ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ
(Queuing Systems)

Εκθετική Κατανομή &Κατανομή Poisson
Διαδικασία Markov Γεννήσεων – Θανάτων
(Birth – Death Markov Processes)

Εβδομάδα 16 Μαρτίου, 2020

ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

- ***A/S/N/K***
  - *A* : Τύπος διαδικασίας εισόδου πελατών
  - *S* : Τύπος τυχαίας μεταβλητής χρόνου εξυπηρέτησης
  - *N*: Αριθμός εξυπηρετητών
  - *K* : Χωρητικότητα συστήματος (μέγιστος αριθμός πελατών στην αναμονή + εξυπηρέτηση)
- *Παραδείγματα*
  - ***M/M/1**:* Αφίξεις Poisson (*Markov, Memoryless*), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί (*Markov*), 1 εξυπηρετητής, άπειρη χωρητικότητα συστήματος (*μηδενικές απώλειες ή αστάθεια*)
  - ***M/D/1:*** Αφίξεις Poisson (*Markov, Memoryless*), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης σταθεροί (*Deterministic*), 1 εξυπηρετητής, άπειρη χωρητικότητα συστήματος
  - ***M/G/1/4:*** Αφίξεις Poisson (*Markov, Memoryless*), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης γενικής κατανομής (*General*), 1 εξυπηρετητής, χωρητικότητα συστήματος 4 πελάτες
  - ***M/M/4/8**:* Αφίξεις Poisson (*Markov, Memoryless*), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί (*Markov*), 4 εξυπηρετητές, χωρητικότητα συστήματος 8 πελάτες: *Μοντέλο κέντρου κλήσεων (call center) με 4 χειριστές – τηλεφωνητές & μέχρι 4 κλήσεις στην αναμονή*

Η εκθετική κατανομή
(exponential distribution)

- Μια τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) - random variable - ***X*** ακολουθεί ***Εκθετική Κατανομή*** (*Exponential Distribution*) με παράμετρο ***λ*** όταν:
- **CDF**: $F_X(t) = \mathrm{P}[X \le t] = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, t \ge 0 \\ 0, \quad\quad t < 0 \end{cases}$ και **PDF**: $f_X(t) = \frac{dF_X(t)}{dt} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, t \ge 0 \\ 0, \quad t < 0 \end{cases}$
- $\mathrm{E}[X] = \int_{t=0}^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda$
- $\mathrm{E}[X^2] = \int_{t=0}^{\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt = 2/\lambda^2, \;\; \sigma_X^2 = \mathrm{E}[X] - (\mathrm{E}[X])^2 = 1/\lambda^2$
- Ιδιότητα έλλειψης μνήμης:
  - $\mathrm{P}[X > t + s \,| X > s] = \frac{\mathrm{P}[X>t+s, X>s]}{\mathrm{P}[X>s]} = \frac{\mathrm{P}[X>t+s]}{\mathrm{P}[X>s]} = e^{-\lambda t} = \mathrm{P}[X > t] = 1 - F_X(t)$

  Η εκθετική κατανομή είναι η **μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής** με την ιδιότητα αυτή (*Memoryless, Markov Property*).
- Κατανομή ελαχίστου μεταξύ ανεξάρτητων τ.μ. εκθετικά κατανεμημένων

  X1: με παράμετρο λ1

  X2: με παράμετρο λ2

  X = min{X1,X2} είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο: λ = λ1+λ2

Στοχαστικές διαδικασίες
(Stochastic Processes – Time Series)

- Στάσιμες διαδικασίες (stationary stochastic processes) - οι από κοινού συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας είναι αμετάβλητες σε μετατοπίσεις στο χρόνο
- Διαδικασίες Markov, ιδιότητα έλλειψης μνήμης

