FORMÜLLER

- AYRILABİLİR DİF. DENKLEMLER

$y' = \frac{dy}{dx}$ → ilk iş y' yerine $\frac{dy}{dx}$ yazmaktır.

$(y'liler)\,dy = (x'liler)\,dx$ → Her iki tarafın integrali alınır.

NOT: Sadece x'in tarafında +c konulur.

- İNTEGRAL ÇARPANI METODU

★ $y' + p(x)y = q(x)$ ⇒ Bu formata uyan diferansiyellerin hepsini çözebilen yöntemdir.

$\mu = e^{\int p(x)dx}$ ⇒ integral çarpanı

$$\underbrace{\mu \cdot (y' + p(x)y)} = \mu \cdot q(x)$$

$$\boxed{(\mu \cdot y)' = \mu \cdot q(x)}$$ ⇒ Her iki tarafın integrali alınır ve sonuca ulaşılır.

- TAM DİFERANSİYEL

$(M)dx + (N)dy = 0$

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$ → Dif. tam dif'tir

Dif. denklem tam olunca;

$\int M dx =$
$\int N dy =$
} Aynıdır

dahildir

$c(x)$ → M integral sonucunda sadece x'e bağlı terimlere eşittir.

$c(y)$ → N integral sonucunda sadece y'ye bağlı terimlere eşittir.

- İNTEGRAL ÇARPANI YARDIMIYLA TAM DİFERANSİYELLERİ ÇÖZME

$Mdx + Ndy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ ⇒ Tam dif değil

} o halde integral çarpanı bulunur. (μ)

$$M_y = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$N_x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\frac{M_y - N_x}{N}$ = sadece x'e bağlı çıkarsa

$\frac{N_x - M_y}{M}$ = sadece y'ye bağlı çıkarsa

} integral çarpanı vardır.

$\mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$ veya $\mu = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$

- BERNOULLİ DİF =

$\boxed{- y' + p(x)y = q(x)y^n}$ → Lineer olmayan

$V = y^{1-n}$ ⇒ $V' + p(x)v = q(x)$ ve integral çarpanı metodu ile çözülür.

- RİCCATİ DİF =

A) $\boxed{y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)}$ =

A) $\boxed{\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)}$

★ y_1 verilecek

Yapılacak dönüşüm ⇒ $y = v + y_1$

⇒ $y' = v' + y_1'$

⇒ BERNOULLİ ⇒ $v' + p(x)v = q(x).v^n$ (v'yi bulacağız)

$y = v + y_1$.

- HOMOJEN DİF'LERİN ÇÖZÜMÜ =

- $y = vx$ dönüşümü yapılır. (v'li hale gelir, ayrılabilir bir diferansiyel dur)

★ KARAKTERİSTİK DENKLEM ÇÖZÜMÜNDE İHTİMALLER

1.Durum: $\Delta > 0$ ⇒ $\boxed{y_{Homojen} = c_1 . e^{r_1 x} + c_2 . e^{r_2 x}}$

2.Durum: $\Delta = 0$ ⇒ $\boxed{y_{Homojen} = c_1 . e^{r_1 x} + c_2 . e^{r_2 x} . x}$, $\boxed{r_1 = r_2}$

dbb

3.Durum: $\Delta < 0$ ⇒ $\left.\begin{array}{l} r_1 = a + bi \\ r_2 = a - bi \end{array}\right\}$ reel = a, sanal = b (daima pozitif)

$\boxed{y_{Homojen} = c_1 . e^{ax} . \cos(bx) + c_2 . e^{ax} . \sin(bx)}$

- BELİRSİZ KATSAYILAR METODU

1. Adım: $y_{Genel} = y_H + y_ö$

2. Adım: y_H bulunur

3. Adım: $y_ö$ bulunur $\Rightarrow$ - - - - $= x+1$ olsun

$$y_ö = Ax + B$$
$$y_ö' = A$$
$$y_ö'' = 0$$

- - - - olan kısımda y, y' ve y'' yerlerine yazıp $x+1$'e eşitleriz ve A ile B değerlerini buluruz.

Bulduktan sonra $Ax+B$'de yerine koyarak $y_ö$ bulunur

- PARAMETRELERİN DEĞİŞİMİ METODU

1. Adım: $y_{Genel} = y_{Homojen} + y_{özel}$

2. Adım: y_H bulunur

3. Adım: Wronskian bulunur. y_1 ve y_2 denklemin kökleridir.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \Rightarrow y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'$$

4. Adım: $y_{özel} = y_1 \cdot u_1 + y_2 \cdot u_2$

$$u_1 = -\int \frac{y_2 \cdot f(x)}{w \cdot a} dx$$

$$u_2 = \int \frac{y_1 \cdot f(x)}{w \cdot a} dx$$

$f(x) \rightarrow$ diferansiyelin eşiti

w

$a \rightarrow y''$'nin katsayısı

+c konulmaz

- CAUCHY EULER DİF =

$$x^n y'' + x^{n-1} y' + x^{n-2} y = 0$$

$\boxed{y = x^r}$ ⇒ y'nin denkleme göre kaçıncı derecedense o kadar türevi alınır

1.Adım: ve karakteristik denklem elde edilir.

2.Adım: 1) $\Delta > 0$ $\quad y_H = c_1 . x^{r_1} + c_2 . x^{r_2}$

2) $\Delta = 0$ $\quad y_H = c_1 . x^{r_1} + c_2 . x^{r_2} . \ln x$

3) $\Delta < 0$ $\quad y_H = c_1 . x^{a} . \cos(b . \ln x) + c_2 . x^{a} . \sin(b . \ln x)$

$r_1 = a + bi$ $\quad$ reel = a

$r_2 = a - bi$ $\quad$ sanal = b

- HOMOJEN OLMAYAN CAUCHY EULER DİF =

$$x^n y'' - 3x^{n-1} y' + x^{n-2} y = \underline{f(x)}$$ (Homojen olmayan)

$y_{Genel} = y_{Homojen} + y_{özel}$

↳ parametrelerin değişim yöntemi

1.Adım: $y_G = y_H + y_ö$

2.Adım: y_H bulunur (Bu işlemleri yaparken karşı tarafı sıfır olarak kabul edilir)

$\boxed{y = x^r}$ → ve karakteristik denklem elde edilir.

3.Adım: $y_ö$ → Parametrelerin değişimi

y_1 ve y_2 köklerdir

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

4.Adım: $y_ö = u_1 . y_1 + u_2 . y_2$

$$\underbrace{u_1 = -\int \frac{y_2 . f(x)}{W . a} dx}_{+c \text{ konulmaz}} \quad , \quad \underbrace{u_2 = \int \frac{y_1 . f(x)}{W . a} dx}_{+c \text{ konulmaz}}$$

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

- $f(t)$ veya $f(x) \xrightarrow[\text{Dönüşümü}]{\text{integral}} F(s)$
- Değişken x veya t'den s'ye dönüşür.

NOT: $\int e^{ax+b}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$

LAPLACE FORMÜLÜ: $L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st}\,dt$

KURALLAR

① Sabit Sayının L.D. =

$$L\{a\} = \frac{a}{s}$$

② $L\{t\} = \frac{1}{s^2}$ 'dir

$$L\{f(t) \mp g(t)\} = L\{f(t)\} \mp L\{g(t)\}$$

③ $L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ $n \in Z^+$

④ !!! # $L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$, $L\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$

$L\{e^{5t}\} = \frac{1}{s-5}$

⑤ $L\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$

⑥ $L\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$

⑦

$L\{e^{at} \cdot t\} \Rightarrow \frac{1}{(s-a)^2}$

$L\{e^{at} \cdot t^n\} \Rightarrow \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$L\{e^{at} \cdot \sin(bt)\} \Rightarrow \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$

$L\{e^{at} \cdot \cos(bt)\} \Rightarrow \frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}$

NOT: e^{at} yanına geldiği fonk'nun kuralında s yerine $s-a$ yazılmasına neden olur.

⑧ $\mathcal{L}\{t^n \cdot \sin(at)\} = (-1)^n \cdot \left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)\frac{d^n}{ds^n}$ → türev alınacak parantez içi

$\mathcal{L}\{t^n \cdot \cos(at)\} = (-1)^n \cdot \left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\frac{d^n}{ds^n}$

TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

★ $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ 'dir.

① $\mathcal{L}\{a\} = \frac{a}{s} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-4}{s}\right\} = -4$

② $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2}\right\} = 3t$

③ $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{t^2}{2}$

④ $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+5}\right\} = 2 \cdot e^{-5t}$

⑤ $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+25}\right\} = \frac{\sin 5t}{5}$

⑥ $\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t$

⑦ # $\mathcal{L}\{e^{at} \cdot t\} \Rightarrow \frac{1}{(s-a)^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} = e^{3t} \cdot t$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+4)^2}\right\} = 2 \cdot e^{-4t} \cdot t$

$\mathcal{L}\{e^{at} \cdot t^n\} \Rightarrow \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$\mathcal{L}\{e^{at} \cdot \sin(bt)\} \Rightarrow \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$

$\mathcal{L}\{e^{at} \cdot \cos(bt)\} \Rightarrow \frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}$

ÖRNEK:

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2+25}\right\} = \frac{e^{-4t} \cdot \sin 5t}{5}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)^2+4}\right\} = e^{3t} \cdot \sin 2t$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+16}\right\} = e^{-t} \cdot \cos 4t$

(1)

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

Yüksek mertebeden Lineer Dif. Denk.

(Belirsiz katsayılar metodu)

1) Adi dif. denklem

$\hookrightarrow \frac{dy}{dx} = y'$

$\frac{d^2y}{dx^2} = y''$

$y' - 3xy = 2$

$y'' - 3y' - 4y = 0$

$\frac{dy}{dx} = 4$

Kısmi dif denklem

$\hookrightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = y_x$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y_{xx}$

$y_x + 3x = 4$

$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$

2) Diferansiyelin Derecesi

$\hookrightarrow y' + 3xy = 5 \rightarrow$ 1. derece dif

$y'' + 3y' = 5 \Rightarrow$ 2. " "

3) Lineer – Lineer Olmayan

★ y veya y''li ifadelerin üssü alınırsa lineerlik bozulur.

