ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ
(Queuing Systems)

Διαδικασίες Birth-Death & Ουρές Markov:

- **Προσομοιώσεις**
- **Συστήματα Αναμονής M/M/c (Erlang-C), M/M/2, M/M/N/K, M/M/c/c (Erlang-B)**
- **Πραδείγματα και Εφαρμογή: Ανάλυση & Σχεδιασμός**
  - **a) Τηλεφωνικών Κέντρων**
  - **b) Βελτιστοποίηση Μέσου Μήκους Πακέτου**

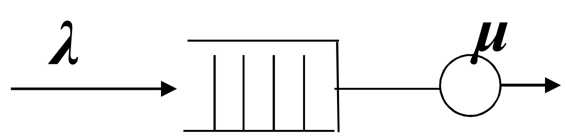
Εβδομάδα 6ης Απριλίου & 27ης Απριλίου, 2020

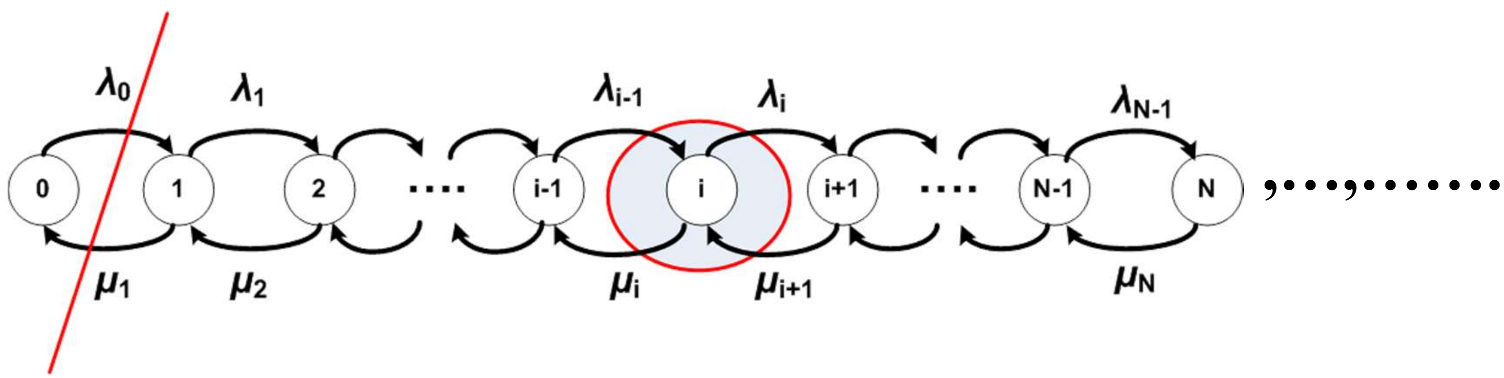
Ουρές M/M/1 (Επανάληψη)

Local Balance Equation - Global Balance Equation

$\boldsymbol{\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_i = \ldots\ldots}$, $i = 0, 1, 2, \ldots,$

$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_i = \ldots\ldots,$ $\quad i = 1, 2, \ldots,$





Local Balance Equation

$\lambda P_0 = \mu P_1$

$\lambda P_1 = \mu P_2$

....

$\lambda P_{i-1} = \mu P_i$, $i = 1, 2, \ldots$

Global Balance Equation

$(\lambda+\mu)P_i = \lambda_i P_{i-1} + \mu P_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots,$

Κανονικοποίηση Εργοδικών Πιθανοτήτων

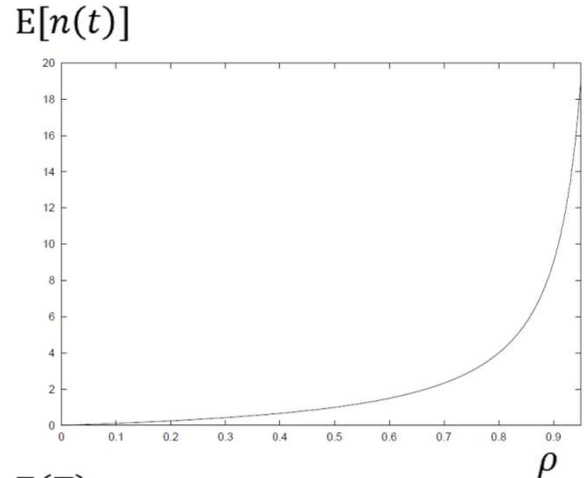
$P_0 + P_1 + \ldots + P_i + \ldots = 1$

ΟΥΡΑ MARKOV M/M/1 (Επανάληψη)

- Αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec: $\lambda_k = \lambda = \gamma, \;\; k = 0,1,2,3,\cdots$
- Χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί με μέση τιμή $\mathrm{E}(s) = \frac{1}{\mu}$ sec: $\mu_k = \mu, \;\; k = 1,2,3,\cdots$
- $\rho = u = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ Erlang (συνθήκη για οριακή ισορροπία – εργοδικότητα)
- Οι **εργοδικές πιθανότητες** προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας:
  - ➢ $\lambda P_0 = \mu P_1$ ή $P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 = \rho P_0$
  - ➢ $(\lambda + \mu) P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2$ ή $P_2 = \rho^2 P_0$ και $P_k = \rho^k P_0, \;\; k > 0$
  - ➢ $P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots = 1 = P_0 (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots)$

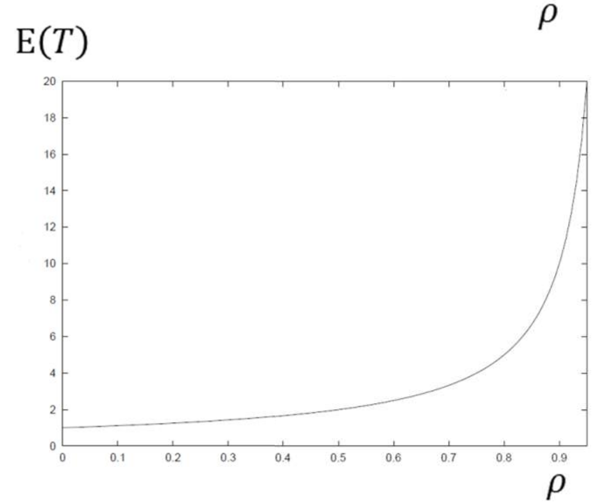
  Με $0 < \rho < 1$ η άπειρη δυναμοσειρά συγκλίνει, $P_0 \left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1 \Rightarrow$

  $P_0 = (1 - \rho), \;\; P_k = (1-\rho)\rho^k, k > 0$ και $\mathrm{P}\{n(t) > 0\} = 1 - P_0 = \rho$



- **Μέση κατάσταση συστήματος** M/M/1 σε ισορροπία:

$$\mathrm{E}[n(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = \frac{\rho}{1-\rho}$$



- **Μέσος χρόνος καθυστέρησης**: Τύπος Little

$$\mathrm{E}(T) = \frac{\mathrm{E}[n(t)]}{\gamma} = \frac{\mathrm{E}[n(t)]}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1-\rho}$$

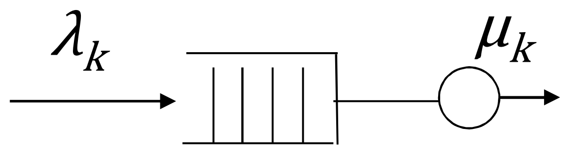
- **Μέσο μήκος ουράς & μέσος χρόνος αναμονής M/M/1**:

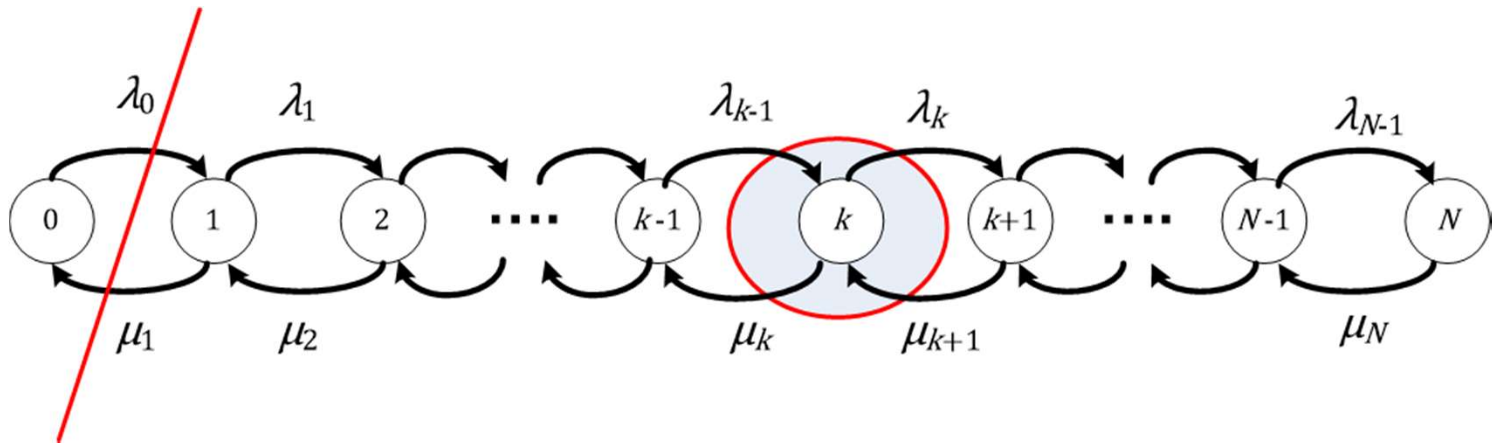
$$\mathrm{E}\left[n_q(t)\right] = \mathrm{E}[n(t)] - \rho, \qquad \mathrm{E}(W) = \mathrm{E}(T) - 1/\mu$$

ΟΥΡΑ M/M/1/*N* (Επανάληψη)

- Συστήματα M/M/1/*N* με ρυθμούς άφιξης και ρυθμούς εξυπηρέτησης εξαρτώμενους από τον αριθμό των πελατών στο σύστημα (από την παρούσα κατάσταση του συστήματος)

  (State Dependent* M/M/1/*N* *Queues)





Detailed Balance Equations

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

$$\lambda_{k-1} P_{k-1} = \mu_k P_k \qquad k = 1, 2, \dots N$$

Global Balance Equations

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

$$(\lambda_k + \mu_k) P_k = \lambda_{k-1} P_{k-1} + \mu_{k+1} P_{k+1} \qquad k = 1, \dots, N$$

Κανονικοποίηση Εργοδικών Πιθανοτήτων

$$P_0 + \cdots + P_N = 1$$

ΟΥΡΑ M/M/1/*N* (Επανάληψη)

- Σταθεροί μέσοι ρυθμοί αφίξεων (γεννήσεων)

  $\lambda_k = \lambda$, Poisson, $k = 1,2,\dots,N$
- Σταθεροί μέσοι ρυθμοί εξυπηρέτησης (θανάτων)

  $\mu_k = \mu, \; k = 1,2,\dots,N$

  Εκθετικοί ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης $s, E(s) = 1/\mu$
- Εργοδικές πιθανότητες καταστάσεων

  $P_k = \rho^k P_0, \quad k = 0,1,2,\dots,N$

  $P_0 + P_1 + \cdots + P_{N-1} + P_N = 1$

  $\rho = \lambda/\mu$ Erlangs (η M/M/1/*N* είναι **πάντα ευσταθής** γιατί υπερβολικό φορτίο δεν προωθείται)
- Αντικαθιστώντας με τον τύπο πεπερασμένου αθροίσματος γεωμετρικής προόδου:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, \qquad \rho \neq 1$$

$$P_0 = \frac{1}{N+1}, \qquad \rho = 1$$

- Χρησιμοποίηση Εξυπηρετητή (Server Utilization) $U = 1 - P_0$
- Ρυθμαπόδοση (throughput) $\gamma = \lambda(1 - P_N) = \mu(1 - P_0) = \mu U$
- Πιθανότητα απώλειας $P_{blocking} = P_N$

- Στάσιμος Εργοδικός μέσος όρος πληθυσμού – κατάστασης

$$\mathrm{E}[n(t)] \rightarrow \mathrm{E}(k) = \sum_{k=1}^{N} k P_k = \rho \frac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

- Νόμος του Little: $\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(k)/\gamma = \mathrm{E}(k)/[\lambda(1 - P_N)]$