  $P[\boldsymbol{X}(t_{n+1})=x_{n+1}/\boldsymbol{X}(t_n)=x_n,\boldsymbol{X}(t_{n-1})=x_{n-1},\ldots,\boldsymbol{X}(t_1)=x_1] = P[\boldsymbol{X}(t_{n+1})=x_{n+1}/\boldsymbol{X}(t_n)=x_n]$
- Εργοδικότητα (ergodicity) ως προς τον μέσο όρο – μέση τιμή στο χρόνο συνάρτησης δείγματος είναι ίση με στατιστική μέση τιμή
- Διαδικασίες Γεννήσεων-Θανάτων (birth – death processes): αποτελούν μια κλάση των διαδικασιών Markov, με την επιπλέον συνθήκη ότι μεταβάσεις επιτρέπονται μόνο ανάμεσα σε γειτονικές καταστάσεις
- Διαδικασία απαρίθμησης γεγονότων (counter processes)

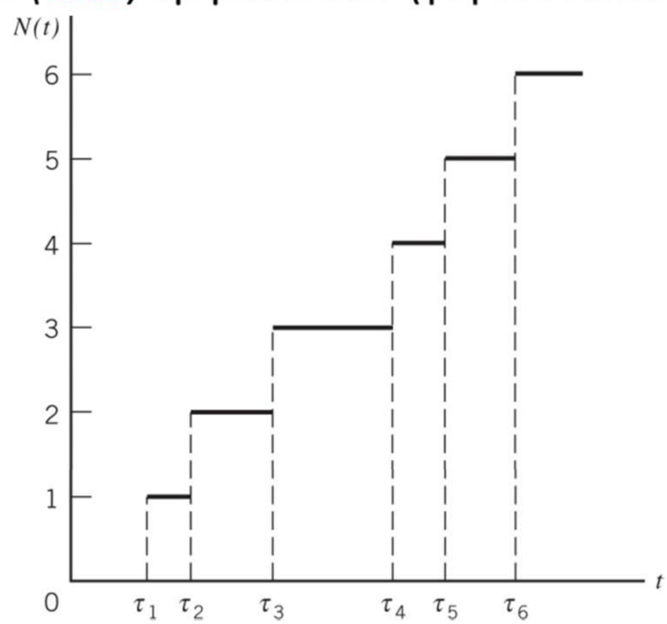
  $P[\boldsymbol{N}(t) = k]$: Πιθανότητα k γεγονότων στο διάστημα $(0, t)$
- Ανεξάρτητες αυξήσεις: αν οι αριθμοί των γεγονότων που λαμβάνουν χώρα σε μη επικαλυπτόμενα διαστήματα είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους
- Στάσιμες αυξήσεις (stationary increments): Ανεξάρτητα του χρόνου αναφοράς t *(εξάρτηση μόνο από το μήκος του διαστήματος)*

  $P[\boldsymbol{N}(t + \Delta t) - \boldsymbol{N}(t) = k] = P[\boldsymbol{N}(\tau + \Delta t) - \boldsymbol{N}(\tau) = k] = P[\boldsymbol{N}(\Delta t) = k]$

Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΗΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ POISSON

Η τυχαία εμφάνιση παλμών περιγράφεται σαν μια Στοχαστική Ανέλιξη Καταμέτρησης *(Counting Process)* $N(t)$ που καταμετρά τυχαία γεγονότα (αφίξεις πελατών) στο διάστημα $(0, t)$.

Ο αριθμός εμφανίσεων στο διάστημα $(t, t+T)$ είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή $\nu = N(t+T) - N(t)$. Κάτω από συνθήκες απρόβλεπτης εξέλιξης της ανέλιξης *(τα γεγονότα εμφανίζονται ανεξάρτητα από το παρελθόν και χωρίς να επηρεάζουν το μέλλον)*, η ν ακολουθεί την **κατανομή *Poisson* με μέσο αριθμό εμφανίσεων ανάλογο του διαστήματος** T: $\mathrm{E}_T[\nu] = \lambda T$. Η σταθερά λ ορίζει τον μέσο ρυθμό *(rate)* εμφανίσεων (γεγονότα ανά μονάδα χρόνου)



Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (1/3)

Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή $\nu = N(t+T) - N(t)$ απαρίθμησης γεγονότων σε χρονικό διάστημα παρατήρησης T που εμφανίζονται **τυχαία** και **ανεξάρτητα** από παρελθούσες ή μελλοντικές εμφανίσεις γεγονότων στο δείγμα (υλοποίηση) της Στοχαστικής Ανέλιξης μετρητή $N(t)$ στο οποίο συνεισφέρουν (**ιδιότητα έλλειψης μνήμης *Markov***)

