

## Diziler

### Alıştırırmalar

Aşağıdaki dizilerin limitlerini bulunuz.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{e^n + 1}{e^n - 1} \right)$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)^n$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^7}{n^2}$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n n}$
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1 + \frac{1}{n}}$
6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{\ln n}}$
7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 4^n)^{-\frac{1}{n}}$
8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{137}}{137^n}$
9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{10n! + (n-1)!}$
10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left( 1 + \frac{2}{n} \right)$
11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{n+1} - \cos \sqrt{n})$  ( $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$  formülünden faydalanın!)
12.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{2} \cos \frac{1}{4} \cos \frac{1}{8} \dots \cos \frac{1}{2^n} \right)$
13.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( 1 - \cos \frac{1}{n} \right)$
14.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \arctan \frac{n+1}{n+2} - \frac{\pi}{4} \right)$
15.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \arctan \frac{n+1}{n+2} - \arctan \frac{n}{n+2} \right)$
16.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{1}{n}}}$
17.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{n} + a \sin \frac{b}{n} \right)^n$
18.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}} + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+2}} + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+3}} + \dots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}} \right)$
19.  $f(x)$  fonksiyonu  $[0, 1]$  aralığında diferansiyelenebilir bir fonksiyon ve  $f(0) = 0$  olsun.  $a_n = n f\left(\frac{1}{n}\right)$  olarak tanımlanan dizinin limitini bulunuz.
20.  $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  kuralı ile tanımlanan Fibonacci dizisi için  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$  limitini hesaplayınız.

## SERİLER

Aşağıdaki serilerin yakınsaklıklarını inceleyiniz.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n}$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n+3^n+4^n+5^n+6^n+7^n}{10^n}$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$
5.  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$
7.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$
8.  $\sum_{n=1}^{\infty} n \left( \sin \frac{1}{2^n} \right)^n$
9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln^n(n+1)}$
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{e}}{n^2}$
11.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$
12.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (n! \geq 2^{n-1} \text{ özelliğini kullanın!})$
13.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$
14.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$
15.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.4.9 \dots n^2}{1.5.9 \dots (4n-3)}$
16.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$
17.  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$
18.  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{n^2+1}{n^2} \right)$
19.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000.1002.1004 \dots (998+2n)}{1.4.7 \dots (3n-2)}$
20.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan n}}{1+n^2}$

## KUVVET SERİLERİ

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n}$  kuvvet serisi hangi  $x$  değerleri için yakınsaktır?
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$  kuvvet serisi hangi  $x$  değerleri için yakınsaktır?
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$  kuvvet serisi hangi  $x$  değerleri için yakınsaktır?
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{4^n 1.3.5 \dots (2n-1)}$  kuvvet serisi hangi  $x$  değerleri için yakınsaktır?
5.  $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$  olduğunu gösteriniz.
6.  $\frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n 2^{n+1}] x^n, |x| < \frac{1}{2}$  olduğunu gösteriniz.
7.  $\ln(1+x-2x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(-1)^n 2^{n+1}-1]}{n+1} x^{n+1}, |x| < \frac{1}{2}$  olduğunu gösteriniz.
8.  $\sin 3x + x \cos 3x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n}(2n+4)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$  olduğunu gösteriniz.
9.  $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  olduğunu gösteriniz.
10.  $\frac{x}{9+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+2}} x^{2n+1}$  olduğunu gösteriniz.

