

6. Fonksiyon Denklemlerinin İndirgenmesi

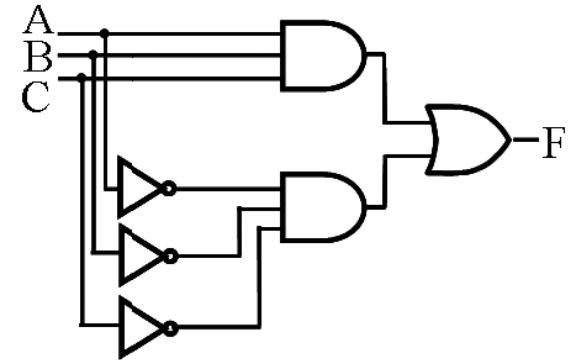
- Fonksiyon denkleminin indirgenmesindeki amaç; verilen denklem için en basit ve ucuz bir gerçekleştirme sağlamaktır.
- Denklemlerin indirgenmesinde 2 önemli avantaj gözetilir.
- a) Daha az kapı devresiyle gerçekleştirilen devreler daha ucuza malolur.
- b) Daha az kapı kullanılan devrelerin cevap hızı daha yüksektir. Çünkü her bir kapı elemanının çıkışının girişine cevabı bir gecikmeyle olmaktadır.
- İndirgenmiş denklem aynı tanım tablosunu sağlar. Bir denklemin indirgenmesinin ölçümü için bazı maliyet kriterlerine ihtiyaç vardır. Bunlardan bazıları;
- **Literal (Bir denklemdeki değişkenler ve değillerinin sayısı) Maliyeti (L):** Bir denklemi gerçekleştiren lojik diyagramdaki literal sayısıdır.[C.K. 2008-2]
- **Kapı girişi maliyeti (G) :** Verilen denklemin gerçekleştirilmesinde kullanılan kapı girişlerinin sayısıdır. Değil Bağlaçları hariç.
- **Değil Bağlaçlı Kapı Girişi Maliyeti (GN):** Verilen denklemin gerçekleştirilmesinde kullanılan kapı girişlerinin sayısıdır. Değil Bağlaçları dahil

Yandaki örneği incelersek, her iki devre de aynı tanım tablosunu sağlamaktadır.

- Çarpımların toplamı şeklindeki devrede Literal Maliyeti (L) 6, Kapı Giriş Maliyeti (G) 8, Değil Bağlaçlı kapı giriş Maliyeti (GN) 11 iken,
- Toplamların Çarpımı şeklindeki gerçeeklemede L=6, G=9, GN=12 olmaktadır. Yani Literal maliyetleri aynı olmakla birlikte tabiidir ki G=8, GN=11 olanı seçmek daha uygundur

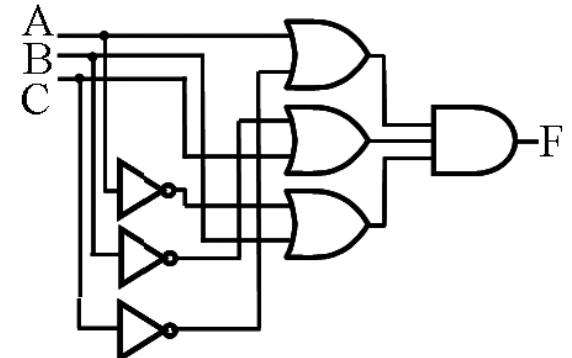
$$F = A.B.C + A'.B'.C'$$

L=6, G=8, GN=11



$$F = (A+C').(C+B').(B+A')$$

L=6, G=9, GN=12



- Fonksiyon denklemi için, Kapı giriş maliyetinin veya literal maliyetinin minimizasyonu gerçekleştiren devrenin maliyetini azaltır.
- Genelde indirgeme veya minimizasyon için Kapı giriş maliyeti göz önüne alınır. Daha açık ifade edilirse; değişkenlerin çarpımından (veya toplamından) oluşturulmuş terim sayısının minimize edilmesi bunu sağlar.
- Ayrıca hem bu durumun sağlanması ve ayrıca Literal sayısının da minimum olması dikkate alınmalıdır. Buda terimlerdeki değişken sayılarının minimum olmasına denk gelir.
- İndirgeme işleminde önemli olan, indirgeme işleminin nereye kadar devam edeceği veya yapılan indirgemenin minimize olup olmadığıdır. Teoremleri kullanarak yapılan indirgeme büyük tecrübe ister. Çünkü bu yöntemle yapılan indirgeme de sistematik yoktur.
- Birçok indirgeme yöntemi olmasına rağmen burada, fazla kullanılan 2 sistematik yöntemden bahsedilecektir.
- Harita (Karnough) yöntemi
- Çizelge (Quine-MC Clusky) Yöntemi
- Bunların her ikisi de devre gerçekleştirme maliyetinin minimum edilmesini sağlayan denklemler elde etmeyi göz önüne alırlar.

Karnouhg yöntemi ile indirgeme

Bu yöntemde her hücresi bir minterim veya maksterime karşılık gelen iki girişli çizelgeler kullanılır.

- **Bu çizelgelerin satır ve sütun girişleri değişkenlerin bir birleriyle yapabilecekleri kombinasyonları ifade ederler.**
- Ardışık satırlar veya sütünlardaki değişkenlerin bir birleriyle yapacakları kombinasyonlar GRAY koduna göre düzenlenmelidir.
- **Bunun anlamı ardışık hücreden hücreye geçerken oluşan terimlerde sadece 1 değişkenin değer değiştirmesini sağlamaktır. Bu da bize;**
 $xyz + xyz' = xy$ kısaltma imkanını verir ki zaten Karnaugh yöntemiyle kısaltmanın özü de budur.
- Karnaugh yöntemi 2,3,4 değişkenli fonksiyon denklemlerini indirgemek için çok uygun, 5 veya 6 değişkenli denklemleri indirgemek için uygundur.
- MSB değişkeni **a** olmak üzere değişkenlerin satır ve sütunların kesişiminden oluşan her bir hücre ilgili minterimleri vermektedir.