★ $y^4, (y')^3, (y'')^{1/3}$

★ y ile y' çarpma durumunda bulunursa

$y.y', \quad y^2 . y'''$

★ y liler e'nli üssünde, sin - cos gibi ifadelerin içinde yazılırsa

★ $\sin(x+y), \quad e^{xy}$

$y''' - 4y'' - 5y' - 6y = x^5$ (lineer)

$yy'' - 5x = 1$ (lineer olmayan)

$y' - 3xy = y^3$ (lineer ")

$y' - 4xy = e^{5x}$ lineer

$y'' - 4y = e^{y}$ (lineer değil)

4) Homojen - Homojen Olmayan

↳ Bütün y'liler aynı tarafa toplandığında, y'li olmayanlarda diğer tarafa toplandığında y'lilerin karşısı 0 ise homojen, 0 değil ise homojen değildir.

7

* $y'' - 3y' - 4y = 0$ (homojen) 15
* $y' - 4xy = 0$ (") 20 26
* $x^3 y'' - 4e^x y' - 5xy = 0$ (Homojen) 25 14
* $y'' - 3y' - 4 = 0 \longrightarrow y'' - 3y' = 4$ (Homojen Değil) 27 27
* $y' - 4xy = e^x \longrightarrow$ (Homojen Değil) 14 26
* $y' = 4y \longrightarrow$ (Homojen) $\longrightarrow y' - 4y = 0$ 65

ÖRNEK

$(x^3+1)y'' + 4y' + 5e^x y = x^2 + 1$

↳ * Adi dif. denklem
* 2. derece
* Lineer
* Homojen Değil

ÖRNEK

$y_{xx} - 3y_x = 4y^2 + 1$

* Kısmi dif. denklem
* 2. derece
* Lineer Değil
* Homojen Değil

(2)

1. DERECE DİFERANSİYELLER VE ÇÖZÜM TEKNİKLERİ

1. derece dif

$y' + 3y = 4$

$xy' - 4x^2 = y^4$

$y' = \frac{dy}{dx} \quad 3x\frac{dy}{dx} = 2y$

2. derece dif

$y'' - 3y' + 4y = e^x$

Nasıl Çözülür? ÇÖZÜM TEKNİKLERİ

★) Ayrılabilir dif. denklemler

★) İntegral çarpanı tekniği (1. derece lineer dif. denklemler)

★) Tam diferansiyeller

★) Dönüşüm Gerektirenler:

- Bernoulli
- Riccati
- $y = vx$ metodu (Homojen difler)

⋮

} Ana amaç yukarıdaki kanı başlıklara göre çevirip çözmek.

AYRILABİLİR DİFERANSİYEL DENKLEMLER

1. derece dif

İlk aklına gelmesi gereken yöntemdir.

$y' = \frac{dy}{dx}$ → İlk iş y' yerine $\frac{dy}{dx}$ yazıp ayrılabilirliği araştırmalıyız.

$(y'liler)\,dy = (x'liler)\,dx$ → Ayrılabilirdir.

★ Her iki tarafın integrali alınarak çözüme ulaşılır.

ÖRNEK

$y' = 6y^2x$ dif'in çözümü nedir?

ÇÖZÜM: 1. Adım → $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6y^2x$

$dy = 6y^2 \cdot x \cdot dx$

$\frac{dy}{y^2} = 6x\,dx \Rightarrow$ Ayrılabilir dif. denklem

2. Adım → $\int \frac{dy}{y^2} = \int 6x\,dx \Rightarrow \int y^{-2}dy = \int 6x\,dx \Rightarrow \frac{y^{-1}}{-1} = \frac{6x^2}{2} + C$

$y^{-1} = -3x^2 - C$

$\boxed{y = \frac{1}{-3x^2 - C}}$ ↳ sonuç

NOT: sadece x'in tarafına +c konulur.

ÖRNEK: $y' = \dfrac{3x^2+4x-4}{2y-4}$, $y(1)=3$ başlangıç değer problemini çözünüz

ÇÖZÜM:

1. Adım: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+4x-4}{2y-4} \Rightarrow \int (2y-4)\,dy = \int (3x^2+4x-4)\,dx$

$$\Rightarrow \boxed{y^2-4y = x^3+2x^2-4x+C}$$

↳ kapalı çözüm

2. Adım: $y(\underset{x}{1}) = \underset{y}{3}$

$$\Rightarrow 9-12 = 1+2-4+c$$

$$-3 = -1+c$$

$$\boxed{-2 = c}$$

$$\boxed{y^2-4y = x^3+2x^2-4x-2}$$

ÖRNEK: $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$ diferansiyelini çözünüz

ÇÖZÜM: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \int \dfrac{dy}{y^3} = \int \dfrac{\overset{du}{2x\,dx}}{\sqrt{\underbrace{1+x^2}_{u}}} \cdot \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{y^{-2}}{-2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$\Rightarrow -\frac{y^{-2}}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$\Rightarrow -\frac{y^{-2}}{2} = \sqrt{1+x^2} + C$$

$$\Rightarrow y^{-2} = -2\sqrt{1+x^2} - 2c$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{-2\sqrt{1+x^2} - 2c}$$

3

İNTEGRAL ÇARPANI METODU

$\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$ ⇒ Bu formata uyan diferansiyellerin hepsini çözebilen yöntemdir.

↳ 1. derece lineer dif.'lerin çözümü olarak da adlandırılır.

integral çarpanıdır ← $\boxed{\mu = e^{\int p(x)dx}}$ • integral çarpanı bulunduktan sonra diferansiyelin her iki tarafı integral çarpanı ile çarpılır.

$$\underbrace{\mu \cdot (y' + p(x)y)} = \mu \cdot q(x)$$

$$(\mu \cdot y)' = \mu \cdot q(x)$$

ardından her iki tarafın integrali alınır.

ÖRNEK: $y' + y = x \quad , \quad y(0) = 2$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm = $y' + p(x)y = q(x)$ ✓

1. adım: $\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 1 dx} = e^x$ (+c konulmaz)

2. Adım: $\underbrace{e^x \cdot (y' + y)} = x \cdot e^x$

$\Rightarrow (e^x \cdot y)' = x \cdot e^x$

$\Rightarrow \int (e^x y)' dx = \int x e^x dx$

$\Rightarrow e^x y = xe^x - e^x + c$

$\Rightarrow y = x - 1 + \dfrac{c}{e^x}$

$u \int dv$ LAPİÜ

$\boxed{u = x}$ $\boxed{e^x dx = dv}$

$\dfrac{du}{dx} = 1$ $\boxed{v = e^x}$

$\boxed{du = dx}$

$u \cdot v - \int v \cdot du = x \cdot e^x - \int e^x dx$

$\boxed{= x \cdot e^x - e^x + c}$

3. Adım: $y(0) = 2$ (x ↑ 0, y ↑ 2)

$2 = 0 - 1 + \dfrac{c}{e^0}$

$\boxed{3 = c}$

$$\boxed{\Rightarrow y = x - 1 + \frac{3}{e^x}}$$

ÖRNEK : $xy' + 2y = 10x^2$ diferansiyelinin çözümü nedir?

ÇÖZÜM = $y' + \frac{2}{x}y = 10x$

$y' + p(x)y = q(x)$ ✓

1. Adım $\mu = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = x^{2\ln e} = x^2$

2. Adım =

$\underbrace{x^2 \cdot \left(y' + \frac{2}{x}y\right)} = 10x \cdot x^2$

integral türevi götürür. $\leftarrow \int (x^2 \cdot y)' = \int 10x^3$

$x^2 \cdot y = \frac{10x^4}{4} + c$

$\boxed{y = \frac{5}{2}x^2 + \frac{c}{x^2}}$ //

ÖRNEK : $\frac{dy}{dx} + y\cot x = \operatorname{cosec} x$ diferansiyelinin çözümü nedir?

ÇÖZÜM = $y' + \cot x \cdot y = \operatorname{cosec} x$

$y' + p(x)y = q(x)$ ✓

$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c$

$\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + c$

1. Adım

$\mu = e^{\int \cot x\, dx} = e^{\ln|\sin x|} = \sin x^{\ln e} = \sin x$

2. Adım :

$\underbrace{\sin x \cdot (y' + \cot x y)} = \frac{1}{\sin x} \cdot \sin x$

$\int (\sin x \cdot y)' = \int 1$

$\sin x \cdot y = x + c$

$\boxed{y = \frac{x+c}{\sin x}}$ //

4

TAM DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$$\boxed{Mdx + Ndy = 0}$$

$2xy' = 3x^2 - y + 1$ olsun

$2x\frac{dy}{dx} = 3x^2 - y + 1$

$2x\,dy = (3x^2 - y + 1)dx$

$\underbrace{(3x^2 - y + 1)}_{M}dx + \underbrace{(-2x)}_{N}dy = 0$

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

↳ Dif. tamdır denir.

Dif. denklem tam olunca

$\int Mdx =$
$\int Ndx =$ ayrıdırlar **

ÖRNEK: $\underbrace{(2xy - 9x^2)}_{M}dx + \underbrace{(2y + x^2 + 1)}_{N}dy = 0$ diferansiyelinin çözümü nedir?

1. Adım ⇒ $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \quad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$ ⇒ Tam dif.

2. Adım ⇒ $\overset{①}{\int 2xy - 9x^2\,dx} \overset{?}{=} \overset{②}{\int 2y + x^2 + 1\,dy}$

① → $\frac{2x^2}{2}y - \frac{9x^3}{3} + c(y) = x^2y - 3x^3 + c(y)$

Alttaki integral sonucunda sadece y'ye bağlı terimlere eşittir.
$c(y) = y^2 + y$ 'dir.