## Vektör Degerli Fonksiyonlar

1.  $r(t) = t|t|\mathbf{i} + [t^2 - 2t]\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$  fonksiyonunun süreksizlik noktalarını bulunuz.
2.  $u = \mathbf{i} - \mathbf{j}, v = \mathbf{i} + \mathbf{j}, r(t) = u \sin t + v \cos t$  fonksiyonu için  $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} |r(t)|$  limitini hesaplayınız.
3.  $r(t) = \ln(1+t^2)\mathbf{i} + \arctan t\mathbf{j} + \sqrt{1+t^2}\mathbf{k}$  konumu ile verilen bir parçacığın  $t = 0$  anındaki hız ve ivme vektörlerini bulunuz.
4.  $r(t) = \sin t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$  konum vektörü verilen parçacığın hangi noktalarda hız ve ivme vektörleri diktir?
5.  $\int \left( \frac{e^{2t}}{\sqrt{e^t+1}}\mathbf{i} + \frac{1}{100+9t^2}\mathbf{j} + \frac{t^2}{t+1}\mathbf{k} \right) dt$  integralini hesaplayınız.
6.  $\int_0^{\pi/3} (\sec t \tan t\mathbf{i} + \tan t\mathbf{j} + 2 \sin t \cos t\mathbf{k}) dt$  integralini hesaplayınız.
7. Türevi  $r'(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t+1}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \frac{1}{11+t}\mathbf{k}$  ve  $r(0) = \mathbf{k}$  koşulunu sağlayan fonksiyonu bulunuz.
8.  $r(t) = 6t^3\mathbf{i} - 2t^3\mathbf{j} - 3t^3\mathbf{k}$  fonksiyonunun birim teğet vektörünü bulunuz.
9.  $r(t) = (t \sin t + \cos t)\mathbf{i} + (t \cos t - \sin t)\mathbf{j}, \sqrt{2} \leq t \leq 2$  eğrisinin uzunluğunu bulunuz.
10.  $r(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^2\mathbf{j} + \frac{2}{27}t^3\mathbf{k}$  eğrisinin  $(0, 0, 0)$  ve  $(3, 3, 2)$  noktaları arasında kalan parçanın uzunluğunu bulunuz.
11.  $r(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$  eğrisinin eğrilikliğini bulunuz.
12.  $r(t) = t\mathbf{i} + (t+1)\mathbf{k}, s(t) = t^2\mathbf{j}, q(t) = \frac{1}{t^2}\mathbf{k}$  olmak üzere  $\frac{d}{dt}(r(t)(s(t) \times q(t)))$  türevini hesaplayınız.

## Cok Degiskenli Fonksiyonlar Limit & Sureklilik

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2-y}$  limitini hesaplayınız.
2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$  limitini hesaplayınız.
3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin y}{x^2+1}$  limitini hesaplayınız.
4.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^2}$  limitini hesaplayınız.
5.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  fonksiyonu her yerde surekli midir?
6.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  fonksiyonu her yerde surekli midir?
7.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  fonksiyonu her yerde surekli midir?
8.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  fonksiyonu her yerde surekli midir?

## Cok Degiskenli Fonksiyonların Kısmi Turevler

1.  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  fonksiyonunun  $f_x, f_y$  kısmi turevlerini hesaplayınız.
2.  $f(x, y) = \arcsin(\sqrt{xy})$  fonksiyonunun  $f_x, f_y$  kısmi turevlerini hesaplayınız.
3.  $f(x, y) = x \arctan \frac{y}{x}$  fonksiyonunun  $f_x, f_y$  kısmi turevlerini hesaplayınız.
4.  $f(x, y) = e^{\frac{y}{x}} \cos \frac{y}{x}$  fonksiyonunun  $f_x, f_y$  kısmi turevlerini hesaplayınız.
5.  $z = \arcsin\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$  fonksiyonu  $xz_x + yz_y = 0$  denklemini sağladığını gösteriniz.
6.  $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$  fonksiyonu için  $\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$  determinantını hesaplayınız.
7.  $z = f(x + g(y))$  fonksiyonunun  $z_x z_{xy} = z_y z_{xx}$  eşitliğini sağladığını gösteriniz.
8.  $z = f(x + at) + g(x - at)$  fonksiyonunun  $z_{tt} = a^2 z_{xx}$  eşitliğini sağladığını gösteriniz.
9.  $t = f(u, v, w)$  ve  $u = x - y, v = y - z, w = z - x$  olmak üzere