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ BIRTH-DEATH ΟΜΟΙΟΓΕΝΩΝ ΑΦΙΞΕΩΝ (1/2)

- Σε στοχαστικό σύστημα ***Birth-Death*** με αφίξεις (γεννήσεις) σταθερού μέσου ρυθμού λ ανεξάρτητου του πληθυσμού $n(t) = k$ (***ομοιογενείς αφίξεις Poisson*** με ρυθμό $\lambda_k = \lambda$ αφίξεις/sec) οι εργοδικές πιθανότητες (αν υπάρχουν) μπορούν να υπολογισθούν σαν λόγος αφίξεων που βρίσκουν το σύστημα στη κατάσταση $n(t) = k$ στη χρονική διάρκεια T_k, προς τον συνολικό αριθμό αφίξεων σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T μιας χρονικής εξέλιξης της διαδικασίας:

$$P_n = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{\mathrm{T}_k}{\mathrm{T}} = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{\lambda \mathrm{T}_k}{\lambda \mathrm{T}} \approx \frac{\#\{\text{ΑΦΙΞΕΩΝ στη } n(t) = k \text{ σε ΧΡΟΝΙΚΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ } \mathrm{T}_k\}}{\#\{\text{ΣΥΝΟΛΟΥ ΑΦΙΞΕΩΝ σε ΧΡΟΝΙΚΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ T}\}}$$

Άρα μπορούμε να προσομοιώσουμε σύστημα Birth-Death με ομοιογενείς αφίξεις καταμετρώντας τις αφίξεις στις διάφορες καταστάσεις που μεταβαίνει

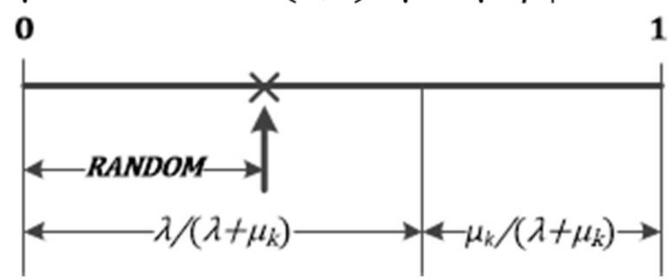
- Η εξέλιξη της κατάστασης (πληθυσμού) του συστήματος προκύπτει από τις πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση $n(t) = k$ στις $(k+1)$, $(k-1)$ με το δεδομένο ότι μια από τις δύο μεταβάσεις θα συμβεί με απόλυτη βεβαιότητα:

$$\mathrm{P}[k \to (k+1)/\text{μετάβαση}] = \lambda/(\lambda + \mu_k), \;\; \mathrm{P}[k \to (k-1)/\text{μετάβαση}] = \mu_k/(\lambda + \mu_k)$$

- Η προσομοίωση ενεργοποιεί τις μεταβάσεις με κλήση τυχαίου αριθμού $RANDOM(0{,}1)$ ομοιόμορφα κατανεμημένου μεταξύ $(0, 1)$:

$$0 \le RANDOM(0{,}1) \le \frac{\lambda}{\lambda + \mu_k} \Rightarrow \text{ΑΦΙΞΗ}, n(t) \to k+1$$

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu_k} < RANDOM(0{,}1) \le 1 \Rightarrow \text{ΑΝΑΧΩΡΗΣΗ}, n(t) \to k-1$$



- Αν το σύστημα έχει μηδενικό πληθυσμό $n(t) = 0$, η επόμενη μετάβαση είναι πάντα ΑΦΙΞΗ και $n(t) \to 1$

- Αν το σύστημα δεν επιδέχεται αύξηση πληθυσμού, η $n(t) = K$ είναι blocking state και δεν ενεργοποιείται μετάβαση κατάστασης, αλλά η διαδικασία τυχαίας δημιουργίας επόμενου γεγονότος (ΑΦΙΞΗ ή ΑΝΑΧΩΡΗΣΗ) καθώς και η μέτρηση αφίξεων συνεχίζονται κανονικά

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ BIRTH-DEATH ΟΜΟΙΟΓΕΝΩΝ ΑΦΙΞΕΩΝ (2/2)

