Métodos Matemáticos

Alberto Cortés González - A01635875

Agosto 2020

1 Actividad 1

Proof. $\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin\theta$
A continuaciónn vamos a demostrar que la norma del resultado del producto cruz entre 2 vectores a y b es equivalente al producto entre la norma de cada uno de los vectores por el seno del ángulo entre ambos.

Comenzamos elevando nuestro término de la izquierda al cuadrado, evaluamos el producto cruz y desarrollamos completamente los términos.

$$\begin{aligned}
\|a \times b\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
(a_2b_3 - a_3b_2)^2 &= (a_2b_3)^2 - 2(a_2b_2a_3b_3) + (a_3b_2)^2 \\
(a_3b_1 - a_1b_3)^2 &= (a_3b_1)^2 - 2(a_3b_1a_1b_3) + (a_1b_3)^2 \\
(a_1b_2 - a_2b_1)^2 &= (a_1b_2)^2 - 2(a_1b_2a_2b_1) + (a_2b_1)^2 \\
\|a \times b\|^2 &= a_2^2b_3^2 - 2a_2b_2a_3b_3 + a_3^2b_2^2 \\
&+ a_3^2b_1^2 - 2a_1b_1a_3b_3 + a_1^2b_3^2 \\
&+ a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2 \\
&= a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2) \\
&- 2(a_2b_2a_3b_3 + a_1b_1a_3b_3 + a_1b_1a_2b_2)
\end{aligned}$$

Habiendo terminado ese desarrollo comenzamos uno nuevo, esta vez tomaremos el cuadrado de la norma de a por el cuadrado de la norma de b por el coseno cuadrado de teta. Esto siendo equivalente al cuadrado del pruducto punto entre ambos vectores y buscando llegar más adelante al lado derecho de nuestro plantemiento inicial.

$$\begin{aligned}
\|a\|^2 \|b\|^2 \cos^2\theta = (a \cdot b)^2 &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \\
&+ 2(a_1b_1a_2b_2 + a_1b_1a_3b_3 + a_2b_2a_3b_3)
\end{aligned}$$

Ahora sumamos los resultados de los 2 desarrollos anteriores en la parte derecha de nuestra ecuación.

$$\begin{aligned}
\|a \times b\|^2 + \|a\|^2 \|b\|^2 \cos^2\theta &= a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2) \\
&+ a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \\
&= a_1^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\
&= \|a\|^2 \|b\|^2
\end{aligned}$$

Finalmente restamos el segundo desarrollo a ambos lados y llegamos a lo que buscamos demostrar.

$$\begin{aligned}
\|a \times b\|^2 &= \|a\|^2 \|b\|^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 \cos^2\theta \\
&= \|a\|^2 \|b\|^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= \|a\|^2 \|b\|^2 \sin^2\theta \\
&\therefore \|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin\theta
\end{aligned}$$

□

2 Actividad 2

Dados los vectores $\vec{a} = \langle 1,1,0\rangle$, $\vec{b} = \langle 0,1,0\rangle$ y $\vec{c} = \langle 1,1,1\rangle$ encuentraremos los vectores recíprocos para cada uno de estos.

Comenzaremos por calcular $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ pues este valor será utilizado a lo largo del cálculo de los 3 vectores recíprocos como el denominador de cada uno.

$$(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{k} = \langle 1,0,-1\rangle$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \langle 1,1,0\rangle \cdot \langle 1,0,-1\rangle = 1$$

Teniendo este valor podemos seguir adelante y calcular el producto cruz respectivo para encontrar el vector recíproco de cada uno de nuestros vectores, comenzando por el vector a.

$$\vec{a'} = \frac{(\vec{b}\times\vec{c})}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})} = 1\cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{k} = \langle 1,0,-1\rangle$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a'} = \langle 1,1,0\rangle \cdot \langle 1,0,-1\rangle = 1$$

Ahora calcularemos el vector recíproco de b.

$$\vec{b'} = \frac{(\vec{c}\times\vec{a})}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})} = 1\cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{j} - \hat{i} = \langle -1,1,0\rangle$$

$$\vec{b}\cdot\vec{b'} = \langle 0,1,0\rangle \cdot \langle -1,1,0\rangle = 1$$

Finalmente calculamos el vector recíproco de c.

$$\vec{c'} = \frac{(\vec{a}\times\vec{b})}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})} = 1\cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{k} = \langle 0,0,1\rangle$$

$$\vec{c}\cdot\vec{c'} = \langle 1,1,1\rangle \cdot \langle 0,0,1\rangle = 1$$

3 Actividad 3

Evalua la siguiente suma con la delta de Kronecker.

