

# Pendolo smorzato

Alessandro Petitti

17 marzo 2023

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Il metodo di Eulero-Lagrange . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Studio del sistema assegnato</b>	<b>3</b>
2.1	Approccio analitico . . . . .	3
2.2	Risoluzione numerica . . . . .	5
2.2.1	Studio parametrico . . . . .	8
2.2.2	Flusso e traiettorie nel piano delle fasi . . . . .	9
2.2.3	Studio delle condizioni iniziali . . . . .	11

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Il metodo di Eulero-Lagrange

Il metodo delle equazioni di **Eulero-Lagrange** permette di arrivare agevolmente alle equazioni del moto di sistemi anche complessi. Questo metodo si basa su una combinazione di due concetti principali: le coordinate generalizzate o libere e il principio dei lavori virtuali. La combinazione di questi due porta alla scrittura delle seguenti equazioni:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (1.1)$$

Nel caso in cui il sistema sia conservativo possiamo lavorare con l'energia potenziale  $V$  e definendo la grandezza **Lagrangiana** associata ad un sistema come:

$$\mathcal{L} = T - V$$

otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j \quad (1.2)$$

La (1.2) rappresenta in realtà un sistema di equazioni, infatti avremo un numero di equazioni pari al numero di coordinate generalizzate necessarie a descrivere il sistema. Nel seguito il vettore  $q$  sarà formato da una sola componente, ossia l'angolo  $\theta$  rispetto alla verticale.

# Capitolo 2

## Studio del sistema assegnato

### 2.1 Approccio analitico

Ci proponiamo ora di studiare il seguente sistema:

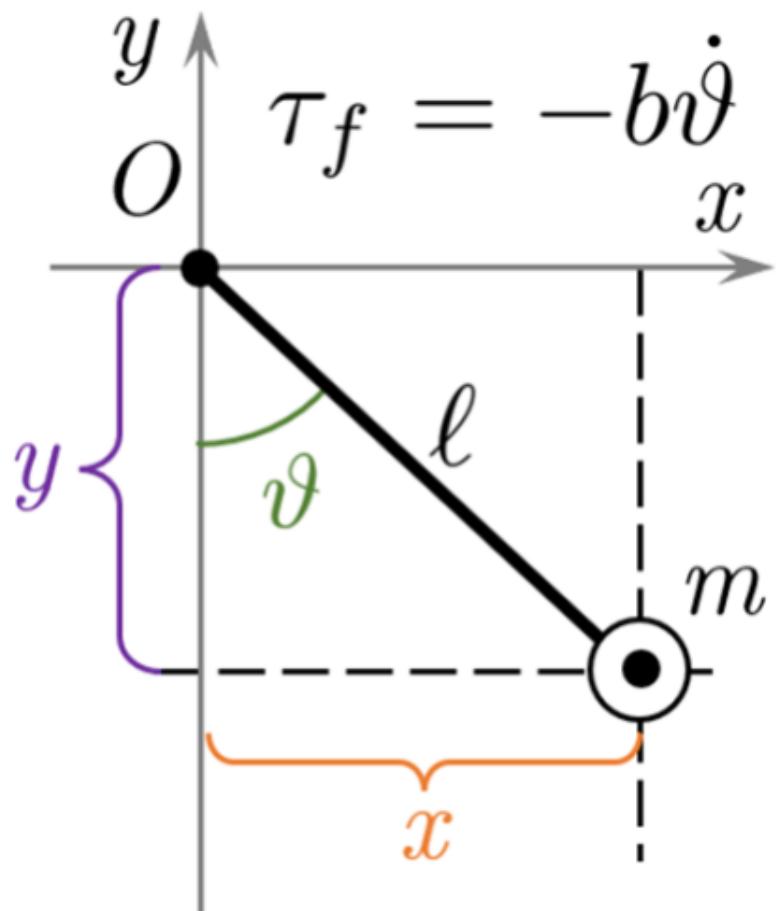


Figura 2.1: sistema assegnato

Si tratta di un pendolo classico, il quale è smorzato con **momento frenante**  $\tau_f = -b\dot{\theta}$ . Andiamo a scrivere l'equazione delle Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , scrivendo le sue componenti:  $T$  e  $V$ .

