

Algoritmi Euristici
One Dimensional Bin Packing Problem

Università degli Studi Di Milano

Marco Odore

9 luglio 2017

Indice

1	Introduzione	4
1.1	One Dimensional Bin Packing	4
2	Euristiche implementate	4
2.1	FirstFit	5
2.2	Minimum Bin Slack	5
2.3	MBS Sampling	6
2.4	Variable Neighbourhood Search	7
3	Dataset di test	7
4	Valutazione degli algoritmi	8
4.1	Metriche Classiche	8
4.2	SQD	9
5	Lavori futuri	10

1 Introduzione

Lo scopo del lavoro è quello di proporre una possibile implementazione in C di diversi metodi euristici applicati al problema del *One Dimensional Bin Packing*, per la ricerca di soluzioni ottime o che comunque vi si avvicinano.

1.1 One Dimensional Bin Packing

Dato un multiset di n oggetti $O = \{o_1, o_2, o_3 \dots o_n\}$, ognuno con dimensione d_i , lo scopo è quello di minimizzare il numero di contenitori b_j (bin) $M = \{b_1, b_2, b_3 \dots b_n\}$, ognuno con dimensione fissata B , che contengono tali oggetti.

Il problema è soggetto a diversi vincoli:

- Ogni oggetto deve essere inserito in un solo contenitore.
- La somma delle dimensioni d_i degli oggetti o_i , nel contenitore b_j , non deve superare la dimensione del contenitore.

$$\sum_{o_i \in b_j} d_i \leq B$$

- Il numero dei contenitori b_j deve essere il minimo possibile. Si cercherà quindi di minimizzare tale funzione:

$$\min \sum_{j=1}^n y_j$$

In cui y_i è una variabile binaria associata agli n possibili contenitori b_j (il caso peggiore contempla un contenitore per ogni oggetto presente nel multi insieme).

Secondo la teoria della complessità, tale problema ha complessità *NP-hard*. Per tale motivo sono state studiate diverse tecniche euristiche, con lo scopo di ottenere un trade-off tra velocità di esecuzione e ottimalità delle soluzioni generate.

2 Euristiche implementate

Per la risoluzione del problema sono state implementate due principali euristiche costruttive greedy:

- FirstFit
- Minimum Bin Slack (MBS)

Che poi sono servite da base per altre due meta euristiche:

- MBS Sampling
- Variable Neighbour Search (VNS)

2.1 FirstFit

Tale algoritmo è molto banale, e si basa sull'idea greedy che, scorrendo iterativamente la lista di oggetti, se nel contenitore b_j corrente c'è abbastanza spazio, allora vi si inserisce l'oggetto corrente o_i . Altrimenti, se non c'è spazio tra i contenitori attualmente presenti, se ne genera uno nuovo.

Algorithm 1 FirstFit

```
1: for obj in objectList do
2:   for bin in binList do
3:     if obj fit in bin then
4:       Pack object in bin
5:       break
6:     end if
7:   end for
8:   if obj did not fit in any available bin then
9:     Create new bin and pack object in it
10:  end if
11: end for
```

Tale algoritmo ha una complessità di $O(n \log n)$.

Una variante di questo algoritmo, il *FirstFit Decreasing*, prende in considerazione l'idea che posizionare oggetti grandi sia più difficile che posizionarne di piccoli, e consiste nell'ordinamento decrescente della lista di oggetti del dataset, prima dell'esecuzione del FirstFit.

2.2 Minimum Bin Slack

L'MBS è un'euristica greedy orientata sui contenitori. L'algoritmo consiste nel mantenere, ad ogni passo, una lista di oggetti Z non ancora inseriti, con un ordinamento decrescente, ricercando tra questi l'insieme di oggetti che meglio riempiono il contenitore corrente (idealmente non lasciando spazio libero).

La ricerca del sottoinsieme di oggetti da inserire nel contenitore corrente, avviene tramite una procedura ricorsiva, la quale testa tutti i possibili sottoinsiemi della lista Z . Se durante la ricerca si trova una soluzione che riempie totalmente il contenitore, questa viene interrotta, poiché non ci può essere una soluzione migliore per il contenitore corrente, ma al massimo equivalente (da notare comunque che il sottoinsieme generato potrebbe non essere ottimo per la soluzione globale).