Ο μέσος όρος εμφανίσεων γεγονότων στο διάστημα T είναι $\mathrm{E}_T[\nu] = \lambda T$

Εφαρμογές σε ανεξάρτητες εμφανίσεις τυχαίων γεγονότων:

- Τυχαίες εκρήξεις που προκαλούν τον **ΘΟΡΥΒΟ ΒΟΛΗΣ** σε ηλεκτρονικές συσκευές επικοινωνών
- Ανεξάρτητες τυχαίες **αφίξεις πελατών** σε **ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ** με απαιτήσεις εξυπηρέτησης όπως:
  - Διεκπεραίωση Τηλεφωνικών Κλήσεων
  - Διακίνηση Πακέτων Δεδομένων στο Internet
  - Κυκλοφορία Αυτοκίνητων σε Οδικά Συστήματα
  - Αγορές και Πληρωμές σε Καταστήματα
  - Επεξεργασία Δεδομένων σε Κοινές Υπολογιστικές Υποδομές

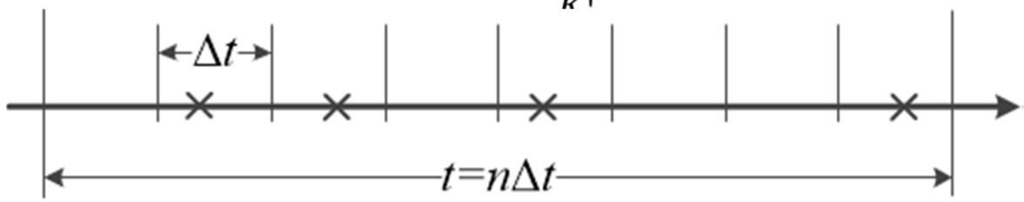
Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (2/3)

Η Κατανομή Poisson σαν Όριο Διωνυμικής Κατανομής

Ανεξάρτητες εμφανίσεις $\{N(t) = k\}$ γεγονότων (*σημείων*) ***Poisson*** στο διάστημα $(0, t)$ με ρυθμό λ σημεία/sec ορίζουν Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή *(Discrete Random Variable)* $\{\nu = k\}$ με Κατανομή Μάζας Πιθανότητας

$$\mathrm{P}_t[\nu = k] \triangleq \mathrm{P}[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

Απόδειξη



- Διαιρώ το διάστημα t σε n υποδιαστήματα, $t = n\Delta t$
- Πραγματοποιώ n ανεξάρτητες δοκιμές Bernouilli, μια σε κάθε υποδιάστημα, με δύο εναλλακτικές: Εμφάνιση (***επιτυχία***) με πιθανότητα $p = \lambda\Delta\mathrm{t}$, μη εμφάνιση (***αποτυχία***) με $1 - p$
- Η πιθανότητα k επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές δίνεται από την Διωνυμική Κατανομή:

$$\mathrm{P}[N(t) = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0,1,\cdots,n$$

$$\mathrm{P}[N(t) = k] = \binom{n}{k} (\lambda\Delta t)^k (1 - \lambda\Delta t)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

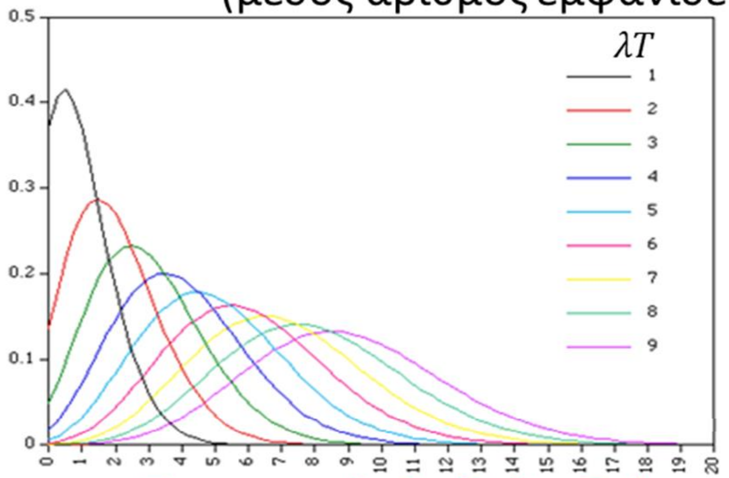
- Στο όριο $\Delta t \to 0,\ n \to \infty, t = n\Delta t$ έχουμε $\frac{n!}{(n-k)!} \to n^k$, $\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \to e^{-\lambda t}$ και

