NUH ALTINKAYNAK

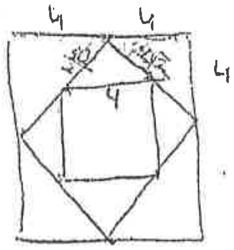
MATEMATİK - II

SINAV SORULARI

Müh. Fak.	MAT 162 Matematik II	Ara Sınav	22.03.2017	Süre 75 dakikadır
Öğrenci No:		Adı ve Soyadı:	İmza:	İlk 30 dakika sınavdan çıkmak yasaktır.

S-1) (20p) 8 m uzunluğundaki bir karenin her defasında kenarlarının orta noktaları birleştirilerek sonsuz çoklukta iç içe kareler elde ediliyor. Bu şekilde tüm karelerin çevrelerin uzunluklarının toplamı ne olur.

Çözüm:



$2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$$Ç = 4\left[8 + \frac{8}{2}\sqrt{2} + \frac{8\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \dots\right]$$

$$= 4\left[8 + \frac{8}{2}\sqrt{2} + \frac{8\sqrt{2}\sqrt{2}}{2\cdot 2} + \dots\right]$$

$$= 4\left[8 + \frac{8}{2}\sqrt{2} + \frac{8}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \dots\right]$$

$$= 4 \cdot 8\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} + \dots\right]$$

$$= 4 \cdot 8 \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= 4 \cdot 8 \cdot \frac{2}{2-\sqrt{2}} = \frac{64}{2-\sqrt{2}}$$

$1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

S-2) (20p) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = ?$

Çözüm:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{-y^2} = -1$$

limitler farklı olduğundan limit yoktur.

Kutupsal koordinatlarda çözülebilir.

$x = a + \cos\theta$
$y = a + r\sin\theta$

$x = a + r\cos\theta$
$y = b + r\sin\theta$

$x = (r\cos\theta)^2$
$y = r\sin\theta$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)} = \frac{1}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

θ değiştikçe limit değişir limit yoktur.

S-3) (20p) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n!}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm:

$a_n = \frac{3}{n!}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{(n+1)!}}{\frac{3}{n!}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$

$= 0 < 1$ olduğundan

Oran testinden verilen seri yakınsaktır.

a_{n+1}

$\frac{3}{n!} + 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$

S.4) (15p) 3 cm yarıçaplı daire şeklindeki bir levhanın yoğunluğu her noktada o noktanın dairenin merkezine olan uzaklığı ile orantılı olarak değişmektedir. Dairenin sınırı üzerinde yoğunluk 3 olduğuna göre bu levhanın kütlesini hesaplayınız.

Bir (x,y) noktasının dairenin merkezine olan uzaklığı $\sqrt{x^2+y^2}$ dir. $\Rightarrow$ yoğunluk $\sigma(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$ olup $x^2+y^2=9$ için $\sigma = 3$ old. $k=1$ olur. $\Rightarrow$

$M = \iint_B \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$ kutupsal koordinatlarda

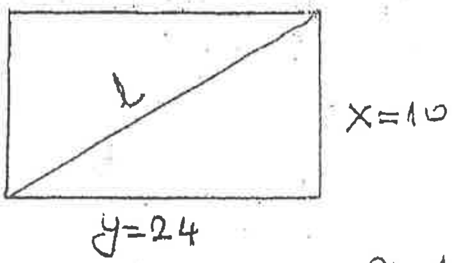
$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ için

$M = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=3} r \cdot r \, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\Big|_0^3 d\varphi$

$= 18\pi$ olur.

a_1, a_2, a_3

S.5. (20p) Bir dikdörkenin bir kenarı x=10 diğeri y=24 cm dir. Kısa kenar 4 mm artırılır uzun kenar 1 mm kısaltılırsa köşegeni yaklaşık olarak ne kadar değişir. (diferensiyel kullanılacak)



$x=10 \quad dx=0{,}4$

$y=24 \quad dy=-0{,}1$

$l=\sqrt{x^2+y^2}$

$dl \cong l_x\,dx + l_y\,dy$

$\cong \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \dfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

$\cong \dfrac{20}{\sqrt{100+576}}(0{,}4) + \dfrac{48}{\sqrt{100+576}}\cdot(-0{,}1)$

$\cong \dfrac{8}{26} - \dfrac{4{,}8}{26} \cong \dfrac{3{,}2}{26} \cong 0{,}12$

S.6) (15 p) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)}$ serisinin toplamını bulunuz.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$= 1 - \cancel{\dfrac{1}{2}} + \cancel{\dfrac{1}{2}} - \cancel{\dfrac{1}{3}} + \cdots + \cancel{\dfrac{1}{n}} - \dfrac{1}{n+1}$

$= 1 - \dfrac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$

olup

$\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1$ dir.

$\dfrac{1}{2{,}(3x+2)}$

$6x+4$

$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\frac{3x+2}{1}}$

$3x+2 \qquad 2$

Tek. Fak. 2016-2017 Bahar	MAT 162Matematik II Ara Sınavı	Şube:	
Öğrenci No:		Adı ve Soyadı:	

S-1) (15p) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$ serisinin karakterini inceleyiniz. (Oran Testi kulanılacaktır)

Çözüm

$$\ell = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^3}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k^3}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k}\right)^3 = \frac{1}{2}\cdot 1^3 = \frac{1}{2} < 1$$

olduğundan Oran Testine göre yakınsaktır.

$$\frac{(k+1)^3}{\cancel{2^k}\cdot 2} \cdot \frac{\cancel{2^k}}{k^3} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k}\right)^3 \quad \frac{1}{2}\cdot 1^3 = \frac{1}{2} < 1$$

S-2) (15p) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$ limitini kutupsal koordinatlardan faydalanarak hesaplayınız.

Çözüm: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ dönüşümü yapılırsa

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\sin\theta)^3}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\sin^3\theta}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} r\sin^3\theta = 0$$ olduğundan limit mevcuttur ve "0" dır.

:017	Süre 60 dakikadır	Gözetmen Parafı	1	2	3	Toplam
	İlk 30 dakika sınavdan çıkmak yasaktır.		4	5	6	

S-3) (20p) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k.5^k}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm: $a_k = \frac{1}{k5^k}$ olup

$$L = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k5^k}{(k+1)5^{k+1}} = \frac{1}{5} \text{ dir}$$

$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$ yakınsaklık yarıçapıdır.

Seri $|x|<5$ için yakınsaktır. $-5<x<5$ dir.

• $x=-5$ için yakınsaklık incelenirse,

$\sum \frac{(-1)^k 5^k}{k.5^k} = \sum \frac{(-1)^k}{k}$ Leibnitz testine göre yakınsak

• $x=5$ için yakınsaklık durumu incelenirse,

$\sum \frac{5^k}{k5^k} = \sum \frac{1}{k}$ harmonik serisi ıraksaktır.

Dolayısıyla Yakınsaklık yarıçapı: $R=5$ dir.

Yakınsaklık aralığı: $[-5,5)$ dir

S-4)(15p) **F**(t)= t**i**+t^2**j**+t^3**k** ve **G**(t)=2t**i**-**j**+t^3**k** vektör değerli fonksiyonları için (**F**(t)X**G**(t))' türevini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\vec{F}(t) = (t, t^2, t^3)$$

$$\vec{G}(t) = (2t, -1, t^3)$$

$$\vec{F}(t) \times \vec{G}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & t^2 & t^3 \\ 2t & -1 & t^3 \end{vmatrix}$$

$$= (t^5 + t^3)\vec{i} + t^4\vec{j} + (-2t^3 - t)\vec{k}$$

$$(\vec{F}(t) \times \vec{G}(t))' = (5t^4 + 3t^2)i + 4t^3\vec{j} + (-6t^2 - 1)\vec{k}$$

Pasix gidemayiz

Amca

S-5) (15p) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ Genelleştirilmiş integralinin çeşidini belirleyerek yakınsaklık durumunu inceleyiniz.,

Çözüm:

İkinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2\sqrt{x-1}\,\Big|_{1+\varepsilon}^{2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon})$$

$$= 2$$

elde edilir. Dolayısıyla integral yakınsak olup değeri 2 dir.

S-6) (20p) $z = \arctan\frac{x}{y}$, $x = u\cos v$, $y = u\sin v$ ise

$\frac{\partial z}{\partial u}$ ve $\frac{\partial z}{\partial v}$ türevlerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= \frac{y}{x^2+y^2}\cos v - \frac{x}{x^2+y^2}\sin v$$

$$= \frac{u\sin v\cos v}{u^2} - \frac{u\cos v\sin v}{u^2} = 0$$

$$\boxed{z_u = 0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= \frac{y}{x^2+y^2}(-u\sin v) - \frac{x}{x^2+y^2}(u\cos v)$$

$$= \frac{-u^2\sin^2 v}{u^2} - \frac{u^2\cos^2 v}{u^2}$$

$$= -(\sin^2 v + \cos^2 v) = -1$$

$$\boxed{z_v = -1}$$

$\frac{dz}{du}$

$\frac{dz}{du} = \cancel{\frac{dz}{dx}}$

$+ \cancel{\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d}{du}}$

Müh. Fak.	MAT 162 Matematik II	Genel Sınav	10.05.2017
Öğrenci No:	Adı ve Soyadı:	Bölümü:	İmza:

S.1. $x^2+y^2+z^2=1$ küresi üzerindeki (x,y,z) noktaları için $x+z$ ifadesinin en büyük değerini hesaplayınız. **(Türev Kullanılacak) (20 P)**

$$f(x,y,z) = x+z = x+\sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow$$

$$f_x = 1+\frac{1}{2}\cdot(-2x)\cdot(1-x^2-y^2)^{-1/2} = 1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0$$

$$f_y = \frac{1}{2}\cdot(-2y)\cdot(1-x^2-y^2)^{-1/2} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0 \Rightarrow y=0$$

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = x \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = x \Rightarrow 1-x^2 = x^2 \Rightarrow$$

$$2x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

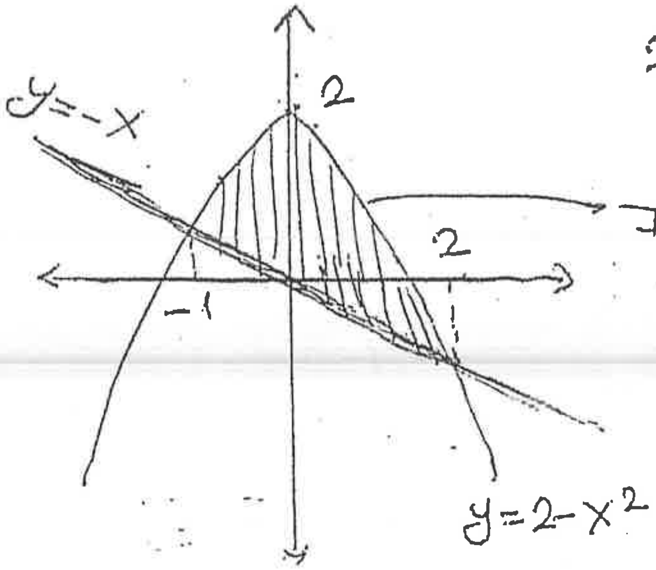
Fonksiyonun en büyük değeri istendiğinden

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ve $y=0$ alınmalı $\Rightarrow z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{2}-0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$x+z = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$ olur.

S.2 $y=2-x^2$ eğrisi ile $y=-x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını iki katlı integral yardımıyla hesaplayınız. **(20 P)**



Düşey basit bölge

$$2-x^2=-x \Rightarrow x^2-x-2=0.$$

$$x=2,\quad x=-1$$

$$A=\iint_B dx\,dy=\int_{x=-1}^{x=2}\int_{y=-x}^{y=2-x^2} dy\,dx=\int_{-1}^{2}(2-x^2+x)\,dx$$

$$=2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}=4-\frac{8}{3}+2-\left(-2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=6-\frac{8}{3}+2-\frac{5}{6}=8-\frac{21}{6}=\frac{9}{2}\ \text{br}^2$$

S.3 $\lim\limits_{t\to\pi}(\tan t\vec{i}+3t^2\vec{j}-7\vec{k})=?$ **(15 P)**

$$= \lim_{t\to\pi} \tan t\,\vec{i} + \lim_{t\to\pi} 3t^2\vec{j} - \lim_{t\to\pi} 7\vec{k}$$

$$= \tan\pi\,\vec{i} + \lim_{t\to\pi} 3t^2\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$= 0\vec{i} + 3\pi^2\vec{j} - 7\vec{k} = 3\pi^2\vec{j} - 7\vec{k}$$

S.4. $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ fonksiyonunun x- ekseni ile $\frac{\pi}{4}$ derecelik açı yapan doğru-yönündeki türevinin (2,-2) noktasındaki değerini hesaplayınız. **(15 P)**

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j = \frac{2x}{x^2+y^2}i + \frac{2y}{x^2+y^2}j$$

$$u = \cos\frac{\pi}{4}i + \sin\frac{\pi}{4}j = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j$$

$$(D_u f)_p = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2,-2)$$

$$= \left(\frac{4}{4+4} + \frac{2\cdot(-2)}{4+4}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{4}{8}-\frac{4}{8}\right)$$

$$= 0$$

S.5: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ serisinin karakterini inceleyiniz. **(15 P)**

Cauchy kök testine göre;

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e > 1$$ old. verilen seri

ıraksaktır.

S.6. $u = xy + yz + xz$, $x = r + 2\theta, y = 3\theta - \varphi, z = 2\theta + \varphi$ için $\frac{\partial u}{\partial \theta} = ?$ **(15 P)**

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$= (y+z)\cdot 2 + (x+z)\cdot 3 + (y+x)\cdot 2$$

$$= 2(3\theta-\varphi \cancel{+} 2\theta+\varphi) + 3(r+2\theta+2\theta+\varphi) + 2(r+2\theta+3\theta+\varphi)$$

Müh. Fak.	MAT 162 Matematik II	Bütünleme Sınav	31.05.2017	Süre 75 dakikadır
Öğrenci No:		Adı ve Soyadı:	İmza:	İlk 30 dakika sınavdan çıkmak yasaktır.