Di seguito lo pseudocodice dell'algoritmo utilizzato nel lavoro¹ :

Algorithm 2 MBSsearch

```

Procedure MBSsearch(q)
2: for int  $r = q$  to  $n$  do
     $o_r = Z[r]$ 
4:   if  $size(o_r) \leq slack(A)$  then
         $A = A \cup \{o_r\}$ 
6:    $MBSsearch(r + 1)$ 
         $A = A - \{o_r\}$ 
8:   if  $slack(A^*) = 0$  then
        exit
10:  end if
    end if
12: end for
    if  $slack(A) < slack(A^*)$  then
14:    $A^* = A$ 
    end if
  
```

Dato che in linea teorica questa procedura cerca tutte le possibili combinazioni di elementi da inserire in un contenitore, questa ha complessità $O(2^n)$. Nella pratica è possibile velocizzare l'algoritmo con alcuni accorgimenti. Ad esempio, se lo slack del sottoinsieme corrente è più piccolo del più piccolo elemento dell'insieme di oggetti, cioè che $slack(A) < size(obj_{min})$, allora il ciclo for viene saltato, in quanto per il sottoinsieme A non esiste miglioramento possibile.

Una variante di questo algoritmo è il *modified MBS* (definito semplicemente come MBS'), che crea dei sottoinsiemi per i contenitori del problema alla stessa maniera dell' *MBS base*, con la differenza che, prima di eseguire la procedura di ricerca, un oggetto preso dalla lista Z viene sempre fissato all'interno del contenitore corrente.

A differenza dell'*MBS base* che rischia di sfruttare subito gli oggetti di piccola dimensione, l' MBS' si forza nel fissare almeno un oggetto grande (il più grande tra i rimanenti nella lista Z , al momento corrente), generando soluzioni differenti, e potenzialmente migliori.

2.3 MBS Sampling

Questo algoritmo invoca diverse volte l'euristica MBS' , cambiando l'ordine degli oggetti nella lista Z ad ogni esecuzione, e adottando la soluzione migliore trovata.

L'ordinamento del vettore Z è basato probabilisticamente sull'ordine decrescente delle dimensioni degli oggetti, con la probabilità di selezionare un oggetto o_i e di riempire il vettore ordinato ad ogni step, pari a:

$$p_i = \frac{size(o_i)^2}{\sum_{o_j \in A} size(o_j)^2}$$

Dove A in questo caso rappresenta il multiset di oggetti o_j non ancora inseriti nella lista.

¹ A e A^* indicano, rispettivamente, gli insiemi corrente e il migliore. q è l'indice da cui si parte per la ricerca ricorsiva nella lista Z . $slack(A)$ è una funzione che ci dice di quanto dista la somma delle dimensioni degli oggetti di A rispetto alla capacità del contenitore, mentre $size(o_i)$ ci dice la dimensione dell'oggetto o_i .

2.4 Variable Neighbourhood Search

Questo tipo di meta euristica sfrutta la variazione sistematica ed incrementale dell'intorno di una soluzione di partenza, applicando poi degli algoritmi di ricerca del minimo, come ad esempio l'algoritmo di *discesa del gradiente*.

La tecnica si compone di tre fasi principali, iterate:

1. Shaking
2. Local Search
3. Move or not

Shaking - Questa fase consiste nel perturbare una soluzione x di partenza (presa ad esempio dall' MBS') per muoversi nel suo intorno $N(x)$ generando una nuova soluzione x' . L'intorno incrementale della soluzione x di partenza $N_k(x)$ viene definito dal numero di mosse k utilizzate per ottenere la perturbazione.

Le mosse utilizzate possono essere di due tipi, e cioè di *swap* o di *transfer*. Lo swap consiste nello scambiare due oggetti presenti in due contenitori differenti, mentre il trasferimento porta allo spostamento di un oggetto da un contenitore ad un altro. Chiaramente queste mosse devono essere sensate e consentite. Cioè devono portare ad una effettiva variazione della soluzione e non ne devono violare i vincoli².

Local Search - La ricerca locale di un minimo nell'intorno avviene tramite la *discesa del gradiente*. In questo caso specifico è utile pensare alla funzione obiettivo come ad una funzione da massimizzare piuttosto che da minimizzare (numero di contenitori). Viene infatti massimizzata la somma quadratica della dimensione degli oggetti in un contenitore:

$$\max f(x) = \sum_{a=1}^m (l(a))^2$$

Dove $l(a)$ indica la somma delle dimensioni degli oggetti presenti nel bin a . La discesa avviene tramite una ricerca iterativa ad ogni step della miglior mossa possibile di swap o di transfer, che migliora la funzione obiettivo. La ricerca termina se non esistono mosse possibili che migliorano la soluzione.