$$\sum_{k=1}^{10} \delta_{i,k}\delta_{k,j} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant 10)$$

Algo que podemos notar es que en cada iteración de la sumatoria tendremos la multiplicación de ambas deltas, cada una con sus respectivos subíndices. Sabemos que cuando los índices del delta sean distintos este dará 0, siguiendo esto cualquier combinación de los 3 subíndices resultaría en uno de 4 casos, $0 \cdot 0$, $0 \cdot 1$, $1 \cdot 0$ o $1 \cdot 1$, siendo este último el único que nos interesa.

Notando que este último solo se da cuando $i = k$ y $k = j$, entonces necesitamos que $i = j = k$ para tener un valor distinto a 0, reduciendo las 1000 posibles combinaciones a solo 10 que aportan a la suma.

$$\sum_{k=1}^{10} \delta_{i,j} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant 10) = \sum_{k=1}^{10} 1 = 10$$

4 Actividad 4

Descripción de las propiedades de la Delta de Kronecker y el Símbolo de Levi-Civita asó como su relación.

- $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$
  - La primera propiedad del Símbolo de Levi-Civita dice que todas las permutaciones cíclicas de sus índices serán iguales, es decir, tendran el valor de 1.
- $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$
  - La segunda propiedad dice que una permutación cíclica de los índices es igual el negativo de una permutación anticíclica. Esto siendo verdadero puesto que $1 = -(-1)$.
- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$
  - La tercera propiedad surge de expresar el producto entre dos ϵ que cuentan con un índice repetido como el determinante de una matriz con la combinatoria de índices para δ, obteniendo el determinante como resultado del producto y reduciendo algebraicamente es que llegamos a este resultado.
- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$
  - La cuarta propiedad surge del producto de dos símbolos de ϵ que comparten dos de sus índices, en este caso observando que tendremos más términos similares y es por eso que la reducción será mayor, llegando a un solo término.
- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$
  - La quinta propiedad sigue los pasos de las 2 anteriores, ahora siendo el producto de dos ϵ que comparten sus tres índices, reduciendo a un único término $2\delta_{ii}$ con $\delta_{ii} = 3$ por definición, llegamos a un simple $2 \cdot 3 = 6$.
- $\epsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$, para $(i, j, k) = 1, 2, 3$
  - Finalmente tenemos la sexta propiedad, esta sirve para demostrar el valor de 1 de la misma usando un caso de ejemplo con los valores descritos para cada índice. Sustituyendo directemente en la ecuación tendríamos lo siguiente.

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{ijk} &= \frac{1}{2}(1-2)(2-3)(3-1) \\
&= \frac{1}{2}(-1)(-1)(2) \\
&= \frac{1}{2}(1)(2) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

5 Actividad 5

Para una partícula moviéndose en una orbita circular $\boldsymbol{r} = r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}$:

1. Evalúa $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$, $\dot{\boldsymbol{r}}$ siendo $= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}$.
   Comenzamos por evaluar $\dot{\boldsymbol{r}}$, derivando con respecto a t.

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt} r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{d}{dt} r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} = -r\omega\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + r\omega\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{v}$$

   Seguido de esto evaluamos el producto cruz entre $\boldsymbol{r}$ y $\dot{\boldsymbol{r}}$, este al no estar definido en $\mathbb{R}^2$ añadiremos una componente en $\hat{\boldsymbol{z}}$ con valor de 0 para ambos vectores.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ r\cos(\omega t) & r\sin(\omega t) & 0 \\ -r\omega\sin(\omega t) & r\omega\cos(\omega t) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \hat{\boldsymbol{x}} \begin{vmatrix} r\sin(\omega t) & 0 \\ r\omega\cos(\omega t) & 0 \end{vmatrix} - \hat{\boldsymbol{y}} \begin{vmatrix} r\cos(\omega t) & 0 \\ -r\omega\sin(\omega t) & 0 \end{vmatrix} + \hat{\boldsymbol{z}} \begin{vmatrix} r\cos(\omega t) & r\sin(\omega t) \\ -r\omega\sin(\omega t) & r\omega\cos(\omega t) \end{vmatrix} \\
&= (r^2\omega\cos^2(\omega t) + r^2\omega\sin^2(\omega t))\hat{\boldsymbol{z}} \\
&= (r^2\omega(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)))\hat{\boldsymbol{z}} \\
&= r^2\omega\hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}$$

2. Muestra que $\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega^2\boldsymbol{r} = 0$ con $\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$.