$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	0	1
0	m0	m2
1	m1	m3

2 değişkenli çizelge

$\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$	00	01	11	10
0	m0	m2	m6	m4
1	m1	m3	m7	m5

3 değişkenli çizelge

$\begin{smallmatrix} ab \\ cd \end{smallmatrix}$	00	01	11	10
00	m0	m4	m12	m8
01	m1	m5	m13	m9
11	m3	m7	m15	m11
10	m2	m6	m14	m10

4 değişkenli çizelge

$\begin{smallmatrix} abc \\ de \end{smallmatrix}$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m0	m4	m12	m8	m24	m28	m20	m16
01	m1	m5	m13	m9	m25	m29	m21	m17
11	m3	m7	m15	m11	m27	m31	m23	m19
10	m2	m6	m14	m10	m26	m30	m22	m18

5 değişkenli çizelge

- Çizelgelerdeki çift çizgiler simetri eksenini olarak göz önüne alınarak çizelge; simetri eksenlerine göre katlandığında üst üste gelen hücreler bir birine **komşudur** denir.
- Başka bir tarifle; ***Birer kenarı ortak olan hücreler biri birine komşudur.***
- Veya ***hücreden hücreye geçerken değişkenlerden sadece 1 tanesi değer değiştiriyorsa bu hücreler komşudur*** denir.
- Bu yöntemle indirgeme işleminde komşuluk ilişkilerinin çok iyi anlaşılması gerekir.
- **4 değişkenli çizelgede;** m0 hücresi, m4 ve m1 ve m2 ve m8 hücresi ile komşudur. m5 ve diğerleri ile komşu değildir.
- **5 değişkenli çizelgede;** m0 hücresi, m4 ile m1 ile, m2 ile, m8 ile m16 ile komşudur. Diğerleri ile değildir.

Karnough yöntemiyle fonksiyon denkleminin indirgenmiş şeklini bulmak

1-Tanım tablosunu

Karnough diyagramına taşıyınız:

Tanım tablosunda sonuç sütunundaki 1 ve 0'lar karnough haritasında ilgili hücrelere yazılır.

abc	s
000	1
001	0
010	0
011	1
100	1
101	1
110	0
111	1

		ab			
c	ab	00	01	11	10
		0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1

2-Kısaltılmış denklem çarpımların toplamı şeklinde yazılacaksa 1'li komşu hücrelerle kümeler teşkil edilir.

•Kümelerde 2^n ($n = 0,1,2,3,4,5$.) tane 1'li komşu hücre olmasına dikkat edilir. Örneğin 3 hücreli küme teşkil edilemez.

•Kümeler mümkün olduğu kadar fazla 1'li elemanlar ile oluşturulmalıdır. Herhangi bir 1'li hücre değişik kümelerin ortak elemanı olabilir.

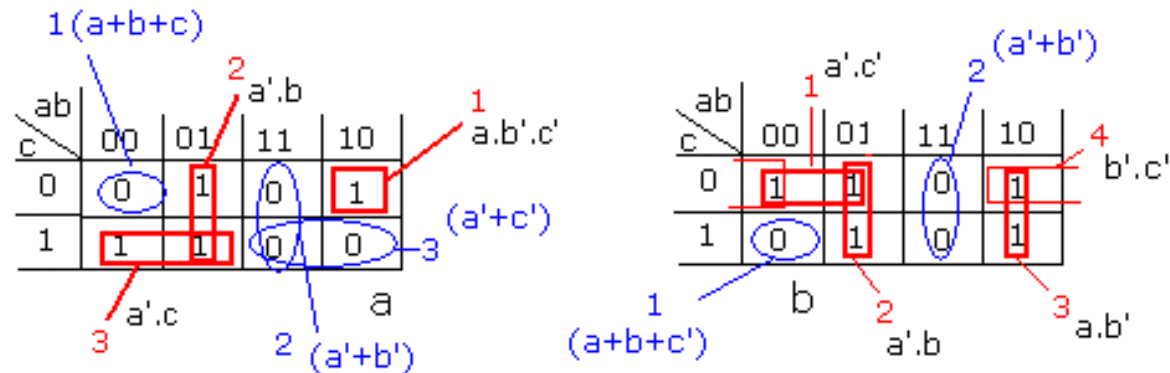
•Kümeleme işlemi, herhangi bir kümeye dahil edilebilecek iken dahil edilmemiş 1'li hücre kalmayınca kadar devam edilir.