② → $y^2 + x^2y + y + c(x)$

↳ üstteki integral sonucunda sadece x'e bağlı terimlere eşittir.
$c(x) = -3x^3$

3. Adım ⇒ $\boxed{y^2 + x^2y + y - 3x^3 = c}$

veya

$$\boxed{F(x,y) = y^2 + x^2y + y - 3x^3 + c}$$

ÖRNEK : $\underbrace{(2y^2 e^{xy^2})}_{M} dx + \underbrace{(2xy e^{xy^2})}_{N} dy = 0$ diferansiyelini çözünüz.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y \cdot e^{xy^2} + 2y^2 \cdot 2xy \cdot e^{xy^2} = 4ye^{xy^2} + 4xy^3 \cdot e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y \cdot e^{xy^2} + 2xy \cdot \cancel{2xy}\, y^2 \cdot e^{xy^2} = 2ye^{xy^2} + \cancel{4x^2y^2}\, 2xy^3 e^{xy^2}$$

TAM DİF DEĞİL

ÖRNEK : $(2xy^2+4) + (2x^2y-6)y' = 0$ diferansiyelini çözünüz

$y' \rightarrow \frac{dy}{dx}$

$y(0) = 2$

$$(2xy^2+4)dx + (2x^2y-6)dy = 0$$

1. Adım ⇒ $\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy$ $\quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy$ ⇒ Tam dif.

2. Adım ⇒ $\int (2xy^2+4)dx = x^2y^2 + 4x + c(y)$

$$\int (2x^2y-6)dy = \frac{2x^2y^2}{2} - 6y + c(x)$$
$$= x^2y^2 - 6y + c(x)$$

$c(y) = -6y$

$c(x) = 4x$

3. Adım ⇒ $\boxed{x^2y^2 + 4x + (-6y) = c}$

4. Adım ⇒ $y(0) = 2$, $\quad x = 0$, $y = 2$

⇒ $0 + 0 - 12 = c$

$\boxed{c = -12}$

$$\boxed{\Rightarrow x^2+y^2+4x-6y=-12}$$

(5)

İNTEGRAL ÇARPANI YARDIMIYLA TAM DİFERANSİYELLERİ ÇÖZME

Dif tam olmadığında => int. çarpanı bulup tam yapabilir miyiz?

$$M dx + N dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \text{ tam değildir}$$

integral çarpanı bulup (μ bulup)

$M_y = \frac{\partial M}{\partial y}$

$N_x = \frac{\partial N}{\partial x}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{M_y - N_x}{N} &= \text{sadece } x\text{'e bağlı çıkarsa} \\ \frac{N_x - M_y}{M} &= \text{〃 } y\text{'ye 〃 〃} \end{aligned}\right\} \text{integral çarpanı vardır}$$

$$\mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} \quad \text{veya} \quad \mu = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$$

ÖRNEK: $\underbrace{(y^2 - x)}_{M} dx + \underbrace{2y}_{N} dy = 0$ diferansiyelini çözünüz.

1. Adım $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$ => Tam. dif değildir.

2. Adım => integral çarpanı aramalıyız

$$\left.\begin{aligned} \frac{M_y - N_x}{N} &= \text{sadece } x\text{'li} \\ \frac{N_x - M_y}{M} &= \text{sadece } y\text{'li} \end{aligned}\right\} \quad \frac{2y - 0}{2y} = 1 \text{ (sabit sayı sadece x'e bağlı kabul edilebilir)}$$

$$\underbrace{\frac{0 - 2y}{y^2 - x} = -\frac{2y}{y^2 - x} \; (x, y\text{'li})}_{\text{integral çarpanı elde edilemez}}$$

$$\mu = e^{\int 1 dx} = e^x \text{ (+c kullanılmaz)}$$

3. Adım => $e^x . \left[(y^2 - x) dx + 2y dy \right] = 0 . e^x$

$$\underbrace{(y^2 e^x - x e^x)}_{M} dx + \underbrace{(2y e^x)}_{N} dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2ye^x \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2ye^x \Rightarrow \text{Tam dif. oldu.}$$

4.Adım: $\int (y^2e^x - xe^x)\,dx = y^2e^x - xe^x + e^x + c(y)$

$\int (2ye^x dy) = \frac{2y^2}{\cancel{2}} e^x + c(x)$

$= y^2 e^x + c(x)$

$c(y) = 0$

$c(x) = -xe^x + e^x$

LAPTÜ

$\int xe^x dx$

$x = u \quad \int dv = \int e^x dx$

$du = dx \quad v = e^x$

$u.v - \int v.du$

$= x.e^x - \int e^x dx$

$= xe^x - e^x$

5.Adım: $\boxed{y^2e^x - xe^x + e^x = c}$

ÖRNEK: $\underbrace{(-2y^3+1)}_{M}dx + \underbrace{(3xy^2+x^3)}_{N}dy = 0$ diferansiyelini çözünüz.

Çözüm:

1.Adım: $\frac{\partial M}{\partial y} = -6y^2 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2 + 3x^2$ Tam dif değil

2.Adım: $\frac{M_y - N_x}{N}$ = sadece x'e göre $\Rightarrow \frac{-6y^2 - 3y^2 - 3x^2}{3xy^2 + x^3} = \frac{-9y^2 - 3x^2}{3xy^2 + x^3}$

$= \frac{-3(\cancel{3y^2+x^2})}{x(\cancel{3y^2+x^2})}$

$= -\frac{3}{x}$ ✓

$\mu = e^{\int -\frac{3}{x} dx} = e^{-3\ln|x|}$

$= x^{-3\ln|e|}$

$\Rightarrow x^{-3}$

3.Adım: $x^{-3}.[(-2y^3+1)dx + (3xy^2+x^3)dy] = 0.x^{-3}$

$\underbrace{(-2x^{-3}y^3 + x^{-3})}_{M}dx + \underbrace{(3x^{-2}y^2 + 1)}_{N}dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -6x^{-3}y^2 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -6x^{-3}y^2 \Rightarrow$ Tam dif.

4.Adım:

$\int -2x^{-3}y^3 + x^{-3}\,dx = \frac{-2x^{-2}y^3}{-2} + \frac{x^{-2}}{-2} + c(y) \Rightarrow x^{-2}y^3 - \frac{x^{-2}}{2} + c(y)$

$\int 3x^{-2}y^2 + 1\,dy = \frac{\cancel{3}x^{-2}y^3}{\cancel{3}} + y + c(x) \Rightarrow x^{-2}y^3 + y + c(x)$

$c(y) = y$

$c(x) = -\frac{x^{-2}}{2}$

5.Adım: $x^{-2}y^3 + y - \frac{x^{-2}}{2} = c$

(6)

BERNOULLİ DİF DENKLEMİ

$\boxed{y' + p(x)y = q(x)y^n}$

↳ Lineer olmayan

$\boxed{v = y^{1-n}}$ dönüşümü yapılır

$\Downarrow$

Bu dönüşüm sonrasında

$v' + p(x)v = q(x)$ ve integral çarpanı metodu ile çözülür

$y' + p(x)y = q(x)$

↓

integral çarpanı

ÖRNEK: $y' + \frac{4}{x}y = x^3y^2$ diferansiyelini çözünüz.

$\boxed{n = 2 \text{ 'dir}}$

$y' + p(x)y = q(x)y^n$

1.Adım: $\boxed{v = y^{1-n}} \Rightarrow \boxed{v = y^{-1}}$

$v' = -y^{-2} \cdot y'$

2.Adım: önce y' yerine konulur. $y' = -y^2 \cdot v'$ (mutlaka birer tane y sadeleşir)

$-y^2 \cdot v' + \frac{4}{x}y = x^3y^2$

$-yv' + \frac{4}{x} = x^3y$

3.Adım: $v = y^{-1} \rightarrow y = \frac{1}{v}$

$-\frac{v'}{v} + \frac{4}{x} = \frac{x^3}{v} \rightarrow v' + p(x)v = q(x)$

$\boxed{v' - \frac{4}{x}v = -x^3}$

4.Adım: integral çarpanı tekniği uygulanır.

$$\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln|x|} = x^{-4\ln|e|} = x^{-4}$$

$$\underbrace{x^{-4} \cdot \left(v' - \frac{4}{x}v\right)} = -x^3 \cdot x^{-4}$$

$$\int (x^{-4} \cdot v)' = \int -x^{-1} \Rightarrow x^{-4} \cdot v = -\ln|x| + c$$

$$\boxed{v = -x^4 \ln|x| + cx^4}$$

5.Adım: $v = y^{-1}$

$y = \frac{1}{v}$

$$\boxed{y = \frac{1}{-x^4\ln|x| + cx^4}}$$

(7)

RİCCATİ DİFERANSİYEL DENKLEMİ

1. derece dif. (+) Çözümünde dönüşüm gerektirir

$$\star\ \boxed{y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)} \quad \text{riccati}$$

$$\star\ \boxed{\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)}$$

$\star$ $y_1(x)$ verilecek

Yapılacak dönüşüm: $y = \underbrace{v}_{v(x)} + \underbrace{y_1}_{y_1(x)}$ → genel çözüm

$$y' = v' + y_1'$$

$y \to v$ ⇒ BERNOULLİ DİFERANSİYELİ

$$v' + p(x)v = q(x)\cdot v^n \quad \star$$

v^n'ye böleceğiz

$y = v + y_1$ → çözüm

ÖRNEK: $y' = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$; $x>0$, $y_1(x) = \frac{1}{x}$ ve $y(1)=2$ olan dif. denklemi çözünüz.