S-1) (20p) $z = x.e^{\frac{y}{x}}$ fonksiyonunun $x.z_x + y.z_y = z$ denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$Z_x = e^{y/x} + x\left(-\frac{y}{x^2}\right)e^{y/x}$$

$$= e^{y/x} - \frac{y}{x}e^{y/x}$$

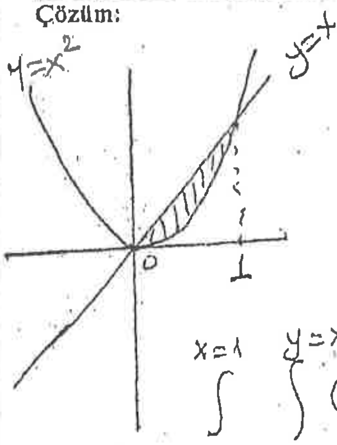
$$Z_y = x \cdot e^{y/x} \cdot \frac{1}{x} = e^{y/x}$$

$$x \cdot Z_x + y \cdot Z_y = xe^{y/x} - \cancel{x \cdot \frac{y}{x} e^{y/x}} + \cancel{y e^{y/x}} = xe^{y/x} = z$$

S-2) (15p) B bölgesi $y=x$ ve $y=x^2$ eğrisi arasında kalan bölge olduğuna göre $\iint (x+y+1)dxdy$ integralini hesaplayınız.

eğik

Çözüm:



$$x^2 = x \Rightarrow$$
$$x=0,\ x=1$$

$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^2}^{y=x} (x+y+1)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} + y\right)\Big|_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} + x - x^3 - \frac{x^4}{2} - x^2\right) dx$$

$$= \frac{19}{60}$$

S-3) (15p) $x-yz+\cos(xyz)=0$ kapalı formunda verilen $z=f(x,y)$ fonksiyonu için kısmi türevlerin (0,-1,1) noktasındaki değerlerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{1-\sin(xyz)\cdot yz}{-y-\sin(xyz)\cdot xy}$$

$$z_x(0,-1,1) = -\frac{1-\sin 0\cdot(-1)\cdot 1}{1-\sin 0\cdot 0} = -1$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-z-\sin(xyz)\cdot xz}{-y-\sin(xyz)\,xy}$$

$$z_y(0,-1,1) = -\frac{-1-\sin 0}{1-\sin 0\cdot 0} = 1$$

S.4) (15p) 3 cm yarıçaplı daire şeklindeki bir levhanın yoğunluğu her noktada o noktanın dairenin merkezine olan uzaklığı ile orantılı olarak değişmektedir. Dairenin sınırı üzerinde yoğunluk 3 olduğuna göre bu levhanın kütlesini hesaplayınız.

Bir (x,y) noktasının dairenin merkezine olan uzaklığı $\sqrt{x^2+y^2}$ dir. ⇒ yoğunluk

$\sigma(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2}$ olup $x^2+y^2=9$ için $\sigma=3$ old. $k=1$ olur. ⇒

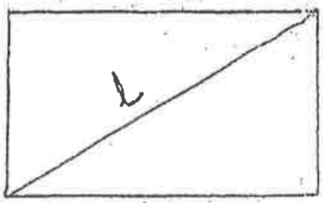
$$M=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$ kutupsal koordinatlarda

$x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ için

$$M=\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=3} r\cdot r\,dr\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{r^3}{3}\Big|_0^3 d\varphi$$

$= 18\pi$ olur.

S.5. (20p) Bir dikdörkenin bir kenarı x=10 diğeri y=24 cm dir. Kısa kenar 4 mm artırılır uzun kenar 1 mm kısaltılırsa köşegeni yaklaşık olarak ne kadar değişir. (diferensiyel kullanılacak)



$x=10$

$y=24$

$x=10 \quad dx=0{,}4$

$l=\sqrt{x^2+y^2} \qquad y=24 \quad dy=-0{,}1$

$$dl \cong l_x\,dx+l_y\,dy$$

$$\cong \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

$$\cong \frac{20}{\sqrt{100+576}}(0{,}4)+\frac{48}{\sqrt{100+576}}\cdot(-0{,}1)$$

$$\cong \frac{8}{26}-\frac{4{,}8}{26}\cong\frac{3{,}2}{26}\cong 0{,}12$$

S.6) (15 p) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\dots+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

olup

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1 \quad \text{dir.}$$

Müh. Fak.	MAT 162 Matematik II	Vize Sınavı	06.04.2016	Süre 70 dakikadır
Adı ve Soyadı:		Öğrenci No:	İmza:	İlk 30 dakika sınavdan çıkmak yasaktır.

S-1) (10p) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = ?$ *(Yöntem serbest)*

var mı

Çözüm:

I Yol: (Kartezyen koordinatlar)

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$y=x$ doğrusu boyunca $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x^2+x^2} = 1$

limit yoktur.

II Yol: (Kutupsal koordinatlar)

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad (x,y)\to(0,0)$ iken $r\to 0$ dır.

$$\lim_{r\to 0}\frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \cos\theta\sin\theta$$

θ değiştikçe limit değişir limit yoktur.

S-2) (10p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: (Bölüm, Oran, D'Alembert testi) uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}}$$

$$= 0 < 1$$

?

0

Bölüm testi gereğince yakınsaktır.

$$a_n = \frac{n^2}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \quad \frac{\cancel{n!}}{n^2} \qquad \frac{\cancel{(n+1)}^2}{\cancel{(n+1)}} \qquad \frac{n+1}{1}\,\frac{1}{n^2}$$

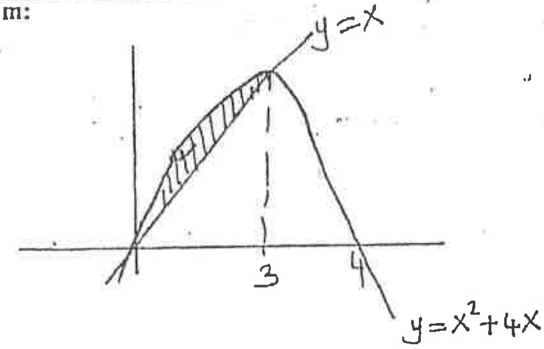
$n!\ (n+1)!$

$\cancel{n!}\ n+1 \qquad (n+1) \qquad n^2+2n+1$

$n!$

S-3) (15p) $y=-x^2+4x$ ve $y=x$ eğrileri arasında kalan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini hesaplayınız.

Çözüm:



Kesim noktalarını bulalım.

$-x^2+4x = x \implies x=0$ ve $x=3$

Kabuk Metodu

$$V = \int_0^3 2\pi x\,(-x^2+4x-x)\,dx$$

$$V = 2\pi\int_0^3 (-x^3+4x^2-x^2)\,dx$$

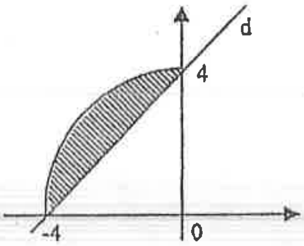
$$V = 2\pi\int_0^3 (-x^3+3x^2)\,dx$$

$$V = \frac{27}{2}\pi\ br^3$$

Çözen: Doç. Dr. Yavuz ALTIN
Fırat Üniversitesi
Matematik Bölümü

S-4) (15p) Şekilde (0,0) merkezli çeyrek çember ile d doğrusunun grafiği verilmiştir. Buna göre taralı bölgeyi ifade eden integral formülünü yazınız. (*integralin değeri hesaplanmayacaktır*)

Çözüm:



$d = \frac{x}{-4} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow y = x+4$

$x^2+y^2=16 \Rightarrow y = \sqrt{16-x^2}$

$\text{Taralı Alan} = \int_{-4}^{0} \left[\sqrt{16-x^2} - (x+4)\right] dx$

bulunur.

S-5) (10p) $z = xy\ln(x+y)$ fonksiyonunun dz tam diferensiyelini bulunuz.

Çözüm:

$dz = z_x dx + z_y dy$

$dz = \left[y\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}\right]dx + \left[x\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}\right]dy$

S-6) (10p) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2^{k-1}}$ serisinin toplamı kaçtır?

Çözüm:

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{2^{k-1}} = 4\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-1/2} = 8$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2^{k-1}} = 8$ dır.

$4 + \frac{4}{2}, \frac{4}{4}$

$4(1+\frac{1}{2}\ \frac{1}{2^2}\ \frac{4}{2^3}$

$\lim_{n\to\infty} 4 \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-1/2} = 8$

S-7) (15p) $w = x + 2y + z^2$ ve $x = r/s$, $y = r + \ln s$, $z = r^2$ olmak üzere $\frac{\partial w}{\partial r}$ kısmi türevini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= 1\cdot\left(\frac{1}{s}\right) + 2\cdot(1) + 2z\cdot 2r$$

$$= \frac{1}{s} + 2 + 4rz = \frac{1}{s} + 2 + 4r^3$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \partial w\,\partial x$$

$$\frac{w}{r} = \frac{w}{\cancel{x}}\ \frac{x}{r}$$

S-8) (15p) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n+1}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(x-3)^{n+1}}{2(n+1)+1}\cdot\frac{2n+1}{(-1)^n(x-3)^n}\right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty}|x-3|\left|\frac{2n+1}{2n+3}\right| = |x-3| < 1$$

$$-1 < x-3 < 1$$

$$+2 < x < 4$$

Uç noktalar kontrol edilmeli!

$x=2$ için $\sum \frac{1}{2n+1}$ ıraksaktır.

$x=4$ $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ Leibnitz testinden yakınsaktır.

Yakınsaklık Aralığı: $[2, 4]$ dır.

Gören: Doç. Dr. Yavuz ALTIN
Fırat Üniversitesi
Matematik Bölümü

Müh. Fak.	MAT 162 Matematik II	Final Sınavı	18.05.2016	Süre 70 dakikadır	Gözetmen Parafı	1	3	5	Toplam
Adı ve Soyadı:		Öğrenci No:	İmza:	İlk 30 dakika sınavdan çıkmak yasaktır.		2	4	6	

S-1) (20p) $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ fonksiyonu verilsin. $xu_x + yu_y + zu_z = ?$

Çözüm:

$$U_x = \frac{3x^2 - 3yz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$$

$$U_y = \frac{3y^2 - 3xz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$$

$$U_z = \frac{3z^2 - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$$

$$xU_x + yU_y + zU_z$$

$$= \frac{3\cancel{(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)}}{\cancel{(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)}}$$

$$= 3$$

S-2) (15p) $z = e^{-x^2-y^2}$ yüzeyinin $P(0,0,1)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$F(x,y,z) = z - e^{-x^2-y^2} = 0$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{P(0,0,1)} = 2x\, e^{-x^2-y^2}\Big|_{P(0,0,1)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{P(0,0,1)} = 2y\, e^{-x^2-y^2}\Big|_{P(0,0,1)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{P(0,0,1)} = 1$$

Teget düzlemin denklemi

$$0.(x-0) + 0(y-0) + 1(z-1) = 0$$

$$z = 1$$

Gözen: Doç. Dr. Yavuz ALTIN
Fırat Üniversitesi
Matematik Bölümü

S-3) (15p) Boyutları *x*, *y*, *z* olan dikdörtgenler prizması formunda bir kutunun hacmi 48 cm^3 tür. Uzunluğu x ve z kadar olan yüzlerin birim alanını boyama maliyeti 1 liradır. Bu maliyet, uzunluğu x ve y kadar olan yüzeyler için 2 lira, uzunluğu y ve z kadar olan yüzler için 3 liradır. Boyama maliyetini minimum kılmak için kutunun kenar uzunlukları ne olmalıdır? (Kısmi türevler ile yapılacaktır)

Çözüm:

$$V = xyz \Rightarrow z = \frac{48}{xy}$$

$$C = 2xz + 4xy + 6yz$$

$$= 4xy + \frac{288}{x} + \frac{96}{y}$$

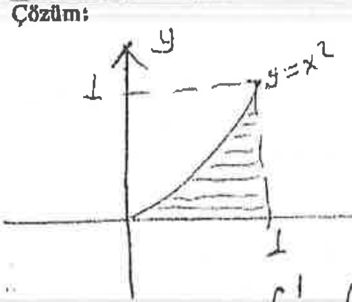
$$\left.\begin{aligned} C_x &= 4y - \frac{288}{x^2} = 0 \\ C_y &= 4x - \frac{96}{y^2} = 0 \end{aligned}\right\}.$$

$x = 6$cm ve $y = 2$cm

$$z = \frac{48}{6 \cdot 2} = 4cm$$

S-4) (15p) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 dxdy$ integralinin integrasyon sırasını değiştirerek hesaplayınız.

Çözüm:

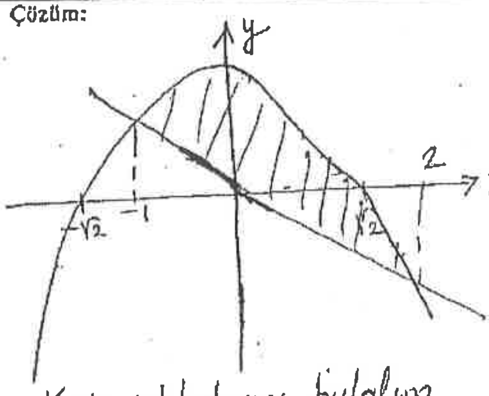


Soru yatay basit verilmiş. Bize ise düşey basit olarak alacağız.

