Sinyal: Fiziksel bir büyüklüğü veya değişkeni temsil eden bir fonksiyon olup, bir olgunun doğasına veya davranışına ilişkin bilgiler içerir.

Örneğin bir RC devresinde sinyal, kondansatör uçlarındaki gerilimi veya dirençten akan akımı gösteriyor olabilir.

- Elektriksel sinyaller (Bir devredeki akımlar ve gerilimler)
- Akustik sinyaller (Ses veya konuşma sinyalleri (analog veya dijital))
- Video sinyalleri (Bir görüntüdeki yoğunluk varyasyonları. CAT taraması gibi)
- Biyolojik sinyaller (Bir gen içerisindeki baz dizisi)

Sürekli olabilirler - Bağımsız değişken olan zamana göre sürekli bir değişim söz konusu ise

- Bir uzay mekiğinin yörüngesi
- Beynin bir kesitinin kütle yoğunluğu

Continuous Time - CT

Ayrık olabilirler - Sadece zamanın belli aralıklarında tanımlanırlar.

- DNA baz dizisi
- Dijital görüntü pixelleri

Discrete Time - DT

1-D, 2-D, ..., N-D olabilirler (Bir Boyutlu, İki Boyutlu ... N Boyutlu)

Bağımsız değişken "zaman" olarak adlandırılacak.

Sistem: Girişte uygulanan bir işareti çıkışta başka bir işarete dönüştüren bir süreçtir.

Sinyallerin sınıflandırılması;

- Sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı sinyaller
- Analog ve dijital sinyaller
- Gerçel ve karmaşık sinyaller
- Gerekirci ve rassal sinyaller
- Tek ve çift sinyaller
- Periyodik ve periyodik olmayan sinyaller
- Enerji ve güç sinyalleri

Sürekli zamanlı: rüzgarın esmesi, ortamın sıcaklık değişimi, bir cismin hareketi, bir canlının yaşam evreleri vs.

Kalemi kaldırmadan çizilen bir çizgi

Gerekirci sinyaller t'nin bilinen bir fonksiyonu ile modellenebilir

Analog Sinyal: Belirli aralıktaki sürekli zamanlı sinyaldir

Dijital Sinyal: Belirli aralıktaki ayrık zamanlı sinyaldir.

Gerekirci Sinyal: Bir sinyalin herhangi bir andaki değeri biliniyorsa gerekirci sinyaldir.

Rassal Sinyal: Herhangi bir anda alacağı değerler rassal olur, bu işaretler istatistiksel olarak karakterize edilir.

Gerçel ve Karmaşık Sinyaller: Bir $x(t)$ sinyalinin t değerleri gerçelse sinyal gerçeldir.

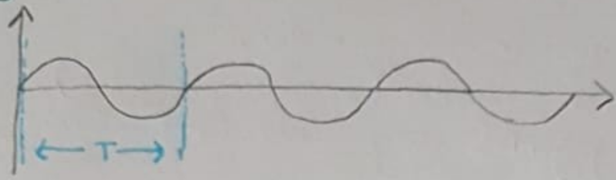
$x(t) = x_1(t) + jx_2(t)$ $\quad j=\sqrt{-1}$ $\quad (z=a+bi)$ Burada $x(t)$ karmaşık bir sinyaldir.

$x_1(t)$ ve $x_2(t)$ gerçel sinyallerdir. (t sürekli veya kesikli bir değişkeni gösteriyor olabilir)

Periyodik Sinyal (Sinusoidal Sinyal): Belirli bir zaman aralığında kendini tekrar eden sinyaldir.

Frekans (F): Bir saniyede yürütülen işlem sayısıdır. Birimi Hertz (Hz)'dir.

Periyot (T): Bir saniyede kendini tekrar etmedir. Birimi Saniye (s)'dir.

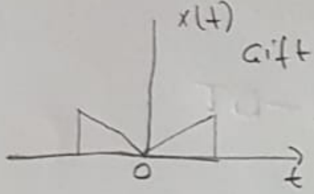


$$T = \frac{1}{f}$$

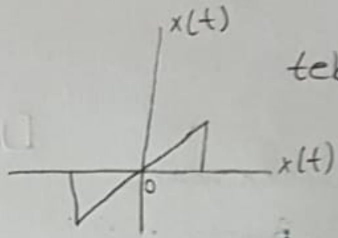
Tek ve Çift Sinyaller (Even and Odd Signals)

$x(-t) = x(t) \quad x[-n] = x[n] \rightarrow$ çift sinyaller

$x(-t) = -x(t) \quad x[-n] = -x[n] \rightarrow$ tek sinyaller

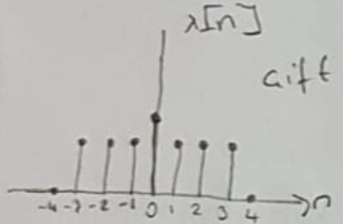


çift (even)

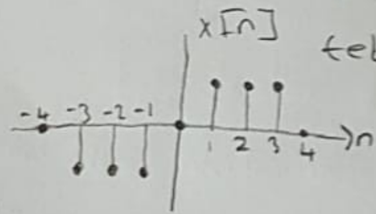


tek (odd)

Eğer bir sinyal y eksenine göre simetrik ise çifttir.



çift (even)



tek (odd)

çift x çift = çift

tek x tek = çift

$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$

$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$

Herhangi bir $x(t)$ veya $x(n)$ sinyali iki sinyalin toplamı olarak ifade edilebilir.

$EV\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$

$OD\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$

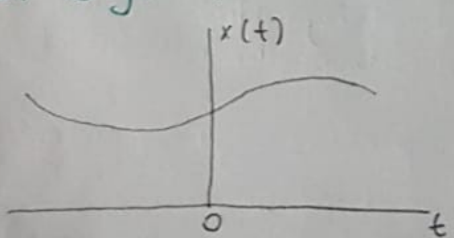
$x(t) = EV\{x(t)\} + OD\{x(t)\}$

$EV\{x[n]\} = \frac{1}{2}[x[n] + x[-n]]$

$OD\{x[n]\} = \frac{1}{2}[x[n] - x[-n]]$

$x[n] = EV\{x[n]\} + OD\{x[n]\}$

Sürekli Sinyaller (Continuous Time Signals)



$x(t)$

Fiziksel dünyadaki çoğu sinyal, sürekli zamanlı sinyallerdir.

Örneğin voltaj, akım, basınç, sıcaklık, hız vs...

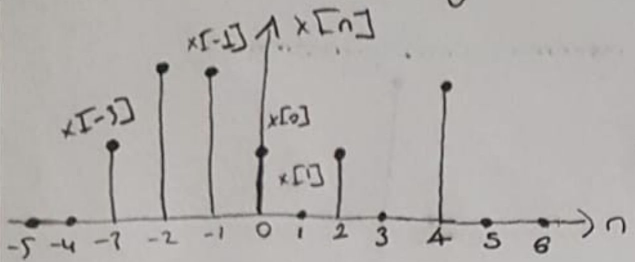
voltage, current, pressure, temperature, velocity

Ayrık Zamanlı Sinyaller (Discrete Time Signals)

x[n].. n - tam sayı

- DNA baz dizisi
- Belirli türlerin n. kuşağının nüfusu

Sürekli zamanlı sinyallerin örneklenmesiyle elde edilirler.



$X_n = x[n] = x(t_n)$ ⇒ örnek. Her bir örnek arasındaki zaman örnekleme aralığıdır.

Örnekleme aralıklarının eşit olması (düzgün örnekleme) durumunda, T_S örnekleme aralığı olmak üzere;

$x_n = x[n] = x(nT_s)$ yazılabilir.

★ Bir x[n] ayrık zamanlı sinyali iki biçimde yazılabilir

1) Bir dizinin n. değerini hesaplamak için bir kural belirlenebilir. Örneğin

$$x[n] = X_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n >= 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad \text{veya} \quad \{x_n\} = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \ldots, (\tfrac{1}{2})^n\}$$

2) Dizinin değerleri açıkça sıralanabilir. Yukarıdaki grafikte görülen dizi şu biçimde yazılabilir

$$\{x_n\} = \{\ldots, 0, 0, 1, 2, 2, \underset{\uparrow}{1}, 0, 1, 0, 2, 0, 0, \ldots\} \text{ veya } \{x_n\} = \{1, 2, 2, \underset{\uparrow}{1}, 0, 1, 0, 2\}$$

↑ Sembolü, n=0 terimini belirtmek için kullanılır. Bu sembolün bulunmaması, ilk terimin n=0'a karşı düştüğünü ve n<0 için bütün terimlerin 0 olduğunu gösterir.

★ İki sinyal dizisinin toplamı ve çarpımı şu şekilde tanımlanır;

$\{c_n\} = \{a_n\} + \{b_n\} \rightarrow c_n = a_n + b_n$

$\{c_n\} = \{a_n\} \cdot \{b_n\} \rightarrow c_n = a_n \cdot b_n$

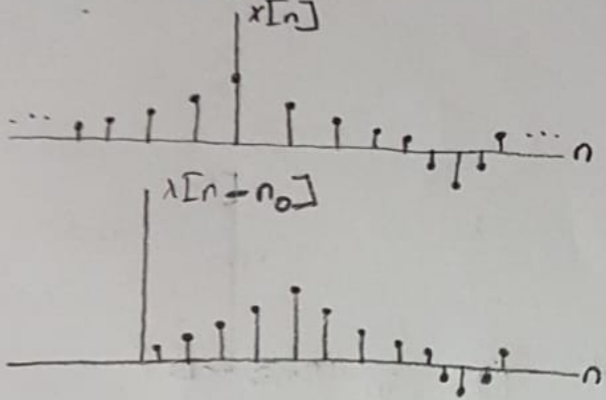
$\{c_n\} = \alpha \cdot \{a_n\} \rightarrow c_n = \alpha \cdot a_n \quad \alpha = \text{sabit sayı}$

Bağımsız Değişkenin Dönüşümü

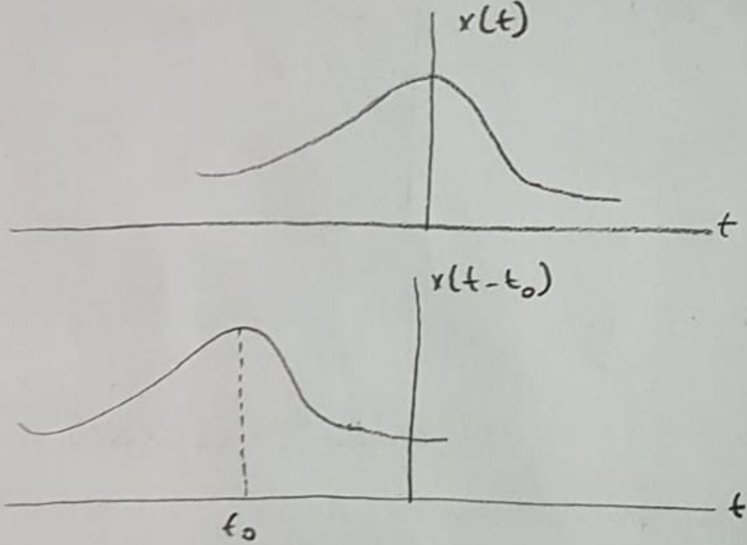
Bazen bağımsız değişken eksenini teorik analiz için veya sadece pratik amaçlar için değiştirmek gerekir. (Sürekli ve ayrık zamanlı sinyallerin her ikisi için de uygulanabilir.)

- Zamanda kaydırma $x[n] \to x[n-n_0]$
- Zamanda ters çevirme $x(t) \to x(-t)$ manyetik tape'in ters oynatılması
- Zamanda ölçekleme $x(t) \to x(t/2)$ hızlı oynatma, yavaş oynatma

Zamanda Kaydırma

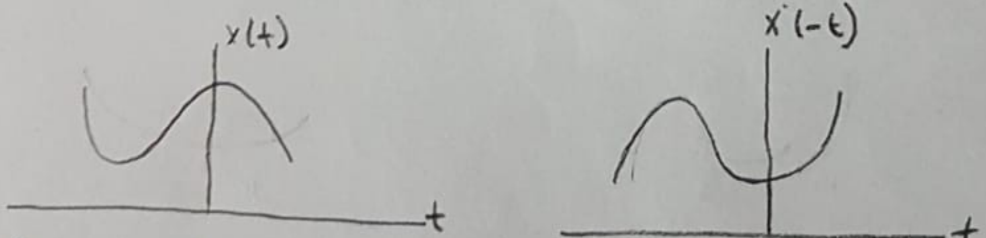


$n_0 > 0$ ise $x[n-n_0]$, $x[n]$'in geciktirilmiş versiyonudur.

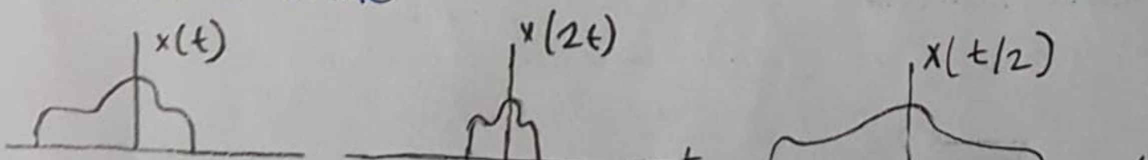


$t_0 < 0$ ise $x(t-t_0)$, $x(t)$'nin ötelenmiş versiyonudur.

Zamana Göre Ters Çevirme



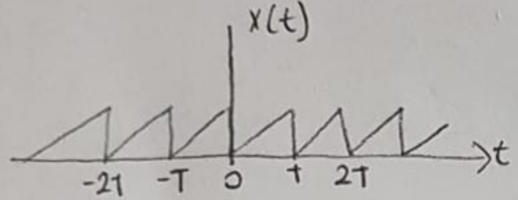
Zamanda Ölçekleme



Periyodik ve Periyodik Olmayan Sinyaller

Bir sürekli zamanlı $x(t)$ sinyali, T sıfırdan farklı pozitif bir sayı olmak üzere

$\boxed{x(t+T)=x(t)}$ bütün t değerleri için sağlanıyorsa bu sinyal periyodiktir ve periyodu T'dir.



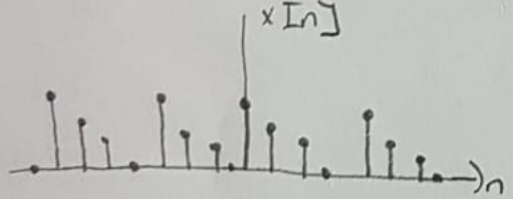
Bütün t değerleri ve tam sayı m değerleri için;

$\boxed{x(t+mT)=x(t)}$

$x(t)$'nin temel periyodu (T_0). yukarıdaki $x(t+T)=x(t)$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif T değeridir.

Bu tanım sabit bir sinyal için geçerli değildir. Sabit bir $x(t)$ sinyali herhangi bir T için periyodik olduğundan (dolayısıyla en küçük pozitif değer bulunmadığından) bu sinyaller için temel periyottan söz edilemez.

Periyodik olmayan bir sürekli zamanlı sinyal aperiyodiktir.



Periyodik bir sinyal örneği

Periyodik ayrık zamanlı sinyaller de benzer şekilde tanımlanırlar. Bir $x[n]$ dizisi

$\boxed{x[n+N]=x[n]}$ bütün n değerleri için bu koşulu sağlayan pozitif bir N tam sayısının varlığı durumunda periyodiktir ve periyodu N'dir. Yukarıdaki $x[n+N]=x[n]$ eşitliği ve grafikten bütün N değerleri ve m tam sayısı için;

$\boxed{x[n+mN]=x[n]}$ elde edilir. $x[n]$'in temel periyodu olan N_0, $x[n+N]=x[n]$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif N tam sayısıdır. Periyodik olmayan herhangi bir dizi aperiyodik olarak adlandırılır.

NOT: Sürekli zamanlı periyodik bir sinyalin düzgün örneklenmesiyle elde edilen bir dizi periyodik olmayabilir. Ayrıca sürekli zamanlı iki periyodik sinyalin toplamı da periyodik olmayabilir. Ancak iki periyodik dizinin toplamı her zaman periyodiktir.

Enerji ve Güç Sinyalleri

v(t), bir R direncinden i(t) akımını akıtan gerilim olsun. Ohm başına ani güç;

$$\boxed{p(t) = \frac{v(t)\, i(t)}{R} = i^2(t)}$$ biçiminde tanımlanır.

Ohm başına düşen toplam enerji (E) ve ortalama güç (P) tanımları ise şu biçimdedir;

$$\boxed{E = \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t)\, dt}$$ Joule

$$\boxed{P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i^2(t)\, dt}$$ Watt

Herhangi bir sürekli zamanlı x(t) sinyalinin normalize enerji içeriği (E) aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\boxed{E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt}$$

x(t) sinyalinin normalize ortalama gücü (P) ise şu şekilde tanımlanır:

$$\boxed{P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\, dt}$$

Benzer olarak ayrık zamanlı bir x[n] sinyalinin normalize enerji içeriği ve normalize ortalama gücü de tanımlanabilir.

$$\boxed{E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2}$$

$$\boxed{P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2}$$

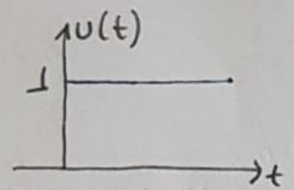
1) Yalnızca $0<E<\infty$ koşulu sağlandığında $x(t)$ (veya $x[n]$) bir enerji sinyalidir (veya dizisidir) ve dolayısıyla $P=0$ olur.

2) Yalnızca $0<P<\infty$ koşulu sağlandığında $x(t)$ (veya $x[n]$) bir güç sinyalidir (veya dizisidir). Dolayısıyla $E=\infty$ olur.

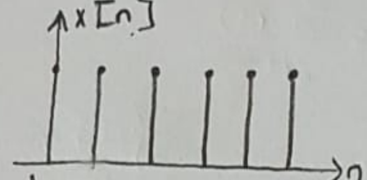
Bu koşulların birini sağlamayan sinyaller enerji sinyali veya güç sinyali olarak adlandırılamazlar.

NOT: Periyodik bir sinyalin bir periyot içerisindeki enerjisi sonlu ise bu sinyal bir güç sinyalidir ve bu sinyalin ortalama gücünün yalnızca bir periyot üzerinden hesaplanması yeterlidir.

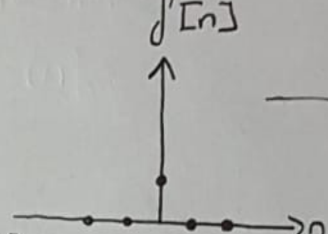
Temel Sinyaller



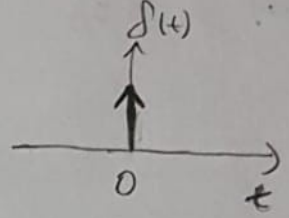
Sürekli zamanlı birim basamak sinyali



Ayrık zamanlı birim basamak sinyali



Birim dürtü sinyali (Yalnızca 0'da 1 olur) Ayrık zamanlı



Sürekli zamanlı Birim dürtü sinyali

Birim basamak fonksiyonu

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$t=0$'da süreksizdir. Bu noktadaki değeri tanımsızdır.

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau$$ → ($u(t)$'nin türevi $\delta(t)$ old. için)

Birim dürtü fonksiyonu

Sonsuz küçük bir zaman aralığı üzerinde birim alana sahip olacak biçimde seçilen bir fonksiyonun limiti olarak tanımlanır ve şu özelliklere sahiptir

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases} \qquad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)\,dt=1$$

Ancak tek bir nokta dışında her yerde değeri 0 olan herhangi bir fonksiyonun integrali (Reimann integrali) 0 olmalıdır. Dolayısıyla $\delta(t)$ herhangi bir fonksiyon olamaz. Matematiksel olarak $\delta(t)$ şu biçimde tanımlanır:

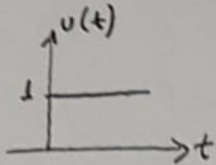
$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\,\delta(t)\,dt=\phi(0)$$ Bu eşitlikte $\phi(t)$, $t=0$'da sürekli olan herhangi bir fonksiyondur.

