

Centrifugal Governor

Alessandro Petitti

10 maggio 2023

Indice

1	Introduzione	2
2	Derivazione delle equazioni del moto	2
2.1	Sistema con $\varphi = \varphi(t)$	2
2.2	Sistema con $\varphi = \omega_0 t$	3
3	Studio del sistema	5

Elenco delle figure

1	Sistema dinamico	2
2	Prima risoluzione del sistema	5
3	Studio parametrico m_1	6
4	Studio parametrico m_2	7
5	Studio parametrico su ω	8
6	Studio parametrico a, ω_0	9
7	Prima risoluzione del sistema con $\varphi = \varphi(t)$	10
8	Studio parametrico su m_1 ($\varphi = \varphi(t)$)	11
9	Studio parametrico su m_2 ($\varphi = \varphi(t)$)	12
10	Confronto su ϑ	13
11	Confronto su ϑ (t = 120s)	14
12	Confronto su ϑ (t = 240s)	15

1 Introduzione

Un *regolatore centrifugo* è costituito da due masse m_1 connesse ad una massa m_2 attraverso due bracci di lunghezza a , come riportato in figura 1. Il sistema è vincolato a ruotare attorno ad un albero su cui la massa m_2 può salire e scendere senza attrito. Le ipotesi di lavoro sono che ignoreremo la massa dei bracci, l'attrito esercitato dall'aria e assumeremo trascurabile il diametro della massa m_2 . Per ricavare le equazioni del moto nel modo più generale possibile abbiamo bisogno di due coordinate generalizzate: ϑ e φ , che rappresentano rispettivamente l'angolo che il braccio a forma con \hat{z} e l'angolo che la proiezione del vettore posizione di m_1 forma con \hat{z} . Useremo come al solito, l'approccio di **Eulero-Lagrange**, andremo però a ricavare le equazioni in due casi distinti, e confronteremo i sistemi ottenuti nel corso dell'esercitazione:

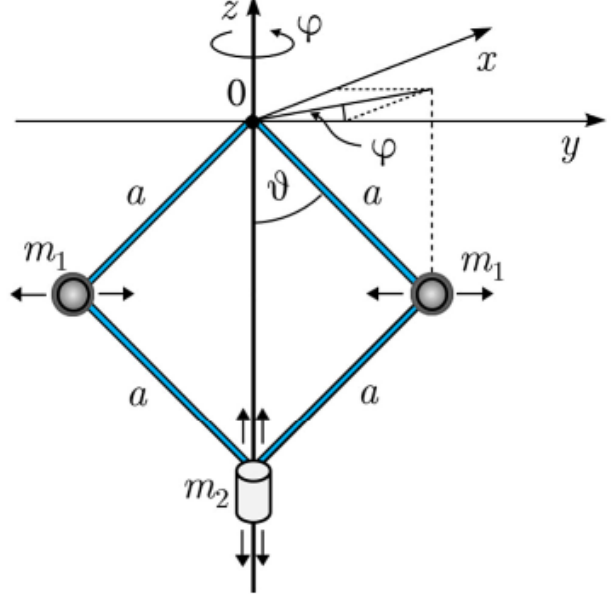


Figura 1: Sistema dinamico

1. Sistema con $\varphi = \varphi(t)$ intesa come variabile dinamica
2. Sistema con $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ ¹ con ω_0 costante e noto.

2 Derivazione delle equazioni del moto

2.1 Sistema con $\varphi = \varphi(t)$

Per questo sistema le coordinate generalizzate sono due, dunque le equazioni sono due e sono le seguenti:

$$\begin{cases} (m_1 a + 2m_2 a \sin^2 \vartheta) \ddot{\vartheta} + g(m_1 + m_2) \sin \vartheta + (2m_2 \dot{\vartheta}^2 - m_1 \dot{\varphi}^2) a \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \\ \sin^2 \vartheta \ddot{\varphi} + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi} \dot{\vartheta} = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine disaccoppiato, isolando le incognite otteniamo:

$$\begin{cases} \ddot{\vartheta} = -\frac{g(m_1 + m_2) \sin \vartheta + (2m_2 \dot{\vartheta}^2 - m_1 \dot{\varphi}^2) a \sin \vartheta \cos \vartheta}{m_1 a + 2m_2 a \sin^2 \vartheta} \\ \ddot{\varphi} = \frac{-2 \cos \vartheta \dot{\varphi} \dot{\vartheta}}{\sin \vartheta} \end{cases} \quad (1)$$

¹Senza perdere di generalità supporremo che $\varphi_0 = 0$

2.2 Sistema con $\varphi = \omega_0 t$

I passaggi da seguire per ricavare le equazioni del moto nel caso in cui siamo posti sono simili a quelli svolti per il caso precedente, con l'unica accortezza che $\dot{\varphi} = \omega_0$. Si comincia ponendosi in coordinate sferiche, vista la simmetria del sistema:

$$\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \end{cases} \quad (2)$$

Le equazioni 2 andranno poi applicate a ogni massa visto il sistema di riferimento in figura 1. Si procede poi ad ottenere un incremento infinitesimo $(d\ell)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$:

$$\begin{cases} dx = r \cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - r \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi \\ dy = r \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + r \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi \\ dz = -r \sin \vartheta d\vartheta \end{cases}$$

Nelle precedenti equazioni sono stati cancellati tutti i termini moltiplicati per dr in quanto nel nostro sistema $r = a = \text{cost.}$ A questo punto possiamo "assemblare" i differenziali, dopo averli elevati al quadrato, per ottenere $(d\ell)^2$:

$$\begin{aligned} (d\ell)^2 &= (a \cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - a \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi)^2 \\ &\quad + (a \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + a \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi)^2 + (a \sin \vartheta d\vartheta)^2 \end{aligned}$$

Svolgendo i quadrati e raggruppando otteniamo:

$$\begin{aligned} (d\ell)^2 &= a^2 [\cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi (d\vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi (d\varphi)^2 \\ &\quad + \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi (d\vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi (d\varphi)^2 + \sin^2 \vartheta (d\vartheta)^2] \end{aligned}$$

Semplificando applicando la relazione fondamentale della trigonometria otteniamo:

$$(d\ell)^2 = a^2 [(d\vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2] \quad (3)$$

Con questo risultato possiamo cominciare a calcolare la Lagrangiana del sistema:

$$\mathcal{L}(\vartheta, \dot{\vartheta}, \varphi, \dot{\varphi}) = T - V$$

Cominciamo a calcolare la T :

$$T = 2 \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

I calcoli svolti prima ci permettono di calcolare agevolmente v_1^2 : e v_2^2 :

$$\begin{aligned} v_1^2 &= (d\ell_1)^2 = a^2 [(d\vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2] \\ &= a^2 [\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \omega_0^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2^2 &= \left(\frac{dz_2}{dt} \right)^2 = \left(2a \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \\ &= 4a^2 \sin^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2 \end{aligned}$$

L'energia cinetica è dunque:

$$T = m_1 a^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \omega_0^2 \right) + 2m_2 a^2 \sin^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2 \quad (4)$$

L'energia potenziale è meno tediosa da calcolare in quanto:

$$V = 2V_1 + V_2 = 2m_1 g z_1 + m_2 g z_2 = -(m_1 + m_2) g a \cos \vartheta \quad (5)$$

La Lagrangiana del sistema è dunque:

$$\mathcal{L}(\vartheta, \dot{\vartheta}, \varphi, \dot{\varphi}) = m_1 a^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \omega_0^2 \right) + 2m_2 a^2 \sin^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2 + (m_1 + m_2) g a \cos \vartheta \quad (6)$$

Possiamo ora derivare la Lagrangiana:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} &= (2m_1 a^2 + 4m_2 a^2 \sin^2 \vartheta) \dot{\vartheta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \right) &= 2m_1 a^2 \ddot{\vartheta} + 4m_2 a^2 \sin^2 \vartheta \ddot{\vartheta} + 8m_2 a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\vartheta}^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} &= 2m_1 a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \omega_0^2 + 4m_2 a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\vartheta}^2 + -2ga (m_1 + m_2) \sin \vartheta \end{aligned}$$

