

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Progetto di Ricerca Operativa

Dipartimento di Matematica Tullio-Levi Civita

Alberto Cocco
1167891

Contents

1	Abstract	2
2	Descrizione del problema	2
3	Modello di programmazione lineare	4
3.1	Insiemi	4
3.2	Variabili	5
3.3	Parametri	5
3.4	Modello	6
4	Implementazione in AMPL	7
4.1	Struttura dei file di AMPL	7
4.2	Risoluzione del problema	7
4.3	Altri file .dat allegati	8

1 Abstract

Lo scopo del progetto è la risoluzione di un problema di programmazione lineare. Verrà presentata una descrizione del problema e successivamente lo si tradurrà in un modello formale matematico. Il tema del progetto è un problema di ottimizzazione della qualità di una cena : una serie di cuochi propongono la loro candidatura ad un ristorante che deve preparare un importante evento a cui prenderanno parte importanti dirigenti aziendali da tutto il mondo. Il capo del ristorante deve decidere quali cuochi impiegare e cosa ciascuno deve preparare sulla base di alcuni criteri che verranno presentati nel paragrafo successivo. Inoltre per la determinazione della soluzione ottima del problema si userà il linguaggio di programmazione matematica AMPL che possiede alcuni solver in grado di ottenere le soluzioni di problemi di programmazione lineare.

2 Descrizione del problema

Il ristorante ROItalia è uno dei ristoranti di lusso più belli di tutta Italia. Esso si situa in pieno centro a Padova e gode di un bellissimo giardino che può ospitare maestosi pranzi e cene di gala. A tal proposito ROItalia ha deciso proprio di organizzare una cena a cui prenderanno parte molti dirigenti aziendali da tutta Europa. Chiaramente il personale del locale non basta per un evento di tale portata, quindi il proprietario di ROItalia ha dato la possibilità di candidarsi come cuoco per la serata a diversi talenti culinari italiani che hanno bisogno di visibilità nel panorama gastronomico. Ogni cuoco per poter partecipare deve superare una serie di prove che prevede la preparazione di diversi piatti: antipasti, primi piatti, secondi primi piatti, secondi, dessert. Una giuria si riserva il compito di valutare le prestazioni di ogni cuoco con un voto da 1 a 10 fornendo un report :

cuoco	antipasto	primo piatto	secondo piatto	primo piatto	secondo piatto	dessert
A	5	6	8		2	7
B	4	7	7		6	5
C	6	7	8		7	8
D	7	9	9		8	6
E	8	10	9		8	8
F	6	6	7		10	7
G	5	8	6		9	6
H	6	8	7		6	9
I	10	9	8		6	9
L	8	6	10		6	5
M	7	9	9		10	8
N	9	7	8		6	8
O	10	5	5		8	5

Il compenso che viene promesso ad ogni cuoco per ogni portata che realizza è attribuito sulla base della media dei voti ottenuta dalle prove che si sono svolte in un momento precedente e che sono elencate nella tabella soprastante. Le due tabelle sottostanti, invece, illustrano il criterio con cui viene attribuito un compenso ad ogni cuoco e il compenso effettivo che il cuoco guadagnerebbe nel caso in cui venisse nominato per cucinare alla cena:

fascia	compenso(in euro)
$5 \leq media \leq 6$	$1000 \leq compenso \leq 1400$
$6 \leq media \leq 7$	$1700 \leq compenso \leq 2100$
$7 \leq media \leq 8$	$2400 \leq compenso \leq 2800$
$8 \leq media \leq 9$	$3100 \leq compenso \leq 3500$
$9 \leq media \leq 10$	$3800 \leq compenso \leq 4200$

cuoco	compenso previsto
A	1350
B	1400
C	2450
D	2800
E	3390
F	2450
G	2100
H	2450
I	3250
L	2400
M	3430
N	2700
O	1950

È necessario tenere in considerazione che data la complessità dei cibi e la numerosità degli ospiti sono richiesti più cuochi per ogni portata:

- Per realizzare antipasti e dessert sono necessari 2 cuochi.
- Per preparare i primi piatti sono necessari 3 cuochi.
- Per preparare i secondi piatti sono necessari 5 cuochi.

Inoltre, un cuoco può realizzare un massimo di 2 portate, quindi si possono avere, ad esempio, le seguenti due possibilità:

- Il cuoco x cucina l'antipasto mentre il cuoco y prepara il primo.
- Il cuoco x cucina sia antipasto che primo piatto.