$\delta(t)$ için kullanılan bir başka tanım da şu biçimdedir

$$\int_{a}^{b}\phi(t)\,\delta(t)\,dt=\begin{cases}\phi(0) & a<0<b\\ 0 & a<b<0 \text{ veya } 0<a<b\\ \text{tanımsız} & a=b \quad b=0\end{cases}$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

ÖR:



a) $2 * u(t) = ?$

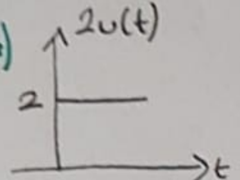
b) $u(t-1) = ?$

c) $u(t+2) = ?$

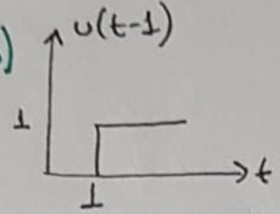
d) $3 * u(t-3) = ?$

Çözüm:

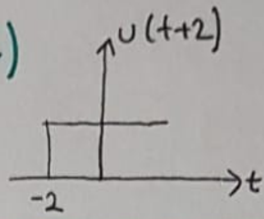
a)



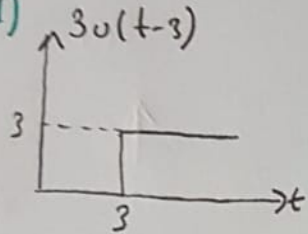
b)



c)



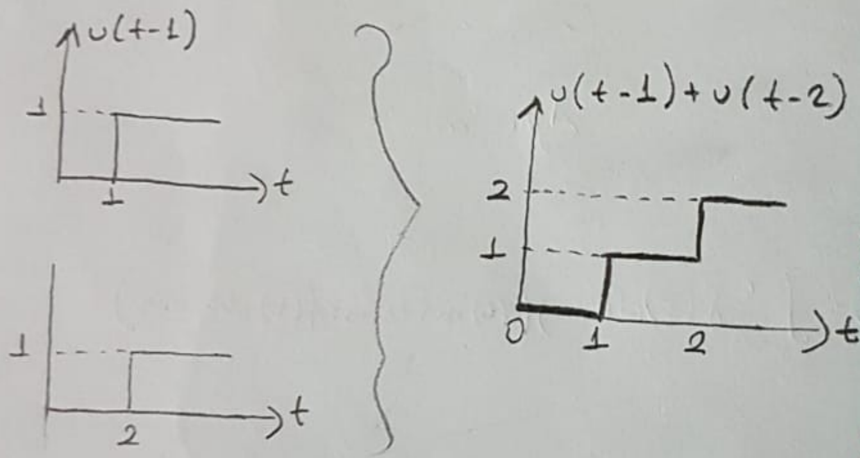
d)



NOT: Birim basamak fonksiyonunun ($u(t)$) türevi birim dürtü fonksiyonudur ($\delta(t)$)

$$\delta(t) = u'(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

ÖR: $u(t-1) + u(t-2)$



$\delta(t)$ özellikleri;

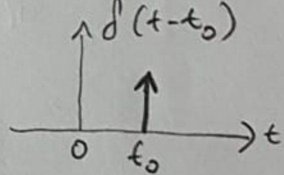
$x(t)$ $t=0$'da sürekli ise

$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

$\delta(-t) = \delta(t)$

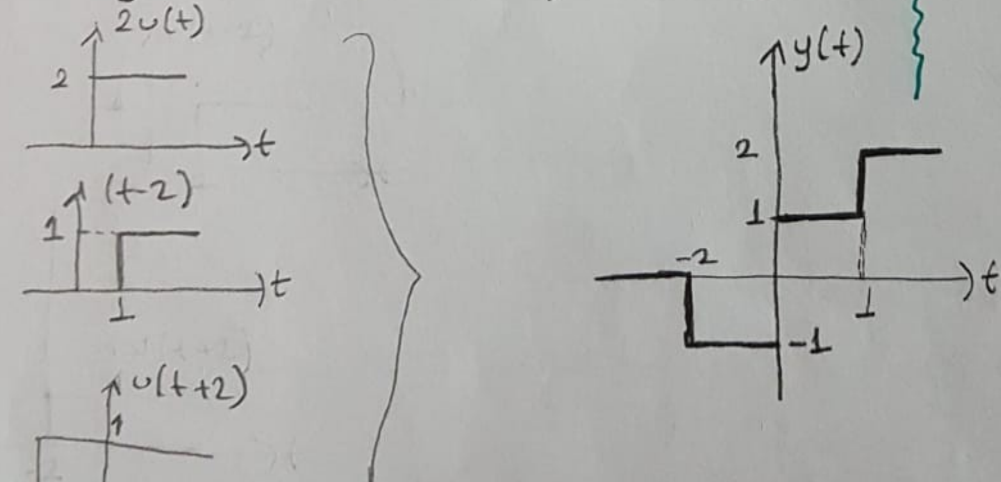
$x(t).\delta(t) = x(0).\delta(t)$

$x(t).\delta(t-t_0) = x(t_0).\delta(t-t_0)$

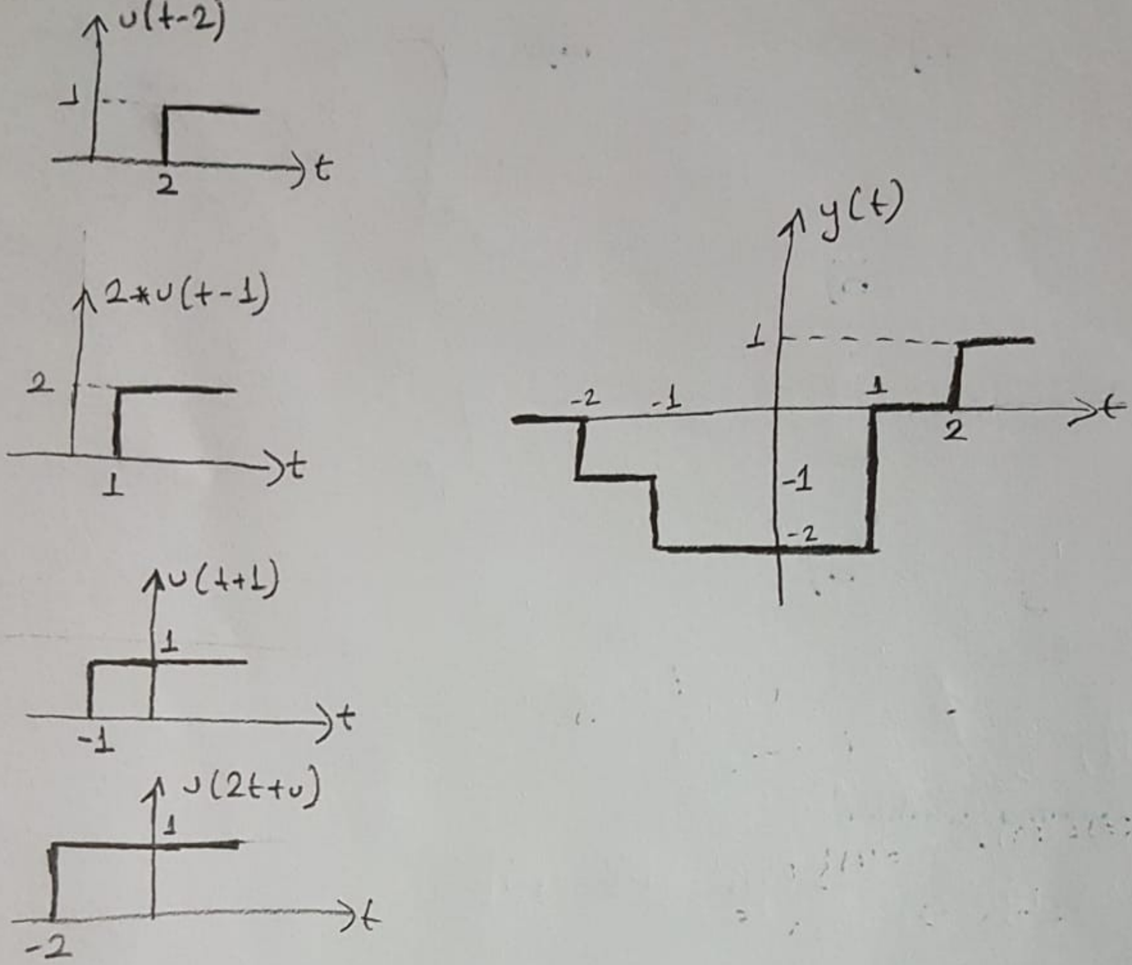


ötelenmiş birim dürtü fonksiyonu

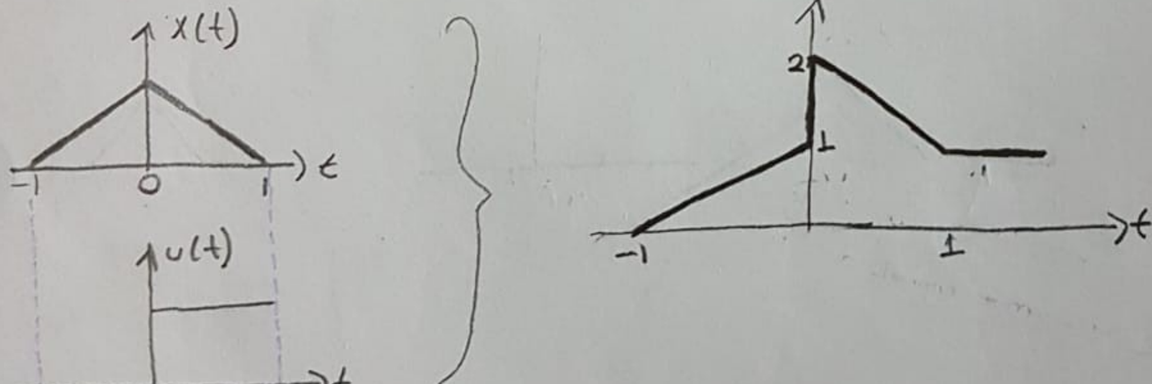
ÖR: $y(t) = 2 * u(t) + u(t-1) - u(t+2)$



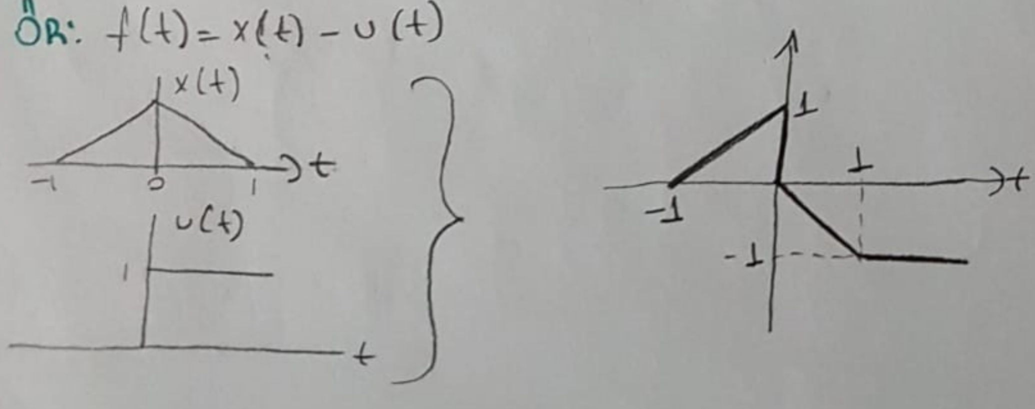
ÖR: $y(t) = u(t-2) + 2 * u(t-1) - u(t+1) - u(2t+4)$



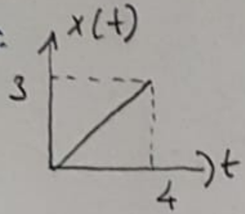
ÖR: $f(t) = x(t) + u(t)$ çizin



ÖR: $f(t) = x(t) - u(t)$



ÖR:

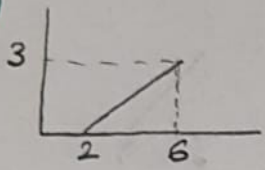


a) $x(t-2)$ b) $x(-t)$

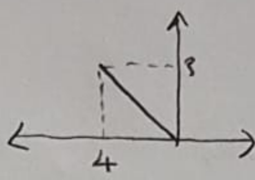
c) $x(2t-2)$ d) $x(t/2)$

Çözüm:

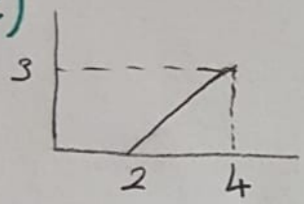
a)



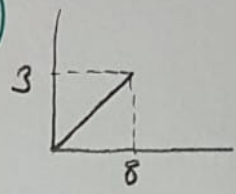
b)



c)



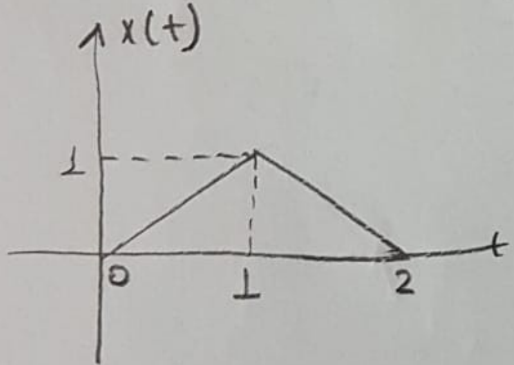
d)

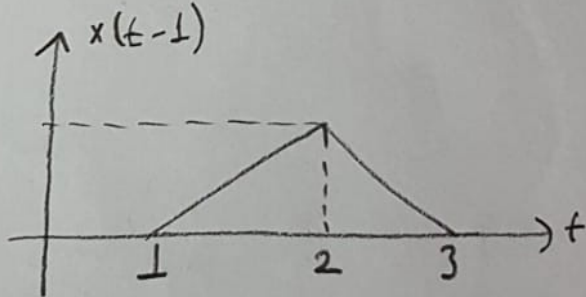


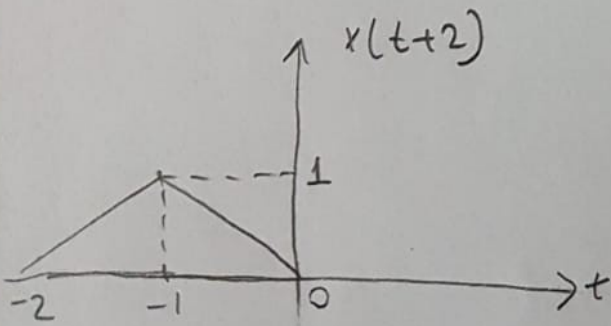
Zamanda Kaydırma İşlemleri

$x(t-t_0) \rightarrow$ sağa kaydırma (zamanda gecikme)

$x(t+t_0) \rightarrow$ sola kaydırma (zamanda öne alma)



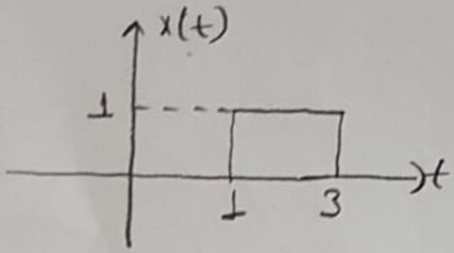




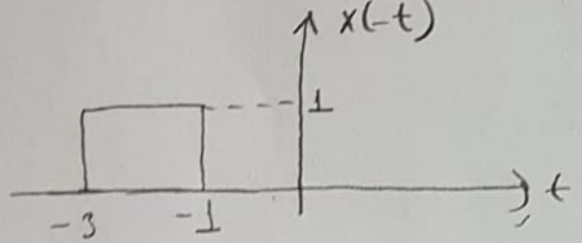
Zamanda Ters Çevirme (Zamanda Yansıtma)

$x(t)$ sinyali için $y(t) = x(-t)$ $x(t)$'nin zamanda yansıtılmış halidir. Zamanda yansıtılmış bir sinyali grafiksel olarak elde etmenin en kolay yolu düşey eksene göre simetriğini almaktır.

ÖR:



$x(-t) = ?$

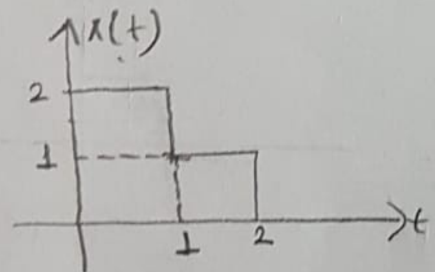


NOT: Hem yansıma hem de kaydırma işlemi söz konusu ise istenen sinyali elde etmek için 2 farklı yol izlenir

1- Önce kaydırma işlemi gerçekleştirilebilir. Kaydırılmış sinyal yansıtılır.

2- Önce yansıtma işlemi yapılabilir. Yansımış işaret kaydırılırken sağa kaydırma söz konusu ise sola, sola kaydırma söz konusu ise sağa kaydırılır.

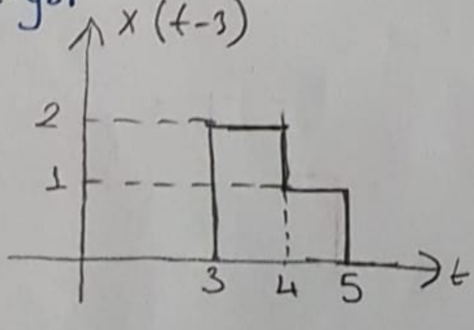
ÖR:

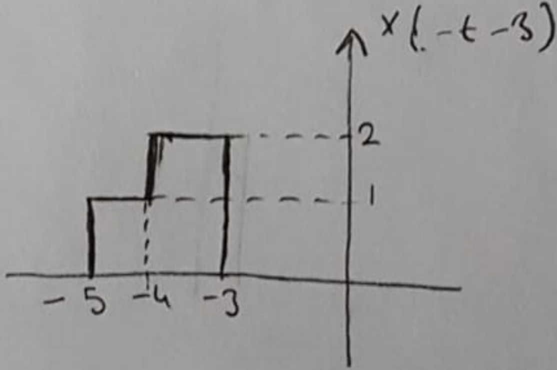


a) $x(-t-3)$

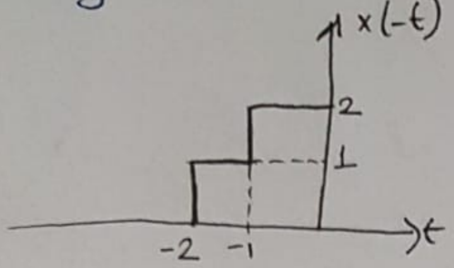
b) $x(-t+2)$

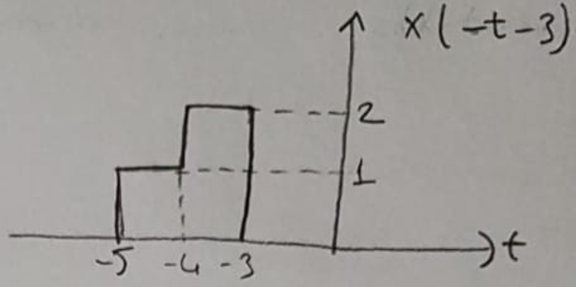
a) I. yol



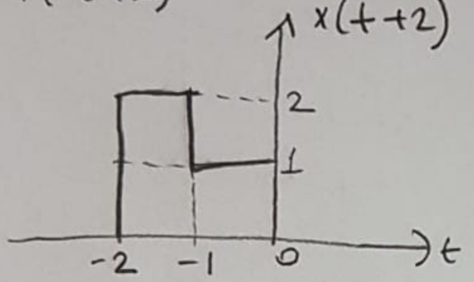


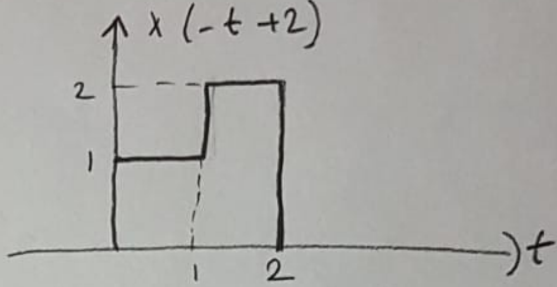
II. yol





b) $x(-t+2)$



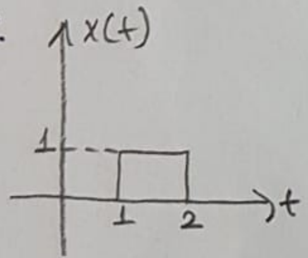


Zamanda Ölçekleme (Zaman Sabitinin Değiştirilmesi)

$x(t)$ sinyali için $a>1$ olmak üzere $x(at)$ zamanda sıkıştırma, $x\left(\frac{t}{a}\right)$ ise zamanda genişletme anlamına gelir.

NOT: Yansıtma, kaydırma ve ölçekleme işlemleri bir arada yapılıyorsa istenen sinyale ulaşmanın en kısa yolu ölçekleme işlemini en son yapmaktır.

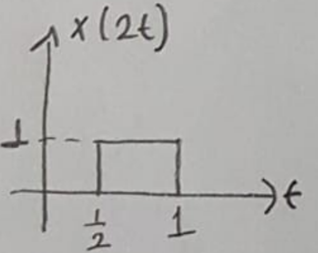
ÖR:

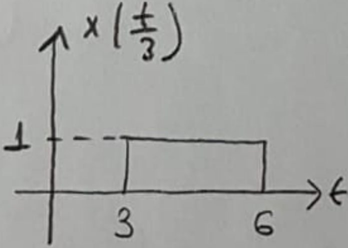


ise $x(2t)$ ve $x\left(\frac{t}{3}\right)$ sinyallerini elde ediniz.

$x(2t) \rightarrow$ 2 kat sıkıştırma

$x\left(\frac{t}{3}\right) \rightarrow$ 3 kat genişletme

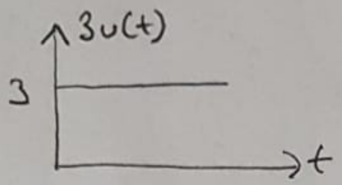




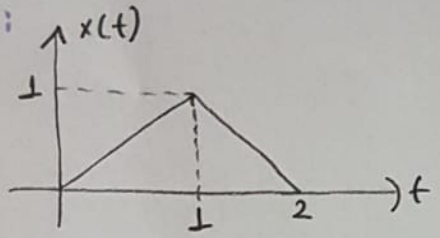
Genlik Ölçekleme

$x(t)$ sinyali için $y(t) = a \cdot x(t)$ $x(t)$ sinyalinin a ile genlik olarak ölçeklenmiş halidir.

ÖR: $x(t) = 3 \cdot u(t)$ ($u(t) \to$ birim basamak sinyali)



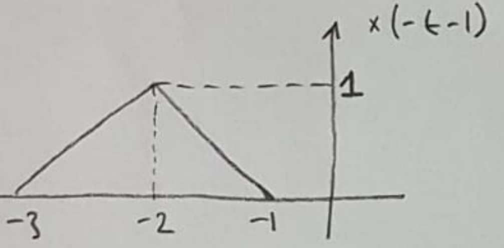
ÖR:

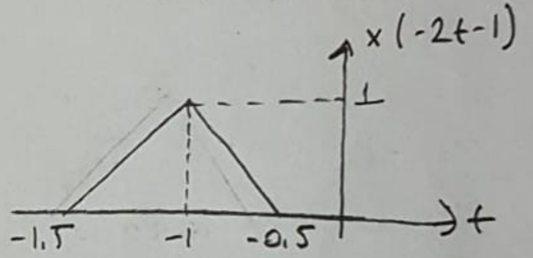


a) $x(-2t-1)$

b) $x\left(-\frac{t}{2}+3\right)$

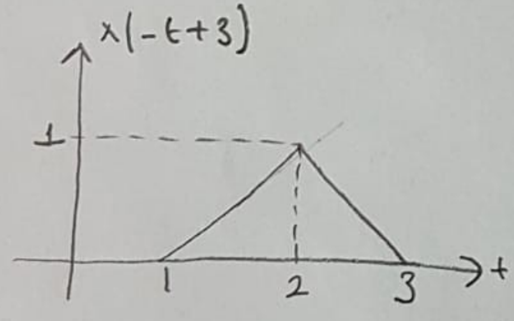
a)

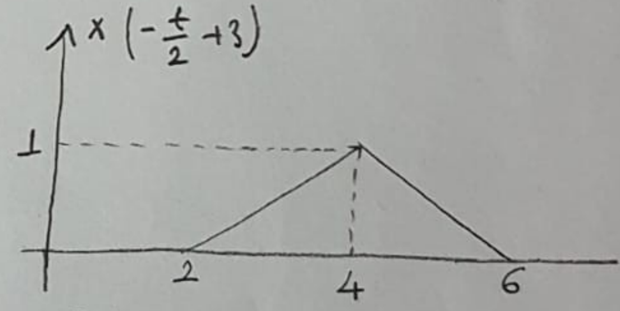




$-2t-1=1 \quad \underline{t=-1}$

b)



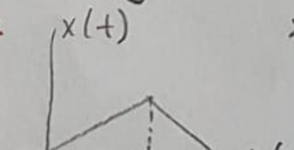


Sağlaması: $-\frac{t}{2}+3=1 \quad \frac{t}{2}=2 \quad \underline{t=4}$

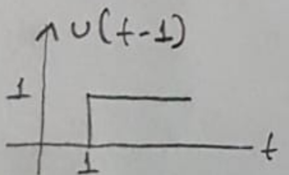
Sinyallerin Çarpılması

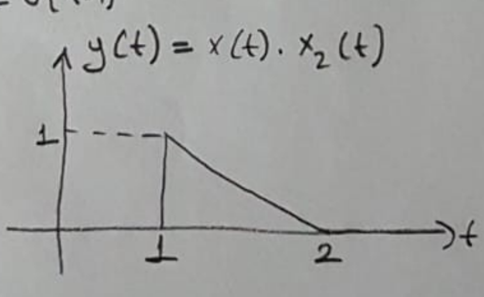
Çarpım sinyali elde edilirken nokta nokta çarpma işlemi uygulanır.