Unendo tutto e semplificando otteniamo:

$$(m_1 a + 2m_2 a \sin^2 \vartheta) \ddot{\vartheta} + g (m_1 + m_2) \sin \vartheta + (2m_2 \dot{\vartheta}^2 - m_1 \omega_0^2) a \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \quad (7)$$

Per lavorare su matlab dobbiamo abbassare il grado dell'equazione 7, ottenendo il seguente sistema di equazioni del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \zeta \\ \dot{\zeta} = -\frac{g(m_1 + m_2) \sin \vartheta - (2m_2 \zeta^2 - m_1 \omega_0^2) a \sin \vartheta \cos \vartheta}{m_1 a + 2m_2 a \sin^2 \vartheta} \end{cases} \quad (8)$$

3 Studio del sistema

Dopo aver ottenuto le equazioni del moto possiamo passare a studiare numericamente il sistema. Cominciamo a studiare il sistema in cui $\varphi(t) = \omega_0 t$. Dopo aver implementato le function su Matlab e imposto le seguenti condizioni iniziali: $m_1 = 4$, $m_2 = 8$, $\omega = 3$, $a = 3$, $dt = (0 : 0.05 : 30)$, $x_0 = [\frac{\pi}{6}, 0]$ otteniamo :

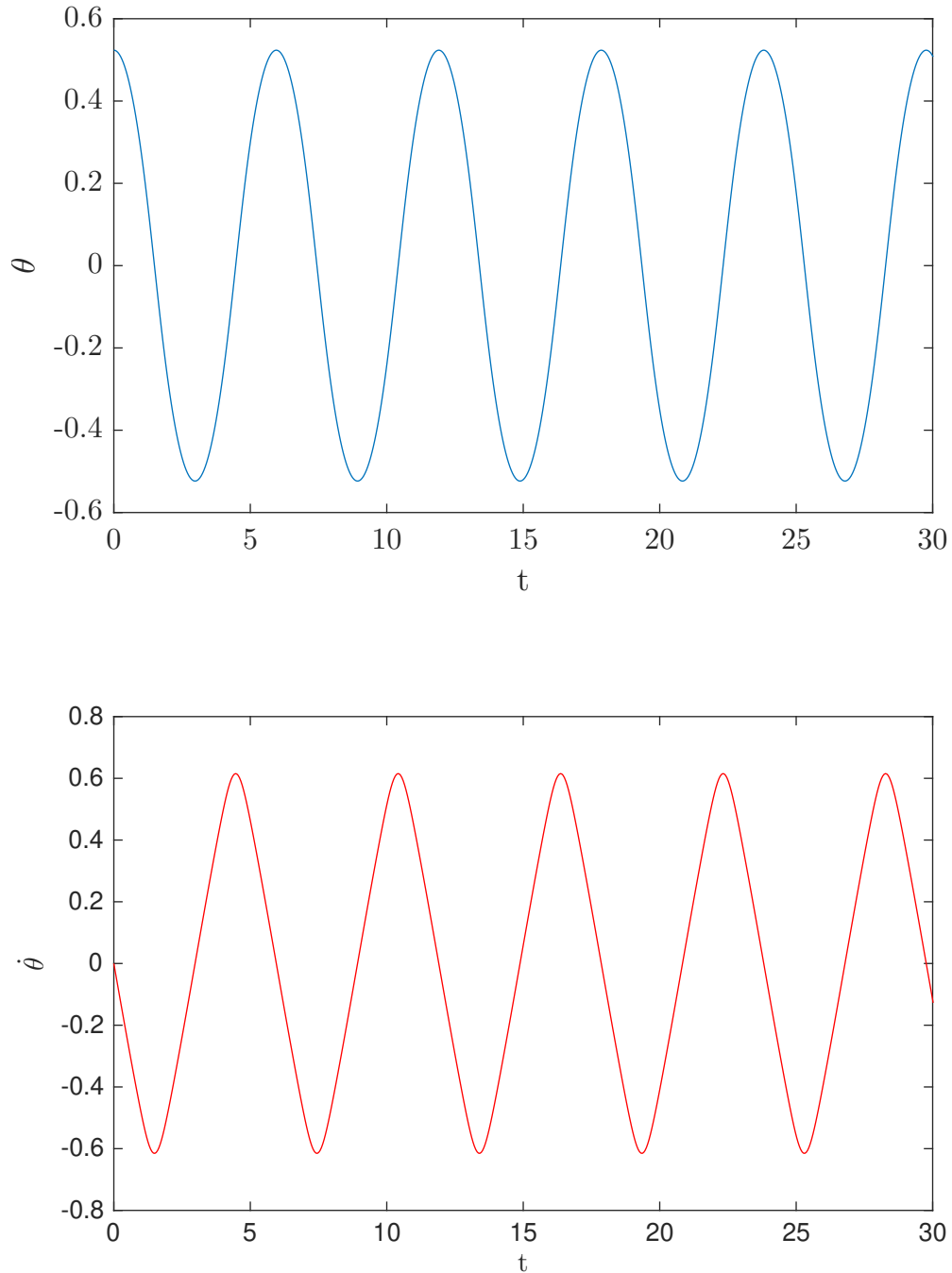


Figura 2: Prima risoluzione del sistema

Possiamo osservare un andamento periodico del sistema, per capire in che modo però questo è influenzato dai parametri che abbiamo scelto, facciamo uno studio pa-

rametrico sui 3 parametri m_1 , m_2 e ω_0 . Per m_1 sono stati usati i seguenti valori: $m_1 = [0.5, 1, 2, 3, 4]\text{kg}$ mentre $m_2 = 2\text{kg}$, $a = 0.5\text{m}$ e $\omega_0 = 0.1\text{ rad/s}$

