

Pendolo Invertito

Alessandro Petitti

28 aprile 2023

Indice

1	Introduzione	2
2	Calcolo dell'equazione del moto	2
2.1	Studio Parametrico	6
2.1.1	Osservazioni	8
2.2	Piano delle fasi	10
3	Applicabilità tecnologica	14

Elenco delle figure

1	Sistema dinamico	2
2	Andamento delle variabili di stato	6
3	Legenda del grafico parametrico	6
4	Studio parametrico del sistema	7
5	Studio parametrico nel piano cartesiano	9
6	Sottospazi piano delle fasi	10
7	Sottospazi piano delle fasi(3D)	11
8	Variazione di F (2D)	12
9	Variazione di F (3D)	13
10	Corpo umano rappresentato come un pendolo inverso	14
11	sezione del Cubli	14

1 Introduzione

Ci proponiamo di studiare il sistema raffigurato in figura 1, si tratta di un pendolo *invertito* soggetto alla forza di gravità che poggia su un carrello al quale è impressa una forza \vec{F} .

2 Calcolo dell'equazione del moto

Vogliamo studiare il moto del sistema usando l'approccio di **Eulero-Lagrange**, scriviamo dunque la Lagrangiana del sistema. Per descrivere completamente lo stato sistema abbiamo bisogno di 2 parametri, che saranno le coordinate generalizzate che verranno usate: $q = [x, \theta]^T$.

Calcoliamo l'energia cinetica del sistema, che essendo formato da due corpi sarà la somma delle due energie cinetiche dei corpi presi singolarmente.

Cominciamo dal **carrello**, esso si muove di moto **rettilineo** sottoposto a una forza generica \vec{F} , pertanto le sue coordinate nel tempo saranno:

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ y_1(t) = 0 \end{cases}$$

Derivando l'espressione della posizione rispetto al tempo otteniamo la velocità del carrello:

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ y_1(t) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t) \\ \dot{y}_1(t) = 0 \end{cases}$$

L'energia cinetica del carrello sarà dunque:

$$T_M = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (1)$$

In cui si è omessa la dipendenza della velocità dal tempo per alleggerire la trattazione. Si calcola ora l'energia cinetica del pendolo, cominciando con scrivere la sua posizione in funzione della configurazione:

$$\begin{cases} x_2(t) = x - l \sin \theta \\ y_2(t) = l \cos \theta \end{cases}$$

Troviamo ora la velocità derivando le espressioni per le posizioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = \dot{x} - l \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{y}_2(t) = -l \sin \theta \dot{\theta} \end{cases}$$

La velocità è un vettore e il modulo al quadrato si ottiene come somma delle componenti al quadrato: $v_m^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$ Scriviamo ora l'energia cinetica del sistema in funzione della configurazione sommando alla (1) l'energia cinetica del pendolo:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left[\left(\dot{x} - l \cos \theta \dot{\theta} \right)^2 + \left(-l \sin \theta \dot{\theta} \right)^2 \right]$$

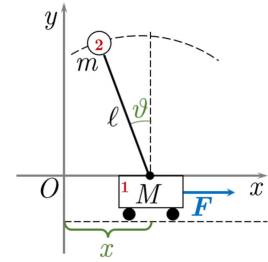


Figura 1: Sistema dinamico

Svolgendo i quadrati e raggruppando arriviamo all'espressione:

$$T = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m l \dot{\theta} \dot{x} \cos \theta \quad (2)$$

Calcoliamo ora l'energia potenziale del sistema. Notiamo subito come il carrello non subisca variazioni di energia potenziale rispetto al sistema di riferimento scelto, infatti mantiene sempre la stessa $y(t) = 0$, sfruttiamo questo fatto per definire lo zero del potenziale proprio in questa retta, cioè:

$$V_1 = 0$$

Per quanto riguarda il pendolo invece, la sua energia potenziale sarà:

$$V_2 = m g y_2(t) = m g l \cos \theta \quad (3)$$

Otteniamo dunque la **Lagrangiana** del sistema:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \left(M \dot{x}^2 + m \dot{x}^2 + m l^2 \dot{\theta}^2 \right) - m l \left(\dot{x} \dot{\theta} + g \right) \cos \theta \quad (4)$$

Andiamo ora a usare le equazioni di **Eulero-Lagrange** per derivare l'equazione del moto:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j$$

Prima di cominciare si può osservare che Q_j è la j -esima **forza generalizzata**, nel nostro sistema delle due equazioni che avremo solo quella relativa alla coordinata x risentirà di questo termine. Il motivo di tale fatto è da ricercarsi nella definizione stessa di forza generalizzata, ovvero:

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad \text{con } i, j = 1, 2, \dots, s \quad (5)$$

Nel nostro sistema abbiamo $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, 0)$ e $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, 0)$, mentre $q_1 = x$ e $q_2 = \theta$. Applicando ora la definizione (5) otteniamo che:

$$\begin{cases} Q_1 = F \\ Q_2 = 0 \end{cases}$$

A seguito di questa considerazione ricaviamo le equazioni del moto:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left(M \dot{x} + m \dot{x} - m l \dot{\theta} \cos \theta \right) = (M + m) \ddot{x} - m l \left(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right) = 0 \quad (7)$$