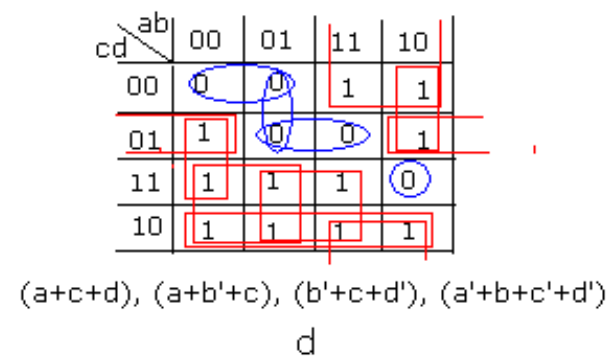
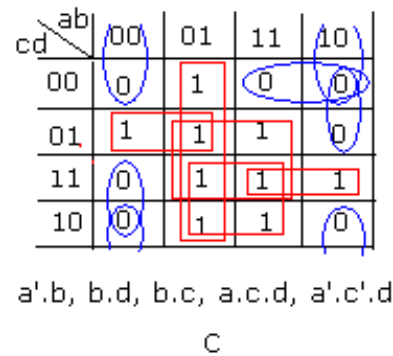
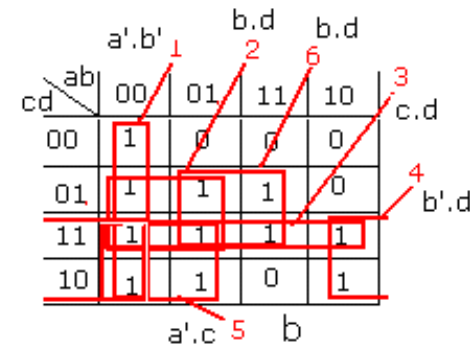
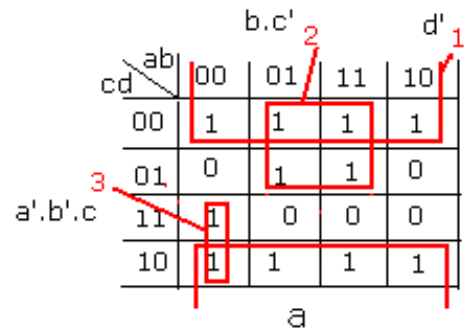
•Hiçbir 1'li hücreyle komşuluk ilişkisi bulunmayan hücre 1 elemanlı küme teşkil eder. Bunun anlamı bu kümeden kısaltılamayan terim elde edilecektir demektir.

•Oluşturulabilecek en fazla sayıda komşu 1'li hücrelerle oluşturulmuş kümelerin herbirinden elde edilecek terimlere asal içerik denir. Hiçbir 1'li elemanla komşuluk ilişkisi olmayan 1 hücreli kümeden elde edilen terim de asal içeriktir. Asal içerik indirgenmiş terimdir.

•Çarpım terimi şeklindeki asal içerik'i yazmak için; kümede, komşu hücreden hücreye (dikey veya yatay olarak) geçerken değer değiştiren değişken elenir. Değer değiştirmeyen değişken 1 ise kendisi, 0 ise değil'i alınarak diğer değişkenlerle VE bağlacı ile bağlanıp terim oluşturulmuş olur.

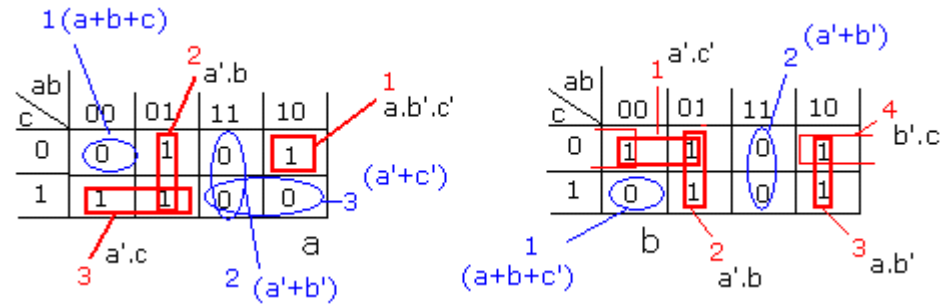
•Asal içeriklerin oluşturulduğu kümeler içerisinde, başka kümelerin ortak elemanı olmayan, sadece kendisi tarafından kapsanan 1'li hücre veya hücreler var ise bu kümeden oluşturulacak çarpım terimine de asıl asal içerik denir.





- Şekil a. haritada 1,2,3 nolu kümelerden asal içerikler elde edilir. Çünkü her 3 küme de mümkün olan en fazla sayıda 1'li elemandan oluşmuştur. Bu kümeler aynı zamanda asıl asal içerik terimlerini veren kümelerdir. Çünkü her üç kümede de yalnızca kendisi tarafından kapsanan 1'li hücre vardır.
- Şekil.b'deki haritada ise; 1,2,3,4,5,6 nolu kümeler asal içerikleri veren kümelerdir. Bunlardan 1,4,5,6 asıl asal içerik terimleri veren kümelerdir. Çünkü en az bir adet 1'li hücre sadece kendisi tarafından kapsanıyordur. 2. ve 3. kümeler ise asıl asal içerik kümesi değildir.

İndirgenmiş fonksiyon denkleminin oluşturulması:



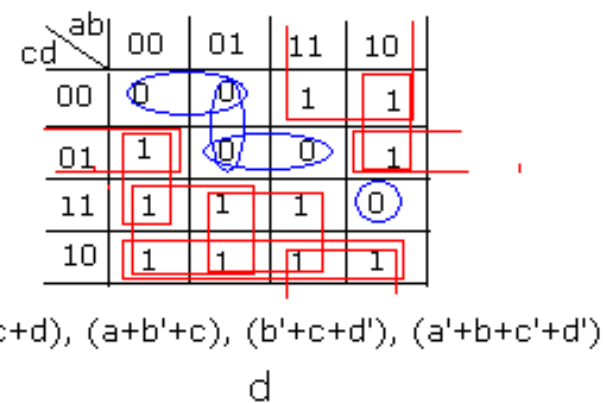
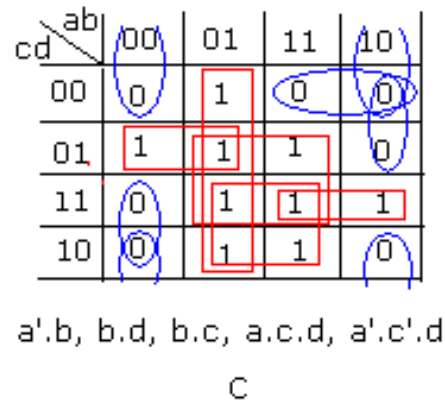
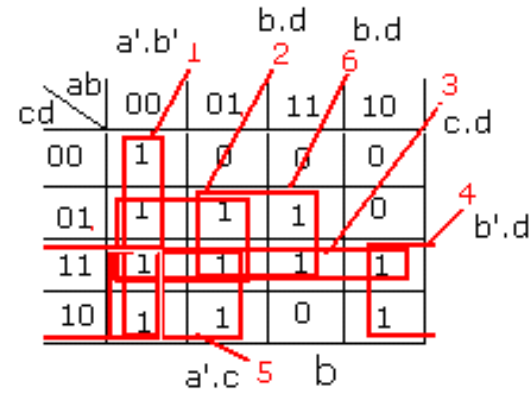
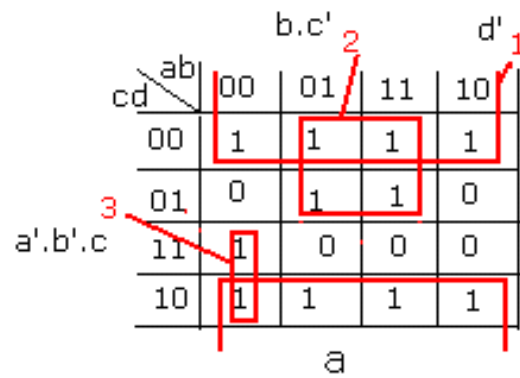
•Çarpım terimi biçimindeki tüm Asal içerikler bulunur.

