$ midir ?

Çözüm :

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & 5e^{-x} \\ (e^{-x})' & (5e^{-x})' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & 5e^{-x} \\ -e^{-x} & -5e^{-x} \end{vmatrix} = 0$$

hesaplanır. Böylece e^{-x} ve $5e^{-x}$ lineer bağımlıdır. Dolayısıyla $y = c_1 e^{-x} + c_2 5e^{-x}$ fonksiyonu denklemde yerine yazılırsa sağlamaz.

NOT: $W \neq 0$ ise genel çözüm olur.
$W = 0$ ise denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir.

6

4.3. SABİT KATSAYILI HOMOJEN LİNEER DİF. DENKLEMLER

Karakteristik Denklem : a, b ve c reel sabitler olmak üzere

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \ldots \quad (4.10)$$

dif. denklemine

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

şeklinde bir karakteristik denklem karşılık gelir.

ÖRNEK : $y'' + 3y' - 4y = 0$ dif. denkleminin karakteristik denklemi $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ dır.

Genel Çözüm : $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ karakteristik denkleminin kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

dır. Burada $\Delta = b^2 - 4ac$ diskriminantının alacağı 3 farklı değere göre kökler reel veya kompleks olabilir. Buna göre

I. Durum : $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise λ_1 ve λ_2 reel ve farklıdır. Bu durumda dif. denklemin genel çözümü

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad \ldots \quad (4.12)$$

olur. $\lambda_2 = -\lambda_1$ özel durumunda (4.12) çözümü

$$y = k_1 \cosh \lambda_1 x + k_2 \sinh \lambda_2 x$$

olarak yeniden yazılabilir.

II. Durum : $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise yani $\lambda_1 = \lambda_2$ ise iki lineer bağımsız çözüm $e^{\lambda_1 x}$ ve $x e^{\lambda_2 x}$ tir. Genel çözüm

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} \quad \ldots \quad (4.13)$$

olur.

(7)

III. Durum: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise λ_1 ve λ_2 komplekstir. Burada $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ve $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ olup iki eşlenik kompleks sayı elde edilir.

Burada iki lineer bağımsız çözüm $e^{(\alpha+i\beta)x}$ ve $e^{(\alpha-i\beta)x}$ dır ve böylece dif. denklemin genel çözümü

$$y = k_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + k_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

şeklindedir. Ancak dif. denklemin genel çözümünün bu şekilde verilmesi genel olarak pek uygun olmadığından Euler formülü adı verilen

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

bağıntısı kullanılarak genel çözüm

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \quad \ldots \quad (4.14)$$

şeklinde verilebilir.

UYARI: Yukarıdaki çözümler, dif. denklem lineer olmadığında veya sabit katsayılı olmadığında geçerli değildir. Örneğin $y'' - x^2 y = 0$ denklemini düşünelim. Karakteristik denklemin kökleri $\lambda_1 = x$ ve $\lambda_2 = -x$ dir. Ancak çözüm

$$y = c_1 e^{(x).x} + c_2 e^{(-x).x} = c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2}$$

değildir. (Değişken katsayılılar ileride verilecektir)

ÖRNEK: $y'' - y' - 2y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Karakteristik denklem $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ şeklinde olup $(\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = 2$ bulunur. Kökler reel ve farklı olduğundan I. Duruma göre çözüm

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

olur.

ÖRNEK : $y'' - 5y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Karakteristik denklem $\lambda^2 - 5 = 0$ dır. $\lambda_1 = +\sqrt{5}$ ve $\lambda_2 = -\sqrt{5}$ olup çözüm

$$y = c_1 e^{\sqrt{5}x} + c_2 e^{-\sqrt{5}x}$$

dır.

ÖRNEK : $y'' - 8y' + 16y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 4.16 = 0$ olup çakışık iki kök vardır. $\left\{\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a}\right\}$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 4$$

Kökler reel ve eşit. old. II. Duruma göre çözüm

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$$

olur.

ÖRNEK : $y'' - 6y' + 25y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.25}}{2} = 3 \pm \frac{\sqrt{-64}}{2}$$

$$= 3 \pm \frac{\sqrt{64i^2}}{2} = 3 \pm 4i$$ old. III. Duruma göre

$$y = c_1 e^{3x} . \cos 4x + c_2 e^{3x} . \sin 4x$$

olur.

ÖRNEK : $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda + 2) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +1$ ve $\lambda_3 = -2$ old. genel çözüm

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-2x}$$

dır.

9

ÖRNEK : $y^{(IV)} - 9y'' + 20y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^4 - 9\lambda^2 + 20 = 0 \Rightarrow m^2 - 9m + 20 = 0 \quad (\lambda^2 = m)$

$\Rightarrow m = 4$ ve $m = 5 \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -\sqrt{5},\ \lambda_4 = \sqrt{5}$.

$$\Rightarrow y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{\sqrt{5}x} + c_4 e^{-\sqrt{5}x}$$

ÖRNEK : $y^{V} - 2y^{IV} + y''' = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^5 - 2\lambda^4 + \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = 1$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 x^2 e^{0x} + c_4 e^{1\cdot x} + c_5 x e^{1\cdot x}$$

ÖRNEK : $y''' - 6y'' + 2y' + 36y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 2\lambda + 36 = 0$ karakteristik denkleminde $\lambda = -2$ yazılırsa denklemi sağlar. Bu nedenle $(\lambda+2)$ terimi bu karakteristik denklemin bir çarpanı olur

$$\begin{array}{l|l}
\lambda^3 - 6\lambda^2 + 2\lambda + 36 & \lambda + 2 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{\lambda^3 + 2\lambda^2} & \lambda^2 - 8\lambda + 18 \\
\quad -8\lambda^2 + 2\lambda & \\
-\ \underline{-8\lambda^2 - 16\lambda} & \\
\qquad +18\lambda + 36 & \\
\quad -\ \underline{18\lambda + 36} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 2\lambda + 36 = (\lambda+2)\cdot(\lambda^2 - 8\lambda + 18)$

$\Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 18 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{-(-8) \mp \sqrt{64-72}}{2} = 4 \mp i\sqrt{2}$

olup genel çözüm

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{4x} \cdot \cos\sqrt{2}x + c_3 e^{4x} \cdot \sin\sqrt{2}x$$

10

ÖRNEK : $9y'' + 6y' + 5y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 0$
denklemini çözünüz.

Çözüm : $9\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \mp \sqrt{36 - 4.9.5}}{18} = \frac{-6 \mp \sqrt{-144}}{18}$$

$$= \frac{-6 \mp \sqrt{144 i^2}}{18} = -\frac{1}{3} \mp \frac{2}{3} i$$

olduğundan genel çözüm

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{3}x} \cdot \cos \frac{2}{3} x + c_2 e^{-\frac{1}{3}x} \sin \frac{2}{3} x$$

bulunur.

$y(0) = 6$ olduğundan $x=0$ ve $y=6$ değerleri için

$$6 = c_1 e^0 \underbrace{\cos 0}_{=1} + c_2 e^0 \underbrace{\sin 0}_{=0} \Rightarrow \boxed{c_1 = 6}$$

$y'(0) = 0$ olduğundan $x=0$ ve $y=0$ değerleri için
önce y' türevini hesaplayalım :

$$y' = -\frac{1}{3} c_1 e^{-\frac{1}{3}x} \cdot \cos \frac{2}{3} x + c_1 e^{-\frac{1}{3}x} \left(-\frac{2}{3} \sin \frac{2}{3} x\right)$$

$$- \frac{1}{3} c_2 e^{-\frac{1}{3}x} \sin \frac{2}{3} x + c_2 e^{-\frac{1}{3}x} \cdot \left(\frac{2}{3} \cos \frac{2}{3} x\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} c_1 + c_2 \cdot \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \cdot 6 + c_2 \cdot \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = 3}$$

olup çözüm

$$y = 6 e^{-\frac{1}{3}x} \cos \frac{2}{3} x + 3 e^{-\frac{1}{3}x} \sin \frac{2}{3} x$$

olur.

(11)

4.4. SABİT KATSAYILI, HOMOJEN OLMAYAN LİNEER DİF. DENKLEMLER

n-yinci mertebeden sabit katsayılı ve homojen olmayan bir lineer dif. denklem

$$b_n(x).\,y^{(n)} + b_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + b_1(x)\,y' + b_0(x)\,y = g(x) \quad \dots (4.15)$$

şeklindeydi. Böyle bir denklemin genel çözümü $y = y_h + y_p$ şeklinde veriliyordu. Eğer $g(x)=0$ ise denklemin homojen çözümü y_h idi ve bundan önceki kısımda homojen bir dif. denklemin nasıl çözüleceğini gördük. Şimdi ise amacımız $g(x) \neq 0$ iken yani homojen olmayan bu denklemin bir özel çözümü olan ve keyfi sabit sayı içermeyen y_p çözümünü ve sonuç olarak da (4.15) denkleminin genel çözümünü bulmaktır.

y_p nin bulunması ile ilgili olarak birkaç metot geliştirilmiştir. Bu metotlardan "Belirsiz katsayılar Metodu" ve "Parametrelerin değiştirilmesi Metodu" nu inceleyeceğiz.

A) BELİRSİZ KATSAYILAR METODU

Metodun Basit Hali

Belirsiz katsayılar metodu, yalnızca eğer $g(x)$ ve tüm türevleri $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ ile gösterilen aynı sonlu lineer bağımsız fonksiyonlar kümesi cinsinden yazılabiliyorsa uygulanabilir. Metoda $A, B, C, \dots$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y_p = A\,y_1(x) + B\,y_2(x) + C\,y_3(x) + \dots + K\,y_n(x)$$

biçiminde bir özel çözüm kabul edilerek başlanır. Daha sonra bu çözüm dif. denklemde yerine yazılıp benzer terimlerin katsayıları eşitlenerek $A, B, C, \dots$ sabitleri bulunur.

<u>I. Durum</u> : $g(x) = P_n(x)$ ise

(Yani eşitliğin sağ tarafı n-yinci dereceden bir polinom ise)

$$y_p = AX^n + BX^{n-1} + CX^{n-2} + \dots + KX + M$$

biçiminde bir çözüm kabul edilir.

<u>II. Durum</u> : $g(x) = ke^{ax}$ ise (a ve k sabit)

$$y_p = Ae^{ax}$$

biçiminde bir çözüm kabul edilir.

<u>III. Durum</u> : $g(x) = k_1 \sin\beta x + k_2 \cos\beta x$ ise (k_1, k_2, β sabit)

$$y_p = A\sin\beta x + B\cos\beta x$$

biçiminde bir özel çözüm kabul edilir.

<u>Uyarı</u> ! k_1 ve k_2 'den birisi sıfır bile olsa III. durumdaki y_p geçerlidir. Mesela $g(x) = k_1 \sin\beta x$ olsa bile

$$y_p = A\sin\beta x + B\cos\beta x$$

dır.

<u>Genelleştirmeler</u> :

Eğer $g(x)$ terimi, yukarıda verilen 3 farklı fonksiyon türünün herhangi ikisinin veya hepsinin birbiriyle çarpımı ise, y_p bunlara karşılık kabul edilen çözümlerin çarpımı olarak alınır ve bunlar birleştirilir. Örneğin

$g(x) = e^{ax} \cdot P_n(x)$ ise (Üstel ile polinomun çarpımı ise)

$$y_p = e^{ax}(AX^n + BX^{n-1} + \dots + KX + M)$$

kabul edilir. Eğer

$g(x) = P_n(x) \cdot \sin\beta x$ ise

$$y_p = (AX^n + \dots + KX + M)\sin\beta x + (AX^n + \dots + KX + M)\cos\beta x$$

kabul edilir.