Otteniamo dunque la prima equazione combinando le (6) e (7):

$$(M + m) \ddot{x} - m l \left(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) = F(t)$$

Per quanto riguarda la seconda coordinata generalizzata, θ , otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = (ml^2 \ddot{\theta} - ml \dot{x} \cos \theta) = ml^2 \ddot{\theta} - ml (\ddot{x} \cos \theta - \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta) \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \right) = ml \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta + mlg \sin \theta \quad (9)$$

Unendo la(9) e la (8) e semplificando, otteniamo:

$$l\ddot{\theta} - \ddot{x} \cos \theta - g \sin \theta = 0$$

Abbiamo ottenuto il seguente sistema che governa il moto:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} - m\ell (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = F(t) \\ \ell \ddot{\theta} - \ddot{x} \cos \theta - g \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (10)$$

che risulta essere un sistema di equazioni differenziali lineari del secondo ordine **accoppiate**. Dobbiamo ora disaccoppiare le equazioni prima di abbassare il grado del sistema compiendo delle sostituzioni. Per disaccoppiare il sistema è sufficiente ricavare una delle due incognite del secondo ordine in entrambe le equazioni e uguagliare ciò che era posto a destra dell'uguale. Cominciamo ricavando \ddot{x} da entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{F(t) + m\ell (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta)}{M + m} \\ \ddot{x} = \frac{\ell \ddot{\theta} - g \sin \theta}{\cos \theta} \end{cases} \quad (11)$$

Andiamo ora eguagliare i due termini e ricaviamo per $\ddot{\theta}$:

$$\frac{F(t) + m\ell (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta)}{M + m} = \frac{\ell \ddot{\theta} - g \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$F(t) \cos(\theta) + ml\ddot{\theta} \cos^2 \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta = (M + m) \ell \ddot{\theta} - g(M + m) \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} (ml \cos^2 \theta - (m + M)l) = -F \cos \theta + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - g(M + m) \sin \theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{F \cos \theta + g(M + m) \sin \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta}{l(M + m - m \cos^2 \theta)}}$$

Facciamo lo stesso per \ddot{x} :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x} \cos \theta + g \sin \theta}{\ell} \\ \ddot{\theta} = \frac{(M + m)\ddot{x} + m\ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - F}{m\ell \cos \theta} \end{cases} \quad (12)$$

$$\frac{\ddot{x} \cos \theta + g \sin \theta}{\ell} = \frac{(M + m) \ddot{x} + m \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - F}{m \ell \cos \theta}$$

$$m \ddot{x} \cos^2 \theta + m g \cos \theta \sin \theta = (M + m) \ddot{x} + m \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - F$$

$$\ddot{x} (m \cos^2 \theta - M - m) = -m g \cos \theta \sin \theta + m \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - F$$

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{F + m g \cos \theta \sin \theta - m \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta}{M + m - m \cos^2 \theta}}$$

Finalmente otteniamo il sistema integrabile numericamente, andiamo ad abbassarne il grado:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \psi \\ \dot{\psi} = \frac{F \cos \theta + g(M + m) \sin \theta - m \ell \psi^2 \sin \theta \cos \theta}{\ell(M + m - m \cos^2 \theta)} \\ \dot{x} = \xi \\ \dot{\xi} = \frac{F + m g \cos \theta \sin \theta - m \ell \psi^2 \sin \theta}{M + m - m \cos^2 \theta} \end{cases} \quad (13)$$

A questo punto il problema diventa integrare numericamente il sistema, e possiamo dunque ricorrere a **MATLAB**. Come per il sistema del pendolo smorzato possiamo scrivere una *function* che crei il vettore \dot{y} che contiene tutti i termini a sinistra dell'uguale nel sistema (13). Detto ciò possiamo integrare il sistema e il risultato ottenuto è mostrato nella figura (2). Le condizioni iniziali sono:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

il sistema è lasciato libero di evolvere per un tempo di 20 secondi e infine i valori iniziali dei parametri sono: $m = 0.1\text{kg}$, $M = 1\text{kg}$, $F = 1\text{N}$, $\ell = 0.5\text{m}$.