ÖR:



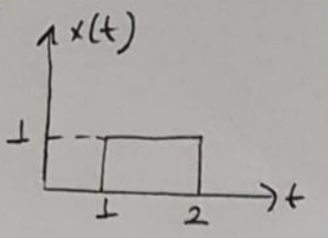
$x_2(t) = u(t-1)$





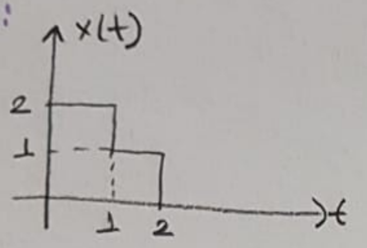
Birim Basamak Sinyali Kullanılarak Bazı Fonksiyonların Matematiksel İfadesinin Elde Edilmesi

ÖR:



$$x(t) = u(t-1) - u(t-2)$$

ÖR:



$$x(t) = 2u(t) - u(t-1) - u(t-2)$$

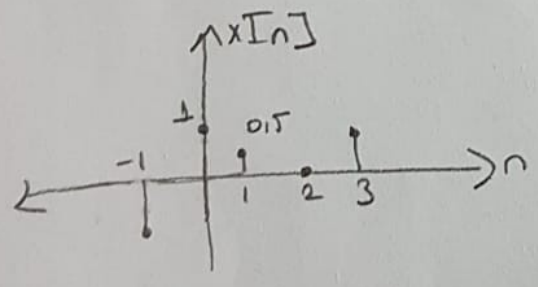
Ayrık Zamanlı Sinyal İşlemleri

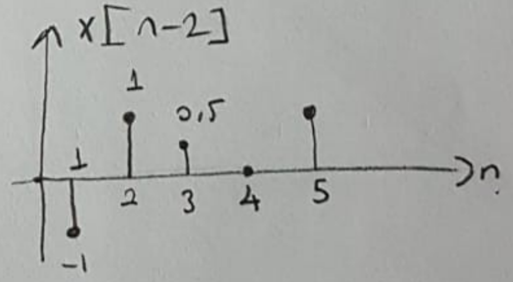
Kaydırma

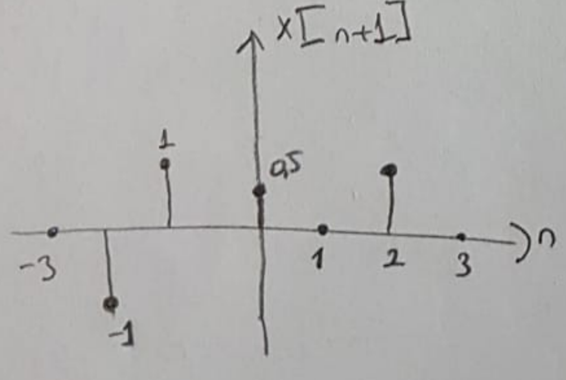
$x[n]$ sinyali için $n_0 \in N$ olmak üzere $x[n-n_0] \rightarrow$ sağa kaydırma

$x[n+n_0] \rightarrow$ sağa kaydırma

ÖR: $x[n] = \{-1, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}, (0.5), 0, 1\}$







$x[n-2] = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{0}, -1, 1, (0.5), 0, 1\}$

$x[n+1] = \{-1, 1, (\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{0.5}), 0, 1\}$

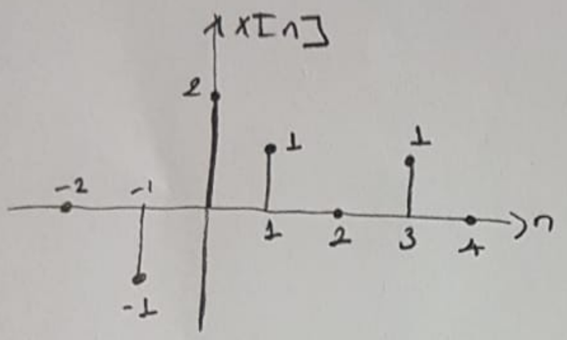
[redacted] Yansıtma

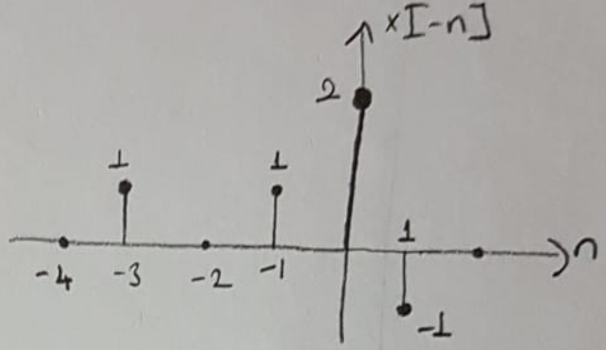
$x[n]$ sinyali için $y[n] = x[n]$ $x[n]$'in yansıtılmış halidir.

★ Yansıtılmış işareti elde edebilmek için düşey eksene göre simetriği alınır.

ÖR: $x[n] = \{-1, \underset{\uparrow}{2}, 1, 0, 1\}$ $\quad x[-n] = ?$

$n=0$





NOT: Kaydırma ve yansıtma işlemleri bir arada yapılıyorsa istenen sinyali bulmak için;

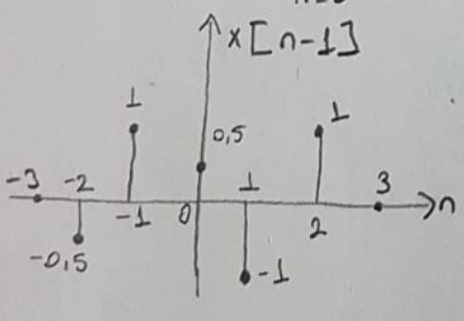
1- Önce kaydırma işlemi gerçekleştirilebilir. Kaydırılmış sinyal yansıtılır.

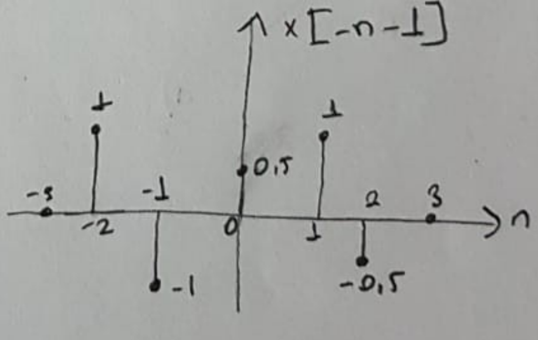
2- Önce yansıtma işlemi yapılabilir. Yansıtılmış işaret kaydırılırken sağa kaydırma söz konusu ise sola, sola kaydırma söz konusu ise sağa kaydırılır.

ÖR: $x[n] = \{(-0{,}5), \underset{\uparrow}{1}, (0{,}5), -1, 1\}$ $\quad$ a) $x[-n+1]$ $\quad$ b) $x[-n-2] = ?$

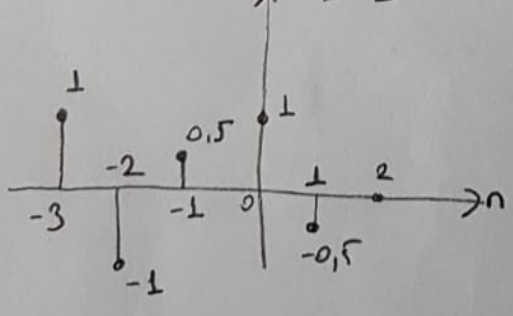
$n=0$

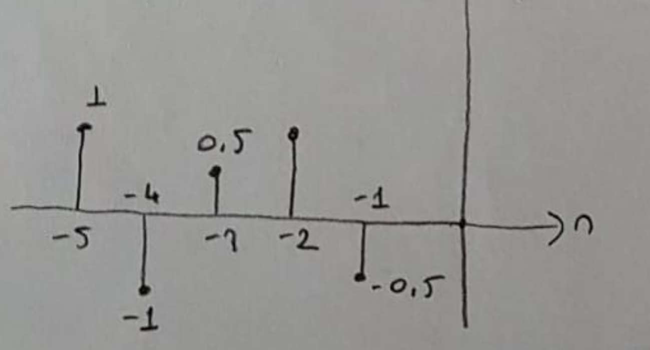
a)





b)



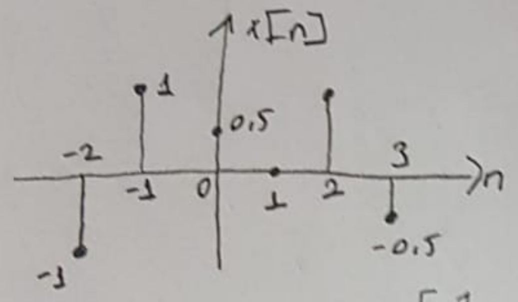


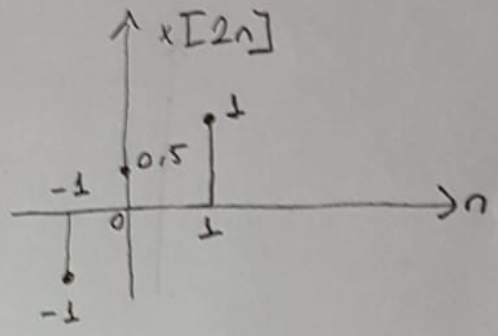
Ölçekleme

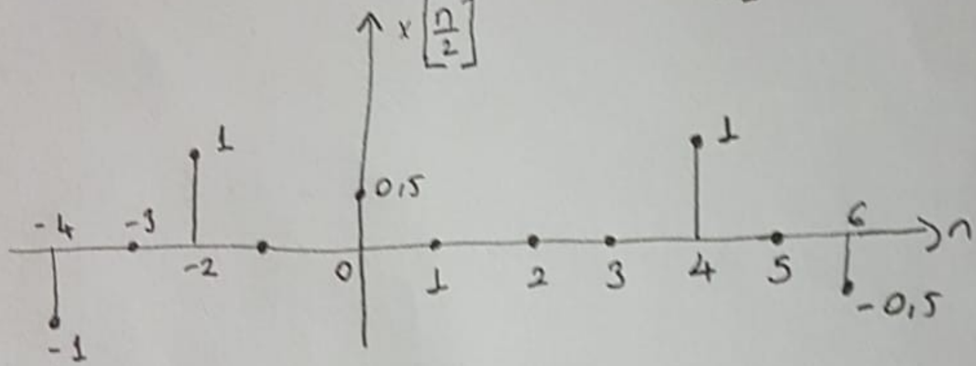
$a \in N$ ve $a>1$ için $x[a.n] \rightarrow$ sıkıştırma (örnek seyreltme)

$x\left[\frac{n}{a}\right] \rightarrow$ genişletme (örnek arttırma)

ÖR: $x[n] = \{-1, 1, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{(0,5)}, 0, 1, (-0,5)\}$ $\quad x[2n]$, $x\left[\frac{n}{2}\right] = ?$



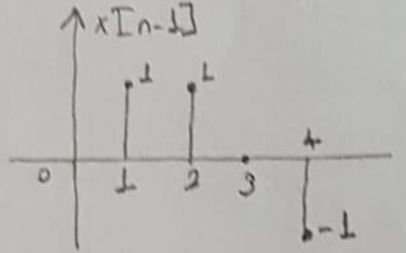


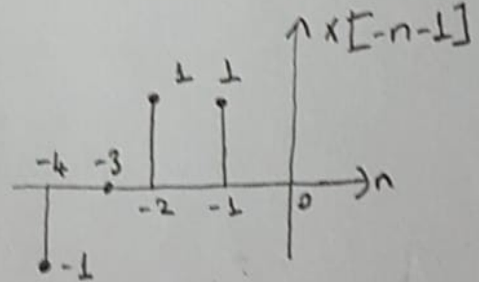


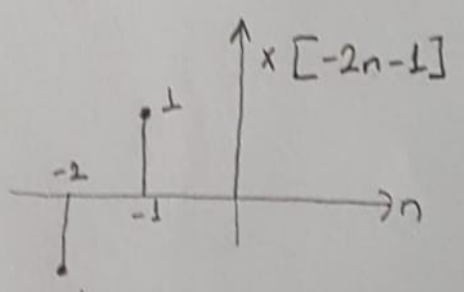
NOT: Yansıtma, kaydırma ve ölçekleme bir arada yapılıyorsa istenen işareti bulmanın en kısa yolu ölçekleme işlemini en son işlem olarak yapmaktır.

ÖR: $x[n] = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}, 1, 0, -1\}$ $\quad$ a) $x[-2n-1]$, b) $\left[-\frac{n}{2}+1\right] = ?$

a)

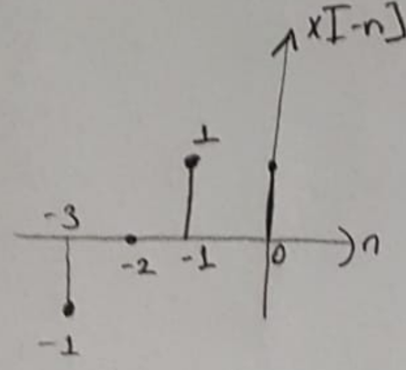


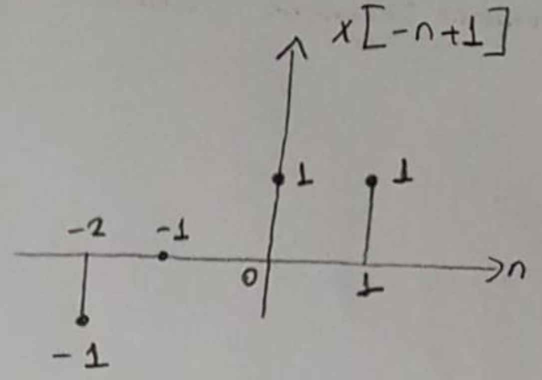


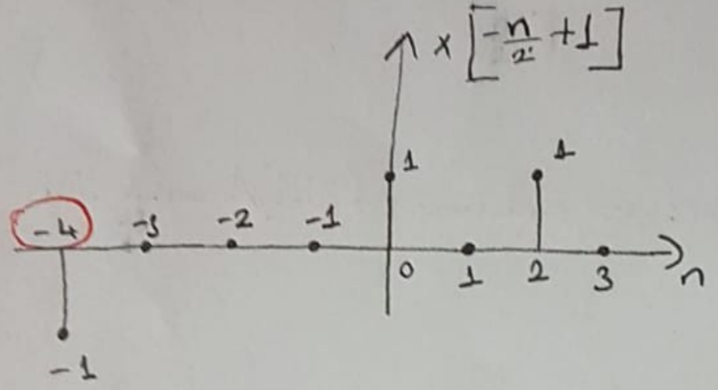


(b'nin çözümü bir sonraki sayfada)

b)







b'ye göre sağlaması

$-\frac{n}{2}+1=3$

$-\frac{n}{2}=2 \qquad n=-4$

Genlik Ölçekleme

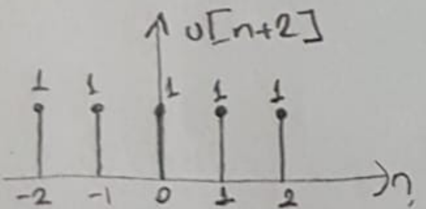
$x[n]$ ayrık zamanlı sinyali için $y[n]=A\cdot x[n]$, $x[n]$ işaretinin genliğinin A ile ölçeklenmesidir.

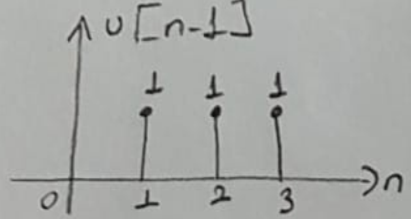
Ayrık Zamanlı Sinyallerin Toplanması

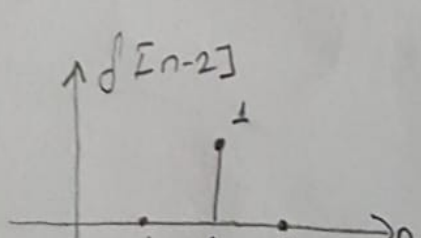
$x_1[n]$ ve $x_2[n]$ ayrık zamanlı sinyalleri için $y[n]=x_1[n]+x_2[n]$ iki ayrık zamanlı sinyalin toplanmasıdır.

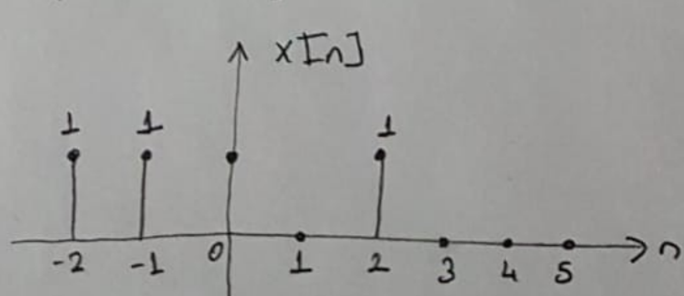
Toplam sinyal elde edilirken örnek-örnek toplama işlemi gerçekleştirilir.

ÖR: $x[n]=u[n+2]-u[n-1]+\delta[n-2]$ $u \rightarrow$ birim bas. sinyali $\delta \rightarrow$ birim dürtü sinyali



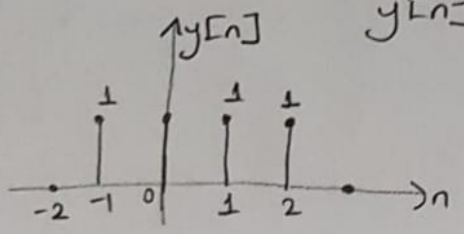


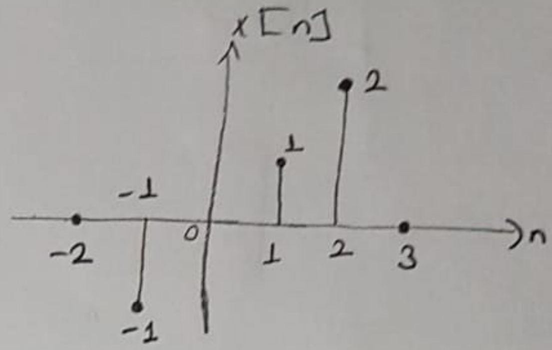




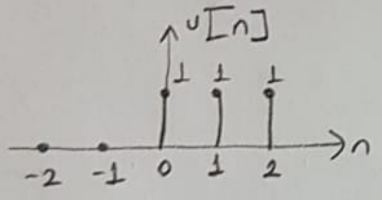
Ayrık Zamanlı Sinyallerin Çarpılması

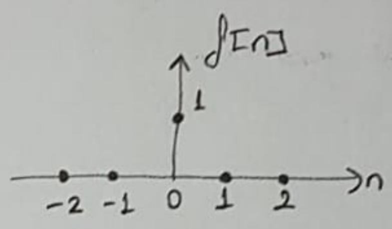
ÖR: $x[n] = n.\underbrace{(u[n+1] - u[n-3])}_{y[n]}$





Birim Basamak Fonksiyonu ($u[n]$) ile Birim Dürtü Fonksiyonu ($\delta[n]$) Arasındaki İlişki





$$\boxed{\delta[n] = u[n] - u[n-1]}$$

$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots$

$$\boxed{u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]}$$

Sistem: Giriste uygulanan bir isareti cıkısta baska bir isarete dönüstüren bir süreçtir.

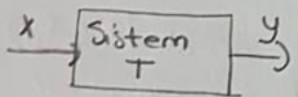
Bir sistem bir giriş (veya uyarım) sinyaline karsı bir cıkıs (veya tepki) sinyali olusturan fiziksel bir sürecin matematiksel bir modelidir.

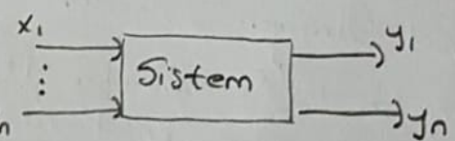
Bir sistemin giris-cıkış iliskisi vardır. Giriş sinyali islenerek cıkış sinyali üretilir.

Sistemlerin sınıflandırılması;

- Sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı sistemler
- Bellekli ve belleksiz sistemler
- Nedensel ve nedensel olmayan sistemler
- Doğrusal ve doğrusal olmayan sistemler
- Zamanla değişen ve zamanla değişmeyen sistemler
- Doğrusal, zamanla değişmeyen sistemler (DZD)
- Kararlı - kararsız sistemler
- Geri beslemeli sistemler

Sistem Gösterimi





$x \rightarrow$ giriş sinyali $\quad y \rightarrow$ cıkıs sinyali

Bu sistem x'ten y'ye bir dönüşüm olarak düşünülebilir.

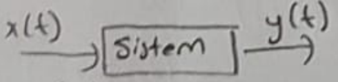
Bu dönüşüm $y = T_x$ matematiksel notasyonu ile gösterilir.

Burada T, x'in y'ye dönüşümünü sağlayan iyi tanımlanmış bir kuralı simgeleyen bir operatördür.

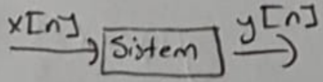
Çok girişli ve çok cıkışlı sistemler de olabilir.

Sürekli Zamanlı ve Ayrık Zamanlı Sistemler

Bir sistemin giriş (x) ve cıkış (y) sinyalleri sürekli zamanlı sinyaller ise bu sistem sürekli zamanlı bir sistemdir. Giriş ve cıkış sinyallerinin ayrık zamanlı sinyaller veya diziler olması durumunda ise sistem ayrık zamanlıdır.



sürekli zamanlı



ayrık zamanlı

Bellekli ve Belleksiz Sistemler

Bir sistemin çıkışının yalnızca o andaki girişe bağlı olması durumunda sistemin belleksiz olduğu söylenir. Bunun tersi durumda ise sistemin bellekli olduğu söylenir.