13

Değişiklikler

Eğer keyfi sabitler göz ardı edildiğinde, kabul edilen y_p çözümünün herhangi bir terimi y_h nin de bir terimi ise, o zaman kabul edilen y_p çözümü x^m ile çarpılarak değiştirilmelidir. Burada m sayısı, terimlerdeki farklılığı sağlayacak en küçük pozitif tam sayıdır.

ÖRNEK: $y'' - y' - 2y = 4x^2$ denklemini çözünüz.

Çözüm: öncelikle denklemin homojen çözümünü bulalım.

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ ve } \lambda_2 = 2.$$

$\Rightarrow y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ homojen çözümü bulunur.

Şimdi de y_p özel çözümünü bulalım:

$g(x) = 4x^2$ bir polinom old. I. Duruma göre

$y_p = Ax^2 + Bx + C$ kabul edelim. Böylece

$y_p' = 2Ax + B$ ve

$y_p'' = 2A$

olur. y_p, y_p' ve y_p'' ifadeleri verilen dif. denklemde yerine yazılırsa

$$y'' - y' - 2y = 4x^2$$

$$\Rightarrow 2A - (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-2A)}_{=4}x^2 + (\underbrace{-2A-2B}_{=0})x + (\underbrace{2A-B-2C}_{=0}) = 4x^2 + 0x + 0$$

Buradan $A = -2$, $B = 2$, $C = -3$ bulunur. Böylece

$y_p = -2x^2 + 2x - 3$ özel çözümü bulunur. Dolayısıyla genel çözüm

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$$

olur.

ÖRNEK : $y'' - y' - 2y = 8e^{3x}$ denkleminin çözünüz.

Çözüm : Önceki sorudan $y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ bulunmuştu.

$g(x) = 8e^{3x}$ old. II. Duruma göre

$$y_p = Ae^{3x}$$

kabul edelim. Buradan

$$y_p' = 3Ae^{3x} \quad \text{ve}$$

$$y_p'' = 9Ae^{3x}$$

bulunur. Bu ifadeler verilen dif. denklemde yerine yazılırsa,

$$9Ae^{3x} - 3Ae^{3x} - 2Ae^{3x} = 8e^{3x}$$

$$\Rightarrow 4Ae^{3x} = 8e^{3x} \Rightarrow 4A = 8 \Rightarrow A = 2$$

$\Rightarrow$ $y_p = Ae^{3x} = 2e^{3x}$ özel çözümü ve böylece

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + 2e^{3x}$$

genel çözümü bulunur.

ÖRNEK : $y'' - y' - 2y = 3\sin 2x$ denkleminin çözünüz.

Çözüm : $y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ bulunmuştu.

$g(x) = 3\sin 2x$ old. III. duruma göre

$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$ kabul edelim. Buradan

$$y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$$

$$y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$$

ifadeleri verilen denklemde yerine yazılırsa

$$(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x) - (2A\cos 2x - 2B\sin 2x) - 2(A\sin 2x + B\cos 2x) = 3\sin 2x$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-6A+2B)}_{=3}\sin 2x + \underbrace{(-6B-2A)}_{=0}\cos 2x = 3\cdot\sin 2x + 0\cdot\cos 2x$$

$$\Rightarrow A = \frac{19}{20}, \quad B = -\frac{19}{60} \quad \Rightarrow \quad y_p = \frac{19}{20}\sin 2x - \frac{19}{60}\cos 2x \quad \text{olup}$$

genel çözüm

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + \frac{19}{20}\sin 2x - \frac{19}{60}\cos 2x$$

dır.

15

ÖRNEK : $y' - 5y = 2e^{5x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 5$ olup $y_h = c_1 e^{5x}$ homojen çözümü bulunur.

$g(x) = 2e^{5x}$ olduğundan y_p nin tahmini II. Duruma göre $y_p = Ae^{5x}$ olur. Fakat y_p ile y_h aynı biçimde olduğundan y_p 'yi değiştirmemiz gerekir. y_p 'yi x ile çarparsak $(m=1)$

$$y_p = Axe^{5x}$$

elde edilir. Bu ifadenin y_h ile hiçbir ortak terimi olmadığından özel çözüm olarak kabul edilebilir. Türev alınırsa

$$y_p' = Ae^{5x} + 5Axe^{5x}$$

olup verilen dif. denklemde yerine yazılırsa

$$\left(Ae^{5x} + 5Axe^{5x}\right) - 5\left(Axe^{5x}\right) = 2e^{5x}$$

$$\Rightarrow \quad Ae^{5x} = 2e^{5x}$$

$$\Rightarrow \quad A = 2$$

bulunur. Böylece

$$y_p = 2xe^{5x}$$

özel çözümü elde edilir. Dolayısıyla genel çözüm

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{5x} + 2xe^{5x}$$

bulunur.

(16)

ÖRNEK : $y'' + 4y = 5\cos 2x$ denkleminin çözünüz.

Çözüm : $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i = 0 \pm 2i$

$\Rightarrow y_h = c_1 e^{0x}\cos 2x + c_2 e^{0x}\sin 2x$

$\Rightarrow y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

homojen çözümü elde edilir.

Şimdi de y_p özel çözümünü bulalım. Öncelikle

$$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$$

kabul edelim. Bu kabuldeki $\cos 2x$ ile y_h çözümündeki $\cos 2x$ aynı biçimde old. y_p yi değiştirmeliyiz. Bu nedenle y_p 'yi x ile çarparsak

$$y_p = Ax\sin 2x + Bx\cos 2x$$

olur. Türev alınırsa

$$y_p' = A\sin 2x + Ax.2\cos 2x + B\cos 2x + Bx(-2\sin 2x)$$

$$\Rightarrow y_p'' = 2A\cos 2x + A.2\cos 2x + Ax(-4\sin 2x) + (-2B\sin 2x) + B(-2\sin 2x) + Bx(-4\cos 2x)$$

olup bunlar verilen dif. denklemde yerlerine yazılırsa,

$$[4A\cos 2x - 4Ax\sin 2x - 4B\sin 2x - 4Bx\cos 2x] + 4[Ax\sin x + Bx\cos 2x] = 5\cos 2x$$

$$\Rightarrow \underbrace{4A}_{=5}\cos 2x - \underbrace{4B}_{=0}\sin 2x = 5\cos 2x + 0.\sin 2x$$

$$\Rightarrow A = \frac{5}{4} \quad \text{ve} \quad B = 0$$

$$\Rightarrow y_p = Ax\sin 2x + Bx\cos 2x = \frac{5}{4}x\sin 2x + 0$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_p = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{5}{4}x\sin 2x$$

genel çözümü bulunur.

(17)

ÖRNEK : $y''' - y' = 3e^{2x} + 4e^{-x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = +1$

$\Rightarrow \quad y_h = c_1 e^{0x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}$ homojen çözümü bulunur.

Şimdi y_p özel çözümünü bulalım :

Eğer $y_p = Ae^{2x} + Be^{-x}$ kabul edilirse y_p'deki Be^{-x} ile y_h'deki $c_3 e^{-x}$ aynı biçimde olur. O zaman Be^{-x} terimi x ile çarpılmalıdır. Yani

$$y_p = Ae^{2x} + Bxe^{-x} \quad \text{kabul edilirse}$$

$$y_p' = 2Ae^{2x} + Be^{-x} - Bxe^{-x}$$

$$y_p'' = 4Ae^{2x} - Be^{-x} - (Be^{-x} + Bx(-e^{-x}))$$
$$= 4Ae^{2x} - 2Be^{-x} + Bxe^{-x}$$

$$y_p''' = 8Ae^{2x} + 2Be^{-x} + (Be^{-x} + Bx(-e^{-x}))$$
$$= 8Ae^{2x} + 3Be^{-x} - Bxe^{-x}$$

bulunur. Bu terimler verilen denklemde yerlerine yazılırsa

$$(8Ae^{2x} + 3Be^{-x} - Bxe^{-x}) - (2Ae^{2x} + Be^{-x} - Bxe^{-x}) = 3e^{2x} + 4e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad 6Ae^{2x} + 2Be^{-x} = 3e^{2x} + 4e^{-x}$$

$\Rightarrow \quad 6A = 3$ ve $2B = 4 \Rightarrow A = 1/2$ ve $B = 2$ olup

$y_p = \frac{1}{2} e^{2x} + 2xe^{-x}$ özel çözümü ve böylece

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + \frac{1}{2} e^{2x} + 2xe^{-x}$$

genel çözümü elde edilir.

(18)

<u>ÖRNEK</u>: $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}$ denk. çözünüz.

<u>Çözüm</u>: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = 3$ olacağından

$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ homojen çözümü bulunur.

Şimdi y_p özel çözümünü araştıralım:

$g(x) = 2xe^{-x}$ ifadesi bir polinom ile üstelin çarpımı old.

$$y_p = (Ax+B)\cdot e^{-x}$$

kabul edelim. Böylece

$$y_p' = -Axe^{-x} + Ae^{-x} - Be^{-x}$$

$$y_p'' = Axe^{-x} - 2Ae^{-x} + Be^{-x}$$

$$y_p''' = -Axe^{-x} + 3Ae^{-x} - Be^{-x}$$

türevleri, verilen dif. denklemde yerlerine yazılırsa

$$(-Axe^{-x} + 3Ae^{-x} - Be^{-x}) - 6(Axe^{-x} - 2Ae^{-x} + Be^{-x})$$
$$+ 11(-Axe^{-x} + Ae^{-x} - Be^{-x}) - 6(Axe^{-x} + Be^{-x}) = 2xe^{-x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-24A}_{=2}xe^{-x} + (\underbrace{26A - 24B}_{=0})e^{-x} = 2xe^{-x} + 0\cdot e^{-x}$$

$$\Rightarrow A = \frac{-1}{12}, \quad B = \frac{-13}{144}$$

$$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{12}xe^{-x} - \frac{13}{144}e^{-x}$$

özel çözümü ve böylece

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - \frac{1}{12}xe^{-x} - \frac{13}{144}e^{-x}$$

genel çözümü bulunur.

ÖRNEK : $y' - 5y = 3e^x - 2x + 1$ denklemini çözünüz. (19)

Çözüm : $\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_h = c_1 e^{5x}$ homojen çözümü elde edilir.

$g(x) = 3e^x - 2x + 1$ ifadesi üstel fonk. ile polinomun toplamı olduğundan

$y_p = Ae^x + (Bx + C)$ kabul edilirse

$y_p' = Ae^x + B$

olup verilen denklemde yerine yazılırsa

$Ae^x + B - 5(Ae^x + Bx + C) = 3e^x - 2x + 1$

$\Rightarrow -4Ae^x - 5Bx + (B - 5C) = 3e^x - 2x + 1$

$\Rightarrow -4A = 3, \quad -5B = -2, \quad B - 5C = 1$

$\Rightarrow A = -3/4 \qquad B = 2/5 \qquad C = -3/25$

$\Rightarrow y_p = -\frac{3}{4} e^x + \frac{2}{5} x - \frac{3}{25}$

özel çözümü ve böylece

$y = y_h + y_p = c_1 e^{5x} - \frac{3}{4} e^x + \frac{2}{5} x - \frac{3}{25}$

genel çözümü elde edilir.