Il numero di cuochi totali convocati non è fissato a priori ma è determinato dalla “molteplicità del cuoco” e cioè dal fatto se realizzi una o due portate. Il ristorante ha un budget di €41000 che deve utilizzare in due maniere:

-
- Pagare ogni cuoco per ogni portata che viene incaricato di realizzare.
 - Pagare nuovi camerieri e aiuto cuochi dal momento che il personale del ristorante non basta. Ogni aiuto cuoco e cameriere ha chiaramente un costo che è possibile visualizzare nella tabella sottostante. Il numero totale di aiuto cuochi e camerieri assunti deve essere almeno il doppio del numero di cuochi assunti. Inoltre il numero di camerieri assunti deve essere almeno $2/3$ del numero di cuochi.

Personale	costo(euro)
aiuto cuoco	500
cameriere	900

Dopo aver visto il report, il proprietario del ristorante deve massimizzare la qualità media complessiva della cena decidendo quali cuochi convocare e cosa ognuno deve realizzare. Si deve tenere conto, inoltre, che :

- I dessert vengono realizzati in un laboratorio a parte adibito a pasticceria quindi chi li prepara potrà dedicarsi solo a quello senza realizzare altre portate.
- È possibile che un cuoco si offra volontario per preparare una portata aggiuntiva (quindi 3 invece che 2), tuttavia, per il punto precedente non potrà essere un dessert, e inoltre dovrà essere pagato per una somma aggiuntiva pari a € 600 oltre al compenso di base che riceverà per preparare quella portata.
- Essendo ROItalia specializzato nella preparazione di dolci il proprietario del ristorante ha elevate aspettative su quest'ultimo e richiede che siano impiegati cuochi la cui media dei voti nella preparazione di dessert sia pari o superiore a 8.

3 Modello di programmazione lineare

In questa sezione verrà presentato il modello del problema di programmazione lineare che verrà successivamente implementato tramite il linguaggio di programmazione matematica AMPL.

3.1 Insiemi

Si definiscono i seguenti insiemi:

- C è l'insieme dei cuochi che si candidano per partecipare alla cena di gala.
- P è l'insieme delle portate che verranno preparate nel corso della serata.
- A è l'insieme del personale aggiuntivo (quindi cuochi esclusi) che è necessario assumere.

Nel caso specifico del problema presentato abbiamo che:

- C : $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N\}$ è l'insieme dei cuochi.
- P : $\{antipasto, primo piatto, secondo primo piatto, secondo, dessert\}$ è l'insieme delle portate nell'ordine presentato nella tabella.
- A : $\{aiuto cuoco, cameriere\}$ è l'insieme delle persone che il proprietario del ristorante deve assumere eccetto i cuochi.

3.2 Variabili

Si definiscono le variabili che verranno utilizzate:

- $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il cuoco } i \in C \text{ cucina la pietanza } j \in P \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $y_i = \begin{cases} 1, & \text{se il cuoco } i \in C \text{ prepara almeno una portata} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $w_i = \begin{cases} 1, & \text{se il cuoco } i \in C \text{ prepara una portata aggiuntiva} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $u_i = \begin{cases} 1, & \text{se il cuoco } i \in C \text{ prepara un dessert} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$
- z_i : quantità di personale $i \in A$ assunto.

3.3 Parametri

Si definiscono i parametri che verranno utilizzati, i cui valori varieranno in base al file .dat che si sceglierà di usare:

- $necessita_j \in \mathbb{Z}^+$: numero di cuochi necessari per la portata $j \in P$.
- $voto_{ij} \in \mathbb{Z}^+$: voto ottenuto dal cuoco i nella portata j .
- $compenso_i \in \mathbb{R}^+$: compenso (in euro) promesso al cuoco $i \in C$ per ogni portata $j \in P$ che realizza.
- $stipendio_k \in \mathbb{R}^+$: stipendio(in euro) promesso al personale k .
- $maxPortate \in \mathbb{Z}^+$: numero di portate massimo che ogni cuoco $i \in C$ può realizzare.
- $surplus \in \mathbb{Z}^+$: surplus previsto per l'eventuale cuoco $i \in C$ che realizzerà la portata aggiuntiva.
- $portateTotali \in \mathbb{Z}^+$: numero di portate totali.
- $budgetTotale \in \mathbb{R}^+$: budget totale a disposizione del ristorante.
- $M \in \mathbb{R}^+$: costante di big M sufficientemente grande, utile ad attivare le variabili binarie. Il suo valore verrà posto pari a 10^7 .