•Bu asal içerikler içerisinde asıl asal içerikler alınarak birbirleriyle **VEYA** bağlacı ile bağlanıp indirgenmiş fonksiyon denklemini elde edilir.

•Burada önemli olan nokta; asıl asal içeriklerin haritadaki tüm 1'li hücreleri kapsayıp kapsamadığıdır. Eğer 1'li hücrelerin hepsini kapsıyorsa indirgenmiş denklemin elde edilmiştir. Eğer Asıl asal içeriklerin elde edildiği kümeler dışında başka 1'li hücreler kalmışsa, bu durumda bu hücreleri içine alan en az sayıda ve en fazla elemanlı kümelerden asal içerikler bulunarak denkleme **VEYA** bağlacı ile eklenmelidir.

• $F(a,b,c) = a'.b + a'.c + a.b'.c'$ (Şekil . a için)

• $F(a,b,c) = a'.b + a.b' + a'.c'$ (Şekil .b.için $a'.c'$ asıl asal içerik değil)



- $F(a,b,c,d) = d' + b.c' + a'.b'.c$ (Şekil .a için)
- $F(a,b,c,d) = a'.b' + b'.d + a'.c + b.d$ (Şekil.b için)

İndirgenmiş fonksiyon denkleminin 0'lı açılıma göre yazılması

- Bunun için 0'lı komşu hücrelerle kümeler teşkil edilip, asal içerikler ve asıl asal içerikler elde edilir. Yukarıda anlatıldığı gibi 1'li açılımdaki küme oluşturma kurallarının aynısı bunun için de geçerlidir.
 - 0'lı kümelerden *toplam terimi* şeklindeki içerikler oluşturulurken kümedeki komşu hücreden hücreye geçerken değer değiştiren değişken elenir. Değer değiştirmeyen değişken 0 ise kendisi 1 ise değil'i alınarak diğer değişkenler ile VEYA bağlacı ile bağlanıp *toplam terimi* olarak asal içerik oluşturulmuş olur.
 - Bu şekilde oluşturulmuş asal içerikler arasından öncelikle asıl asal içerik terimleri bulunup, bunlar VE bağlacı ile biri birlerine bağlanınca 0'lı açılıma göre kısaltılmış fonksiyon denklemi bulunmuş olur. Eğer asıl asal içerikler tüm 0'lı elemanları kapsamıyorsa bu durumda, kapsanmayan 0'lı hücreleri barındıran asal içeriklerde denkleme eklenmelidir.
- $F(a,b,c) = (a+b+c) \cdot (a'+b') \cdot (a'+c')$** (Şekil.a'ya göre 0'lı kısaltılmış denklem)
 - $F(a,b,c) = (a+b+c') \cdot (a'+b')$** (Şekil.b'ye göre 0'lı kısaltılmış denklem)

Karnaugh map for $F(a,b,c)$ with prime implicants circled in blue and numbered 1, 2, and 3. The map is a 2x4 grid with columns labeled ab (00, 01, 11, 10) and rows labeled c (0, 1). The cells contain values: (0,00)=0, (0,01)=1, (0,11)=0, (0,10)=1, (1,00)=1, (1,01)=1, (1,11)=0, (1,10)=0. Prime implicants are: 1 (a+b+c) covering (0,00), (0,01), (1,00), (1,01); 2 (a'+b') covering (0,01), (0,11), (1,01), (1,11); 3 (a'+c') covering (0,01), (0,11), (1,01), (1,11).

ab \ c	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	1	0	0

Karnaugh map for $F(a,b,c)$ with prime implicants circled in blue and numbered 1, 2, 3, and 4. The map is a 2x4 grid with columns labeled ab (00, 01, 11, 10) and rows labeled c (0, 1). The cells contain values: (0,00)=0, (0,01)=1, (0,11)=0, (0,10)=1, (1,00)=1, (1,01)=1, (1,11)=0, (1,10)=0. Prime implicants are: 1 (a+b+c') covering (0,00), (0,01), (1,00), (1,01); 2 (a'+b') covering (0,01), (0,11), (1,01), (1,11); 3 (a'.b) covering (0,01), (0,11), (1,01), (1,11); 4 (b'.c') covering (0,01), (0,11), (1,01), (1,11).

ab \ c	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	1	0	0

		b.c'				d'	
cd	ab	00	01	11	10		
		1	1	1	1		
00		1	1	1	1		
01		0	1	1	0		
11		1	0	0	0		
10		1	1	1	1		

a

		a'.b'				b.d		b.d			
cd	ab	00	01	11	10						
		1	0	0	0						
00		1	0	0	0						
01		1	1	1	0						
11		1	1	1	1						
10		1	1	0	1						

b

		a'.b				b.d				b.c				a.c.d				a'.c'.d			
cd	ab	00	01	11	10																
		0	1	0	0																
00		0	1	0	0																
01		1	1	1	0																
11		0	1	1	1																
10		0	1	1	0																

c

		(a+c+d)				(a+b'+c)				(b'+c+d')				(a'+b+c'+d')			
cd	ab	00	01	11	10												
		0	0	1	1												
00		0	0	1	1												
01		1	0	0	1												
11		1	1	1	0												
10		1	1	1	1												

d

- 0'lı açılıma göre indirgenmiş denklemleri bulunuz.

