

## Projet n°5

*Interpolation and Integration Methods / Cubic  
Splines and Surface Interpolation*

### Groupe n°1 - Equipe n°1

Responsable : aberne

Secrétaire : apatry

Codeurs : vjeanjuan, melmoumni, nijellab

*Résumé* : L'objectif de ce projet est d'implémenter un modèle permettant de représenter l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion. Le résultat est affiché sous forme de carte des pressions. Afin d'obtenir cette carte, un raisonnement en deux étapes est nécessaire : On modélise l'aile d'avion à partir d'une liste de points et d'une méthode de modélisation par les splines puis, on génère la carte à partir de méthodes d'intégration.

## 1 Génération des splines

Avant de démarrer, nous avons sélectionné une aile d'avion (plus précisément, issue d'un Boeing) dans la base de données de l'UIUC Applied Aerodynamics Group. Pour l'ensemble du projet, nous avons choisi comme modèle l'aile dont les données sont contenues dans le fichier BACNLF.DAT. À partir d'un fichier de lecture et d'une analyse, nous avons pu modéliser l'aile sous forme d'un nuage de points séparé en deux parties : l'extrados (partie supérieure de l'aile) et l'intrados. (partie inférieure de l'aile)

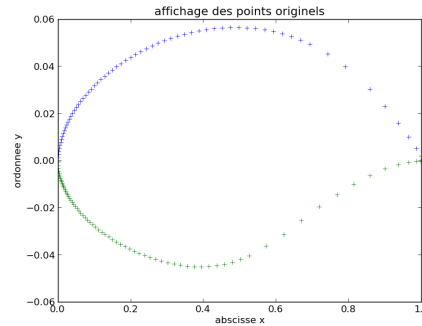


FIGURE 1 – Aile d'avion issue du fichier BACNLF.DAT sous forme de nuage de points

Ensuite, afin d'obtenir la courbe, nous effectuons l'interpolation des points à partir des splines cubiques afin d'obtenir une courbe représentant l'aile d'avion. Le principe est de joindre les points deux à deux grâce à une fonction polynomiale. Les polynômes utilisés dans l'interpolation sont de degrés au plus égaux à 3 et sont construits de manière à conserver la continuité de la courbe et de sa dérivée, ainsi que de sa dérivée seconde en tout point de la courbe y compris à la jonction de deux polynômes consécutifs.

D'après la formule du Numerical Recipes (Chapitre 3.3, page 121), le polynôme liant deux points consécutifs  $M_k(x_k, y_k)$  et  $M_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$  est le suivant :

$$y = A.y_k + B.y_{k+1} + C.y_k'' + D.y_{k+1}''$$

avec  $A = \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}$ ,  $B = 1 - A$ ,  $C = \frac{1}{6}(A^3 - A)(x_{k+1} - x_k)^2$ ,  $D = \frac{1}{6}(B^3 - B)(x_{k+1} - x_k)^2$

Cependant, l'usage de ces formules pose problème. Elles font intervenir des dérivées secondes que nous ne connaissons pas. Il existe néanmoins une relation permettant de déterminer les dérivées d'ordre 2 dans le Numerical Recipes (page 122) :

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{6} y_{k-1}'' + \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{3} y_k'' + \frac{x_k - x_{k+1}}{6} y_{k+1}'' = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

En supposant qu'il y ait  $n$  points à relier, en posant  $y_0''$  et  $y_{n-1}''$  nuls, on obtient alors le système tridiagonal suivant, permettant de déterminer les dérivées secondes et d'obtenir la courbe :

$$\begin{pmatrix} \frac{(x_2 - x_0)}{3} & \frac{(x_2 - x_1)}{6} & 0 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{(x_i - x_{i-1})}{6} & \frac{(x_{i+1} - x_{i-1})}{3} & \frac{(x_{i+1} - x_i)}{6} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{(x_{N-2} - x_{N-3})}{6} & \frac{(x_{N-1} - x_{N-3})}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'' \\ \vdots \\ y_i'' \\ \vdots \\ y_{N-2}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ \vdots \\ \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \\ \vdots \\ \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{x_{N-1} - x_{N-2}} - \frac{y_{N-2} - y_{N-3}}{x_{N-2} - x_{N-3}} \end{pmatrix}$$

Cependant, afin de comprendre l'utilisation d'une méthode d'interpolation comme celle des splines, nous avons décidé de tester une autre méthode : l'interpolation par polynômes de Lagrange. Après implémentation, nous avons pu observer une différence de longueur entre la courbe issue de l'interpolation par les splines et celle issue des polynômes interpolateurs de Lagrange. En effet dans le cas de l'aile issue du fichier BACNLF.DAT, on obtient pour la courbe donnée par l'interpolation par les splines, une longueur de 2.022 alors que la courbe issue de l'interpolation par méthode de Lagrange, on obtient une longueur de 2.018. On obtient alors les courbes suivantes :