Move or not - Se la ricerca locale ha portato ad un effettivo miglioramento della soluzione, ci si muove verso la nuova soluzione, facendola diventare quella corrente e si prova ad esplorare il suo intorno, altrimenti si prova ad allargare l'intorno della soluzione originale. L'allargamento dell'intorno avviene tramite l'aumento del numero di mosse utilizzate per perturbare la soluzione ($k = k + 1$). Quando si trova una soluzione migliore invece, si ritorna ad un intorno più piccolo ($k = 1$). Chiaramente bisogna settare un confine all'intorno, fissando un k_{max} , che se raggiunto termina la ricerca.

3 Dataset di test

Il dataset utilizzato[1] per testare i diversi algoritmi è suddiviso in 2 classi principali. La prima, che va da *binpack1* al *binpack4*, consiste di oggetti uniformemente distribuiti in (20,100) (interi), che devono essere inseriti in contenitori di dimensione 150. La seconda classe, composta dai file che vanno da *binpack5* a *binpack8*, consiste invece di oggetti uniformemente distribuiti in (25,50)(reali), che devono essere inseriti in contenitori di dimensione 100.

Sia per la prima classe che per la seconda classe vi sono 80 problemi differenti, i quali variano per il numero di oggetti totali da inserire nei contenitori.

²Ad esempio scambiare due oggetti uguali non modifica la soluzione.

4 Valutazione degli algoritmi

Per la valutazione dei diversi algoritmi si sono utilizzate diverse metriche. In particolar modo, per valutarne l'efficacia si sono utilizzate:

- **Media**
- **Varianza**

della differenza relativa rispetto all'ottimo conosciuto, come statistiche descrittive classiche.

Mentre per verificare la robustezza dell'algoritmo sulle diverse istanze, si è utilizzata la *Solution Quality Distribution*, la quale ci ha permesso inoltre di confrontare le diverse performance, identificando possibili dominanze probabilistiche.

Essendo le meta euristiche parametriche, ci si è concentrati su delle configurazioni specifiche³

- **MBS Sampling** - 100 tentativi
- **VNS** - $K_{max} = 15$

4.1 Metriche Classiche

Per quanto riguarda la prima classe del dataset (Tabelle 1, 2, 3, 4), tra le euristiche base, l'*MBS* risulta essere il migliore a livello di performance, mentre la sua controparte modificata (*MBS'*) non sembra apportare un miglioramento significativo del risultato (Solo in un dataset risulta essere migliore, mentre in un altro risulta addirittura peggiore).

Si può notare inoltre di come la semplice euristica costruttiva *firstfit decreasing*, porti ad un significativo vantaggio a livello di performance, rispetto alla controparte base.

Le meta euristiche, invece, sono state capaci di individuare soluzioni migliori di quelle ottenute dalle euristiche base che nel caso del VNS, per alcuni problemi, superano addirittura la soluzione ottima conosciuta.

STATS	firstfit	firstfitD	MBS	MBS'	MBS sampling	VNS
media	0.06199095122999032	0.012425417491411279	0.008154591267945304	0.009133332764543945	0.0	0.001980392156862745
varianza	0.0003160755569282529	0.00010859439331332344	0.0001898696343497463	0.00010757261599727328	0.0	3.715939213662761e-05

Tabella 1: Binspace1

STATS	firstfit	firstfitD	MBS	MBS'	MBS sampling	VNS
media	0.06287314534450404	0.013780965806614049	0.0058278313046767	0.0034141083317763125	0.0009523809523809525	0.0009523809523809525
varianza	8.481613778490945e-05	3.51600865218429e-05	4.351508405400733e-05	3.23532434800901e-05	8.592910848549947e-06	8.592910848549947e-06

Tabella 2: Binspace2

STATS	firstfit	firstfitD	MBS	MBS'	MBS sampling	VNS
media	0.05738235568611945	0.013431342057856469	0.002961404441721627	0.002961404441721627	0.00048664393293549306	0.0007293623795374347
varianza	4.6551822475101435e-05	8.192502711833259e-06	1.3829946717064544e-05	1.3829946717064544e-05	2.2437126679395375e-06	3.173289218671757e-06

Tabella 3: Binspace3

STATS	firstfit	firstfitD	MBS	MBS'	MBS sampling	VNS
media	0.052298090963001455	0.01211464883863295	0.0019852702126259138	0.0019852702126259138	0.00012165450121654502	0.00024330900243309004
varianza	9.026227982643407e-06	5.59518009011169e-06	3.5310023285136244e-06	3.5310023285136244e-06	2.959963533249271e-07	1.1839854132997084e-06

Tabella 4: Binspace4

³Ci si è limitati ad individuare delle configurazioni capaci di superare le euristiche base.