ÇÖZÜM:

$$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x) \quad \text{riccati}$$

1. Adım: $y = v + y_1 \to y = v + \frac{1}{x}$

$$y' = v' - \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow v' - \cancel{\frac{1}{x^2}} = \left(v + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{v + \frac{1}{x}}{x} - \cancel{\frac{1}{x^2}}$$

$$\Rightarrow v' = v^2 + \frac{2v}{x} + \cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{v}{x} - \cancel{\frac{1}{x^2}}$$

$$\Rightarrow v' = v^2 + \frac{1}{x}v \text{ olur}$$

$$\Rightarrow v' - \frac{1}{x}v = v^2 \quad \to \text{Bernoulli}$$

2.Adım:

$v = y^{1-n}$

Bernoulli dönüşüm yapılarak çözülen 1. derece dif.

$w = v^{1-n} \rightarrow v' - \frac{1}{x}v = v^2$

$w = v^{-1}$

$\boxed{w' = -v^{-2} \cdot v'} \rightarrow v' = -v^2 w'$

Önce v' yerine konulur

$-v^2 w' - \frac{1}{x}v = v^2$ (Mutlak birer tane v sadeleşir)

$-vw' - \frac{1}{x} = v$

Sonra $v = \frac{1}{w} \Rightarrow -\frac{w'}{w} - \frac{1}{x} = \frac{1}{w}$

integral çarpanı metodu kullanacağız

$y' + p(x)y = q(x)$

$\mu = e^{\int p(x)dx}$

$w' + \frac{1}{\cancel{x}}w = -\cancel{1}$

$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln(x)} = x^{\ln e} = x$

$\Rightarrow \underbrace{x \cdot \left(w' + \frac{w}{x}\right)} = -1 \cdot \cancel{x}$

$\int (x \cdot w)' = \int -x$

$xw = \frac{-x^2}{2} + c$

$\boxed{w = -\frac{\cancel{x}}{2} + \frac{c}{x}}$ $\quad w = v^{-1}$ idi

$\Rightarrow v = \frac{1}{w} \Rightarrow v = \frac{1}{-\frac{x}{2} + \frac{c}{x}}$ → Bernoulliye döndük.

Riccati $\rightarrow y = v + y_1$

$y(1) = 2$

$y = \frac{1}{-\frac{x}{2} + \frac{c}{x}} + \frac{1}{x}$

$2 = \frac{1}{-\frac{1}{2} + c} + 1$

$c = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{-\frac{x}{2} + \frac{3}{2x}} + \frac{1}{x}$

8

1. DERECE HOMOJEN DİFERANSİYELLERİN ÇÖZÜMÜ

($y = vx$ dönüşümü)

$y' = f\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow$ 1. derece homojen diferansiyel

ÖRNEK:
$(x^2+y^2) - 2xyy' = 0 \Rightarrow$ 1. derece homojen dif mi?

ÇÖZÜM: $x^2+y^2 = 2xyy'$

$$y' = \frac{x^2}{2xy} + \frac{y^2}{2xy} \Rightarrow y' = \underbrace{\frac{\cancel{x}}{2y} + \frac{\cancel{y}}{2x}}_{f\left(\frac{x}{y}\right)}$$ Homojen

ÖRNEK: $y' = \frac{x+y}{y-x}$ homojen mi?

$$y' = \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\frac{y}{x}-1\right)} \Rightarrow y' = \underbrace{\frac{1+\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}-1}}_{f\left(\frac{x}{y}\right)}$$ Homojen//

ÖRNEK: $y' = \frac{x}{y} + \frac{y^2}{x^2} + x + 1$ (Homojen değil)

✓ ✓ ?

HOMOJEN DİFERANSİYELLERİN ÇÖZÜMÜ

$y = vx$ dönüşümü yapmalıyız $\Rightarrow$ v'li hale gelir, ayrılabilir bir diferansiyel olur.

ÖRNEK:
$y' = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$ diferansiyelini çözünüz.

ÇÖZÜM: Homojen diferansiyel

1. Adım: $y = vx$ dönüşümü $v \Rightarrow$ x'e bağlı fonksiyon

$\boxed{y' = v' \cdot x + v}$!

2.Adım: $v'x+v = \frac{vx}{x} + \tan\left(\frac{vx}{x}\right)$

$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c$

$\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + c$

$v'x + v = v + \tan v$

$v'x = \tan v \Rightarrow$ (Ayrılabilir dif.)

$\frac{dv}{dx} \cdot x = \tan v \Rightarrow \frac{dv}{\tan v} = \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \int \cot v\, dv = \int \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \ln|\sin v| = \ln|x| + c$

yer değiştirse

$\Rightarrow \sin v = e^{\ln|x|+c}$ $\Rightarrow$ istersek v yerine $\frac{y}{x}$ yazıp çözümü öyle bırakabiliriz

$\arcsin\left(e^{\ln|x|+c}\right) = v$

$y = v\cdot x$

Son Adım: $y = \arcsin\left(e^{\ln|x|+c}\right) \cdot x$

ÖRNEK: $x^2+y^2-2xyy' = 0$ diferansiyelini çözünüz ($\frac{x}{y}$ veya $\frac{y}{x}$ görünürde yok)

Çözüm = $x^2+y^2 = 2xyy'$

1.Adım: $y' = \frac{x^2}{2xy} + \frac{y^2}{2xy} \Rightarrow y' = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x} \Rightarrow$ Homojen

2.Adım: $y = vx$, $y' = v'x + v$ $\Rightarrow v'x + v = \frac{x}{2vx} + \frac{vx}{2x}$

$\Rightarrow v'x + v = \frac{1}{2v} + \frac{v}{2}$

$\Rightarrow v'x = \frac{1}{2v} - \frac{v}{2}$

$\Rightarrow v'x = \frac{1-v^2}{2v}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dx} \cdot x = \frac{1-v^2}{2v}$

$\Rightarrow \int \frac{-2v}{\underbrace{1-v^2}_{u}}\, dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\int \frac{1}{u}\, du = \ln|x| + c$

$\Rightarrow -\ln|u| = \ln|x| + c$

$\Rightarrow -\ln|1-v^2| = \ln|x| + c$

Son Adım: v yerine $\frac{y}{x}$ yazarsak

$\Rightarrow -\ln\left|1 - \frac{y^2}{x^2}\right| = \ln|x| + c$

9

İKİNCİ DERECE DİFERANSİYELLERİN SINIFLANMASI

2. Derece dif

$y'' - 2y' - 4y = x+1$

$xy'' = x+5$

$y' = \frac{dy}{dx}$

$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 2y = x-5$

$y'' + 3y' - 2y = x+5$

şeklinde yazılabilirler.

2. DERECE DİFERANSİYEL

↳ SABİT KATSAYILI

$y'' - 2y' - 4y = 0$

$y'' - 3y' - 4y = x+2$

↳ Homojen difler

$y'' - 2y' - 3y = 0$

$y'' + 4y = 0$

$y_{Genel} = y_{Homojen}$

↳ Homojen olmayan dif'ler

$y'' - 2y' - 3y = x$

$y'' + 4y = e^{2x} - 1$

$y_{Genel} = y_{Homojen} + y_{özel}$

1. Teknik: Belirsiz katsayılar Metodu

2. Teknik: Parametrelerin değişimi metodu

↳ SABİT KATSAYILI OLMAYAN

$x^2y'' - 3y' - xy = 0$

$x^3y'' + (x+1)y' = 3x - 2$

↳ Homojen

↳ Homojen olmayan

- Euler metodu
- İndirgeme metodu (reduction of order)
- Seri metodu

SABİT KATSAYILI 2. DERECE HOMOJEN DİFERANSİYELLERİN ÇÖZÜMÜ

$y'' - 3y' - 4y = 0$

★ y'lilerin karşısı sıfır ise homojendir.

★ 2. derece sabit katsayılı homojen denklemdir.

$$\boxed{\underset{\text{çözüm}}{y_{Genel}} = \underset{\text{çözüm}}{y_{Homojen}}}$$

ÖRNEK : $y'' - 3y' - 4y = 0$ diferansiyel denkleminin çözümü nedir?

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 \\ y' = r \\ y'' = r^2 \end{array}\right\}$$ Dif'de yerine konulup karakteristik denklem elde edilir.

$$\boxed{r^2 - 3r - 4 = 0}$$

* KARAKTERİSTİK DENKLEM ÇÖZÜMÜNDE İHTİMALLER

1. durum $\Delta > 0$ 2 farklı reel kök vardır. $r_1 \neq r_2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\boxed{y_{Homojen} = c_1 . e^{r_1 x} + c_2 . e^{r_2 x}}$$

2. durum $\Delta = 0$ eşit iki kök vardır $r_1 = r_2$ (reel)

$$\boxed{y_H = C_1 . e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} . x}$$

3. durum $\Delta < 0$ iki farklı karmaşık sayı çıkar.

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = a + bi \\ r_2 = a - bi \end{array}\right\}$$ reel $= a$, sanal $= b$ (daima pozitif)

$$\boxed{y_H = C_1 . e^{ax} . \cos(bx) + C_2 . e^{ax} \sin(bx)}$$

ÖRNEK : $y'' - 6y' + 9y = 0$ diferansiyel denk. genel çözümü nedir?

ÇÖZÜM : $r^2 - 6r + 9 = 0$

$(r-3)(r-3) = 0$

$r = 3$

$r = 3$

$$\Rightarrow \boxed{y_H = C_1 . e^{3x} + C_2 e^{3x} . x}$$

↳ Homojen çözümdür.