$$\mathrm{P}[N(t) = k] = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \quad \to \quad \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (3/3)

Κατανομή Poisson για Διαφορετικές Τιμές του $\lambda T = \mathrm{E}[N(T)]$

(μέσος αριθμός εμφανίσεων γεγονότων σε διάστημα T)



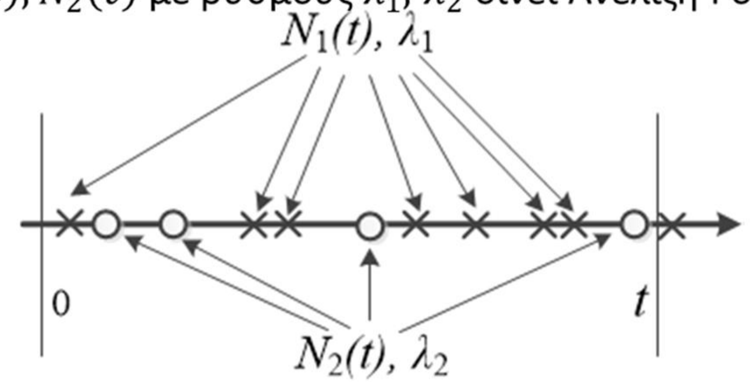
Οι συνεχείς καμπύλες στο σχήμα είναι οι περιβάλλουσες των Συναρτήσεων Μάζας Πιθανότητας (Ιστογράμματος) της Διακριτής Τυχαίας Μεταβλητής Poisson $\mathrm{P}_T[\nu = k] \triangleq \mathrm{P}[N(T) = k] = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$

Ιδιότητες της Στοχαστικής Ανέλιξης Poisson

- **Μέση Τιμή & Διασπορά**: $\mathrm{E}[N(t)] = \sigma^2_{N(t)} = \lambda t$

  Απόδειξη: $\mathrm{E}[N(t)] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[N_i(t)] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda \Delta t = \lambda t$, $\sigma^2_{N(t)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{N_i(t)} = \lambda t$
- Ο συνολικός αριθμός σημείων Στοχαστική Ανέλιξης Poisson ρυθμού λ σε **μη υπερ-καλυπτόμενα** χρονικά διαστήματα T_1, T_2 είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή Poisson με μέση τιμή $\lambda(T_1 + T_2)$
- **Υπέρθεση** δυο **ανεξαρτήτων** Ανελίξεων Poisson $N_1(t), N_2(t)$ με ρυθμούς λ_1, λ_2 δίνει Ανέλιξη Poisson $N(t)$ με ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
- **Διάσπαση** Ανέλιξης Poisson ρυθμού λ μέσω ανεξαρτήτων τυχαίων επαναλήψεων **Bernoulli** με πιθανότητες $p, q = 1 - p$

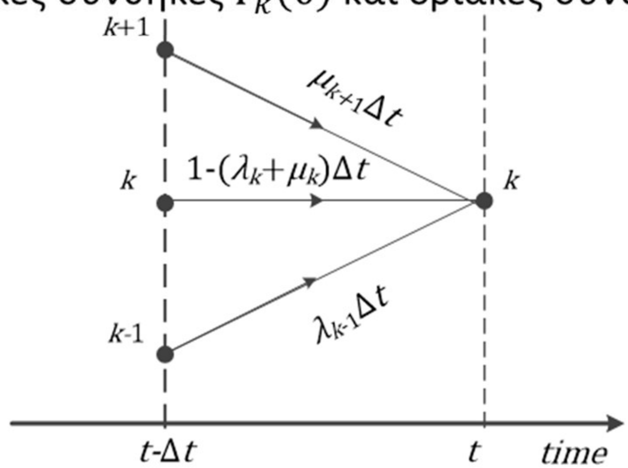
  Παράδειγμα: Τυχαία δρομολόγηση χωρίς μνήμη δημιουργεί ανεξάρτητες ανελίξεις (διαδικασίες) Poisson με μέσους ρυθμούς $\lambda_1 = p\lambda, \lambda_2 = q$