Στατιστική Σύγκλιση Προσομοίωσης

- Η σύγκλιση της προσομοίωσης ελέγχεται ως προς την ***στατιστική σύγκλιση*** μεγεθών ενδιαφέροντος, π.χ. εκτίμηση μέσου πληθυσμού $\mathrm{E}[n(t)] = \sum_{k=0}^{K} k * P_k$ που υπολογίζεται σε τακτά διαστήματα από την αρχή της προσομοίωσης π.χ. κάθε 1000 αφίξεις: (από 0 έως 1000 αφίξεις), (από 0 έως 2000 αφίξεις), (από 0 έως 3000 αφίξεις) κλπ.

- Λόγω ***εργοδικότητας*** δεν απαιτούνται επαναλήψεις: Η εκτέλεση του προγράμματος και οι μετρήσεις συνεχίζονται σε μία υλοποίηση που διακόπτεται προσωρινά π.χ. κάθε 1000 αφίξεις μέχρι την ικανοποίηση κριτηρίων σύγκλισης

- Η στατιστική σύγκλιση επιταχύνεται αν αγνοήσουμε στη καταμέτρηση αφίξεων στις διάφορες καταστάσεις τις πρώτες μεταβάσεις (π.χ. 1-1000 αφίξεις) που αντιστοιχούν στο ***μεταβατικό φαινόμενο*** προς την εργοδική κατάσταση

- **Γενική Παρατήρηση**: Η σύγκλιση μιας προσομοίωσης είναι σύνηθες να διερευνάται με μαθηματικά εργαλεία στατιστικής γιατί μπορεί να κρύβονται εξαρτήσεις (correlations) μεγεθών, περιοδικές συμπεριφορές που οδηγούν σε πρόωρους τερματισμούς κλπ. Μια πλήρης προσομοίωση περιλαμβάνει διαστήματα εμπιστοσύνης για τις εκτιμήσεις πιθανοτήτων και ροπών τυχαίων μεταβλητών (π.χ. μέσοι όροι, διασπορά)

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΟΥΡΑΣ Μ/Μ/1/10

RANDOM: Ομοιόμορφος τυχαίος αριθμός (0,1)
THRESHOLD: $\lambda/(\lambda+\mu)$

ARRIVALS: Συνολικός αριθμός αφίξεων

ARRIVAL[STATE]: Αριθμός αφίξεων στην κατάσταση STATE = 0, 1, … ,10

COUNT: Αριθμός μεταβάσεων COUNT = 0, 1, … , MAXIMUM

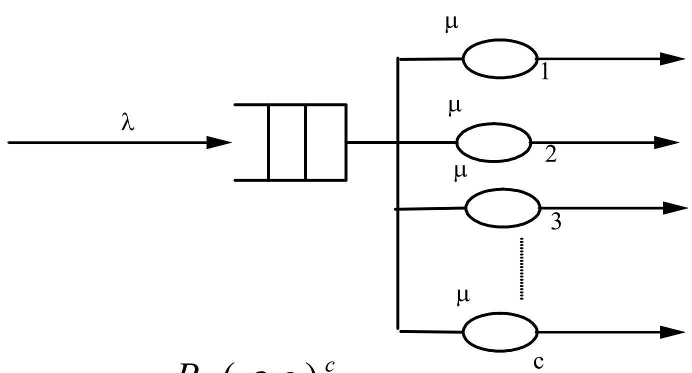
STATE: Κατάσταση ουράς (πληθυσμός συστήματος M/M/1/10) , STATE = 0, 1, … , 10

P[STATE]: Εργοδική πιθανότητα STATE = 0, 1, … , 10

AVERAGE: Μέσος πληθυσμός συστήματος M/M/1/10

```
INITIALIZE: COUNT = 0, STATE = 0, ARRIVALS = 0, ARRIVAL[0…10] = 0, P[0…10] = 0
ARRIVAL:    ARRIVALS = ARRIVALS + 1
            ARRIVAL[STATE] = ARRIVAL[STATE] + 1
            COUNT = COUNT +1
            IF STATE = 10 : GO TO LOOP
            ELSE : STATE = STATE + 1
                          GO TO LOOP
LOOP :      IF STATE = 0 : GO TO ARRIVAL
            ELSE :
                  IF RANDOM < THRESHOLD : GO TO ARRIVAL
                  ELSE : GO TO DEPARTURE
DEPARTURE  :  COUNT  = COUNT +1 ; STATE = STATE - 1
                  IF COUNT < MAXIMUM : GO TO LOOP
                  ELSE : P[STATE=1…10] = ARRIVAL[STATE= 1…10] / ARRIVALS
                         AVERAGE = SUM { STATE * P[STATE] }, STATE = [1…10]
```