Per la seconda classe del dataset (Tabelle 5, 6, 7, 8), le differenze di performance tra gli algoritmi appaiono più nette. Vi è inoltre uno stravolgimento della situazione vista in precedenza, in cui *MBS* dominava tra le euristiche base. Qui a dominare è il *firstfit*, che risulta essere addirittura migliore della sua versione modificata *firstfit decreasing* ⁴.

Si nota inoltre un calo generale della qualità dei risultati, facendo intuire la presenza di difficoltà maggiori nel problema affrontato.

STATS	firstfit	firstfitD	MBS	MBS'	MBS sampling	VNS
media	0.1475000000000002	0.1625	0.3349999999999996	0.275	0.075	0.05
varianza	0.0006513157894736842	0.0004934210526315793	0.0008157894736842105	0.0009210526315789469	0.0006578947368421052	0.0

Tabella 5: Binpack5

STATS	firstfit	firstfitD	MBS	MBS'	MBS sampling	VNS
media	0.12	0.1475	0.2274999999999998	0.2274999999999998	0.07625	0.025
varianza	0.0003684210526315788	0.0001249999999999995	0.0001249999999999995	0.0001249999999999995	3.1250000000000002e-05	0.0

Tabella 6: Binpack6

STATS	firstfit	firstfitD	MBS	MBS'	MBS sampling	VNS
media	0.11144578313253013	0.14578313253012049	0.19819277108433736	0.19698795180722892	0.08795180722891566	0.012048192771084338
varianza	0.00012032912881710738	7.487145793064456e-05	8.365739432046505e-05	8.060141644574486e-05	3.208776768456202e-05	0.0

Tabella 7: Binpack7

STATS	firstfit	firstfitD	MBS	MBS'	MBS sampling	VNS
media	0.10868263473053892	0.1404191616766467	0.17395209580838325	0.1715568862275449	0.09491017964071856	0.005988023952095809
varianza	8.78482555846391e-05	1.6890266111332283e-05	2.0664627253529534e-05	1.990975502509012e-05	1.2361032740695731e-05	0.0

Tabella 8: Binpack8

4.2 SQD

I seguenti grafici *SQD* si sono ottenuti tramite il plotting della funzione di ripartizione empirica, generata dalla distribuzione di probabilità delle differenze relative (all'ottimo conosciuto).

Essendo dei semplici plot qualitativi, questi grafici sono da intendersi come puramente indicativi di una possibile dominanza, la quale può essere verificata, in maniera quantitativamente significativa, tramite dei test di ipotesi, quali ad esempio il Test di Wilcoxon.

Per i dataset della prima classe (Tabella 9), è interessante notare la presenza di una dominanza probabilistica del *firstfit decreasing* rispetto al *firstfit* base, a differenza invece delle due euristiche *MBS* e *MBS'*, che, come avevamo verificato anche in precedenza, non lasciano intuire una differenza netta a livello di performance. È inoltre evidente la scarsa "robustezza" del *firstfit* rispetto alle altre euristiche, il quale si distribuisce su di un range più grande, avendo una varianza dei risultati più elevata.

⁴Questa situazione è data forse dal modo in cui è stata generata la seconda classe del dataset.[1]

