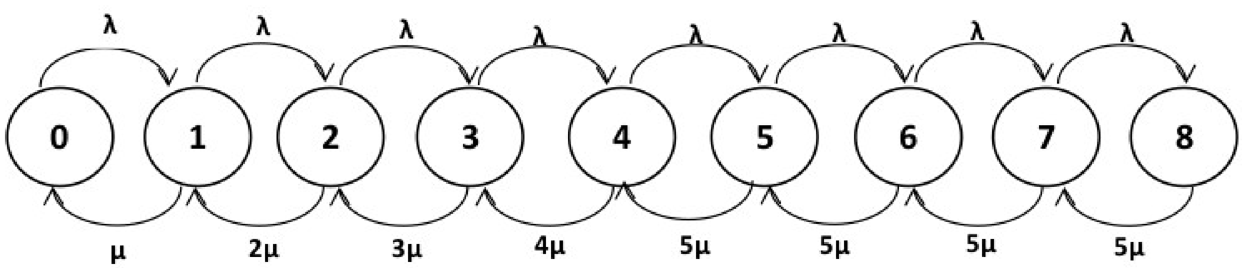
Συστήματα Αναμονής (Queuing Systems)
Τέταρτη εργαστηριακή άσκηση

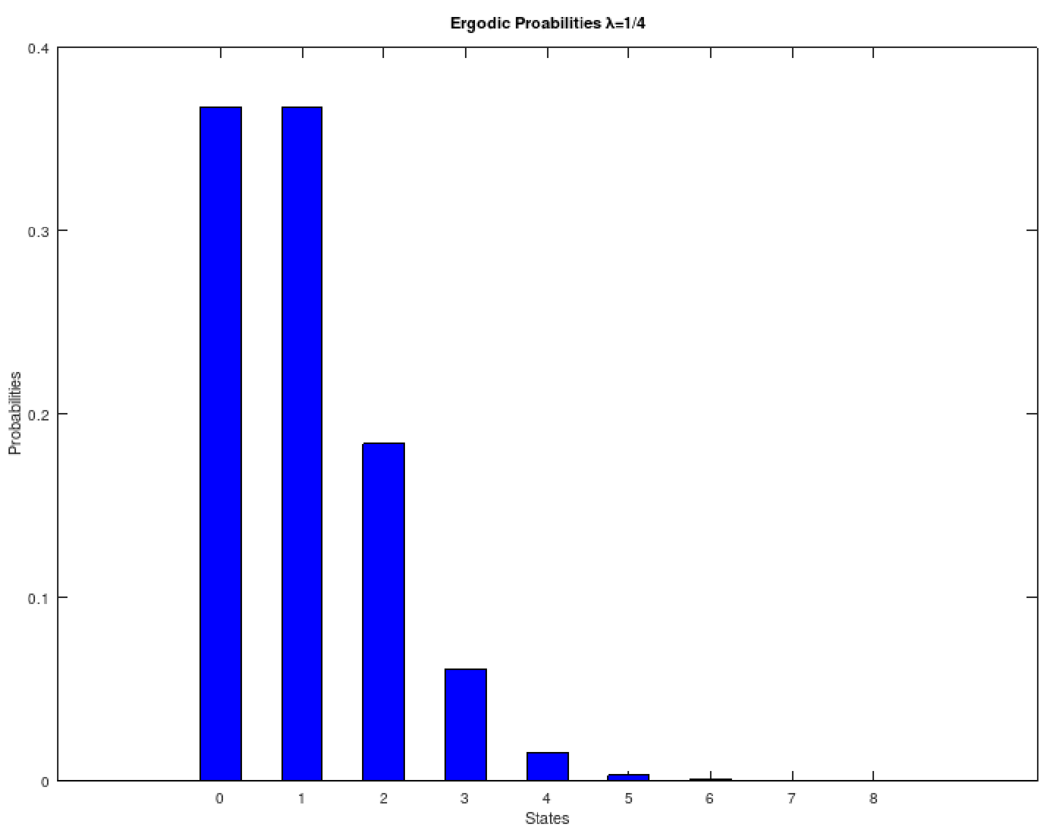
Όνομα: Αλεξόπουλος Ιωάννης
AM: 0317001

Προσομοίωση συστήματος M/M/N/K (call center)
(1)