$$\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

10.  $xe^y + ye^z + 2 \ln x - 2 - \ln 8 = 0$  fonksiyonunun  $(1, \ln 2, \ln 3)$  noktasındaki  $z_x, z_y$  kısmi turevlerini hesaplayınız.
11.  $x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 2xy = 12$  yüzeyinin hangi noktalarındaki teget düzlemleri  $xOz$  düzlemine paraleldir.
12.  $z = 9 - 4x^2 - y^2$  paraboloidinin hangi noktasındaki tegeti  $z = 4y$  düzlemine paraleldir.
13. Bir  $f(x, y)$  fonksiyonunun  $P(1, 2)$  noktasında  $a = i + j$  yönündeki turevi  $2\sqrt{2}$ ,  $b = -2j$  yönündeki turevi  $-3$  olduğuna göre  $c = -i - 2j$  yönündeki turevini bulunuz.
14. Bir  $f(x, y, z)$  fonksiyonunun  $P$  noktasındaki en büyük turevi  $a = i + j - k$  yönündeki turevi olup, turevin değeri  $2\sqrt{3}$  dir.  $\nabla f$  gradyentinin  $P$  noktasındaki değerini bulunuz.
15.  $z = x^2 - xy - 2y^2$  fonksiyonun  $P(1, 2)$  noktasında  $Ox$  eksenine ile  $\pi/3$  derecelik açı yapan vektör yönündeki turevini bulunuz.
16.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  elipsoidine üzerinde bir  $P(x_0, y_0, z_0)$  noktasından çizilen teget düzleminin denklemini bulunuz.
17.  $M(2, 1, 3), N(5, 5, 15)$  noktaları için  $f(x, y, z) = xy + yz + xz$  fonksiyonunun  $MN$  yönündeki turevini bulunuz.
18.  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \ln(xyz)$  fonksiyonunun  $A(-1, 2, -2)$  noktasındaki gradyent vektörünü bulunuz.
19.  $f(x, y, z) = \ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz)$  fonksiyonunun  $P(1, 1, 1)$  noktasındaki yonlu turevlerinin en büyüğü ve en küçüğü bulunuz.
20.  $\sqrt{5.98^2 + 8.01^2}$  ifadesinin yaklaşık değerini hesaplayınız.

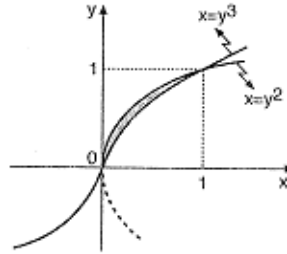
## Maksimum & Minimumlar

1.  $z = \frac{1}{x^2+y^2-1}$  fonksiyonunun ekstremler noktalarını bulup bu noktadaki değerlerini hesaplayınız.
2.  $z = (x-1) \ln(xy)$  fonksiyonunun ekstremler noktalarını bulup bu noktadaki değerlerini hesaplayınız.
3.  $z = (x-1)^2 + 2y^2$  fonksiyonunun ekstremler noktalarını bulup bu noktadaki değerlerini hesaplayınız.
4.  $z = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$  fonksiyonunun ekstremler noktalarını bulup bu noktadaki değerlerini hesaplayınız.
5.  $z = x^2 - xy + y^2 + 1$  fonksiyonunun  $B = \{(x, y) : x \geq 0, y \leq 4, y \leq x\}$  bölgesindeki mutlak ekstremler değerlerini hesaplayınız.
6.  $z = x^2 - y^2$  fonksiyonunun  $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  bölgesindeki mutlak ekstremler değerlerini hesaplayınız.
7. Üst tarafı açık olan dikdörtgenler prizması şeklindeki  $4m^3$  hacminde bir çöp bidonu yapmak için en az kaç  $m^2$  saca ihtiyaç vardır?
8. Çevresinin uzunluğu  $2p$  olan bir üçgenin alanı en fazla ne olabilir?
9.  $288m^3$  hacminde dikdörtgenler prizması biçiminde depo yapılacaktır. Tavan ve tabanının bir metrekaresinin mal oluş fiyatı 40 milyon, yan duvarlarının bir metrekaresinin mal oluş fiyatı 30 milyondur. Bu deponun mümkün olduğu kadar ucuza yapılabilmesi için boyutları ne olmalıdır? Bu depo en az kaç milyona mal olur?
10. İki nehirde birinin yatağı  $y = x^2$  parabolü, ikincisinininki  $x - y - 2 = 0$  doğrusu üzerindedir. Bu iki nehir arasında açılacak doğrusal bir kanalın uzunluğu en az kaç birim olur.