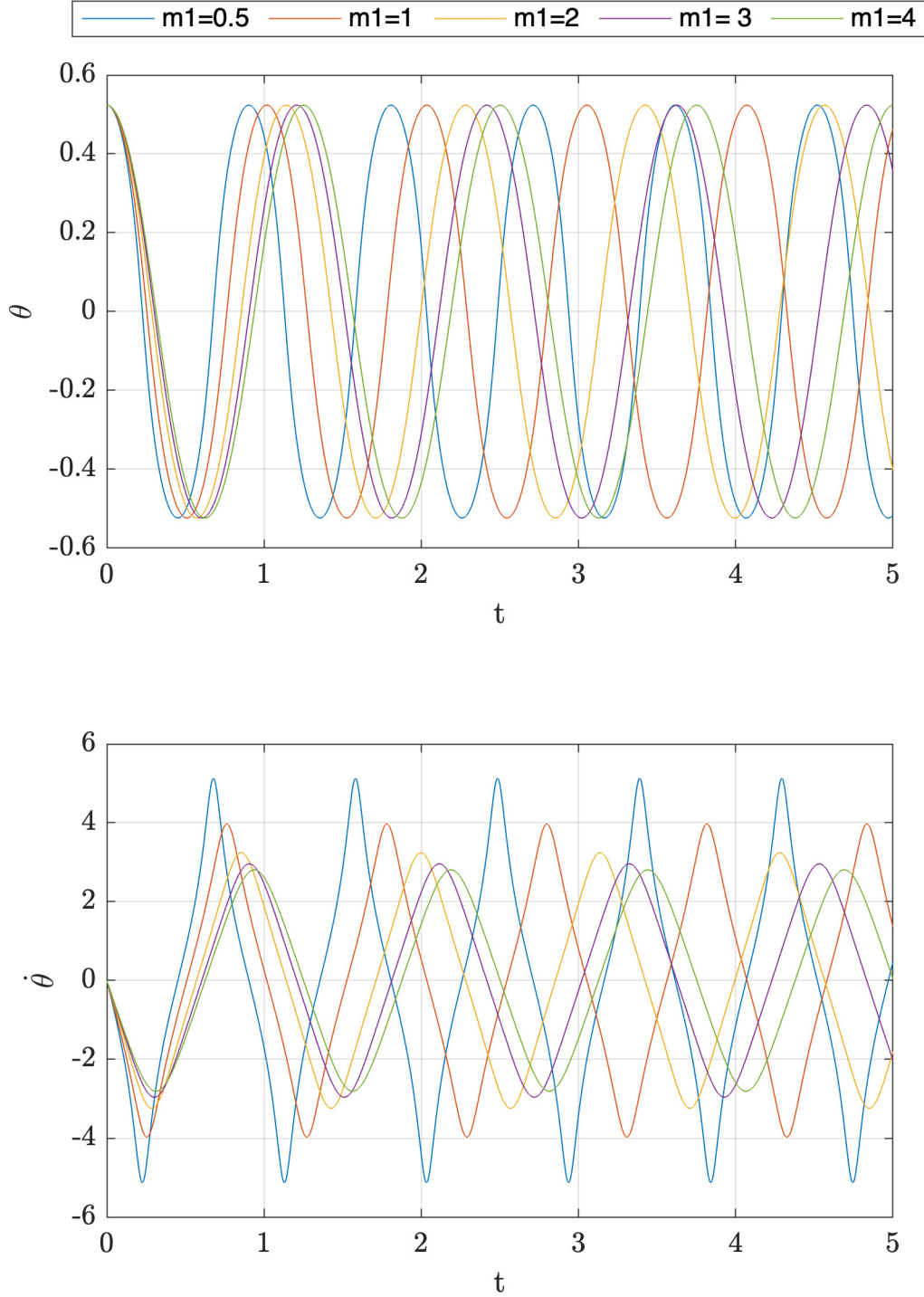


Figura 3: Studio parametrico m_1

Osserviamo dal primo grafico come l'aumento della massa riduce la frequenza au-

mentando il periodo, come era possibile aspettarci vista la periodicit  del sistema. All'aumento della massa   anche associato una diminuzione delle ampiezze delle oscillazioni della velocit  $\dot{\vartheta}$.

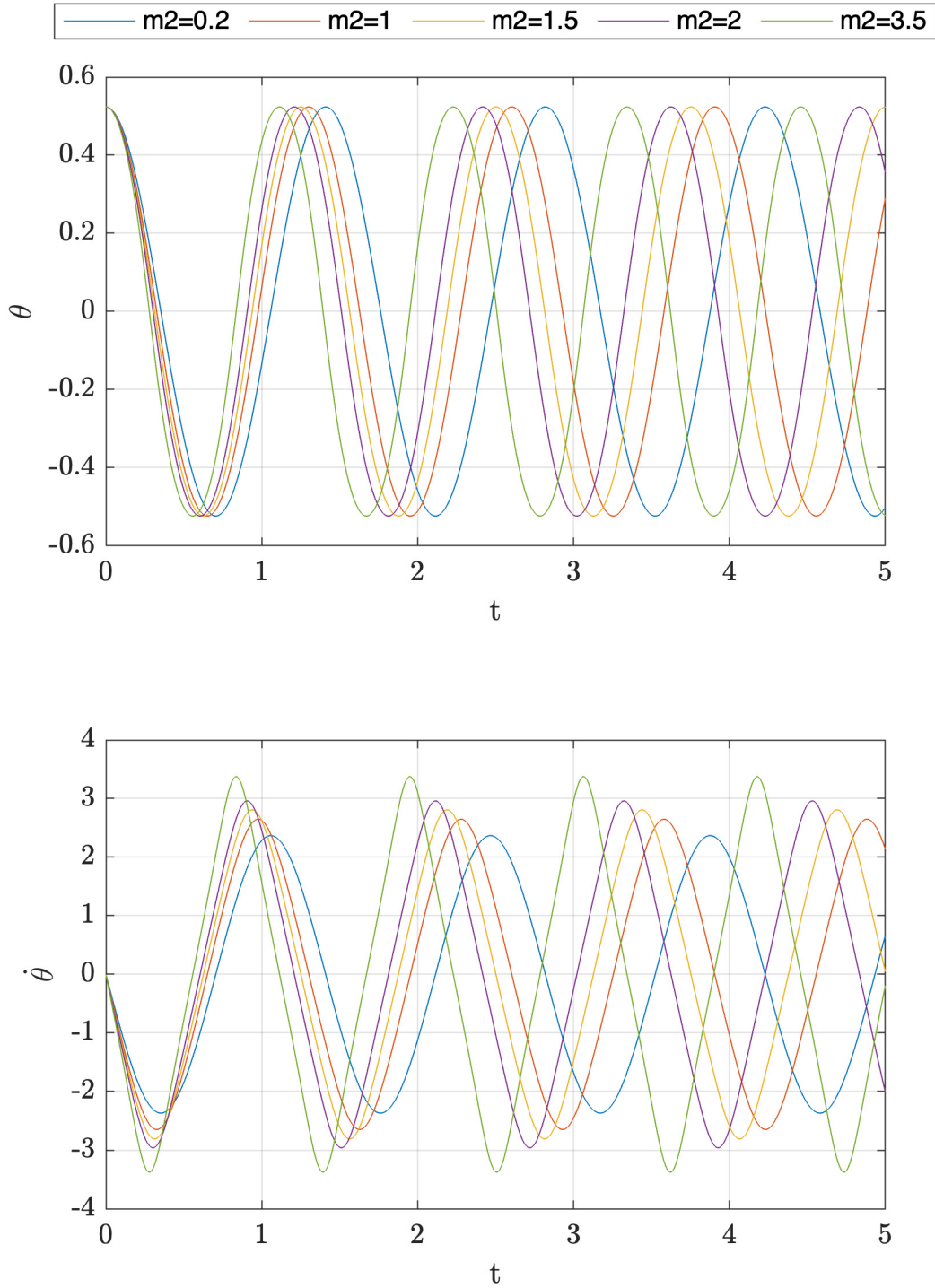


Figura 4: Studio parametrico m_2

Passiamo ora a studiare come varia il sistema se invece di cambiare m_1 cambiamo m_2 , utilizzando i seguenti valori: $m_2 = [0.2, 1, 1.5, 2, 3.5]\text{kg}$. Il risultato è mostrato in figura (4). Il comportamento del sistema è del tutto opposto allo studio parametrico precedente, osserviamo infatti che ad un aumento della massa corrisponde una diminuzione della frequenza (aumento del periodo).

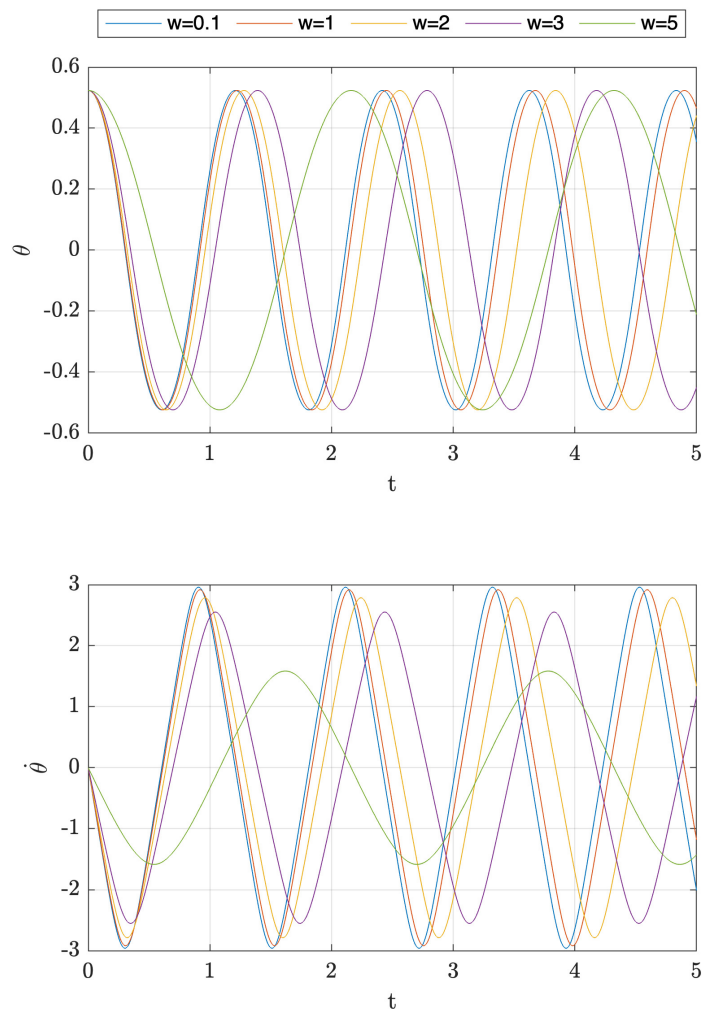


Figura 5: Studio parametrico su ω

Per concludere passiamo a studiare la risposta del sistema alla variazione di ω . Va evidenziato che il sistema è altamente sensibile al set di parametri usati, in particolare al parametro in questione.²