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^2} dy\,dx = 1/3$$

S-5) (15p) $y = 2 - x^2$ parabolü ile $y = -x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını iki katlı integral yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm:



Kesim noktalarını bulalım

$y = y \Rightarrow 2 - x^2 = -x \Rightarrow$

$x_1 = -1$

$x_2 = 2$

$$A = \int_{x=-1}^{2} \int_{y=-x}^{2-x^2} dy\,dx = \int_{-1}^{2} y \Big|_{-x}^{2-x^2} dx$$

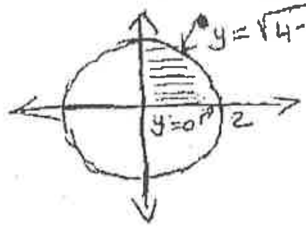
$$= \int_{-1}^{2} (2 - x^2 + x)\,dx$$

$$= 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{2} = 9/2 \ br^2$$

S-6) (20p) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2} dy\,dx = ?$

Çözüm:

$y = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow x^2+y^2 = 4 \Rightarrow x^2+y^2 = 2^2$



Kutupsal koordinatlar ile

$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad J = r$

alınırsa

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2} dy\,dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 e^{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 e^{r^2} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} e^{r^2} \Big|_0^2 d\theta = \frac{e^4 - 1}{2} \theta \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{e^4 - 1}{2} \frac{\pi}{2}$$

Gözen: Doç. Dr. Yavuz ALTIN
Fırat Üniversitesi
Matematik Bölümü

Müh. Fak.	MAT 162 Matematik II	Bütünleme Sınavı	08.06.2016	Süre 70 dakikadır	Gözetmen Paraf	1	3	5	Toplam
Adı ve Soyadı:		Öğrenci No:	İmza:	İlk 30 dakika sınavdan çıkmak yasaktır.		2	4	6	

S-3) (20p) $z=6x^2-2x^3+3y^2+6xy$ fonksiyonunun

S-1) (15p) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm:

Bölüm (oran) testini uygularsak

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1/(k+1)!}{\frac{1}{k!}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{1}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{k!}{(k+1)!}=\lim_{k\to\infty}\frac{\cancel{k!}}{(k+1)\cancel{k!}}$$

$$=0<1$$

olduğundan verilen seri yakınsaktır.

S-2) (15p) $z=\arctan\frac{x}{y}$, $x=u\cdot\cos v$, $y=u\sin v$ olmak üzere $\frac{\partial z}{\partial v}=?$

Çözüm:

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$=\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot(-u\sin v)+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot(u\cos v)$$

$$=\frac{y}{y^2+x^2}(-u\sin v)-\frac{x}{y^2+x^2}(u\cos v)$$

$$=\frac{u\sin v(-u\sin v)-u\cos v\, u\cos v}{u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v}$$

$$=-1$$

S-3) (20p) $z = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm:

$z_x = 12x - 6x^2 + 6y = 0$

$z_y = 6y + 6x = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad$ ve $\quad x_2 = 1$

$y_1 = 0 \quad$ ve $\quad y_2 = -1$

$A(0,0)$ ve $B(1,-1)$.

$\Delta = z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2$

$\Delta = (12 - 12x) \cdot 6 - 36$

$\Delta = 36 - 72x$

$\Delta(0,0) = 36 > 0$

$z_{xx}(0,0) = 12 > 0$ old.

$A(0,0)$ yerel min.

$\Delta(1,-1) = -36$ old.

$B(1,-1)$ eyer nok.

S-4) (15p) $\int_0^1 \int_2^{4-2x} dy\,dx = ?$

Çözüm:

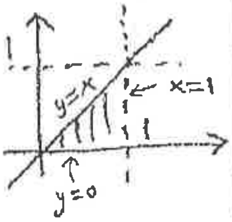
$\int_0^1 \int_2^{4-2x} dy\,dx = \int_0^1 y\Big|_2^{4-2x} dx$

$= \int_0^1 (4 - 2x - 2)\,dx = \int_0^1 (2 - 2x)\,dx$

$= 1$

S-5) (15p) $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dxdy$ integralinin integrasyon sırasını değiştirerek hesaplayınız.

Çözüm:



$$\int_{y=0}^{1} \int_{x=y}^{1} e^{x^2} dx\,dy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} e^{x^2} dy\,dx$$

$$= \int_0^1 e^{x^2} y \Big|_0^x dx = \int_0^1 e^{x^2} \cdot x\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^{x^2} 2x\,dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(e-1)$$

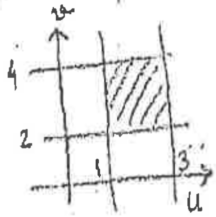
S-6) (20p) $y=x^2$ ve $y=3x^2$ parabolleri ile $y=\frac{2}{x}$ ve $y=\frac{4}{x}$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını iki katlı integral yardımıyla bulunuz.

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{y}{x^2} = 1 \;,\; \frac{y}{x^2} = 3 \\ xy = 2 \;,\; xy = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u=1,\; u=3 \\ v=2,\; v=4 \end{array}$$

şeklinde bölge dön. yapılırsa,

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ y & x \end{vmatrix}} = -\frac{1}{3u}$$



$$A = \iint dx\,dy$$

$$= \iint \frac{1}{3u} du\,dv$$

$$= \frac{1}{3} \int_{v=2}^{4} \int_{u=1}^{3} \frac{1}{u} du\,dv = \frac{2}{3} \ln 3 \text{ br}^2$$

Müh. Fak.	MAT 162 Matematik II	Vize Sınavı		13.04.2015
Adı ve Soyadı:		Öğrenci No:		İmza:

Süre 70 dakikadır.
İlk 30 dakika sınavdan çıkmak yasaktır.

S-1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{3^k}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm:

$C_k = \frac{k}{3^k}$

$= \lim \frac{C_{k+1}}{C_k} = \lim \frac{k+1}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{k}$

$L = \lim \frac{k+1}{3k} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow R = \frac{1}{L} \Rightarrow R = 3$ bulunur.

$|x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3$

$x = -3 \Rightarrow \sum k(-1)^k$ serisi ıraksaktır

$x = 3 \Rightarrow \sum k$ serisi ıraksaktır.

Yakınsaklık aralığı $\boxed{(-3,3)}$ dür.

$a_n = \frac{k}{3k}$

$\frac{k+1}{\cancel{3}^{k+1}} \cdot \frac{\cancel{3^k}}{k}$ $\quad \frac{k+1}{3k} = \frac{1}{3}$

$3^k \; 3^1$

S-2) $f(x) = e^{3x}$ fonksiyonunun $x = 1$ noktası civarında ürettiği Taylor serisini bulunuz.

Çözüm:

$f(x) = e^{3x}$

$f'(x) = 3e^{3x}$

$f''(x) = 3^2 e^{3x}$

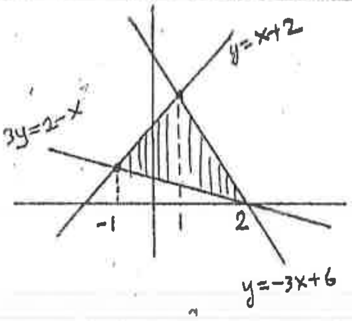
$\vdots$

$f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x} \Rightarrow f^{(n)}(1) = 3^n e^3$

$\Rightarrow \sum \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \boxed{\sum \frac{3^n \cdot e^3}{n!}(x-1)^n}$

S-3) $y = x+2$, $3y = 2-x$ ve $y = -3x+6$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız. *(integral kullanılacaktır)*

Çözüm:



$x+2 = -3x+6 \Rightarrow x = 1$

$\frac{2}{3} - \frac{x}{3} = x+2 \Rightarrow x = -1$

$A = \int_{-1}^{1}\left[(x+2) - \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{3}\right)\right]dx + \int_{1}^{2}\left[(-3x+6) - \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{3}\right)\right]dx$

$\boxed{A = 4\ br^2}$

S-4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = ?$

Çözüm:

I. yol: $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

$\Rightarrow 1 \neq 0$ old. limit yoktur

II. yol: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \cos^2\theta$

olup θ'ya bağlı old. limit yoktur

S-5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2^{k-1}}$ serisinin toplamı kaçtır?

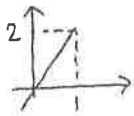
Çözüm:

$\sum \frac{4}{2^{k-1}} = 4\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots\right)$

$= 4 . \lim \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 4 . \frac{1-0}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{8}$

S-6) $y = 2x$ doğrusunun $[0,1]$ aralığındaki parçasının x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$A = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

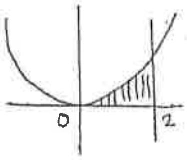
$$= 2\pi \int_0^1 2x\sqrt{1+2^2}\,dx$$

$$= 4\sqrt{5}\pi \int_0^1 x\,dx$$

$$\boxed{A = 2\sqrt{5}\pi}\ br^2$$

S-7) $y = x^2$ eğrisi $x = 2$ doğrusu ve x-ekseni arasında kalan bölgenin x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm:



$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2\,dx$$

$$= \frac{x^5}{5}\pi\Big|_0^2 = \boxed{\frac{32\pi}{5}\ br^3}$$

S-8) $f(x,y) = x^2 e^{\frac{y}{x}}$ ise $f_{xy}(1,1) = ?$

Çözüm:

$$f_x = 2x e^{\frac{y}{x}} + x^2\left(-\frac{y}{x^2}\right)e^{\frac{y}{x}}$$

$$\Rightarrow f_x = (2x-y)\,e^{y/x}$$

$$f_{xy} = -e^{y/x} + (2x-y)\cdot\frac{1}{x}e^{y/x}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{xy}(1,1) = 0}$$ bulunur.

Müh. Fak.	MAT 162 Matematik II	Mazeret Sınavı	25.05.2015	Süre 50 dakikadır.
Adı ve Soyadı:		Öğrenci No:	İmza:	İlk 25 dakika sınavdan çık

S-1) $u = x^2 + y^2$, $x = \cos t$, $y = \sin t$ ise

$\frac{du}{dt}(1) = ?$

Çözüm:

S-2) $y = x^2$ ile $y = x + 2$ arasında kalan bölgenin alanını bulunuz. (İki katlı integral kullanılacaktır)

Çözüm:

S-3) $f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy + 3$ fonksiyonunun yerel ekstremum değerlerini bulunuz.

Çözüm:

S-4) $\int_0^1 \int_0^2 (2x + y^2)\,dx\,dy = ?$

Çözüm:

Müh. Fak.	MAT 162 Matematik II	Final Sınavı	01.06.2015	Süre 80 dakikadır
Adı ve Soyadı:		Öğrenci No:	İmza:	İlk 30 dakika sınavdan çıkmak yasakt

S-1) (10p) $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1} = ?$

Çözüm:

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2\,dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 1$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3$$

S-2) (10p) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: Oran testi uygulanırsa

$$\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k}$$

$$= \lim \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} < 1$$ olduğundan

yakınsaktır.

S-3) (15p) I. bölgede $y = x^2$ ve $y = 2x+3$ arasında kalan bölgenin alanını iki katlı integral ile hesaplayınız.

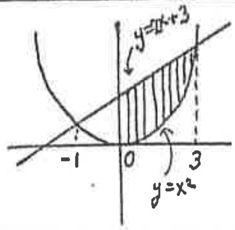
Çözüm:

$y = y$

$x^2 = 2x+3$

$x = -1$

$x = 3$



$$A = \int_0^3\int_{x^2}^{2x+3} dy\,dx = \int_0^3 y\Big|_{x^2}^{2x+3} dx$$

$$= \int_0^3 (2x+3-x^2)\,dx$$

$$= x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 9 \text{ br}^2$$

S-4) (15p) $\sqrt{(2{,}99)^2+(4{,}01)^2}$ sayısının yaklaşık değerini **tam diferensiyeli kullanarak** bulunuz.

Çözüm:

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ fonk. alalım.

$x = 3$ $\quad$ $y = 4$

$dx = -0{,}01$ $\quad$ $dy = 0{,}01$

$dz = z_x\,dx + z_y\,dy$

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

$$\Rightarrow dz = \frac{3\cdot(-0{,}01)}{\sqrt{3^2+4^2}} + \frac{4(0{,}01)}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

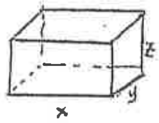
$\Rightarrow dz = 0{,}002$

$\Rightarrow \sqrt{(2{,}99)^2+(4{,}01)^2} \cong \sqrt{3^2+4^2} + 0{,}002$

$\cong 5{,}002$

S-5) (10p) 12 tane ayrıtının toplamı 24 cm olan bir dikdörtgenler prizmasının hacmi en fazla kaç cm^3 dür. (Kısmi türevler kullanılacaktır)

Çözüm:



$4x+4y+4z = 24 \Rightarrow x+y+z = 6$

$V = xyz = xy(6-x-y)$

$V_x = 6y - 2xy - y^2 = 0 \Rightarrow y(6-2x-y) = 0$

$V_y = 6x - x^2 - 2xy = 0 \Rightarrow x(6-x-2y) = 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y=6 \\ x+2y=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 2$$

$\Rightarrow V = 2.2.2 = 8\ cm^3$ tür.

S-6) (10p) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ ile verilen $z=f(x,y)$ kapalı fonksiyonunun $z_x(2,3,6)$ türevini bulunuz.

Çözüm:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{z^2}} = -\frac{z^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{z^2}{x^2}\Big|_{(2,3,6)} = -9$$

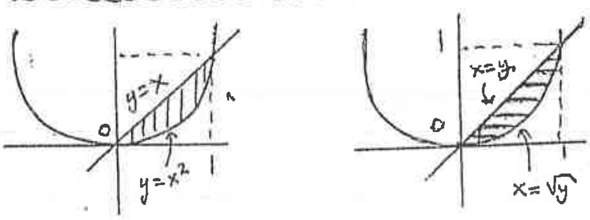
S-7) (15p) $\int_0^1\int_{x^2}^{x} x\,dy\,dx$ integralini hesaplayınız ve (sadece) integrasyon sırasını değiştiriniz.