Belleksiz sistemlere örnek olarak bir direnç gösterilebilir. Girişin $(x(t))$ akım ve çıkışın $(y(t))$ gerilim olması durumunda R direncinin giriş çıkış bağıntısı Ohm yasası ile verilir $y(t)=Rx(t)$

Kondansatör ise bellekli sistemlere bir örnektir. Akımın $x(t)$ girişi ve gerilimin $y(t)$ çıkışı olması durumunda

$$y(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,d\tau \quad \text{yazılabilir}$$

Giriş ve çıkış dizileri arasında aşağıdaki gibi bir ilişki bulunan ayrık zamanlı bir sistem de bellekli bir sistemdir

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Akümülatör $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

Bir birim gecikme $y[n]=x[n-1]$

$y(t)=5\cdot x(t) \rightarrow$ Belleksiz

$y(t)=x(t-1) \rightarrow$ Bellekli

Nedensel ve Nedensel Olmayan Sistemler (Causal / Noncausal)

Bir sistemin herhangi bir $t=t_0$ anındaki $y(t)$ çıkışı, daha önceki $(t\leq t_0)$ $x(t)$ girişlerine bağlıysa sistemin nedensel olduğu söylenir. Yani nedensel bir sistemin herhangi bir andaki değeri; girişin gelecekteki değerine değil, o andaki ve geçmişteki değerlerine bağlıdır. Dolayısıyla nedensel sistemlerde sisteme bir giriş uygulamadan bir çıkış elde etmek olası değildir. Bu özellikleri sağlamayan sistemlere de nedensel olmayan sistemler denir.

Örneğin otomobil nedensel bir sistemdir. Sürücünün gelecekte ne yapacağını otomobil beklemez.

Belleksiz sistemlerin tümü aynı zamanda nedenseldir. Ancak nedensel olup bellekli olan sistemler de vardır.

$$\left.\begin{aligned} y(t)&=x(t+1)\\ y[n]&=x[-n]\end{aligned}\right\}\ \text{nedensel olmayan sistemlere örnekler}$$

$y(t)=2x(t+4) \rightarrow$ nedensel değil

$y(t)=2x(t-4)\cos(t+1) \rightarrow$ nedensel

$y[n]=x[-n] \rightarrow$ nedensel değil (çünkü $n<0$ için, sistem gelecekteki girdilere ihtiyaç duyar)

Doğrusal (Lineer) ve Doğrusal Olmayan (Non-lineer) Sistemler

$y = T_x$ eşitliğindeki T operatörü aşağıda belirtilen 2 koşulu sağlıyorsa bu operatör bir doğrusal operatördür. ve doğrusal bir T operatörü ile gösterilen bir sistemin doğrusal olduğu söylenir.

1 - Toplamsallık

Herhangi iki x_1 ve x_2 sinyali için $T_{x_1} = y_1$ ve $T_{x_2} = y_2$ ise

$$T\{x_1 + x_2\} = y_1 + y_2$$

2 - Homojenlik (Ölçekleme)

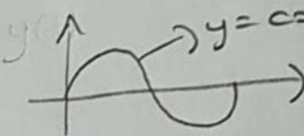
Herhangi bir x sinyali ve α sabiti için

$$T\{\alpha . x\} = \alpha . y$$

$$T\{\alpha_1 . x_1 + \alpha_2 . x_2\} = \alpha_1 . y_1 + \alpha_2 . y_2$$ (süperpozisyon özelliği)

Direnç ve kondansatör doğrusal sistemlere örnek olarak gösterilebilir.

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \cos x \end{array}\right\}$ Doğrusal değiller



★ Doğrusal sistemler için geçerli olan homojenlik özelliğinin bir sonucu olarak sıfır giriş, sıfır çıkış verir.

ÖR: $y(t) = \sin(t) . u(t)$ doğrusal bir sistem mi?

$u_1(t) \rightarrow y_1(t) = \sin(t) . u_1(t)$ $\quad u_2(t) \rightarrow y_2(t) = \sin(t) . u_2(t)$

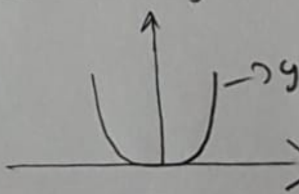
$u(t) = a_1 . u_1(t) + a_2 . u_2(t)$ girişi için $y(t) = \sin(t).u(t) = \sin(t)(a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t))$ çıkışını sağlar

$y(t) = a_1 . y_1(t) + a_2 y_2(t)$ olduğundan bu sistem doğrusaldır.

ÖR: $y(t) = 2u(t) + 1$ doğrusal bir sistem mi?

Bu sistem $u(t) = 0$ için $y(t) = 1 \neq 0$ çıkışını sağlar. Doğrusal değildir.

ÖR: $y = x^2$ örneğini inceleyelim



$x = 2$ için $y = 4$

$+\ x = 3$ için $y = 9$

$x = 5$ $\quad y = 25 \rightarrow$ Toplamsal değildir.

Doğrusal değildir.

Zamanla Değişen ve Zamanla Değişmeyen Sistemler

Bir sistemin girişindeki bir zaman ötelemesi (gecikme veya ilerleme) çıkış sinyalinde de aynı ötelemeye neden oluyorsa sistemin zamanla değişmgen bir sistem olduğu söylenir. Dolayısıyla sürekli zamanlı bir sistem herhangi bir τ gerçel değeri için

$T\{x(t-\tau)\} = y(t-\tau)$ koşulunu sağlıyorsa zamanla değişmiyor demektir.

Ayrık zamanlı sistemler için bu koşul

$T\{x[n-k]\} = y[n-k]$ $\quad k \rightarrow$ herhangi bir tamsayı

Doğrusal, Zamanla Değişmeyen Sistemler (DZD)

Hem doğrusal, hem de zamanla değişmeyen sistemler; doğrusal, zamanla değişmgen (DZD) sistem adını alırlar.

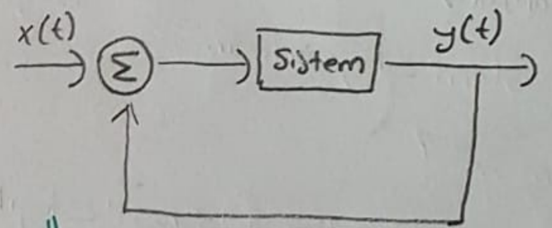
Kararlı ve Kararsız Sistemler

Belirli bir aralıktaki girişe karşılık, çıkış da belirli bir aralıkta değişiyorsa buna kararlı sistem denir. Aksi halde kararsız sistemdir.

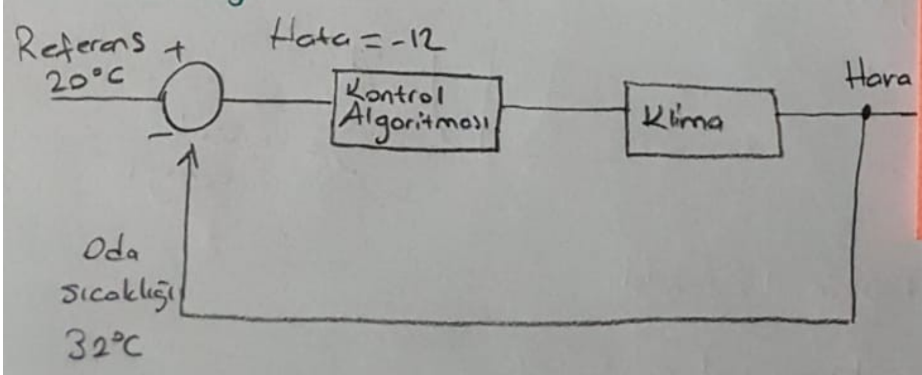
k_1 ve k_2 sonlu gerçel sayılar olmak üzere; bir sistem $|x| \le k_1$ koşulunu sağlayan herhangi bir x sınırlı girişine karşı $|y| \le k_2$ koşulunu sağlayan sınırlı bir y çıkışını veriyorsa, bu sistemin sınırlı giriş / sınırlı çıkış (SGSÇ) kararlı olduğu söylenir. $y(t) = \int_0^1 x(t)dt$ $\quad y[n] = 100x[n] \rightarrow$ kararlı

Geri Beslemeli Sistemler

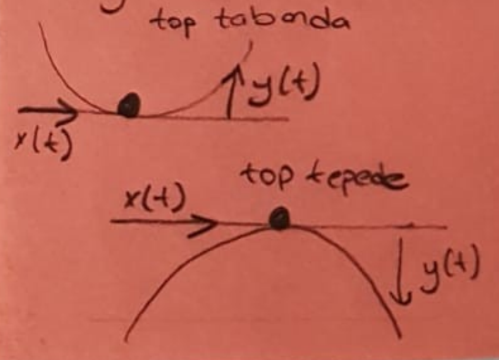
Bu sistemlerde çıkış geriye beslenip girişe eklenir.



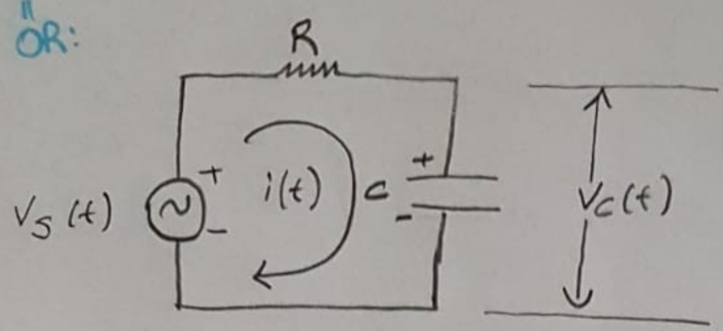
Klima Örneği



Bir sistem; herhangi bir sınırlı girdi için sınırlı bir çıktı üretiyorsa bu sistem kararlıdır.



ÖR:

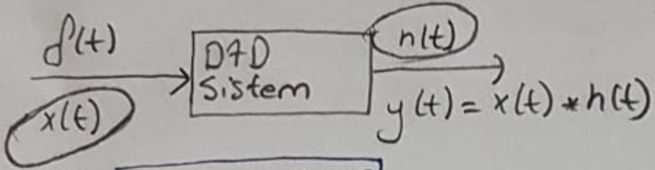


a) $x(t)=V_S(t)$ ve $y(t)=V_C(t)$ ise
b) $x(t)=V_S(t)$ ve $y(t)=i(t)$ ise

$V_S(t)=R\,i(t)+V_C(t)$

$i(t)=C\cdot\dfrac{dV_C(t)}{dt}$

Doğrusal, Zamanla Değişmeyen Sistemler



Çıkışı $h(t)$ ile $x(t)$'nin konvolüsyonudur.

Dürtü tepkisi: $\boxed{h(t)=T\{\delta(t)\}}$

$T \to$ sürekli zamanlı sistem
$h(t) \to$ dürtü tepkisi
$\delta(t) \to$ birim dürtü sinyali

$x(t)$ girişi $\to x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$ olarak ifade edilebilir.

Sistem doğrusal olduğundan sistemin herhangi bir girişe olan tepkisi de

$$y(t)=T\{x(t)\}=T\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau\right\}=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,T\{\delta(t-\tau)\}\,d\tau \quad 1$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıca sistem zamanla değişmez olduğundan $h(t-\tau)=T\{\delta(t-\tau)\}$ yazılabilir. Bu eşitlik yukarıdaki 1 eşitlikte yerine konursa

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \quad 2$$

Bu eşitlik, sürekli zamanlı DZD bir sistemin $h(t)$ dürtü tepkisi ile tümüyle tanımlandığını göstermektedir.

Konvolüsyon İntegrali

Yukarıdaki 2 numaralı eşitlik; sürekli zamanlı iki adet $x(t)$ ve $h(t)$ sinyalinin

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

ifadesi ile verilen konvolüsyonunu tanımlar.

NOT: Herhangi bir sürekli zamanlı DZD sistemin çıkışı; $x(t)$ girişi ile sistemin dürtü tepkisi $h(t)$'nin konvolüsyonudur.

Konvolüsyon İntegralinin Özellikleri

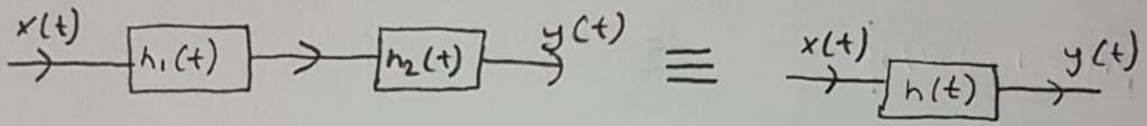
Yer Değiştirme Özelliği

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

★ $x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) . h(t-\tau) . d\tau$

★ $h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) . x(t-\tau) . d\tau$

Birleşme Özelliği

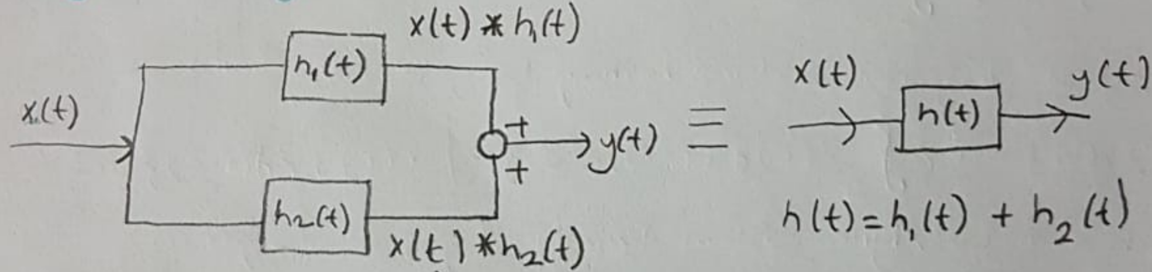


$y(t) = \{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t)$

$= y(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\}$

$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$

Dağılma Özelliği



$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$

$y(t) = (x(t) * h_1(t)) + (x(t) * h_2(t))$

$= y(t) = x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\}$

Konvolüsyon İntegral İşlemi

Konvolüsyonun yer değiştirme özelliği $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$ [3] eşitliğine uygulanırsa

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

elde edilir. Bu formülle konvolüsyonu hesaplamak [3] numaralı eşitliğe göre daha kolaydır.

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).h(t-\tau)\,d\tau \qquad (x(t) * h(t)) \qquad \mathrm{I}$$

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).x(t-\tau)\,d\tau \qquad (h(t) * x(t)) \qquad \mathrm{II}$$

I

$x(t) = u(t-1) \qquad x(\tau)$

$h(t) = e^{-t}.u(t)$

$$x(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau \geq 0 \\ 0 & \tau < 1 \end{cases}$$

$x(\tau) = u(\tau-1) \qquad h(t-\tau) = e^{-(t-\tau)}.u(t-\tau)$

II

$$h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-(t-\tau)} & \tau \leq t \\ 0 & \tau > t \end{cases}$$

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \tau \leq t \\ 0 & \tau > t \end{cases}$$

$$y_{zs}(t) = \int_{1}^{t} e^{-(t-\tau)}.\,d\tau = \int_{1}^{t} e^{-t}.e^{\tau}.\,d\tau$$

$$= e^{-t}.\left[e^{\tau} \Big|_{1}^{t} \right] = e^{-t}(e^{t} - e^{1}) = e^{0} - e^{-t+1}$$

$$\boxed{= y_{zs}(t) = 1 - e^{-t+1}}$$

Konvolüsyon integrali hesaplanırken (En az bir taraf sınırlı süreli ise uygulanır)

1) Öncelikle konvolüsyona tabi tutulan işaretler $(x(t), h(t))$, τ'nun bir fonksiyonu olarak yazılır.

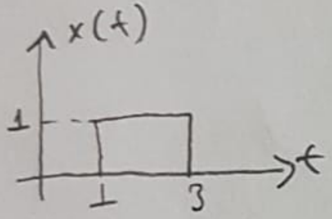
2) Her iki işaret de sınırlı süreli ise genellikle daha kısa süreli olan sinyal alınarak zamanda ters çevrilir. (orijine göre yansıtılarak) $(h(\tau) \to h(-\tau))$

3) Ters çevrilen sinyal, τ'nun bir fonksiyonu olan $h(t-\tau)=h(-(\tau-t))$'yi oluşturmak için t birim kaydırılır. (Genelde sola kaydırılır.

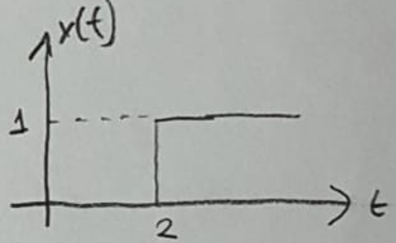
4) t parametresi sabit tutularak $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ sinyalleri, τ'nun tüm değerleri için çarpılır.

5) $y(t)$ çıkışının tek bir değerini üretmek için $x(\tau)h(t-\tau)$ çarpımı tüm τ için entegre edilir.

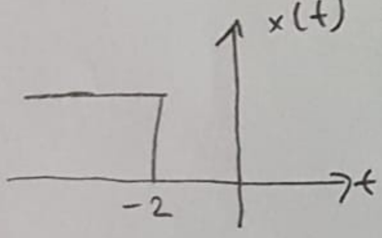
6) $y(t)$ çıkışının tüm değerlerini üretmek için t'nin $-\infty$'dan $+\infty$'a kadar olan değerleri ile 2-5 adımları tekrarlanır.



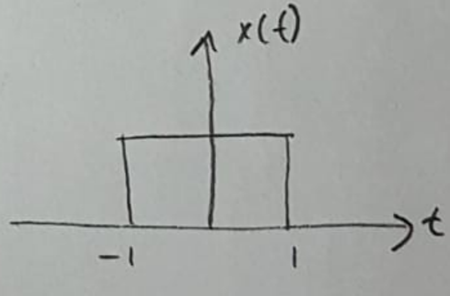
Sınırlı süreli
Sağ taraflı



Sınırsız süreli
Sağ taraflı

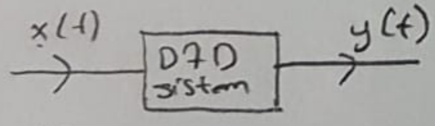


Sınırsız süreli
Sol taraflı

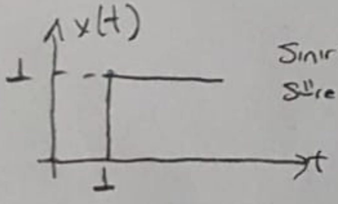


Sınırlı süreli
her iki taraflı

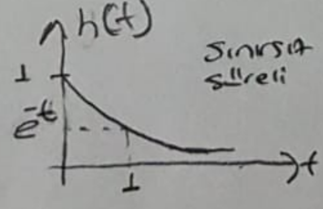
ÖR:



$y_{zs}(t)=?$



Sınırsız
süreli



Sınırsız
süreli

$y_{zs}(t)=x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

ÖR: $x(t)=u(t-1)$ $h(t)=e^{-t}.u(t)$

I. Yol

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad h(\tau)=\begin{cases}1 & \tau\geq 0\\ 0 & \tau<0\end{cases}$$

$t-\tau-1\geq 0$

$t-1\geq\tau$

$$y(t)=1-e^{-t+1} \quad (t\geq 1) \qquad u(t-\tau-1)=\begin{cases}1 & \tau\leq t-1\\ 0 & \tau>t-1\end{cases}$$

II. Yol

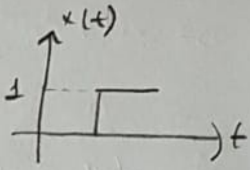
$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\,x(t-\tau).d\tau$$

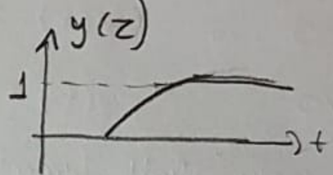
$$h(\tau)=e^{-\tau}.u(\tau) \qquad x(t-\tau)=u(t-\tau-1) \qquad \boxed{y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau}u(\tau).u(t-\tau-1)d\tau}$$

$$y(t)=\int_{0}^{t-1}e^{-\tau}\,d\tau=-e^{-\tau}\Big|_{0}^{t-1}$$

$$=-e^{-(t-1)}+1$$

$$=1-e^{-t+1} \quad (t\geq 1)$$





Basamak Tepkisi

T ile gösterilen sürekli zamanlı DZD bir sistemin $s(t)$ basamak tepkisi; giriş $u(t)$ olduğundaki sistem tepkisi olarak tanımlanır. Yani;

$$s(t)=T\{u(t)\}$$

$$s(t)=h(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau).u(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau \quad 1$$

NOT: $h(t)$ dürtü tepkisinin integrali $s(t)$ basamak tepkisini verir. 1 numaralı eşitliğin t'ye göre türevi alınırsa

$$h(t)=s'(t)=\frac{ds(t)}{dt}$$ Bu durumda $s(t)$'nin türevi de $h(t)$'yi verir.

Sürekli Zamanlı DZD Sistemlerin Özellikleri

Bellekli ya Da Belleksiz Sistemler

Belleksiz bir sistemin $y(t)$ çıkışı yalnızca o andaki $x(t)$ girişine bağlı olduğundan

$y(t)=Kx(t)$ $K\rightarrow$ sistem kazancı (sabittir) Dolayısıyla $h(t)$ dürtü tepkisi

$$h(t)=K\delta(t)$$

Eğer $t\neq 0$ için $h(t)\neq 0$ ise bu sürekli zamanlı DZD sistem bir bellekli sistemdir.

Nedensellik

Bir olay gerçekten oluşana kadar nedensel bir sistem bu giriş olayına tepki vermez. Bu nedenle DAD bir sistem için $t<0$ ise $h(t)=0$ olacaktır.

DAD bir sistemin çıkışı;

$$y(t)=\int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$ ya da

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$ bu eşitlik göstermektedir ki $y(t)$ çıkışını hesaplamak için kullanılan $x(t)$ girişinin değerleri yalnızca $\tau \le t$ koşulunu sağlayan giriş değerleridir.

$t<0$ $\quad x(t)=0$ ise $x(t)$ sinyali nedensel bir sinyaldir.

$t>0$ $\quad x(t)=0$ ise nedensel değildir.