Per caratterizzare  $T = \frac{1}{2}mv^2$  rispetto al nostro sistema, definiamo un ascissa curvilinea, un arco di circonferenza:  $S(t) = L\theta(t)$ . Possiamo derivare rispetto al tempo per ottenere la velocità in funzione della configurazione:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d(L\theta)}{dt} = L\dot{\theta}$$

L'energia cinetica diventa dunque:

$$T = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 \quad (2.1)$$

Per caratterizzare ora l'energia potenziale andiamo a scrivere la differenza di altezza tra la posizione di riposo ( $\theta = 0$ ) e una generica configurazione( $\theta(t)$ ) come:

$$y(t) = -L \cdot \cos(\theta(t))$$

L'energia potenziale  $V$ , il cui zero è stato messo alla quota  $-L$  dall'origine è dunque:

$$V = mgy(t) = -mgL \cos(\theta) \quad (2.2)$$

Possiamo formulare l'espressione della Lagrangiana di questo sistema unendo la (2.1) e (2.2):

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL \cos(\theta) \quad (2.3)$$

Visto che l'unica coordinata lagrangiana di questo sistema è proprio  $\theta$ , avremo una sola equazione di Eulero-Lagrange, che otteniamo facendo le derivate rispetto a  $\dot{\theta}$  e  $\theta$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (mL^2\dot{\theta}) = mL^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgL \sin(\theta)$$

Unendo i due contributi:

$$mL^2\ddot{\theta} + mgL \sin(\theta) = -b\dot{\theta} \quad (2.4)$$

Quella che abbiamo è un'equazione differenziale del II ordine non lineare, che possiamo riscrivere come un **sistema** di due equazioni differenziali del primo ordine. Facendo infatti la sostituzione  $\omega = \dot{\theta}$  otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} + \frac{b}{mL^2}\omega + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Il sistema (2.5) è il punto di partenza per risolvere il moto in maniera numerica su *MATLAB*.

Prima di procedere al calcolo numerico possiamo verificare attraverso lo stesso software che il risultato a cui siamo giunti sia corretto:

```

1 syms m l g theta(t) b;
2 T = 1/2*m*l^2*diff(theta(t),t)^2
3 V = -m*g*l*cos(theta(t))
4 L = T-V

```

Queste linee di codice ci danno come risultato proprio la **Lagrangiana** che è stata calcolata in (2.3).

```

1 primo_termine = diff(L,diff(theta(t),t));
2 secondo_termine = diff(L,theta(t));
3 eq_Eulero_Lagrange_ = diff(primo_termine,t)-secondo_termine
== -b*diff(theta(t),t)

```

L'output che otteniamo è esattamente la stessa equazione differenziale che è in (2.4). Possiamo dunque cominciare a risolvere il problema numericamente.

## 2.2 Risoluzione numerica

Per la risoluzione numerica è necessario scrivere il seguente script che modella il sistema (2.5):

```

1 function x_dot = pendolo_smorzato (m,l,b,x,t)
2 %definiamo la costante g
3 g = 9.81;
4
5 x_dot = [x(2);(-b/(m*l^2))*x(2)-(g/l)*sin(x(1))];
6 % x(2) = omega , x(1) = theta
7 end