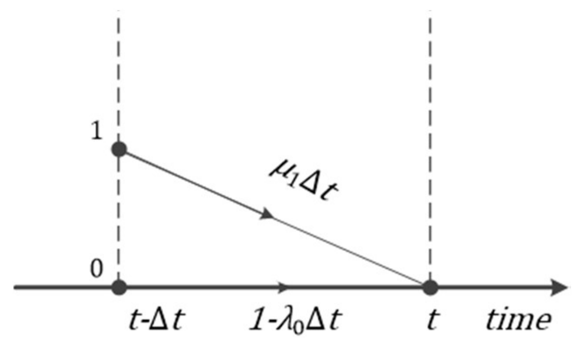


ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (1/3)

Birth – Death Processes

- Παραδοχές:
  - Ανεξαρτησία γεννήσεων-θανάτων
  - Εξέλιξη της κατάστασης - πληθυσμού $n(t)$ βασισμένη μόνο στο παρόν (Ιδιότητα Markov)
- Σύστημα Διαφορικών εξισώσεων Διαφορών
  - Κατάσταση ισορροπίας (**steady state**)
  - Την χρονική στιγμή t το σύστημα καταλήγει σε πληθυσμό $n(t) = k$
  - Μπορεί να έχουν προηγηθεί οι ακόλουθες μεταβάσεις από την χρονική στιγμή $t - \Delta t, \Delta t \to 0$:
    - Μία άφιξη στο διάστημα Δt, με πιθανότητα $\lambda_{k-1}\Delta t$ αν $k > 0$
    - Μια αναχώρηση, με πιθανότητα $\mu_{k+1}\Delta t$ αν υπάρχει η κατάσταση $k+1$ (σε περίπτωση περιορισμού μέγιστου πληθυσμού K μπορούμε να θεωρήσουμε $\mu_{k+1} = 0$)
    - Τίποτα από τα δύο, με πιθανότητα $1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t$ αν $k > 0$ ή $1 - \lambda_0 \Delta t$ αν $k = 0$
- Οι εξισώσεις μετάβασης (***Chapman - Kolmogorov***) προκύπτουν από τον τύπο συνολικής πιθανότητας:
  - $\mathrm{P}_k(t) = \lambda_{k-1}\Delta t \mathrm{P}_{k-1}(t - \Delta t) + \mu_{k+1}\Delta t \mathrm{P}_{k+1}(t - \Delta t) + [1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta \mathrm{t}]\mathrm{P}_k(\mathrm{t} - \Delta \mathrm{t})$
  - $\mathrm{P}_{\mathbf{0}}(t) = \mu_1 \Delta t \, \mathrm{P}_1(t - \Delta t) + (1 - \lambda_0 \Delta t) \, \mathrm{P}_{\mathbf{0}}(t - \Delta t)$
  - με αρχικές συνθήκες $\mathrm{P}_k(0)$ και οριακές συνθήκες $\sum_k \mathrm{P}_k(t) = 1, \forall t$





ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (2/3)

Birth – Death Processes

Στο όριο, $\Delta t \approx dt \to 0$, $\frac{\mathrm{P}_k(t)-P_k(t-\Delta t)}{\Delta t} \to \frac{d\mathrm{P}_k(t)}{dt}$ και προκύπτει το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων διαφορών:

- $\frac{d\mathrm{P}_k(t)}{dt} = \lambda_{k-1}\mathrm{P}_{k-1}(t) + \mu_{k+1}\mathrm{P}_{k+1}(t) - (\lambda_k + \mu_k)\mathrm{P}_k(t), \;\; k > 0$