Bu durumda sürekli zamanlı DAD bir sistemin çıkışı:

$$y(t)=\int_{0}^{t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$ olacaktır

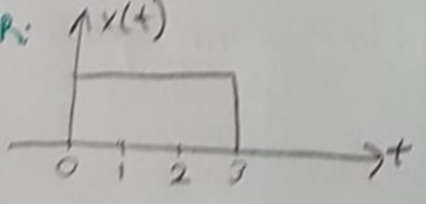
Kararlılık

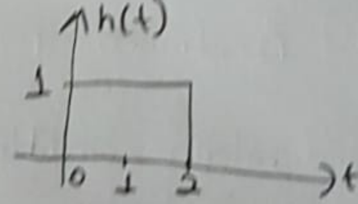
DAD bir sistemin SGSÇ (Sınırlı Giriş Sınırlı Çıkış) kararlılığı, onun dürtü tepkisinden kolayca irdelenebilir.

Eğer dürtü tepkisi mutlak entegre edilebilir ise yani

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|d\tau<\infty$$ koşulu sağlanıyor ise bu sürekli zamanlı DAD sistemin SGSÇ anlamında kararlı olduğu söylenebilir.

Ör:





$y(t)=x(t)*h(t)$

$x(t)=u(t)-u(t-3)$ $\quad h(t)=u(t)-u(t-2)$

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau).h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}[u(\tau)-u(\tau-3)].[u(t-\tau)]-$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau).u(t-\tau).d\tau-\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau).u(t-2-\tau)dt-\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau-3).u(t-\tau).dt$$

$u.(t-\tau-2)].dt$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau-3)u(t-2-\tau).dt$$

(Devamı bir sonraki sayfada) $\quad$ (dağılma)

$$u(t)\,u(t-\tau)=\begin{cases}1 & 0<\tau<t\,,\ t>0\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$u(\tau).u(t-2-\tau)=\begin{cases}1 & 0<\tau<(t-2),\ t>2\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

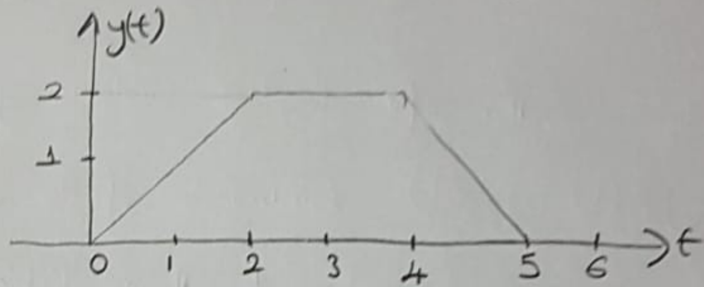
$$u(\tau-3)\,u(t-\tau)=\begin{cases}1 & 3<\tau<t,\ t>3\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$u(\tau-3).u(t-2-\tau)=\begin{cases}1 & 3<\tau<(t-2),\ t>5\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$y(t)=\left\{\int_0^t d\tau\right\}.u(t)-\left\{\int_0^{t-2} d\tau\right\}.u(t-2)-\left\{\int_3^t d\tau\right\}.u(t-3)+\left\{\int_3^{t-2} d\tau\right\}.u(t-5)$$

$$=t.\,u(t)-(t-2).u(t-2)-(t-3).u(t-3)+(t-5).u(t-5)$$

$$y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0<t\leq 2\\ 2 & 2<t\leq 3\\ 5-t & 3<t\leq 5\\ 0 & 5<t\end{cases}$$



Türevsel Denklemlerle Tanımlanan Sistemler

N. mertebeden, doğrusal, sabit kat sayılı, genel bir türevsel denklem

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (1)$$ biçiminde verilmiş olsun.

a_k, b_k kat sayıları gerçel sabitlerdir. N, $y(t)$'nin en yüksek türev derecesini gösterir.

RC devresi türevsel

$$\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{RC}y(t)=\frac{1}{RC}x(t)$$

1 numaralı eşitliğin genel çözümü (belli bir $x(t)$ girişi için)

$$y(t)=y_p(t)+y_h(t) \qquad y_p(t) \text{ özel çözüm}$$

$y(t)$ ise aşağıdaki homojen türevsel denklemi sağlayan bir homojen (ya da komplimenter) çözümdür.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \frac{d^k y_h(t)}{dt^k} = 0$$

$y_h(t)$'nin kesin biçimini N adet yardımcı koşul belirler. Genel olarak bu yardımcı koşullar

$y(t), \ldots, \frac{dy(t)}{dy}, \ldots, \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}$ değişkenlerinin belirli bir t anındaki değerleridir.

Doğrusallık

Eğer yardımcı koşulların tümü sıfır ise 1 numaralı eşitlik ile tanımlanan sistem doğrusaldır.

Eğer yardımcı koşullar sıfır değilse sistemin $y(t)$ tepkisi

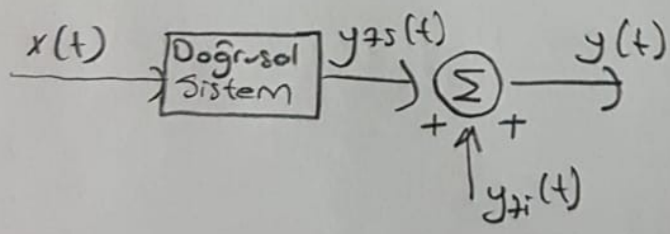
$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$ biçiminde ifade edilebilir

$y_{zi}(t) \Rightarrow$ sistemin, verilen yardımcı koşullarına ilişkin sıfır giriş tepkisi

$y_{zs}(t) \Rightarrow$ sıfır yardımcı koşullara sahip, doğrusal bir sistemin sıfır durum tepkisi

NOT: $y_{zi}(t) \neq y_h(t)$ $\quad y_{zs}(t) \neq y_p(t)$

$y_{zi}(t)$, $y_h(t)$'yi; $y_{zs}(t)$ ise hem $y_h(t)$'yi hem de $y_p(t)$'yi içermektedir



Nedensellik

1 numaralı eşitlik ile tanımlanan sistemin bir doğrusal sistemin nedensel olması için başlangıçta durgun olma koşulunu (ya da ilk enerjisiz olma koşulunu) varsaymamız gerekir. Diğer bir deyişle,

$$\left.\begin{array}{ll} t \leq t_0 \text{ için} & x(t) = 0 \\ t \leq t_0 \text{ için} & y(t) = 0 \end{array}\right\} \text{ ise sistem nedenseldir.}$$

Zamanla Değişmezlik

Bir doğrusal nedensel sistemde başlangıçta durgunluk onun zamanla değişmezliğini de ima eder.

Dürtü Tepkisi

1 numaralı eşitlikle tanımlanan sürekli zamanlı DZD bir sistemin $h(t)$ dürtü tepkisi başlangıçta durgun olma koşuluyla birlikte aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k h(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k \delta(t)}{dt^k}$$

AYRIK ZAMANLI, DZD BİR SİSTEMİN TEPKİSİ VE KONVOLÜSYON TOPLAMI

Dürtü Tepkisi

T ile gösterilen ayrık zamanlı DZD bir sistemin $h[n]$ dürtü tepkisi (ya da birim örnek tepkisi), girişe $\delta(t)$ uygulandığı zamanki tepkisi olarak şöyle tanımlanır:

$$h[n] = T\{\delta[n]\} \quad (2)$$

Herhangi Bir Girişe Tepki

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

Sistem doğrusal olduğundan herhangi bir $x[n]$ girişine olan $y[n]$ tepkisi:

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\}$$

Sistem zamanla değişmez olduğundan

$h[n-k] = T\{\delta[n-k]\}$ bu eşitlik, yukarıdaki eşitlikte yerine konularak

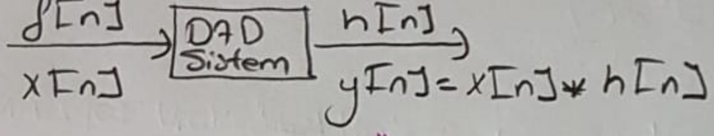
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$$ elde edilir. Bu eşitlik göstermektedir ki

ayrık zamanlı DZD bir sistem $h(t)$ dürtü tepkisiyle tümüyle tanımlanmaktadır.

Konvolüsyon Toplamı

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] \Rightarrow \text{konvolüsyon toplamı}$$

NOT: Herhangi bir ayrık zamanlı DZD sistemin çıkışı, $x[n]$ girişi ile sistemin dürtü tepkisi $h[n]$'in konvolüsyonudur.

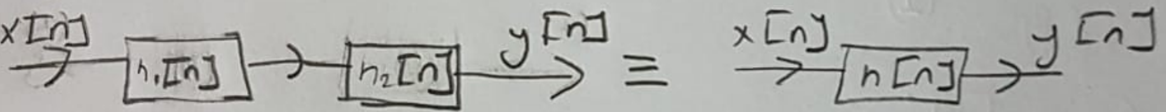


Konvolüsyon Toplamının Özellikleri

1- Yer Değiştirme

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

2- Birleşim

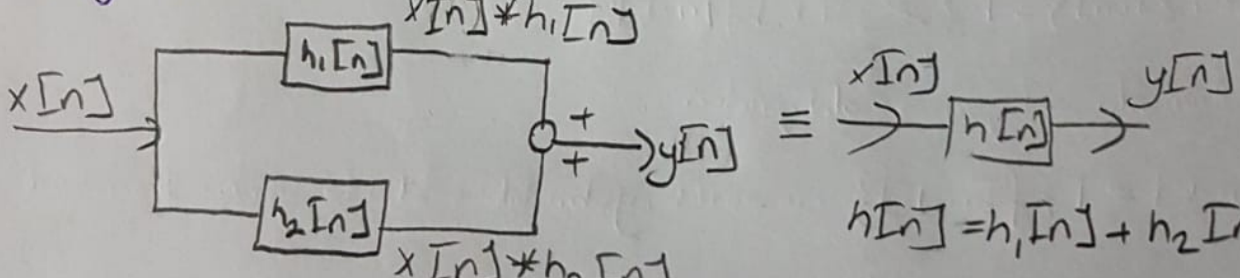


$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

$$y[n] = \{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n]$$

$$= y[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$$

3- Dağılma



$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

$$y[n] = \{x[n] * h_1[n]\} + \{x[n] * h_2[n]\}$$

$$= y[n] = x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\}$$

Konvolüsyon Toplamına İlişkin İşlem

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]$$

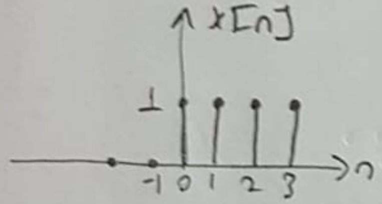
1- $h[k]$ dürtü tepkisi zamana göre ters çevrilerek (orijine göre yansıtılarak) $h[-k]$ elde edilir. Daha sonra n parametreli, k'nın bir fonksiyonu olan $h[n-k]=h[-(n-k)]$'i oluşturmak için n birim kaydırılır.

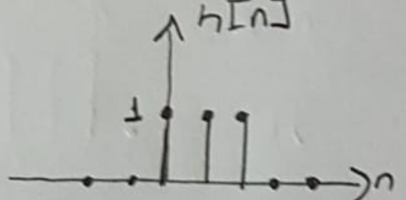
2- n parametresi sabit tutularak $x[k]$ ve $h[n-k]$ dizileri k'nın tüm değerleri için çarpılır.

3- $y[n]$ çıkışının tek bir değerini üretmek için $x[k]\,h[n-k]$ çarpımı tüm k için çarpılır.

4- $y[n]$ çıkışının tüm değerlerini üretmek için $-\infty$'dan $+\infty$'a kadar olan değerleri için 1-3 adımları tekrarlanır.

ÖR





$y[n]=x[n]*h[n]$ a) analitik bir yöntemle, b) grafiksel bir yöntemle hesaplayınız

a) $x[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3]$

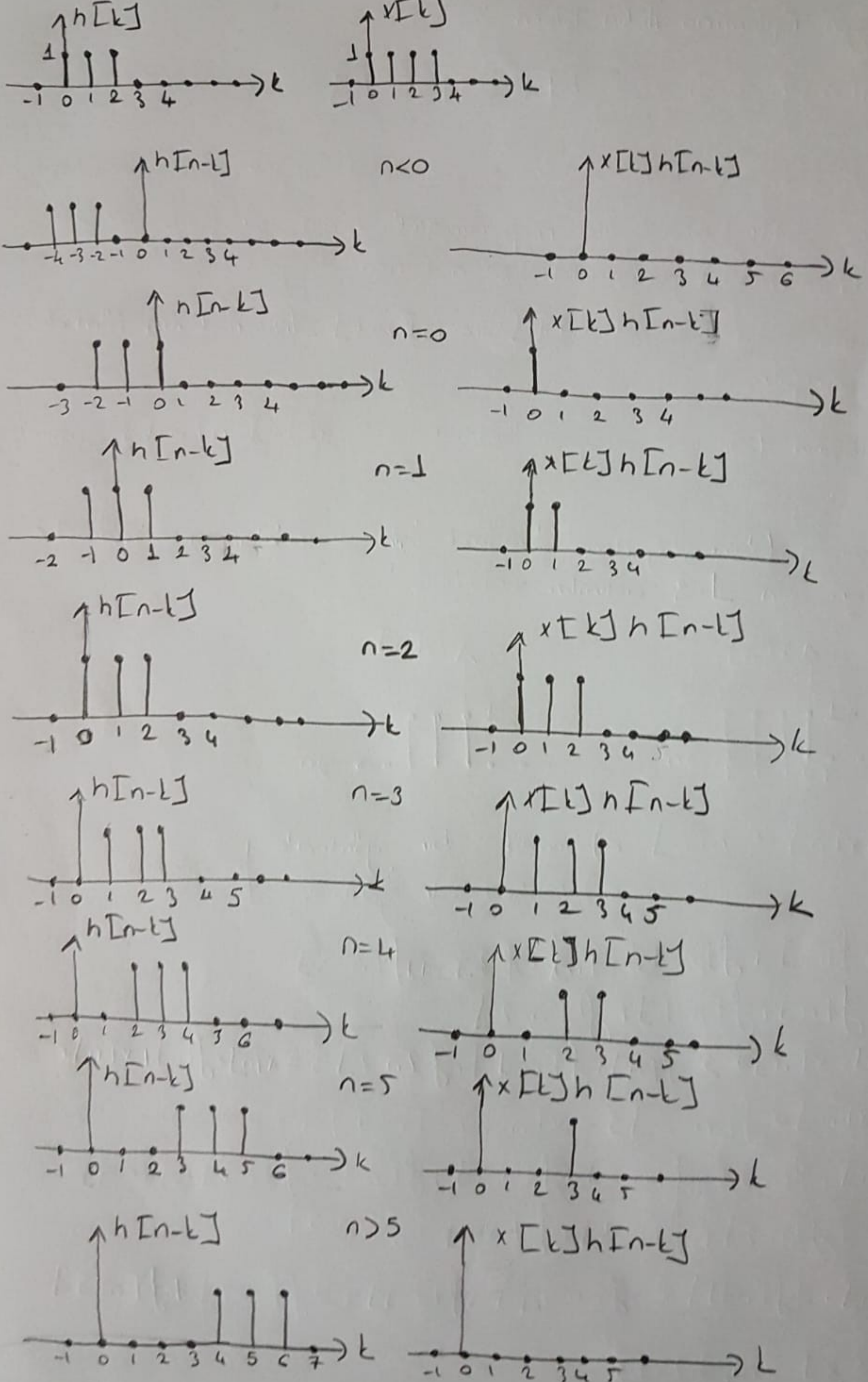
$h[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]$

$x[n]*h[n]=x[n]*\{\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]\}=x[n]*\delta[n]+x[n]*\delta[n-1]+x[n]*\delta[n-2]\}=x[n]+x[n-1]+x[n-2]$

$y[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[n-4]+\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[n-4]+\delta[n-5]$

$y[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+3\delta[n-2]+3\delta[n-3]+2\delta[n-2]+\delta[n-5]$

$y[n]=\{1,2,3,3,2,1\}$

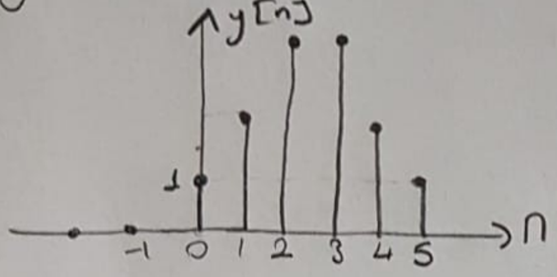


h[k]
x[k]
h[n-k]
n<0
x[k]h[n-k]
n=0
n=1
n=2
n=3
n=4
n=5
n>5

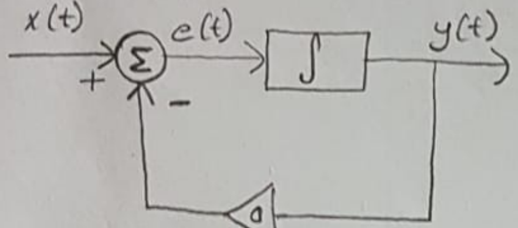
$0 \leq n \leq 5$ için $x[k]\,h[n-k]$ terimlerini toplarsak

$y[0]=1$ $y[1]=2$ $y[2]=3$ $y[3]=3$ $y[4]=2$ $y[5]=1$

$y[n] = \{1, 2, 3, 3, 2, 1\}$



ÖR:



∫ → integratör

Σ → toplayıcı

a → skaler çarpıcı

giriş - çıkış arasındaki türevsel denklemi bulunuz.

$e(t)$ → integratör girişi $x(t)$ → giriş $y(t)$ → çıkış

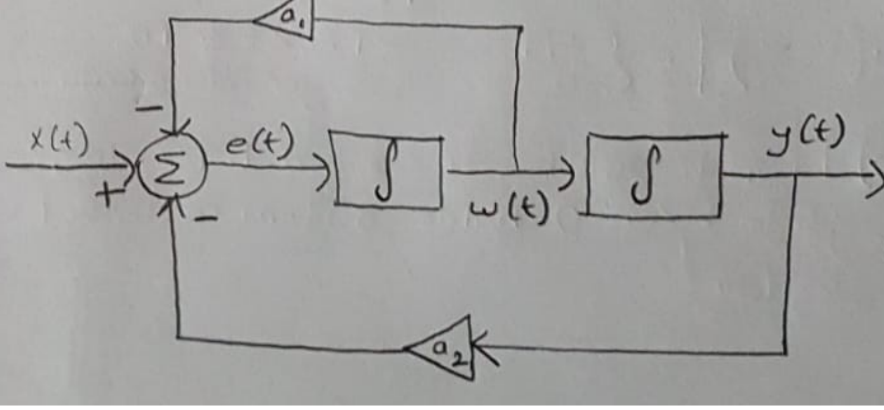
$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e(\tau)\,d\tau$ eşitliğin her iki tarafının t'ye göre türevi alınırsa:

$$\frac{dy(t)}{dt} = e(t)$$

$e(t) = x(t) - a \cdot y(t)$ yerine konulursa

$$\boxed{\frac{dy(t)}{dt} = x(t) - a \cdot y(t)} \quad \text{veya} \quad \boxed{\frac{dy(t)}{dt} + a \cdot y(t) = x(t)}$$

ÖR:



$y(t)$ çıkışı ve $x(t)$ girişi arasındaki ilişkiyi tanımlayan türevsel denklemi yazınız.

$e(t) \rightarrow$ 1. integratörün girişi $w(t) \rightarrow$ 1. integratörün çıkışı

$$e(t) = \frac{dw(t)}{dt} = -a_1 w(t) - a_2 y(t) + x(t)$$

$w(t) \rightarrow$ 2. integratörün girişi

$$w(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$ yerine konulursa

$$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) + x(t)}$$ ya da

$$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = x(t)}$$ ikinci mertebeden türevsel denklem.

NOT: Genel olarak; integratörlerin ve skaler çarpıcıların bağlanmasından oluşan sürekli zamanlı DZD bir sistemin mertebesi, sistemdeki integratör sayısına eşittir.

ÖR: $y(t) = T\{x(t)\} = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)\,d\tau$ sürekli zamanlı DZD sistem

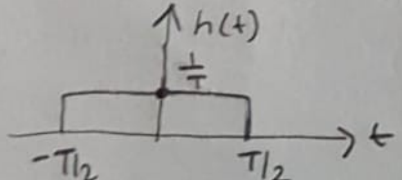
a) Sistemin dürtü tepkisini bulunuz ve çiziniz.

b) Sistem nedensel midir?

Çözüm: a) $y(t) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{t+T/2} x(\tau)\,d\tau - \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{t-T/2} x(\tau)\,d\tau$

$$y(t) = \frac{1}{T}x(t) * u\left(t+\frac{T}{2}\right) - \frac{1}{T}x(t) * u\left(t-\frac{T}{2}\right) = x(t) * \frac{1}{T}\left[u\left(t+\frac{T}{2}\right) - u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] = \boxed{x(t) * h(t)}$$

$$h(t) = \frac{1}{T}\left[u\left(t+\frac{T}{2}\right) - u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] = \begin{cases} 1/T & -T/2 < t \leq T/2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$



b) Yukarıdaki eşitlikten $t<0$ için $h \neq 0$ olduğu görülmektedir. O halde sistem nedensel değildir.

ÖR:

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{h_1(t)} \xrightarrow{w(t)} \boxed{h_2(t)} \xrightarrow{y(t)}$$

Dürtü tepkileri $\Rightarrow$ $h_1(t)=e^{-2t}u(t)$ $\quad h_2(t)=2e^{-t}u(t)$

a) $\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)}$ (tüm sistem) $h(t)$ dürtü tepkisini bulunuz

b) Tüm sistemin Sınırlı Giriş Sınırlı Çıkış (SGSÇ) anlamında kararlılığını saptayınız.

Çözüm: a) $w(t) \Rightarrow$ 1. sistemin çıkışı $\quad w(t)=x(t)*h_1(t)$

$$y(t)=w(t)*h_2(t)=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$$

$y(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)] = x(t)*h(t) \Rightarrow$ Konvolüsyonun birleşim özelliği

$h(t)=h_1(t)*h_2(t) \Rightarrow$ Tüm sistemin dürtü tepkisi

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)h_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}u(\tau)\,2e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$$=2e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau=2e^{-t}\left[\int_0^t e^{-\tau}d\tau\right]u(t)$$

$$=2(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

b) Yukarıda elde edilen $h(t)$ kullanılarak

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|d\tau=2\int_0^{\infty}(e^{-\tau}-e^{-2\tau})d\tau=2\left[\int_0^{\infty}e^{-\tau}d\tau-\int_0^{\infty}e^{-2\tau}d\tau\right]$$

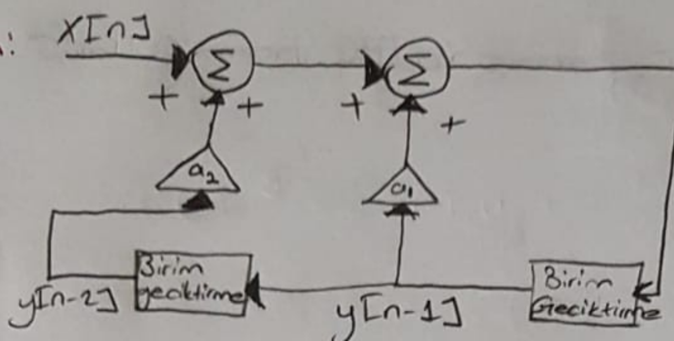
$=2(1-\frac{1}{2})=1<\infty \Rightarrow$ sistem SGSÇ anlamında kararlıdır.

