Métodos Matemáticos

Alberto Cortés González - A01635875

Agosto 2020

1 Actividad 1

Proof. $\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin\theta$
A continuaciónn vamos a demostrar que la norma del resultado del producto cruz entre 2 vectores a y b es equivalente al producto entre la norma de cada uno de los vectores por el seno del ángulo entre ambos.

Comenzamos elevando nuestro término de la izquierda al cuadrado, evaluamos el producto cruz y desarrollamos completamente los términos.

$$\begin{aligned}
\|a \times b\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
(a_2b_3 - a_3b_2)^2 &= (a_2b_3)^2 - 2(a_2b_2a_3b_3) + (a_3b_2)^2 \\
(a_3b_1 - a_1b_3)^2 &= (a_3b_1)^2 - 2(a_3b_1a_1b_3) + (a_1b_3)^2 \\
(a_1b_2 - a_2b_1)^2 &= (a_1b_2)^2 - 2(a_1b_2a_2b_1) + (a_2b_1)^2 \\
\|a \times b\|^2 &= a_2^2b_3^2 - 2a_2b_2a_3b_3 + a_3^2b_2^2 \\
&+ a_3^2b_1^2 - 2a_1b_1a_3b_3 + a_1^2b_3^2 \\
&+ a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2 \\
&= a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2) \\
&- 2(a_2b_2a_3b_3 + a_1b_1a_3b_3 + a_1b_1a_2b_2)
\end{aligned}$$

Habiendo terminado ese desarrollo comenzamos uno nuevo, esta vez tomaremos el cuadrado de la norma de a por el cuadrado de la norma de b por el coseno cuadrado de teta. Esto siendo equivalente al cuadrado del pruducto punto entre ambos vectores y buscando llegar más adelante al lado derecho de nuestro planteamiento inicial.

$$\begin{aligned}
\|a\|^2 \|b\|^2 \cos^2\theta = (a \cdot b)^2 &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \\
&+ 2(a_1b_1a_2b_2 + a_1b_1a_3b_3 + a_2b_2a_3b_3)
\end{aligned}$$

Ahora sumamos los resultados de los 2 desarrollos anteriores en la parte derecha de nuestra ecuación.

$$\begin{aligned}
\|a \times b\|^2 + \|a\|^2 \|b\|^2 \cos^2\theta &= a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2) \\
&+ a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \\
&= a_1^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\
&= \|a\|^2 \|b\|^2
\end{aligned}$$

Finalmente restamos el segundo desarrollo a ambos lados y llegamos a lo que buscamos demostrar.

$$\begin{aligned}
\|a \times b\|^2 &= \|a\|^2 \|b\|^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 \cos^2\theta \\
&= \|a\|^2 \|b\|^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= \|a\|^2 \|b\|^2 \sin^2\theta \\
&\therefore \|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin\theta
\end{aligned}$$

□

2 Actividad 2

Dados los vectores $\vec{a} = \langle 1, 1, 0 \rangle$, $\vec{b} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ y $\vec{c} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ encuentraremos los vectores recíprocos para cada uno de estos.

Comenzaremos por calcular $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ pues este valor será utilizado a lo largo del cálculo de los 3 vectores recíprocos como el denominador de cada uno.

$$(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{k} = \langle 1, 0, -1 \rangle$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle 1, 1, 0 \rangle \cdot \langle 1, 0, -1 \rangle = 1$$

Teniendo este valor podemos seguir adelante y calcular el producto cruz respectivo para encontrar el vector recíproco de cada uno de nuestros vectores, comenzando por el vector a.

$$\vec{a'} = \frac{(\vec{b} \times \vec{c})}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{k} = \langle 1, 0, 1 \rangle$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a'} = \langle 1, 1, 0 \rangle \cdot \langle 1, 0, -1 \rangle = 1$$

Ahora calcularemos el vector recíproco de b.

$$\vec{b'} = \frac{(\vec{c} \times \vec{a})}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{j} - \hat{i} = \langle -1, 1, 0 \rangle$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b'} = \langle 0, 1, 0 \rangle \cdot \langle -1, 1, 0 \rangle = 1$$

Finalmente calculamos el vector recíproco de c.