I valori usati sono: $\omega = [0.1, 1, 2, 3, 5]\text{rad/s}$. Come anticipato la elevata sensibilità di questo sistema ai valori dei parametri non permette di trarre conclusioni generali tra la variazione di un parametro e la risposta del sistema. Sicuramente dalla figura 5 è evidente che all'aumentare di ω_0 si verifica una diminuzione della frequenza, cioè

²La complessità nel descrivere il sistema è sicuramente data dalla non linearità delle equazioni, ma anche dalla mancanza del vincolo che impedisce a m_2 di superare l'origine, evento fisicamente impossibile.

periodi più lunghi. Per evidenziare questa dipendenza è stato eseguito il seguente studio parametrico combinato:

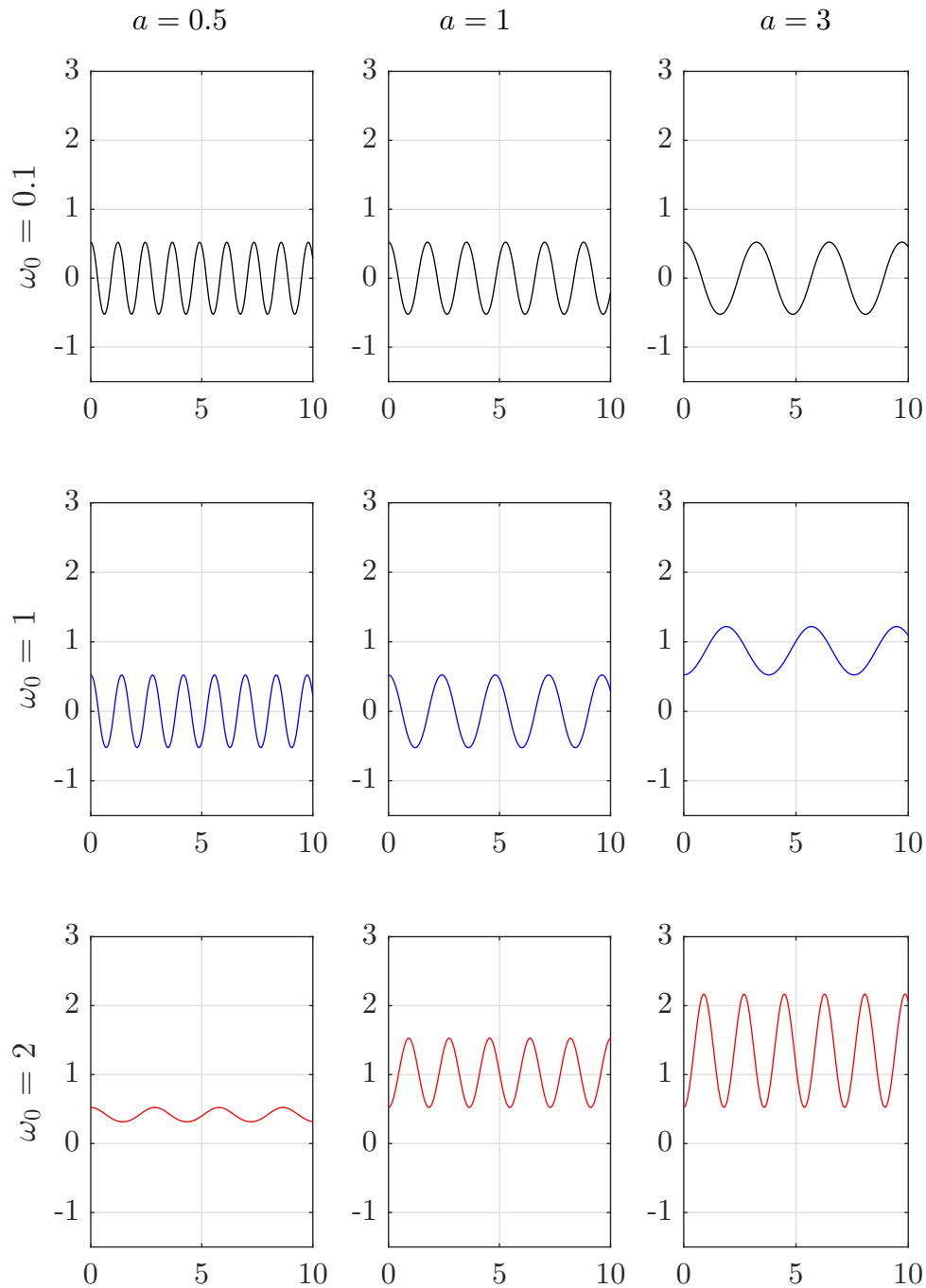


Figura 6: Studio parametrico a, ω_0

Si evince chiaramente che per alcuni valori di ω_0 l'aumento della lunghezza delle aste comporta un aumento del periodo mentre per valori più elevati (2 rad/s) no. Inoltre si assiste alla modifica degli angoli di oscillazione, infatti dal sesto al nono grafico l'asse di simmetria delle oscillazioni non è più 0. Per concludere la sezione che riguarda il sistema a velocità di rotazione costante è stata realizzata un [animazione](#) che

mostra la traiettoria del sistema al variare di ω_0 tenendo fissati tutti gli altri parametri.

Passiamo ora a studiare il sistema con $\varphi = \varphi(t)$, le cui equazioni del moto sono 1. Per questo sistema possiamo condurre solo due studi parametrici, su m_1 e m_2 , dal momento che a tutti gli effetti φ evolve in maniera non costante nel tempo. Prima di fare ciò vediamo l'andamento del sistema con le seguenti condizioni iniziali: $x_0 = [\frac{\pi}{6}, 0, 0, \frac{\pi}{4}]$, abbiamo cioè assegnato a $\dot{\varphi}_0$ un valore diverso da zero.