(10) ÖRNEK: $y'' + 2y' + 5y = 0$ dif. çöz. bulunuz

$\sqrt{-4} = \sqrt{4i^2} = 2i$

$\sqrt{-16} = 4i$

$\Rightarrow r^2 + 2r + 5 = 0$

$a = 1$
$b = 2$
$c = 5$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4 - 4.1.5$

$\boxed{\Delta = -16}$

$\Delta < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{-16}}{2} = \boxed{-1 + 2i}$

$r_2 = \frac{-2 - \sqrt{-16}}{2} = \boxed{-1 - 2i}$

reel $= -1$
Sanal $= 2$

$\Rightarrow \boxed{y_H = c_1 . e^{-x} . \cos(2x) + c_2 . e^{-x} . \sin(2x)}$

ÖRNEK: Başlangıç değer problemi

$\hookrightarrow y'' - 5y' + 6y = 0 \quad , y(0) = 3 \quad , y'(0) = 5$ problemi çözünüz.

ÇÖZÜM:

$r^2 - 5r + 6 = 0$

$(r-3)(r-2) = 0$

$r_1 = 3$
$r_2 = 2$

$\Rightarrow \boxed{y_H = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}}$

$y(\overset{x}{0}) = \overset{\text{sonuç}}{3} \Rightarrow c_1 e^0 + c_2 e^0 = 3$

$\boxed{c_1 + c_2 = 3}$

$y'(0) = 5$

$\Rightarrow y_H' = 3c_1 e^{3x} + 2.c_2.e^{2x}$

$\Rightarrow 3c_1 e^0 + 2c_2 e^0$

$\Rightarrow \boxed{3c_1 + 2c_2 = 5}$

$-2 / \ c_1 + \cancel{c_2} = 3$

$3c_1 + 2c_2 = 5$

$\boxed{c_1 = -1}$ $\boxed{c_2 = 4}$ olur.

$\boxed{y_H = -e^{3x} + 4e^{2x}}$

$\hookrightarrow$ Başlangıç değer problemi çözülmüş olur.

(11)

BELİRSİZ KATSAYILAR METODU

* 2. derece   sabit katsayılı   homojen olmayan

$$\boxed{y'' - 3y' - 4y = f(x)}$$

Homojen olmayan 2. derece dif

$$\boxed{y_{Genel} = y_{Homojen} + y_{özel}}$$

Belirsiz katsayı metodu — Parametrelerin değişimi yöntemi

$y'' - 3y' + 2y = f(x)$

Polinom	e'li ifade	sin veya cos olursa	
$x+3$	$2e^{3x}$	$2\sin 3x$	polinom, e'li ve sin–cos'lu ifadelerin toplama, çıkarma ve çarpma durumunda bulunması
$2x-1$	e^{2x}	$5\cos 2x$	
x^2-3x+2	e^{-x}		

BELİRSİZ KATSAYI METODU

1. Durum + Karşı taraf polinom ise

ÖRNEK: $y'' - 2y' - 3y = x+1$ dif'in genel çözümü nedir?

x^2+3x+4

Ax^2+Bx+C

1. Adım = $\boxed{y_{Genel} = y_H + y_ö}$

2. Adım = Homojen çözüm bulunur. $y'' - 2y' - 3y = 0$

$r^2 - 2r - 3 = 0$

$r = 3$

$r = -1$

$y_H = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-x}$ → homojen çözüm

$y_ö = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$

3. Adım: $y_{özel}$ bulunmalıdır

Tahmin edilir.

$y_{özel} = Ax + B$

$y_ö' = A$

$y_ö'' = 0$

$\Rightarrow 0 - 2A - 3Ax - 3B = x + 1$

$-3A = 1$ $B = -\frac{1}{9}$

$A = -\frac{1}{3}$

4. Adım: $\boxed{y_{Genel} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}}$

ÖRNEK: $y'' - 6y' = x^2 + 1$ 2. derece diferansiyelinin çözümü nedir?

1. Adım: $y_G = y_H + y_ö$

2. Adım: $y'' - 6y' = 0 \Rightarrow r^2 - 6r = 0$

$r(r-6) = 0$

$r = 0$
$r = 6$

$y_H = c_1 . e^{0x} + c_2 . e^{6x}$

$\boxed{y_H = c_1 + c_2 e^{6x}}$

3. Adım: $y_ö = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

$y_ö' = 3Ax^2 + 2Bx + C$

$y_ö'' = 6Ax + 2B$

$6Ax + 2B - 12Ax^2 - 12B - 6C = x^2 + 1$

$-12A = 1$

$\boxed{A = -\frac{1}{12}}$ $\boxed{B = -\frac{1}{24}}$ $\boxed{C = -\frac{13}{72}}$

$y_ö = -\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{24}x^2 - \frac{13}{72}x + D$

4. Adım: $y_g = c_1 + c_2 e^{6x} - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{24}x^2 - \frac{13}{72}x + D$

2. DURUM dif'in karşısı e'li ise

ÖRNEK ⇒ $y'' - 6y' + 9y = 2e^{5x}$ dif.'in çözümü nedir?

1. Adım: $y_G = y_H + y_ö$

2. Adım: $y'' - 6y' + 9y \Rightarrow r^2 - 6r + 9 = 0$

$r = 3$ $r = 3$

$\boxed{y_H = c_1 . e^{3x} + c_2 . e^{3x} \cdot x}$

(12)

3. Adım: Yözel tahmin edilmeli

y_H içinde e^{5x} var mı? Yok $\Rightarrow y_ö = A.e^{5x}$

$$y'' - 6y' + 9y = 2e^{5x} \rightarrow \boxed{y_H = c_1.e^{3x} + c_2.e^{3x}.x}$$

y_H içinde 1 kez varsa $y_ö = Ax\,e^{5x}$

$A.e^{5x}$

y_H içinde 2 kez varsa $y_ö = Ax^2e^{5x}$

$$y_ö = A.e^{5x}$$
$$y_ö' = 5Ae^{5x}$$
$$y_ö'' = 25Ae^{5x}$$

$$\Rightarrow 25Ae^{5x} - 30Ae^{5x} + 9Ae^{5x} = 2e^{5x}$$
$$4Ae^{5x} = 2e^{5x}$$
$$\boxed{A = \frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{y_ö = \frac{1}{2}e^{5x}}$$

4. Adım $\Rightarrow$ $\boxed{y_{Genel} = c_1.e^{3x} + c_2.e^{3x}.x + \frac{1}{2}e^{5x}}$

↳ Genel çözüm

ÖRNEK: $y'' - 3y' + 2y = 5e^{2x}$ dif'in çözümü nedir?

1. Adım: $y_G = y_H + y_ö$

2. Adım: $y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0$

$$\boxed{\begin{matrix} r = 2 \\ r = 1 \end{matrix}}$$

$$\boxed{y_H = c_1.e^{2x} + c_2.e^{x}}$$

3. Adım: $y_ö = Ax\,e^{2x}$

$$y_ö' = A.e^{2x} + 2.e^{2x}.Ax$$
$$y_ö'' = 2Ae^{2x} + 2A.e^{2x} + 4Axe^{2x} \Rightarrow \boxed{4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}}$$

$$\Rightarrow 4Ae^{2x} + \cancel{4Axe^{2x}} - 3Ae^{2x} - \cancel{6Axe^{2x}} + \cancel{2Axe^{2x}} = 5e^{2x}$$
$$Ae^{2x} = 5e^{2x}$$
$$\boxed{A = 5} \Rightarrow \boxed{y_ö = 5xe^{2x}} \text{ olur}$$

4. Adım: $\boxed{y_G = c_1e^{2x} + c_2e^{x} + 5xe^{2x}}$

↳ olur

3. DURUM $\Rightarrow$ Diferansiyelin karşısı sin veya cos'lu olursa

ÖRNEK = $y'' - 2y' - 3y = 3\sin 5x$ diferansiyelini çözünüz

1. Adım: $y_G = y_H + y_ö$

var mı?

2. Adım: $r^2 - 2r - 3 = 0$

$r = 3 \quad r = -1$

$$\boxed{y_H = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}}$$

3. Adım = $y_ö$ tahmini

varsa $\hookrightarrow$ $y_ö = Ax\sin 5x + Bx\sin 5x$

$$y_ö = A\sin 5x + B\cos 5x$$

$$y_ö' = 5A\cos 5x - 5B\sin 5x$$

$$y_ö'' = -25A\sin 5x - 25B\,\cancel{\sin 5x}\cos 5x$$

$$\Rightarrow -25A\sin 5x - 25B\cos 5x - 10A\cos 5x + 10B\sin 5x - 3A\sin 5x - 3B\cos 5x = 3\sin 5x$$

$$-28B - 10A = 0 \rightarrow \boxed{A = \frac{-14B}{5}}$$

$$-28A + 10B = 3$$

$A = 1$ çıkmış olsun $\quad B = 2$ çıkmış olsun

$$\boxed{y_ö = \sin 5x + 2\cos 5x}$$

4. Adım: $y_{genel} = y_H + y_ö$

---

4. DURUM $\Rightarrow$ Karşısı sin, cos, e'li, polinomun toplama, çıkarma durumunda olması

ÖRNEK: $y'' - 2y' - 3y = 2e^{3x} + x - 5 + 4\cos 7x$

diferansiyelinin özel çözümünü tahmin ediniz. Ama çözmeyiniz.

1. Adım = $\Rightarrow y_H = r^2 - 2r - 3 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{y_H = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}}$

$r = 3 \quad r = -1$

(13) $y'' - 2y' - 3y = 2e^{3x} + (x-5) + 4\cos 7x$

var mı?

$y_H = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$

$\Rightarrow y_ö = Axe^{3x} + Bx + C + D\cos 7x + E\sin 7x$

GARPMA DURUMU

1) e'li ile polinom çarpma durumunda olursa

derece

$y'' - 3y' - 4y = xe^{2x}$ yöz'ü tahmin ediniz.