```

Successivamente si implementa la risoluzione vera e propria, si definiscono i parametri del sistema, l'intervallo temporale di integrazione, le condizioni iniziali che per questa prima risoluzione sono una posizione iniziale di  $\frac{\pi}{10}$  rispetto allo zero del sistema di riferimento e una velocità iniziale nulla. Vengono anche aggiunti i parametri di tolleranza dell'algoritmo di "Runge-Kutta".

```

1 m = 5 ;%kg
2 b = 0.6; %kg/s
3 l = 1; %m
4 dt = [0: 0.05:40];
5 x0 = [pi/10,0];
6 opts = odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',1e-10);
7 [t,x]=ode45(@(t,x)pendolo_smorzato(m,l,b,x,t),dt,x0,opts);

```

Quello che ci viene restituito nell'ultima riga sono, un vettore  $t$  che contiene gli istanti di tempo in cui è stata calcolata la soluzione e una matrice  $x$  che ha due colonne e tante righe quanti sono gli istanti di tempo. Nella prima colonna sono presenti i valori di  $\theta$  e nella seconda quelli di  $\omega$  per ogni istante di tempo. Possiamo andare a visualizzare il risultato creando un grafico:

```

1 figure;
2 plot(t,x(:,1), 'k-' ,t,x(:,2), 'r--');
3 grid;
4 title ('Andamento delle variabili di stato');
5 xlabel('t[s]');
6 legend('$\theta$ [rad]', '$\dot{\theta}$ [rad/s]', 'Interpreter', 'latex');
7 ax = gca;
8 ax.XGrid = 'off';
9 ax.YGrid = 'on';

```

Quello che ci viene restituito è la figura(2.2) e rappresenta l'andamento dei due parametri nel tempo, entrambi vanno diminuendo e tendono a zero con il tempo che tende a infinito.

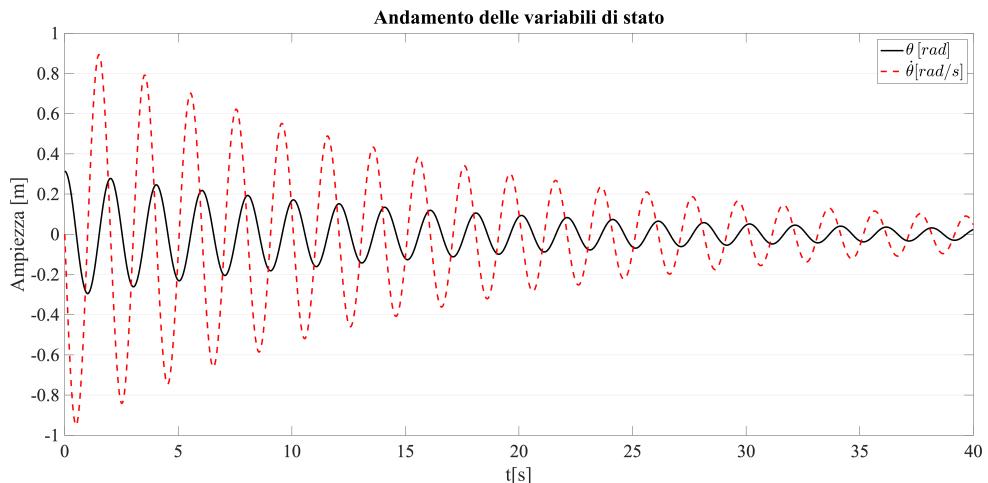


Figura 2.2: Andamento di  $\theta$  e di  $\dot{\theta}$  nel tempo

Studiamo ora come cambia il grafico se invece delle condizioni iniziali imposte prima, assegniamo per esempio una velocità iniziale positiva uguale a  $2\frac{m}{s}$ :

```

1 x0_2 = [pi/10, 2];
2 [t,x2] = ode45(@(t,x)pendolo_smorzato(m,l,b,x,t),dt,x0_2,
   opts);
3 figure;
4 plot(t,x(:,1), 'r--', t,x2(:,1), 'k-');
5 legend ('\theta_1 [rad]', '\theta_2 [rad]', 'Interpreter',
   ' latex');