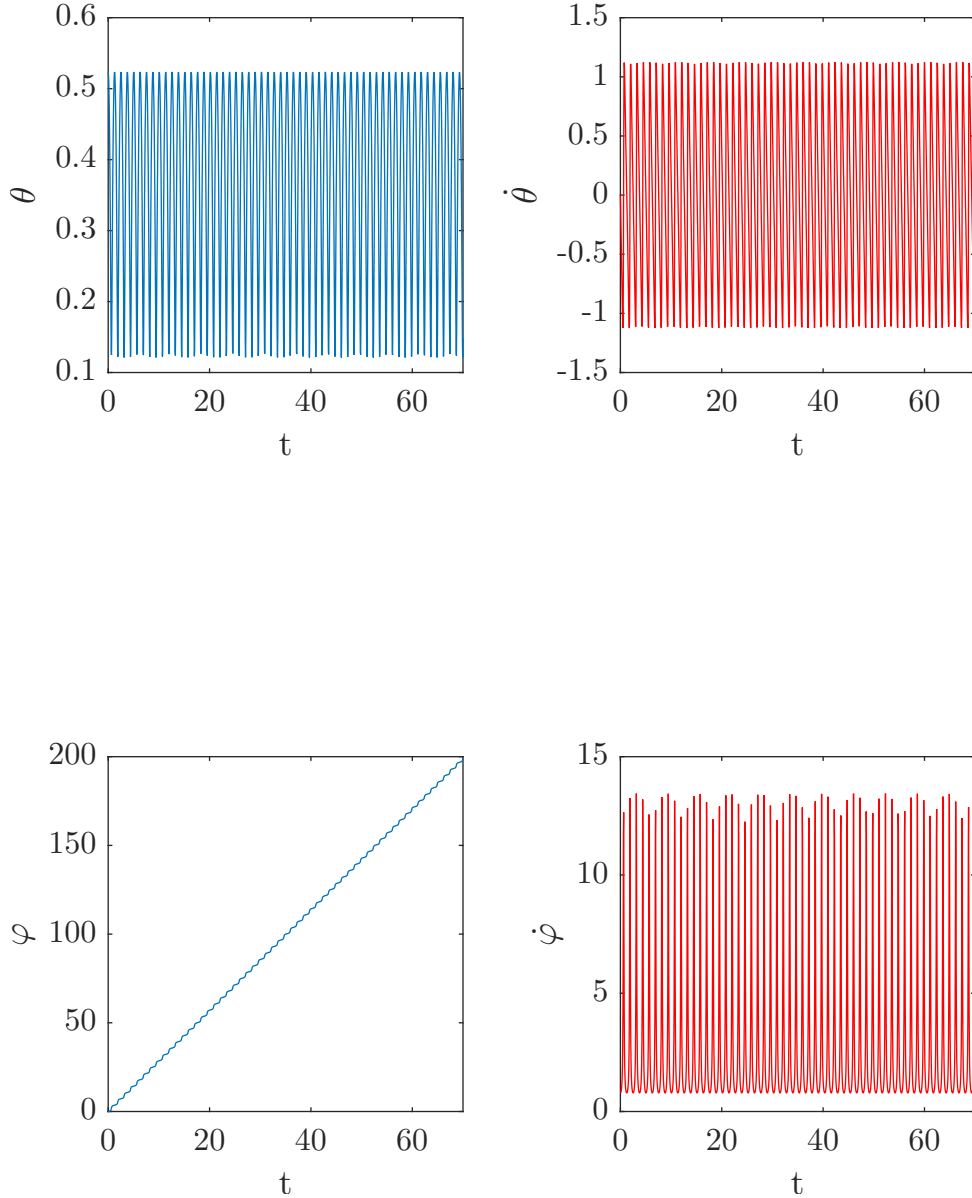


Figura 7: Prima risoluzione del sistema con $\varphi = \varphi(t)$

Come potevamo aspettarci anche in questo caso osserviamo un andamento periodico, fatto che appare evidente dal grafico di $\dot{\vartheta}$. Osserviamo come φ possa sembrare lineare ma in realtà sia a "scalini".

Dopo aver ottenuto un'idea generale di come si comporta il sistema possiamo studiarlo parametricamente, cominciando da m_1 . I valori standard sono i seguenti $m_1 = 4$, $m_2 = 8, a = 3$.

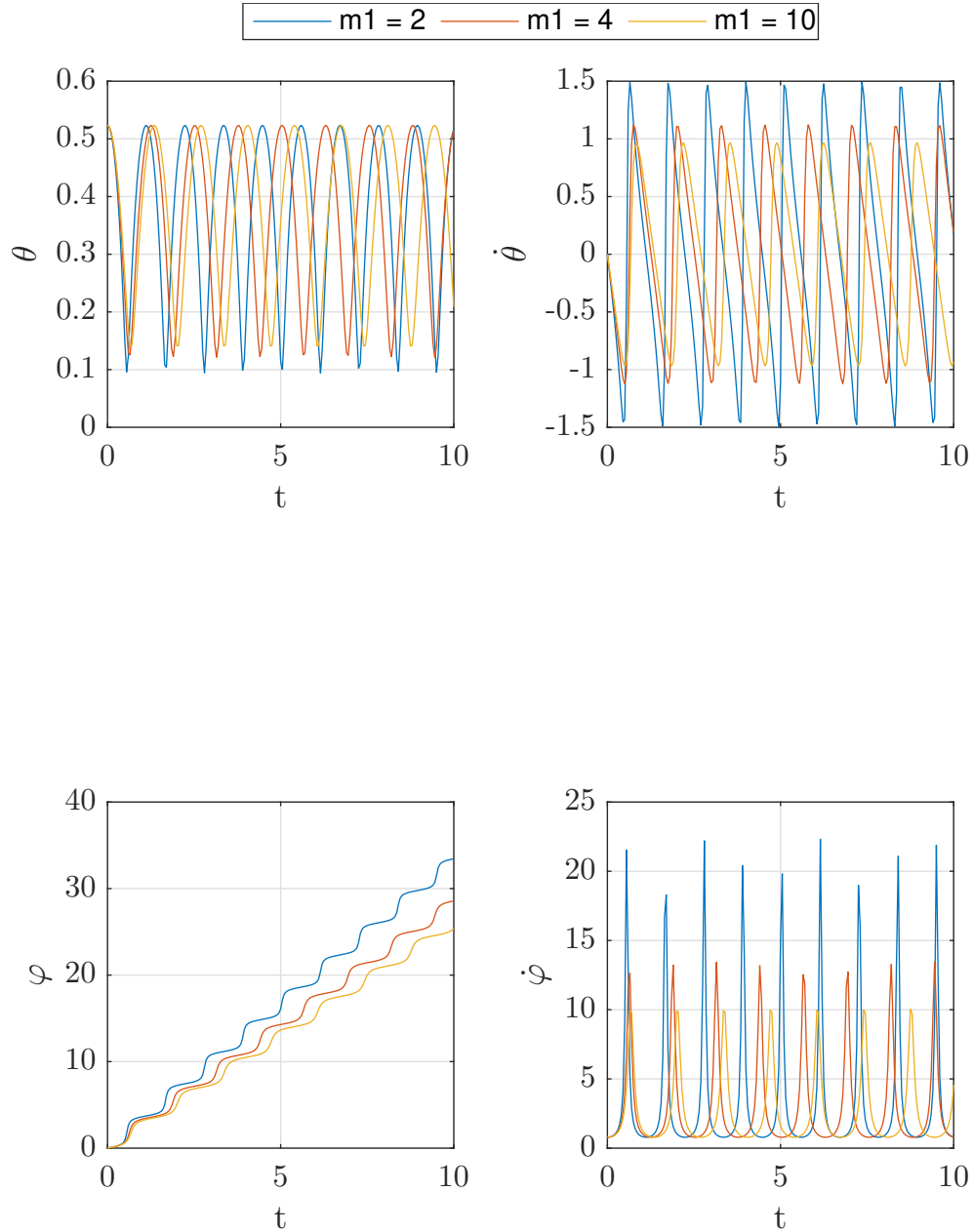


Figura 8: Studio parametrico su m_1 ($\varphi = \varphi(t)$)

Per facilitare la lettura del grafico è stato ridotto il tempo di simulazione a 10s. Più o meno come accadeva per il sistema con velocità angolare costante, per masse minori assistiamo a un aumento della frequenza e valori della velocità associata (ϑ) più alti. Lo stesso succede per φ , infatti la pendenza della curva è maggiore per masse minori, così come i picchi di $\dot{\varphi}$.

Passando allo studio di m_2 :