20

B) PARAMETRELERİN DEĞİŞTİRİLMESİ METODU

Parametrelerin değiştirilmesi, ilgili $L(y)=0$ homojen denkleminin çözümü bilindiğinde n-yinci mertebeden $L(y)=g(x)$ lineer dif. denkleminin bir özel çözümünü bulmanın bir başka metodudur.

$y_1(x), \ldots, y_n(x)$ 'ler $L(y)=0$ denkleminin lineer bağımsız çözümü ise o zaman $L(y)=0$ denkleminin homojen çözümünün

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

olduğunu biliyoruz.

Metot :

$L(y) = g(x)$ 'in bir özel çözümü

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \cdots + v_n y_n \quad \ldots\ldots\ldots (4.16)$$

biçimindedir. Burada $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 'ler bulunması gereken fonksiyonlardır.

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ 'leri bulmak için aşağıdaki lineer denklemler $v_1', v_2', \ldots, v_n'$ türevleri için ortak çözülür.

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 + \cdots + v_n' y_n = 0$$

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' + \cdots + v_n' y_n' = 0$$

$$\vdots$$

$$v_1' y_1^{(n-2)} + v_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-2)} = 0$$

$$v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-1)} = g(x)$$

Sonra herbir integral sabiti gözardı edilerek integral alınıp $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ler bulunur ve (4.16) 'da yerlerine yazılır.

Örneğin, $n=3$ özel durumu için

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 + v_3' y_3 = 0$$
$$v_1' y_1' + v_2' y_2' + v_3' y_3' = 0$$
$$v_1' y_1'' + v_2' y_2'' + v_3' y_3'' = g(x)$$

denklemi çözülür.

$n=2$ özel durumu için

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0$$
$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = g(x)$$

denklemi ve $n=1$ özel durumu için

$$v_1' y_1 = g(x)$$

tek denklemi elde edilir.

Metodun Kapsamı

Parametrelerin değiştirilmesi metodu her lineer dif. denkleme uygulanabilir. Bundan dolayı Belirsiz katsayılar metodundan daha güçlüdür. Ancak her iki metodun da uygulanabilir olduğu durumlarda Belirsiz Katsayılar Metodu tercih edilir.

ÖRNEK : $y'' + y = \tan x$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Homojen kısmın genel çözümü

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$ dır.

Parametrelerin değiştirilmesi metoduna göre

$$y_p = v_1 \underbrace{\cos x}_{y_1} + v_2 \underbrace{\sin x}_{y_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

olur. Böylece

(22)

$$\left.\begin{aligned} v_1' \cdot (\cos x) + v_2'(\sin x) &= 0 \\ v_1'(-\sin x) + v_2'(\cos x) &= \tan x \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada v_1' ve v_2' bilinmeyenlerini bulmalıyız. Cramer metoduyla

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix} = -\tan x \sin x = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix} = \sin x$$

$$\Rightarrow \quad v_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \cos x - \sec x \quad \text{ve}$$

$$v_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \sin x$$

bulunur. v_1 ve v_2 yi bulmak için integral alınırsa

$$v_1 = \int v_1' \, dx = \int (\cos x - \sec x)\, dx = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$$

$$v_2 = \int v_2' \, dx = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

fonksiyonları elde edilir. v_1 ve v_2 nin bu değerleri

(*) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$y_p = v_1 \cos x + v_2 \sin x$$

$$\Rightarrow \quad y_p = (\sin x - \ln|\sec x + \tan x|)\cos x + (-\cos x) \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow \quad y_p = -\cos x \cdot \ln|\sec x + \tan x|$$ özel çözümü ve

$$\Rightarrow \quad y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

genel çözümü bulunur.

(23)

ÖRNEK : $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Denklemin homojen çözümü

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

bulunur. Böylece özel çözüm için

$$y_p = v_1 e^x + v_2 x e^x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

kabul edilir. Buna göre

$$\left.\begin{aligned} v_1'(e^x) + v_2'(xe^x) &= 0 \\ v_1'(e^x) + v_2'(e^x + xe^x) &= \frac{e^x}{x} \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemini elde ederiz. Burada v_1' ve v_2' bilinmeyenlerini bulmak için Cramer metodu uygulanırsa

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{x} & e^x + xe^x \end{vmatrix} = -e^{2x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x}$$

$$\Rightarrow \quad v_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1 \quad \text{ve} \quad v_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \int v_1' dx = \int -1 \cdot dx = -x \quad \text{ve}$$

$$v_2 = \int v_2' dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

değerleri (*)'da yerlerine yazılırsa özel çözüm

$$y_p = -xe^x + xe^x \ln|x| \quad \text{ve genel çözüm}$$

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 x e^x - xe^x + xe^x \ln|x|$$

bulunur.

(24)

ÖRNEK: $y''' + y' = \sec x$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2+1)=0, \quad \lambda_1=0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i$

$\Rightarrow \quad y_h = c_1 + c_2\cos x + c_3 \sin x$ homojen çözümü bulunur.

özel çözüm ise

$$y_p = v_1 + v_2\cos x + v_3 \sin x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

formundadır. Buna göre

$$\left.\begin{aligned} v_1'\cdot(1) + v_2'(\cos x) + v_3'(\sin x) &= 0 \\ v_1'\cdot(0) + v_2'(-\sin x) + v_3'(\cos x) &= 0 \\ v_1'(0) + v_2'(-\cos x) + v_3'(-\sin x) &= \sec x \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi yazılabilir. Cramer metoduyla

$$v_1' = \sec x, \quad v_2' = -1 \quad \text{ve} \quad v_3' = -\tan x$$

elde edilir. İntegral alınırsa

$$v_1 = \int v_1'\,dx = \int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x|$$

$$v_2 = \int v_2'\,dx = \int(-1)\,dx = -x$$

$$v_3 = \int v_3'\,dx = \int(-\tan x)\,dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \ln|\cos x|$$

bilinmeyen fonksiyonları bulunur. Bu fonksiyonlar (*) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$y_p = \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + \sin x\cdot \ln|\cos x|$$

özel çözümü ve böylece

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2\cos x + c_3 \sin x + \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + \sin x\cdot\ln|\cos x|$$

genel çözümü bulunur.

4.5. CAUCHY – EULER DENKLEMLERİ

Her bir terimi $x^k y^{(k)}$ ifadesinin bir sabitle çarpımı şeklinde olan

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = b(x) \quad \dots\dots (4.17)$$

tipindeki n. mertebeden değişken katsayılı diferensiyel denklemlere Cauchy-Euler denklemi denir. Burada $a_n \neq 0$ olmak üzere, $a_0, a_1, \dots, a_n$ 'ler sabitlerdir. Bu tip denklemler bir dönüşüm yardımıyla sabit katsayılı hale indirgenerek çözülür.

Metot : (4.17) ile verilen Cauchy-Euler denklemi $x>0$, $x=e^t$ dönüşümü ile sabit katsayılı bir lineer denkleme dönüşür.
Bu durumda $x=e^t \Rightarrow t=\ln x$ olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{I}\cdot\underbrace{\frac{dt}{dx}}_{II}\right) = \underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}}_{I'}\cdot\underbrace{\frac{dt}{dx}}_{II} + \underbrace{\frac{d^2t}{dx^2}}_{II'}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{I}$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2t}{dx^2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \Rightarrow \boxed{x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}} \quad \text{bulunur.}$$

Benzer şekilde

$$\boxed{x^3\frac{d^3y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}}$$

elde edilir. Bu şekilde daha yüksek mert. türevler elde edilebilir. Bu türevler (4.17) denkleminde yerine yazarak sabit katsayılı hale dönüştürülür.

NOT: Yukarıdaki çözüm $x>0$ için verilmiştir. $x<0$ için çözümü bulabilmek için $-x=e^t$ dönüşümü yapılır.

ÖRNEK : $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$ Cauchy-Euler denklemini çözünüz. (26)

Çözüm : $x = e^t$, $x > 0 \Rightarrow t = \ln x$ dönüşümü yapılırsa $xy' = \frac{dy}{dt}$ ve $x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$ olacağından verilen denklemde yerlerine yazılırsa

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) - 2\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t} \Rightarrow y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = +1 \text{ ve } \lambda_2 = +2$$

$\Rightarrow y_h = c_1e^t + c_2e^{2t}$ homojen çözümü bulunur.

$y_p = Ae^{3t}$ kabul edilirse $y_p' = 3Ae^{3t}$ ve $y_p'' = 9Ae^{3t}$ old.

$$9Ae^{3t} - 3 \cdot 3Ae^{3t} + 2Ae^{3t} = e^{3t}$$

$$\Rightarrow 2Ae^{3t} = e^{3t} \Rightarrow A = 1/2$$

$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2}e^{3t}$ olup genel çözüm

$$y = y_h + y_p = c_1e^t + c_2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

ve $e^t = x$ olduğundan

$y = c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{2}x^3$ bulunur.

ÖRNEK : $x^3y''' - 4x^2y'' + 8xy' - 8y = 4\ln x$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$ dönüşümü yapılırsa ve $xy' = \frac{dy}{dt}$, $x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$, $x^3y''' = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}$

türevleri verilen denklemde yerlerine yazılırsa

$$\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) - 4\cdot\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 8\frac{dy}{dt} - 8y = 4t$$

$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dt^3} - 7\frac{d^2y}{dt^2} + 14\frac{dy}{dt} - 8y = 4t$$

(27)

$\Rightarrow \quad y''' - 7y'' + 14y' - 8y = 4t \quad \ldots\ldots (*)$

$\Rightarrow \quad \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$ karakteristik denklemini $\lambda_1 = 1$ değeri sağladığı için polinom bölmesiyle

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 & \lambda - 1 \\ \quad \vdots & \lambda^2 - 6\lambda + 8 \\ \quad 0 & \end{array}$$

olacağından $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = \underbrace{(\lambda-1)}_{\lambda_1=1}\underbrace{(\lambda^2 - 6\lambda + 8)}_{\lambda_2=2 \quad \lambda_3=4}$

$\Rightarrow \quad y_h = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t}$

homojen çözümü bulunur. özel çözümü için

$$y_p = At + B$$

kabul edilirse

$y_p' = A \quad , \quad y_p'' = 0 \quad , \quad y_p''' = 0$

olacağından bu türevler (*) 'da yerine yazılırsa

$$0 - 7.0 + 14.A - 8(At + B) = 4t + 0$$

$$\Rightarrow -8At + 14A - 8B = 4t + 0$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad B = -\frac{7}{8}$$

$\Rightarrow \quad y_p = -\frac{1}{2}t - \frac{7}{8}$ özel çözümü ve

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t} - \frac{1}{2}t - \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4 - \frac{1}{2}\ln x - \frac{7}{8}$$

genel çözümü bulunur.