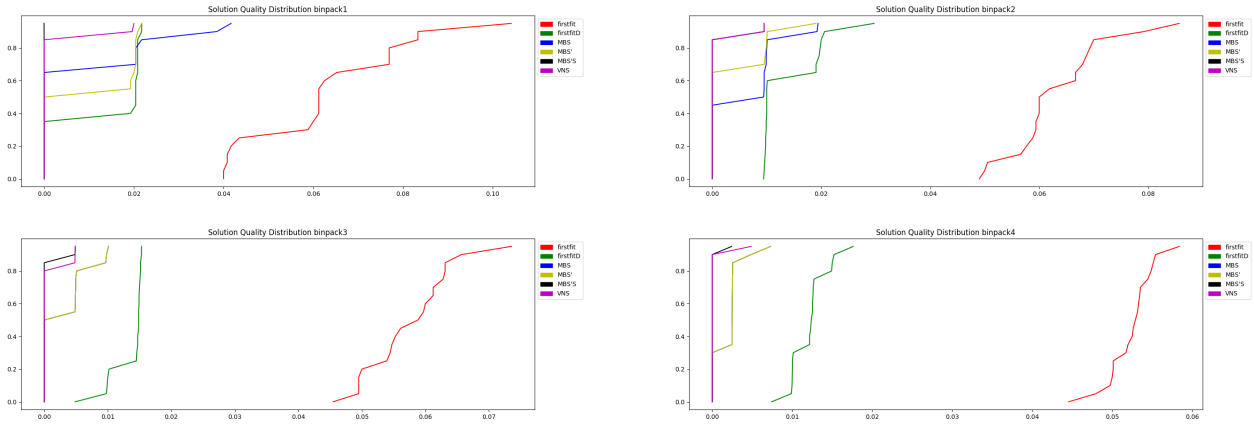


Tabella 9: La prima classe del dataset.

Per la seconda classe di problemi (Tabella 10), gli algoritmi si differenziano in maniera più netta. A differenza della prima classe poi, vi è uno stravolgimento delle performance degli algoritmi euristici costruttivi. Infatti a dominare è il *firstfit*, che risulta migliore del *firstfit decreasing* e delle due versioni dell'*MBS*. Inoltre vi è una dominanza stretta dell'*MBS'* rispetto all'*MBS base*.

Per le metaeuristiche è interessante notare la robustezza del VNS, che risulta essere praticamente costante a livello di performance rispetto all'ottimo conosciuto.

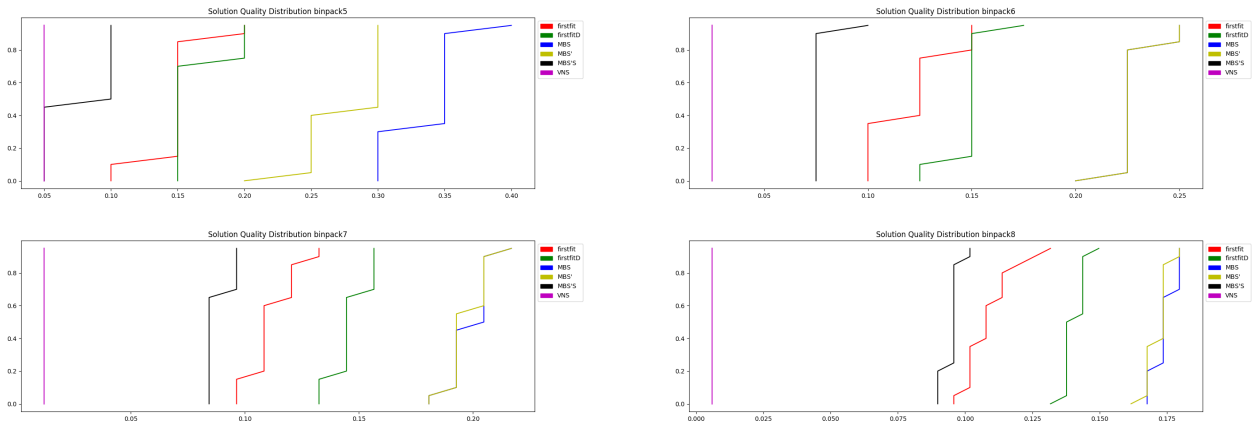


Tabella 10: La seconda classe del dataset.

5 Lavori futuri

Tra i possibili lavori futuri, oltre all'espansione del dataset di test e all'utilizzo di altre metriche di valutazione, tra cui quelle temporali, si propongono

- variazioni dei parametri delle metaeuristiche MBS sampling e VNS, con relativo confronto.
- un possibile confronto diretto delle meta euristiche MBS sampling e VNS, fissando diversi tempi di esecuzione dei due algoritmi, in maniera tale da generare soluzioni equamente comparabili.
- test di Wilcoxon per stabilire se due algoritmi comparabili siano significativamente distinti a livello di performance.

Riferimenti bibliografici

- [1] E.Falkenauer, "*A Hybrid Grouping Genetic Algorithm for Bin Packing*", Working paper CRIF Industrial Management and Automation, CP 106 - P4, 50 av. F.D.Roosevelt, B-1050 Brussels (1994)