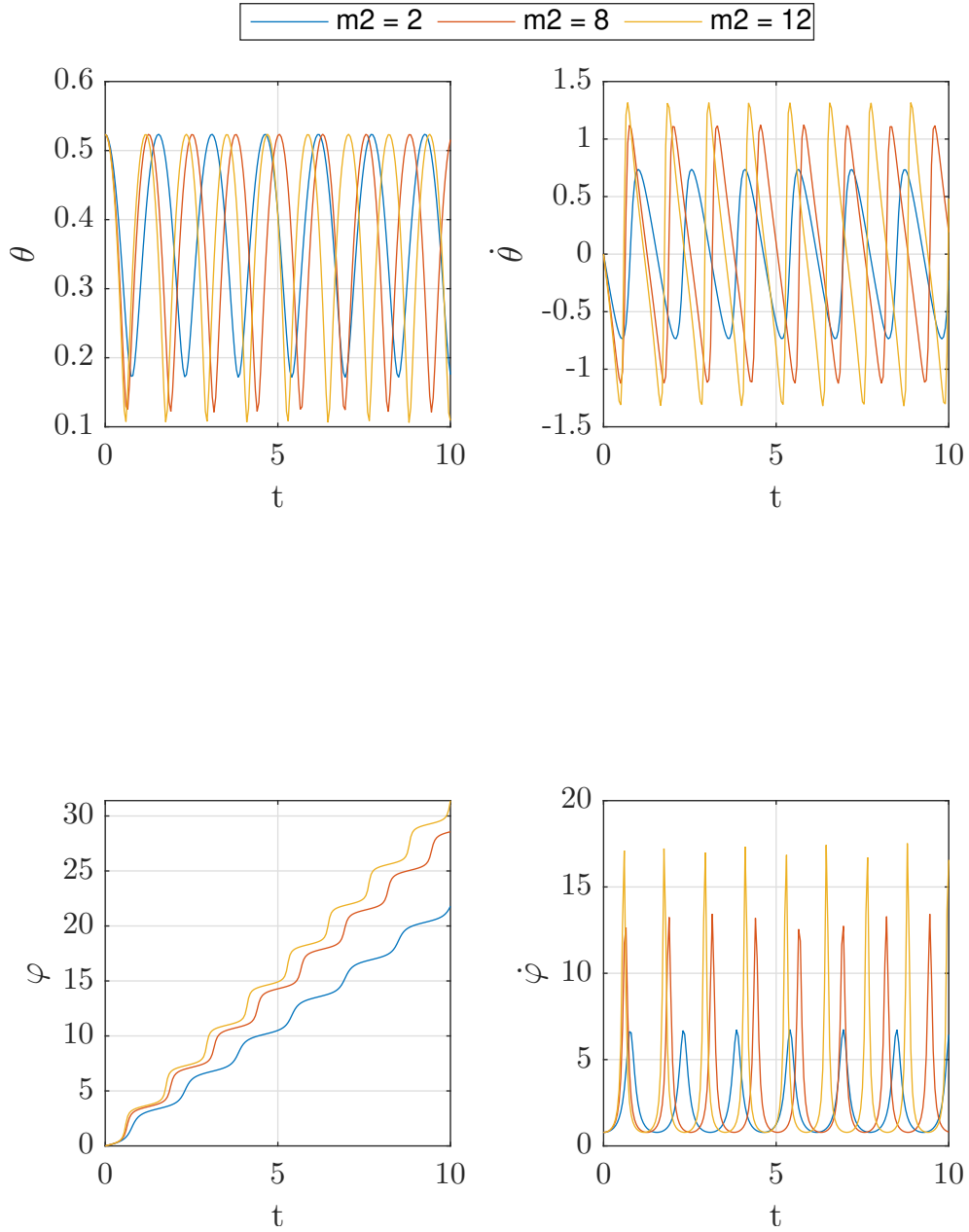


Figura 9: Studio parametrico su m_2 ($\varphi = \varphi(t)$)

Il comportamento in questo caso è più complesso da descrivere, possiamo osservare come la tendenza che abbiamo evidenziato prima su φ sia opposta con m_2 : a valori più bassi corrispondono pendenze più basse. Si può in oltre osservare che all'aumentare di m_2 c'è un aumento dell'ampiezza delle oscillazioni delle aste (valori di ϑ maggiori). Per concludere prendendo le stesse condizioni iniziali ($\vartheta_0 = \frac{\pi}{6}$, tutte le altre condizioni iniziali a zero) e valori dei parametri confrontiamo l'andamento di ϑ nel caso in cui φ sia una variabile dinamica o meno.

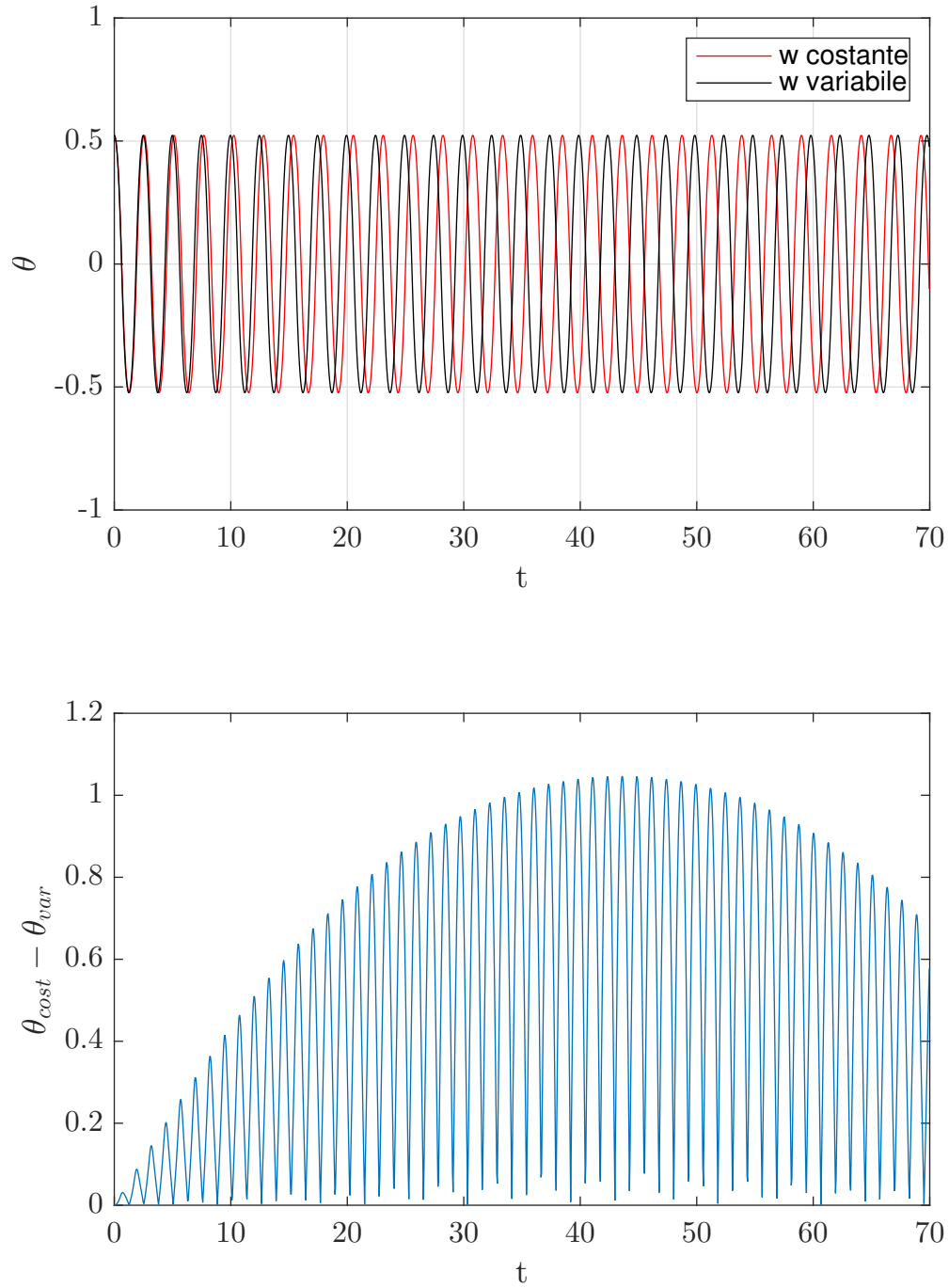


Figura 10: Confronto su ϑ

Inizialmente i due grafici sono in fase per poi sfasarsi, come indica anche l'aumento del modulo della differenza istante per istante. Il secondo grafico ci suggerisce anche che lo sfasamento diminuisce, allungando il tempo simulazione infatti si osserva che i due sistemi tornano nuovamente a essere in fase.