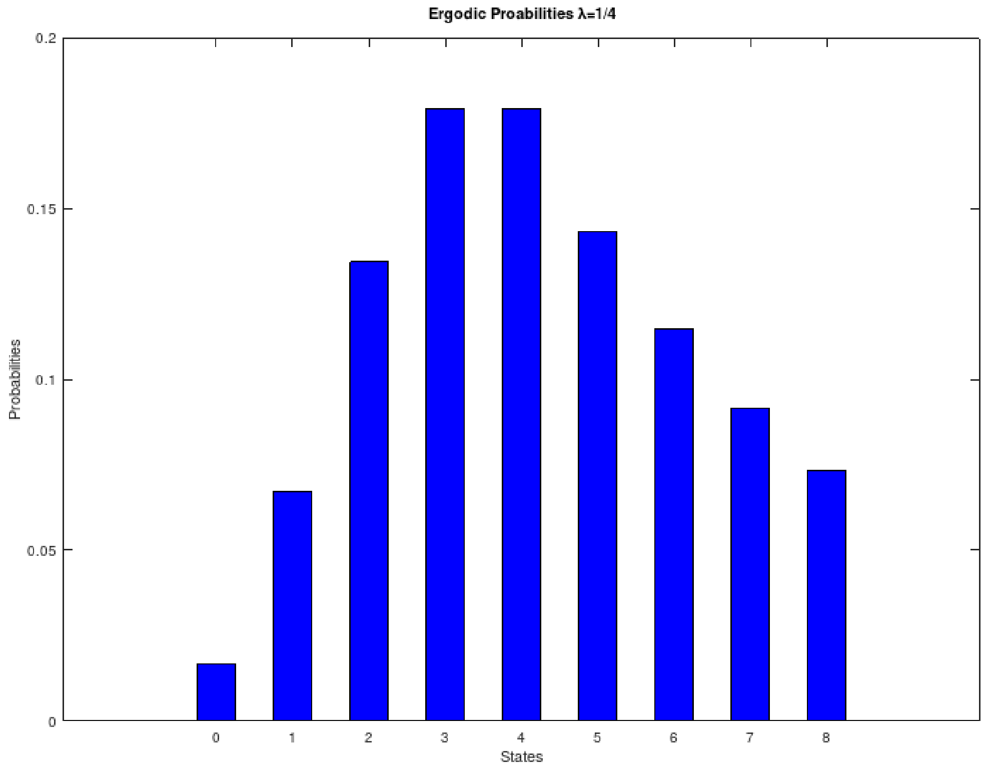
Το διάγραμμα ρυθμών μεταβάσεων του συστήματος μεταξύ εργοδικών καταστάσεων:



(2)
Κάνοντας χρήση των συναρτήσεων του πακέτου queueing του Octave υπολογίζουμε τις εργοδικές πιθανότητες του συστήματος:
(α) λ = ¼ πελάτες/min



(b) λ = 1 πελάτες/min



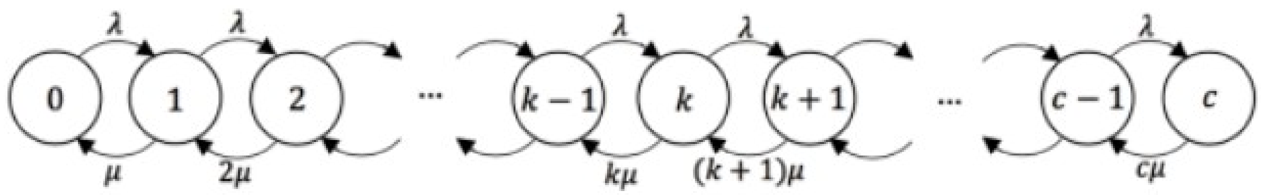
(3) Η πιθανότητα ένας πελάτης να περιμένει στην ουρά του συστήματος ταυτίζεται με την πιθαν να βρίσκετα σε μια εκ των καταστάσεων 5, 6 ,7 η οποία υπολογίζεται:

$$P_w = P_5 + P_6 + P_7$$

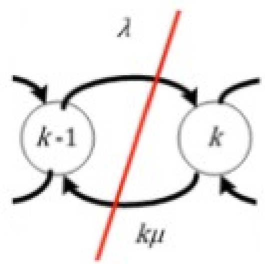
Τα αποτελέσματα για τους δύο ρυθμούς αφίξεων με χρήση του παραπάνω τύπου δίνουν για λ= ¼: P(waiting) = 0.0038008 και για λ = 1: P(waiting) = 0.34980 ενώ με χρήση του τύπου Erlang C λαμβάνουμε για λ = ¼ (ρ =1): P(erlang_c) = 0.0038314 και για λ = 1 (ρ = 4): P(erlang_c) = 0.55411 αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι οι αποκλίσεις μεταξύ των δύο τιμών είναι ελάχιστες για λ = ¼ ενώ για λ = 1, όπου έχουμε μεγάλο φόρτο εργασίας σε κάθε εξυπηρετητή, είναι σημαντικές.

Ανάλυση και Σχεδιασμός τηλεφωνικού κέντρου
(1)

Το διάγραμμα ρυθμού ρυθμού μεταβάσεων του συστήματος M/M/c/c:



Επαλήθευση του τύπου Erlang-B
Έχουμε για την καταστάση k:



$$k\mu P_k = \lambda P_{k-1} \Rightarrow P_k = \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} \Rightarrow P_k = \frac{\rho}{\kappa} P_{k-1}, k=1,2..,c$$

Ο αναδρομικός αυτός τύπος επιλύεται:

- $k=1: P_1 = \rho P_0$
- $k=2: P_2 = \frac{\rho}{2} P_1 = \frac{\rho^2}{2!} P_0$
- $k=3: P_3 = \frac{\rho}{3} P_2 = \frac{\rho^3}{3!} P_0$

Άρα παρατηρούμε ότι προκύπτει:

$$P_\kappa = \frac{\rho^k}{k!} P_{0,} k=1,2,\ldots,c$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της συνολικής πιθανότητας (συνθήκη κανονικοποίησης) εξάγουμε της πιθανότητα απόρριψης ενός πελάτη:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P \ldots + P_c = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{c} P_k = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c} \frac{\rho^k}{k!}} \Rightarrow P_{blocking} = Pc = \frac{\rho^c}{c!} P_0 \Rightarrow P_{blocking} \equiv B(\rho, c) = \frac{\frac{\rho^c}{c!}}{\sum_{k=0}^{c} \frac{\rho^k}{k!}}$$

Ο μέσος ρυθμός απωλείων στην ουρά M/M/c/c ισούται με **λ$P_{blocking}$.**

Η υλοποίηση της συνάρτησης erlangb_fact με χρήση της συνάρτησης factorial του πακέτου octave, το αποτέλεσμα της οποίας ελέγχθηκε με την συνάρτηση erlangb του πακέτου queueing.

```
function P_blocking = erlangb_fact(r, c)
  den=1; # k = 0
  for k=1:c
    den +=(r^k/factorial(k));
  endfor
  P_blocking=(r^c/factorial(c))/den;
endfunction
```

(2)

Η υλοποίηση της συνάρτησης erlangb_iter με χρήση του επαναληπτικού τύπου παρουσιάζεται παρακάτω:

```
function P_blocking = erlangb_iter(r,c)
  P_blocking = 1;
  for k=1:c
      P_blocking =((r*P_blocking)/((r*P_blocking)+ k));
  endfor
endfunction
```