$y_H \Rightarrow r^2 - 3r - 4 = 0$

$r = 4 \quad r = -1$

$\Rightarrow y_H = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}$

$y_ö = (Ax + B)e^{2x}$

2) e'li ile sin-cos çarpımı

$e^{3x}\cos 5x$ beraber şekilde olursa x çarpanı gelir.

yoksa

ÖRNEK = $y'' - 2y' - 3y = 2e^{3x}\cos 5x$

$y_H \Rightarrow r^2 - 2r - 3 = 0$

$r = 3 \quad r = -1$

$y_H = c_1 e^{3x} - c_2 e^{-x}$

$\Rightarrow y_ö = (A\sin 5x + B\cos 5x)e^{3x}$

3) Polinom - sin cos

2. derece

$y'' - 2y' - 3y = x^2 \cos 4x$ var mı? varsa x çarpanı gelir. yoksa x çarpanı gelmez.

$y_H \Rightarrow y_H = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$

$y_ö = (Ax^2 + Bx + C)\cos 4x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 4x$

(14)

PARAMETRELERİN DEĞİŞİMİ METODU

2. Derece **Sabit Katsayılı** **Homojen Katsayılı**

$$y'' - 2y' - 3y = f(x)$$

$y_{genel} = y_H + y_{özel}$

→ Belirsiz Katsayılar → • Polinom • e^{ix} • sin – cos

→ Parametrelerin Değişimi
(Her durumu çözer. f(x) ne olursa olsun)
(İntegral işlemleri gerekir.)

$f(x) = \ln x, \frac{1}{x}, \sec x, \tan x, \ldots$

ÖRNEK:

$y'' - 2y' - 15y = 2e^{4x}$ ($f(x)$) diferansiyelini çözünüz. (Parametrelerin değişimi metodu ile çözünüz.)

Çözüm: **1. Adım:** $y_{Genel} = y_{Homojen} + y_{özel}$

2. Adım: $y'' - 2y' - 15y = 0 \rightarrow r^2 - 2r - 15 = 0$

$(r-5)(r+3) \Rightarrow r = 5, \; r = -3$

$$\boxed{y_{Homojen} = C_1 \cdot e^{5x} + C_2 \cdot e^{-3x}}$$

3. Adım: $y_{özel}$ parametrelerin değişimi metodu

$y_1 = e^{5x} \quad y_2 = e^{-3x}$

Wronskian bulunmalıdır. $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'$

$$W = \begin{vmatrix} e^{5x} & e^{-3x} \\ 5e^{5x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} \Rightarrow (e^{5x} \cdot -3 \cdot e^{-3x}) - (e^{-3x} \cdot 5 \cdot e^{5x})$$

$$\boxed{W \Rightarrow -3e^{2x} - 5e^{2x} = -8e^{2x}}$$

4. Adım: $y_{özel} = y_1 \cdot u_1 + y_2 \cdot u_2$

$y_{özel} = e^{5x} \cdot u_1 + e^{-3x} \cdot u_2$

$$u_1 = -\int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W \cdot a} dx$$

$$u_2 = \int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W \cdot a} dx$$

$f(x)$ = diferansiyelin eşiti

$\boxed{f(x) = 2e^{4x}}$

$\boxed{W = -8e^{2x}}$

$a = y''$'nin katsayısı

$\boxed{a = 1}$

$$u_1 = -\int \frac{e^{-7x} \cdot 2e^{4x}}{-8e^{2x} \cdot 1} dx = \frac{1}{4} \int e^{-x} dx$$

$$u_1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \cdot e^{-x} \quad (+c \text{ konulmaz})$$

$$u_2 = \int \frac{e^{5x} \cdot 2e^{4x}}{-8e^{2x} \cdot 1} dx = -\frac{1}{4} \int e^{7x} dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{e^{7x}}{7} = -\frac{1}{28} e^{7x}$$

$$y_{özel} = e^{5x} \cdot -\frac{1}{4} e^{-x} + e^{-3x} \cdot -\frac{1}{28} e^{7x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} e^{4x} - \frac{1}{28} e^{4x}$$

$$\boxed{\Rightarrow -\frac{2}{7} e^{4x}}$$

5.Adım: $\boxed{y_g = c_1 \cdot e^{5x} + c_2 \cdot e^{-3x} - \frac{2}{7} e^{4x}}$

ÖRNEK: $y'' + y = \sec x$ diferansiyelinin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

1.Adım: $y_G = y_H + y_ö$

2.Adım: $y'' + y = 0 \longrightarrow r^2 + 1 = 0 \longrightarrow r^2 = -1 \rightarrow r = -i,\ r = i$

reel $= 0$ sanal $= 1$

$$y_H = c_1 \cdot e^{0x} \cdot \cos(x) + c_2 \cdot e^{0x} \cdot \sin(x)$$

$$\boxed{y_H = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x}$$

3.Adım: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = \boxed{1 = W}$$

4.Adım: $y_ö = (y_1 \cdot u_1) + (y_2 \cdot u_2)$

$\cos x = u$
$-\sin x\, dx = du$

$$y_ö = \cos x \cdot u_1 + \sin x \cdot u_2$$

$$u_1 = -\int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W \cdot a} dx = -\int \frac{\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}}{1 \cdot 1} dx \Rightarrow -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{1}{u} du$$

$$= \ln|u| = \ln|\cos x|$$

$$u_2 = \int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W \cdot a} \cdot dx = \int \frac{\cos x \cdot \frac{1}{\cos x}}{1 \cdot 1} dx = \int 1 dx = \boxed{x = u_2}$$

$$y_{özel} = \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x$$

5.Adım: $\boxed{y_{Genel} = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x}$

(15)

HOMOJEN CAUCHY EULER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Cauchy Euler

$$x^n y'' + x^{n-1} y' + x^{n-2} y = 0$$ → homojen olduğunu gösteriyor.

- $x^3 y'' + 4x^2 y' + 5xy = 0$ → örnektir...
- $4x^2 y'' - 5y' + 6xy = 0$ → Euler değildir. (Amaç x üsleri birer birer azalacak)

$\frac{1}{x^2}$ x yok

ÇÖZÜM YÖNTEMİ: $\boxed{y = x^r}$ ⇒ Bunun türevleri alınır ve diferansiyelde yerine konulur. Karakteristik denklem elde edilir.

ÖRNEK:

$x^2 y'' + 7xy' + 8y = 0$ diferansiyelinin çözümü nedir?

ÇÖZÜM: 1. Adım: $\boxed{y = x^r}$

$y' = r \cdot x^{r-1}$

$y'' = (r^2 - r) \cdot x^{r-2}$ (2. derece dif olduğu için 2 defa türev almamız yeterlidir.)

$$x^2([r^2 - r] \cdot x^{r-2}) + 7 \cdot x \cdot (r \cdot x^{(r-1)}) + 8 \cdot x^r = 0$$

$$(r^2 - r) \cdot x^r + 7r \cdot x^r + 8x^r = 0$$

$$x^r [r^2 - r + 7r + 8] = 0$$

$$x^r \underbrace{[r^2 + 6r + 8]}_{\text{Karakteristik denklemdir.}} = 0$$

KARAKTERİSTİK DENKLEMİN ÇÖZÜM İHTİMALLERİ

- 1) $\Delta > 0$, r_1 ve r_2 iki farklı reel köktür.

$$\boxed{y_H = c_1 \cdot x^{r_1} + c_2 \cdot x^{r_2}}$$

- 2) $\Delta = 0$, r_1 ve r_2 eşit ve reel kök.

$$\boxed{y_H = c_1 \cdot x^{r_1} + c_2 \cdot x^{r_2} \cdot \ln x}$$

- 3) $\Delta < 0$, r_1 ve r_2 karmaşık sayı. ⇒ $r_1 = a + bi$, $r_2 = a - bi$

reel   sanal (Daima pozitif almalı)

$$\boxed{y_H = c_1 \cdot x^a \cdot \cos(b \ln x) + c_2 \cdot x^a \cdot \sin(b \ln x)}$$

SORUNUN ÇÖZÜMÜNE DEVAM

$$r^2+6r+8=0$$

$$(r+4)(r+2)=0$$

$r_1=-4$, $r_2=-2$ > iki farklı kök

$$\Rightarrow \boxed{y_H = C_1 \cdot x^{-4} + C_2 \cdot x^{-2}}$$

ÖRNEK: $x^2y'' - 11xy' + 36y = 0$ dif. çözünüz.

Çözüm: 1. Adım = $\boxed{y=x^r}$

$$y' = r \cdot x^{r-1}$$

$$y'' = (r^2-r) \cdot x^{r-2}$$

$$\Rightarrow x^r \cdot (r^2-r) - 11rx^r + 36x^r = 0$$

$$x^r(r^2-r-11r+36)=0$$

$$x^r(r^2-12r+36)=0$$

2. Adım: $r^2-12r+36=0$

$$\boxed{r_1=6 \mid r_2=6} \Rightarrow \boxed{y_H = C_1 \cdot x^6 + C_2 \cdot x^6 \cdot \ln x}$$

ÖRNEK: $x^2y'' - 5xy' + 13y = 0$ dif. çözünüz.

Çözüm: $\boxed{y=x^r}$

$$y' = r \cdot x^{r-1}$$

$$y'' = (r^2-r) \cdot x^{r-2} \Rightarrow$$

$$(r^2-r) \cdot x^r - 5rx^r + 13x^r = 0$$

$$x^r[r^2-6r+13]=0$$

$$\Rightarrow r^2-6r+13=0$$

$$\boxed{\Delta = 36-52 = -16 < 0}$$

$$r_1 = \frac{6+\sqrt{-16}}{2} = \frac{6+4i}{2} = \boxed{3+2i}$$

$$\boxed{r_2 = 3-2i}$$

reel = 3
Sanal = 2 → Daima pozitif olan alınırdı.

$$\boxed{y_H = C_1 \cdot x^3 \cdot \cos(2\ln x) + C_2 \cdot x^3 \cdot \sin(2\ln x)}$$

16

HOMOJEN OLMAYAN CAUCHY EULER DİF'İN ÇÖZÜMÜ

★ $x^n y'' + x^{n-1} y' + x^{n-2} y = 0$ (Homojen Euler dif'idir) → $\boxed{y_{Genel} = y_{Homojen}}$

★ $x^n y'' - 3x^{n-1} y' + 4x^{n-2} y = f(x)$ (Homojen Olmayan euler)

→ $y_{Genel} = y_{Homojen} + y_{özel}$
↓
(Parametrelerin değişim yöntemi)

ÖRNEK: $x^2 y'' - 4xy' + 4y = x^2$ dif. çözünüz.