Tümüyle tanımlanmamış denklemlerin indirgenmesi

- Bazı problemlerde giriş kombinasyonlarının bir kısmında çıkış tanımlanamıyordu. Bu durumda çıkışlar keyfi (Dont care) olarak alınıyordu. Karnough diyagramıyla indirgeme yapılırken, o hücrelere “K” yazılır. Diyagramdan indirgenmiş denklem yazılırken, keyfi değerler denklemini minimum yapan değerler olarak seçilmelidir.
- **Örnek:** 10 tabanında (0-9) a kadar rakamlara ilişkin ikili kodu (BCD), Uç ilave koduna dönüştüren 4 girişli, 4 çıkışlı bir kombinasyon devrenin tanım tablosunu oluşturarak çıkış denklemlerinin indirgenmiş şeklini Karnough yöntemiyle elde ediniz.

Çözüm: Problemin tanım tablosu sonraki slayttadır. Tablodan da görüldüğü gibi, 10,11,12,13,14, ve 15. kombinasyonlar girişe uygulanmadığından çıkışlar Keyfi değer alınmıştır.

	X	Y	Z	K	Ç3	Ç2	Ç1	Ç0
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	1
5	0	1	0	1	1	0	0	0
6	0	1	1	0	1	0	0	1
7	0	1	1	1	1	0	1	0
8	1	0	0	0	1	0	1	1
9	1	0	0	1	1	1	0	0
10	1	0	1	0	K	K	K	K
11	1	0	1	1	K	K	K	K
12	1	1	0	0	K	K	K	K
13	1	1	0	1	K	K	K	K
14	1	1	1	0	K	K	K	K
15	1	1	1	1	K	K	K	K

- Yukarıdaki tanım tablosuna göre; Çıkışlar
- $\text{Ç3} = \sum_m 5,6,7,8,9 + \sum_K 10,11,12,13,14,15$
- $\text{Ç2} = \sum_m 1,2,3,4,9 + \sum_K 10,11,12,13,14,15$
- $\text{Ç1} = \sum_m 1,3,4,7,8 + \sum_K 10,11,12,13,14,15$
- $\text{Ç0} = \sum_m 0,2,4,6,8 + \sum_K 10,11,12,13,14,15$

Bu problem için keyfi değerlerin uygun seçilmesiyle elde edilen kısaltılmış denklemler aşağıdadır.

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	K1	1
01	0	1	K1	1
11	0	1	K1	K1
10	0	1	K1	K1

$$\zeta_3 = a + b.d + b.c$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	1	K1	0
01	1	0	K0	1
11	1	0	K0	K1
10	1	0	K0	K1

$$\zeta_2 = b'd + b'c + b.c'd$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	K1	1
01	0	0	K	0
11	1	1	K1	K1
10	0	0	K	K

$$\zeta_1 = c'.d' + c.d$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	K1	1
01	0	0	K	0
11	0	0	K	K
10	1	1	K1	K1

$$\zeta_0 = d'$$

	X	Y	Z	K	ζ_3	ζ_2	ζ_1	ζ_0
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	1
5	0	1	0	1	1	0	0	0
6	0	1	1	0	1	0	0	1
7	0	1	1	1	1	0	1	0
8	1	0	0	0	1	0	1	1
9	1	0	0	1	1	1	0	0
10	1	0	1	0	K	K	K	K
11	1	0	1	1	K	K	K	K
12	1	1	0	0	K	K	K	K
13	1	1	0	1	K	K	K	K
14	1	1	1	0	K	K	K	K
15	1	1	1	1	K	K	K	K

Çizelge (Quine MC-Clusky) Yöntemi ile indirgeme

- Bu yöntem 6 veya daha fazla değişkenli denklemlerin indirgenmesi için çok uygundur. Elle çözülecek bir algoritma değildir. Bilgisayarda programlamaya uygun bir yöntemdir. Çarpımların toplamı şeklinde (veya toplamların çarpımı) tam açılım formunda yazılmış denklemi bu yöntemle indirgemek için aşağıdaki adımlar sistematik olarak uygulanmalıdır.
- a- Tam açılım şeklinde yazılmış denklemin min.terimleri, içerisinde en fazla değil değişkeni bulunan terimler üste gelecek şekilde çoktan aza doğru bir tablonun sütununa yazılır.
- b- Bu şekilde dizilmiş terimler arasında benzerlikler aranır. İki terimin benzer olabilmesi için sadece 1 değişkenlerinin farklı olması diğerlerinin benzer olması gerekir. Benzer terimler arasında benzemeyen değişken elenir. Elde edilen terim bir sonraki sütuna yazılır.
- Bir terim (satır) birden fazla terimle (satırla) benzerlik ilişkisine girebilir. Bu işlemler bir birine benzemeyen satırlar (terimler) kalıncaya kadar devam eder.
- Elde edilen sonuç Karnough diyagramındaki asal içeriklerin bulunması işlemine karşı gelir. Hiçbir satırla benzeşime girmeyen terim kısaltılamayan terimdir. Yani asal içeriktir. Benzerlikler sonucu bir birbirinin aynı terimler oluşmuş ise bunlardan bir tanesi alınır.
- $F(a,b,c) = \sum m_{1,2,3,4}$ şeklinde yazılmış denkleme bu uygulamayı yapalım. indirgenmesinin Q-Mc-Clusky yöntemiyle bulunması için uygulanırsa;

m	abc	abc
1	001 (1)	0-1 (1,4)
2	010 (2)	01- (2,4)
4	100 (3)	100 (3)
3	011 (4)	