3.4 Modello

Funzione obiettivo:

$$\max \frac{\sum_{j \in P} \frac{\sum_{i \in C} x_{ij} v_{ij}}{necessita_j}}{portateTotali}$$

È necessario dividere per il numero di portate totali per ottenere la qualità media della cena.

Vincoli:

La portata j richiede un numero di cuochi ben preciso, specificato nell'array $necessita_j$:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in C} x_{ij} &\geq necessita_j \quad \forall j \in P \\ \sum_{i \in C} x_{ij} &\leq necessita_j \quad \forall j \in P \end{aligned}$$

Ogni cuoco può realizzare un numero limitato di portate pari a $maxPortate$:

$$\sum_{j \in P} x_{ij} \leq maxPortate + w_i \quad \forall i \in C$$

Tuttavia, al più un cuoco può preparare una portata aggiuntiva:

$$\sum_{i \in C} w_i \leq 1$$

Il ristorante ha a disposizione un budget massimo che deve usare per pagare ristoratori, aiuto cuochi e camerieri:

$$\sum_{i \in C} \sum_{j \in P} x_{ij} compenso_i + \sum_{k \in A} stipendio_k z_k + \sum_{i \in C} surplus w_i \leq budgetTotale$$

Il numero di camerieri assunti deve essere almeno $2/3$ del numero di aiuto cuochi :

$$z_{cameriere} \geq \frac{2}{3} \cdot z_{aiuto\ cuochi}$$

Per comprendere quanti siano i cuochi effettivamente assunti è necessario introdurre una variabile che ci dica se il cuoco $i \in C$ cucina almeno una portata :

$$M y_i \geq \sum_{j \in P} x_{ij} \quad \forall i \in C$$

Inoltre, come stabilito nel problema, il numero di addetti del personale da assumere deve essere almeno il doppio del numero di cuochi che partecipano alla cena:

$$\sum_{k \in A} z_k \geq 2 \sum_{i \in C} y_i$$

I cuochi che preparano il dessert possono dedicarsi unicamente a quello. Per tale ragione si introduce una variabile che determina se il cuoco $i \in C$ prepara o meno il dessert :

$$u_i \geq x_{i, \text{dessert}} \quad \forall i \in C \quad (\text{attivazione variabile})$$

Imponiamo ora la condizione che assicura che un cuoco che prepara il dessert non prepari altri piatti:

$$portateTotali - 1 (1 - u_i) \geq \sum_{j \in P \setminus \{\text{dessert}\}} x_{i,j} \quad \forall i \in C$$

Infine imponiamo il vincolo che stabilisce che la media dei voti dei cuochi che preparano il dessert deve essere almeno pari a 8:

Domini delle variabili:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &\in \{0, 1\} \\ y_i &\in \{0, 1\} \\ w_i &\in \{0, 1\} \\ u_i &\in \{0, 1\} \\ z_i &\in Z^+ \end{aligned}$$

4 Implementazione in AMPL

4.1 Struttura dei file di AMPL

In allegato alla relazione verranno consegnati tre tipologie di file AMPL:

- un file **.mod** che contiene la rappresentazione del modello illustrato precedentemente
- diversi file **.dat** che consentono il caricamento dei dati all'interno del modello
- un file **.run** necessario ad effettuare il caricamento del modello, dei dati e il reset in modalità automatica. Per il caricamento dei dati è necessario decommentare il file **.dat** che si vuole caricare nel modello.

4.2 Risoluzione del problema

Caricando il file *modello.dat* ossia quello che rispecchia i dati del problema si può notare l'importanza del budget a disposizione del ristorante : un valore troppo basso di quest'ultimo infatti non riuscirà a soddisfare le richieste e quindi a pagare tutti i cuochi e il personale richiesto portando ad una soluzione impossibile. Allo stesso tempo un aumento minimo del budget a disposizione del ristorante incrementa in maniera sostanziale la qualità media della cena.