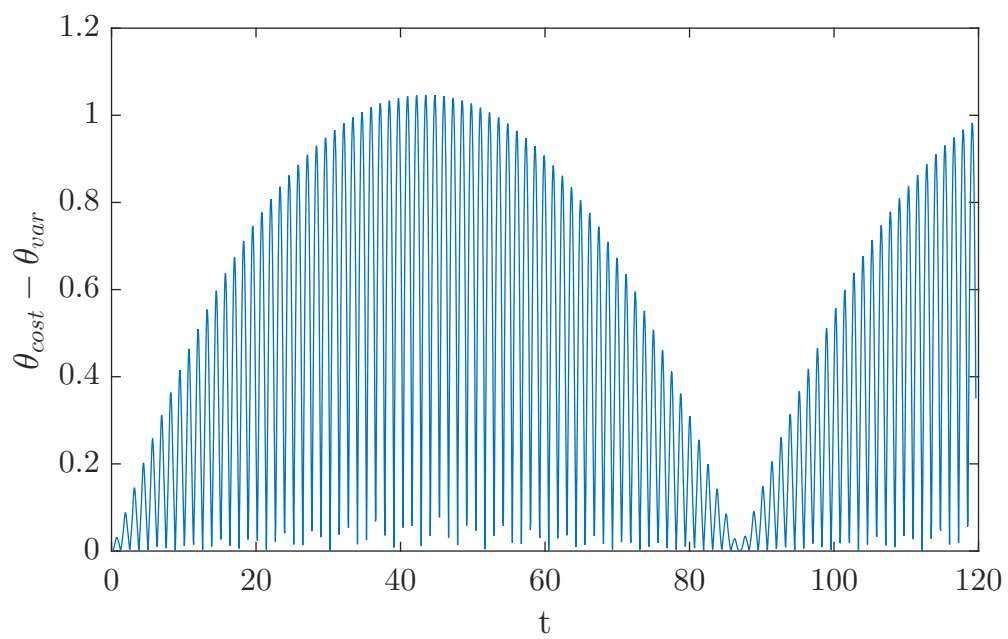
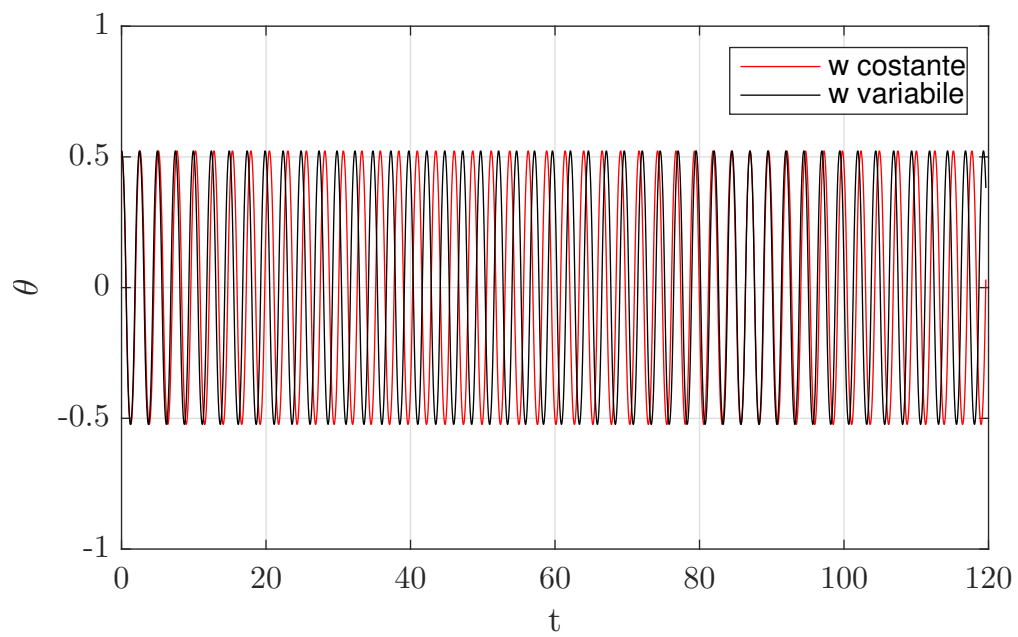


Figura 11: Confronto su ϑ ($t = 120s$)