Çözüm:

$$\int_0^1\int_{x^2}^{x} x\,dy\,dx = \int_0^1 xy\Big|_{x^2}^{x}\,dx$$

$$= \int_0^1 (x\cdot x - x\cdot x^2)\,dx = \int (x^2 - x^3)\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$



(Dikey) $\Longrightarrow$ (Yatay)

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{x} x\,dy\,dx = \int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{\sqrt{y}} x\,dx\,dy$$

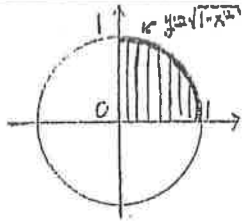
S-8) (15p) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2+y^2)\,dy\,dx = ?$

Çözüm:

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$J = r$



$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{1} \cos(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\cos r^2\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin r^2\Big|_0^1\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 1\,d\theta = \frac{\sin 1}{2}\cdot\theta\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\sin 1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Müh. Fak.	MAT 162 Matematik II	Bütünleme Sınavı		22.06.2015
Öğrenci No:		Adı ve Soyadı:		İmza:

S-1) (15p) $\int_0^1 \int_0^2 (2x + y^2)dxdy = ?$

Çözüm:

$$\int_0^1 \int_0^2 (2x+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(x^2+y^2x\right)\Big|_0^2 dy$$

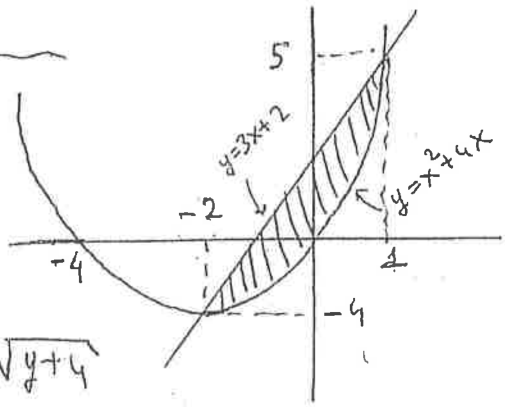
$$= \int_0^1 (4+2y^2)\,dy = \frac{14}{3}$$

S-2) (20p) $\int_{-2}^{1} \int_{x^2+4x}^{3x+2} dydx$ integralini hesaplayınız ve (sadece) integrasyon sırasını değiştiriniz.

Çözüm:

a) $$\int_{-2}^{+1} \int_{x^2+4x}^{3x+2} dy\,dx = \int_{-2}^{1} y\Big|_{x^2+4x}^{3x+2} dx$$

$$= \int_{-2}^{1} \left[(3x+2)-(x^2+4x)\right] dx = \int_{-2}^{1} (-x^2-x+2)\,dx = \frac{9}{2}$$



b) $y = 3x+2 \Rightarrow x = \frac{y-2}{3}$

$y = x^2+4x \Rightarrow x^2+4x-y=0$

$\Rightarrow \Delta = 16+4y$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4y}}{2} = -2 \pm \sqrt{y+4}$$

$$\int_{x=-2}^{1} \int_{y=x^2+4x}^{3x+2} dy\,dx = \int_{y=-4}^{5} \int_{x=\frac{y-2}{3}}^{-2+\sqrt{4+y}} dx\,dy \quad \text{olur.}$$

S-3) (15p) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y} = ?$

Çözüm:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = \lim\left(-\frac{y}{y}\right) = -1$$

olup $-1 \neq 1$ olduğundan

$(0,0)$ noktasında limit yoktur.

S-4) (15p) $z = e^x \sin y$ ise $z_{xx} + z_{yy} = ?$

Çözüm:

$z_x = e^x \sin y$

$z_{xx} = e^x \sin y$

$z_y = e^x \cos y$

$z_{yy} = -e^x \sin y$

$\Rightarrow z_{xx} + z_{yy} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$

bulunur.

S-5) (20p) $z = (x-1)^2 + 2y^2$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını (*y.max, y.min, eyer*) bulunuz.

Çözüm:

$$\left.\begin{aligned} z_x &= 2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \\ z_y &= 4y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}\right\} (1,0)$$

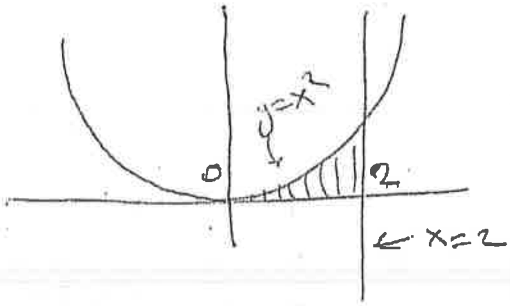
$$z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2 = 2 \cdot 4 - 0^2 = 8 > 0$$

ve $z_{xx} = 2 > 0$ olduğundan

$(1,0)$ noktasında yerel minimum vardır.

S-6) (15p) $y = x^2$ eğrisi $x = 2$ doğrusu ve x-ekseni arasında kalan bölgenin x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.
(Tek katlı belirli integral)

Çözüm:



$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2\, dx$$

$$= \frac{x^5}{5} \pi \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}\ br^3$$

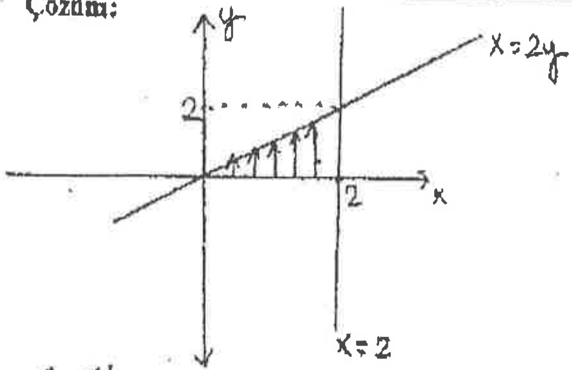
MATEMATİK II MAZERET SINAVI 27.06.2014

Adı ve Soyadı:		Öğrenci No:		İmza:

S-1) $\int_0^1 \int_{2y}^2 \cos x^2 \, dx dy$

İntegralini integrasyon sırasını değiştirerek hesaplayınız (20p).

Çözüm:



$$\int_0^2 \int_0^{x/2} \cos(x^2)\, dy\, dx \longrightarrow \text{Düşey basit bölge}$$

$$= \int_0^2 \left(y \cdot \cos(x^2) \Big|_0^{x/2} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{x}{2} \cos(x^2) - 0 \cdot \cos(x^2) \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos(x^2)\, dx \, , \quad u = x^2, \quad du = 2x\,dx, \quad \frac{du}{2} = x\,dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 \cos u \, du = \frac{1}{4} \sin u \Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{4} \sin(x^2) \Big|_0^2 = \frac{\sin 4}{4} \quad //$$

S-2) $z = xy \quad x = e^u \cos v \quad y = e^u \sin v$ fonksiyonları için $\frac{\partial z}{\partial u}$ ve $\frac{\partial z}{\partial v}$ türevlerini hesaplayınız (20p).

Çözüm:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= y \cdot e^u \cos v + x \cdot e^u \sin v$$

$$= e^u \sin v \cdot e^u \cos v + e^u \cos v \, e^u \sin v$$

$$= e^{2u} \sin v \cdot \cos v + e^{2u} \cos v \cdot \sin v$$

$$= 2e^{2u} \sin v \cos v$$

$$= e^{2u} \cdot \sin 2v$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= y \cdot (-e^u \sin v) + x \cdot e^u \cos v$$

$$= -e^u \sin v \cdot e^u \sin v + e^u \cos v \, e^u \cos v$$

$$= -e^{2u} \sin^2 v + e^{2u} \cos^2 v$$

$$= e^{2u} (\cos^2 v - \sin^2 v)$$

$$= e^{2u} \cdot \cos 2v$$

S-3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k(k+1)}$ serisinin toplamını bulunuz (20p).

Çözüm:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 3\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]$$

$$= 3\left[\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$S_n = 3\left[1 - \frac{1}{n+1}\right]$$

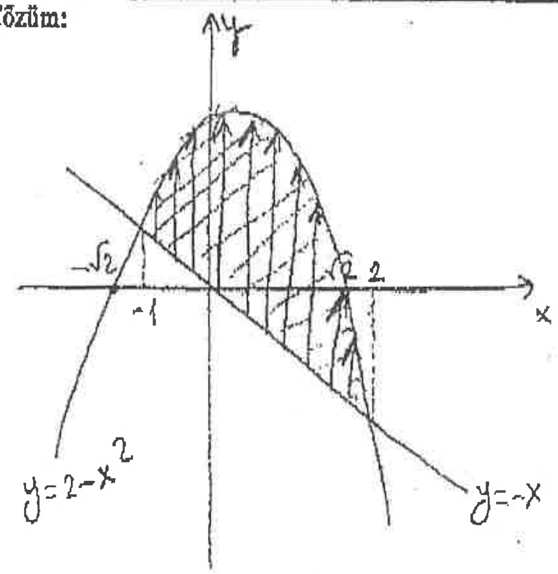
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 3\left[1 - \underbrace{\cancel{\frac{1}{n+1}}}_{0}\right]$$

$$= 3$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k(k+1)} = 3 \text{ olur.}$$

S-4) $y=2-x^2$ parabolü ile $y=-x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanı hesaplayınız (20p).

Çözüm:



$$2-x^2=-x \Rightarrow x^2-x-2=0$$

$$x_1=-1$$

$$x_2=2$$

$$\text{Alan}=\int_{-1}^{2}\int_{-x}^{2-x^2} dy\,dx \longrightarrow \text{Düşey basit bölge}$$

$$=\int_{-1}^{2} y\Big|_{-x}^{2-x^2} dx = \int_{-1}^{2}(2-x^2+x)\,dx$$

$$=\left(2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$=\frac{9}{2}\ \text{br}^2$$

S-5) $y=\frac{1}{x}$ $y=\frac{2}{x}$ hiperbolleri ve $y=\frac{x}{2}$ $y=x$ doğruları tarafından sınırlanan R bölgesinde $\iint_R e^{xy}dA$ integralini hesaplayınız. (20p)

Çözüm:

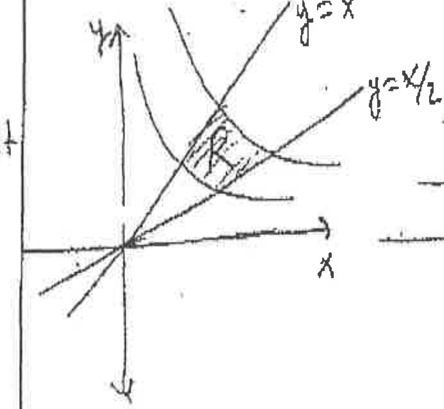
$$y=\frac{x}{2} \Rightarrow \left\{\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\right.,\quad y=\frac{1}{x} \Rightarrow \left\{xy=1\right.$$

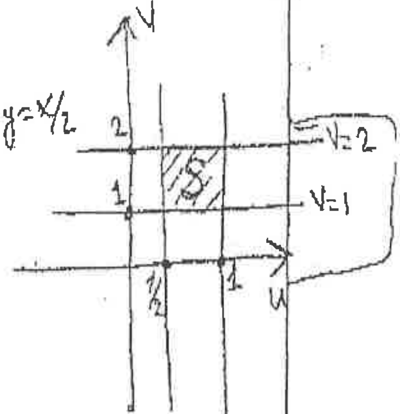
$$y=x \Rightarrow \left\{\frac{y}{x}=1\right.\quad y=\frac{2}{x} \Rightarrow \left\{xy=2\right.$$

ile tanımlayalım.

$u=\frac{y}{x}$, $v=xy$ dersek

$u=1/2$ $v=1$
$u=1$ $v=2$ olur.





$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}-\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\\ y & x\end{vmatrix}}$$

$J=$

$\iint$

$=\frac{1}{2}\int$

$=$

$$J = \frac{1}{-\frac{y}{x} - \frac{y}{x}} = \frac{1}{-\frac{2y}{x}} = -\frac{1}{2u}$$

$$\iint_S e^v \left| -\frac{1}{2u} \right| du\,dv = \frac{1}{2} \iint e^v \frac{du\,d}{u}$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{1/2}^1 e^v \frac{1}{u}\, du\, dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 e^v \ln u \Big|_{1/2}^1 dv$$

$v=2$

$v=1$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\cancel{e^v \ln 1}^{\,0} - e^v \ln 1/2 \right) dv$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 \int_1^2 e^v\, dv$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 \left(e^v \Big|_1^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 \left(e^2 - e^1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 \left(e^2 - e \right) \quad //$$

AŞAĞIDAKİ AÇIKLAMAYI MUTLAKA OKUYUNUZ!
1.) Sınav 5 soru üzerinden değerlendirilecektir. 2 soru seçmelidir. **Yapmadığınız** 2 soruyu aşağıdaki puan tablosunda X işareti koyarak belirleyiniz.
2.) Süre 75 dakikadır. Sınavın ilk 30 dakikası dışarı çıkmak kesinlikle yasaktır. ***Başarılar dilerim***

MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ I.-II. ÖĞRETİM

MAT 162 - Matematik II **Genel sınav** **Dersin hocasının ismi:** **31.05. 2014**

Fakülte No	:
Adı Soyadı	:
İmza	:
Bölümü	:

1	2	3	4	5	6	7	Toplam

S-1)) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{2^k}$ serisinin karakterini inceleyiniz.
(20 puan)

CEVAP:

$a_k = \frac{\ln k}{2^k}$, $a_{k+1} = \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}}$

Dalambert Oran testini uygulayalım.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{\ln k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k+1)}{\cancel{2^k}\cdot 2} \cdot \frac{\cancel{2^k}}{\ln k}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k+1)}{\ln k} \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ BL}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1}}_{=1}$$

$= \frac{1}{2} < 1$ olduğundan

verilen seri yakınsaktır.