ÇÖZÜMLÜ SORULAR
(Yüksek Mert. Lineer Dif. Denklemler)

(1) $y'' - 6y' + 25y = 64e^{-x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Denklemi Belirsiz Katsayılar Metoduyla çözelim:

$\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \Delta = -64 < 0$ olup

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{64i^2}}{2} = 3 \pm 4i$$

$y_h = c_1 e^{3x}\cos 4x + c_2 e^{3x}\sin 4x$

homojen çözümü bulunur. Özel çözüm için

$y_p = Ae^{-x}$

kabul edilirse $y_p' = -Ae^{-x}$ ve $y_p'' = Ae^{-x}$ olacağından

$(Ae^{-x}) + 6Ae^{-x} + 25Ae^{-x} = 64e^{-x}$

$\Rightarrow 32Ae^{-x} = 64e^{-x} \Rightarrow A = 2$

$\Rightarrow y_p = 2e^{-x}$ olup genel çözüm

$y = y_h + y_p = c_1 e^{3x}\cos 4x + c_2 e^{3x}\sin 4x$

bulunur.

(2) $y'' - y' - 2y = \sin 2x$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Denklemi Belirsiz Katsayılar Metoduyla çözelim:

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = 2$ bulunur.

Buradan $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ homojen çözümü elde edilir.

$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$ kabul edilirse

$y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$ ve

$y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$

türevleri denklemde yerine yazılırsa

(29)

$$(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x) - (2A\cos 2x - 2B\sin 2x) - 2(A\sin 2x + B\cos 2x) = \sin 2x$$

$$\Rightarrow (-6A + 2B)\sin 2x + (-6B - 2A)\cos 2x = 1 \cdot \sin 2x + 0 \cdot \cos 2x$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -6A + 2B = 1 \\ -6B - 2A = 0 \end{array}\right\}$$ denklemlerinden $A = -3/20$ $B = 1/20$ bulunur.

Böylece özel çözümü

$$y_p = -\frac{3}{20}\sin 2x + \frac{1}{20}\cos 2x$$

ve genel çözümü

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{3}{20}\sin 2x + \frac{1}{20}\cos 2x$$

bulunur.

(3) . $y'' - 4y' + 3y = 9x^2 + 4$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 3$

$\Rightarrow y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}$ homojen çözümü bulunur.

$y_p = Ax^2 + Bx + C$ kabul edilirse

$y_p' = 2Ax + B$ ve $y_p'' = 2A$ olacağından

$$2A - 4(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx + C) = 9x^2 + 4$$

$$\Rightarrow 3Ax^2 + (-8A + 3B)x + 2A - 4B + 3C = 9x^2 + 4$$

$$\Rightarrow 3A = 9 \ , \quad -8A + 3B = 0 \ , \quad 2A - 4B + 3C = 4$$

$$\Rightarrow A = 3 \ , \quad B = 8 \ , \quad C = 10$$

$$\Rightarrow y_p = 3x^2 + 8x + 10$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_p = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + 3x^2 + 8x + 10$$

genel çözümü bulunur.

30

4) $y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Belirsiz katsayılar metoduyla çözelim:

$\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$ olup homojen çözüm

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ dir.

$y_p = e^{2x}(A\sin 2x + B\cos 2x)$ kabul edilirse

$y_p' = 2e^{2x}(A\sin 2x + B\cos 2x) + e^{2x}(2A\cos 2x - 2B\sin 2x)$

$y_p'' = 4e^{2x}(A\sin 2x + B\cos 2x) + 2e^{2x}(2A\cos 2x - 2B\sin 2x)$
$+ 2e^{2x}(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) + e^{2x}(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x)$

$\Rightarrow y_p' = (2Ae^{2x} - 2Be^{2x})\sin 2x + (2Be^{2x} + 2Ae^{2x})\cos 2x$

$\Rightarrow y_p'' = (-8Be^{2x})\sin 2x + 8Ae^{2x}\cos 2x$

$\Rightarrow$ $y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x$ denkleminde yazılırsa

$(-8Be^{2x}\sin 2x + 8Ae^{2x}\cos 2x) - 4e^{2x}(A\sin 2x + B\cos 2x)$
$= e^{2x}\sin 2x + 0 \cdot e^{2x}\cos 2x$

$\Rightarrow \underbrace{(-12B - 4A)}_{=1} e^{2x}\sin 2x + \underbrace{(12A - 4B)}_{=0}\cos 2x = e^{2x}\sin 2x + 0$

$\left.\begin{array}{l} -8B - 4A = 1 \\ 8A - 4B = 0 \end{array}\right\}$ $A = -\frac{1}{20}$, $B = -\frac{1}{10}$

$\Rightarrow y_p = e^{2x}\left(-\frac{1}{20}\sin 2x - \frac{1}{10}\cos 2x\right)$

özel çözümü ve

$y = y_h + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + e^{2x}\left(-\frac{1}{20}\sin 2x - \frac{1}{10}\cos 2x\right)$

genel çözümü bulunur.

(5) $y'' + 9y = 2x\sin 3x$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Belirsiz katsayılar metodunu kullanalım:

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3i$$

$\Rightarrow y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$ homojen çözümü bulunur.

Eğer özel çözüm olarak

$$y_p = (Ax + B)\cos 3x + (Cx + D)\sin 3x$$

kabul edilirse y_h ile ortak terimler bulunduğundan dolayı

$$y_p = x\left[(Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x\right]$$

ifadesi özel çözüm olarak alınmalıdır.

Buradan türev alınarak y_p' ve daha sonra y_p'' türevi hesaplanıp $y'' + 9y = 2x\sin 3x$ denkleminde yerine yazılırsa ve düzenlenirse

$$(12Cx + 2A + 6D)\cos 3x + (-12Ax + 2C - 6B)\sin 3x \equiv 2x\sin 3x$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$12C = 0, \quad 2A + 6D = 0, \quad -12A = 2, \quad 2C - 6B = 0$$

bulunur ki bu eşitliklerden belirsiz katsayılar

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{18}$$

olarak hesaplanır. Böylece özel çözüm

$$y_p = x\left[\left(-\frac{1}{6}x\right)\cdot\cos 3x - \frac{1}{18}\sin 3x\right]$$

ve genel çözüm

$$y = y_h + y_p = c_1\cos 3x + c_2 \sin 3x - x\left(\frac{1}{6}x\cos 3x + \frac{1}{18}\sin 3x\right)$$

bulunur.

(6) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Parametrelerin değiştirilmesi metodunu kullanalım.

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda^2 = i^2 \Rightarrow \lambda = \pm i = 0 \pm i$$

old. homojen çözüm

$$y_h = c_1 e^{0x} \cos x + c_2 e^{0x} \sin x$$

$\Rightarrow \quad y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ bulunur. Özel çözüm için

$y_p = v_1 \cos x + v_2 \sin x$ kabul edelim. Böylece

$$\left.\begin{aligned} v_1' (\cos x) + v_2' (\sin x) &= 0 \\ v_1' (-\sin x) + v_2' (\cos x) &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi Cramer metodu ile çözülürse

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1$$

$\Rightarrow \quad v_1' = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -\tan x \quad , \quad v_2' = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 1$

$\Rightarrow \quad v_1 = \int v_1' dx = \int -\tan x dx = -\int \dfrac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x|$

$\Rightarrow \quad v_2 = \int v_2' dx = \int 1 dx = x$

$\Rightarrow \quad y_p = \ln|\cos x| \cdot \cos x + x \sin x$

$\Rightarrow \quad y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \ln|\cos x| \cdot \cos x + x \sin x$

genel çözümü bulunur.

(33)

(7) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Parametrelerin değiştirilmesi metoduyla çözelim:

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 ,\ \lambda_2 = 2$

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}$: homojen çözümü bulunur.

$y_p = v_1 e^{2x} + v_2 e^{x}$ özel çözüm olarak kabul edilirse

$$\left.\begin{aligned} v_1' e^{2x} + v_2' e^{x} &= 0 \\ v_1' 2e^{2x} + v_2' e^{x} &= \frac{1}{1+e^{-x}} \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{x} \\ 2e^{2x} & e^{x} \end{vmatrix} = -e^{3x} \quad , \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{x} \\ \frac{1}{1+e^{-x}} & e^{x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{x}}{1+e^{-x}}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \frac{1}{1+e^{-x}} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{1+e^{-x}}$$

$$\Rightarrow v_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} \quad , \quad v_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$\Rightarrow v_1 = \int v_1' dx = -\int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx = -\left[\int\left(e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx\right]$$

$$= -e^{-x} + \ln(1+e^{-x})$$

$$v_2 = \int v_2' dx = -\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = -(-\ln(1+e^{-x})) = \ln(1+e^{-x})$$

$$\Rightarrow y_p = \left[-e^{-x} + \ln(1+e^{-x})\right] \cdot e^{2x} + \ln(1+e^{-x}) \cdot e^{x}$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_p$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + \left[-e^{-x} + \ln(1+e^{-x})\right] \cdot e^{2x} + \ln(1+e^{-x}) \cdot e^{x}$$

genel çözümü bulunur.

(34)

(8) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}$ denklemini çözünüz.

<u>Çözüm</u>: Parametrelerin değiştirilmesi metoduyla çözelim:

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda+2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = -2.$

$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$ homojen çözümü bulunur.

$y_p = v_1 e^{-2x} + v_2 x e^{-2x}$ kabul edilirse

$$\left.\begin{aligned} v_1' e^{-2x} + v_2' x e^{-2x} &= 0 \\ v_1'(-2e^{-2x}) + v_2'(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) &= \frac{e^{-2x}}{x^2} \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemini Cramer metoduyla çözelim:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{-2x} \\ \frac{e^{-2x}}{x^2} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-4x}}{x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & \frac{e^{-2x}}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{e^{-4x}}{x^2}$$

$\Rightarrow v_1' = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -\dfrac{1}{x}$, $v_2' = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{1}{x^2}$

$\Rightarrow v_1 = \int v_1' \, dx = \int -\frac{1}{x} \, dx = -\ln x$

$\Rightarrow v_2 = \int v_2' \, dx = \int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x}$

$\Rightarrow y_p = (-\ln x) \cdot e^{-2x} - \frac{1}{x} \cdot x e^{-2x}$

$\Rightarrow y = y_h + y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \ln x - e^{-2x}$

genel çözümü bulunur.

(35)

(9) $x^3 y''' + x y' - y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Bu denklem Cauchy-Euler denklemidir. $x = e^t$ olmak üz

$$x^3 y''' = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}$$ ve

$$x y' = \frac{dy}{dt}$$

türevleri denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = 0$$

$$\Rightarrow \quad y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda - 1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$ bulunur.

o halde homojen çözüm

$$y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t$$

$$y = c_1 x + c_2 (\ln x) \cdot x + c_3 (\ln x)^2 \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad y = x\left(c_1 + c_2 \ln x + c_3 (\ln x)^2\right)$$

şeklinde bulunur.

(10) $x^2 y'' + 3x y' + 5y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -3$

başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm : Cauchy-Euler denklemidir. $x = e^t$ dön. yapalım: $\{x = e^t \Rightarrow t = \ln x\}$

$$x^2 y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$ ve $$x y' = \frac{dy}{dt}$$

türevleri denklemde yerlerine yazılırsa

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 3\frac{dy}{dt} + 5y = 0$$

36

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i$$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 e^{-t}\cos 2t + c_2 e^{-t}\sin 2t$$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 \frac{1}{x}\cos(2\ln x) + c_2 \frac{1}{x}\sin(2\ln x)$$

homojen çözümü bulunur.

$y(1) = 1$ başlangıç şartına göre $x=1$ ve $y=1$ alınırsa

$$1 = c_1 \cdot \frac{1}{1}\cos(2\ln 1) + c_2 \frac{1}{1}\sin(2\ln 1)$$

$$\Rightarrow \quad 1 = c_1 + c_2 \cdot 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = +1}$$ bulunur.