- **c-** Asıl asal içeriklerin bulunması için aşağıdaki tablo hazırlanır. Bu tabloda sadece kendisi tarafından kapsanan minterimler olan Asal İçerikler asıl asal içeriktir. Buna göre her üç asal içerikte asıl asal içeriktir. İndirgenmiş denklem bunların veyalanması ile aşağıdaki gibi elde edilir
- $F(a,b,c) = a'.c + a'.b + a.b'.c'$
- Eğer bu şekilde bulunan asıl asal içerikler tüm minterimleri kapsamıyorsa, bu durumda en çok minterim kapsayan asal içerik veya içerikler de denkleme dahil edilir.

Minterimler?→	1	2	3	4
Asal İçerikler↓				
$a'.c$	+	-	x	-
$a'.b$	-	+	x	-
$a.b'.c'$	-	-	-	+

Örn: $f(a,b,c,d) = \sum_m 1,2,3,,5,8,9,10,11,13,14,15$ fonksiyon denklemini;
a) Q-Mc-Clusky yöntemine b)Karnough yöntemine göre indirgeyiniz

- Tablodaki en son sütun asal içeriklerdir. Bunlardan hangilerinin asıl asal içerik olduğunu bulmak için aşağıdaki tabloyu oluşturalım.
- Tablo incelendiğinde b'.d asal içeriği hariç diğerlerinin asıl asal içerik olduğu ve bunlarında tüm minterimleri kapsadığı görülür.

$$F_{(a,b,c,d)} = a.c + a.b' + b'.c + c'.d$$

elde edilir.

m	abcd	abcd	abcd	abcd
1	0001 1	00-1 1,4 (1)	-0-1 1,9	-0-1
2	0010 2	-001 1,6 (2)	-0-1 2,7	--01
8	1000 3	001- 2,4 (3)	--01 2,8	-01-
3	0011 4	-010 2,7 (4)	-01- 3,11	10--
5	0101 5	100- 3,6 (5)	-01- 4,7	1--1
9	1001 6	10-0 3,7 (6)	10-- 5,11	1-1-
10	1010 7	-011 4,8 (7)	10-- 6,9	
11	1011 8	-101 5,9 (8)	1--1 9,14	
13	1101 9	10-1 6,8 (9)	1--1 10,13	
14	1110 10	1-01 6,9 (10)	1-1- 12,13	
15	1111 11	101- 7,8 (11)		
		1-10 7,10 (12)		
		1-11 8,11 (13)		
		11-1 9,11 (14)		

Minterim → Asal İçerikler ↓	1	2	8	3	5	9	10	11	13	14	15
b'.d	x			x		x		x			
c'.d	x				+	x			+		
b'.c		+		x			x	x			
a.b'			+			x	x	x			
a.c							x	x		+	+

- Aynı indirgemeyi Karnaugh yöntemiyle yapalım. Harita incelendiğinde 5 tane asal içerik olduğu görülür. Bunlardan 5.asal içerik kümesi (b'.d) asıl asal içerik değildir. Çünkü hücrelerinin her biri diğer kümelerin ortak elemanıdır. Asıl asal içerikler ise bütün 1'li elemanları (minterimleri) kapsamaktadır. İndirgenmiş fonksiyon denklemi yazılırsa;

$$F(a,b,c,d) = a.c + a.b' + b'.c + c'.d$$

The Karnaugh map for the function $F(a,b,c,d)$ is shown below. The map is a 4x4 grid with rows labeled 'cd' and columns labeled 'ab'. The cells contain 1s at the following positions: (00,10), (01,00), (01,01), (01,11), (01,10), (11,00), (11,01), (11,11), (11,10), (10,00), (10,01), (10,11), and (10,10). Five prime implicants are circled in red and labeled with numbers 1 through 5:

- 1: $c'.d$ (Circles the 1s in the top row, where $c=0$ and $d=1$).
- 2: $a.b'$ (Circles the 1s in the first column, where $a=0$ and $b=1$).
- 3: $a.c$ (Circles the 1s in the bottom row, where $a=1$ and $c=1$).
- 4: $b'.c$ (Circles the 1s in the second column, where $b=0$ and $c=1$).
- 5: $b'.d$ (Circles the 1s in the first two columns, where $b=0$ and $d=1$).

cd \ ab	00	01	11	10
00				1
01	1	1	1	1
11	1		1	1
10	1		1	1

Fonksiyon denklemlerinin tek tip kapılarla oluşturulması

- Boole cebirindeki fonksiyon denklemlerini tek tip bağlaçlarla gerçekleştirebiliriz. Bunlar genellikle NAND veya NOR bağlaçlarıdır.
- Denklemleri tek tip bağlaçla gerçekleştirmenin 2 önemli sebebi vardır.
- Birincisi bu bağlaçlar, entegre devrelerde daha basit gerçekleştirilen temel devrelerdir.
- Daha önemlisi ise SSI entegre devrelerin içlerinde tek tip bağımsız bağlaçlar vardır.
- Dolayısıyla çarpımların toplamı veya toplamların çarpımı şeklinde standart gerçekleştirmelerde en az 2 tip bağlaç veya 2 tip entegre devre tipine gerek vardır.
- Bunun için tek tip bağlaçla denklem gerçekleştirme önem kazanmaktadır.