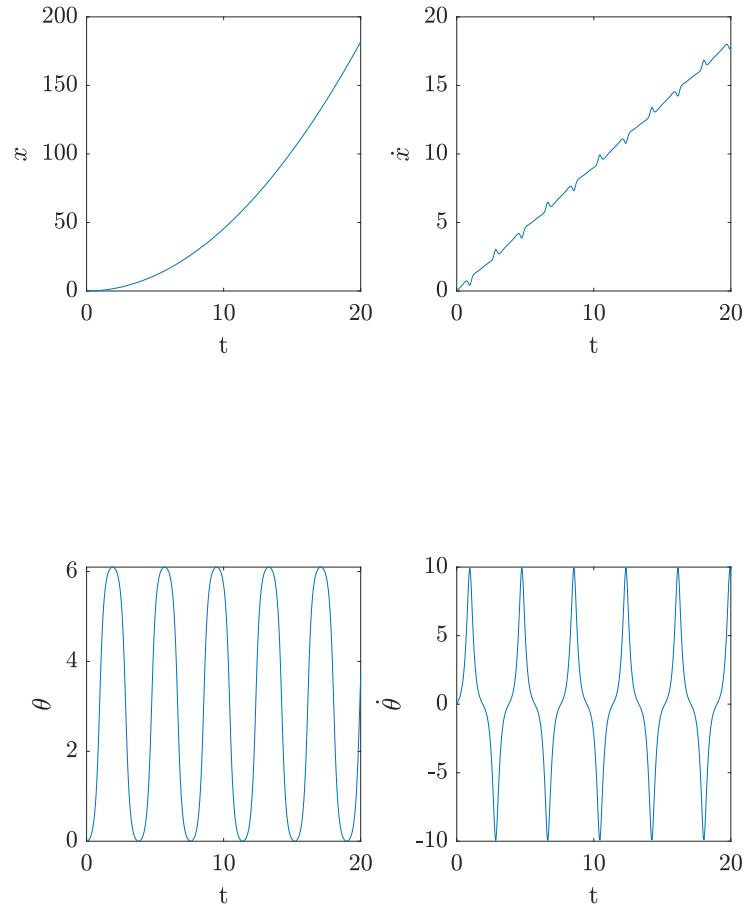


Figura 2: Andamento delle variabili di stato

2.1 Studio Parametrico

Dopo aver risolto il sistema passiamo a studiare il suo andamento in funzione dei valori dei parametri. Si riportano di seguito i valori dei parametri usati per realizzare la figura 4:

$$m = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad \ell = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Per la costruzione di ogni grafico è stato usato la stessa leggenda, ossia i seguenti colori in ordine:

— 1 — 2 — 3

Figura 3: Leggenda del grafico parametrico

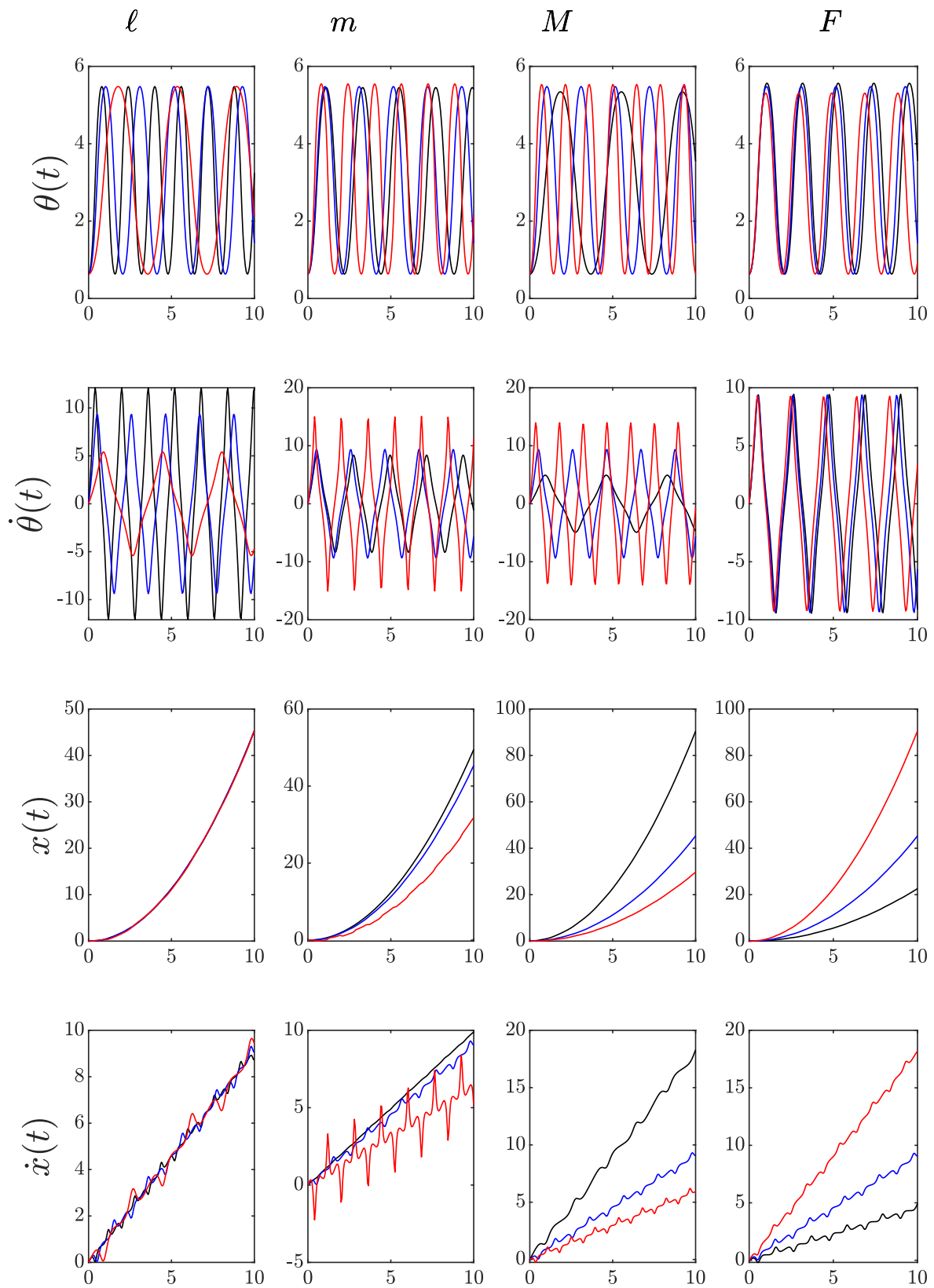


Figura 4: Studio parametrico del sistema

2.1.1 Osservazioni

Dalla risposta del sistema alla variazione dei parametri possiamo fare le seguenti osservazioni:

- All'aumentare di ℓ diminuisce la frequenza¹ delle oscillazioni, mentre l'andamento del carrello nel tempo ($x(t)$) è sostanzialmente invariato per l'aumento o la diminuzione di ℓ .
- Il valore di m influenza pesantemente il moto di entrambi gli oggetti, in particolare: all'aumentare della massa aumenta la frequenza delle oscillazioni del pendolo, mentre il carrello viene frenato in maniera significativa. Il secondo fatto è evidente dal grafico di $\dot{x}(t)$, infatti i valori della velocità oscillano tra positivi e negativi.
- Come era prevedibile l'aumento della massa M ostacola lo spostamento del carrello. Anche l'andamento del pendolo è influenzato dalla massa del carrello come è chiaro dal grafico di $\dot{\theta}$ in cui i cambi di segno dell'accelerazione sono sia più bruschi che frequenti.
- La variazione di F influenza ovviamente lo spostamento del carrello, ma modifica anche la frequenza delle oscillazioni del pendolo, in particolare si osserva che ad un aumento della forza, aumenta anche la frequenza delle oscillazioni.

Tutte le osservazioni fatte sono confermate dall'andamento del sistema nel piano cartesiano, come mostrato nella figura 5.

¹Si precisa il fatto che per questo sistema non si può parlare di un moto oscillatorio periodico poiché esso è in continua evoluzione sotto l'effetto della forza F : per questo motivo non è propriamente corretto parlare di concetti quali il periodo o la frequenza associati all'oscillazione del pendolo. Questi termini verranno comunque utilizzati per prendere più chiara l'analisi del sistema, con le dovute accortezze.