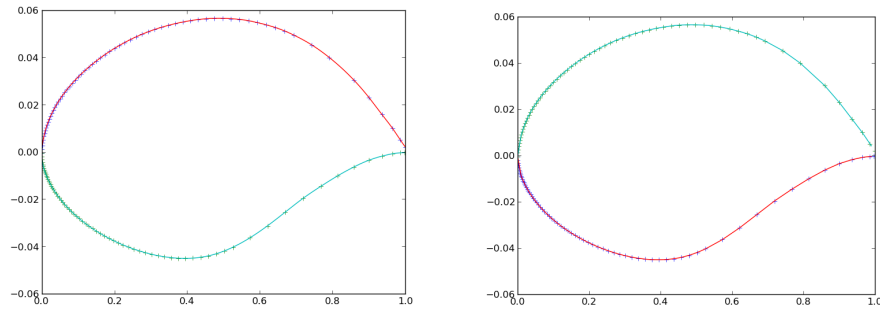


FIGURE 2 – À gauche, l'aile d'avion après avoir subi la méthode des splines cubiques. À droite, l'aile d'avion après avoir subi la méthode de Lagrange

## 2 Méthodes d'intégration

Afin d'approcher la valeur de l'intégrale permettant de déterminer la longueur d'une courbe, nous avons focalisé notre approche sur deux méthodes d'intégration (pour une fonction en dimension 1).

## 2.1 Méthode des Trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à découper l'intervalle sur lequel on souhaite déterminer l'intégrale à partir d'un pas constant. Ensuite, on effectue une approximation de l'intégrale sur chacun de ces petits intervalles puis, on somme l'ensemble de ces approximations afin d'obtenir l'intégrale de notre fonction sur l'intervalle initial. L'approximation des découpages est réalisée en calculant l'aire d'un trapèze dont deux sommets sont les points de la fonction à intégrer et les deux autres sont les abscisses correspondantes.

## 2.2 Méthode de Simpson

L'algorithme employé pour la méthode de Simpson est analogue à celui de la méthode des trapèzes. La différence se loge au niveau du découpage des intervalles. En effet, chaque découpage est approché par l'intégrale du polynôme interpolateur de Lagrange de degrés 2 appliqué à la fonction à intégrer. L'intégrale de ce nouveau découpage est alors obtenue à partir des trois points interpolés de la fonction à intégrer.

## 2.3 Amélioration générique de l'efficacité et de la rapidité

Afin d'améliorer l'efficacité et la rapidité (d'un point de vue complexité) des deux méthodes précédentes, nous avons opté pour une diminution du pas à chaque nouvelles évaluation de l'intégrale, ce qui permet de réutiliser des valeurs de la fonction à intégrer. Pour cela, on divise le pas par deux, ce qui permet de réutiliser toutes les valeurs déjà calculées. Par ailleurs, le nombre de valeurs calculées est égal à chaque étape au nombre de valeurs déjà calculées. Par conséquent, le nombre de valeurs calculées double à chaque étapes, ce qui donne un algorithme de complexité exponentielle pour une précision donnée. Cependant, la méthode de Simpson converge plus vite que la méthode des trapèzes. Par conséquent, nous utiliserons lors de la modélisation, la méthode d'intégration de Simpson.

## 2.4 Comparaison des deux méthodes

Pour comparer la méthode des trapèze et la méthode de Simpson, certaines valeurs d'intégrales ont été calculées exactement puis suivant ces deux méthodes. Deux graphes ont été tracés. L'un des graphes représente l'étude du nombre d'itérations (ou réévaluations) effectuées afin d'atteindre la précision donnée en paramètres. L'autre représente l'erreur relative (en abscisse, pour  $x$ , cela correspond à la précision  $10^{-x}$ ) effectuée par rapport aux valeurs exactes de l'intégrale. Les deux valeurs ne sont pas égales à fortiori puisque la précision demandée est celle entre deux évaluations de l'intégrale et non entre l'évaluation et la valeur exacte de l'intégrale. Les deux graphes mettent en valeur le fait que la méthode de Simpson, pour une même précision demandée, nécessite moins de d'itérations.

## 3 Carte des Pressions

Afin de calculer la carte des pressions pour notre aile, nous avons procédé par étapes. La première consiste à modéliser l'écoulement d'air autour de l'aile. Nous avons supposé l'écoulement laminaire, ce qui signifie que chaque molécule d'air suit une courbe presque similaire à l'aile et que les trajectoires

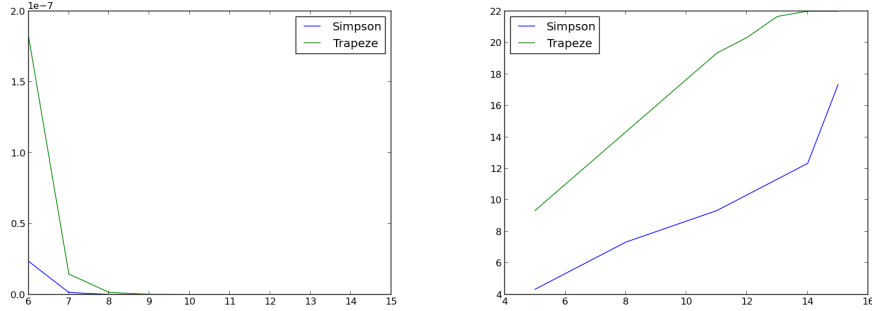


FIGURE 3 – À gauche, l'erreur relative. À droite, le nombre d'itérations en fonction de la précision  $10^{-x}$

