АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА ДВОИЧНИ ПАЛИНДРОМИ

Първото предложено решение (файл **binpal_slow.cpp**) е стандартното, което обхожда всички числа, в интервала и проверява за всяко от тях дали е симетрично. Малко подобрение е съображението да се разглеждат само нечетните числа, тъй като всяко огледално число в двоична бройна система започва и завършва с 1! Това решение е твърде бавно и дава само около 30% от точките.

Второто решение (файл **nbinpal.cpp**) се основава на няколко съображения.

Първото е, че лесно може да се намери броят на двоичните палиндроми с даден брой цифри. Наистина, ако търсим броя на двоичните палиндроми с точно n цифри, то има два случая:

1. Числото n е четно. Тогава е ясно, че могат да се разглеждат само първите n/2 цифри на двоичния палиндром (останалите трябва да са същите). Но тъй като първата цифра е винаги 1, то остават останалите (n/2 – 1) цифри, които могат да бъдат 0 или 1. Броят на различните числа е $2^{n/2 - 1}$, което означава, че и броят на двоичните палиндроми с n цифри е $2^{n/2 - 1}$.
2. Числото n е нечетно. Аналогично тогава се разглеждат само първите (n - 1)/2 цифри. Но средната цифра може да е произволна, т.е. и за нея има две възможности. Затова броят на двоичните палиндроми с n цифри е $2^{(n - 1)/2 - 1} * 2 = 2^{(n - 1)/2}$.

Второто съображение е, че за да се намери броят на числата двоични палиндроми в интервала [x, y], то може да се направи функция, която намира броя на числата в интервала [1, p] и тази функция да се използва два пъти за интервала [1, y] и интервала [1, x – 1].

Третото съображение е, как да се намери броят на всички двоични палиндроми с дадена дължина по-малки или равни на дадено число в десетична бройна система, което е със същата дължина в двоична бройна система. За целта отново се използват комбинаторни разсъждения и има два случая:

1. Ако дължината n е четна. Например, търсим броя на двоичните палиндроми с 8 цифри, които са по-малки или равни на $197 = \mathbf{1100}0101_{(2)}$. Тогава се разглеждат само първите 4 цифри. Всички двоични числа с 8 цифри, първите 4 от които са 1000, 1001, 1010 или 1011 могат да образуват двоични палиндроми, които са по-малки от даденото число (10000001, 10011001, 10100101, 10111101). В обшия случай броят на тези числа е равен на броя на всички числа по-малки от 100, т.е числото в десетична бройна система, което е съставено от (n/2 - 1) цифри в двоична бройна система, започвайки от втората цифра отляво надясно (тъй като първата цифра е винаги 1). Остава да се разгледа числото с 8 цифри в двоична бройна система, което започва с 1100 и е палиндром. Ако това число (11000011) е по-малко или равно на даденото число, то също трябва да се включи в броят.
2. Ако дължината n е нечетна. Например, търсим броя на двоичните палиндроми с 9 цифри, които са по-малки или равни на $453 = \mathbf{1110}00101_{(2)}$. Тогава се разглеждат само първите 4 цифри. Всички двоични числа с 9 цифри, първите 4 от които са 1000, 1001, 1010, 1011, 1100 или 1101 могат да образуват двоични

палиндроми, които са по-малки от даденото число (100000001, 100010001, 100101001, 100111001, 101000101, 101010101, 101101101, 101111101, 110000011, 110010011, 110101011, 110111011). В обшия случай броят на тези числа е равен на броя на всички числа по-малки от 110 умножен по 2 (заради средната цифра), т.е числото в десетична бройна система, което е съставено от ((n - 1)/2 - 1) цифри в двоична бройна система, започвайки от втората цифра отляво надясно (тъй като първата цифра е винаги 1). Остава да се разгледат двете числа с 9 цифри в двоична бройна система, които започват с 1110 и са палиндроми. Ако тези числа (111000111 и 111010111) са по-малки или равни на даденото число, те също трябва да се включат в броят.

В програмата горните пресмятания са реализирани чрез побитови операции, но могат да се реализират и итеративно. Образуването на палиндром е реализирано с помощта на функцията Reverse.

С помощта на посочените съображения задачата се решава, като за интервала от 1 до p първо се намира броя на всички двоични палиндроми с дължина по-малка от дължината на числото p в двоична бройна система и след това се намира броя на двоичните палиндроми с дължина точно равна на дължината на p, които са по-малки или равни на него.

При дадените ограничения, сложността на задачата става линейна относно дължината на числото в двоична бройна система, която не е повече от 56 знака.

Поради ограниченията на входните данни трябва да се работи с 64-битов тип данни. В противен случай се губят 50% от точките.

Автор: Велислава Емилова