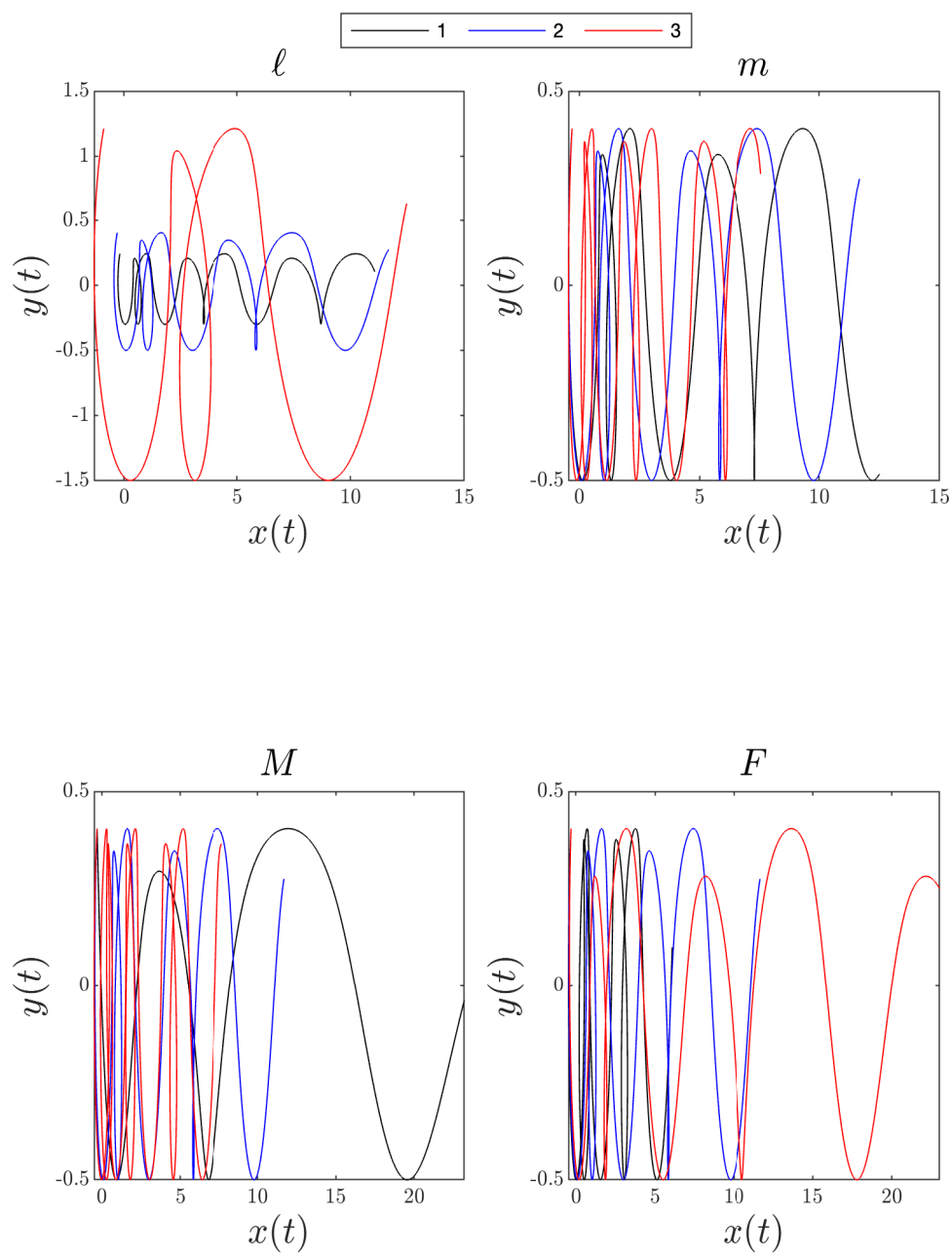


Figura 5: Studio parametrico nel piano cartesiano

2.2 Piano delle fasi

Continuando l'analisi del sistema è utile tracciare le traiettorie del sistema in sottospazi estratti dallo **spazio delle fasi**. Per prima cosa analizziamo un caso in cui i valori dei parametri e delle condizioni iniziali siano i seguenti: $m = 0.1\text{kg}$, $M = 1\text{kg}$, $F = 0\text{N}$, $l = 0.5\text{m}$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo spazio delle fasi completo di questo sistema è formato da 4 dimensioni: x , \dot{x} , θ , $\dot{\theta}$ e ovviamente non può essere visualizzato per intero. Possiamo dunque estrarre dei sottospazi e vedere il comportamento parziale del sistema nel piano delle fasi in figura 6.

Possiamo fare alcune considerazioni sui risultati ottenuti:

- L'assenza di forze esterne ($F = 0$) applicate sul carrello non permette allo stesso di compiere un moto traslatorio regolare nel verso delle forze applicate, nonostante ciò dai grafici è evidente che il carrello si sposti oscillando tra valori positivi e negativi della x . Si può notare uno spostamento più pronunciato nel verso negativo dell'asse che è da attribuire alle condizioni iniziali ($\theta = \pi/5$, 'alla sinistra' dell'asse y).
- L'oscillazione del pendolo è costante tra valori sempre positivi, come visibile dal sottospazio θ , $\dot{\theta}$.

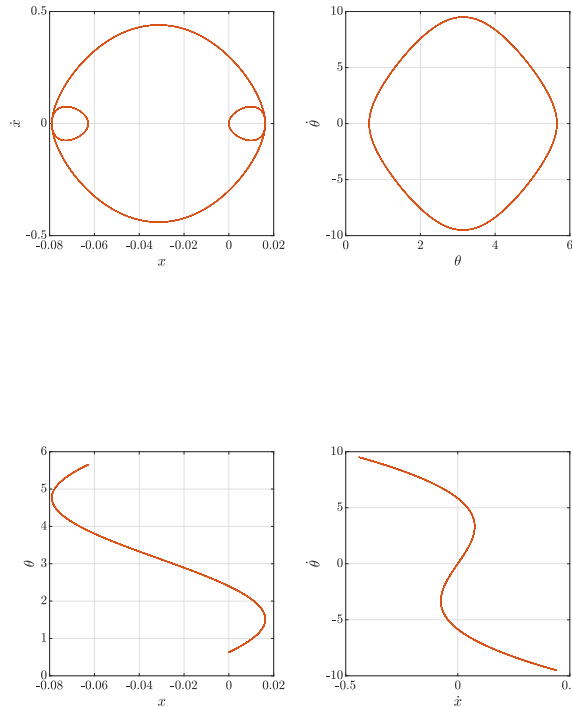


Figura 6: Sottospazi piano delle fasi

Un informazione più completa sul moto del sistema può essere fornita dai sottospazi 3D:

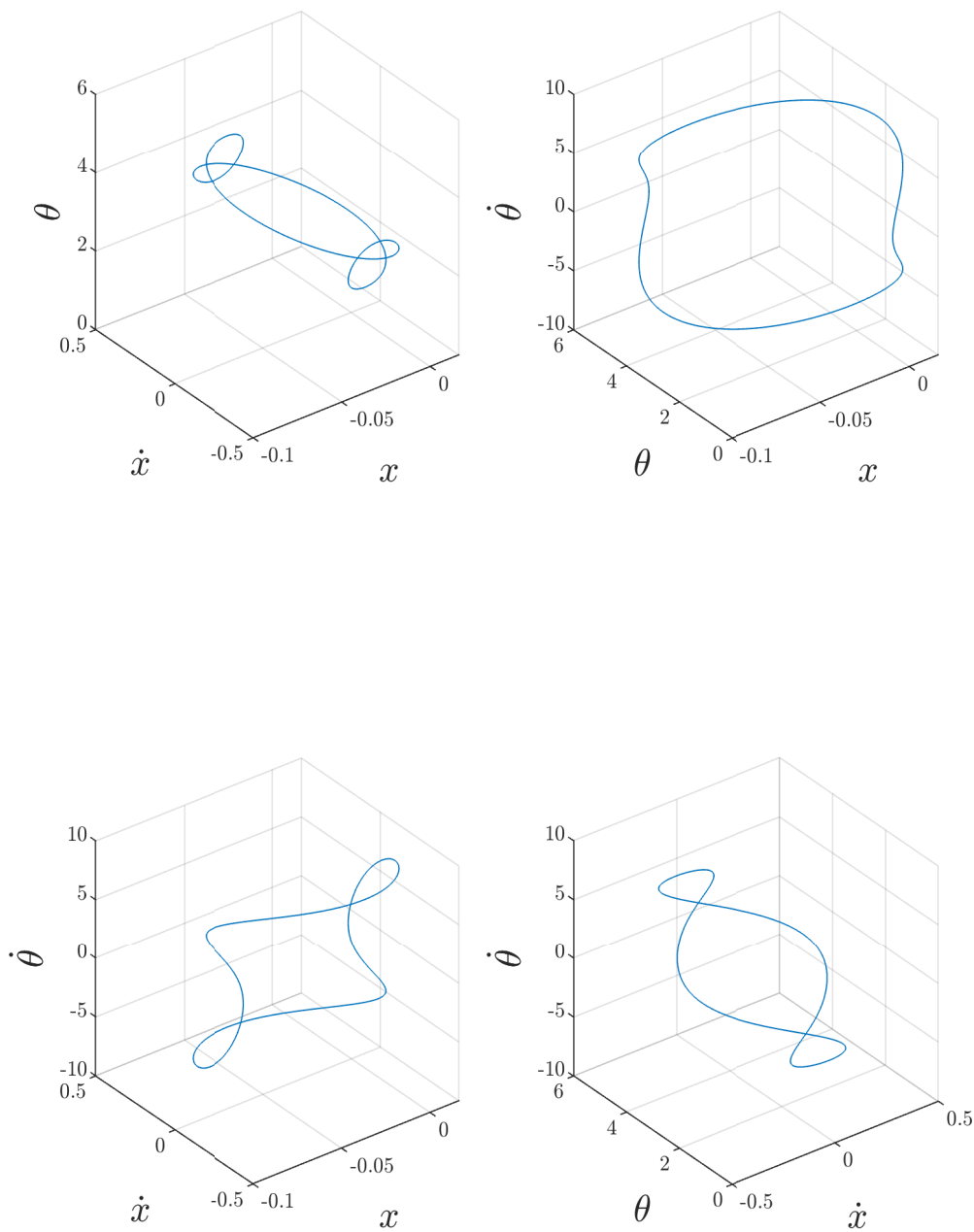


Figura 7: Sottospazi piano delle fasi(3D)

Per comprendere al meglio il comportamento del sistema possiamo provare a variare

leggermente le condizioni in cui si è svolta la prima analisi, possiamo inserire una piccola forza $F = 0.05$ N e ripetere lo studio sul piano delle fasi. Il risultato è mostrato in figura 8 e 9