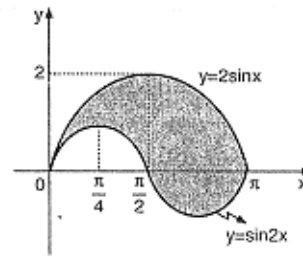
## İki Katlı İntegraller

### Alıştırırmalar

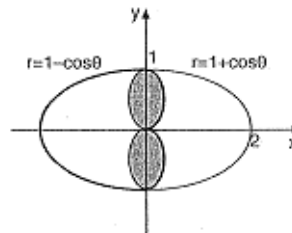
1.  $\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} dx dy$  integralini hesaplayınız.
2.  $\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin(xy) dy dx$  integralini hesaplayınız.
3.  $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy dx$  integralini hesaplayınız.
4.  $\int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3} dy dx$  integralini hesaplayınız.
5.  $x = y^3, x = y^2$  egrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.



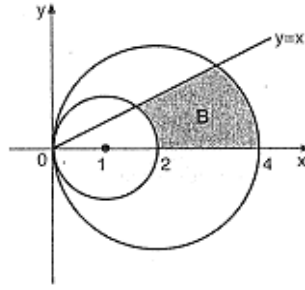
6.  $y = 2 \sin x, y = \sin 2x$  egrileri ile  $x = 0, x = \pi$  doğruları arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.



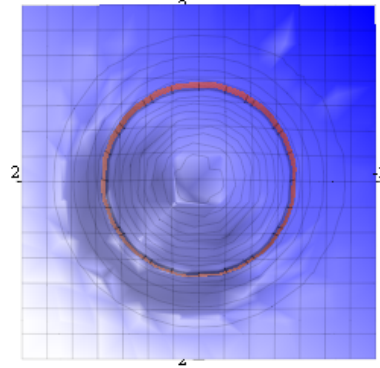
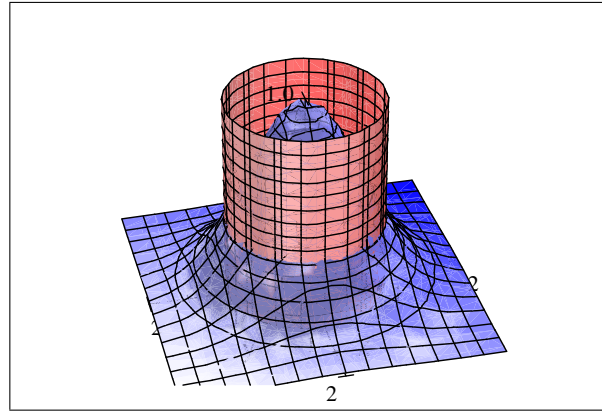
7.  $r = 1 + \cos \theta, r = 1 - \cos \theta$  kardioidlerinin içinde kalan ortak bölgenin alanını bulunuz.