$y'(1) = -3$ başlangıç şartı için y' türevini almalıyız.

$$y' = c_1 \cdot \left[-\frac{1}{x^2}\cdot\cos(2\ln x) - \frac{2}{x^2}\cdot\sin(2\ln x)\right]$$
$$+ c_2 \cdot \left[-\frac{1}{x^2}\sin(2\ln x) + \frac{2}{x^2}\cos(2\ln x)\right]$$

$\Rightarrow$ $x=1$ ve $y'=-3$ yazılırsa

$$-3 = c_1 \cdot \left[-\cos(2\ln 1) - 2\cdot\sin(2\ln 1)\right]$$
$$+ c_2\left[-\sin(2\ln 1) + 2\cos(2\ln 1)\right]$$

$$\Rightarrow \quad -3 = -c_1 + 2c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = -1}$$

$c_1 = 0$ ve $c_2 = -1$ değerleri genel çözümde yerlerine yazılırsa

$$y = \frac{1}{x}\left[\cos(2\ln x) - \sin(2\ln x)\right], \quad x > 0$$

bulunur.

5. BÖLÜM

LİNEER DİF. DENKLEMLERİN KUVVET SERİLERİ CİNSİNDEN ÇÖZÜMÜ

ikinci mertebeden bir

$$b_2(x)\,y'' + b_1(x)\,y' + b_0(x)\,y = g(x) \quad \ldots \quad (5.1)$$

lineer dif. denklemi $b_2(x)$, $b_1(x)$ ve $b_0(x)$ 'lerin tümünün sabit olmadığı veya biri diğerinin sabit katı olmadığı durumda değişken katsayılara sahiptir. Eğer verilen bir aralıkta $b_2(x) \neq 0$ ise bu durumda (5.1) denklemini $b_2(x)$ ile bölerek,

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = \phi(x) \quad \ldots \quad (5.2)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $P(x) = \dfrac{b_1(x)}{b_2(x)}$, $Q(x) = \dfrac{b_0(x)}{b_2(x)}$ ve

$\phi(x) = \dfrac{g(x)}{b_2(x)}$ tir.

$g(x) = 0$ olduğu zaman (5.1) denklemi homojendir ve bu durumda (5.2) denklemi

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0 \quad \ldots \quad (5.3)$$

özel durumunu alır.

TEOREM : Eğer $x=0$ noktası (5.3) denkleminin bir adi noktası ise, bu durumda bu noktayı içeren bir aralıkta genel çözüm

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0\, y_1(x) + a_1\, y_2(x) \quad \ldots \quad (5.4)$$

biçimine sahiptir. Burada a_0 ve a_1 keyfi sabitlerdir. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ de $x=0$ noktasında analitik olan (türevlenebilen) lineer bağımsız fonksiyonlardır.

Teoremde oluşturulan çözümdeki a_n katsayılarını hesaplamak için, kuvvet serisi yöntemi olarak bilinen aşağıdaki beş adımlı yolu kullanacağız.

(2)

1. Adım : Homojen dif. denklemin sol yanında

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \dots \quad (5.5)$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + n a_n x^{n-1} + (n+1) a_{n+1} x^n + (n+2) a_{n+2} x^{n+1} + \dots \quad (5.6)$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2 + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + (n+1) n\, a_{n+1} x^{n-1} + (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \dots \quad (5.7)$$

kuvvet serileri yazılır.

2. Adım : x 'in kuvvetleri düzenlenip, herbir kuvvetin katsayısı sıfıra eşitlenir.

3. Adım : 2. Adım'da x^n nin katsayılarını sıfıra eşitlemekle elde edilen denklem sonlu sayıdaki j değeri için a_j terimlerini içerecektir. Bu denklem en büyük indisli a_j terimine göre çözülür. Elde edilen denklem, verilen dif. denklemin rekürans (yinelenim) formülü olarak bilinir.

4. Adım : Rekürans formülü kullanılarak a_j terimleri, a_0 ve a_1 cinsinden belirlenir.

5. Adım : 4. Adım'da belirlenen katsayılar (5.5) ifadesinde yerine konup, çözümü (5.4) biçiminde yazılır.

NOT : Kuvvet serisi metodu, sadece $x=0$ bir adi nokta ise uygulanabilir. $x=0$ 'ın bir adi nokta olup olmadığını belirlemek için dif. denklemin (5.2) formunun kullanılmasının zorunluluğuna rağmen, bu belirlemeden sonra kuvvet serisi metodu (5.1) veya (5.2) formunun her ikisinde de kullanılabilir.

(3)

Homojen olmayan Denklemlerin Orjin Komşuluğunda Çözümleri

Eğer (5.2) 'deki $\phi(x)$, $x=0$ 'da analitik ise, bu nokta komşuluğunda bir kuvvet serisi açılımına sahiptir ve yukarıda verilen kuvvet serisi metodu (5.1) veya (5.2) denklemini çözmek için düzenlenebilir.

1. Adım'da (5.5), (5.6) ve (5.7) serileri homojen olmayan denklemin sol yanında yerlerine konulup sağ tarafın orjin komşuluğundaki kuvvet serisi yazılır.

2. Adım ve 3. Adım, x'in 1. Adım'dan elde edilen eşitliğin sol tarafındaki katsayılarının, x'in sağ tarafındaki katsayılarına eşitlenmesi şeklinde değiştirilir.

5. Adım'daki çözüm formülü

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) + y_3(x)$$

biçimini alır.

Burada ilk iki terim, karşılık gelen homojen dif. denklemin genel çözümünü verirken, son fonksiyon ise homojen olmayan denklemin bir özel çözümünü oluşturmaktadır.

Diğer Nokta Komşuluklarında Çözümler

$x_0 \neq 0$ adi noktası komşuluğundaki çözümler istendiğinde $t = x - x_0$ dönüşümü yapılarak x_0 noktasını orjine taşımak genellikle cebirsel işlemleri kolaylaştırır. Ortaya çıkan yeni dif. denklemin çözümü $t=0$ komşuluğunda kuvvet serisi metodu ile elde edilebilir. Böylece baştaki denklemin çözümü, geri dönüşümün yapılması ile kolayca elde edilir.

(4)

ÖRNEK : $y'' - xy' + 2y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Burada $P(x) = -x$ ve $Q(x) = 2$ olup her ikisi de polinom old. her yerde analitiktir (Türevlenebilirdir). O halde x'in her değeri ve özel olarak $x=0$ noktası bir adi noktadır.

Şimdi verilen dif. denklemin $x=0$ komşuluğundaki kuvvet seri çözümü için bir rekürans formülü bulalım :

(5.5), (5.6) ve (5.7)'deki y, y', y'' değerlerini verilen

$$y'' - xy' + 2y = 0$$

denkleminde yerine yazalım :

$$\left[2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots + (n+2)(n+1)a_{n+2} \cdot x^n + \dots\right]$$

$$- x \cdot \left[a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + n a_n x^{n-1} + (n+1)a_{n+1} x^n + \dots\right]$$

$$+ 2\left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \dots\right] = 0$$

bulunur. x'in kuvvetleri düzenlenirse

$$(2a_2 + 2a_0) + (6a_3 + a_1)x + (12a_4)x^2 + (20a_5 - a_3)x^3 +$$
$$+ \dots + \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n + 2a_n\right] + \dots = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n + \dots$$

olur. Buradan

$$2a_2 + 2a_0 = 0, \quad 6a_3 + a_1 = 0, \quad 12a_4 = 0, \quad 20a_5 - a_3 = 0, \dots$$

ve genel olarak

(5)

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n + 2a_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+2} = \frac{(n-2)}{(n+2)(n+1)} \cdot a_n$$

elde edilir ki bu formül, verilen denklemin rekürans formülüdür.

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ değerleri için

$$a_2 = -a_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{6} a_1$$

$$a_4 = 0$$

$$a_5 = \frac{1}{20} a_3 = \frac{1}{20}\left(-\frac{1}{6} a_1\right) = -\frac{1}{120} a_1$$

$$a_6 = \frac{2}{30} a_4 = \frac{1}{15} \cdot 0 = 0$$

$$a_7 = \frac{3}{42} a_5 = \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{120}\right) a_1 = -\frac{1}{1680} a_1$$

$$a_8 = \frac{4}{56} a_0 = \frac{1}{14} \cdot 0 = 0$$

$\vdots$

bulunur. Böylece

$$y = a_0 + a_1 x - a_0 x^2 - \frac{1}{6} a_1 x^3 + 0 \cdot x^4 - \frac{1}{120} a_1 x^5 + 0 \cdot x^6 - \frac{1}{1680} a_1 x^7 + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad y = a_0 (1 - x^2) + a_1 \left(x - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{1680} x^7 - \ldots\right)$$

elde edilir.

ÖRNEK: $y'' + y = 0$ denkleminin $x = 0$ komşuluğundaki kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

Çözüm: (5.5) ve (5.7) serilerini denklemde yerine yazalım:

$$\left[2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \dots\right]$$

$$+\left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots\right] = 0$$

$$\Rightarrow (2a_2 + a_0) + (6a_3 + a_1)x + (12a_4 + a_2)x^2$$

$$+ (20a_5 + a_3)x^3 + \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n\right] + \dots = 0$$

buluruz. Buradan

$$2a_2 + a_0 = 0, \quad 6a_3 + a_1 = 0, \quad 12a_4 + a_2 = 0$$

$$20a_5 + a_3 = 0, \quad \dots, \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} \cdot a_n$$

bulunur.

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_0, \qquad a_3 = -\frac{1}{6}a_1 = -\frac{1}{3!}a_1$$

$$a_4 = -\frac{1}{4.3}a_2 = \frac{1}{4!}a_0, \qquad a_5 = -\frac{1}{5.4}a_3 = \frac{1}{5!}a_1$$

$$a_6 = -\frac{1}{6.5}a_4 = -\frac{1}{6!}a_0, \quad \dots$$

. . . .

katsayıları bulunur ve bunlar $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisinde yerine yazılırsa

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{1}{2!}a_0 x^2 - \frac{1}{3!}a_1 x^3 + \frac{1}{4!}a_0 x^4 + \frac{1}{5!}a_1 x^5 - \frac{1}{6!}a_0 x^6 - \dots$$

$$\Rightarrow y = a_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots\right)$$

seri çözümü bulunur.

(7)

ÖRNEK : $(x^2+4)y'' + xy = x+2$ denkleminin $x=0$ komşuluğundaki kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

Çözüm : Verilen denklem x^2+4'e bölünürse paydaya x^2+4 geleceğinden daima pozitif olur. Sıfır olmaz. O halde $x=0$ bir adi noktadır.

$$(x^2+4)\cdot\left[2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \dots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \dots\right]$$

$$+ x\cdot\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n + \dots\right] = x+2$$

$$\Rightarrow (8a_2) + (24a_3 + a_0)x + (2a_2 + 48a_4 + a_1)x^2 + (6a_3 + 80a_5 + a_2)x^3 + \dots$$

$$\dots + \left[n(n-1)a_n + 4(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_{n-1}\right]x^n + \dots = x+2$$

$$\Rightarrow 8a_2 = 2, \quad 24a_3 + a_0 = 1, \quad 2a_2 + 48a_4 + a_1 = 0, \quad 6a_3 + 80a_5 + a_2 = 0, \dots$$

$$\dots \quad n(n-1)a_n + 4(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+2} = -\frac{n(n-1)}{4(n+2)(n+1)}a_n - \frac{1}{4(n+2)(n+1)}\cdot a_{n-1}$$

eşitliğine denktir. (x^0 ve x^1'in katsayıları sıfır olmadığından rekürans formülünde $n=0$ ve $n=1$ geçersizdir).

$$8a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{4}, \qquad 24a_3 + a_0 = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{24} - \frac{1}{24}a_0$$

bulunur.