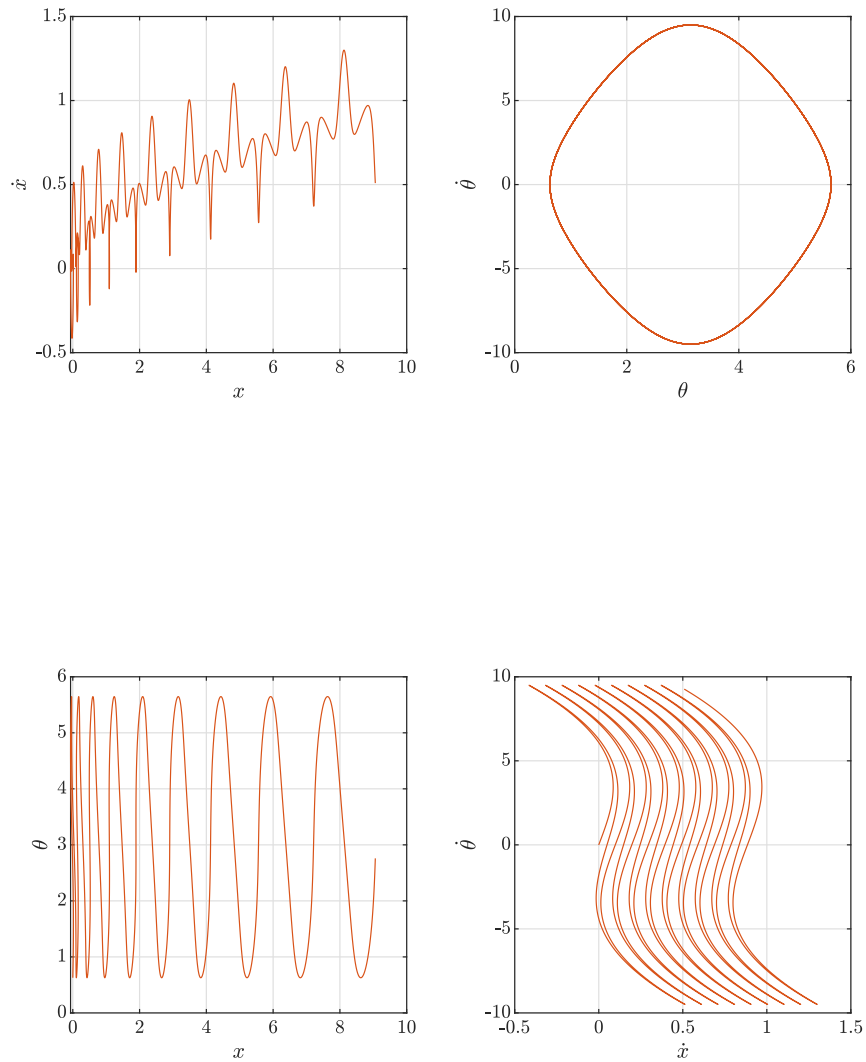


Figura 8: Variazione di F (2D)

Se si confrontano i grafici con e senza l'applicazione di una forza è possibile trovare qualche punto in comune. Per cominciare i valori entro i quali oscilla il pendolo restano sostanzialmente invariati. Oltre a ciò il *quarto* grafico nella figura 9 si può pensare come ottenuto dalla traslazione del *quarto* grafico nella figura 7 sotto l'azione della forza F .

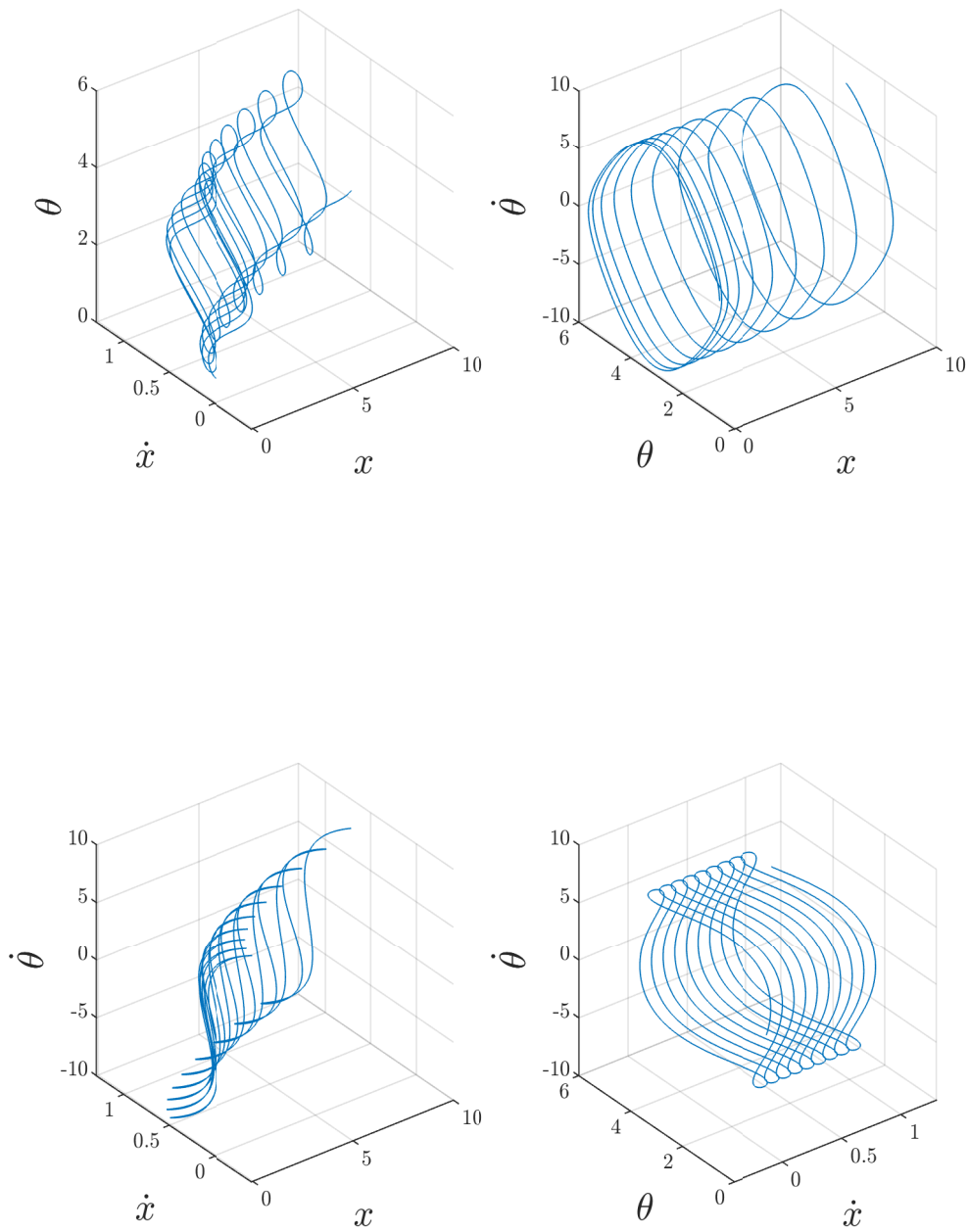


Figura 9: Variazione di F (3D)

3 Applicabilità tecnologica

Prima di descrivere le applicazioni tecnologiche che usano i principi dietro il pendolo invertito si può osservare la natura per cercare principi di funzionamento simili. Sorprendentemente il più lampante degli esempi è proprio il **corpo umano**[1].