Çözüm: **1. Adım:** $y_G = y_H + y_ö$

2. Adım: y_H bulunur. (Bu işlemleri yaparken karşı tarafı sıfır olarak kabul ederiz)

$\boxed{y = x^r} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y' = r \cdot x^{r-1} \\ y'' = (r^2 - r) \cdot x^{r-2} \end{array} \right.$

$\Rightarrow (r^2 - r) \cdot x^r - 4r x^r + 4x^r = 0$

$x^r (r^2 - r - 4r + 4) = 0$

$x^r (r^2 - 5r + 4) = 0$

$\boxed{r_1 = 4}$ $\boxed{r_2 = 1}$ $\Rightarrow \boxed{y_H = c_1 \cdot x^4 + c_2 \cdot x^1}$

3. Adım: $y_ö$ → Parametrelerin değişimi yöntemini kullanacağız

• $\boxed{y_1 = x^4}$, $\boxed{y_2 = x}$

$W = \begin{vmatrix} x^4 & x \\ 4x^3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow x^4 - 4x^4 = \boxed{-3x^4}$

4. Adım: $\boxed{y_ö = u_1 \cdot y_1 + u_2 \cdot y_2}$

$u_1 = ?$, $y_1 = x^4$, $u_2 = ?$, $y_2 = x$

(+c konulmaz)

$u_1 = -\int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W \cdot a} dx \Rightarrow u_1 = -\int \frac{x \cdot \cancel{x^2}}{-3x^4 \cdot \cancel{x^2}} dx \Rightarrow \frac{1}{3} \int x^{-3} dx = \boxed{-\frac{1}{6} x^{-2}}$

$u_2 = \int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W \cdot a} dx \Rightarrow u_2 = \int \frac{\cancel{x^4} \cdot \cancel{x^2}}{-3\cancel{x^4} \cdot \cancel{x^2}} dx \Rightarrow \int -\frac{1}{3} dx = \boxed{-\frac{1}{3} x}$

$\boxed{f(x) = x^2}$, $\boxed{W = -3x^4}$, $\boxed{y_1 = x^4}$, $\boxed{y_2 = x}$, $\boxed{a = x^2}$

↳ a = y'nin 2. türevinin katsayısı

5. Adım ⇒ $y_ö = -\frac{1}{6} x^{-2} \cdot x^4 + \left(-\frac{1}{3} x \cdot x\right)$

$y_ö = -\frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{3} x^2 \Rightarrow -\frac{3}{6} x^2 = \boxed{-\frac{x^2}{2} = y_ö}$

6. Adım: $y_{Genel} = y_H + y_{Ö}$

$$\boxed{y_{Genel} = c_1 \cdot x^4 + c_2 \cdot x - \frac{x^2}{2}}$$

17

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

- $f(t)$ veya $f(x)$ $\xrightarrow[\text{Dönüşümü}]{\text{integral}}$ $F(s)$

*Değişken x veya t'den s'ye dönüşür.

NOT:

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$$

- $\underbrace{\mathcal{L}\{f(t)\}}_{\text{f(t)'nin Laplace'ını almak demek}} = F(s)$

- Laplace formülü: $\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\,dt}$

- $f(t) = 2$ olsun $\longrightarrow \mathcal{L}\{2\} = \int_0^\infty 2 \cdot e^{-st}\,dt$

$e^{\infty} = \infty$

$e^{-\infty} = 0$

$$= \frac{2 \cdot e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{2e^{-\infty}}{-s}}^{\,0} - \left(\frac{2e^0}{-s}\right) = \frac{2}{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}\{2\} = \frac{2}{s}}$$

- $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\,dt \Rightarrow$ Genel fonksiyon davranışları

Laplace dönüşüm kuralları

$\Rightarrow$ Arka sayfaya devam

LAPLACE DÖNÜŞÜM KURALLARI

$$- \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = F(s)$$

!- KURALLAR -!

① Sabit sayının Laplace dönüşümü

$$\boxed{\mathcal{L}\{a\} = \frac{a}{s}}$$

ÖRNEK = $\mathcal{L}\{2\} = \frac{2}{s}$ $\quad \mathcal{L}\{\frac{1}{4}\} = \frac{\frac{1}{4}}{s}$

$\mathcal{L}\{-3\} = -\frac{3}{s}$

② $\boxed{\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}}$ 'dir.

Yardımcı kurallar : ① $\mathcal{L}\{a.f(t)\} = a.\mathcal{L}\{f(t)\}$

ÖRNEK = $\mathcal{L}\{2t\} = 2.\frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^2}$

$\mathcal{L}\{3t) = 3.\frac{1}{s^2} = \frac{3}{s^2}$

② $\mathcal{L}\{f(t) \mp g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \pm \mathcal{L}\{g(t)\}$

ÖRNEK =

$\mathcal{L}\{t+5\} = \mathcal{L}\{t\} + \mathcal{L}\{5\} = \frac{1}{s^2} + \frac{5}{s}$

$\mathcal{L}\{3t-4\} = 3.\frac{1}{s^2} - \frac{4}{s} = \frac{3}{s^2} - \frac{4}{s}$ //

③ $\boxed{\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}}$

$n \in \mathbb{Z}^+$ //

örnek =

$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$

$\mathcal{L}\{t^5\} = \frac{5!}{s^6} = \frac{120}{s^6}$

$\mathcal{L}\{5t^2 - 4t + 3\} = \frac{5.2!}{s^3} - 4.\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}$

$$\boxed{= \frac{10}{s^3} - \frac{4}{s^2} + \frac{3}{s}}$$

(18)

$\boxed{4.\text{KURAL}}$ ⇒ En çok kullanılacak kural !!

$$\# \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad , \quad \mathcal{L}\{e^{t}\} = \frac{1}{s-1}$$

$e = 2,718....$

$$\mathcal{L}\{e^{5t}\} = \frac{1}{s-5}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$$

$$\mathcal{L}\{2e^{4t}\} = 2 \cdot \frac{1}{s-4} = \frac{2}{s-4} \,//$$

$\boxed{5.\text{KURAL}}$

$$\# \mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2} \quad , \quad \mathcal{L}\{\sin 3t\} = \frac{3}{s^2+9}$$

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{\sin 7t\} = \frac{7}{s^2+49}$$

$$\mathcal{L}\{3\sin 2t\} = 3 \cdot \frac{2}{s^2+4} \,//$$

$\boxed{6.\text{KURAL}}$

$$\# \mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2} \quad , \quad \mathcal{L}\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}\{\cos 5t\} = \frac{s}{s^2+25}$$

$$\mathcal{L}\{3\cos t\} = 3 \cdot \frac{s}{s^2+1} = \frac{3s}{s^2+1} \,//$$

★★★★★

$\boxed{7.\text{KURAL}}$

$$\# \mathcal{L}\{e^{at} \cdot t\} \Rightarrow \frac{1}{(s-a)^2}$$

$$\# \mathcal{L}\{e^{at} \cdot t^n\} \Rightarrow \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$\# \mathcal{L}\{e^{at} \cdot \sin(bt)\} \Longrightarrow \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

$$\# \mathcal{L}\{e^{at} \cdot \cos(bt)\} \Longrightarrow \frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}$$

NOT: e^{at} yanına geldiği fonk'nun kuralında s yerine $s-a$ yazılmasına neden olur.

ÖRNEK: $\mathcal{L}\{e^{2t}.t\} = \dfrac{1}{(s-2)^2}$

$\dfrac{5!}{s^6}$ $\mathcal{L}\{e^{-3t}.t^5\} = \dfrac{120}{(s+3)^6}$

$\mathcal{L}\{e^{4t}.\sin 3t\} \Rightarrow \dfrac{3}{(s-4)^2+9}$

$\dfrac{3}{s^2+9}$

$\mathcal{L}\{e^{-5t}.\cos 7t\} \Rightarrow \dfrac{s+5}{(s+5)^2+49}$

$\mathcal{L}$

$\dfrac{s}{s^2+49}$

türev

$\boxed{\text{8. KURAL}}$

$-\mathcal{L}\{t^n.\sin(at)\} = (-1)^n.\left(\dfrac{a}{s^2+a^2}\right)\dfrac{d^n}{ds^n}$

$\mathcal{L}\{t^n.\cos(at)\} = (-1)^n.\left(\dfrac{s}{s^2+a^2}\right)\dfrac{d^n}{ds^n}$

ÖRNEK: $\mathcal{L}\{t.\sin 2t\} = (-1)^1.\dfrac{d}{ds}.\left(\dfrac{2}{s^2+4}\right) = -1.\left(\dfrac{0.(s^2+4)-2s.2}{(s^2+4)^2}\right)$

$= \dfrac{4s}{(s^2+4)^2}$

$\mathcal{L}\{t.\cos 3t\}$

$\Rightarrow (-1)^1.\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^2+9}\right) = (-1).\left(\dfrac{1.(s^2+9)-(2s).s}{(s^2+9)^2}\right)$

$\Rightarrow -1.\dfrac{9-s^2}{(s^2+9)^2} = \dfrac{s^2-9}{(s^2+9)^2}$

(19)

TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

$\star \ \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$'dir.