$n=2$ için
$$a_4 = -\frac{1}{24}a_2 - \frac{1}{48}a_1 = -\frac{1}{24}\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{48}a_1 = -\frac{1}{96} - \frac{1}{48}a_1$$

$n=3$ için
$$a_5 = -\frac{3}{40}a_3 - \frac{1}{80}a_2 = -\frac{3}{40}\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{24}a_0\right) - \frac{1}{80}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a_5 = -\frac{1}{160} + \frac{1}{320}a_0$$

$\vdots$

bulunur. O halde

$$y = a_0 + a_1x + \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{24}a_0\right)x^3 + \left(-\frac{1}{96} - \frac{1}{48}a_1\right)x^4$$

$$+ \left(-\frac{1}{160} + \frac{1}{320}a_0\right)x^5 + \dots$$

kuvvet serisi çözümü bulunur.

8

ÖRNEK : $\dfrac{d^2y}{dt^2} + (t-1)\dfrac{dy}{dt} + (2t-3)y = 0$ dif. denkleminin $t=0$ komşuluğunda kuvvet serisi çözümü için bir rekürans formülü bulunuz.

Çözüm : $P(t) = t-1$ ve $Q(t) = 2t-3$ polinom olup $t=0$ bir adi noktadır. (5.5), (5.6) ve (5.7) serilerinde x yerine t alalım ve denklemde yerine yazalım:

$$\left[2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 + \dots + (n+2)(n+1)a_{n+2}\cdot t^n + \dots\right]$$
$$+ (t-1)\left[a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \dots + n a_n t^{n-1} + (n+1)a_{n+1} t^n + \dots\right]$$
$$+ (2t-3)\left[a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n + \dots\right] = 0$$

$$\Rightarrow (2a_2 - a_1 - 3a_0) + (6a_3 + a_1 - 2a_2 + 2a_0 - 3a_1)t$$
$$+ (12a_4 + 2a_2 - 3a_3 + 2a_1 - 3a_2)t^2 + \dots +$$
$$+ \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + n a_n - (n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} - 3a_n\right] t^n + \dots = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a_2 - a_1 - 3a_0 = 0, \qquad 6a_3 + 2a_0 - 2a_2 - 2a_1 = 0,$$
$$12a_4 - 3a_3 - a_2 + 2a_1 = 0, \ \dots$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + (n-3)a_n + 2a_{n-1} = 0$$

olup buradan

$$a_{n+2} = \frac{1}{n+2}a_{n+1} - \frac{n-3}{(n+2)(n+1)}a_n - \frac{2}{(n+2)(n+1)}a_{n-1}$$

bulunur.

(9)

ÖRNEK: $y'' + xy' + (x^2-3)y = 0$ denkleminin $x=0$ komşuluğundaki kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

Çözüm: (Serileri açmadan çözümü yapalım)

$x=0$ noktası denklemin bir adi noktası olduğundan genel çözümü

$$y = \sum a_n x^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (*)$$

dir. Türevler ise

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{ve} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

şeklindedir. Bu türevler ve y serisi denklemde yerine yazılırsa

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}_{(n\to n+2)\text{ alınacak}} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}}_{(n\to n-2)\text{ alınacak}} - \sum_{n=0}^{\infty} 3 a_n x^n = 0$$

olur. Burada bütün terimler için x'in üssü aynı olacak şekilde yukarıdaki denklem yeniden düzenlenirse

$$\overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n}^{(n\to n+2)\text{ alındı}} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \overbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n}^{(n\to n-2)\text{ alındı}} - \sum_{n=0}^{\infty} 3 a_n x^n = 0 \quad \ldots \; (**)$$

olur. Şimdi de n indislerini aynı sayıdan ($n=2$'den) başlatmalıyız. Yani

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = (0+2)(0+1) a_2 x^0 + (1+2)(1+1) a_3 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = 1.a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3 a_n x^n = 3a_0 x^0 + 3a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} 3 a_n x^n$$

şeklinde yeniden yazıp bunları $(**)$ eşitliğinde yerlerine yazalım:

(10)

$$2a_2+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n$$
$$-3a_0-3a_1x-\sum_{n=2}^{\infty}3a_nx^n=0$$

$$\Rightarrow (2a_2-3a_0)+(6a_3-2a_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+na_n+a_{n-2}-3a_n\right]x^n=0$$

elde edilir. Buradan

$$2a_2-3a_0=0$$
$$6a_3-2a_1=0$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n-3)a_n+a_{n-2}=0\,, \qquad n\geq 2$$

bulunur. Buna göre

$$a_2=\frac{3}{2}a_0 \quad \text{ve} \quad a_3=\frac{1}{3}a_1$$

$$a_{n+2}=-\frac{(n-3)a_n+a_{n-2}}{(n+2)(n+1)}\,, \qquad n\geq 2$$

rekürans formülü elde edilir. Böylece

$n=2$ için $\quad a_4=-\dfrac{-a_2+a_0}{12}=-\dfrac{-\frac{3}{2}a_0+a_0}{12}=\dfrac{a_0}{24}$

$n=3$ için $\quad a_5=-\dfrac{a_1}{20}$

$n=4$ için $\quad a_6=-\dfrac{a_4+a_2}{30}=-\dfrac{\frac{1}{24}a_0+\frac{3}{2}a_0}{30}=-\dfrac{37}{720}a_0$

$n=5$ için $\quad a_7=-\dfrac{2a_5+a_3}{42}=-\dfrac{2\cdot\frac{1}{20}a_1+\frac{1}{3}a_1}{42}=-\dfrac{a_1}{180}$

$\vdots$

$$y=a_0+a_1x+\frac{3}{2}a_0x^2+\frac{1}{3}a_1x^3+\frac{1}{24}a_0x^4-\frac{1}{20}a_1x^5-\frac{37}{720}a_0x^6-\frac{1}{180}a_1x^7+\cdots$$

kuvvet serisi çözümü bulunur.

(11)

ÖRNEK : $xy'' + y' + 2y = 0$ denkleminin $x=1$ komşuluğundaki kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

Çözüm : Denklemin her iki tarafı y'' nin katsayısı olan x terimine bölünürse $y'' + \frac{y'}{x} + 2\frac{y}{x} = 0$ denklemi bulunur ki bu denklem $x=0$ noktasında tekildir. Yani $x=0$ noktası bir adi nokta olmayıp bir tekil noktadır. Dolayısıyla $x=0$ noktası civarında bir seri çözümü yoktur.

$x=1$ noktası civarındaki çözüm ise

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

şeklindedir. Bu nedenle $x-1=t$ dönüşümü yapılırsa

$$(t+1)\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin $t=0$ noktası komşuluğundaki genel çözümü

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

şeklinde bir seri olup

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \quad \text{ve} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} \text{ dır.}$$

Bu seriler $(*)$ denkleminde yerlerine yazılırsa

$$(t+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

olur. Bu denklem düzenlenirse

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n t^n = 0 \ \ldots (**)$$

olur. t'lerin kuvvetlerini eşitlemek yani t^n yapmak için

(12)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n\,a_{n+1} t^n \quad (n \text{ yerine } n+1 \text{ yazıldı})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n \quad (n \text{ yerine } n+1 \text{ yazıldı})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n \quad (n \text{ yerine } n+2 \text{ yazıldı})$$

serileri ⊛⊛ eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n\,a_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n t^n = 0$$

olur. Şimdi de n indislerini $n=1$ 'den başlatalım:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n\,a_{n+1} t^n + \left(a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1} t^n\right) +$$

$$+ \left(2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n\right) + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n t^n = 0$$

$$\Rightarrow a_1 + 2a_2 + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)n\,a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} + 2a_n\right] t^n = 0$$

$$\Rightarrow a_1 + 2a_2 + 2a_0 = 0 \quad \text{ve} \quad (n+1)n\,a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} + 2a_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+2} = -\frac{(n+1)^2 \cdot a_{n+1} + 2a_n}{(n+1)\cdot(n+2)}, \qquad n \geq 1$$

$n=1$ için $\quad a_3 = -\dfrac{4a_2 + 2a_1}{2.3} = \dfrac{2a_0}{3}$

$n=2$ için $\quad a_4 = -\dfrac{9a_3 + 2a_2}{3.4} = -\dfrac{4a_0 - a_1}{12}$

$n=3$ için $\quad a_5 = -\dfrac{16a_4 + 2a_3}{4.5} = \dfrac{3a_0 - a_1}{15}$

⋮

katsayıları bulunur ve bunları $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ serisinde yerine yazarsak

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + \left(-a_0 - \frac{a_1}{2}\right)t^2 + \frac{2a_0}{3}t^3 + \frac{-4a_0 + a_1}{12}t^4 + \cdots$$

ve t yerine $x-1$ yazılırsa

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 + a_1(x-1) + \left(-a_0 - \frac{a_1}{2}\right)(x-1)^2 + \frac{2a_0}{3}(x-1)^3 + \frac{-4a_0 + a_1}{12}(x-1)^4 + \cdots$$

kuvvet serisi çözümü bulunur.

(13)

ÖRNEK : $(x^2+1)y'' + xy' + 2xy = 0$ denkleminin $x=0$ noktası komşuluğundaki kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

Çözüm : $x=0$ noktası denklemin bir adi noktasıdır. Buna göre $x=0$ noktası komşuluğunda kuvvet serisi çözümü vardır.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

serileri denklemde yerlerine yazılırsa

$$(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0} 2a_n x^{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \left(2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n x^n\right)$$
$$+ \left(a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n\right) + \left(2a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1} x^n\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{2a_2}_{=0} + (\underbrace{6a_3 + a_1 + 2a_0}_{=0})x + \sum_{n=2}^{\infty}\Big[\underbrace{n(n-1)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + 2a_{n-1}}_{=0}\Big]x^n = 0$$

$$2a_2 = 0 \; , \quad 6a_3 + a_1 + 2a_0 = 0 \; , \quad n^2 a_n + 2a_{n-1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0$$

$$\Rightarrow a_2 = 0 \; , \quad a_3 = -\frac{1}{3}a_0 - \frac{1}{6}a_1 \; , \; \ldots , \; a_{n+2} = -\frac{n^2 a_n + 2a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$$

$$\Rightarrow a_4 = -\frac{1}{6}a_1 \; , \quad a_5 = \frac{3}{20}a_0 + \frac{3}{40}a_1 \; , \; \ldots$$

$$\Rightarrow y = a_0 + a_1 x + \left(-\frac{1}{3}a_0 - \frac{1}{6}a_1\right)x^3 + \left(-\frac{1}{6}a_1\right)x^4 + \left(\frac{3}{20}a_0 + \frac{3}{40}a_1\right)x^5 + \ldots$$

kuvvet serisi çözümü bulunur.