   Proof. Partiremos suponiendo que $\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega^2\boldsymbol{r} = 0$.
   Primero obtendremos $\ddot{\boldsymbol{r}}$.

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{r}} &= \frac{d^2}{dt^2} r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{d^2}{dt^2} r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} = -r\omega^2\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} - r\omega^2\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} \\
&= -\omega^2(r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}})
\end{aligned}$$

   Ahora que ya tenemos nuestro vector podemos realizar la suma igualada a 0.

$$\begin{aligned}
-\omega^2(r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}) + \omega^2 r &= 0 \\
\omega^2 r &= \omega^2(r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}})
\end{aligned}$$

   Buscando igualar ambos lados obtendremos la norma de ellos.

$$\begin{aligned}
\left\|\omega^2 r\right\| &= \left\|\omega^2\right\| \left\|(r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}})\right\| \\
\omega^2 r &= \omega^2\sqrt{r^2\cos^2(\omega t) + r^2\sin^2(\omega t)} \\
\omega^2 r &= \omega^2\sqrt{r^2(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))} \\
\omega^2 r &= \omega^2\sqrt{r^2} \\
\omega^2 r &= \omega^2 r
\end{aligned}$$

   Al ser esto cierto podemos asumir que nuestra suposición inicial era correcta.

$$\therefore \ddot{\boldsymbol{r}} + \omega^2\boldsymbol{r} = 0$$

   □

   - El radio $\boldsymbol{r}$ y la velocidad angular ω son constantes.

6 Actividad 6

Calcula la curvatura de $r(t) = \left\langle t^2, \sin(t) - t\cos(t), \cos(t) + t\sin(t) \right\rangle$, donde $t > 0$.

Para obtener la curvatura usaremos el teorema que dicta lo siguiente:

$$\kappa(t) = \frac{\|T'\|}{\|r'\|} = \frac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^3}$$

Lo primero que haremos será obtener tanto r' como r'', pues calcularemos la curvatura a partir de estas.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}r = r' &= \left\langle \frac{d}{dt}t^2, \frac{d}{dt}(\sin(t) - t\cos(t)), \frac{d}{dt}(\cos(t) + t\sin(t)) \right\rangle \\ &= \langle 2t, t\sin(t), t\cos(t) \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}r = r'' &= \left\langle \frac{d^2}{dt^2}t^2, \frac{d^2}{dt^2}(\sin(t) - t\cos(t)), \frac{d^2}{dt^2}(\cos(t) + t\sin(t)) \right\rangle \\ &= \langle 2, t\cos(t) + \sin(t), \cos(t) - t\sin(t) \rangle\end{aligned}$$

Seguido de esto calculamos el numerador de nuestra ecuación antes de obtener su norma.

$$\begin{aligned}r' \times r'' &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2t & t\sin(t) & t\cos(t) \\ 2 & t\cos(t) + \sin(t) & \cos(t) - t\sin(t) \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \begin{vmatrix} t\sin(t) & t\cos(t) \\ t\cos(t) + \sin(t) & \cos(t) - t\sin(t) \end{vmatrix} \\ &- \hat{j} \begin{vmatrix} 2t & t\cos(t) \\ 2 & \cos(t) - t\sin(t) \end{vmatrix} \\ &+ \hat{k} \begin{vmatrix} 2t & t\sin(t) \\ 2 & t\cos(t) + \sin(t) \end{vmatrix} \\ &= -t^2\hat{i} + 2t^2\sin(t)\hat{j} + 2t^2\cos(t)\hat{k}\end{aligned}$$

Ahora que ya lo tenemos podemos calcular su norma.

$$\begin{aligned}\|r' \times r''\| &= \left\| \left\langle -t^2, 2t^2\sin(t), 2t^2\cos(t) \right\rangle \right\| \\ &= \sqrt{(-t^2)^2 + (2t^2\sin(t))^2 + (2t^2\cos(t))^2} \\ &= \sqrt{t^4 + 4t^4\sin^2(t) + 4t^4\cos^2(t)} \\ &= \sqrt{t^4 + 4t^4(\sin^2(t) + \cos^2(t))} \\ &= \sqrt{5t^4} = \sqrt{5}t^2\end{aligned}$$

Una vez que obtuvimos el numerador encontraremos el denominador.

$$\begin{aligned}\|r'\|^3 &= \|\langle 2t, t\sin(t), t\cos(t) \rangle\|^3 \\ &= \sqrt{(2t)^2 + (t\sin(t))^2 + (t\cos(t))^2}^3 \\ &= \sqrt{4t^2 + t^2\sin^2(t) + t^2\cos^2(t)}^3 \\ &= \sqrt{4t^2 + t^2(\sin^2(t) + \cos^2(t))}^3 \\ &= \sqrt{5t^2}^3 = 5\sqrt{5}t^3\end{aligned}$$

Finalmente resolvemos para obtener la curvatura.