```

Il risultato sono oscillazioni più ampie che decrescono con il passare del tempo. Per prenderci conto di questo fatto possiamo visualizzare l'andamento della posizione nei due casi, con e senza velocità iniziale (2.3)

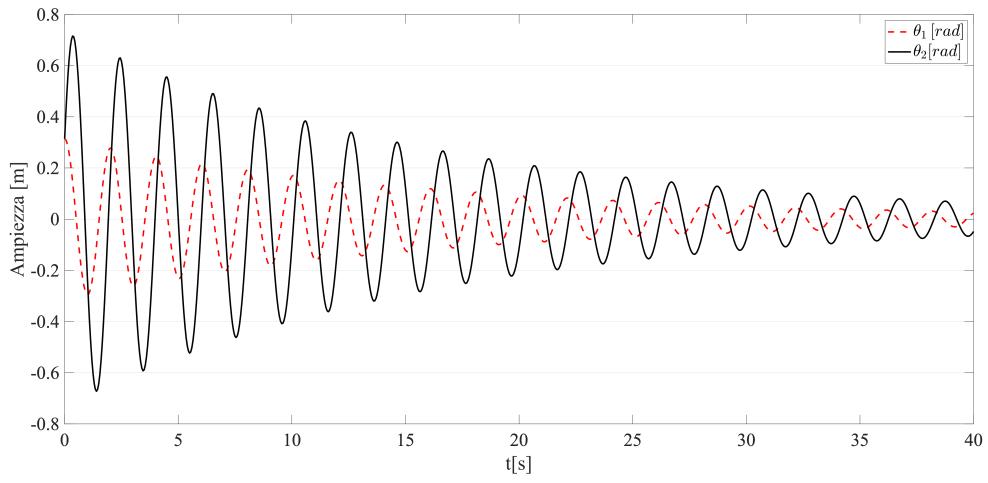


Figura 2.3: Andamento di  $\theta_1$  rispetto a  $\theta_2$

Infine invece di variare la velocità provassimo a modificare l'angolo di partenza,  $\theta_0$ , il comportamento è simile, otteniamo infatti oscillazioni più ampie e un sistema che impiega più tempo ad arrivare allo stato di quiete (2.4):

```

1 x0_3 = [pi/3,0];
2 [t,x3] = ode45(@(t,x)pendolo_smorzato(m,l,b,x,t),dt,x0_3,
   opts);
3 figure;
4 plot(t,x(:,1),'r--',t,x3(:,1),'k-');
5 legend ('$\theta_1$ [rad]', '$\theta_3$ [rad]', 'Interpreter
   ', ' latex');
```