S-2) $z = x^2 \arctan \frac{y}{x}$ olduğuna göre $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ türevinin (1,1) noktasındaki değerini hesaplayınız.
(20 puan)

CEVAP:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^4+3x^2y^2-2x^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,1)} = \frac{1+3}{(1+1)^2} = \frac{4}{4} = 1$$

S-3) $w=x+2y+z^3$, $x=\frac{r}{s}$, $y=e^{3r}+\ln(s^2+4)$,

$z=\arcsin r$

fonksiyonları verilsin. Buna göre zincir kuralı yardımıyla $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$ türevlerini hesaplayınız.

(20 puan)

CEVAP:

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$=1\cdot\left(\frac{1}{s}\right)+2\cdot\left(3e^{3r}\right)+3z^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{s}+6e^{3r}+\frac{3z^2}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{1}{s}+6e^{3r}+\frac{3\cdot(\arcsin r)^2}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$$

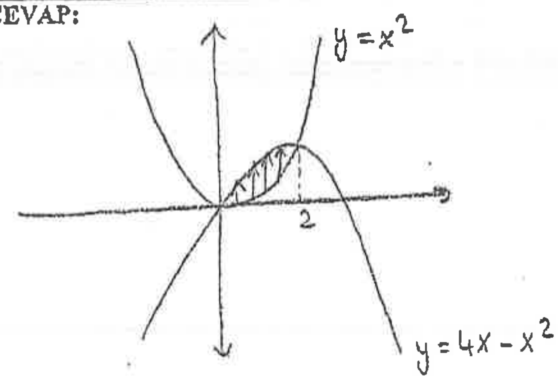
$$=1\cdot\left(-\frac{r}{s^2}\right)+2\cdot\left(\frac{2s}{s^2+4}\right)+3z^2\cdot(0)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=-\frac{r}{s^2}+\frac{4s}{s^2+4}$$

S.4) $y=x^2$ ile $y=4x-x^2$ tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

(20 puan)

CEVAP:



$$x^2=4x-x^2$$
$$2x^2-4x=0$$
$$2x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

$$\text{Alan}=\int_0^2\int_{x^2}^{4x-x^2}dy\,dx$$

$$=\int_0^2\left(y\Big|_{x^2}^{4x-x^2}\right)dx$$

$$=\int_0^2\left(4x-x^2-x^2\right)dx$$

$$=\int_0^2\left(4x-2x^2\right)dx$$

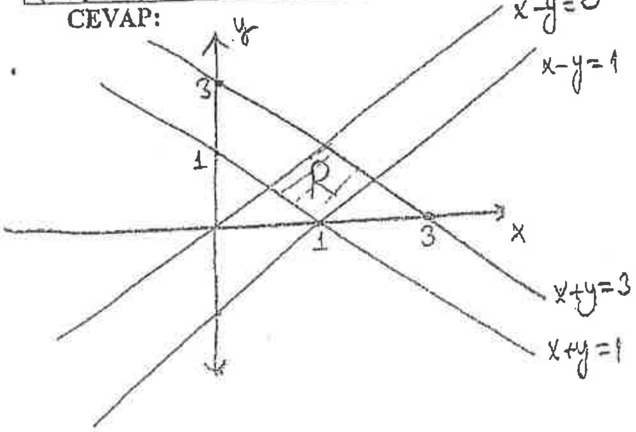
$$=\left(2x^2-2\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2$$

$$=\left(2(2)^2-2\cdot\frac{(2^3)}{3}\right)-(0)$$

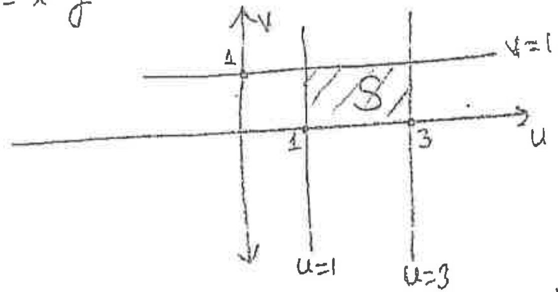
$$=8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}\text{ br}^2$$

S-5)
$x-y=0,\quad x-y=1,\quad x+y=1\quad x+y=3$
doğruları ile sınırlandırılmış R bölgesi üzerinden
$\iint_R \frac{x-y}{x+y}dA$ **integralini hesaplayınız.**
(20 puan)

CEVAP:



$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ olursa $\quad u=1 \quad v=0$; $\quad u=3 \quad v=1$



$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-2}$$

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y}dA = \int_0^1\int_1^3 \frac{v}{u}\left|-\frac{1}{2}\right| du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(v \ln u \Big|_1^3\right) dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(v\ln 3 - v \cancel{\ln 1}\right) dv$$

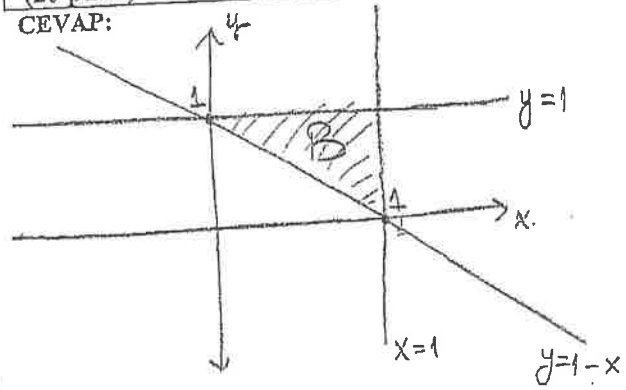
$$= \frac{\ln 3}{2}\int_0^1 v\,dv$$

$$= \frac{\ln 3}{2}\frac{v^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\ln 3}{2}\left(\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)$$

$$= \frac{\ln 3}{4} \;//$$

S.6). $y=1-x,\quad y=1,\quad x=1$ doğruları tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen $\sigma(x,y)=xy$ yoğunluklu bir levhanın kütlesini bulunuz.
(20 puan)

CEVAP:



$$M = \iint_B \sigma(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1\int_{-x+1}^1 (xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(x\frac{y^2}{2}\Big|_{-x+1}^1 \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x\cdot\frac{1^2}{2} - x\frac{(-x+1)^2}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x(x^2-2x+1)}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\cancel{x} - x^3 + 2x^2 - \cancel{x}}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{-x^3+2x^2}{2}\,dx$$

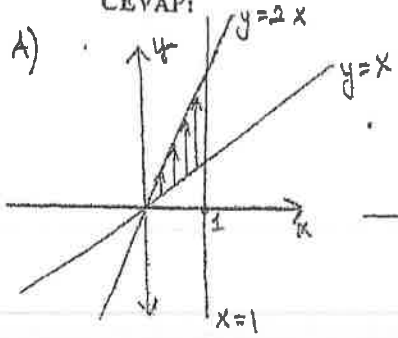
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1 = \frac{5}{24}$$

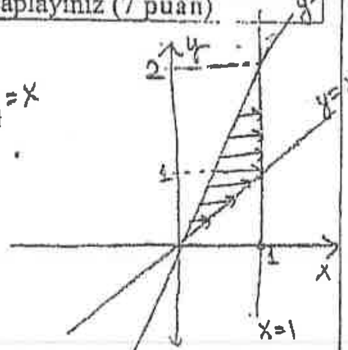
S.7). $\int_0^1 \int_x^{2x} dy\,dx$ integrali verilsin.

A:) integrasyon bölgesini çiziniz (6 puan)
B:) integrasyon sırasını değiştiriniz (7 puan)
C:) integralin değerini hesaplayınız (7 puan)

CEVAP:

A)





Düşey basit bölge. Yatay basit bölge

B)

$$\int_0^1 \int_{y/2}^{y} dx\,dy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} dx\,dy$$

c)

$$\int_0^1 \int_x^{2x} dy\,dx = \int_0^1 \left(y \Big|_x^{2x} \right) dx$$

$$= \int_0^1 (2x - x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

MAT136 MATEMATİK II ARASINAV

22.04.2011

Fakülte No : ....

Adı ve Soyadı : ....

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Toplam

SORULAR

1) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulup, kartezyen düzlemde gösteriniz.

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$ limitini hesaplayınız.

3) $z=\arcsin\dfrac{x-y}{x+y}$ fonksiyonunun $xz_x+yz_y=0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

4) $u(x,t)=\sin ax \sin bt$ fonksiyonunun $c=\dfrac{a}{b}$ olmak üzere $u_{xx}=c^2u_{tt}$ denklemini sağladığını gösteriniz.

5) f ve g türevlenebilen herhangi iki fonksiyon olmak üzere, zincir kuralından yararlanarak $z=xf(x+y)+yg(x+y)$ fonksiyonunun $z_{xx}-2z_{xy}+z_{yy}=0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

6) $A(1,2,5)$ ve $B(3,13,15)$ noktaları veriliyor. $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ fonksiyonunun AB yönündeki türevini bulunuz. Bu türevin A noktasındaki değerini hesaplayınız.

7) $z=x^3-y^3-2xy+6$ fonksiyonunun yerel extremum noktalarını bulup cinsini belirleyiniz.

8) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{e^{-xt}}{t}dt$ türevini hesaplayınız.

9) Üst tarafı açık olan dikdörtgen prizma şeklinde $4m^3$ hacminde bir çöp bidonu yapmak için en az kaç m^2 saca ihtiyaç vardır?

10) $z=9-4x^2-y^2$ paraboloidinin hangi noktasındaki teğet düzlemi $z=4y$ düzlemine paralel olur?

Prof. Dr. Mikail ET

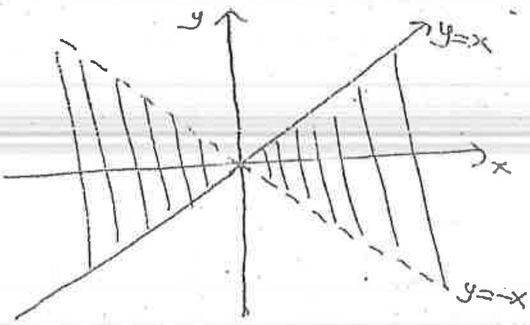
CEVAPLAR

CEVAPLAR

1) $\dfrac{x-y}{x+y} \geq 0 \Rightarrow x-y \geq 0$ ve $x+y > 0$

veya

$x-y \leq 0$ ve $x+y < 0$ olmalıdır.



2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy\,(2+\sqrt{xy+4})}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4-(xy+4)}{xy\,(2+\sqrt{xy+4})}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{1}{2+\sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4}$$

3) $$z_x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x+y-x+y}{(x+y)^2}\right) = \frac{2y}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}}$$

$$z_y = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}} \cdot \left(\frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2}\right) = -\frac{2x}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}}$$

$$xz_x + yz_y = \frac{2xy}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}} - \frac{2xy}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}} = 0$$

9) $x.y.z=4 \Rightarrow \boxed{z=\frac{4}{xy}}$

$f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz \Rightarrow g(x,y) = f\left(x,y,\frac{4}{xy}\right) = xy + 8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

$$g_x = y - \frac{8}{x^2} = 0$$
$$\Rightarrow x=y \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2,\ y=2$$
$$g_y = x - \frac{8}{y^2} = 0$$

$x.y.z = 4 \Rightarrow \boxed{z=1}$

$g_{xx} = \frac{16}{x^3}$, $g_{yy} = \frac{16}{y^3}$ ve $g_{xy}=1$ bulunur.

$\Delta(x,y) = \frac{256}{x^3y^3} - 1 \Rightarrow \Delta(2,2) = \frac{256}{64} - 1 = 3>0$ ve $g_{xx}(2,2)=\frac{16}{8}$.

olduğundan $(2,2,1)$ boyutlu bir prizma için en az sac kullanılır ve bu sac

$$f(2,2,1) = 4 + 2.2 = 12\,m^2 \text{ dir.}$$

---

10) $f(x,y,z) = 9-4x^2-y^2-z$ $\qquad (x_0,y_0,z_0)$

$f_x = -8x \Rightarrow f_x(x_0,y_0,z_0) = -8x_0$

$f_y = -2y \Rightarrow f_y(x_0,y_0,z_0) = -2y_0$

$f_z = -1 \Rightarrow f_z(x_0,y_0,z_0) = -1$

$f_x(x_0,y_0,z_0).(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0).(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$

$\Rightarrow -8x_0(x-x_0) - 2y_0(y-y_0) - z + z_0 = 0$

$\Rightarrow -8x_0x + 8x_0^2 - 2y_0y + 2y_0^2 - z + z_0 = 0$

$\Rightarrow -8x_0x - 2y_0y + 2(9-z_0) - z + z_0 = 0$

$\Rightarrow \boxed{+8x_0x + 2y_0y + z = z_0 - 18.}$

Bu teğet düzlemin $z=4y$ düzlemine paralel olması için

$x_0=0$, $2y_0=-4 \Rightarrow y_0=-2$, ve $z_0 = 9-4=5$ olmalıdır. $(0,-2,5)$

) $z_x = 3x^2 - 2y = 0$
$z_y = -3y^2 - 2x = 0$ $\Rightarrow y = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow y = \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}y^2\right)^2 = \frac{27}{8}y^4$

$\Rightarrow y - \frac{27}{8}y^4 = 0 \Rightarrow y\left(1 - \left(\frac{3}{2}y\right)^3\right) = 0$

$\Rightarrow y = 0$ veya $\left(\frac{3}{2}y\right)^3 = 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$

$y = 0$ ise $x = 0$ ve $y = \frac{2}{3}$ ise $x = -\frac{2}{3}$ olur. O halde

$(0,0)$ ve $B\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ kritik noktalardır.