(3)

Συγκρίνοντας τις εξόδους των συναρτήσεων erlangb_fact(1024,1024) και erlangb_iter(1024, 1024) παρατηρούμε τα εξής αποτελέσματα:

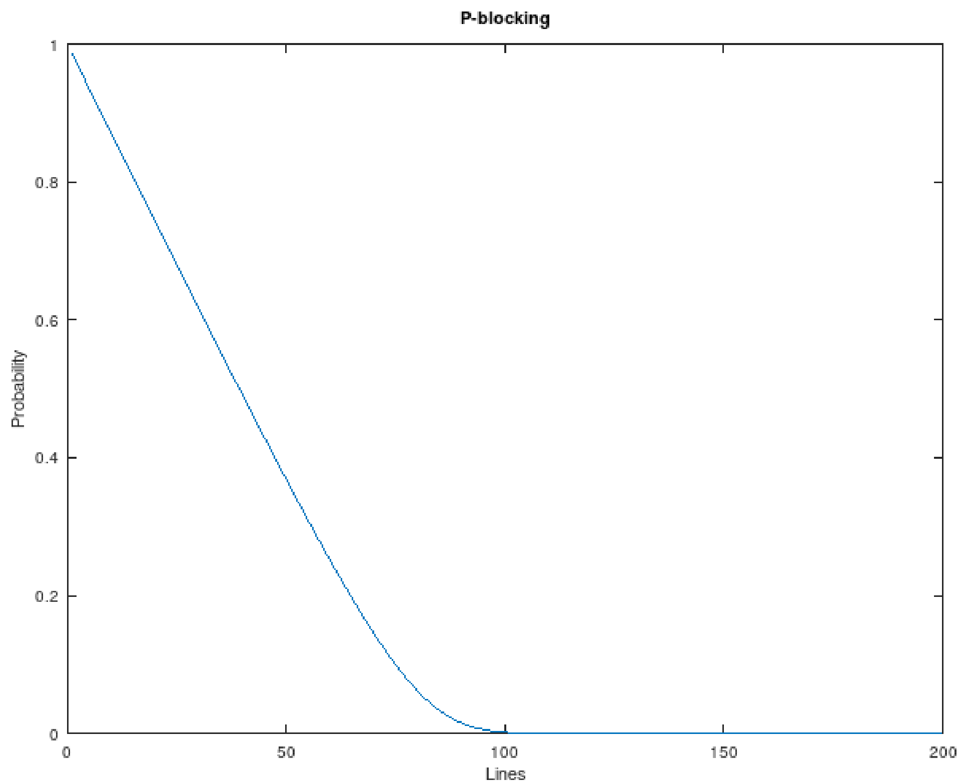
```
>> erlangb_fact(1024,1024)
ans =  NaN
>> erlangb_iter(1024,1024)
ans =  0.024524
```

Στην πρώτη περίπτωση, έχουμε NaN καθώς το Octave δεν μπορεί να διαχειριστεί αριθμούς της τάξης του 1024^{1024} και 1024!, ενώ στην δεύτερη περίπτωση, δεν απαιτούνται τόσο μεγάλοι υπολογισμοί λόγω του αναδρομικού χαρακτήρα της συνάρτησης και έχουμε κανονικά το σωστό, σύμφωνα με την συνάρτηση erlangb, αποτέλεσμα.