Con un budget di €35000 abbiamo il seguente risultato :

```
CPLEX 12.9.0.0: integer infeasible.  
44 MIP simplex iterations  
0 branch-and-bound nodes  
No basis.
```

Se proviamo ad approfondire il motivo per cui il problema risulta impossibile AMPL ci dirà quanto segue :

```
solve_result_num = 220  
solve_result = infeasible
```

Un errore di tipo 200 indica, infatti, l'impossibilità di soddisfare tutti i vincoli contemporaneamente.

Solamente avendo un budget di circa €41000 (che è il budget del ristorante indicato nel testo del problema) AMPL riesce a trovare una soluzione ottima in 130 iterazioni :

```
CPLEX 12.9.0.0: optimal integer solution; objective 7.96666667  
130 MIP simplex iterations  
0 branch-and-bound nodes
```

Inoltre, è possibile osservare che il valore della funzione obiettivo aumenta quasi linearmente rispetto all'incremento di budget a disposizione del ristorante come nel grafico che segue:

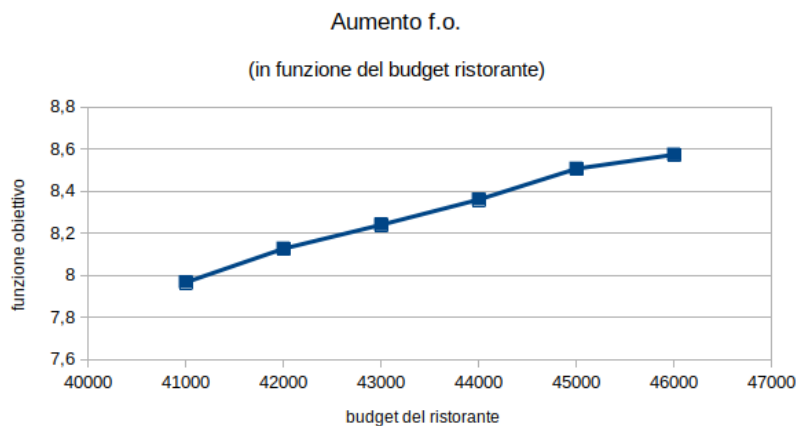


Figure 1: grafico che mostra l'aumentare della funzione obiettivo in concomitanza con l'incremento del budget del ristorante

4.3 Altri file .dat allegati

modello2.dat Il file modello2.dat presenta uno scenario leggermente diverso. Il ristorante ROItalia decide di organizzare una seconda cena di Gala dando la possibilità agli stessi cuochi della prima edizione di candidarsi. Tuttavia :

- I cuochi M ed O decidono di non ricandidarsi.

-
- La complessità dei cibi è cambiata, infatti sono ora richiesti 3 cuochi per realizzare antipasto e dessert, 2 per primo piatto e secondo e 4 per secondo primo piatto.
 - Il budget del ristorante è di €54000.
 - Il numero massimo di portate realizzabili per ciascun cuoco è 3 invece che 2. Tuttavia, un cuoco può ancora realizzare una portata aggiuntiva ottenendo un surplus di €1200.
 - Il costo di un cameriere è €1100 mentre il costo di un aiuto cuoco è di €700.

modello3.dat Il file modello3.dat rappresenta la terza cena di Gala organizzata dal ristorante ROItalia. Per la terza edizione si è deciso di assumere cuochi che non avevano mai partecipato alle edizioni precedenti. Tuttavia, anche in questa occasione sarà necessario effettuare una prova per stabilire chi cucinerà. Inoltre, il budget a disposizione del ristorante è questa volta assai più alto e pari a €50000. Per questa ragione si è deciso di attribuire un compenso maggiore ad ogni cuoco e sempre sulla base del voto medio ottenuto svolgendo le cinque prove. La tabella sottostante mostra il compenso promesso:

fascia	compenso(in euro)
$5 \leq media \leq 6$	$1000 \leq prezzo \leq 1400$
$6 \leq media \leq 7$	$1900 \leq prezzo \leq 2300$
$7 \leq media \leq 8$	$2600 \leq prezzo \leq 3000$
$8 \leq media \leq 9$	$3300 \leq prezzo \leq 3700$
$9 \leq media \leq 10$	$4000 \leq prezzo \leq 4400$

Inoltre, si deve considerare che :

- il costo di un cameriere è €950 mentre il costo di un aiuto cuoco è €750.
- Sono necessari 3 cuochi per ogni portata.
- Un cuoco può realizzare al più 3 portate.
- Il surplus che deve essere dato al cuoco che eventualmente cucinerà la quarta portata è di €2000.