$z_{xx} = 6x$
$z_{yy} = -6y$ $\Rightarrow \Delta(x,y) = z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2 = -36xy - 4$
$z_{xy} = -2$

$\Delta(A) = -4 < 0$ olduğundan A noktası eyer noktasıdır.
$\Delta(B) = -36\left(-\frac{4}{9}\right) - 4 = 60 > 0$ ve $z_{xx}(B) = -4 < 0$ olduğundan
B noktası yerel maximum noktasıdır.

$)$
$$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \frac{e^{-xt}}{t}\,dt = \int_x^{x^2} \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-xt}}{t}\right)dt + \frac{e^{-x^3}}{x^2}\cdot 2x - \frac{e^{-x^2}}{x}$$

$$= -\int_x^{x^2} e^{-xt}\,dt + \frac{2}{x}e^{-x^3} - \frac{1}{x}e^{-x^2}$$

$$= \frac{1}{x}e^{-xt}\Big|_x^{x^2} + \frac{2}{x}e^{-x^3} - \frac{1}{x}e^{-x^2}$$

$$= \frac{1}{x}e^{-x^3} - \frac{1}{x}e^{-x^2} + \frac{2}{x}e^{-x^3} - \frac{1}{x}e^{-x^2}$$

$$= \frac{3}{x}e^{-x^3} - \frac{2}{x}e^{-x^2}$$

) $\frac{\partial u}{\partial x} = a.\sin bt.\cos(ax) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a^2 \sin bt.\sin(ax)$

$\frac{\partial u}{\partial t} = b.\sin ax.\cos(bt) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -b^2 \sin ax.\sin(bt)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow -a^2 \cancel{\sin bt.\sin(ax)} = -b^2 c^2 \cancel{\sin ax.\sin(bt)}$

$\Rightarrow a^2 = b^2 c^2$

$\Rightarrow a^2 = \cancel{b^2} \frac{a^2}{\cancel{b^2}} \Rightarrow a^2 = a^2$ olur.

5) $z_x = f(x+y) + x.f'(x+y) + yg'(x+y)$

$z_{xx} = 2f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y)$

$z_y = x.f'(x+y) + g(x+y) + yg'(x+y)$

$z_{yy} = xf''(x+y) + 2g'(x+y) + yg''(x+y)$

$z_{xy} = f'(x+y) + xf''(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y)$

$z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 2f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y)$
$- 2f'(x+y) - 2xf''(x+y) - 2g'(x+y) - 2yg''(x+y)$
$+ xf''(x+y) + 2g'(x+y) + yg''(x+y)$

$= 0$

6) $AB = (3-1, 13-2, 15-5) = (2, 11, 10) \Rightarrow \|AB\| = \sqrt{2^2+11^2+10^2} = 15$

$\Rightarrow u = \frac{AB}{\|AB\|} = \left(\frac{2}{15}, \frac{11}{15}, \frac{10}{15}\right)$ olur.

$D_u f = f_x.u_1 + f_y.u_2 + f_z.u_3 = \frac{2}{15}(y+z) + \frac{11}{15}(x+z) + \frac{10}{15}(x+y)$

$= \frac{21x + 12y + 13z}{15} \Rightarrow D_u f\Big|_A = \frac{21+24+65}{15} = \frac{110}{15}$

1) $y = x^4 - 2x^2$ ve $y = 2x^2$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

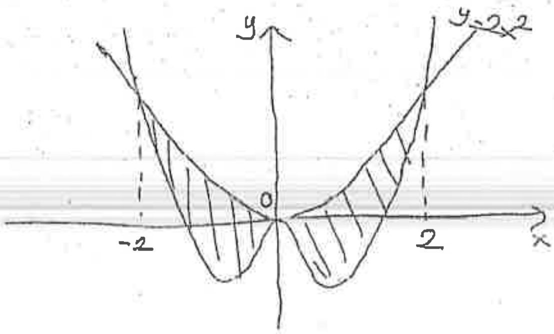
Çözüm:

$x^4 - 2x^2 = 2x^2$

$x^4 - 4x^2 = 0$

$x^2(x^2-4) = 0$

$x_{1,2} = 0 \quad x_3 = -2 \quad x_4 = 2$



$$A = \int_{-2}^{2}\int_{x^4-2x^2}^{2x^2} dy\,dx = 2\cdot\int_{0}^{2}\int_{x^4-2x^2}^{2x^2} dy\,dx$$

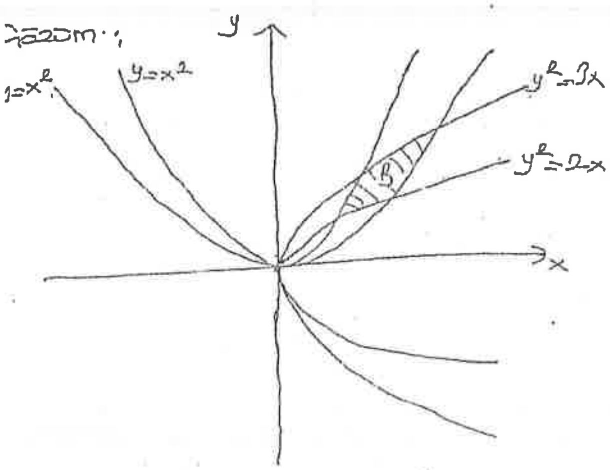
$$= 2\int_0^2 (4x^2 - x^4)\,dx$$

$$= 2\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2$$

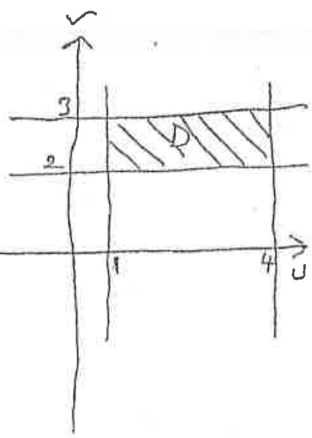
$$= \frac{64}{3} - \frac{64}{5} = \frac{128}{5}\,br^2$$

-) $x^2 = y$, $x^2 = 4y$, $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$\Rightarrow$



$x+y=3\pi \Rightarrow v=3\pi$, $y=x+\pi \Rightarrow u=-\pi$

$x+y=\pi \Rightarrow v=\pi$, $y=x-\pi \Rightarrow u=\pi$ bulunur.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1}{2} \quad \text{olup}$$

$$I=\iint (x-y)^2\sin^2(x+y)\,dx\,dy=\iint u^2\cdot\sin^2 v\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u^2\sin^2 v\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi}\frac{u^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}\sin^2 v\,dv=\frac{\pi^3}{3}\int_{\pi}^{3\pi}\frac{1-\cos 2v}{2}\,dv$$

$$=\frac{\pi^3}{6}\left(v-\frac{\sin 2v}{2}\right)\Big|_{\pi}^{3\pi}=\frac{\pi^3}{6}\left[\left(3\pi-\frac{\sin 6\pi}{2}\right)-\left(\pi-\frac{\sin 2\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi^4}{3}$$

(2) $\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$ ve $\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right\} = -1$

olup limitler eşit olmadığından $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ mevcut değildir. Bu nedenle $f(x,y)$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasında sürekli değildir.

(3) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot 2x = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right] = (-1)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + (-x)\left[-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\cdot 2x\right]$$

$$= \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot 2y = -y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-1)\left[x^2+y^2+z^2\right]^{-3/2} + (-y)\left[-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\cdot 2y\right]$$

$$= \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

ve benzer şekilde $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$ bulunur. Burada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2x^2-y^2-z^2+2y^2-x^2-z^2+2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0$$

olur.

(4) $x=1$, $y=2$ için $2z^3+4z=0 \Rightarrow 2z(z^2+2)=0 \Rightarrow z=0$ bulunur.

$F_x = 8x^3z^3+3y^2+4z+5 \Rightarrow F_x(1,2,0) = 17$

$F_y = 6xy+3 \Rightarrow F_y(1,2,0) = 15$

$F_z = 6x^4z^2+4x \Rightarrow F_z(1,2,0) = 4$ olduğundan

$$z_x(1,2) = -\frac{F_x(1,2,0)}{F_z(1,2,0)} = -\frac{17}{4}, \quad z_y(1,2) = -\frac{F_y(1,2,0)}{F_z(1,2,0)} = -\frac{15}{4}$$

bulunur.

$\frac{x^2}{y}=u$, $\frac{y^2}{x}=v$ bölge dönüşümü yapılırsa;

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2}\\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x}\end{vmatrix}}=\frac{1}{3}$$ olacağından

$$A=\iint_B dx\,dy=\iint_D \frac{1}{3}\,du\,dv=\frac{1}{3}\int_2^3\int_1^4 du\,dv=\frac{1}{3}(4-1)(3-2)=1br^2$$

bulunur.

3)

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Matematik Bölümü

	Matematik-II Makina Müh. Mazeret Sınavı	
Kod : *Mat162* Akad. Yıl : *2010-2011* Dönem : *Bahar* Öğrt.Gör. : *Fāruk Polat* Tarih : *17.05.2011* Zaman : *10:00* Süre : *80 dakika*	Soyadı : Adı : Öğrenci No : Bölüm : İmza : 4 Sayfada 5 Soru Vardır Toplam 100 Puandır	

1	2	3	4	5		

(20 puan) 1) (a_n) dizisi, $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{1+2a_n}$ ile tanımlanıyor.

a)(a_n) dizisinin **artan** ve **üstten 3 ile sınırlı** olduğunu **tümevarım yöntemiyle** gösteriniz.

b) (a_n) dizisinin **limitini** bulunuz.

(20 puan) 2.Aşağıdaki serilerin **yakınsaklık durumunu** araştırınız.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1.3.5...(2n-1)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{\frac{1}{n^2}}$

(20 puan)3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\frac{x^n}{2^n}$ kuvvet serisinin **merkezini, yakınsaklık yarıçapını** ve **yakınsaklık aralığını** bulunuz.

(20 puan)4 a) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$ integralinin **yakınsaklık durumunu** inceleyiniz.

b) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sin^2 x}$ integralinin **yakınsaklık durumunu** inceleyiniz.

(20 puan)5.a) $x - 2y + 3z = 0$ ve $2x + 3y - 4z = 4$ düzlemlerinin **arakesitinden** ve $(1, 0, 2)$ noktasından geçen **düzlemin denklemini** yazınız.

b) $(2, -1, -1)$ noktasından geçen ve $x + y = 0$ ile $x - y + 2z = 0$ düzlemlerinin herbirine paralel olan **doğrunun denklemini standart formda** yazınız.

①

MAT 136 Matematik II Genel Sınav Sorularıdır 18 Haziran 2010

Fakülte No : ....
Adı : ....
Soyadı : ....

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

S O R U L A R

1. $f(x,y) = \ln\left[\left(16 - x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2 - 4\right)\right]$ fonksiyonun tanım bölgesini bulunuz, bölgeyi düzlemde gösteriniz.

2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonun $(0,0)$ da sürekliliğini inceleyiniz.

3. $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ olmak üzere $u(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ fonksiyonu için $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ifadesini hesaplayınız

4. $2x^4z^3 + 3xy^2 + 4xz + 3y + 5x - 23 = 0$ eşitliği ile verilen $z = f(x,y)$ fonksiyonu için $z_x(1,2)$ ve $z_y(1,2)$ türevlerini hesaplayınız.

5. $f(x,y,z)$ fonksiyonun i, j, k birim vektörleri yönündeki türevlerini bulunuz.

6. B bölgesi, birinci bölgede $x^2-y^2=1, x^2-y^2=9, xy=2, xy=4$ hiperbolleri tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre $I = \int\int_B \left(x^2+y^2\right) dxdy$ integralini hesaplayınız.

7. $x = 0, y = 0$ ve $x + y = 1$ doğruları tarafından sınırlanan üçgensel bir bölge içerisine yerleştirilen bir levhanın (x,y) noktasındaki yoğunluğu o noktanın koordinatları çarpımına eşittir. Bu levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

8. G bölgesi $x^2+y^2=9$ ve $x^2+y^2=16$ silindirleri ile $z=0$ ve $z=3$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre $I = \iiint_G x^2 dxdydz$ integralini hesaplayınız.

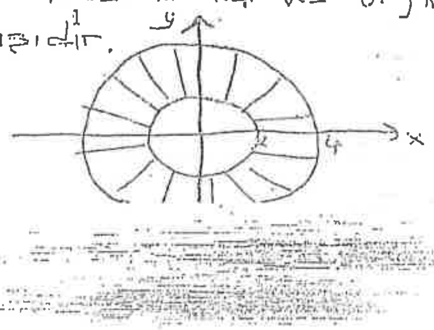
9. $\begin{aligned} x + 2y + kz &= 0 \\ 2x + ky + 2z &= 0 \\ 3x + y + z &= 0 \end{aligned}$ denklem sisteminin hangi k değerleri için aşikar çözümün dışında çözümü vardır.

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -8 & -4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

Not: 1. ve 2. sorular 5, 6 ve 8. sorular 15, diğer sorular 10 puan olup, süre 100 dakikadır.

C E V A P L A R

① $(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) > 0$ yani $4 < x^2 + y^2 < 16$ şeklinde ki tüm (x,y) noktalarında fonksiyon tanımlı ve reel değerlidir. Bu noktaların oluşturduğu tanım bölgesi orjin merkezli ve 4 yarıçaplı çemberin içi ve orjin merkezli 2 yarıçaplı çemberin dışıdır.



⑨ Katsayılar determinantı (5) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & k & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ olmalıdır.