(4)
(a)
Εφόσον μοντελοποιούμε γύρω από τον πιο απαιτητικό χρήστη ο οποίος χρησιμοποιεί την γραμμή του κατά μέσο όρο 23 λεπτά/ ώρα, η συνολική ένταση του φορτίου που καλείται να εξυπηρετήσει το τηλεφωνικό δίκτυο της εταιρείας είναι:

$$\rho=200\frac{23\,\lambda\varepsilon\pi\tau\acute{\alpha}}{60\,\lambda\varepsilon\pi\tau\acute{\alpha}}\Rightarrow\rho=76.67\,Erlangs$$

(b)



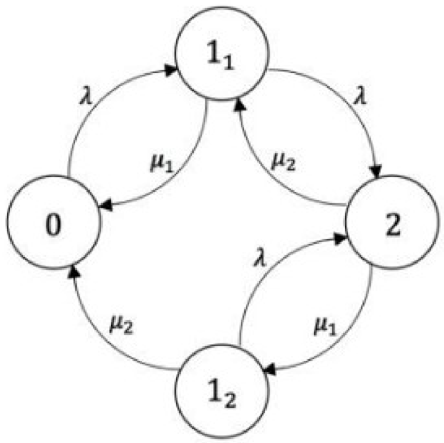
(c)

Ο απαιτούμενος αριθμός τηλεφωνικών γραμμών ώστε η πιθανότητα απόρριψης να είναι μικρότερη απο 1% υπολογίζεται μέσω του Octave:

```
lines needed for P-blocking < 0.01:
 93
```

Σύστημα εξυπηρέτησης με δύο ανόμοιους εξυπηρετητές (1)

Το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων του συστήματος στην κατάσταση ισορροπίας:



$$\lambda P_0 = \mu_1 P_{1_1} + \mu_2 P_{1_2} \Rightarrow P_0 = 0.8\, P_{1_1} + 0.4\, P_{1_2} \quad (1)$$

$$\mu_2 P_2 + \mu_1 P_2 = \lambda P_{1_1} + \lambda P_{1_2} \Rightarrow P_2 = \frac{5}{6}\left(P_{1_1} + P_{1_2}\right) \quad (2)$$

$$\mu_1 P_{1_1} + \lambda P_{1_1} = \lambda P_0 + \mu_2 P_2 \Rightarrow P_{1_1} = \frac{5}{9} P_0 + \frac{2}{9} P_2 \quad (3)$$

$$\mu_2 P_{1_2} + \lambda P_{1_2} = \mu_1 P_2 \Rightarrow P_{1_2} = \frac{4}{7} P_2 \quad (4)$$

$$(2),(3),(4) \Rightarrow P_2 = 1.3672\, P_0 \quad (5)$$

$$(3),(5) \Rightarrow P_{1_1} = 0.85938\, P_0 \quad (6)$$

$$(1),(4) \Rightarrow P_{1_2} = 0.78125\, P_0 \quad (7)$$

Κανονικοποιώντας έχουμε: $P_0 + P_{1_1} + P_{1_2} + P_2 = 1 \Rightarrow P_0 = 0.24951$

Από την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$P_{1_1} = 0.21443$$

$$P_{1_2} = 0.19493$$

$$P_2 = 0.34113 = P_{blocking}$$

Για τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα έχουμε εξ ορισμού:

$$E[n(t)] = \sum_{k=0}^{2} k P_k = 0\, P_0 + 1\left(P_{1_1} + P_{1_2}\right) + 2\, P_2 = 1.0916$$

(2)
Το κριτήριο σύγκλισης της προσομοίωσης είναι η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών μετρήσεων του μέσου αριθμού πελατών στο σύστημα να μην ξεπερνούν το 0.001%. Να σημειωθεί ότι η μέτρηση του μέσου αριθμού πελατών και συνεπώς η σύγκριση γίνεται ανα 1000 μεταβάσεις. Λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα που προσεγγίζουν με αρκετή ακρίβεια τον θεωρητικό μας υπολογισμό. Με αύξηση των απαιτήσεων μας, δηλαδή μείωσης της απαιτούμενης διαφοράς που προβλέπει το κριτήριο σύγκλισης, μπορούμε να προσεγγίσουμε περαιτέρω τις θεωρητικές τιμές.

```
0.24596
0.21298
0.19857
0.34249
```