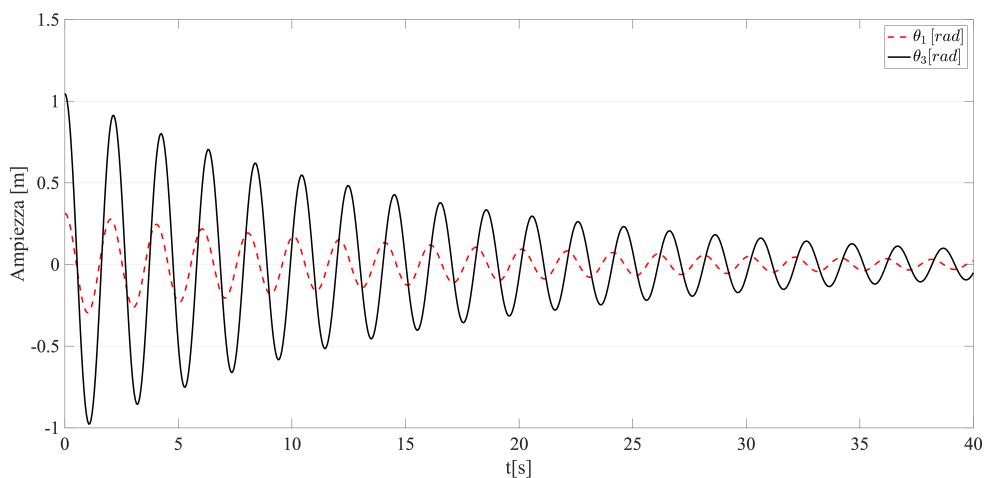


Figura 2.4: Andamento di  $\theta_1$  e  $\theta_3$

### 2.2.1 Studio parametrico

Quello che resta da provare a modificare sono i parametri caratterizzanti il sistema impostati nelle prime righe dello script:  $m, b, L$  e vedere come evolvono le grandezze  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ .

Per fare questo fissiamo le condizioni iniziali, riprendiamo il vettore scelto in partenza:

$$x_0 = \left[ \frac{\pi}{10}, 0 \right]$$

Di seguito si riporta il grafico ottenuto dalla variazione dei tre parametri e si confronta l'andamento di  $\theta$  rispetto alla prima soluzione. In ognuno dei tre grafici è presente l'andamento iniziale (la linea rossa), l'andamento con il parametro aumentato (la linea nera) e l'andamento con il parametro diminuito (la linea blu). Come prevedibile aumentando  $m$  e  $L$  l'effetto dello smorzamento diminuisce, al contrario alla diminuzione degli stessi si nota un minor tempo per arrivare allo stato di quiete. Tutto l'opposto per il parametro  $b$ :

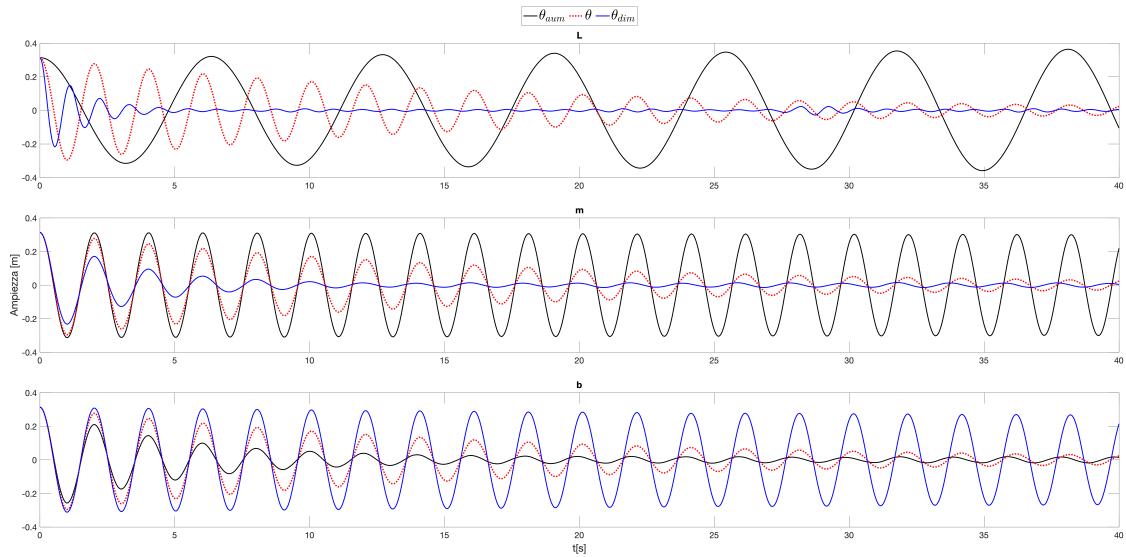


Figura 2.5: Confronto sull'andamento di  $\theta$  rispetto ai parametri

Considerazioni analoghe possono essere fatte per lo studio parametrico della grandezza  $\dot{\theta}$ , con i seguenti risultati:

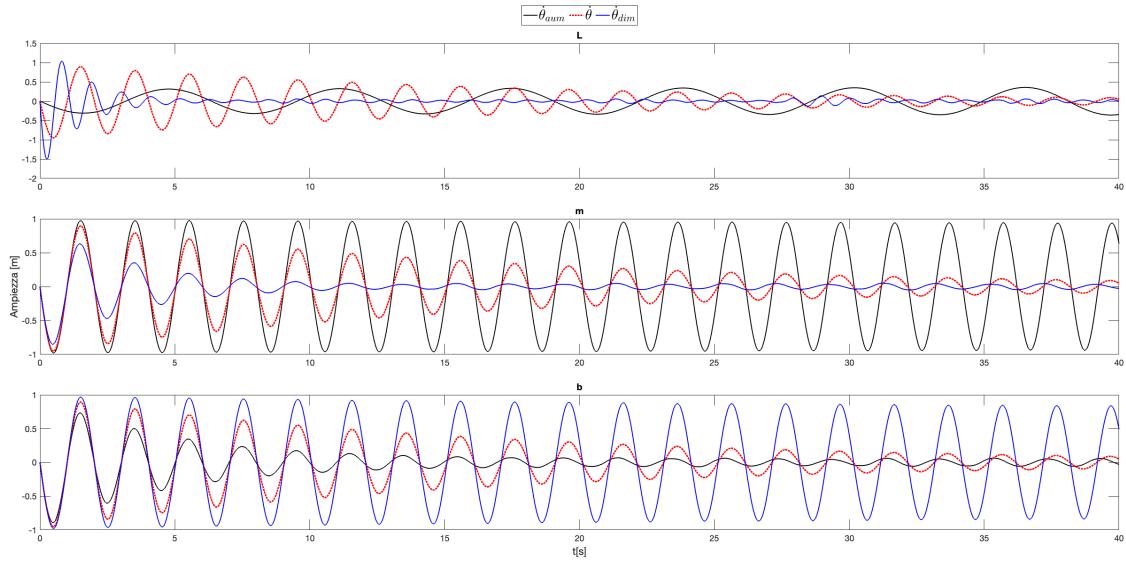


Figura 2.6: Confronto sull'andamento di  $\dot{\theta}$  rispetto ai parametri

### 2.2.2 Flusso e traiettorie nel piano delle fasi

Il **piano delle fasi** è un insieme astratto i cui punti rappresentano univocamente *tutti e soli* i possibili stati del sistema. Nel caso della meccanica Lagrangiana, questo è definito come lo spazio delle coordinate Lagrangiane, ossia le coppie  $(q_i, \dot{q}_i)_{i=1,\dots,n}$ , dove  $\dot{q}_i$  sono le velocità generalizzate. Andiamo a studiare dunque questo spazio nel nostro sistema, il piano avrà come asse  $x \theta$ , e come asse  $y \dot{\theta}$ . Studiamo il sistema con le condizioni inizialmente scelte, ossia  $m = 5$ ,  $L = 1$ ,  $b = 0.6$ .

```

1 [X,Y] = meshgrid( -0.4:0.05:0.4 , -1.5:0.2:1.5 );
2 dXd़t = Y;
3 dYdt = -(b/(m*(1)^2))*Y-g/l*sin(X);
4 figure;
5 quiver(X,Y,dXd़t,dYdt,1,'LineWidth',2);
6 grid;
7 title('Spazio delle fasi','FontSize',25);
8 xlabel('$\theta$[rad]', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize',25)
9 ylabel('$\dot{\theta}$[rad/s]', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize',25);