Παράδειγμα ανάλυσης ουράς Markov με m εξυπηρετητές M/M/c [Erlang –C]



Αφίξεις Poisson με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό $\lambda_n = \lambda$ (εξωτερικές κλήσεις - τηλεφωνήματα/sec)

c ανεξάρτητοι εκθετικοί εξυπηρετητές (εξωτερικές γραμμές τηλεφωνικού κέντρου)

Ρυθμοί εξυπηρέτησης στη κατάσταση k:

$$\mu_k = k\mu, \ k = 1,2,\dots,c$$

$$\mu_k = c\mu, \quad k=c+1, c+2, \dots$$

$$P_Q = \frac{P_0(\rho c)^c}{c!(1-\rho)}$$

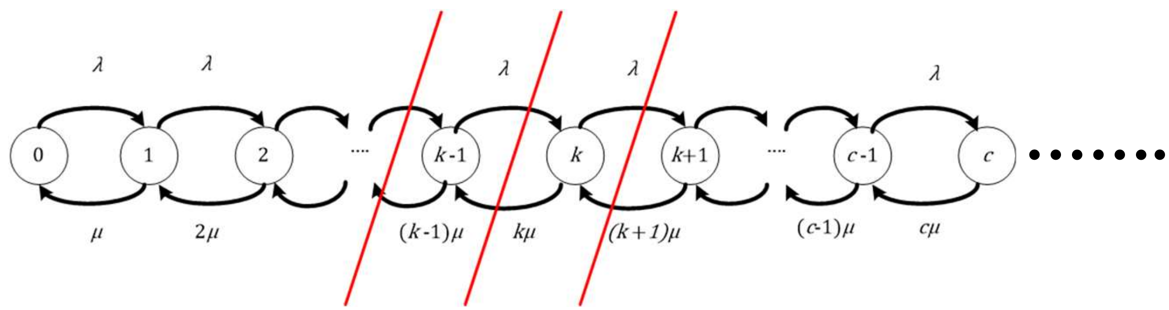
Prob. All servers are busy

$$N_Q = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}$$

$\rho' = \lambda/\mu$ *Erlangs*, $\rho = \rho'/c < 1$

$$W = \frac{\rho \cdot P_Q}{\lambda(1-\rho)}$$

$$T = \frac{p_Q}{c\mu - \lambda} + \frac{1}{\mu}$$

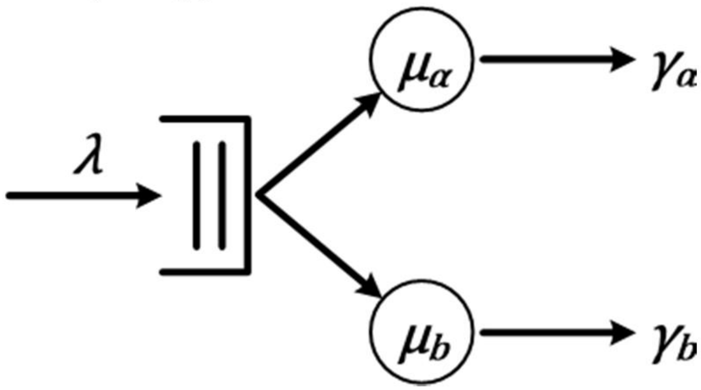


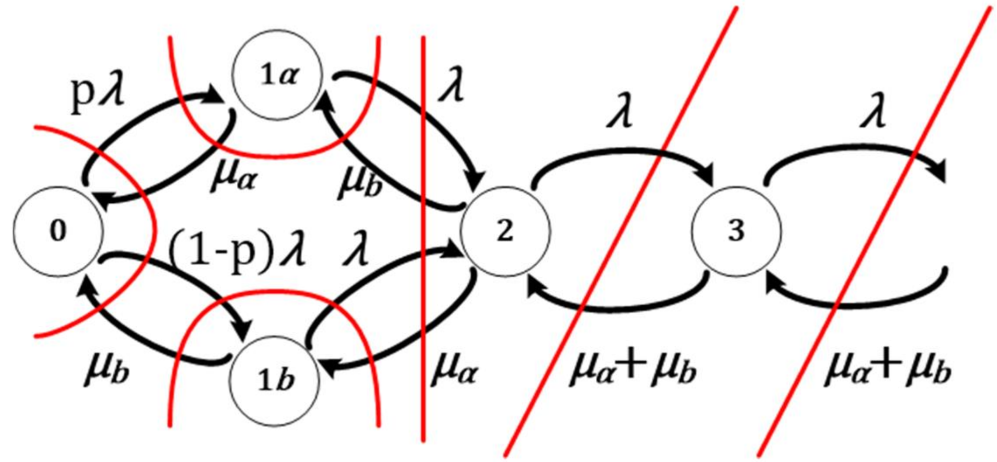
$$N = \frac{\rho p_Q}{1-\rho} + c\rho$$

$$p_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{c\mu}{c\mu - \lambda}}$$