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{5}t^2}{5\sqrt{5}t^3} = \frac{1}{5t}$$

7 Actividad 7

Determine el trabajo efectuado por el campo de fuerza $\boldsymbol{F}(x,y) = x^2\hat{\boldsymbol{\imath}} - xy\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ cuando se mueve una partícula a lo largo del cuarto de circunferencia $\boldsymbol{r}(t) = \cos(t)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin(t)\hat{\boldsymbol{\jmath}}, 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Comenzamos por obtener la primera derivada de $\boldsymbol{r}$, esta siendo $\boldsymbol{r'}$.

$$\boldsymbol{r'} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r} = \frac{d}{dt}\cos(t)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{d}{dt}\sin(t)\hat{\boldsymbol{\jmath}} = -\sin(t)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos(t)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Posteriormente evaluamos este nuevo vector en el campo de fuerza.

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) = \cos^2(t)\hat{\boldsymbol{\imath}} - \cos(t)\sin(t)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Siguiendo la definición de la integral de línea en campos vectoriales podemos realizar nuestro cálculo directamente.

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r'}(t)dt = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} ds$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(t)\hat{\boldsymbol{\imath}} - \cos(t)\sin(t)\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \cdot (-\sin(t)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos(t)\hat{\boldsymbol{\jmath}})dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2(\sin(t)\cos^2(t))dt \qquad\qquad u = \cos(t)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2u^2 du = \frac{2}{3}u^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$$

8 Actividad 8

Si $\boldsymbol{F}(x,y,z) = y^2\hat{\boldsymbol{\imath}} + (2xy + e^{3z})\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 3ye^{3z}\hat{\boldsymbol{k}}$, determine una función $f(x,y,z)$ tal que $\nabla f(x,y,z) = \boldsymbol{F}(x,y,z)$.

Comenzamos separando nuestro campo en sus derivadas parciales correspondientes para cada variable x, y, z. Asumiendo que es un campo conservativo estas se obtienen directamente como el término de cada dirección $\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}$, las llamaremos P, Q, R.

$$P = f_x(x,y,z) = y^2 \qquad Q = f_y(x,y,z) = 2xy + e^{3z} \qquad R = f_z(x,y,z) = 3ye^{3z}$$

Una vez que tenemos esto podemos integrar cualquiera de las 3 respecto a la variable por la que fueron derivadas parcialmente para comenzar a construir la función $f(x,y,z)$.

$$\int f_x(x,y,z)dx = f(x,y,z) = xy^2 + g(y,z)$$

Se usa el término $g(x,y)$ de manera temporal y será despejado conforme igualemos más derivadas parciales.

Primero derivamos $f(x,y,z)$ con respecto a y para obtener $f_y(x,y,z)$ que es el mismo término que Q, a partir de esto podremos despejar para $g_y(y,z)$ e integrar obteniendo así el valor de $g(y,z)$.

$$\begin{aligned} f_y(x,y,z) = 2xy + g_y(y,z) &= 2xy + e^{3z} \\ \therefore g_y(y,z) &= e^{3z} \\ \int g_y(y,z)dy &= \int e^{3z}dy \\ g(y,z) &= ye^{3z} + h(z) + K \end{aligned}$$

Entonces, $f(x,y,z)$ queda en los siguientes términos actualizados.

$$f(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z) + K$$

Luego de esto, derivamos $f(x,y,z)$ con respecto a z y despejamos para encontrar $h'(z)$, seguido de esto integramos y obtenemos su valor.

$$\begin{aligned} f_z(x,y,z) = 3ye^{3z} + h'(z) &= 3ye^{3z} \\ \therefore h'(z) &= 0 \\ \int h'(z)dz &= \int 0dz \\ h(z) &= L \end{aligned}$$

Ahora que tenemos todos los términos sustituimos y reducimos ambos independientes K y L a una sola constante K, obteniendo así nuestra función potencial $f(x,y,z)$.

$$f(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + K + L = xy^2 + ye^{3z} + K$$