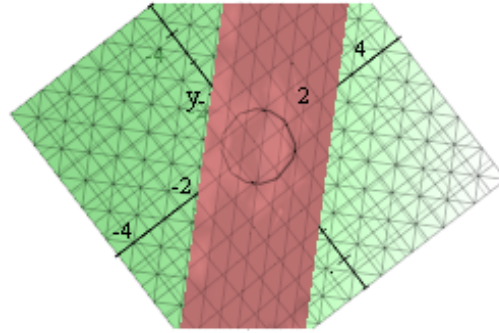
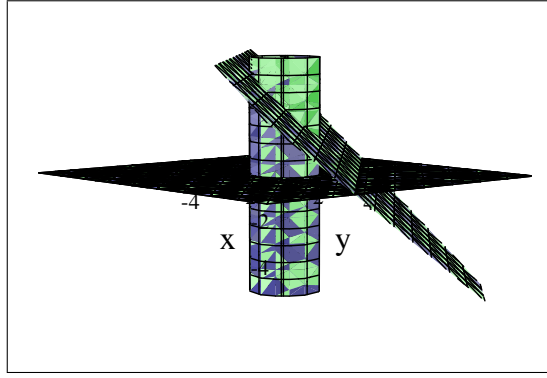
8.  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 4x$  cemberleri ile  $y = 0$ ,  $y = x$  dogrulari arasinda kalan bolgenin alanini bulunuz.



9.  $xOy$  duzlemi  $z = e^{-(x^2+y^2)}$  yuzeyi ve  $x^2 + y^2 = 1$  silindiri tarafından sinirlanan bolgenin hacmini bulunuz.

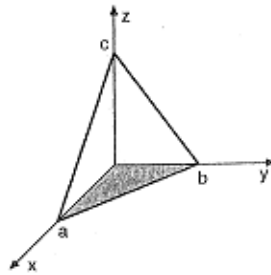


10.  $x + y + z = 3, x^2 + y^2 = 1, z = 0$  yuzeyleri tarafından sinirlanan bolgenin hacmini bulunuz.



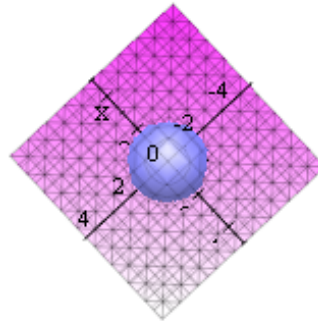
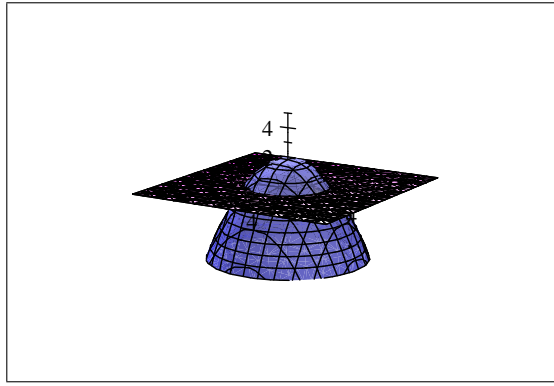
B Bolgesi

11.  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  duzlemi ile koordinat duzlemleri tarafından sinirlanan doryuzlunun hacmini bulunuz.



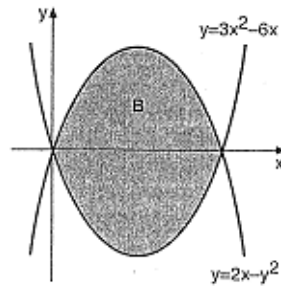


12.  $2z = 4 - x^2 - y^2$  paraboloidi ile  $z = 0$  düzlemi tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

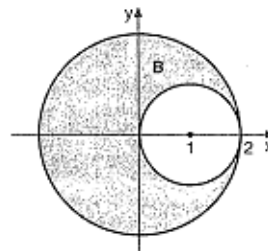


B Bölgesi

13.  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 3x^2 - 6x$  parabolleri tarafından sınırlanan homojen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.



14.  $x^2 + y^2 = 4$  ve  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  çemberleri tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homojen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.