$\Delta = k-2 \ - (-8) + k(2-3k) = -3k^2+3k+6 = 0$ olup

buradan $k=-1$ ve $k=2$ bulunur.

---

⑩ $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj}A}{|A|}$ olduğuna göre; $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -8 & -4 \end{vmatrix} = -1$

bulunur.

$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} = -1$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} = -1$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$

Buradan;

$$\text{Adj}\,A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}\,A}{|A|} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

---

(1) $f(x,y)=x^2y$ fonksiyonunu $x-1$ ve $y-2$'nin kuvvetleri cinsinden yazınız.

Çözüm: $f_x = 2xy\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 4$, $f_{xx} = 2y\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 4$, $f_{xxy}=2$

$f_{xy} = 2x\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 2$ $f_y = x^2\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 1$, $f_{yy} = 2x\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 0$, $f_{yxx} = 2$

olur. Buradan,

$$f(x,y) = f(1,2) + (x-1)f_x(1,2) + (y-2)f_y(1,2) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-1)^2 f_{xx}(1,2) + 2(x-1)(y-2)f_{xy}(1,2) + (y-2)^2 f_{yy}(1,2)\right]$$

$$+\frac{1}{3!}\left[(x-1)^3 f_{xxx}(1,2) + 3(x-1)^2(y-2)f_{xxy}(1,2) + 3(x-1)(y-2)^2 f_{xyy}(1,2)\right.$$

$$\left. + (y-2)^3 f_{yyy}(1,2)\right]$$

$$= 2 + 4(x-1) + (y-2) + \frac{1}{2!}\left[4(x-1)^2 + 4(x-1)(y-2)\right]$$

$$+\frac{1}{3!}\left[6(x-1)^2(y-2)\right]$$ bulunur.

2) $z = \arctan xy$ fonksiyonunu $(1,1)$ noktasında ikinci mertebeden terimlere kadar Taylor serisine açalım;

Çözüm: $z_x = \frac{y}{1+x^2y^2}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{1}{2}$, $z_y = \frac{x}{1+x^2y^2}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{1}{2}$

$$z_{xx} = \frac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad , \quad z_{yy} = \frac{-2x^3y}{(1+x^2y^2)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$z_{xy} = \frac{(1+x^2y^2) - 2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 0$$ dır. Bu

takdirde,

$$z(x,y) = z(1,1) + (x-1)z_x(1,1) + (y-1)z_y(1,1)$$
$$+\frac{1}{2!}\left[(x-1)^2 z_{xx}(1,1) + 2(x-1)(y-1)z_{xy}(1,1) + (y-1)^2 z_{yy}(1,1)\right] + \dots$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2!}\left[-\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2\right] + \dots$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(y-1)^2 + \dots \quad \text{olur.}$$

i) $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2xy-xz-1=0$ ile kapalı olarak verilen $z(x,y)$ fonksiyonunu $x=0, y=0, z=1$ noktası civarında ikinci mertebeden türevlere kadar Taylor serisine açınız.

Çözüm: $2x + 2zz_x - 2y - xz_x - z = 0$

$$\Rightarrow 2zz_x - xz_x = 2y - 2x + z \Rightarrow z_x = \frac{2y-2x+z}{2z-x}\bigg|_{(0,0,1)} = \frac{1}{2}$$

$$2y + 2zz_y - 2x - xz_y = 0 \Rightarrow z_y = \frac{2x-2y}{2z-x}\bigg|_{(0,0,1)} = 0$$

bulunur.

$$z_{xx} = \frac{(-2+z_x)(2z-x) - (2y-2x+z)(2z_x-1)}{(2z-x)^2}\bigg|_{(0,0,1)} = -\frac{3}{4}$$

$$z_{yy} = \frac{-2(2z-x) - (2x-2y)(2z_y)}{(2z-x)^2}\bigg|_{(0,0,1)} = -1$$

$$z_{xy} = \frac{(2+z_y)(2z-x) - (2y-2x+z)(2z_y)}{(2z-x)^2}\bigg|_{(0,0,1)} = 1 \quad \text{elde edilir.}$$

Bu değerleri Taylor açılımında yerine yazarsak;

$$z(x,y) = z(0,0) + xz_x(0,0) + yz_y(0,0) + \frac{1}{2!}\left[x^2 z_{xx}(0,0) + 2xyz_{xy}(0,0) + y^2 z_{yy}(0,0)\right]$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\left[-\frac{3}{4}x^2 + 2xy - y^2\right] + \dots \quad \text{bulunur.}$$

4) $u - v - x^2 + y - 1 = 0$, $u + v^2 - x - y - 1 = 0$ denklemleri ile kapalı olarak verilen $u = u(x,y)$ fonksiyonunun $x=1, y=1, u=2, v=1$ noktasında ikinci mertebeden türevlere kadar Taylor açılımını bulunuz.

<u>Çözüm:</u>

$$\begin{aligned} u_x - v_x &= 2x \\ u_x + 2v v_x &= 1 \end{aligned} \implies u_x = \frac{4xv+1}{2v+1} \quad , \quad v_x = \frac{1-2x}{2v+1}$$

$$u_{xx} = \frac{(4v + 4xv_x)(2v+1) - 2v_x(4xv+1)}{(2v+1)^2}$$ olup $(1,1,2,1)$

noktasında $u_x = \frac{5}{3}$, $v_x = -\frac{1}{3}$, $u_{xx} = \frac{34}{27}$ dir.

$$\begin{aligned} u_y - v_y &= -1 \\ u_y + 2v\, v_y &= 1 \end{aligned} \implies u_y = \frac{1-2v}{2v+1} \quad , \quad v_y = \frac{2}{2v+1}$$

$$u_{xy} = \frac{-2vv_x(2v+1) - 2v_x(1-2v)}{(2v+1)^2}$$

$$u_{yy} = \frac{-2v v_y(2v+1) - 2v_y(1-2v)}{(2v+1)^2}$$ ve $(1,1,2,1)$ noktasında

$u_y = -\frac{1}{3}$, $v_y = \frac{2}{3}$; $u_{xy} = \frac{4}{27}$ ve $u_{yy} = -\frac{8}{27}$ bulunur.

$$u(x,y) = u(1,1) + (x-1)u_x(1,1) + (y-1)u_y(1,1) + \frac{1}{2!}\left[(x-1)^2 u_{xx}(1,1) + 2(x-1)(y-1)u_{xy}(1,1) + (y-1)^2 u_{yy}(1,1)\right] + R_2$$

$$= 2 + \frac{5}{3}(x-1) + \left(-\frac{1}{3}\right)(y-1) + \frac{1}{2!}\left[\frac{34}{27}(x-1)^2 + 2\cdot\frac{4}{27}(x-1)(y-1) - \frac{8}{27}(y-1)^2\right] + R_2$$

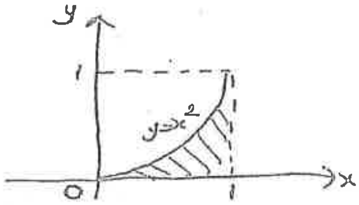
elde edilir.

1) Aşağıda verilen integrallerin integrasyon bölgesini çiziniz, integrasyon sırasını değiştiriniz ve değerini hesaplayınız.

a) $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 (x+y)\,dx\,dy$ b) $\int_1^{e^2}\int_{\ln y}^2 dx\,dy$

Çözüm: a)

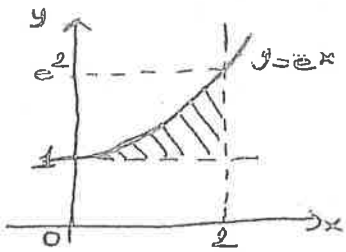
$$\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{x^2}(x+y)\,dy\,dx$$



$$\int_0^1\int_0^{x^2}(x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{x^2}dx = \int_0^1 \left(x^3+\frac{x^4}{2}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{10} = \frac{7}{20}$$

b) $$\int_1^{e^2}\int_{\ln y}^2 dx\,dy = \int_0^2\int_1^{e^x} dy\,dx$$



$$\int_0^2\int_1^{e^x} dy\,dx = \int_0^2 y\Big|_1^{e^x}dx$$

$$= \int_0^2 (e^x-1)\,dx = (e^x-x)\Big|_0^2 = (e^2-2)-1$$

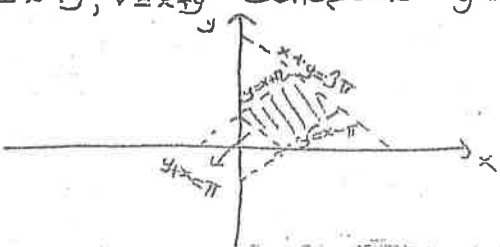
$$= e^2-3.$$

2) İntegrasyon bölgesi, köşeleri $(\pi,0), (2\pi,\pi), (\pi,2\pi), (0,\pi)$ olan paralelkenar old. göre

$$\iint (x-y)^2\sin^2(x+y)\,dx\,dy$$

integralini $u=x-y$, $v=x+y$ dönüşümü yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm:



(7) $M = \iint_B \sigma(x,y)\,dx\,dy = \iint_B xy\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{1-x} xy\,dy\,dx$ (6)

$$= \int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x-2x^2+x^3)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{21}$$

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iint_B x\,\sigma(x,y)\,dx\,dy = 24\int_0^1\int_0^{1-x} x^2y\,dy\,dx$$

$$= 24\int_0^1 \frac{1}{2}x^2y^2\Big|_0^{1-x}$$

$$= 12\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx$$

$$= 12\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{5}$$

bulunur. Benzer şekilde $\overline{y} = \frac{2}{5}$ olur. Buna göre levhanın ağırlık merkezi $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ noktasıdır.

(8) $I = \iint_B \left[\int_0^3 x^2\,dz\right] dx\,dy = \iint_B x^2 z\Big|_0^3 dx\,dy = \iint_B 3x^2\,dx\,dy$

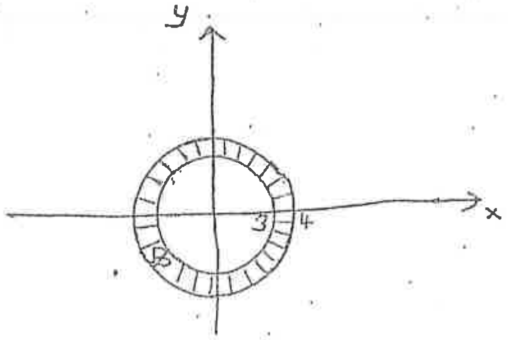
olur. Kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$I = 3\int_0^{2\pi}\int_3^4 r^2\cos^2\theta\, r\,dr\,d\theta = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} r^4\Big|_3^4 \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{525}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{525}{4}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{525}{4}\pi$$



5) $\nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$ olduğundan (3)

$$D_i f(x,y,z) = \nabla f \cdot \vec{i} = f_x + 0 + 0 = f_x \quad \text{olur.}$$

O halde bir fonksiyonun $\vec{i}$ yönündeki türevi f_x kısmi türevidir. Benzer şekilde $D_j f(x,y,z)$, $D_k f(x,y,z)$ türevleri hesaplandığında

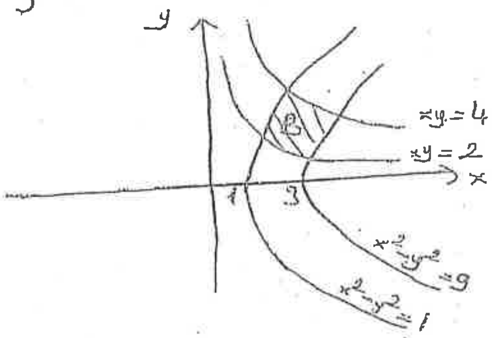
$$D_i f(x,y,z) = f_x(x,y,z), \quad D_j f(x,y,z) = f_y(x,y,z), \quad D_k f(x,y,z) = f_z(x,y,z)$$

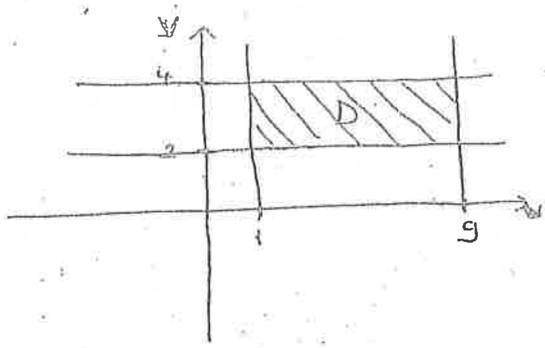
bulunur.

---

6) $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = xy \end{cases}$ dönüşümü yapılırsa $u=1$, $u=9$, $v=2$, $v=4$

doğruları elde edilir.





$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{1}{2x^2+2y^2} \quad \text{olup}$$

$$I = \iint_B (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_D (x^2+y^2) \cdot \frac{1}{2(x^2+y^2)}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^9 \int_2^4 dv\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^9 v \Big|_2^4 du = \int_1^9 du = 9-1 = 8$$

bulunur.

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ I.-II. ÖĞRETİM

MAT 172- Matematik II   Mazeret sınavı   Ders sorumluları: N.ÇATALBAŞ & Erdal BAŞ   20. 05.2009

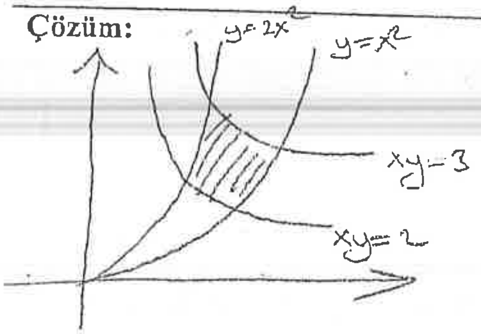
No :	1	2	3	4	Toplam
Adı ve Soyadı :					

NOT: süre 75 dakikadır. BAŞARILAR..