- $\frac{d\mathrm{P}_0(t)}{dt} = \mu_1\mathrm{P}_1(t) - \lambda_0\mathrm{P}_0(t)$

- με αρχικές συνθήκες $\mathrm{P}_k(0)$ και οριακές συνθήκες $\sum_k \mathrm{P}_k(t) = 1, \forall t$

Όταν $t \to \infty$ και υπό ορισμένες συνθήκες το σύστημα συγκλίνει σε σταθερή κατάσταση. Το μεταβατικό φαινόμενο παρέρχεται για ***επαναληπτικές*** καταστάσεις $n(t) = k$ (απείρως επισκέψιμες - ***positive recurrent***) ξεχνιέται η αρχική συνθήκη $\mathrm{P}_k(0)$ και οι $\mathrm{P}_k(t)$ συγκλίνουν στις οριακές πιθανότητες $P_k > 0$:

Για $t \to \infty$, $\frac{d\mathrm{P}_k(t)}{dt} = 0$, $\mathrm{P}_k(t) \to P_k > 0$: ***Εργοδικές Οριακές Πιθανότητες***

Σημείωση: Ισχύει η ***εργοδική*** ιδιότητα και οι οριακές πιθανότητες μπορούν να προσεγγισθούν σαν $P_k = \lim_{\mathrm{T}\to\infty}\{\frac{\mathrm{T}_k}{\mathrm{T}}\}$ όπου T_k είναι το σχετικό συνολικό χρονικό διάστημα όταν $n(t) = k$ σε μεγάλο χρονικό ορίζοντα T ***μιας*** καταγραφής της ανέλιξης $n(t)$ σε ***ισορροπία***.

Οι εργοδικές οριακές πιθανότητες προκύπτουν από τις γραμμικά ανεξάρτητες ***Εξισώσεις Ισορροπίας***:

- $(\lambda_k + \mu_k)P_k = \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}, \;\; k > 1$
- $\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$
- $P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots = 1$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (3/3)

Birth – Death Processes

Εφαρμογή σε Απλή Ουρά M/M/1

- Αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec: $\lambda_k = \lambda, \;\; k = 0,1,2,3,\cdots$
- Χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί με μέση τιμή $\mathrm{E}(s) = \frac{1}{\mu}$ sec: $\mu_k = \mu, \; k = 1,2,3,\cdots$
- $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ Erlang (συνθήκη για οριακή ισορροπία – εργοδικότητα)
- Η εξέλιξη των πιθανοτήτων $\mathrm{P}[n(t) = k] = \mathrm{P}_k(t)$ προκύπτει από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:
  - $\frac{d\mathrm{P}_k(t)}{dt} = \lambda \mathrm{P}_{k-1}(t) + \mu \mathrm{P}_{k+1}(t) - (\lambda + \mu)\mathrm{P}_k(t), \; k > 0$
  - $\frac{d\mathrm{P}_0(t)}{dt} = \mu \mathrm{P}_1(t) - \lambda \mathrm{P}_0(t)$
  - με αρχικές συνθήκες $\mathrm{P}_k(0)$ και οριακές συνθήκες $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}_k(t) = 1 \;\; \forall t \geq 0$
- Στο όριο $t \to \infty$, $\frac{d\mathrm{P}_k(t)}{dt} = 0$, $\mathrm{P}_k(t) \to P_k > 0$, τις **εργοδικές πιθανότητες** που προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας:
  - $\lambda P_0 = \mu P_1$ ή $P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 = \rho P_0$
  - $(\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2$ ή $P_2 = \rho^2 P_0$ και γενικά $P_k = \rho^k P_0, \;\; k > 0$
  - $P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots = 1 = P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots)$

Εφόσον $0 < \rho < 1$ η άπειρη δυναμοσειρά $(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots) \to \frac{1}{1-\rho} \;\; \Rightarrow \;\; P_0(\frac{1}{1-\rho}) = 1$ και

$$P_0 = (1 - \rho), \;\; P_k = (1 - \rho)\rho^k, \qquad k > 0$$

Μέσο μήκος ουράς M/M/1 σε ισορροπία: $E[n(t)] \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = \frac{\rho}{1-\rho}$