Algorithmie de l'image
Filtrage de diffusion

Christophe Tilmant - Vincent Barra (tilmant@isima.fr)

ISIMA - Université Blaise Pascal

ZZ3 F2-F4 / 2014-2015

Fondement physique de la diffusion

Analogie

filtrage $\leftrightarrow$ diffusion d'un fluide dans un milieu

L'équation de diffusion est similaire à celle des concentrations locales d'un fluide qui s'équilibrent sous la condition de conservation de la matière.

Première loi empirique de Fick

$$\mathbf{j} = -\mathbf{D}.\nabla u$$

Fondement physique de la diffusion

$$\mathbf{j} = -\mathbf{D}.\nabla u$$

- $\mathbf{D}$: tenseur de diffusion, symétrique défini positif,
- $u : R^3 \times [0; +\infty[\to R$: concentration de matière au point (x, y, z) à l'instant t, ,
- ∇u : gradient spatial de la concentration de matière,
- $\mathbf{j}$: flux de matière.

Fondement physique de la diffusion

Première loi empirique de Fick : $\mathbf{j} = -\mathbf{D}.\nabla u$
Equation de continuité : $\partial_t u = -div\mathbf{j}$: transport de matière sous la condition de conservation

Equation de diffusion (seconde loi empirique de Fick)

$$\partial_t u = div\left(\mathbf{D}.\nabla u\right)$$

Equation de diffusion

$$\partial_t u = div\left(\mathbf{D}.\nabla u\right)$$

D scalaire (diffusivité) $\rightarrow$ diffusion homogène

En traitement d'images :

- $u \approx$ niveau de gris
- conditions initiales $\rightarrow$ image de départ.

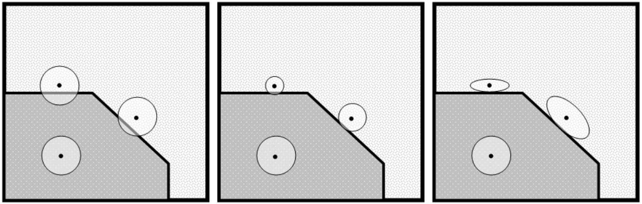
$\Rightarrow D$: degré de liberté de la méthode

Idée : choisir D comme une fonction des caractéristiques locales de l'image.

Equation de diffusion

Trois cas sont intéressants en traitement d'images :

- *filtre de diffusion isotropique linéaire* : D constante ;
- *filtre de diffusion isotropique non-linéaire* : D s'adapte aux caractéristiques locales de l'image ;
- *filtre de diffusion anisotropique non-linéaire* D tenseur de diffusion s'adaptant aux caractéristiques locales de l'image.



Filtre de diffusion linéaire

Equation de la chaleur

$$\partial_t u = \Delta u$$

$$u\left(\left(i,j\right),t\right) = \left(K_{\sqrt{2t}} * u_0\right)\left(i,j\right), \text{ pour t} > 0$$

avec $K_\sigma = \mathcal{N}(0,\sigma) \Rightarrow$ lissage Gaussien de l'image.

Reduction du bruit MAIS rend floue l'image, atténue les contours

Idée : adapter D à une "mesure" de contours
$\rightarrow$ filtrage de diffusion non-linéaire.

Filtre de diffusion non linéaire

Princeps : Perona-Malik (1994)
$\rightarrow$ Lisser l'image dans les zones homogènes, et de ne pas faire évoluer l'image le long des contours

$$\partial_t u = div\left(g\left(|\nabla u|\right) \nabla u\right)$$

g décroissante, $g(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$

$|\nabla u(x)| \approx 0 \rightarrow$ équation de la chaleur en x

Exemples

- $g\left(x\right) = \frac{1}{1+(\lambda x)^2}$
- $g\left(x\right) = e^{-(\lambda x)^2}$

Filtre de diffusion non linéaire

$$g\left(x\right) = \frac{1}{1 + \left(\lambda x\right)^2}$$

λ permet de régler une diffusion plus ou moins importante par rapport à la valeur de la norme du gradient.

$\Rightarrow$ diffusion faible pour des valeurs de normes du gradient élevées.

$\Rightarrow$ contours préservés

Filtre de diffusion non linéaire

Mise en oeuvre du modèle de Perona Malik $\rightarrow$ discrétisation en espace et temps

$$\forall(i,j,t+\Delta t) u\left((i,j), t+\Delta t\right) = u_{i,j}^{t+\Delta t} \quad \text{avec}$$

$$u_{i,j}^{t+\Delta t} = u_{i,j}^{t} + \Delta t \left(c_{E_{i,j}}^{t} \nabla_E u_{i,j}^{t} + c_{W_{i,j}}^{t} \nabla_W u_{i,j}^{t} + c_{N_{i,j}}^{t} \nabla_N u_{i,j}^{t} + c_{S_{i,j}}^{t} \nabla_S u_{i,j}^{t} \right)$$

- N,S,E et W : directions spatiales nord, sud, est et ouest
- ∇ : gradient spatial dans la direction indiquée par l'indice

et

$$\begin{array}{ll} c_{N_{i,j}}^{t} = g\left(\left|\nabla_N u_{i,j}^{t}\right|\right) & c_{S_{i,j}}^{t} = g\left(\left|\nabla_S u_{i,j}^{t}\right|\right) \\ c_{E_{i,j}}^{t} = g\left(\left|\nabla_E u_{i,j}^{t}\right|\right) & c_{W_{i,j}}^{t} = g\left(\left|\nabla_W u_{i,j}^{t}\right|\right) \end{array}$$