```

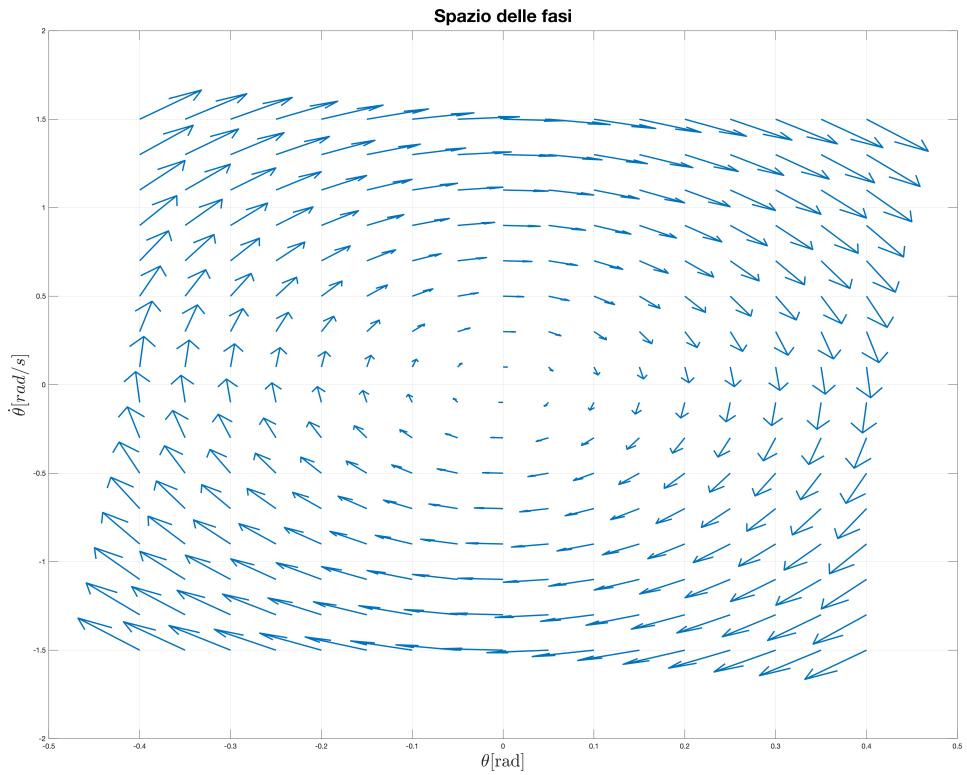


Figura 2.7: Traiettoria del sistema nello spazio delle fasi

Andiamo ora a visualizzare la **traiettoria** nel piano delle fasi, con le condizioni iniziali scelte:

```

1 dt_f = [0:0.005:100]; %#ok<NBRAK>
2 [t,x_f] = ode45(@(t,x)pendolo_smorzato(m,l,b,x,t),dt_f,x0,
   opts);
3 quiver(X,Y,dXdt,dYdt,1,'LineWidth',2);
4 hold on;
5 plot(x_f(:,1),x_f(:,2),'r-','LineWidth',1.2);
6 xlabel('$\theta$[rad]', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 25)
7 ylabel('$\dot{\theta}$[rad/s]', 'Interpreter', 'latex',
   'FontSize', 25);
8 grid on;