S-1 $\iint_B \frac{y^2 e^{x^2y^2}}{x} dA$ integralini hesaplayınız.

$B = \{(x,y) \in R^2 : x^2 \le y \le 2x^2, 2 \le xy \le 3\}$

Çözüm:



$u = xy \Rightarrow u: 2 \to 3.$

$v = \frac{y}{x^2} \Rightarrow v: 1 \to 2$

$$\iint \frac{y^2 e^{x^2y^2}}{x} dA = \int_{v=1}^{2}\int_{u=2}^{3} \frac{y^2}{x} e^{u^2} |J| \, du\,dv$$

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ -2y/x^3 & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix}} = \frac{x^2}{3y}$$

$$= \int_1^2\int_2^3 \frac{y^2}{x} e^{u^2} \frac{x^2}{3y} du\,dv = \frac{1}{3}\iint e^{u^2} xy\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{3}\iint u \cdot e^{u^2} du\,dv = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{1}{2} e^{u^2}\Big|_2^3 dv$$

$$= \frac{1}{6}(e^9 - e^4)\int_1^2 dv = \frac{1}{6}(e^9 - e^4) v \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{6}(e^9 - e^4)$$

S-2)

$u = f(x,y,z) = x + y + z,$

$v = g(x,y,z) = x(y+z)$ fonksiyonlarının,

$w = h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz$

fonksiyonel bağımlı olup olmadığını gösteriniz. Eğer bağımlı ise aralarındaki bağıntıyı yazınız.

Çözüm

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ için $J = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} =$

0 olduğunu gösterelim,

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x & x \\ 2x & 2(y+z) & 2(y+z) \end{vmatrix}$$

$= 2x(y+z) - 2x(y+z) - 2(y+z)^2$

$+ 2x^2 + 2(y+z)^2 - 2x^2 = 0$

fonksiyonel bağımlıdır.

$u - x = y + z$

$v = x(y+z) = x(u-x)$

$w = x^2 + (y+z)^2 = x^2 + (u-x)^2$

$= -2x(u-x) + u^2 = -2v + u^2$

$\chi(u,v,w) = w + 2v - u^2 = 0$

elde edilir.

S-3) $z = e^{x/y}\sin\dfrac{x}{y} + e^{y/x}\cos\dfrac{y}{x}$ fonksiyonunun $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$x\cdot\Big[\frac{1}{y}e^{x/y}\sin x/y + e^{x/y}\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}$$

$$-\frac{y}{x^2}e^{y/x}\cdot\cos y/x + \frac{y}{x^2}e^{y/x}\cdot\sin\frac{y}{x}\Big]$$

$$+y\cdot\Big[-\frac{x}{y^2}e^{x/y}\sin\frac{x}{y} + e^{x/y}\cos\frac{x}{y}\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$+\frac{1}{x}e^{y/x}\cdot\cos y/x - e^{y/x}\cdot\sin\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\Big]$$

$$= \frac{x}{y}\cancel{e^{x/y}\sin\frac{x}{y}} + \frac{x}{y}\cancel{e^{x/y}\cos\frac{x}{y}}$$

$$-\frac{y}{x}\cancel{e^{y/x}\cos y/x} + \frac{y}{x}\cancel{e^{y/x}\sin\frac{y}{x}}$$

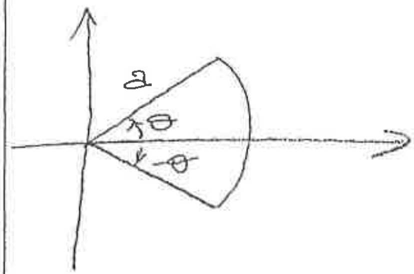
$$-\frac{x}{y}\cancel{e^{x/y}\sin\frac{x}{y}} - \frac{x}{y}\cancel{e^{x/y}\cos\frac{x}{y}}$$

$$+\frac{y}{x}\cancel{e^{y/x}\cos y/x} - \frac{y}{x}\cancel{e^{y/x}\sin y/x}$$

$$= 0$$

S-4) Yarıçapı a ve merkez açısı 2θ olan daire dilimi biçimindeki homojen bir levhanın ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:



$r = a, \quad -\theta \le \varphi \le \theta$

$$A = \int_{-\theta}^{\theta}\int_0^a r\,dr\,d\varphi = \int_{-\theta}^{\theta}\frac{r^2}{2}\Big|_0^a d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\,2\theta = a^2\theta$$

$$\bar{x} = \frac{1}{a^2\theta}\int_{-\theta}^{\theta}\int_0^a r\cos\varphi\, r\,dr\,d\varphi$$

$$= \frac{a^3}{3}\cdot\frac{1}{a^2\theta}\int_{-\theta}^{\theta}\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{a}{3\theta}\sin\varphi\Big|_{-\theta}^{\theta} = \frac{2a\sin\theta}{3\theta}$$

levha homojen x eksenine göre simetrik olduğundan $\bar{y} = 0$ dır.

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

MAT 162 MATEMATİK II DERSİ

2008-2009 BAHAR Y.YILI TELAFİ-MAZERET SINAVI SORULARIDIR.

1	2	3	4	5	

20.05.2009

S.1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{x \to m} \dfrac{\sin x - \sin m}{\cos x - \cos m}$, b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{x^2+2x-8}$.

S.2. $x^2+y^2+3xy-2x+3=0$

kapalı fonksiyonu veriliyor.

$x=1$, $y=-2$ için $\dfrac{dy}{dx}$ in değeri kaçtır?

S.3. $f(x) = 2x^3+5x^2-7x+11$ ise

$f''(-1)$ nedir?

S.4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int (x^{3/2} + 7x^{-1} + 5x^{1/2} + 3)\,dx$

b) $\int x^2 e^{3x}\,dx$

S.5. $\int_{-3}^{3} (x^3+x^2-12x)\,dx$

integralini hesaplayınız.

Not: süre 70 dakikadır.

CEVAPLAR

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

MAT 162 MATEMATİK II DERSİ 2008-2009 BAHAR Y.YILI GENEL SINAV SORULARIDIR.

1	2	3	4	5	T

Adı ve Soyadı:

Fak. No:

09.06.2009

S.1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2+4x+3}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}}{x^2}$.

S.2. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2+3) & -\infty < x \le 1 \text{ için} \\ 6-5x & 1 < x < 3 \text{ için} \\ x-3 & 3 \le x < \infty \text{ için} \end{cases}$

fonk. veriliyor. Bu fonksiyonun $x=1$ ve $x=3$ noktalarında sürekli olup, olmadığını inceleyin

S.3. $g(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$ fonksiyonu veriliyor.

$g''(x)$'i hesaplayınız.

S.4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız:

a) $\int 3x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$, b) $\int e^x . x^2\,dx$

S.5. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız:

a) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x . \cos x\,dx$, b) $\int_{-1}^{2} (x^2+3x+7+\frac{1}{x})\,dx$

Not: süre 70 dakikadır.

CEVAPLAR

S-5) (20p) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{k}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm:

$$C_k = \frac{1}{k}$$

$$\lim \frac{C_{k+1}}{C_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = 1$$

ld. $L=1 \Rightarrow R = \frac{1}{L} = \frac{1}{1} = 1.$

$$|x-1| < R.$$
$$|x-1| < 1$$
$$-1 < x-1 < 1$$
$$0 < x < 2$$

x=0 için $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ alterne serisi yakınsaktır.

x=2 için $\sum \frac{1^k}{k} = \sum \frac{1}{k}$ harmonik serisi ıraksaktır.

Sonuç olarak yakınsaklık aralığı $[0,2)$ dir.

S-6) (20p) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+\arctan x)}$ integralinin değerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+\arctan x)} = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{(1+x^2)(1+\arctan x)}$$

$$\left.\begin{aligned} 1+\arctan x &= u \\ \frac{dx}{1+x^2} &= du \end{aligned}\right\}$$

$$\lim_{t\to\infty} \int \frac{du}{u} = \lim \left[\ln u\right]$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\ln|1+\arctan x|\right]_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\ln|1+\arctan t| - \underbrace{\ln|1+\underbrace{\arctan 0}_{=0}|}_{=0}\right]$$

$$= \ln|1+\arctan\infty|$$

$$= \ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$

Mühendislik Fak. MAT 162 Matematik II Arasınavı		Dersin Hocası: 04.08.2019						Puan
Bölümü :	Şube :	Süre 60 dakikadır. İlk 30 dakika sınavdan çıkmak yasaktır.						
Adı ve Soyadı :		1	2	3	4	5	6	
Öğrenci No :	İmza:							

S-1) (15p) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}$ limitininin mevcut olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: I-yol

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\cancel{y^2}}{\cancel{-y^2}} = -1$$

$1 \neq -1$ old. limit yoktur.

II-yol: (Kutupsal)

$$\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta + r\sin\theta)^2}{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta} = \lim$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^2 + r^2(2\cos\theta.\sin\theta)}{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}$$

$$= \frac{1+2\cos\theta.\sin\theta}{\cos 2\theta}$$

ifadesi θ'ya bağlı old. limit yoktur.

S-2) (15p) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k^3}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm:

Oran Testi

$$\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim \frac{\frac{3^{k+1}}{(k+1)^3}}{\frac{3^k}{k^3}}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{3^{k+1}}{(k+1)^3}\cdot\frac{k^3}{3^k}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{3k^3}{(k+1)^3} = 3 > 1$$

olduğundan ıraksaktır.

S-3) (15p) $5xy^2z^3 + x^2 - y^2 - 5z^2 = 0$ kapalı fonksiyonu için $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}$ türevini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\left.\frac{5y^2z^3 + 2x}{15xy^2z^2 - 10z}\right|_{(1,1,1)}$$

$$= -\frac{7}{5}$$

S-4) (15p) Bir dikdörtgenin kısa kenarı 20 cm, uzun kenarı 30 cm dir. Eğer kısa kenarı 1mm artar, uzun kenarı 2mm azalırsa Alanı yaklaşık kaç cm^2 olur?
(Tam diferensiyel hesabı kullanılacaktır)

Çözüm:

$A = x.y$

$x = 20$
$y = 30$
$dx = 0,1$
$dy = -0,2$

$dA = A_x dx + A_y dy$

$dA = y dx + x dy$

$dA = 30.(0,1) + 20(-0,2)$

$dA = -1$ olduğundan

Alan $1\ cm^2$ azalır. Sonuç olarak yaklaşık

$20.30 - 1 = 599\ cm^2$

olur.

Mühendislik Fak. MAT 162 Matematik II Arasınavı		Dersin Hocası:					08.04.2019
Bölümü:	Grubu:	Süre 70 dakikadır. İlk 30 dakika sınavdan çıkmak yasaktır.					
Adı ve Soyadı:		1	2	3	4	5	6
Öğrenci No:	İmza:						

S-1) (20p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}(x-3)^n$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz

Çözüm:

$c_n = \frac{1}{n5^n}$, $x_0 = 3$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 5^n}{(n+1)\, 5^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{5} = L$$

$R = \frac{1}{L} = 5 \Rightarrow |x-3| < 5 \Rightarrow -5 < x-3 < 5$

$\Rightarrow -2 < x < 8$

$x=-2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n.5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

bu seri Alterne seridir. Leibnitz testi,

$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim \frac{1}{n} = 0$, $0 < a_{n+1} < a_n$

old. yakınsak.

$x=8$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n.5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Harmonik seri $\alpha=1$ old. ıraksak

$\Rightarrow$ Yakınsaklık aralığı:

$x \in [-2, 8)$

S-2) (15p) $x^2y + zx^3 + z^3y - xyz - 1$ ile verilen $z = f(x,y)$ fonksiyonunun z_x kısmi türevini $(1,0,1)$ noktasında hesaplayınız.

Çözüm:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$= -\frac{(2xy + 3zx^2 - yz)}{(x^3 + 3z^2y - xy)}$$

$z_x(1,0,1)$ için

$$z_x(1,0,1) = -\frac{(2.1.0 + 3.1.1 - 0.1)}{(1^3 + 3.1^2.0 - 1.0)}$$

$$= -\frac{3}{1} = -3$$

S-3) (15p) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2 - y}$ limitinin var olmadığını gösteriniz.

Çözüm:

Kartezyen koordinatlardan:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2}{x^2-y}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2-y}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{-y}\right) = 0$$

Eşitlik olmadığından, limit mevcut değildir.

S-4) (20p) $\sqrt{(3{,}01)^2 + (3{,}98)^2}$ sayısının yaklaşık değerini hesaplayınız.

Çözüm:

$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ol. üz.

$x = 3$ $\quad y = 4$

$dx = 0.01$ $\quad dy = -0.02$

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$$

$$= \frac{3}{5}(0{,}01) + \frac{4}{5}(-0{,}02)$$

$$df = -0{,}01$$

Gerçek Değer: $\sqrt{3^2+4^2} = 5$

Yaklaşık Değer: $5 - 0{,}01 \cong 4{,}99$

S-5) (15p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{3^n (n!)^2}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm:

D' Alembert Oran testinden

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)!}{3^{n+1}((n+1)!)^2} \cdot \frac{3^n (n!)^2}{(n+2)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{3(n+1)^2} = 0$$

$0 < 1$ old. seri yakınsak.

S-6) (15p) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ integralinin çeşidini belirleyiniz. Yakınsaklık durumunu inceleyip, değerini bulunuz.

Çözüm:

Birinci Çeşit Genelleştirilmiş İnt.

$$\lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{dx}{x(\ln x)^2}, \quad \ln x = u, \quad \frac{dx}{x} = du$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{du}{u^2} = \lim_{t\to\infty} \left\{ -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^t \right\}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left\{ -\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{\ln 2} \right\} = \frac{1}{\ln 2}$$

old. integral yakınsak.