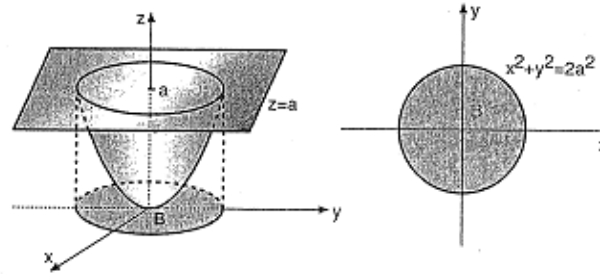
# Üç Katlı İntegraller

## Alıştırmalar

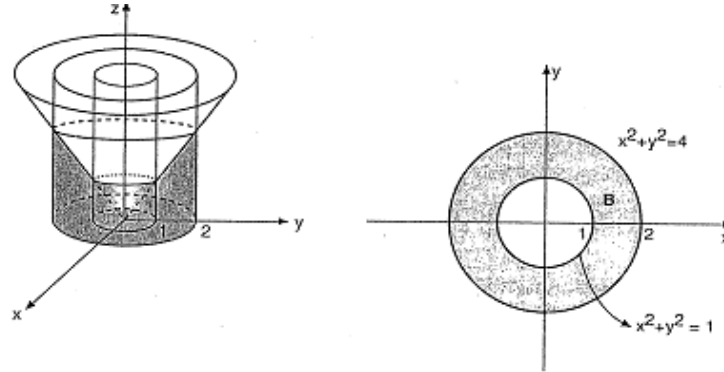
1.  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} dz dy dx$  integralinin sıralarını aşağıda verilen diferansiyel sırasına göre tekrar yazınız.

- a)  $dydzdx$    b)  $dydxdz$   
c)  $dzdxdy$    c)  $dxdzdy$

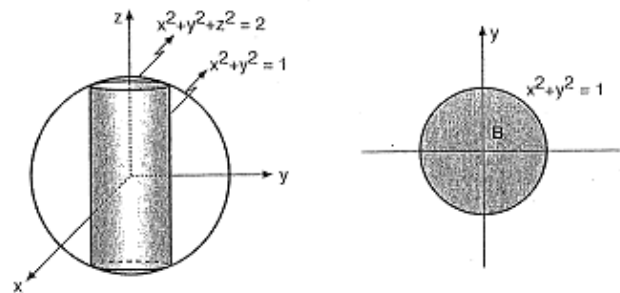
2.  $x^2 + y^2 = 2az$  paraboloidi ile  $z = a$  düzlemi arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.



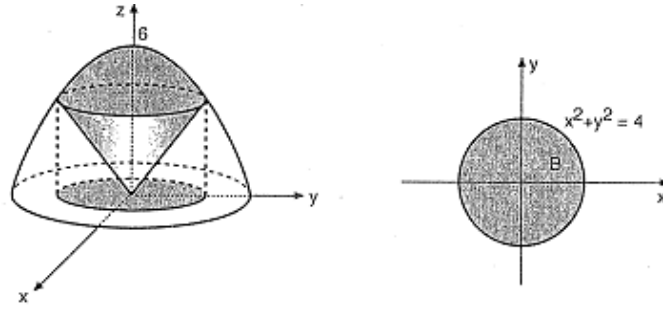
3.  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 = 1$  silindirleri ile  $z^2 = x^2 + y^2$  konisi arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.



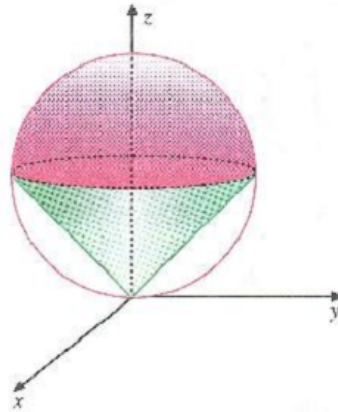
4.  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  kuresi ve  $x^2 + y^2 = 1$  silindirin içinde kalan bölgenin hacmini bulunuz.