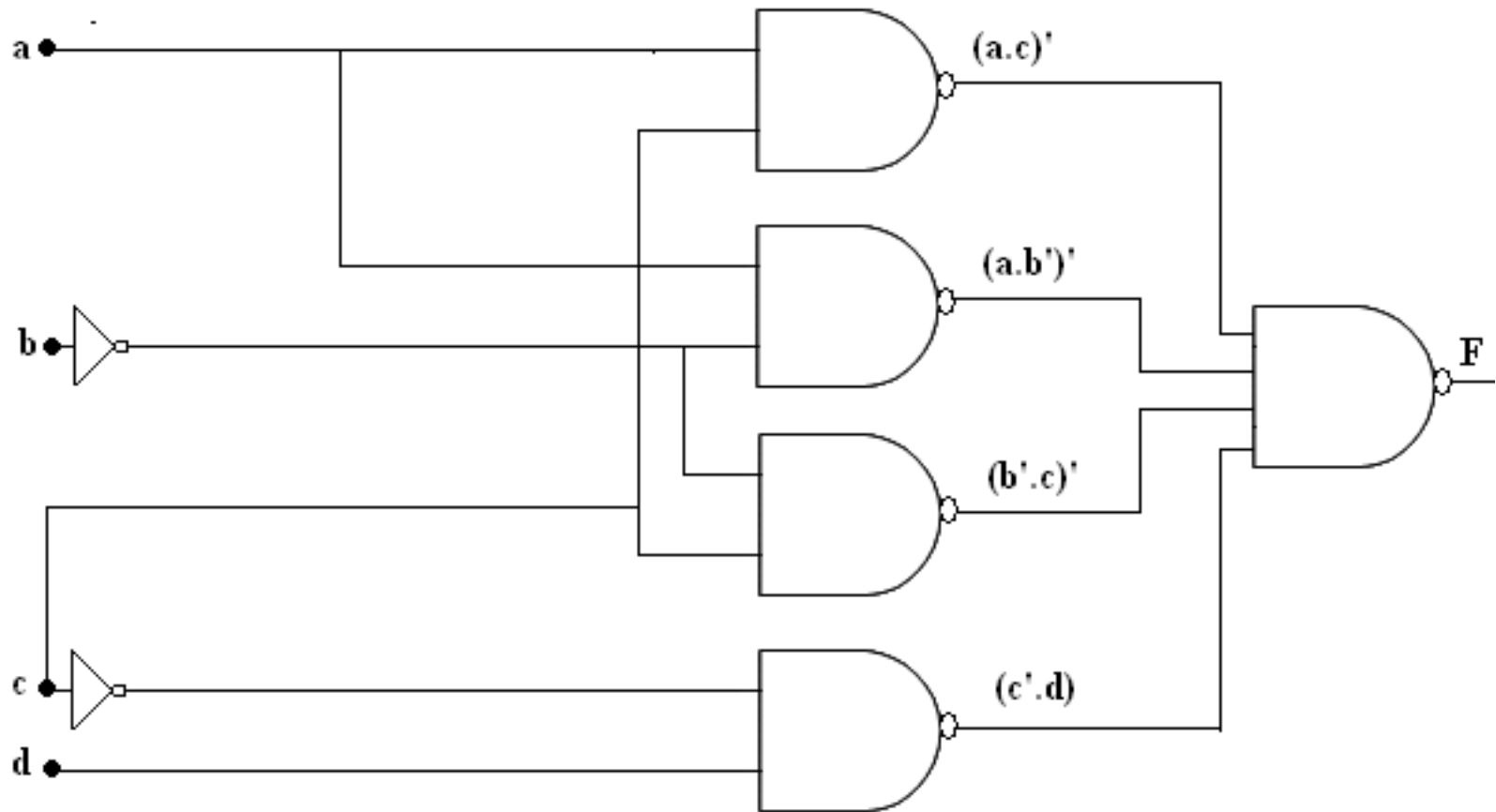
Sadece NAND bağlaçlarıyla denklem gerçekleştirme

- Çarpımların toplamı şeklinde oluşturulmuş denklem İndirgenir.
- Denklem bu halinin iki defa değil'i (tersi) alınır ve bir defa De-Morgan Teoremi uygulanır, öyleki; deyimdeki VE'ler değişmesin, VEYA'lar VE haline dönüşsün.
- Bu şekilde elde edilmiş denklem sadece NAND bağlaçlarından oluşmuştur.
- Örnek olarak $F(a,b,c,d) = a.c + a.b' + b'.c + c'.d$ indirgenmiş denklemi ele alalım.
- $F''(a,b,c,d) = (a.c + a.b' + b'.c + c'.d)''$ alınıp bu haline DE-Morgan teoremini uygulayalım.

$$F''(a,b,c,d) = ((a.c)' . (a.b')' . (b'.c)' . (c'.d)')'$$

- Elde edilir. Bu denklem sadece NAND bağlaçlarıyla gerçekleştirilir. Bunun lojik şeması çizilirse