ÖR $y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau)d\tau$ sistemin $h(t)$ dürtü tepkisini bulunuz.

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}\delta(\tau)d\tau=e^{-(t-\tau)}\Big|_{-\infty}^{t}=e^{-t} \quad t>0$$

$$h(t)=e^{-t}u(t)$$

ÖR:



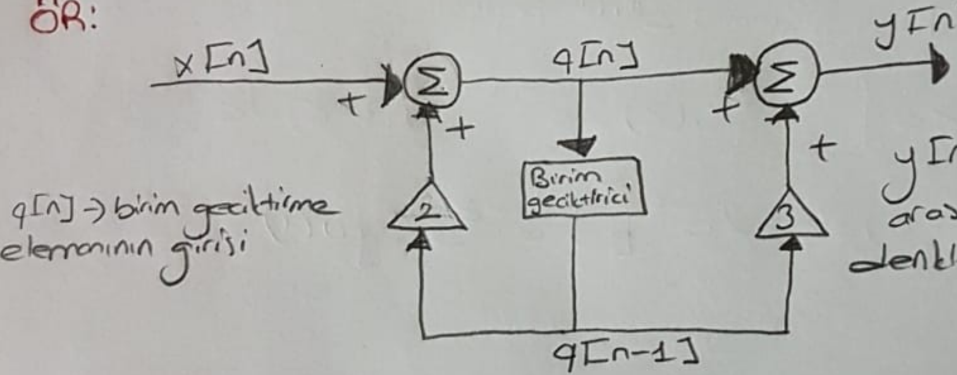
$y[n]$ çıkışı ve $x[n]$ girişi arasındaki ilişkiyi tanımlayan fark denklemini yazınız.

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + x[n] \quad \text{veya}$$

$$y[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] = x[n]$$

NOT: Genel olarak, birim geciktirme elemanların ve skaler çarpıcıların bağlanmasından oluşan ayrık zamanlı, DAD bir sistemin mertebesi, sistemdeki birim geciktirme elemanlarının sayısına eşittir.

ÖR:



$y[n]$ çıkışı ve $x[n]$ girişi arasındaki ilişkiyi veren fark denklemini yazınız.

$$q[n] = 2q[n-1] + x[n] \qquad y[n] = q[n] + 3q[n-1]$$

$$q[n] = \frac{2}{5} y[n] + \frac{3}{5} x[n] \qquad q[n-1] = \frac{1}{5} y[n] - \frac{1}{5} x[n]$$

$n \rightarrow (n-1)$ değişikliği yapılırsa

$$q[n-1] = \frac{2}{5} y[n-1] + \frac{3}{5} x[n-1]$$

$$\frac{1}{5} y[n] - \frac{1}{5} x[n] = \frac{2}{5} y[n-1] + \frac{3}{5} x[n-1]$$

$$\boxed{y[n] - 2y[n-1] = x[n] + 3x[n-1]}$$

ÖR: Sürekli zamanlı, DZD bir sistemin $x(t)$ girişi ve $h(t)$ dürtü tepkisi

$x(t) = u(t)$ $\qquad h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ $\quad \alpha > 0$ olarak verilmiştir.

$y(t)$'yi hesaplayınız.

I. Yol:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \quad \text{(konvolüsyon integrali)}$$

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\, d\tau = e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\tau}\, d\tau$$

$$= e^{-\alpha t}\,\frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha t} - 1\right) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

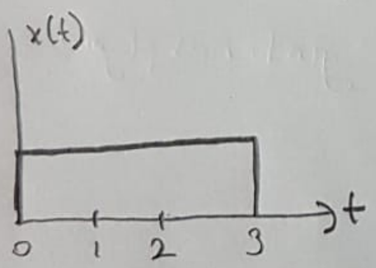
$$\boxed{y(t) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)u(t)}$$

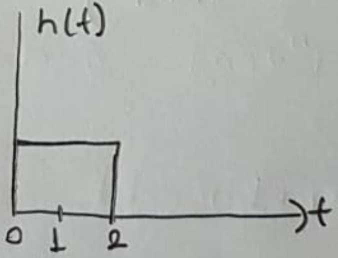
II. Yol

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha t}\, d\tau = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) \quad \boxed{y(t) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)u(t)}$$

ÖR:





$y(t) = x(t) * h(t)$ işlemini yapınız.

Analitik yol:

$x(t) = u(t) - u(t-3)$ $\qquad h(t) = u(t) - u(t-2)$ $\Rightarrow$ analitik bir biçimde ifade edilir.

$$y(t) = x(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau) - u(\tau-3)][u(t-\tau) - u(t-\tau-2)]\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-2-\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-3)u(t-\tau)\,d\tau$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-3)\, u(t-2-\tau)\, d\tau$$

$$u(\tau)u(t-\tau)=\begin{cases}1 & 0<\tau<t,\ t>0\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$u(\tau)u(t-2-\tau)=\begin{cases}1 & 0<\tau<t-2,\ t>2\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$u(\tau-3)u(t-\tau)=\begin{cases}1 & 3<\tau<t,\ t>3\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$u(\tau-3)u(t-2-\tau)=\begin{cases}1 & 3<\tau<t-2,\ t>5\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

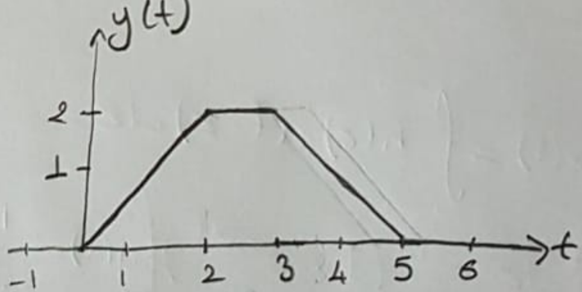
$$y(t)=\left(\int_0^t d\tau\right)u(t)-\left(\int_0^{t-2} d\tau\right)u(t-2)-\left(\int_3^t d\tau\right)u(t-3)+\left(\int_3^{t-2} d\tau\right)u(t-5)$$

$$=tu(t)-(t-2)u(t-2)-(t-3)u(t-3)+(t-5)u(t-5)$$

Grafiksel yöntem:

$t<0$ ve $t>5$ için örtüşme olmadığından $y(t)=0$'dır. Örtüşmenin olduğu diğer aralıklarda dikdörtgen darbelerin alanları hesaplanırsa $y(t)$ şu biçimde bulunur.

$$y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0<t\leq 2\\ 2 & 2<t\leq 3\\ 5-t & 3<t\leq 5\\ 0 & 5<t\end{cases}$$



$y(t)$'nin değişim grafiği

ÖR: Ayrık zamanlı, DZD bir sistemin $x[n]$ girişi ve $h[n]$ dürtü tepkisi;

$x[n]=u[n]$ $\quad h[n]=\alpha^n u[n]$ $\quad 0<\alpha<1$ $\quad y[n]$'i hesaplayınız.

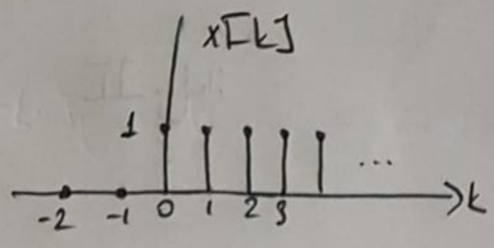
I. yol

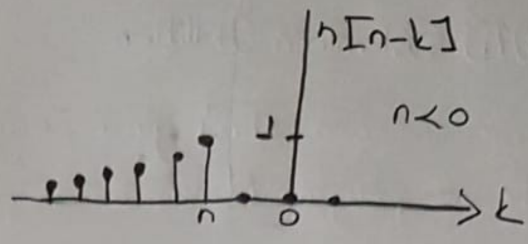
$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$$

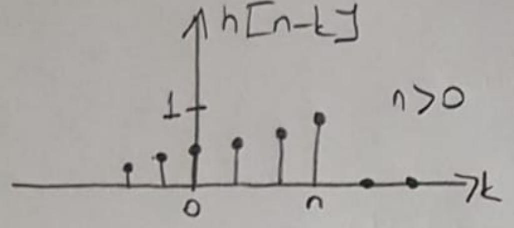
$n<0$ için $x[k]$ ve $h[n-k]$ örtüşmemektedir. $n\geq 0$ için ise $k=0$'dan $k=n$'e kadar örtüşmektedir. $n<0$ için $y[n]=0$'dır. $n\geq 0$ için;

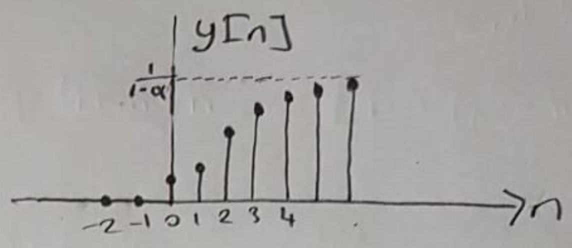
$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}$$ k, $m=n-k$ olarak değiştirilirse

$$y[n]=\sum_{m=n}^{0}\alpha^m=\sum_{m=0}^{n}\alpha^m=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \quad y[n]=\left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)u[n]$$







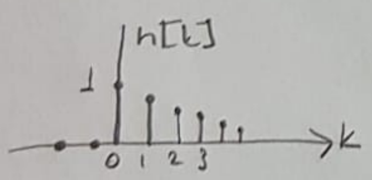


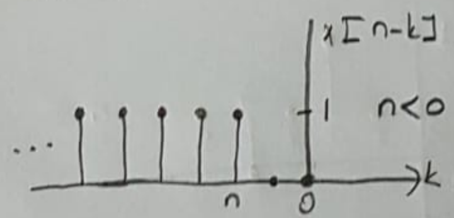
II. yol

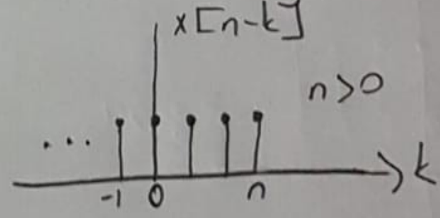
$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]$$

$h[k]$ ve $x[n-k]$ dizileri $n<0$ için örtüşmez. $n\geq 0$ için ise $k=0$, $k=n$ aralığında örtüşür. $n<0$ için $y[n]=0$ olur. $n\geq 0$ için;

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}\alpha^k=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$







ÖR: Ayrık zamanlı, DZD bir sistemin $s[n]$ basamak tepkisi

$s[n]=\alpha^n u[n]$ $\quad 0<\alpha<1$ bu sistemin $h[n]$ dürtü tepkisini bulunuz.

$$h[n]=s[n]-s[n-1]=\alpha^n u[n]-\alpha^{n-1}u[n-1]$$

$$=\{\delta[n]+\alpha^n u[n-1]\}-\alpha^{n-1}u[n-1]=\delta[n]-(1-\alpha)\alpha^{n-1}u[n-1]$$

Ayrık Zamanlı DZD Sistemlerin Özellikleri

Ayrık zamanlı, DZD bir sistemin $x[n]$ girişi periyodik ve periyodu N ise, $y[n]$ çıkışı da periyodiktir ve periyodu N'dir.

$h[n] \rightarrow$ dürtü tepkisi

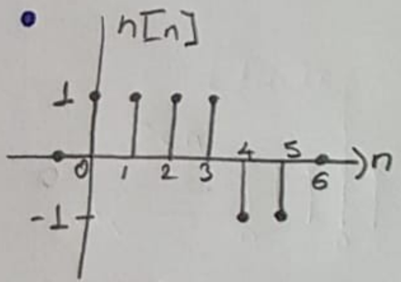
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k] \qquad n = m+N \text{ yazılırsa}$$

$$y[m+N] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[m+N-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[(m-k)+N]$$

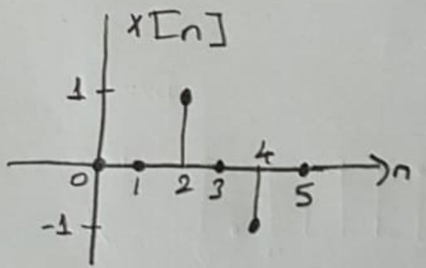
$x[n]$ periyodik ve periyodu N olduğundan

$$x[(m-k)+N] = x[m-k] \quad \text{bu durumda}$$

$$y[m+N] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[m-k] = y[m] \text{ yazılabilir.}$$



a

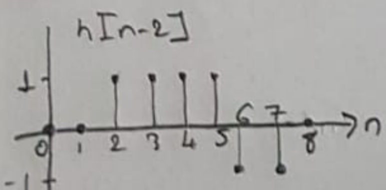


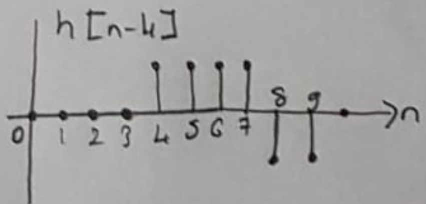
b

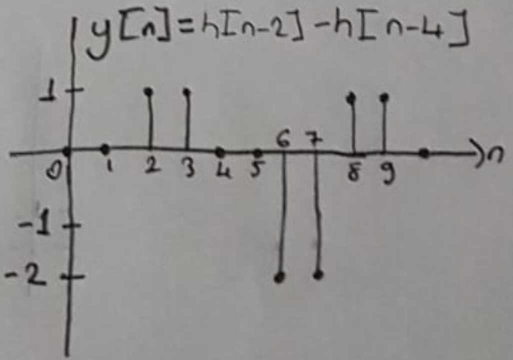
Ayrık zamanlı, DZD bir sistemin $h[n]$ dürtü tepkisi şekil a'da verilmiştir. Konvolüsyon tekniğini kullanmadan şekil b'de verilen $x[n]$ girişi için sistemin dürtü tepkisini bulunuz ve çiziniz.

$x[n] = \delta[n-2] - \delta[n-4]$ Sistem doğrusal ve zamanla değişmez olduğundan

$y[n] = h[n-2] - h[n-4]$







Herhangi bir n_0 için $y[n]$ çıkış dizisinin $n=n_0$'daki değeri; $x[n]$ girişinin yalnızca $n \leq n_0$ için olan değerlerine bağımlıysa, bu ayrık zamanlı sistem nedenseldir. Bu tanımdan, ayrık zamanlı DZD bir sistem için $n<0$ için $h[n]=0$ nedensellik şartı;

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]\,x[n-k]+\sum_{k=0}^{\infty} h[k]\,x[n-k]$$

Sistem nedensel ise;

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]\,x[n-k]=0$$ olmalıdır. Bu yüzden $n<0$ için $h[n]=0$ olmalı.

$$\boxed{y[n]=\sum_{k=0}^{\infty} h[k]\,x[n-k]}$$ (nedensellik şartı)

$y[n]$; yalnızca geçmişteki ve o andaki giriş değerlerine bağlı

ÖR: $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} 2^{k-n}\,x[k+1]$ ayrık zamanlı DZD sistem kararlı mıdır?

$$h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} 2^{k-n}\,\delta[k+1]=\sum_{k=-\infty} 2^{-(n+1)}\,\delta[k+1]=2^{-n-1}\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k+1]$$

$k+1=m$ dönüşümü yapılırsa

$$h[n]=2^{-(n+1)}\sum_{m=-\infty}^{n+1}\delta[m]=2^{-(n+1)}\,u[n+1]$$

$h[-1]=u[0]\neq 0$ sistem nedensel değildir.

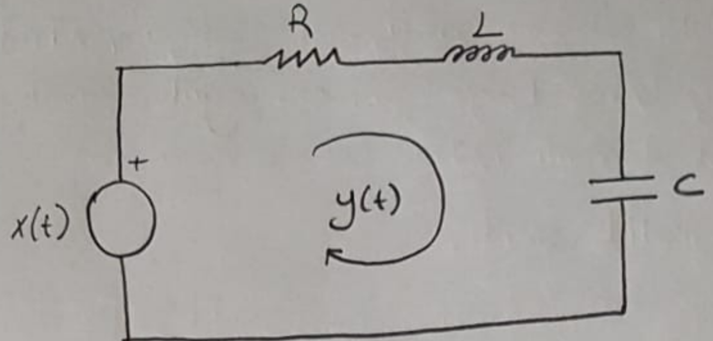
ÖR: $h[n]=\alpha^n u[n]$ nedensel midir? kararlı mıdır?

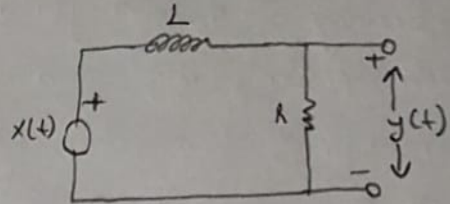
$n<0$ için $h[n]=0$ olduğundan sistem nedenseldir.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\alpha^k u[n]|=\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha|^k=\frac{1}{1-|\alpha|} \quad |\alpha|<1$$

$|\alpha|<1$ ise kararlı, $|\alpha|\geq 1$ ise kararsızdır.

ÖR:





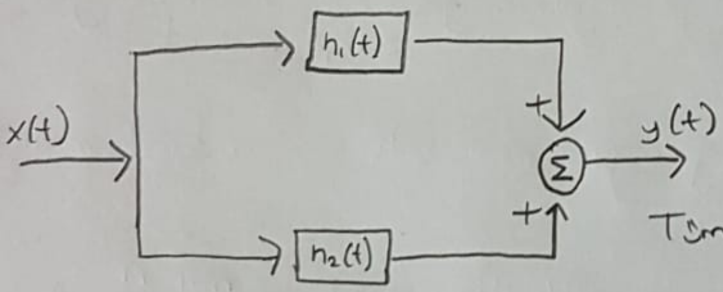
a) R'nin uçlarındaki y(t) çıkış gerilimini x(t) giriş gerilimine ilişkilendiren türevsel denklem

b) Devrenin h(t) dürtü tepkisi c) Devrenin s(t) basamak tepkisi

a) $\dfrac{dy(t)}{dt} + \dfrac{R}{L} y(t) = \dfrac{R}{L} x(t)$

b) $h(t) = \dfrac{R}{L} e^{-(R/L)t} u(t)$ c) $s(t) = \left[1 - e^{-(R/L)t}\right] u(t)$

ÖR:



$h_1(t) = e^{-2t} u(t)$

$h_2(t) = 2e^{-t} u(t)$

Tüm sistemin h(t) dürtü tep. bulunuz.

$h(t) = (e^{-2t} + 2e^{-t}) u(t)$ (Tüm sistem kararlıdır)

ÖR: Sürekli zamanlı, DZD bir sistemin s(t) basamak tepkisi

$s(t) = [\cos w_0 t] u(t)$ ise bu sistemin h(t) dürtü tepkisini hesaplayın.

$h(t) = \delta(t) - \omega_0 [\sin \omega_0 t] u(t)$

Laplace Dönüşümü ve Sürekli Zamanlı DZD Sistemler

Sürekli zamanlı sinyalleri s tanım bölgesinde (s bir karmaşık değişken) göstermek.

DZD sistemlerin analizinde yoğunlukla kullanılan bir dönüşümdür. Aşağıdaki ifade ile verilir.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$$

$s \rightarrow$ komplex bir değişken

$s = \sigma + j\omega$

$x(t) \longleftrightarrow X(s)$ laplace dönüşüm çifti

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt}_{\text{iki yönlü laplace dön.}} \qquad \underbrace{\int_{0}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt}_{\text{Tek yönlü LD}} \qquad \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x(t) \cdot e^{-st} dt}_{\text{Tek yönlü LD}}$$

Yakınsama Bölgesi

Laplace dönüşümü integrali, s'in sonlu olan bütün değerleri için yakınsamayabilir. Fakat s'in mümkün olan değerlerinin kısmi bir bölgesi için yakınsayabilir. Bu bölgeye yakınsama bölgesi adı verilir.

Yakınsama bölgesi, Laplace dönüşümünün geçerli olduğu veya dönüşüm integralinin kompleks düzlemde sonlu bir değere yakınsadığı bölgedir. ROC veya R ile gösterilir.

$$e^{\infty} = \infty \qquad e^{\infty + j\infty} = e^{\infty} \cdot e^{j\infty} = \infty$$

$$e^{-\infty} = 0 \qquad e^{-\infty + j\infty} = e^{-\infty} \cdot e^{j\infty} = 0$$

ÖR $x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ gerçel sinyali için $x(t)$'nin laplace dönüşümü

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} u(t) e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+\alpha)t} dt$$

$$= -\frac{1}{s+\alpha} e^{-(s+\alpha t)} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha} \qquad Re(s) > -\alpha$$

Yalnızca $Re(s+\alpha) > 0$ veya $Re(s) > -\alpha$ koşulu sağlanıyorsa $\lim_{t \to \infty} e^{-(s+\alpha)t} = 0$ olur.

NOT: Bir fonksiyonun laplace dönüşümünün var olabilmesi için aşağıdaki şartların mevcut olması gereklidir:

1- $x(t)$ fonksiyonu süreksizlik içeriyor ise $0 \leq t < N$ $(N \in R^+)$ şeklinde sonlu her aralıkta parçalı sürekli olmalıdır.

2- $t<0$ için $x(t)=0$, $t \geq 0$ için ise $|x(t)| \leq c.e^{kt}$ $(c, k \in R^+)$ şartını sağlayan bir c ve k değeri mevcut olmalıdır

$10.e^{2t} \leq c.e^{kt} \Rightarrow$ sonlu bir c ve k değeri bulunabilir. LD yazılabilir.

$100.e^{t^2} \leq c.e^{kt} \Rightarrow$ sonlu bir k değeri bulunamaz.