$$\vec{c'} = \frac{(\vec{a} \times \vec{b})}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$\vec{c} \cdot \vec{c'} = \langle 1, 1, 1 \rangle \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle = 1$$

3 Actividad 3

Evalua la siguiente suma con la delta de Kronecker.

$$\sum_{k=1}^{10} \delta_{i,k}\delta_{k,j} \quad (1 \leq i, j \leq 10)$$

Algo que podemos notar es que en cada iteración de la sumatoria tendremos la multiplicación de ambas deltas, cada una con sus respectivos subíndices. Sabemos que cuando los índices del delta sean distintos este dará 0, siguiendo esto cualquier combinación de los 3 subíndices resultaría en uno de 4 casos, $0 \cdot 0$, $0 \cdot 1$, $1 \cdot 0$ o $1 \cdot 1$, siendo este último el único que nos interesa.

Notando que este último solo se da cuando $i = k$ y $k = j$, entonces necesitamos que $i = j = k$ para tener un valor distinto a 0, reduciendo las 1000 posibles combinaciones a solo 10 que aportan a la suma.

$$\sum_{k=1}^{10} \delta_{i,j} \quad (1 \leq i, j \leq 10) = \sum_{k=1}^{10} 1 = 10$$

4 Actividad 4

Descripción y demostración de las propiedades de la Delta de Kronecker y el Símbolo de Levi-Civita asó como su relación.

- $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$
- $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$
- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$
- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$
- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$
- $\epsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-a)$, para $(i,j,k) = 1,2,3$

5 Actividad 5

Para una partícula moviéndose en una orbita circular $\boldsymbol{r} = r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}$:

1. Evalúa $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$, $\dot{\boldsymbol{r}}$ siendo $= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}$.
   Comenzamos por evaluar $\dot{\boldsymbol{r}}$, derivando con respecto a t.

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{d}{dt}r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} = -r\omega\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + r\omega\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{v}$$

   Seguido de esto evaluamos el producto cruz entre $\boldsymbol{r}$ y $\dot{\boldsymbol{r}}$, este al no estar definido en $\mathbb{R}^2$ añadiremos una componente en $\hat{\boldsymbol{z}}$ con valor de 0 para ambos vectores.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ r\cos(\omega t) & r\sin(\omega t) & 0 \\ -r\omega\sin(\omega t) & r\omega\cos(\omega t) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \hat{\boldsymbol{x}} \begin{vmatrix} r\sin(\omega t) & 0 \\ r\omega\cos(\omega t) & 0 \end{vmatrix} - \hat{\boldsymbol{y}} \begin{vmatrix} r\cos(\omega t) & 0 \\ -r\omega\sin(\omega t) & 0 \end{vmatrix} + \hat{\boldsymbol{z}} \begin{vmatrix} r\cos(\omega t) & r\sin(\omega t) \\ -r\omega\sin(\omega t) & r\omega\cos(\omega t) \end{vmatrix} \\
&= (r^2\omega\cos^2(\omega t) + r^2\omega\sin^2(\omega t))\hat{\boldsymbol{z}} \\
&= (r^2\omega(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)))\hat{\boldsymbol{z}} \\
&= r^2\omega\hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}$$

2. Muestra que $\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega^2\boldsymbol{r} = 0$ con $\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$.

   Proof. Partiremos suponiendo que $\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega^2\boldsymbol{r} = 0$.
   Primero obtendremos $\ddot{\boldsymbol{r}}$.

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{r}} &= \frac{d^2}{dt^2}r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{d^2}{dt^2}r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} = -r\omega^2\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} - r\omega^2\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} \\
&= -\omega^2(r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}})
\end{aligned}$$

   Ahora que ya tenemos nuestro vector podemos realizar la suma igualada a 0.

$$\begin{aligned}
-\omega^2(r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}) + \omega^2 r &= 0 \\
\omega^2 r &= \omega^2(r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}})
\end{aligned}$$

   Buscando igualar ambos lados obtendremos la norma de ellos.