① $\mathcal{L}\{a\} = \frac{a}{s} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1$

$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{s}\} = 3$

$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{-4}{s}\} = -4$

② $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\} = t$

$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{s^2}\} = 3t$

③ $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^3}\} = \frac{t^2}{2}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^5}\} = \frac{t^4}{24}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{4}{s^6}\} = \frac{t^5}{30}$

④ $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-2}\} = e^{2t}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+3}\} = e^{-3t}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s+5}\} = 2.e^{-5t}$

⑤ $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+25}\} = \frac{\sin 5t}{5}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s^2+4}\} = \sin 2t$

$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+49}\} = \frac{\sin 7t}{7}$

⑥ $\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+25}\right\} = \cos 5t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} = \cos 4t$$

---

⑦ $\mathcal{L}\{e^{at}.t\} \Rightarrow \dfrac{1}{(s-a)^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-3)^2}\right\} = e^{3t}.t$

$\mathcal{L}\{e^{at}.t^n\} \Rightarrow \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ $\qquad \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{(s+4)^2}\right\} = 2.e^{-4t}.t$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-5)^4}\right\} = \frac{e^{5t}.t^3}{6}$$

$\mathcal{L}\{e^{at}.\sin bt\} \Longrightarrow \dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$ $\qquad \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+2)^3}\right\} = \dfrac{e^{-2t}.t^2}{2}$

$$\mathcal{L}\{e^{at}.\cos bt\} \Rightarrow \frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}$$

ÖRNEKLER:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2+25}\right\} = \frac{e^{-4t}.\sin 5t}{5}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)^2+4}\right\} = e^{3t}.\sin 2t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+16}\right\} = e^{-t}.\cos 4t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s-3)^2+25}\right\} = e^{3t}.\cos 5t$$

KARIŞIK ÖRNEKLER

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^5}\right\} = \dfrac{t^4}{24}$ //
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-2)^2+81}\right\} = \dfrac{e^{2t}\cdot \sin 9t}{9}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4}{s}\right\} = 4$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+5}\right\} = e^{-5t}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-3)^4}\right\} = \dfrac{e^{3t}\cdot t^3}{6}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+49}\right\} = \cos 7t$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{s^2+9}\right\} = 2\cdot \sin 3t$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+2}{(s+2)^2+25}\right\} = e^{-2t}\cdot \cos 5t$ //

BASİT KESİRLERE AYIRMA GEREKTİREN TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

* 3. çeşidi vardır.
 - 1. çeşit: Paydadaki çarpanlar 1. derece ise
 - 2. çeşit: " 2. derece çarpan olursa
 - 3. çeşit: " tam kare çarpan olursa

1. ÇEŞİT $(s+2), (s+3), (2s+1)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{s^2+3s+2}\right\} = ? \Rightarrow \frac{2s-3}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{\underset{(s+1)}{s+2}} + \frac{B}{\underset{(s+2)}{s+1}}$$

$\begin{matrix} s & +2 \\ s & +1 \end{matrix}$

kural değil

$$\Rightarrow 2s-3 = As + A + Bs + 2B$$

$A+B = 2$

$A+2B = -3$

$\underbrace{A+B}_{2}+\underbrace{B}_{-5} = -3$

$\boxed{B=-5}$ $\boxed{A=7}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{s^2+3s+2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s+2} + \frac{-5}{s+1}\right\}$$ $\Rightarrow$ Şimdi kural oldular

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\Rightarrow 7\cdot e^{-2t} - 5\cdot e^{-t}$$

ÖRNEK ! $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4}\right\} = ?$

y.

$(s-2)(s+2)$

ÇÖZÜM!

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{\sin 2t}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{s-2 \cdot s+2} = \frac{A}{s-2}_{/s+2} + \frac{B}{s+2}$

$1 = As + 2A + Bs - 2B$

$A + B = 0$

$2A - 2B = 1$

$\boxed{A = \frac{1}{4}} \quad \boxed{B = -\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{s-2} - \frac{\frac{1}{4}}{s+2}\right\}$

$= \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$

(21) $\boxed{\text{2. ÇEŞİT}}$ Paydada 2. derece çarpan varsa
(s^2+4), (s^2+1), (s^2+9), ...

$$\cdot\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{(s-2)\cdot(s^2+9)}\right\} = ?$$

$$\frac{2s+1}{(s-2)\cdot(s^2+9)} = \frac{A}{\underset{(s^2+9)}{s-2}} + \frac{Bs+C}{\underset{(s-2)}{s^2+9}}$$

$$2s+1 = As^2 + 9A + Bs^2 - 2Bs + Cs - 2C$$

$A+B=0 \qquad A=-B$

$\left.\begin{array}{l} C-2B=2 \\ 9A-2C=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2/\ C-2B=2 \\ -9B-2C=1 \end{array}$

$+\ \ \cancel{2C}-4B=4$

$2\cdot\frac{10}{13} \qquad +\ \ -9B-2C=1$

$-13B=5$

$\frac{16}{13}$

$\boxed{B=-\frac{5}{13}}$ $\boxed{A=\frac{5}{13}}$ $\boxed{C=\frac{16}{13}}$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{(s-2)\cdot(s^2+9)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{6}{13}}{s-2} + \frac{-\frac{6}{13}s+\frac{14}{13}}{s^2+9}\right\}$$

↳ 2. derece çarpanın payı 2 terimden oluşursa ayırmalıyız

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{6}{13}}{s-2}\right\} = -\frac{6}{13}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \frac{14}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}$$

$\cancel{\frac{6}{13}e^{2t} - \frac{6}{13}\cos 3t}$

$$= \frac{6}{13}e^{2t} - \frac{6}{13}\cos 3t + \frac{14}{13}\cdot\frac{\sin 3t}{3}$$

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

3. ÇEŞİT | Paydada Tamkare Çarpan Olursa $s^2,\ (s-1)^2,\ (s+3)^2,\ \ldots$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{(s+4)(s-2)^2}\right\} = ?$$

Kural Değil

$$\frac{2s-3}{(s+4)(s-2)^2} = \frac{A}{s+4} + \left(\frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2}\right)$$

$(s-2)^2$ $\quad (s-2)(s+4)$ $\quad (s+4)$

$$\Rightarrow 2s-3 = As^2 - 4As + 4A + Bs^2 + 2Bs - 8B + Cs + 4C$$

$A+B=0$ $\quad \boxed{A=-B}$

$$\left.\begin{aligned} -4A+2B+C &= 2 \\ 4A-8B+4C &= -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 6B+C &= 2 \\ -12B+4C &= -3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{C=\frac{1}{6}} \quad \boxed{B=\frac{11}{36}} \quad \boxed{A=-\frac{11}{36}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{(s+4)(s-2)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{11}{36}}{s+4} + \frac{\frac{11}{36}}{s-2} + \frac{\frac{1}{6}}{(s-2)^2}\right\}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}.t\} = \frac{1}{(s-a)^2}$$

$$\frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{11}{36}e^{-4t} + \frac{11}{36}e^{2t} + \frac{1}{6}.e^{2t}.t$$

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İLE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ ÇÖZME

$\boxed{\text{1. şartı}}$: Başlangıç değer problemi olmalı

$y(0) = \ldots \quad y'(0) = \ldots$

ÖRNEK: $y'' - 3y' - 4y = 0 \;,\; y(0) = 4 \;,\; y'(0) = 5$

ÖRNEK: $y' - 4y = t + 3 \;,\; y(0) = 5$

$\boxed{\text{2. şartı}}$: y ve y'li ifadelerin katsayıların sabit sayı olması gerekir.

ÖRNEK: $y'' - 4y' + 3y = e^{3t}$ $\quad$ $\cancel{ty'' - 3t^2 y' + 4y = 0}$

- $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$!!!
- $\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$
- $\mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$

y(t) ✓
y(x) ✓

$\mathcal{L}\{y'''\} = s^3 Y(s) - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0)$

$\vdots$

$\boxed{\text{ÖRNEK:}}$ $y' - 2y = e^{2t}$ olsun ve $y(0) = 1$ dif. denklemini laplace ile çözünüz

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$\boxed{\text{ÇÖZÜM:}}$

1. Adım: $\mathcal{L}\{y' - 2y\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}$

$\mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}$

$sY(s) - y(0) - 2Y(s) = \dfrac{1}{s-2}$ $\Rightarrow$ Amaç $Y(s)$'i yalnız bırakmak

$sY(s) - 2Y(s) = \dfrac{1}{s-2} + 1 \Rightarrow Y(s)(s-2) = \dfrac{s-1}{s-2}$

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)^2}$$

2. Adım: $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-2)^2}\right\}$

$\downarrow$

y =

$$\frac{s-1}{(s-2)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2}$$

$s-1 = As - 2A + B$

$B - 2A = -1$

$\boxed{A=1}$ $\boxed{B=+1}$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}\right\}$$

$$\boxed{y = e^{2t} + e^{2t}.t}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}.t\} = \frac{1}{(s-a)^2}$$

ÖRNEK: $y'' - 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ çözünüz.

Çözüm:

1. Adım: $\mathcal{L}\{y'' - 2y' - 3y\} = \mathcal{L}\{0\}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} - 3\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$\Rightarrow s^2Y(s) - \cancel{s\underbrace{y(0)}_{0}} - \underbrace{y'(0)}_{2} - 2.(sY(s) - \cancel{\underbrace{y(0)}_{0}}) - 3Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow s^2Y(s) - 2sY(s) - 3Y(s) = 2$$

$$\Rightarrow Y(s)[s^2 - 2s - 3] = 2$$

$$\boxed{\Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s^2 - 2s - 3}}$$

2. Adım: $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2-2s-3}\right\}$

$\downarrow$

y

$$\frac{2}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1}$$

$2 = As + A + Bs - 3B$

$A + B = 0$

$A - 3B = 2$

$\boxed{B = -\tfrac{1}{2}}$ $\boxed{A = \tfrac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{s-3} + \frac{-1/2}{s+1}\right\}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}.e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t}}$$