Laplace Dönüşüm Formülleri

* $\delta(t) = 1$ * $u(t) = \frac{1}{s}$ * $t.u(t) = \frac{1}{s^2}$ * $t.e^{-at}u(t) = \frac{1}{(s+a)^2}$

* $\cos w_0 t \, u(t) = \frac{s}{s^2+w_0^2}$ * $\sin w_0 t \, u(t) = \frac{w_0}{s^2+w_0^2}$ * $-u(-t) = \frac{1}{s}$

* $e^{-at}u(t) = \frac{1}{s+a}$ * $-e^{-at}u(-t) = \frac{1}{s+a}$ * $-te^{-at}u(-t) = \frac{1}{(s+a)^2}$

* $e^{-at}\cos w_0 t \, u(t) = \frac{s+a}{(s+a)^2+w_0^2}$ * $e^{-at}\sin w_0 t \, u(t) = \frac{w_0}{(s+a)^2+w_0^2}$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

1- Lineerlik (Doğrusallık)

$x_1(t) \longleftrightarrow X_1(s)$ $\quad \mathcal{L}\{x_1(t)\}$

$x_2(t) \longleftrightarrow X_2(s)$ $\quad \mathcal{L}\{x_2(t)\}$

$a_1x_1(t)+a_2x_2(t) \longleftrightarrow a_1X_1(s)+a_2X_2(s)$

$\mathcal{L}\{ax_1(t) \mp bx_2(t)\} = a.X_1(s) \mp b.X_2(s)$

ÖR: $\mathcal{L}\{2e^{-t}u(t) - 3e^{2t}u(t)\} = ?$

$\mathcal{L}\{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{s+1}$ $\quad \sigma > -1$

$\mathcal{L}\{e^{2t}u(t)\} = \frac{1}{s-2}$ $\quad \sigma > 2$

$\mathcal{L}\{2.e^{-t}u(t) - 3.e^{2t}u(t)\} = 2.\frac{1}{s+1} - 3.\frac{1}{s-2}$

$(\sigma > 2)$

$\delta(t)$ laplace dönüşümü

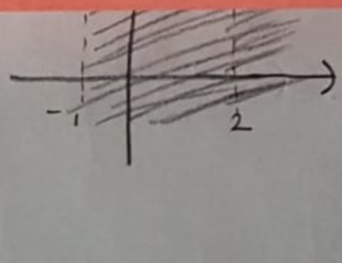
$= \{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1$

$u(t)$ laplace dönüşümü

$= \{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st}dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st}dt$

$= -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s}$

) sonra kesişiyor.



2- Zamanda Öteleme

Eğer $x(t) \longleftrightarrow X(s)$ YB=R ise $x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-st_0}X(s)$ $R'=R$

Zamanda öteleme işleminden önceki ve sonraki yakınsama bölgeleri aynı.

$f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $f(s)$ ise

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^\infty f(t-a)u(t-a)e^{-st}dt \quad a>=0$$

$u(t-a)=0 \quad t<a \qquad u(t-a)=1 \quad t>a$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt$$

Eğer $x=t-a$ olarak tanımlanırsa $dx=dt$ ve $t=x+a$ olur.

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^\infty f(x)e^{-s(x+a)}dx = e^{-as}\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$
$$= e^{-as}f(s)$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}f(s) \quad ^1$$

- $\mathcal{L}\{\cos wt\} = \dfrac{s}{s^2+w^2}$ $\qquad \mathcal{L}\{\cos w(t-a)u(t-a)\} = ?$

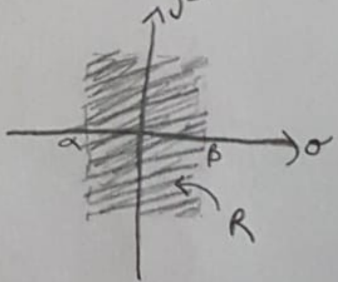
^{1} numaralı özellik kullanılıyor.

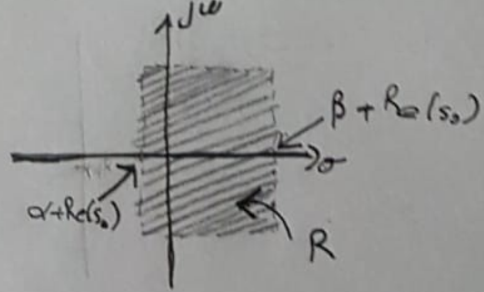
$$\mathcal{L}\{\cos w(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}\frac{s}{s^2+w^2}$$

3- s Bölgesinde öteleme

Eğer $x(t) \longleftrightarrow X(s)$ YB=R ise $e^{s_0t}x(t) \longleftrightarrow X(s-s_0)$ $R'=R+Re(s_0)$

($Re(s_0)$ kadar ötelenmiş hali)





4- Zaman Ölçekleme

Eğer $x(t) \longleftrightarrow X(s)$ YB=R ise $x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$ $R' = aR$

Zaman değişkeni t'yi a ile çarpmak, s değişkeninde $\frac{1}{a}$ kadar ters bir ölçeklemeye ve $X(s/a)$ genliğinde $\frac{1}{|a|}$ değerinde bir ölçeklemeye sebep olur

5- Zamanda Geri Dönüş

Eğer $x(t) \longleftrightarrow X(s)$ YB=R ise $x(-t) \longleftrightarrow X(-s)$ $R' = -R$

Bu nedenle, x(t)'nin zamanda geri dönüşü s düzleminde hem σ ekseni hem de $j\omega$ ekseninde zamanda geri dönüşe neden olmaktadır.

5- Zaman Bölgesinde Türev

Eğer $x(t) \longleftrightarrow X(s)$ YB=R ise $\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s)$ $R' \supset R$

Zaman bölgesinde türev almanın etkisi, Laplace dönüşümünde s ile çarpmaya eşdeğerdir.

6- s Bölgesinde Türev

Eğer $x(t) \longleftrightarrow X(s)$ YB=R ise $-tx(t) \longleftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}$ $R' = R$

7- Zaman Bölgesinde İntegral

Eğer $x(t) \longleftrightarrow X(s)$ YB=R ise $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s}X(s)$ $R' = R \cap \{Re(s) > 0\}$

Zaman bölgesinde integral almak, Laplace dönüşümünde 1/s ile çarpmaya eşdeğerdir

8 - Konvolüsyon

Eğer $x_1(t) \longleftrightarrow X_1(s)$ $x_2(t) \longleftrightarrow X_2(s)$ $YB = R_1$ $YB = R_2$ ise

$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(s) * X_2(s)$ $R' \supset R_1 \cap R_2$

Yakınsama Bölgesi Özellikleri

1- Yakınsama bölgesi herhangi bir kutbu içermez

2- $x(t)$ sınırlı süreli bir sinyal ise yakınsama bölgesi $s=0$ ve/veya $s=\infty$ haricindeki bütün s düzlemi için

3- $x(t)$ sınırsız süreli ve sağ taraflı bir sinyal ise yakınsama bölgesi $X(s)$'in kutuplarına göre şekillenir. σ_{max} $X(s)$'in kutuplarından reel kısmı maksimum olanı simgeliyor ise yakınsama bölgesi $Re(s) > \sigma_{max}$ olarak verilir.

$$x(t) = (e^{-t} + 3e^{-2t} + 5.e^{-3t} + 1)u(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{5}{s+3} + \frac{1}{s} \quad Re(s) > 0$$

$P_1 = -1 \quad P_2 = -2 \quad P_3 = -3 \quad P_4 = 0$

4) $x(t)$ sol taraflı ve sınırsız süreli bir sinyal ise ve σ_{min} $X(s)$'in kutuplarından reel kısmı minimum olanı simgeliyor ise yakınsama bölgesi $Re(s) < \sigma_{min}$ ile verilir.

$$x(t) = -e^{-t}.u(-t) - 3.e^{-2t}.u(-t)$$

$$\mathcal{L}\{-e^{at}u(-t)\} = \frac{1}{s-a} \quad \sigma < a \qquad P_1 = -1 \quad P_2 = -2$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \quad Re(s) < -2$$

5- $x(t)$ iki taraflı ve sınırsız süreli bir sinyal ise yakınsama bölgesi aşağıda verildiği gibidir.

$$\sigma_1 < Re(s) < \sigma_2$$

σ_1: İşaretin sağ taraflı kısmı için kutupların max olanı

σ_2: İşaretin sol taraflı kısmı için kutupların min olanı

ÖR: $x(t) = \underbrace{(e^{-2t}+e^{-3t}).u(t)}_{\text{Sağ taraf}} - \underbrace{(1+2.e^{-t}).u(t)}_{\text{Sol taraf}}$

$p_1=-2 \quad p_2=-3 \qquad\qquad p_1=0 \quad p_2=-1$

$$X(s) = \underbrace{\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3}}_{\sigma_1=-2} + \underbrace{\frac{1}{s} + \frac{2}{s+1}}_{\sigma_2=-1}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}.u(-t)\} = \frac{1}{s-a} \quad Re(s)<a$$

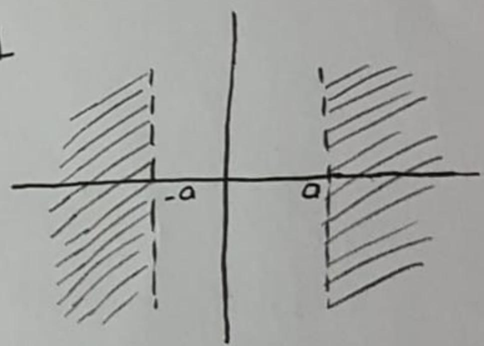
$$-2 < Re(s) < -1$$

ÖR: $x(t) = e^{at} \quad a>0 \quad X(s)=?$

$$x(t) = e^{-at}.u(-t) + e^{at}u(t) - 1$$

$$X(s) = -\frac{1}{s+a} + \frac{1}{s-a}$$

$\sigma < -a \qquad \sigma > a$



ÖR: $x(t) = u(t) + u(-t) \qquad X(s)=?$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} = 0$$

$\sigma > 0 \quad \sigma < 0$

↓

Dönüşüm yok

NOT: Bir fonksiyonun türevinin laplace dönüşümünün var olabilmesi için $x(t)$ ve $x(t)$'nin türevlerinin laplace dönüşümlerinin mevcut olması gerekir. Aynı zamanda fonksiyonun ve türevlerinin $t=0$ anındaki değerleri mevcut ve sonlu olmalıdır. Yakınsama bölgesi açısından bakılırsa türev ifadesi alınan fonksiyonun yakınsama bölgesi, türevi alınan fonksiyonun yakınsama bölgesinden büyük ya da eşittir. (Zaman fonk. göre türev)

$t=0$ için

$\mathcal{L}\{x(t)\} \rightarrow R \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} \rightarrow R' \quad R' \subset R$

(R' R'yi kapsar)

- Aşağıdaki fonksiyonların Laplace dönüşümlerini elde ediniz.

a) $x_1(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$

$\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = \frac{1}{s+2} \quad \sigma > -2$

$\mathcal{L}\{e^{-3t}u(t)\} = \frac{1}{s+3} \quad \sigma > -3$

$X_1(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} \quad \sigma > -2$

$= \frac{2s+5}{(s+2).(s+3)} \quad \sigma > -2$

b) $x_2(t) = e^{-3t}.u(t) + e^{3t}.u(-t)$

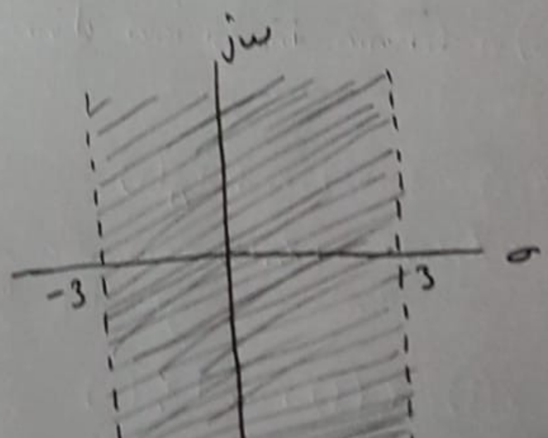
$\mathcal{L}\{e^{at}u(t)\} = \frac{1}{s-a} \quad \sigma > a$

$\mathcal{L}\{-e^{at}.u(-t)\} = \frac{1}{s-a} \quad \sigma < a$

$\mathcal{L}\{e^{-3t}.u(t)\} = \frac{1}{s+3} \quad \sigma > -3$

$\mathcal{L}\{e^{3t}.u(-t)\} = -\frac{1}{s-3} \quad \sigma < 3$

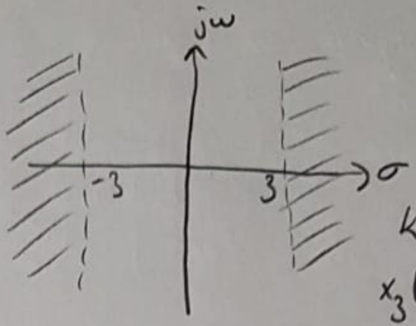
$X_2(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s-3} = \frac{-6}{s^2-9}$



c) $x_3(t) = e^{2t}u(t) + e^{-3t}u(-t)$

$\mathcal{L}\{e^{2t}u(t)\} = \frac{1}{s-2} \quad \sigma > 2$

$\mathcal{L}\{e^{-3t}u(-t)\} = -\frac{1}{s+3} \quad \sigma > -3$



Kesişim yok

$X_3(s)$ yok.

Ters Laplace Dönüşümü

Genellikle her dönüşümün bir de ters dönüşümü vardır.

Laplace dönüşümü alınmış bir ifadenin tekrardan zaman alanına geçişi için ters laplace dönüşümü kullanılır. ($X(s)$'den $x(t)$ sinyalini elde etme işlemidir)

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

Ters Alma Formülü

s karmaşık düzleminde bir çizgi integralinin hesaplanmasını içeren tüm dönüşüm fonksiyonlarına uygulanabilen bir prosedür vardır.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}\,ds$$

c gerçel sayısı öyle bir şekilde seçilmeli ki, eğer $X(s)$'nin YB'si $\sigma_1 < Re(s) < \sigma_2$ ise $\sigma_1 < c < \sigma_2$ olmalı.

Laplace Dönüşüm Çiftleri İçin Tabloların Kullanımı

$X(s)$'in tersinin alınması için ikinci yöntem olarak, $X(s)$ aşağıdaki gibi bir toplam biçiminde ifade etmeye çalışılır:

$$X(s) = X_1(s) + \dots + X_n(s)$$

Burada $X_1(s) + \dots + X_n(s)$ ters dönüşümleri $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ bilinen fonksiyonlardır. Laplace dönüşümünün doğrusallık özelliğinden

$$x(t) = x_1(t) + \dots + x_n(t)$$

ifadesi elde edilir

Kısmi Kesirler Açılımı

Eğer $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k \cdot \frac{(s-q_1)\cdots(s-q_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}$ biçiminde bir rasyonel fonksiyon ise, $X(s)$'in tersini almak için aşağıdaki gibi, kısmi kesirler açılımına dayanan basit bir teknik kullanılabilir

a) $X(s)$ uygun bir rasyonel fonksiyon ise, yani $m<n$ ise

1- Basit Kutup Durumu

Eğer $X(s)$'in tüm kutupları, yani $D(s)$'in tüm sıfırları, basit ise (yani birbirinden farklı) bu durumda $X(s)$

$$X(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{c_n}{s-p_n}$$ şeklinde ifade edilebilir.

Burada c_k kat sayıları şu biçimde tanımlanır

$$c_k = (s-p_k)X(s)\big|_{s=p_k}$$

2- Katlı Kutup Durumu

Eğer $D(s)$'in katlı kökleri varsa, yani $D(s)$ $(s-p_i)$ şeklinde ifadeler içeriyorsa p_i'ye $X(s)$'in r katlı kutbu adı verilir. Bu durumda $X(s)$'in açılımı

$$\frac{\lambda_1}{s-p_i} + \frac{\lambda_2}{(s-p_i)^2} + \cdots + \frac{\lambda_r}{(s-p_i)^r}$$ şeklinde ifadeler içerecektir ve

$$\lambda_{r-k} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\left[(s-p_i)^r X(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$ olacaktır.

b) $X(s)$ uygun olmayan bir rasyonel fonksiyon, yani $m \geq n$ ise

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)}$$

$N(s)$ ve $D(s)$ → s'ye bağlı pay ve payda polinomları

$Q(s)$ → s'ye bağlı $(m-n)$ derecesinden bir polinom

$R(s)$ → derecesi n'den küçük, s'ye bağlı bir polinom.

$X(s)$'in ters laplace dönüşümü, $Q(s)$ ve $R(s)/D(s)$'nin ters laplace dönüşümleri belirlenerek bulunur. $R(s)/D(s)$ uygun olduğu için ters laplace dönüşümü önce kısmi kesirler açılımı yapılarak bulunur. $Q(s)$'in ters laplace dönüşümü ise dönüşüm çifti kullanılarak hesaplanabilir.

$$\frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \longleftrightarrow s^k \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

Sistem Fonksiyonu

A: Sistem Fonksiyonu

dürtü tepkisi

Sürekli zamanlı DZD bir sistemin konvolüsyonu: $y(t) = x(t) * h(t)$

Konvolüsyon özelliği kullanılarak: $Y(s) = X(s)H(s)$

$Y(s)$, $X(s)$ ve $H(s)$ sırasıyla $y(t)$, $x(t)$ ve $h(t)$'nin laplace dönüşümleridir.

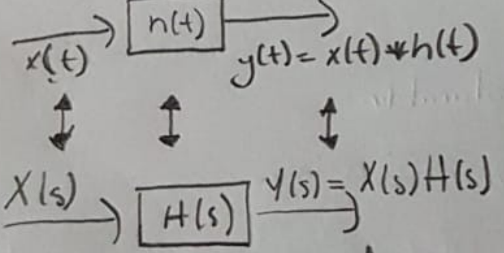
★$h(t)$'nin laplace dönüşümü $H(s)$'ye sistem fonksiyonu (veya transfer fonksiyonu) adı verilir. Bütün başlangıç koşulları sıfır olmalı

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$\Rightarrow$ yani $H(s)$ aynı zamanda çıkış $y(t)$ ile giriş $x(t)$'nin laplace dönüşümlerinin oranı olarak da tanımlanabilir.

B: DZD Sistemlerin Karakterize Edilmesi

Sürekli zamanlı DZD sistemlerin bir çok özelliği s düzleminde $H(s)$'nin karakteristiği ile, ve özellikle kutup yerleri ve YB ile ilişkilendirilebilir.



Dürtü tepkisi ve sistem fonksiyonu

Transfer fonksiyonu veya diğer adıyla sistem fonksiyonu, DZD bir sistem için geçerli olan bir tanımlamadır. Bütün başlangıç koşullarının sıfır olduğu durumda çıkışın laplace dönüşümünün girişin laplace dönüşümüne olan oranıdır. $H(s)$ veya $T(s)$ ile gösterilir.

ÖR: $x(t) \longrightarrow \boxed{\text{DTD Sistem}} \longrightarrow y(t)$ $x(t)=u(t)$ girişi için $y(t)=(e^{-t}-2e^{-4t}).u(t)$

çıkışı elde edilmiştir. Buna göre

a) Sistemin transfer fonksiyonunu bulunuz.

b) Birim dürtü tepkisini (birim impuls cevabı) bulunuz.

c) $e^{-t}u(t)$ girişi için sistemin çıkışını bulunuz.

a) $H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}$ $Y(s)=\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{2}{s+4}=\dfrac{s+4-2s-2}{(s+1)(s+4)}$

$Y(s)=-\dfrac{s+1}{s^2+5s+4}$ $X(s)=\dfrac{1}{s}$ $H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\boxed{-\dfrac{s^2+2}{s^2+5s+4}}$

b) $h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$

$$\begin{array}{r|l} -s^2+2 & s^2+5s+4 \\ \cline{2-2} -s^2-5s-4 & -1 \\ \hline 7s+4 & \end{array}$$

$H(s)=-1+\dfrac{7s+4}{(s+1).(s+4)}=-1+\dfrac{c_1}{s+1}+\dfrac{c_2}{s+4}$ $c_1=-1$, $c_2=8$

$$\boxed{h(t)=-\delta(t)+(8.e^{-4t}-e^{-t}).u(t)}$$

c) $X(s)=\dfrac{1}{s+1}$ $Y(s)=H(s).X(s)=\dfrac{-s^2+2s}{(s+1)^2.(s+4)}=\dfrac{c_1}{(s+1)^2}+\dfrac{c_2}{s+1}+\dfrac{c_3}{s+4}$

$c_1=\dfrac{-1-2}{3}=-1$ $c_2=\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{-s^2+2s}{s+4}\right)_{s=-1}=\left(\dfrac{(-2s+2).(s+4)+s^2-2s}{(s+4)^2}\right)_{s=-1}$

$c_2=\dfrac{15}{9}=\dfrac{5}{3}$ $c_3=\dfrac{-16-8}{9}=\dfrac{-24}{9}=-\dfrac{8}{3}$

$$\boxed{c_k=\frac{1}{(k-1)!}}$$

$$y(t)=\left(-1.t.e^{-t}+\frac{5}{3}.e^{-t}-\frac{8}{3}.e^{-4t}\right).u(t)$$

$$=\left[\left(\frac{5}{3}-t\right).e^{-t}-\left(\frac{8}{3}.e^{-4t}\right)\right].u(t)$$

1) Nedensellik

- Nedensel sürekli zamanlı DAD bir sistem için $t<0$ ise $h(t)=0$ dır. $h(t)$ sağ yanlı bir sinyal olduğundan $H(s)$'ye ait YB aşağıdaki gibi olmalıdır.

$Re(s) > \sigma_{max}$ Yani, YB s düzleminde sistemin tüm kutuplarının sağındaki bölgedir.

- Sistem nedensel değilse $[t>0 \quad h(t)=0]$ $h(t)$ sol yanlıdır.

$Re(s) < \sigma_{max}$ Yani YB s düzleminde sistemin tüm kutuplarının solundaki bölgededir.

2) Kararlılık Sınırlı Giriş Sınırlı Çıkış

Eğer $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ ise sürekli zamanlı DAD bir sistemin kararlı olduğu söylenebilir.

$H(s)$ de buna karşılık gelen durum ise, $H(s)$'in YB'sinin $j\omega$ eksenini (yani $s=j\omega$) içermesidir.

★ Bir sürekli zamanlı DAD sistem yalnızca sistemin dürtü tepkisi $h(t)$ kesinlikle türeve sahipse kararlıdır.

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt \qquad s=j\omega \text{ olsun. O zaman:}$$

$$|H(j\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t) e^{-j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

3) Nedensel ve Kararlı Sistemler

Eğer sistem hem nedensel hem de kararlıysa, $H(s)$'in tüm kutupları s düzleminin sol yarısında olmalıdır. Yani hepsinin gerçel kısımları negatif olmalıdır. Bunun nedeni, YB'nin $Re(s) > \sigma_{max}$ şeklinde olmasıdır ve $j\omega$ ekseni YB'yi içerdiğinden $\sigma_{max} < 0$ olmalıdır.