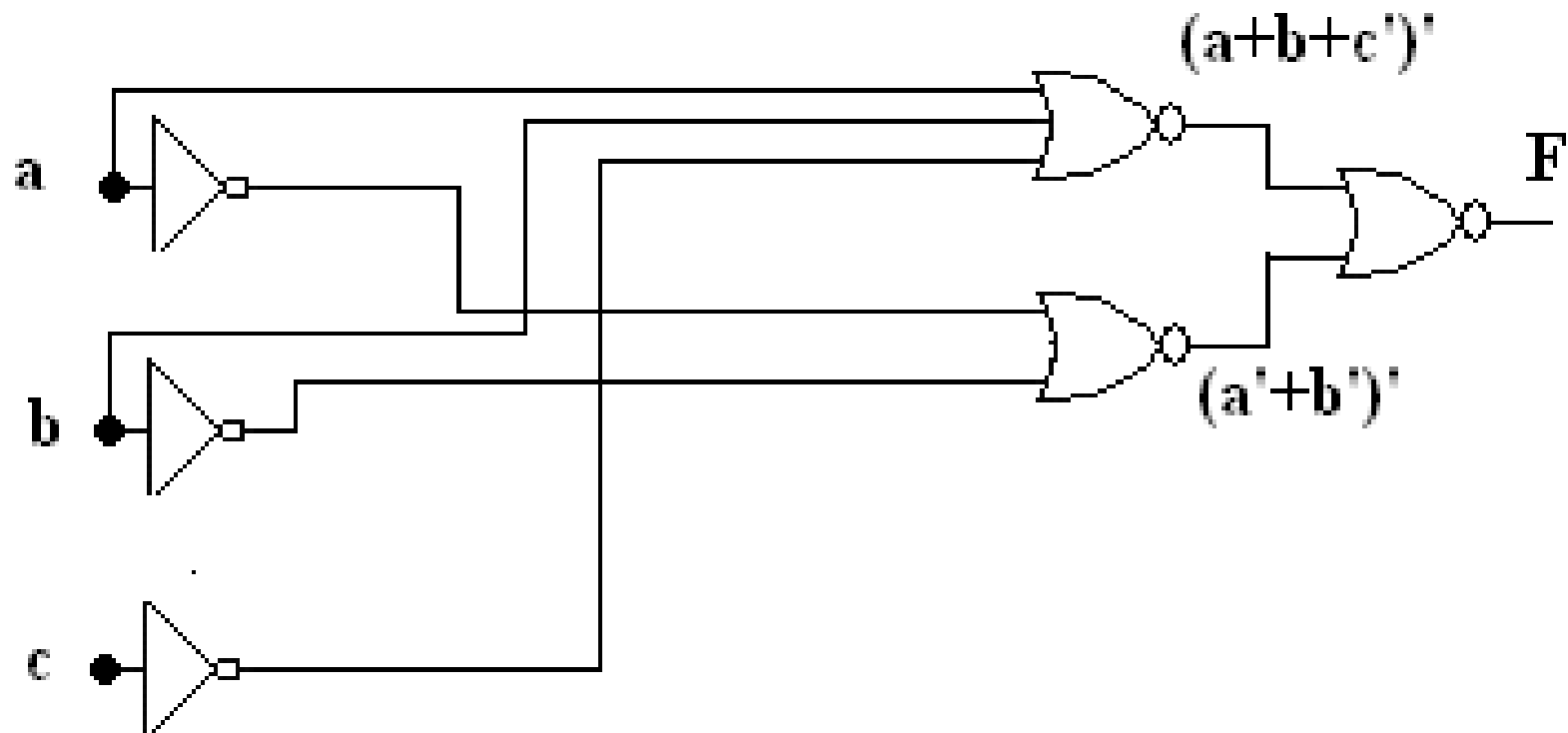
$$F''(a,b,c,d) = ((a.c)' . (a.b')' . (b'.c)' . (c'.d)')'$$



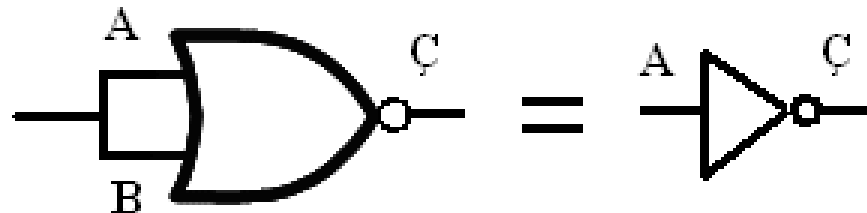
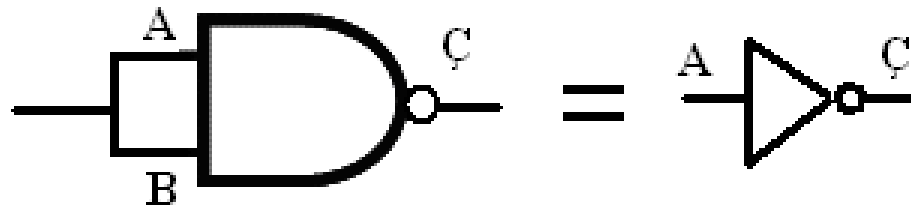
Sadece NOR bağlaçlarıyla denklem gerçekleştirme

- Toplamların çarpımı şeklinde oluşturulmuş denklem indirgenir.
- Denklem bu halinin iki defa değil'i (tersi) alınır ve bir defa De-Morgan Teoremi uygulanır, öyleki; deyimdeki VEYA'lar değişmesin, VE'ler VEYA haline dönüşsün.
- Bu şekilde elde edilmiş denklem sadece NOR bağlaçlarından oluşmuştur.
- Örneğin $F(a,b,c) = (a+b+c').(a'+b')$ kısaltılmış denklemini NOR bağlaçlarıyla gerçekleştirmek için;
- $F''(a,b,c) = ((a+b+c').(a'+b'))''$ alınıp, denklemin bu haline De-Morgan teoremini uygulayalım. Öyle ki VE'ler VEYA olsun. VEYA'lar kaybolmasın.
- **$F(a,b,c) = ((a+b+c')' + (a'+b')')'$**
- Elde edilir. Bunun lojik şeması çizilirse;

$$F(a,b,c) = ((a+b+c')' + (a'+b')')'$$



- Dikkat edilirse her iki gerçekleştirilmede de devrede tersleyen bağlaçlar da kullanılmaktadır. Ancak aşağıdaki şemalara dikkat edilirse gerek NAND gerekse NOR bağlaçlarının girişlerini birbirine bağlayarak Değil bağlacı yapmak mümkündür.



A	B	C
0	0	1
1	1	0