1

6. BÖLÜM

LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

Tanım: $f(x)$, $0 \le x < \infty$ için tanımlı olsun. ve s keyfi bir reel değişkeni göstersin. $f(x)$'in $L\{f(x)\}$ veya $F(s)$ ile gösterilen Laplace dönüşümü

$$L\{f(x)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot f(x)\,dx$$

ile verilir. Burada

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-sx} f(x)\,dx$$

şeklinde tanımlı limit varsa $f(x)$'in Laplace dönüşümü vardır. Aksi halde Laplace dönüşümü yoktur.

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

(1) $L\{f(x)\} = F(s)$ ve $L\{g(x)\} = G(s)$ ise o zaman herhangi iki c_1 ve c_2 sabiti için

$$L\{c_1 f(x) + c_2 g(x)\} = c_1 L\{f(x)\} + c_2 L\{g(x)\}$$ dir.

(2) $L\{f(x)\} = F(s)$ ise herhangi bir a sabiti için

$$L\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a)$$

(3) $L\{f(x)\} = F(s)$ ise $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$L\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[F(s)]$$

(4) $L\{f(x)\} = F(s)$ ise $L\{\frac{1}{x} f(x)\} = \int_s^\infty F(t)\,dt$

(5) $L\{f(x)\} = F(s)$ ise $L\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s} F(s)$ dir.

(2)

ÖRNEK : $f(x)=1$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm : $L\{1\} = F(s)$ olmak üzere $L\{1\} = ?$

$$F(s) = L\{1\} = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot 1 \cdot dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-sx} \cdot 1 \cdot dx \quad \text{dir.}$$

$\int_0^R e^{-sx}\,dx$ integralinde $-sx = u$ olsun. $-s\,dx = du \Rightarrow dx = -\frac{du}{s}$

$$\Rightarrow \int_0^R e^{-sx}\,dx = -\frac{1}{s}\int_0^R e^u\,du = -\frac{1}{s} e^u \Big|_{x=0}^{x=R} = -\frac{1}{s} e^{-sx}\Big|_0^R$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-sR} - \left(-\frac{1}{s}e^{-s.0}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sR} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s e^{sR}}$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-sx}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s e^{sR}}\right) = \frac{1}{s} \quad \text{olur.}$$

O halde $L\{1\} = \frac{1}{s}$ dir. $(s>0)$

ÖRNEK : $L\{e^{ax}\} = ?$

Çözüm : $$L\{e^{ax}\} = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot e^{ax}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{(a-s)x}\,dx$$

$$\Rightarrow (a-s)x = u \Rightarrow (a-s)\,dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{a-s}$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{(a-s)x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{e^u\,du}{a-s} = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{e^{(a-s)x}}{a-s}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=R}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{e^{(a-s)R}}{a-s} - \frac{e^{(a-s).0}}{a-s}\right) = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{(a-s)R} - 1}{a-s}\right]$$

$$= \frac{1}{s-a} \quad (s>a \text{ için})$$

③

Bazı Laplace Dönüşümleri

	$f(x)$	$L\{f(x)\} = F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	x	$\frac{1}{s^2}$
3	x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, s^{-3/2}$
5	e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$
6	$\sin ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
7	$\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
8	$e^{bx}.\ \sin ax$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$
9	$e^{bx}.\ \cos ax$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$
10	$x.\ \sin ax$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
11	$x.\ \cos ax$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
12	$x^n.\ e^{ax}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
13	$\sin^2 ax$	$\frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$
14	$\sin ax - ax\cos ax$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$

(4)

ÖRNEK : $L\{3+2x^2\} = ?$

Çözüm : $L\{3+2x^2\} = L\{3\cdot 1\} + L\{2x^2\}$

$= 3L\{1\} + 2L\{x^2\} = 3\cdot\left(\frac{1}{s}\right) + 2\cdot\left(\frac{2}{s^3}\right) = \frac{3}{s} + \frac{4}{s^3}$.

ÖRNEK : $L\{5\sin 3x - 17e^{-2x}\} = ?$

Çözüm : $L\{5\sin 3x - 17e^{-2x}\} = 5L\{\sin 3x\} - 17L\{e^{-2x}\}$

$= 5\cdot\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right) - 17\left(\frac{1}{s-(-2)}\right) = \frac{15}{s^2+9} - \frac{17}{s+2}$.

ÖRNEK : $L\{2\sin x + 3\cos 2x\} = ?$

Çözüm : $L\{2\sin x + 3\cos 2x\} = 2L\{\sin x\} + 3L\{\cos 2x\}$

$= 2\cdot\frac{1}{s^2+1^2} + 3\frac{s}{s^2+2^2} = \frac{2}{s^2+1} + \frac{3s}{s^2+4}$.

ÖRNEK ! $L\{xe^{4x}\} = ?$

Çözüm : (I) : 12. formülde $n=1$, $a=4$ alınırsa

$L\{xe^{4x}\} = \frac{1}{(s-4)^2}$

(II) : 2. özellik kullanılırsa $L\{e^{ax}f(x)\} = F(s-a)$ idi.

$F(s) = L\{f(x)\} = L\{x\} = \frac{1}{s^2}$

ve

$L\{e^{4x}\cdot x\} = F(s-4) = \frac{1}{(s-4)^2}$

bulunur.

(5)

ÖRNEK : $L\{e^{-2x} \cdot \sin 5x\} = ?$

Çözüm (I) : Tabloda 8. formülde $b=-2$ ve $a=5$ için

$$L\{e^{-2x} \sin 5x\} = \frac{5}{[s-(-2)]^2+5^2} = \frac{5}{(s+2)^2+25}$$

(II) : $L\{\sin 5x\} = \dfrac{5}{s^2+25}$ ve

$$L\{e^{-2x} \sin 5x\} = F\big(s-(-2)\big) = F(s+2) = \frac{5}{(s+2)^2+25}$$

ÖRNEK : $L\{x \cos\sqrt{7}\, x\} = ?$

Çözüm : (I) : Tabloda 11. formülde $a=\sqrt{7}$ alınırsa

$$L\{x \cos\sqrt{7}\, x\} = \frac{s^2-(\sqrt{7})^2}{[s^2+(\sqrt{7})^2]^2} = \frac{s^2-7}{(s^2+7)^2}$$

(II) :
$$L\{\cos\sqrt{7}\, x\} = \frac{s}{s^2+(\sqrt{7})^2} = \frac{s}{s^2+7}$$

ve

$$L\{x \cos\sqrt{7}\, x\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+7}\right) = \frac{s^2-7}{(s^2+7)^2}$$

ÖRNEK : $L\{e^{-x} \cdot x \cos 2x\} = ?$

Çözüm : $L\{x \cos 2x\} = \dfrac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$ dır.

$$L\{e^{-x}\, x \cos 2x\} = \frac{(s+1)^2-4}{[(s+1)^2+4]^2}$$

6

ÖRNEK : $L\left\{ \frac{\sin 3X}{X} \right\} = ?$

Çözüm : $f(x) = \sin 3X$ alınırsa

$$F(s) = \frac{3}{s^2+9} \quad \text{veya} \quad F(t) = \frac{3}{t^2+9} \quad \text{bulunur.}$$

4. özellik kullanılırsa

$$L\left\{ \frac{\sin 3X}{x} \right\} = \int_s^{\infty} \frac{3}{t^2+9}\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_s^{R} \frac{3}{t^2+9}\,dt$$

$$= \lim_{R\to\infty} \arctan \frac{t}{3} \Big|_s^R = \lim_{R\to\infty} \left(\arctan \frac{R}{3} - \arctan \frac{s}{3} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{3}$$

TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

$F(s)$ nın $L^{-1}\{F(s)\}$ ile gösterilen ters Laplace dönüşümü $L\{f(x)\} = F(s)$ özelliğine sahip bir $f(x)$ fonksiyonudur.
Eğer $F(s)$ belirli biçimlerden birine sahip değilse bazen cebirsel işlemlerle böyle bir biçime dönüştürülebilir.

Paydalar genellikle iki metotla bilinen biçimlere dönüştürülür. Bunlar kareye tamamlama ve Basit kesirler metodudur.

Kareye tamamlama metodunda, paydadaki polinom karelerin toplamı şeklinde yazılmaya çalışılır.

Basit kesirler metodunda $\frac{a(s)}{b(s)}$ biçimindeki bir fonksiyon diğer kesirlerin toplamı haline çevrilir. Eğer $b(s)$ ifadesi $(s-a)^m$ şeklindeyse

$$\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s-a)^n}$$

şeklinde kesirler toplamı atanır.

(7)

ÖRNEK : $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = ?$

ÇÖZÜM : $L\{1\} = \frac{1}{s}$ olduğundan $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$ dir.

ÖRNEK : $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-8}\right\} = ?$

ÇÖZÜM : $L\{e^{8x}\} = \frac{1}{s-8}$ olduğundan $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-8}\right\} = e^{8x}$ dir.

ÖRNEK : $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6}\right\} = ?$

ÇÖZÜM : $L\{\cos\sqrt{6}\,x\} = \frac{s}{s^2+(\sqrt{6})^2} = \frac{s}{s^2+6}$ old.

$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6}\right\} = \cos\sqrt{6}\,x$ dir.

ÖRNEK : $L^{-1}\left\{\frac{5s}{(s^2+1)^2}\right\} = ?$

ÇÖZÜM :
$$L^{-1}\left\{\frac{5s}{(s^2+1)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{5}{2}\cdot 2s}{(s^2+1)^2}\right\}$$
$$= \frac{5}{2}\,L^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{5}{2}\,x\sin x$$

ÖRNEK : $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+9}\right\} = ?$

ÇÖZÜM
$$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+9}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}$$
$$= \cos 3x + L^{-1}\left\{\frac{1}{3}\,\frac{3}{s^2+9}\right\}$$
$$= \cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x$$

8

ÖRNEK : $L^{-1}\left\{ \dfrac{s}{(s-2)^2+9} \right\} = ?$

ÇÖZÜM : $L^{-1}\left\{ \dfrac{s}{(s-2)^2+9} \right\} = L^{-1}\left\{ \dfrac{(s-2)+2}{(s-2)^2+9} \right\}$

$$= L^{-1}\left\{ \frac{s-2}{(s-2)^2+9} \right\} + L^{-1}\left\{ \frac{2}{(s-2)^2+9} \right\}$$

$$= e^{2x}\cos 3x + L^{-1}\left\{ \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(s-2)^2+9} \right\}$$

$$= e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3} e^{2x}\sin 3x$$

ÖRNEK : $L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{s^2-2s+9} \right\} = ?$

ÇÖZÜM : $s^2-2s+9 = (s^2-2s+1)+8$

$$= (s-1)^2+8 = (s-1)^2+(\sqrt{8})^2$$

$$L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2-2s+9} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{1}{(s-1)^2+(\sqrt{8})^2} \right\}$$

$$= L^{-1}\left\{ \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{8}}{(s-1)^2+(\sqrt{8})^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} L^{-1}\left\{ \frac{\sqrt{8}}{(s-1)^2+(\sqrt{8})^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot e^{x} \sin\sqrt{8}\, x$$