ne sont pas sécantes. Soit  $C_f$ , la fonction représentant une surface de l'aile considérée,  $h_{min}$  (respectivement  $h_{max}$ ) la hauteur minimale (respectivement la hauteur maximale) de l'aile, une molécule d'air suit alors une trajectoire définie par la fonction  $f_\lambda$  telle que :

$$f_\lambda(x) = (1 - \lambda)f(x) + 3\lambda h$$

Dans notre cas,  $\lambda$  définit l'altitude considérée par rapport à la surface de l'aile. En considérant  $\lambda = 0$ , on obtient la courbe délimitant la surface de l'aile. En prenant  $\lambda > 1$ , on obtient une droite horizontale. On peut donc considérer pour la suite de l'étude qu'en dehors de l'intervalle  $[3h_{min}, 3h_{max}]$ , la trajectoire de l'aile n'est pas altérée par la forme de l'aile. Pour un certain nombre de valeurs de  $\lambda$ , on obtient le graphe suivant :

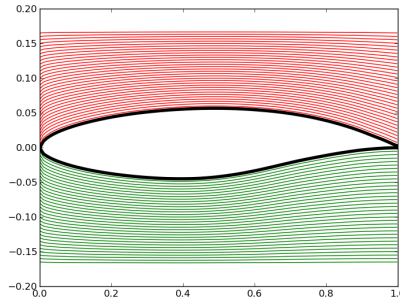


FIGURE 4 – Écoulement de l'air autour de l'aile

Enfin, afin de calculer la carte des pressions, on utilise la loi de Bernoulli sur les pressions :

$$P = P_s + P_d$$

avec  $P_s$  : la pression statique,  $P_d$  : pression dynamique. Cependant, en considérant la pression  $P$  uniforme, on peut simplifier les calculs. En effet, on a  $P_d = \frac{1}{2}\rho V^2$ , avec  $\rho$  densité volumique de l'air. On en déduit que les variations de pression sont reliées aux variations de vitesse de l'air. De plus, étant donnée la nature de l'écoulement, on en déduit que le temps mis par une molécule d'air pour

parcourir la longueur de l'aile est indépendant de la courbe de l'aile. Nous pouvons donc calculer la vitesse de l'air comme fonction de la longueur de la courbe.

Le graphique ci-dessous représente les variations de pression autour de l'aile. Les zones claires représentent une force de pression dynamique très élevée, alors que les zones sombres indiquent une pression exercée sur les ailes plus faible. On obtient cette courbe à partir d'un calcul des courbes à l'aide d'une approximation par la méthode de Simpson avec une précision  $10^{-5}$ .

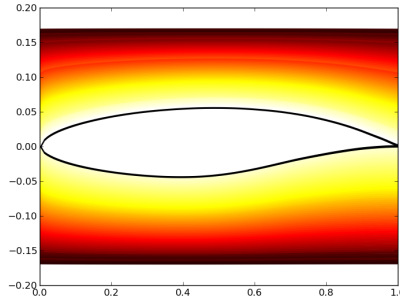


FIGURE 5 – Carte des pressions pour l'aile contenue dans BACNFL.DAT

En considérant la géométrie de l'aile telle qu'elle est sur la carte des pressions, avec une surface supérieure plus longue que la surface inférieure, la pression dynamique  $P_d$  est plus importante sur le dessus de l'aile. Cependant, la force exercée sur l'aile est principalement issue de la pression statique  $P_s$ . La force est donc plus importante sur le dessous de l'aile que sur le dessus de l'aile (sachant que la pression totale  $P$  est constante). Cette différence de force induit la portance, permettant le maintien en l'air de l'avion lors d'un vol.

À partir de nos calculs sur les intégrales, nous avons remarqué que la différence de longueur entre une courbe et son opposé était concentré dans l'intervalle  $[10^{-5}, 10^{-3}]$ , ce qui justifie notre choix de précision lors de l'appel du calcul intégral par la méthode de Simpson. Par ailleurs, augmenter la précision lors de l'intégration aurait pu permettre d'observer plus précisément les différences de pression entre les deux faces de l'aile. Cependant, le temps d'exécution du programme aurait également augmenté, ce qui aurait posé problème puisque pour rappel, l'algorithme d'intégration est de complexité exponentielle.

## 4 Conclusion

Afin de déterminer la pression exercée par l'air sur une aile d'avion, nous avons implémenté deux méthodes d'interpolation et plusieurs méthodes d'intégration. Pour les méthodes d'intégration, nous en avons implémenté plusieurs mais finalement, nous avons retenu seulement deux méthodes, tout en les rendant plus efficaces en précision et en rapidité d'exécution. Par ailleurs, la carte des pressions obtenue correspond à une approche du phénomène physique permettant de voler. Cependant, afin de vérifier notre résultat final, il faudrait effectuer des tests purement physiques, ce que nous ne pouvions pas faire lors de ce projet.