$$\begin{aligned}
\left\|\omega^2 r\right\| &= \left\|\omega^2\right\| \left\|(r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}})\right\| \\
\omega^2 r &= \omega^2\sqrt{r^2\cos^2(\omega t) + r^2\sin^2(\omega t)} \\
\omega^2 r &= \omega^2\sqrt{r^2(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))} \\
\omega^2 r &= \omega^2\sqrt{r^2} \\
\omega^2 r &= \omega^2 r
\end{aligned}$$

   Al ser esto cierto podemos asumir que nuestra suposición inicial era correcta.

$$\therefore \ddot{\boldsymbol{r}} + \omega^2\boldsymbol{r} = 0$$

   □

   - El radio $\boldsymbol{r}$ y la velocidad angular ω son constantes.

6 Actividad 6

Calcula la curvatura de $r(t) = \left\langle t^2, \sin(t) - t\cos(t), \cos(t) + t\sin(t) \right\rangle$, donde $t > 0$.

Para obtener la curvatura usaremos el teorema que dicta lo siguiente:

$$\kappa(t) = \frac{|T'|}{|r'|} = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}$$

Lo primero que haremos será obtener tanto r' como r'', pues calcularemos la curvatura a partir de estas.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}r = r' &= \left\langle \frac{d}{dt}t^2, \frac{d}{dt}(\sin(t) - t\cos(t)), \frac{d}{dt}(\cos(t) + t\sin(t)) \right\rangle \\
&= \langle 2t, t\sin(t), t\cos(t) \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}r = r'' &= \left\langle \frac{d^2}{dt^2}t^2, \frac{d^2}{dt^2}(\sin(t) - t\cos(t)), \frac{d^2}{dt^2}(\cos(t) + t\sin(t)) \right\rangle \\
&= \langle 2, t\cos(t) + \sin(t), \cos(t) - t\sin(t) \rangle
\end{aligned}$$

Seguido de esto calculamos el numerador de nuestra ecuación antes de obtener su norma.

$$\begin{aligned}
r' \times r'' &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2t & t\sin(t) & t\cos(t) \\ 2 & t\cos(t) + \sin(t) & \cos(t) - t\sin(t) \end{vmatrix} \\
&= \hat{\imath} \begin{vmatrix} t\sin(t) & t\cos(t) \\ t\cos(t) + \sin(t) & \cos(t) - t\sin(t) \end{vmatrix} \\
&- \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 2t & t\cos(t) \\ 2 & \cos(t) - t\sin(t) \end{vmatrix} \\
&+ \hat{k} \begin{vmatrix} 2t & t\sin(t) \\ 2 & t\cos(t) + \sin(t) \end{vmatrix} \\
&= -t^2\hat{\imath} + 2t^2\sin(t)\hat{\jmath} + 2t^2\cos(t)\hat{k}
\end{aligned}$$

Ahora que ya lo tenemos podemos calcular su norma.

$$\begin{aligned}
\|r' \times r''\| &= \left\| \left\langle -t^2, 2t^2\sin(t), 2t^2\cos(t) \right\rangle \right\| \\
&= \sqrt{(-t^2)^2 + (2t^2\sin(t))^2 + (2t^2\cos(t))^2} \\
&= \sqrt{t^4 + 4t^4\sin^2(t) + 4t^4\cos^2(t)} \\
&= \sqrt{t^4 + 4t^4(\sin^2(t) + \cos^2(t))} \\
&= \sqrt{5t^4} = \sqrt{5}t^2
\end{aligned}$$

Una vez que obtuvimos el numerador encontraremos el denominador.

$$\begin{aligned}
\|r'\|^3 &= \|\langle 2t, t\sin(t), t\cos(t) \rangle\|^3 \\
&= \sqrt{(2t)^2 + (t\sin(t))^2 + (t\cos(t))^2}^3 \\
&= \sqrt{4t^2 + t^2\sin^2(t) + t^2\cos^2(t)}^3 \\
&= \sqrt{4t^2 + t^2(\sin^2(t) + \cos^2(t))}^3 \\
&= \sqrt{5t^2}^3 = 5\sqrt{5}t^3
\end{aligned}$$

Finalmente resolvemos para obtener la curvatura.

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{5}t^2}{5\sqrt{5}t^3} = \frac{1}{5t}$$