In questa sezione verrà presentato il modello del problema di programmazione lineare che verrà successivamente implementato tramite il linguaggio di programmazione matematica AMPL.

0.1 Insiemi

Si definiscono i seguenti insiemi:

- C è l'insieme dei cuochi che si candidano per partecipare alla cena di gala.
- P è l'insieme delle portate che verranno preparate nel corso della serata.
- A è l'insieme del personale aggiuntivo (quindi cuochi esclusi) che è necessario assumere.

Nel caso specifico del problema presentato abbiamo che:

- C: {A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N} è l'insieme dei cuochi.
- P: {*antipasto*, *primo piatto*, *secondo primo piatto*, *secondo*, *dessert* } è l'insieme delle portate nell'ordine presentato nella tabella.
- A: { *aiuto cuoco*, *cameriere* } è l'insieme delle persone che il proprietario del ristorante deve assumere eccetto i cuochi.

0.2 Variabili

Si definiscono le variabili che verranno utilizzate:

- $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il cuoco } i \in C \text{ cucina la pietanza } j \in P \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $y_i = \begin{cases} 1, & \text{se il cuoco } i \in C \text{ prepara almeno una portata} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $w_i = \begin{cases} 1, & \text{se il cuoco } i \in C \text{ prepara una portata aggiuntiva} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $u_i = \begin{cases} 1, & \text{se il cuoco } i \in C \text{ prepara un dessert} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$
- z_i : quantità di personale $i \in A$ assunto.

0.3 Parametri

Si definiscono i parametri che verranno utilizzati, i cui valori varieranno in base al file .dat che si sceglierà di usare:

- $necessita_j \in \mathbb{Z}^+$: numero di cuochi necessari per la portata j $\in P$.
- $voto_{ij} \in \mathbb{Z}^+$: voto ottenuto dal cuoco i nella portata j.
- $compenso_i \in \mathbb{R}^+$: compenso (in euro) promesso al cuoco $i \in C$ per ogni portata $j \in P$ che realizza.
- $stipendio_k \in \mathbb{R}^+$: stipendio(in euro) promesso al personale k.
- $maxPortate \in \mathbb{Z}^+$: numero di portate massimo che ogni cuoco $i \in C$ può realizzare.
- $surplus \in \mathbb{Z}^+$: surplus previsto per l'eventuale cuoco i $\in$C che realizzerà la portata aggiuntiva.
- $portateTotali \in \mathbb{Z}^+$: numero di portate totali.
- $budgetTotale \in \mathbb{R}^+$: budget totale a disposizione del ristorante.
- $M \in \mathbb{R}^+$: costante di big M sufficientemente grande, utile ad attivare le variabili binarie Il suo valore verrà posto pari a 10^7.

0.4 Modello

Funzione obiettivo:

$$max \quad \frac{\sum_{j \in P} \frac{\sum_{i \in C} x_{ij}\, v_{ij}}{necessita_j}}{portateTotali}$$

È necessario dividere per il numero di portate totali per ottenere la qualità media della cena.

Vincoli:
La portata j richiede un numero di cuochi ben preciso, specificato nell'array $necessita_j$:

$$\sum_{i \in C} x_{ij} \geq necessita_j \quad \forall j \in P$$

$$\sum_{i \in C} x_{ij} \leq necessita_j \quad \forall j \in P$$

Ogni cuoco può realizzare un numero limitato di portate pari a maxPortate:

$$\sum_{j \in P} x_{ij} \leq maxPortate + w_i \quad \forall i \in C$$

Tuttavia, al più un cuoco può preparare una portata aggiuntiva:

$$\sum_{i \in C} w_i \leq 1$$

Il ristorante ha a disposizione un budget massimo che deve usare per pagare ristoratori, aiuto cuochi e camerieri:

$$\sum_{i\in C}\sum_{j\in P} x_{ij}\, compenso_i + \sum_{k\in A} stipendio_k\, z_k + \sum_{i\in C} surplus\; w_i \leq budgetTotale$$

Il numero di camerieri assunti deve essere almeno 2/3 del numero di aiuto cuochi :

$$z_{cameriere} \geq \frac{2}{3} \cdot z_{aiuto\, cuochi}$$

Per comprendere quanti siano i cuochi effettivamente assunti è necessario introdurre una variabile che ci dica se il cuoco i ∈C cucina almeno una portata:

$$M\, y_i \geq \sum_{j\in P} x_{ij} \quad \forall i \in C$$

Inoltre, come stabilito nel problema, il numero di addetti del personale da assumere deve essere almeno il doppio del numero di cuochi che partecipano alla cena:

$$\sum_{k\in A} z_k \geq 2 \sum_{i\in C} y_i$$

I cuochi che preparano il dessert possono dedicarsi unicamente a quello. Per tale ragione si introduce una variabile che determina se il cuoco i ∈C prepari o meno il dessert:

$$u_i \geq x_{i\,dessert} \;\; \forall i \in C \quad (attivazione\ variabile)$$

Imponiamo ora la condizione che assicura che un cuoco che prepara il dessert non prepari altri piatti:

$$portateTotali - 1\,(1-u_i) \geq \sum_{j\in P\setminus\{dessert\}} x_{ij} \quad \forall i \in C$$

Domini delle variabili:

$$\begin{gathered} x_{ij} \in \{0,1\} \\ y_i \in \{0,1\} \\ w_i \in \{0,1\} \\ u_i \in \{0,1\} \\ z_i \in Z^+ \end{gathered}$$