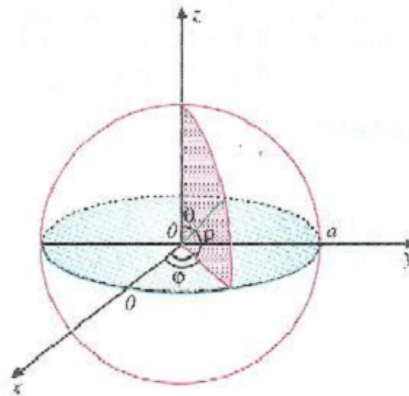
5.  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  konisi ile  $z = 6 - x^2 - y^2$  paraboloidi tarafından sinirlanan cismin hacmini bulunuz.



6. Yukaridan  $\rho = 6 \cos \theta$  kuresi alttan  $\theta = \frac{\pi}{3}$  konisi tarafından sinirlanan cismin hacmini bulunuz.



7.  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  kuresinin hacmini veren uc katli integrali (a) kartezyen koordinatlarda, (b) kuresel koordinatlarda, (c) silindirik koordinatlarda yaziniz.



8.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  elipsoidi tarafından sinirlanan bolge uzerinde  $\int \int \int \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$  integralini hesaplayiniz.
9.  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x (x^2 + y^2) dz dy dx$  integralini silindirik koordinatlara gecerek hesaplayiniz.
10.  $\int_0^3 \int_0^4 \int_{y/2}^{y/2+1} \left( \frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3} \right) dz dy dx$  integralini  $u = \frac{2x-y}{2}, v = \frac{y}{2}, w = \frac{z}{3}$  donusumu yardimi ile hesaplayiniz.

11.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  elipsoidinin hacmini

$$x = a\rho \sin \theta \cos \varphi$$

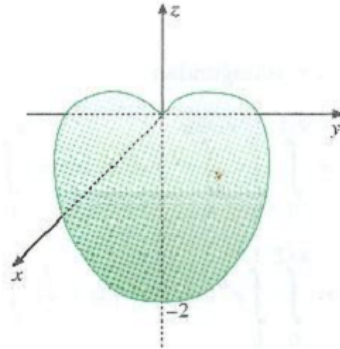
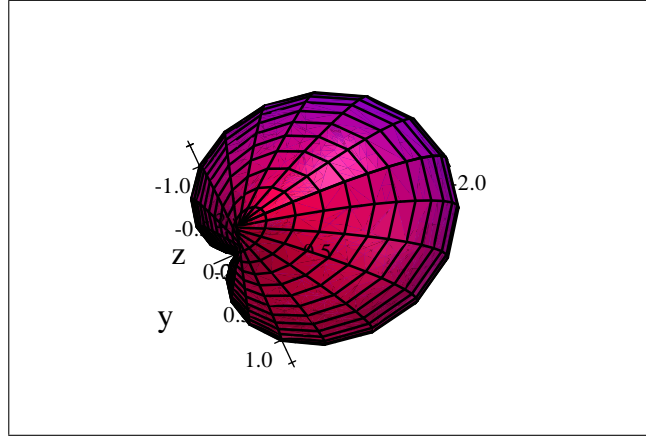
$$y = b\rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = c\rho \cos \theta$$

donusumu yardimi ile hesaplayiniz.

12.  $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\varphi$  integralini kartezyen koordinatlarda ve kuresel koordinatlarda tekrar yaziniz.

13.  $\rho = 1 - \cos \theta$  yuzeyi tarafından sinirlanan bolgenin hacmini hesaplayiniz.



14.  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  konisi ile  $z = 2$  tarafından sinirlanan cismin yogunlugu her noktada o noktanin  $x0y$  duzlemine olan uzakligi kadardir. Bu cismin kutlesini bulunuz.