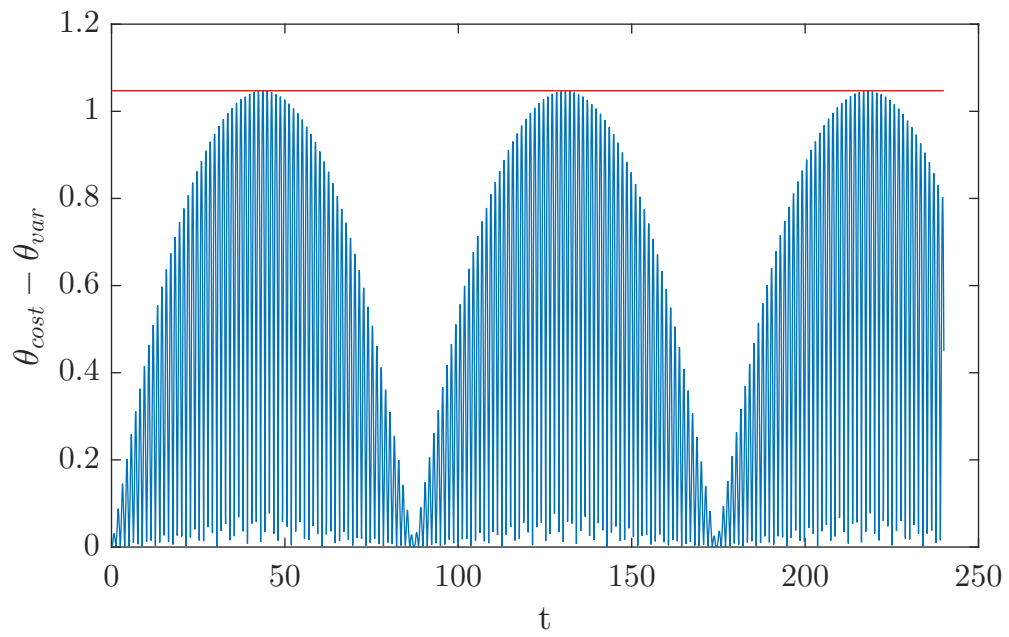
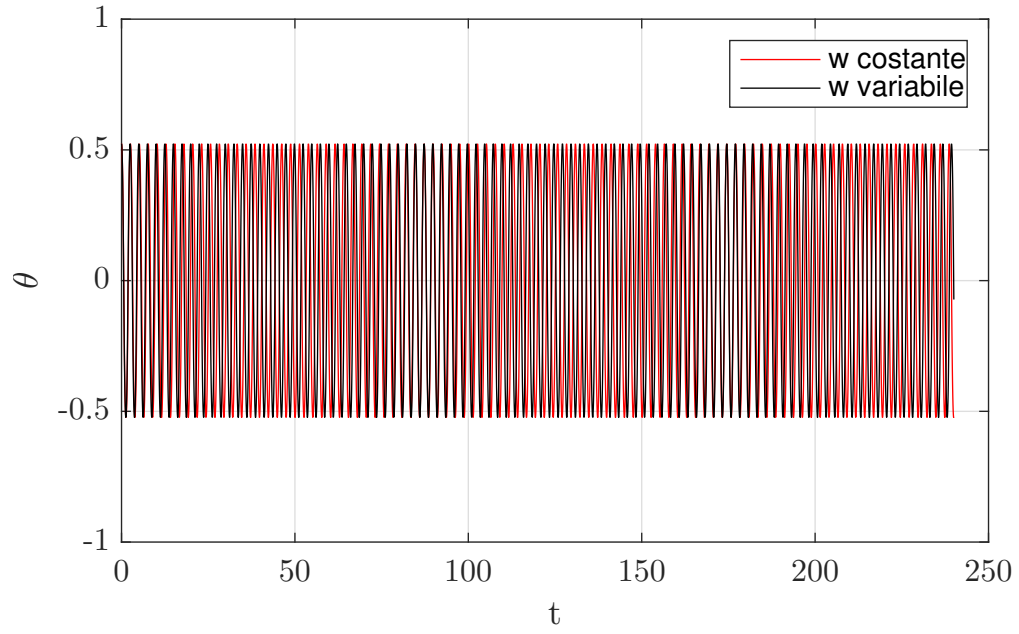
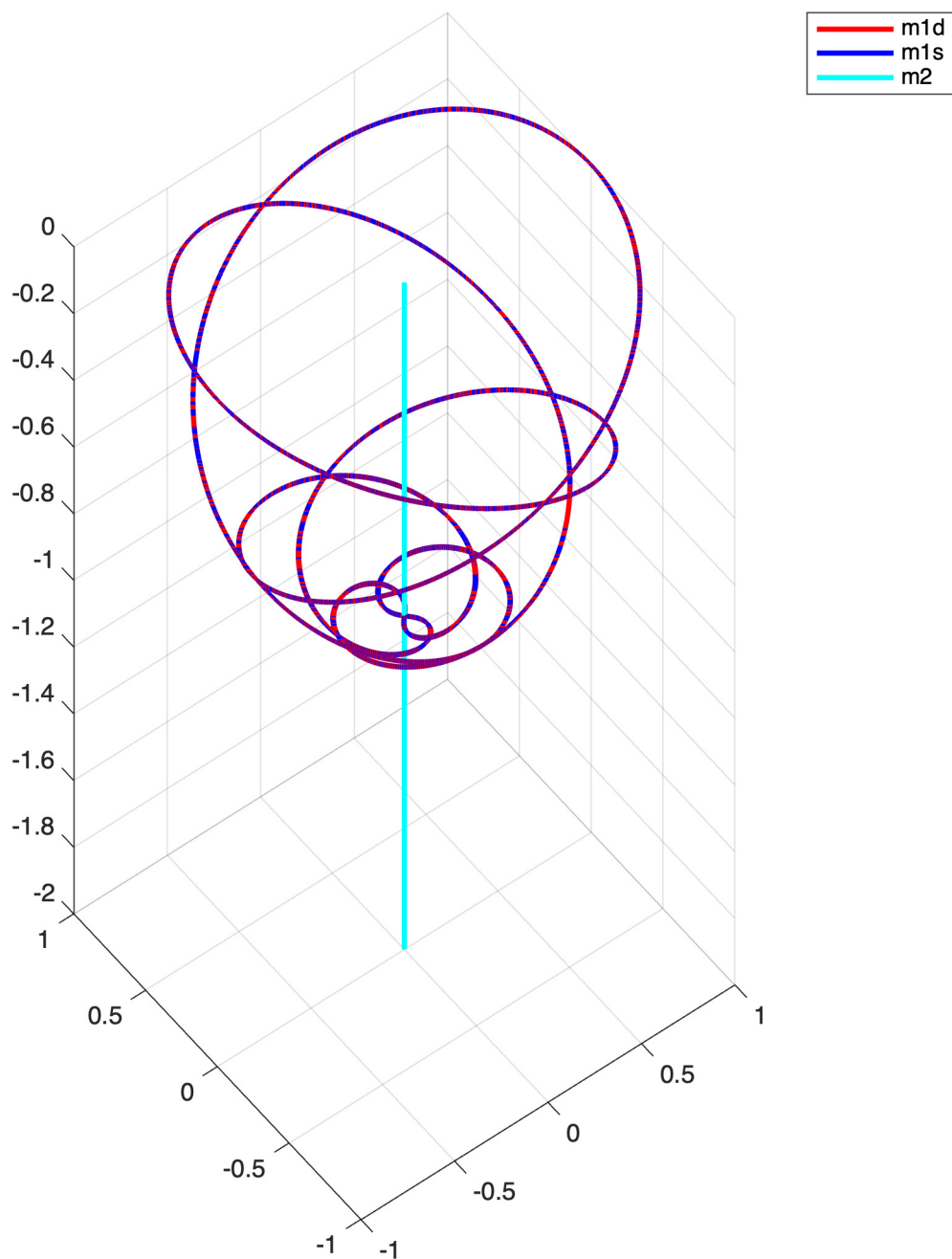
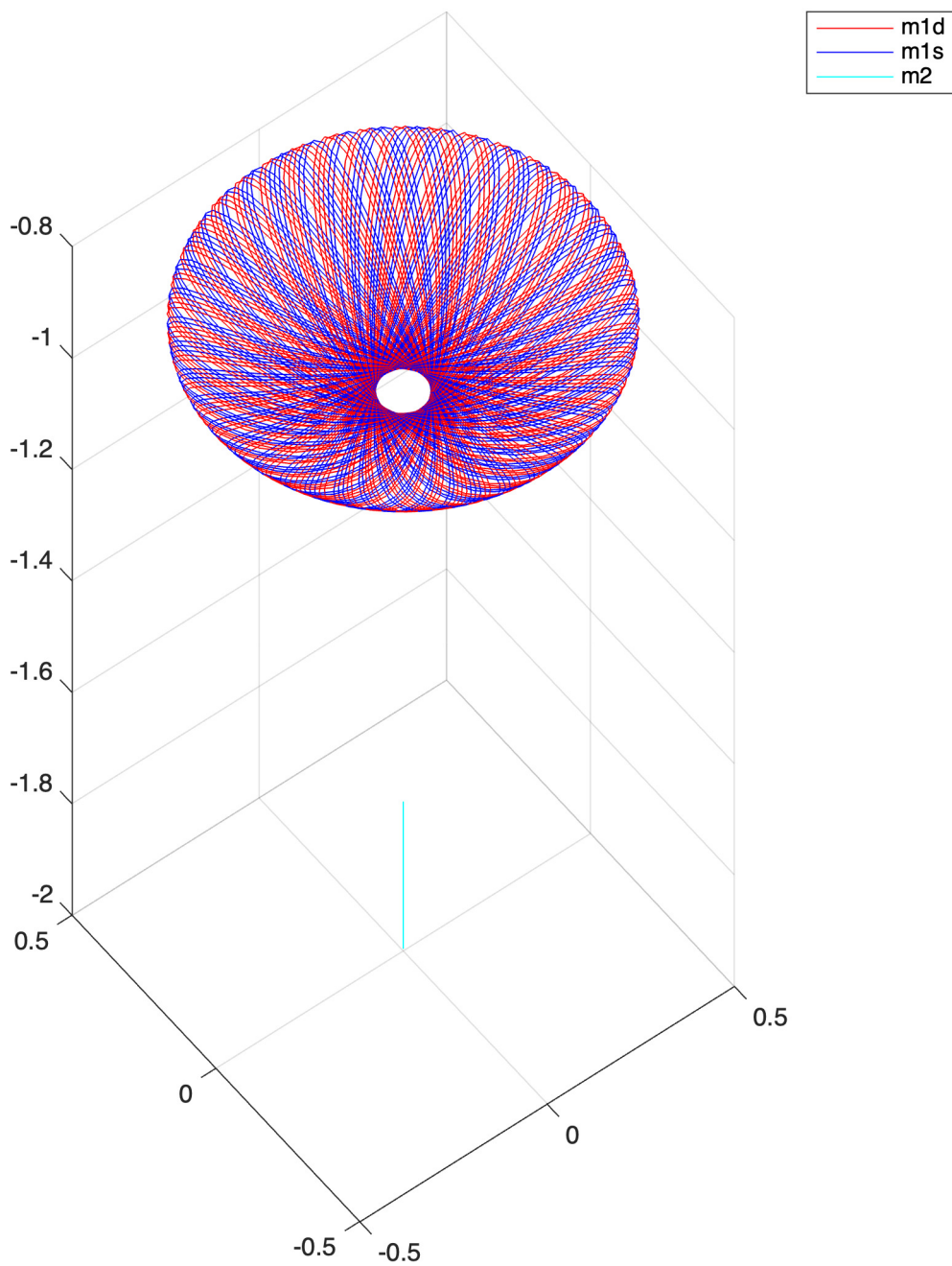


Figura 12: Confronto su ϑ ($t = 240s$)

Dal grafico 11 appare evidente il rifasamento che avviene attorno a 90s mentre nella figura 12 è stata tracciata una retta in corrispondenza del massimo del modulo della differenza per sottolineare la periodicità.

Terminiamo l'analisi confrontando le traiettorie nel piano cartesiano $Oxyz$, confrontiamo come si comportano i due sistemi. Sono stati modificati i parametri e portati a: $m_1 = 1\text{kg}$, $m_2 = 3\text{kg}$, $a = 1\text{m}$, $\omega = 2\text{rad/s}$





Le due traiettorie sono significativamente diverse, fatto che non dovrebbe stupire visto la complessità del sistema e la sensibilità ai parametri e alle condizioni iniziali. Per concludere è stata realizzata un'[animazione](#) che mostra la traiettoria del sistema nel caso $\varphi = \omega_0 t$.