A differenza del sistema appena descritto sul corpo umano avvengono numerose correzioni istantanee che evitano la caduta dello stesso, è dotato cioè di un sistema di feedback composto da vari elementi come input *propriocettivi* degli occhi e input sull'orientamento dal sistema *vestibolare* e usa questi feedback per attuare continui aggiustamenti sui muscoli scheletrici per rimanere in piedi.

Quello che succede nel corpo umano, se modellizzato matematicamente, ricade nel campo della **automatica** o **Teoria del controllo**, in questo campo sono studiati i metodi per capire, governare e modificare il comportamento di sistemi dinamici naturali o artificiali, al fine di dotarli d'autonomia, cioè della capacità di raggiungere finalità assegnate senza diretta supervisione. Il pendolo invertito è un esempio classico di applicazione di controlli automatici. Un esempio di ciò è quello del **Cubli**[2], un dispositivo progettato e realizzato presso l'*Eidgenössische Technische Hochschule Zürich* (ETH). Il dispositivo risulta di dimensioni estremamente contenute, 15 cm di lato al cui interno sono contenuti molti componenti quali i tre motori interni accoppiati a delle ruote di reazione controllati da un sistema elettronico esterno. La particolarità di questo sistema meccanico è quella di poter **camminare**. *Cubli* infatti è in grado di sollevarsi da una posizione di quiete tramite una prima accelerazione dei motori che raggiungono elevate velocità angolari, per poi arrivare a un improvviso arresto, trasferendo il momento alla struttura. Lo stesso meccanismo può essere usato per eseguire cadute controllate, successivamente un *Inertial Measurement Unit* 'IMU' controlla precisamente le coppie erogate dai motori in modo tale che l'equilibrio sul vertice di *Cubli* possa continuare anche se sottoposto all'azione di forze esterne.

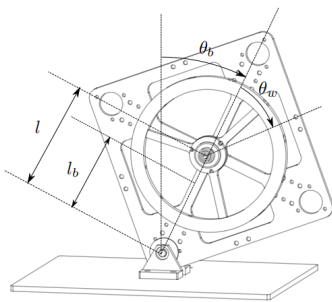


Figura 11: sezione del Cubli

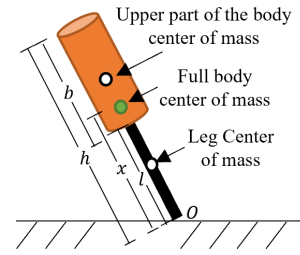


Figura 10: Corpo umano rappresentato come un pendolo inverso

La matematica e la fisica di base sono le stesse di un pendolo invertito in 3D, le applicazioni di questa idea possono spaziare da robot che si assemblano da soli a robot per esplorazioni su terreni poco lineari, come possono essere quelli di un pianeta come Marte.

Un applicazione più largamente diffusa è il **Segway**. Si tratta di un mezzo di trasporto rivoluzionario, ideato dall'ingegnere Dean Kamen, che può essere concepito come un "monopattino intelligente" a trazione elettrica in grado di eseguire spostamenti grazie all'interazione con semplici movimenti del corpo del guidatore. Si può facilmente intuire la somiglianza del pendolo inverso al

Segway, possiamo infatti assumere che il corpo del guidatore sia il pendolo, attaccato alla pedana mobile costituita dalle ruote e i motori. Proprio sullo studio della stabi-

lità di questo sistema è stato pubblicato un articolo [3] che analizza la stabilità di un robot a pendolo invertito senza ruote di stabilizzazione (ruote non dotate di motore che servono per stabilizzare il robot e sollevarlo da terra). Il modello risulta essere del tutto simile a quello di un Segway. Infine è stato condotto uno studio dalla CALTECH [4] sulla stabilità delle strutture a forma di pendolo invertito, come riserve idriche a forma di palla da golf sospesa, entro certe condizioni di operatività, sono più stabili e resistenti a terremoti di strutture con una massa distribuita su tutta la lunghezza del corpo.

Riferimenti bibliografici

- [1] Andrzej Kot e Agata Nawrocka. «Modeling of human balance as an inverted pendulum». In: *Proceedings of the 2014 15th International Carpathian Control Conference (ICCC)*. 2014.
- [2] M. Muehlebach, G. Mohanarajah e R. D’Andrea. «Nonlinear Analysis and Control of a Reaction Wheel-based 3D Inverted Pendulum». In: *proc. Conference on Decision and Control*. 2013.
- [3] Dong-Yeon (D-Y) Lee et al. «Dynamics and Control of Non-holonomic Two Wheeled Inverted Pendulum Robot». In: gen. 2003.
- [4] George W. Housner. «The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes». In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 53.2 (feb. 1963), pp. 403–417.