Doğrusal Sabit Katsayılı Türevsel Denklemlerle Tanımlanabilen DAD Sistemler için Sistem Fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s)$$ ya da

$$Y(s)\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = X(s)\sum_{k=0}^{M} b_k s^k$$ bu nedenle

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$ Dolayısıyla $H(s)$ daima rasyoneldir.

Sistemlerin Ara Bağıntıları

zaman bölgesi

$$x(t) \rightarrow \boxed{h_1(t)} \rightarrow \boxed{h_2(t)} \xrightarrow{y(t)} \quad \Rightarrow \quad x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)}$$

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

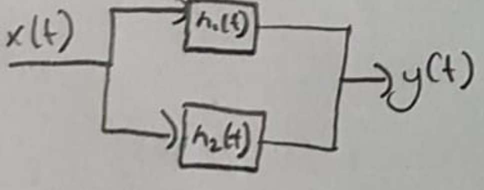
Bu bağıntının sistem fonksiyonu, sistem fonk.larının çarpımına eşittir

$$X(s) \rightarrow \boxed{H_1(s)} \rightarrow \boxed{H_2(s)} \xrightarrow{Y(s)} \quad \Rightarrow \quad X(s) \rightarrow \boxed{H(s)} \xrightarrow{Y(s)}$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)$$

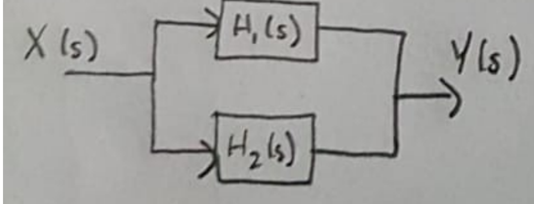
s bölgesi

iki DAD sistemin paralel kombinasyonlarına ait dürtü tepkisi



$$\Rightarrow \quad x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)}$$ zaman bölgesi

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$



$$\Rightarrow \quad X(s) \rightarrow \boxed{H(s)} \xrightarrow{Y(s)}$$ s bölgesi

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

TEK YANLI LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Bir $x(t)$ sinyaline ait tek yanlı Laplace dönüşümü $X_I(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$ 1

Bu integralin alt limitinin 0^- seçilmesinin nedeni $x(t)$'nin $\delta(t)$ ve türevlerini içermesine izin vermektir. Bu nedenle 0^- dan 0^+ ya integral, orijinde bir dürtü fonksiyonu veya türevleri olması durumu dışında sıfırdır.

Tek yanlı laplace dönüşümünde $x(t)$, $t<0$ için dikkate alınmaz. 1 numaralı eşitlikteki $x(t)$ sağ yanlı bir sinyal olduğundan $X_I(s)$'in YB'si daima $Re(s) > \delta_{max}$ şeklindedir. Yani s düzleminde sağ yarı düzlemdir.

Temel Özellikler

Tek yanlı laplace dönüşümü özellikle doğrusal, sabit katsayılı, sıfırdan farklı başlangıç koşullu bir türevsel denklem takımı ile tanımlanan nedensel bir sistemin, nedensel bir girişe verdiği tepkiyi hesaplamak için kullanışlıdır.

Tek yanlı laplace dönüşümüne ait birçok özellik çift yanlı Laplace dönüşümü ile aynıdır. Farklı olanlar;

1- Zaman Bölgesinde Türev

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX_I(s) - x(0^-) \quad \text{Koşul: } \lim_{t\to\infty} x(t)e^{-st} = 0 \text{ olmalıdır.}$$

Bu özelliğin art arda uygulanmasıyla $\frac{d^2x(t)}{dt^2} \longleftrightarrow s^2X_I(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^nX_I(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x'(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-) \text{ elde edilir.}$$

Burada $x^r(0^-) = \left.\frac{d^rx(t)}{dt^r}\right|_{t=0^-}$

2- Zaman Bölgesinde İntegral

$$\int_0^t x(z)dz \longleftrightarrow \frac{1}{s} X_I(s) \qquad \int_{-\infty}^{t} x(z)dz \longleftrightarrow \frac{1}{s} X_I(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(z)dz$$

Sistem Fonksiyonu

Tek yanlı laplace dönüşümü ile sistem fonksiyonu $(H(s) = Y(s)/X(s))$, başlangıç koşulları sıfır olan DZD bir sistem için tanımlanmaktadır.

Dönüşüm Devreleri

Elektrik devrelerinin analizi, devrenin işlem ve sinyallerinin Laplace dönüşüm bağıntıları ile gösterilmesi durumunda, entegro-türevsel denklem yazılmadan yapılabilir. Laplace eşitliklerinden elde edilen devreye dönüşüm devresi adı verilir. Bu tekniği kullanmak için, devrelerdeki her eleman için Laplace dönüşüm modelini kullanmak gereklidir.

Bu alt bölümde Laplace dönüşüm, tek yönlü laplace dönüşümü anlamına gelmektedir ve alt indis kullanılmayacaktır.

1-) Sinyal Kaynakları

$v(t) \leftrightarrow V(s)$ [gerilim kaynağı] $\quad i(t) \leftrightarrow I(s)$ [akım kaynağı]

2-) Direnç R:

$$v(t) = Ri(t) \leftrightarrow V(s) = RI(s)$$

3-) İndüktans L:

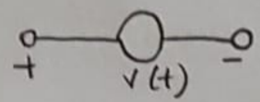
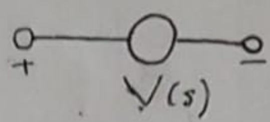
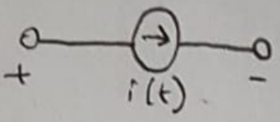
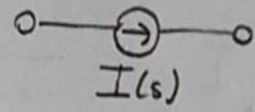
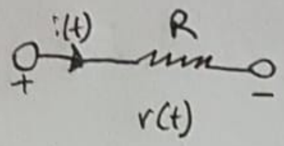
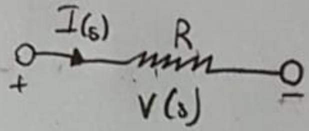
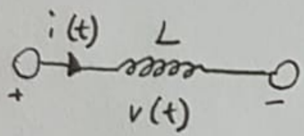
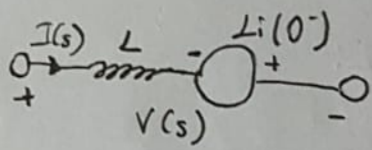
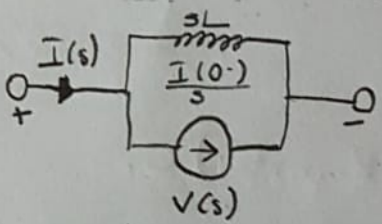
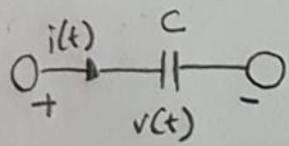
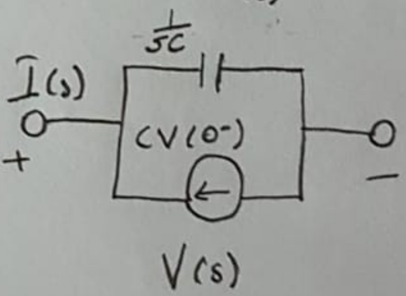
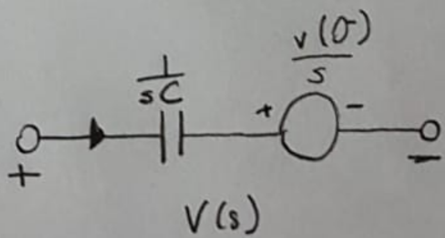
$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \leftrightarrow V(s) = sLI(s) - Li(0^-)$$

$$i(t) \leftrightarrow I(s) = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{1}{s}i(0^-)$$

4-) Kondansatör (Kapasitör) C:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \leftrightarrow I(s) = sCV(s) = Cv(0^-)$$

$$v(t) \leftrightarrow V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{1}{s}v(0^-)$$

Devre Elemanı	Gösterim	
	t-Bölgesi	s-Bölgesi
Gerilim Kaynağı		
Akım Kaynağı		
Direnç		
İndüktans		
Kondansatör		

Devre elemanlarının Laplace dönüşüm modellerinin gösterimi

ÖR: $x(t) = -e^{-at}u(-t)$
$x(t) = e^{at}u(-t)$ > Laplace dönüşümlerini bulun.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(-t)e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0^-} e^{-(s+a)t}dt$$

$$= \frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{-\infty}^{0^-} = \frac{1}{s+a} \quad Re(s) < -a$$ dolayısıyla

$$-e^{-at}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad Re(s) < -a$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}u(-t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0^-} e^{-(s-a)t}dt$$

$$= -\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_{-\infty}^{0^-} = -\frac{1}{s-a} \quad Re(s) < a$$

$$e^{at}u(-t) \longleftrightarrow -\frac{1}{s-a} \quad Re(s) < a$$

ÖR: $x(t) = \begin{cases} e^{-at} & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$ $x(t)$'nin Laplace dönüşümünü bulun.

$$X(s) = \int_0^T e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^T e^{-(s+a)t}dt$$

$$= -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^T = \frac{1}{s+a}\left[1 - e^{-(s+a)T}\right]$$

$x(t)$ sonlu süreli bir sinyal olduğundan $X(s)$'in YB'si tüm s düzlemidir.

$s = a$ alınırsa:

$$X(-a) = \int_0^T e^{-(a-a)t}dt = \int_0^T dt = T$$

ÖR: Aşağıdaki gibi tanımlanan $x(t)$'nin Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Çözüm:

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st}\, dt = \int_0^T e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^T = \frac{1}{s+a}\left[1 - e^{-(s+a)T}\right] \quad 1$$

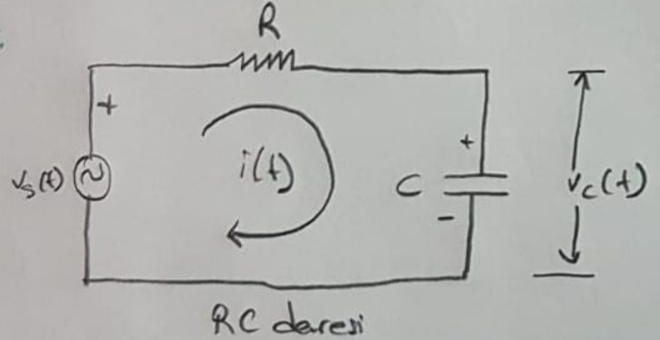
$x(t)$ sonlu süreli bir sinyal olduğundan $X(s)$'in YB'si tüm s düzlemidir.

$s = a$ yazılırsa

$$X(-a) = \int_0^T e^{-(0+a)t}\, dt = \int_0^T dt = T \quad \text{elde edilir.}$$

(1 numaralı eşitliğe L'hospital kuralı uygulanarak da elde edilebilir.)

ÖR:



RC devresi

Sistem fonksiyonu $H(s)$ ve dürtü tepkisi $h(t)$'yi bulunuz.

$x(t) = v_s(t)$ $\quad y(t) = V_c(t)$ olsun.

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} x(t)$$ Laplace dönüşümü alınırsa

$$sY(s) + \frac{1}{RC} Y(s) = \frac{1}{RC} X(s)$$ veya

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right) Y(s) = \frac{1}{RC} X(s) \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

$$= \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s + 1/RC}$$

Sistem nedensel oldğundan $H(s)$'nin ters Laplace dönüşümü alınarak dürtü tepkisi $h(t)$ elde edilir.

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

veya $x(t)=v_s(t)$ $y(t)=i(t)$ olsun. Bu durumda RC devresi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{R}\frac{dx(t)}{dt}$$ Laplace dönüşümü alınırsa

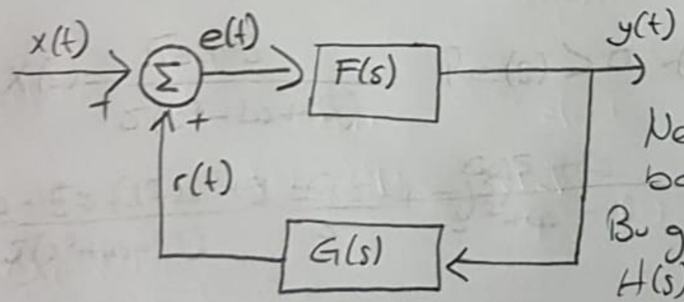
$$sY(s) + \frac{1}{RC}Y(s) = \frac{1}{R} sX(s) \text{ veya } \left(s+\frac{1}{RC}\right)Y(s) = \frac{1}{R}sX(s)$$

$$H(s)= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s/R}{s+1/RC} = \frac{1}{R}\,\frac{s}{s+1/RC}$$

$$= \frac{1}{R}\,\frac{s+1/RC-1/RC}{s+1/RC} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2C}\,\frac{1}{s+1/RC}$$ nedensel old. $H(s)$'nin ters Laplace dönüşümü alınır.

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C} e^{-t/RC} u(t)$$

ÖR:



$F(s)$ ve $G(s)$ sistem fonksiyon- Nedensel iki sistemin geribeslemeli bağlantısı. Bu geribeslemeli sistemin sistem fonk. $H(s)$'yi bulunuz.

$x(t) \longleftrightarrow X(s)$ $y(t) \longleftrightarrow Y(s)$ $r(t) \longleftrightarrow R(s)$ $e(t) \longleftrightarrow E(s)$ olsun.

$Y(s)=E(s)F(s)$ $R(s)=Y(s)G(s)$ o zaman $e(t)=x(t)+r(t)$ olduğundan

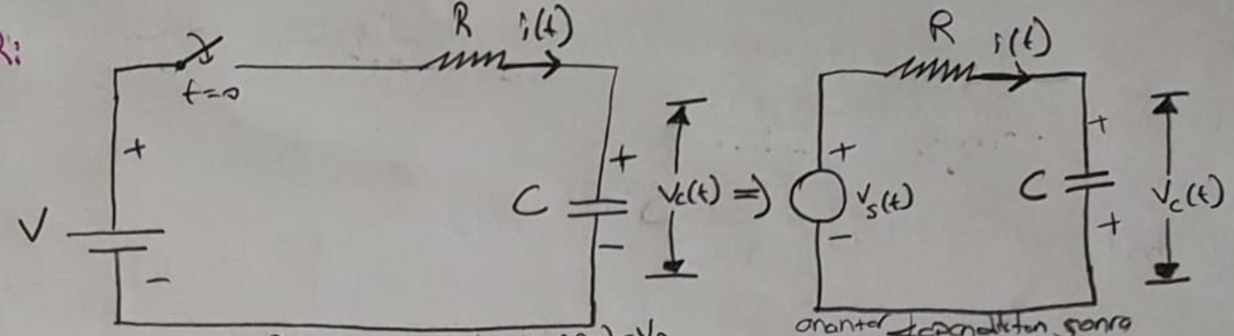
$E(s)=X(s)+R(s)$

$$Y(s)=[X(s)+Y(s)G(s)]F(s) \quad \text{veya}$$

$$[1-F(s)G(s)]Y(s) = F(s)X(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{F(s)}{1-F(s)G(s)}$$

ÖR:



RC devresi $\quad v_c(0^-)=V_0$ $\quad$ anahtar kapandıktan sonra

Anahtar $t=0$'da kapanıyor. Kondansatörde bir başlangıç geriliminin olduğunu ve $V_c(0^-)=V_0$ olduğunu kabul edelim.

a) $i(t)$ akımını bulunuz. $\quad$ b) Kondansatör uçlarındaki $V_c(t)$ gerilimini bulunuz.

$\Rightarrow$ a) $v_s(t)=Vu(t)$ $\quad$ $i(t)\rightarrow$ çıkış $\quad v_s(t)\rightarrow$ giriş iken;

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(z)\,dz = v_s(t)$$

Tek. Lap. zaman böl. integral formülü $\rightarrow \int_{-\infty}^{t} x(z)\,dz \leftrightarrow \frac{1}{s}X_I(s)+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(z)\,dz$

$$RI(s)+\frac{1}{C}\left[\frac{1}{s}I(s)+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} i(z)\,dz\right]=\frac{V}{s}$$

$I(s)=\mathcal{L}_I\{i(t)\}$ $\quad v_c(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(z)\,dz$

$v_c(0^-)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^-} i(z)\,dz = V_0$ $\quad$ olduğundan

$$\left(R+\frac{1}{Cs}\right)I(s)+\frac{V_0}{s}=\frac{V}{s} \qquad I(s)=\frac{V-V_0}{s}\,\frac{1}{R+1/Cs}=\frac{V-V_0}{R}\,\frac{1}{s+1/RC}$$

$I(s)$'nin ters Laplace'ı alınarak $i(t)=\frac{V-V_0}{R}e^{-t/RC}u(t)$

b) $v_c(t)\rightarrow$ çıkış $\quad v_s(t)\rightarrow$ giriş $\quad$ Tek. Lap. zaman böl. türev $\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt}\leftrightarrow sX_I(s)-x(0^-)$

$$\frac{dv_c(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v_c(t)=\frac{1}{RC}v_s(t)$$

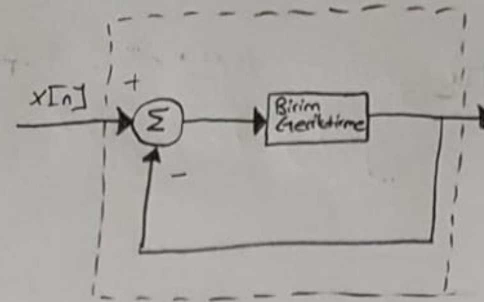
$$sV_c(s)-v_c(0^-)+\frac{1}{RC}V_c(s)=\frac{1}{RC}\frac{V}{s} \quad \text{veya} \quad \left(s+\frac{1}{RC}\right)V_c(s)=\frac{1}{RC}\frac{V}{s}+V_0$$

$$V_c(s)=\frac{V}{RC}\,\frac{1}{s(s+1/RC)}+\frac{V_0}{s+1/RC}=V\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1/RC}\right)+\frac{V_0}{s+1/RC}$$ ters Laplace dönüşümü yapılarak

$v_c(t)=V\left[1-e^{-t/RC}\right]u(t)+V_0e^{-t/RC}u(t)$ $\quad v_c(0^+)=V_0=V_c(0^-)$ olduğundan

$$v_c(t)=V\left(1-e^{-t/RC}\right)+V_0e^{-t/RC} \qquad t\geq 0$$

ÖR: Geri beslemeli sistemin giriş-çıkış ilişkisini elde ediniz



Birim geciktirme elemanına giriş $x[n]-y[n]$

Giriş-çıkış ilişkisi formülü $\xrightarrow{x[n]} \boxed{BG} \rightarrow y[n]=x[n-1]$

$y[n]=T\{x[n]\}=x[n-1]$ NOT

$y[n]=x[n-1]-y[n-1] \Rightarrow y[n]+y[n-1]=x[n-1]$

NOT: Sistemin giriş çıkış ilişkisi, birinci mertebeden sabit katsayılı türevsel bir denklemle tanımlanır.

ÖR: $y[n]=T\{x[n]\}=nx[n]$ Sisteminin;

a) Belleksiz b) Nedensel c) Doğrusal d) Zamanla Değişmez e) Kararlı

olup olmadığını belirleyiniz.

a) Çıkışın n'deki değeri yalnızca girişin n'deki değerine bağlı olduğundan sistem belleksizdir.

b) Çıkış, girişin gelecekteki değerine bağlı olmadığından sistem nedenseldir.

c) $x[n]=\alpha_1 x_1[n]+\alpha_2 x_2[n]$ olsun. Dolayısıyla;

$y[n]=T\{x[n]\}=n\{\alpha_1 x_1[n]+\alpha_2 x_2[n]\}$

$=\alpha_1 n x_1[n]+\alpha_2 n x_2[n]=\alpha_1 y_1[n]+\alpha_2 y_2[n]$

Süperpozisyon özelliği $\Rightarrow T\{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2\}=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2$

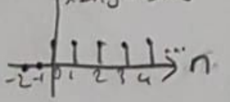
Süperpozisyon özelliği sağlandığından sistem doğrusaldır.

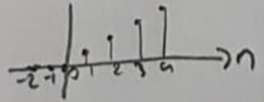
d) $y_1[n]$, $x_1[n]=x[n-n_0]$ girişine karşı düşen tepki olsun. Bu durumda

$y_1[n]=T\{x[n-n_0]\}=nx[n-n_0]$ olur. Fakat

$y[n-n_0]=(n-n_0)x[n-n_0]\neq y_1[n]$ olduğundan sistem zamanla değişmez değildir.

e) $x[n]=u[n]$ olsun. Bu durumda $y[n]=n.u[n]$ olur.



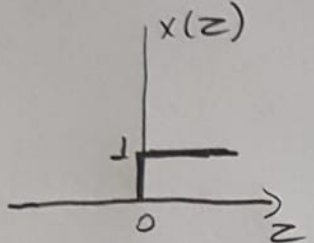


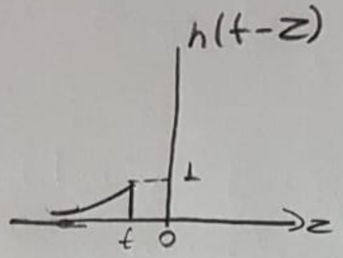
Sınırlı bir basamak dizisi sınırsız olarak büyüyen bir çıkış dizisine yol açmaktadır. Sistem SGSÇ anlamında kararlı değildir.

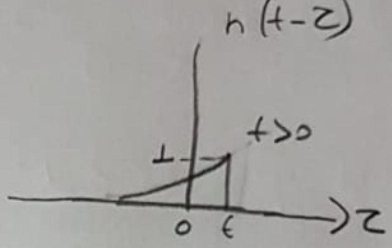
ÖR: Sürekli zamanlı DZD bir sistemin $x(t)$ girişi ve $h(t)$ dürtü tepkisi

$x(t) = u(t) \quad h(t) = e^{-\alpha t} u(t), \quad \alpha > 0$ $\quad$ $y(t)$'yi hesaplayınız?

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(z)\, h(t-z)\, dz$$







$t<0$ için $x(z)$ ve $h(t-z)$ fonk.ları örtüşmez. $t>0$ için ise $z=0$ ve $z=t$ aralığında örtüşür. Bu nedenle $t<0$ için $y(t)=0$ olup $t>0$ için $y(t)$;

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-z)} dz = e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha z} dz$$

$$= e^{-\alpha t} \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$$

$$y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})\, u(t)$$