```

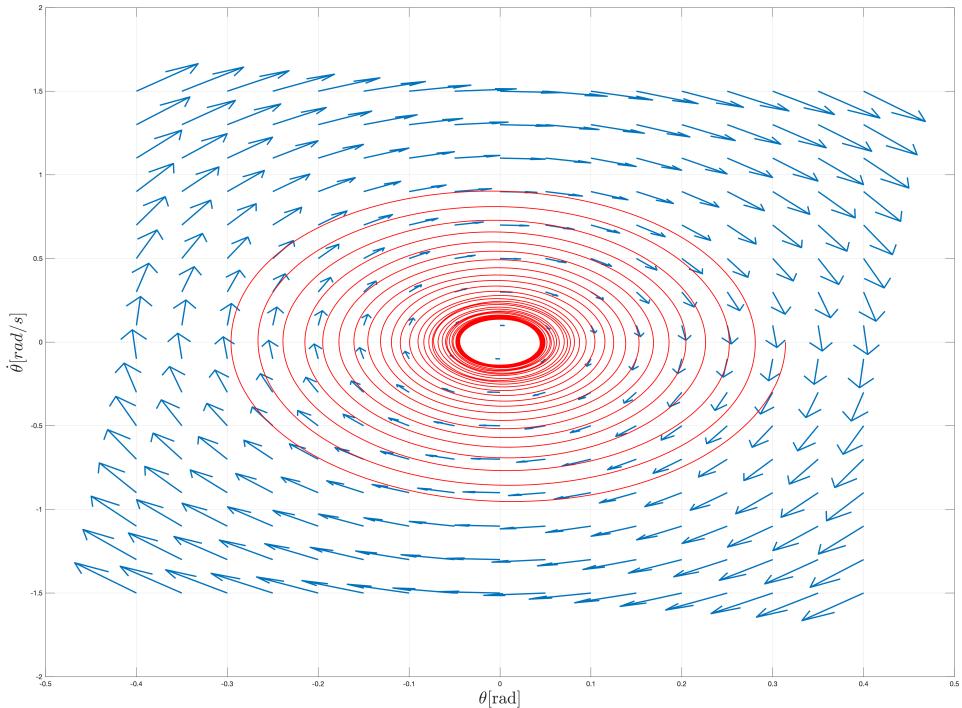


Figura 2.8: Ritratto delle fasi con la condizione iniziale

Osserviamo come la traiettoria rossa sia solo uno dei possibili evoluzioni del sistema, se graficassimo infatti un sistema con differenti condizioni iniziali o con differenti valori dei parametri, avremmo un andamento diverso.

### 2.2.3 Studio delle condizioni iniziali

Andiamo ora a eliminare il termine di smorzamento  $\tau_f$  e implementiamo nuovamente il sistema in MATLAB, in maniera del tutto simile a prima. Quello che faremo di diverso ora è studiare l'andamento delle grandezze:

$$\begin{cases} x(t) = l \cdot \sin(\theta(t)) \\ y(t) = -l \cdot \cos(\theta(t)) \end{cases}$$

Avremo bisogno di un nuovo script chiamato `pendolo_lineare` che semplicemente modellizza il pendolo senza il termine di smorzamento, ma è del tutto simile al precedente.

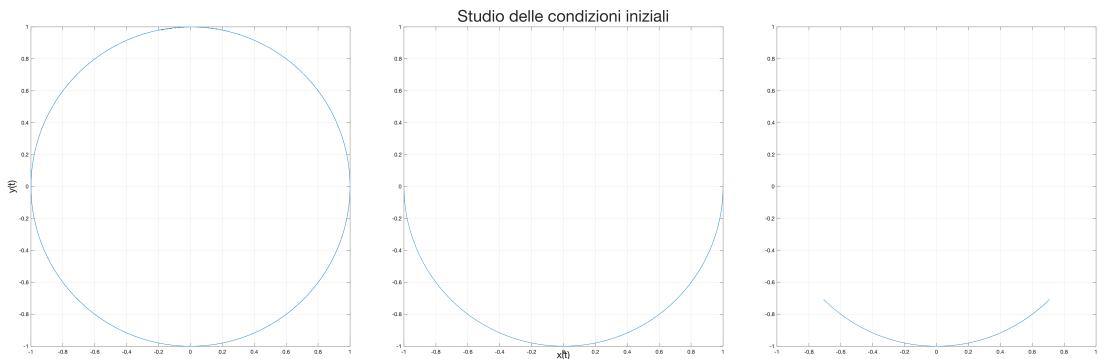


Figura 2.9: Variazione delle condizioni iniziali

Per ottenere i grafici è sufficiente modificare opportunamente le condizioni iniziali in modo opportuno:

1.  $x_0 = [\pi, 0]$  per ottenere una circonferenza completa
2.  $x_0 = [\frac{\pi}{2}, 0]$  per metà circonferenza
3.  $x_0 = [\frac{\pi}{4}, 0]$  per un quarto di circonferenza