9

ÖRNEK : $L^{-1}\left\{\dfrac{s+2}{s^2-3s+4}\right\} = ?$

Çözüm : $s^2-3s+4 = \left(s^2-3s+\frac{9}{4}\right)+\underbrace{\frac{7}{4}}_{4-\frac{9}{4}=\frac{7}{4}} = \left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$

$$L^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2-3s+4}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s-\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}}{(s-\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s-\frac{3}{2}}{(s-\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{\frac{7}{2}}{(s-\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s-\frac{3}{2}}{(s-\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2}\right\} + \sqrt{7}\cdot L^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{(s-\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2}\right\}$$

$$= e^{\frac{3}{2}x}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + \sqrt{7}\, e^{\frac{3}{2}x}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x$$

ÖRNEK : $L^{-1}\left\{\dfrac{s+3}{(s-2)(s+1)}\right\} = ?$

Çözüm : $\dfrac{s+3}{(s-2)(s+1)} \equiv \dfrac{A}{\underset{(s+1)}{s-2}} + \dfrac{B}{\underset{(s-2)}{s+1}}$

$s+3 \equiv A(s+1)+B(s-2) = (A+B)s + A - 2B \Rightarrow A=\frac{5}{3},\ B=-\frac{2}{3}$

$$L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s-2)(s+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{5}{3}}{s-2}+\frac{-\frac{2}{3}}{s+1}\right\}$$

$$= \frac{5}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{2}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= \frac{5}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x}$$

(10)

ÖRNEK : $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\} = ?$

Çözüm : $$\frac{1}{(s+1)(s^2+1)} \equiv \underset{(s^2+1)}{\frac{A}{s+1}} + \underset{(s+1)}{\frac{Bs+C}{s^2+1}}$$

$$1 \equiv A(s^2+1) + (Bs+C)(s+1) = \underbrace{(A+B)}_{=0}s^2 + \underbrace{(B+C)}_{=0}s + \underbrace{(A+C)}_{=1}$$

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{s+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}{s^2+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

ÖRNEK : $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+4)}\right\} = ?$

Çözüm : $$\frac{1}{s(s^2+4)} \equiv \underset{(s^2+4)}{\frac{A}{s}} + \underset{(s)}{\frac{Bs+C}{s^2+4}}$$

$$1 \equiv A(s^2+4) + (Bs+C)\cdot s$$

$$1 \equiv (A+B)s^2 + Cs + 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = 0$$

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{\frac{1}{4}}{s} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)s}{s^2+4}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{4}\cos 2x$$

11

ÖRNEK : $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{8}{s^3(s^2-s-2)}\right\} = ?$

Çözüm : $s^2-s-2 = (s-2)(s+1)$ old.

$$\frac{8}{s^3(s^2-s-2)} = \frac{8}{s^3(s-2)(s+1)} \equiv \underset{s^2(s-2)(s+1)}{\frac{A}{s}} + \underset{s(s-2)(s+1)}{\frac{B}{s^2}} + \underset{(s-2)(s+1)}{\frac{C}{s^3}} + \underset{s^3(s+1)}{\frac{D}{s-2}} + \underset{s^3(s-2)}{\frac{E}{s+1}}$$

$$8 \equiv As^2(s-2)(s+1) + Bs(s-2)(s+1) + C(s-2)(s+1) + Ds^3(s+1) + E(s-2)s^3$$

Sırasıyla $s=-1$, $s=2$ ve $s=0$ alınırsa

$E = \frac{8}{3}$, $D = \frac{1}{3}$ ve $C=-4$ elde edilir.

Daha sonra $s=1$ ve $s=-2$ alınırsa $(s=-1,2,0$ hariç$)$

$A+B=-1$ ve $2A-B=-8$

$\Rightarrow$ $A=3$ ve $B=2$ bulunur.

$$\frac{8}{s^3(s^2-s-2)} = -\frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^3} + \frac{\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{\frac{8}{3}}{s+1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{s^3(s^2-s-2)}\right\} = -3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}$$
$$+ \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{8}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= -3 + 2x - 2x^2 + \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{8}{3}e^{-x}$$

(12)

SABİT KATSAYILI LİNEER DİF. DENKLEMLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ

Türevlerin Laplace Dönüşümleri

$L\{y(x)\}$'i $Y(s)$ ile gösterelim. Bu durumda çok genel koşullar altında $y(x)$'in n-yinci türevinin Laplace dönüşümü

$$L\{y^{(n)}\} = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \cdots - s\, y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0) \quad \cdots (6.1)$$

(Sadece $x=0$'daki koşullar veriliyor)

dır. Eğer $x=0$'da $y(x)$ üzerindeki başlangıç koşulları

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \quad \ldots \quad (6.2)$$

şeklinde veriliyorsa bu durumda

$$L\{y^{(n)}\} = s^n Y(s) - c_0 s^{n-1} - c_1 s^{n-2} - \cdots - c_{n-2} s - c_{n-1} \quad \ldots \quad (6.3)$$

olarak yazılabilir.

$n=1$ ve $n=2$ özel durumları için

$$L\{y'(x)\} = s\,Y(s) - c_0 \quad \ldots \quad (6.4)$$

$$L\{y''(x)\} = s^2 Y(s) - c_0 s - c_1 \quad \ldots \quad (6.5)$$

eşitlikleri elde edilir. $\{L\{y(x)\} = Y(s)$ şeklindeydi.$\}$

Diferensiyel Denklemlerin Çözümleri

Laplace dönüşümleri, başlangıç koşulları belirlenen n-yinci mert. sabit katsayılı lineer dif. denklemi

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + b_1 y' + b_0 y = g(x) \quad \ldots \quad (6.6)$$

ile verilen başlangıç değer problemini çözmek için kullanılır. Öncelikle (6.6) denkleminin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınıp $Y(s)$ için bir cebirsel denklem elde edilir. Daha sonra bu denklem $Y(s)$ için çözülür ve son olarak da $y(x) = L^{-1}\{Y(s)\}$ çözümünü elde etmek için ters Laplace dönüşümü alınır.

(13)

ÖRNEK : $y' - 5y = 0$, $y(0) = 2$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm : $y' - 5y = 0$ denkleminin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{y'\} - 5L\{y\} = L\{0\}$$

elde edilir. $c_0 = 2$ olmak üzere (6.4) eşitliği kullanılırsa

$$[sY(s) - 2] - 5Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{2}{s-5}$$

bulunur. Son olarak $Y(s)$ nin ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s-5}\right\}$$

$$= 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = 2e^{5x}$$

bulunur.

ÖRNEK : $y' - 5y = e^{5x}$, $y(0) = 0$ başlangıç değer prob. çözünüz.

Çözüm: Denklemin her iki tarafının Laplace dön. alınırsa

$$L\{y'\} - 5L\{y\} = L\{e^{5x}\}$$

olur. $c_0 = 0$ için (6.4) eşitliği kullanılırsa

$$[sY(s) - 0] - 5Y(s) = \frac{1}{s-5}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{(s-5)^2} \quad \text{bulunur.}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-5)^2}\right\} = xe^{5x} \quad \text{elde edilir.}$$

(14)

ÖRNEK : $y' + y = \sin x \quad , \quad y(0) = 1$ problemini çözünüz.

Çözüm : $L\{y'\} + L\{y\} = L\{\sin x\}$

$$\Rightarrow \quad [sY(s) - 1] + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} + \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) + e^{-x}$$

ÖRNEK : $y'' + 4y = 0 \quad , \quad y(0) = 2 \, , \quad y'(0) = 2$ prob. çözünüz.

Çözüm : $L\{y''\} + 4L\{y\} = L\{0\}$

$c_0 = 2$ ve $c_1 = 2$ için (6.5) eşitliği kullanılırsa

$$[s^2 Y(s) - 2s - 2] + 4Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{2s+2}{s^2+4} = \frac{2s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$= 2\cos 2x + \sin 2x$$

bulunur.

(15)

ÖRNEK : $y'' - 3y' + 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$

problemini çözünüz.

Çözüm : $L\{y''\} - 3L\{y'\} + 4L\{y\} = L\{0\}$

$C_0 = 1$ ve $C_1 = 5$ için (6.4) ve (6.5) 'den

$$[s^2 Y(s) - s - 5] - 3[sY(s) - 1] + 4Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s+2}{s^2 - 3s + 4}$$

bulunur.

$$y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2-3s+4}\right\}$$

$$= e^{\frac{3}{2}x} \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + \sqrt{7}\, e^{\frac{3}{2}x} \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x$$

ÖRNEK : $y'' - y' - 2y = 4x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$ problemini

çözünüz.

Çözüm : $L\{y''\} - L\{y'\} - 2L\{y\} = 4L\{x^2\}$

$C_0 = 1$ ve $C_1 = 4$ için

$$[s^2 Y(s) - s - 4] - [sY(s) - 1] - 2Y(s) = \frac{8}{s^3}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s+3}{s^2-s-2} + \frac{8}{s^3(s^2-s-2)}$$

$$\Rightarrow y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2-s-2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{8}{s^3(s^2-s-2)}\right\}$$

$$\Rightarrow y(x) = \left(\frac{5}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x}\right) + \left(-3 + 2x - 2x^2 + \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{8}{3}e^{-x}\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = 2e^{2x} + 2e^{-x} - 2x^2 + 2x - 3$$

çözümü bulunur.

16

ÖRNEK : $y''' + y' = e^x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm : $L\{y'''\} + L\{y'\} = L\{e^x\}$

(6.4) eşitliği $n=3$ için kullanılırsa

$$[s^3Y(s) - 0.s^2 - 0.s - 0] + [sY(s) - 0] = \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^3+s)}$$

elde edilir. Buradan

$$y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)(s^2+1)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad A = -1 \ , \quad B = \frac{1}{2} \ , \quad C = \frac{1}{2} \ , \quad D = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = L^{-1}\left\{-\frac{1}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}}{s^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = -1 + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

çözümü bulunur.

(17)

ÖRNEK : $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$ denklemini çözünüz.

ÇÖZÜM : Başlangıç koşulları verilmemiştir. Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{y''\} - 3L\{y'\} + 2L\{y\} = L\{e^{-x}\}$$

$$\Rightarrow \left[s^2 Y(s) - sc_0 - c_1\right] - 3\left[sY(s) - c_0\right] + 2\left[Y(s)\right] = \frac{1}{s+1}$$

yazılabilir. Burada c_0 ve c_1 sabitleri $y(0)$ ve $y'(0)$ başlangıç koşullarını temsil ettiğinden keyfi sabit olarak kalırlar.

O halde

$$Y(s) = c_0 \cdot \frac{s-3}{s^2-3s+2} + c_1 \frac{1}{s^2-3s+2} + \frac{1}{(s+1)(s^2-3s+2)}$$

bulunur. Basit kesirlere ayırma metoduyla

$$y(x) = c_0 L^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} + \frac{-1}{s-2}\right\} + c_1 L^{-1}\left\{\frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s-2}\right\}$$

$$+ L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{6}}{s+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{\frac{1}{3}}{s-2}\right\}$$

$$\Rightarrow y(x) = c_0\left(2e^{x} - e^{2x}\right) + c_1\left(-e^{x} + e^{2x}\right) + \left(\tfrac{1}{6}e^{-x} - \tfrac{1}{2}e^{x} + \tfrac{1}{3}e^{2x}\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = \left(2c_0 - c_1 - \tfrac{1}{2}\right)e^{x} + \left(-c_0 + c_1 + \tfrac{1}{3}\right)e^{2x} + \tfrac{1}{6}e^{-x}$$

$$\Rightarrow y(x) = d_0 e^{x} + d_1 e^{2x} + \tfrac{1}{6} e^{-x}$$

çözümü bulunur.