ΟΥΡΑ M/M/2

- Αφίξεις Poisson με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό $\lambda_k = \lambda$
- 2 ανεξάρτητοι εκθετικοί εξυπηρετητές $(\alpha), (b)$ με άνισους ρυθμούς μ_α και μ_b
- Άπειρη Χωρητικότητα
- Άφιξη σε άδειο σύστημα δρομολογείται στον (α) με πιθανότητα p και στον (b) με πιθανότητα $(1-\mathrm{p})$





Εξισώσεις Ισορροπίας:

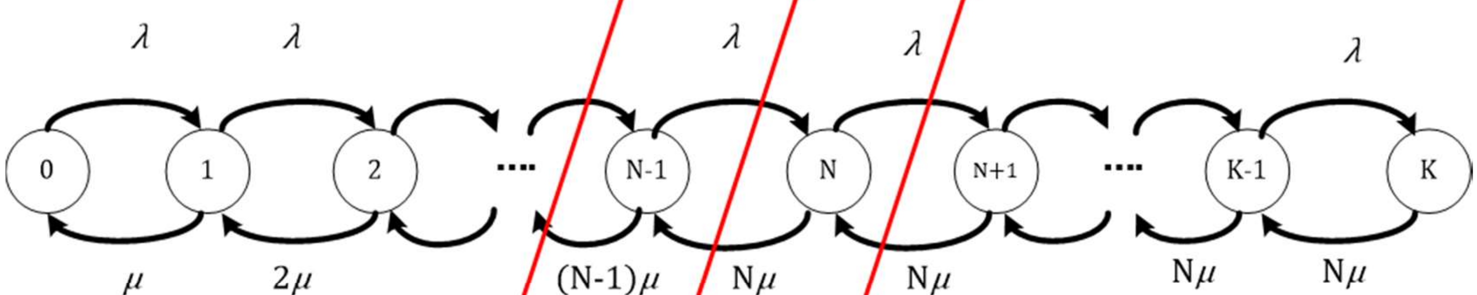
$$\lambda P_0 = \mu_\alpha P_{1\alpha} + \mu_b P_{1b}$$
$$(\lambda + \mu_\alpha) P_{1\alpha} = \mathrm{p}\lambda P_0 + \mu_b P_2$$
$$(\lambda + \mu_b) P_{1b} = (1-\mathrm{p})\lambda P_0 + \mu_\alpha P_2$$
$$\lambda(P_{1\alpha} + P_{1b}) = (\mu_\alpha + \mu_b) P_2, \ \lambda P_k = (\mu_a + \mu_b) P_{k+1}, \ k = 2,3, \ldots$$
$$P_0 + P_{1\alpha} + P_{1b} + P_2 + P_3 + \cdots = 1, \ \lambda/(\mu_\alpha + \mu_b) < 1$$ για σύγκληση (εργοδικότητα)

Βαθμοί Χρησιμοποίησης – Ρυθμαποδόσεις Εξυπηρετητών:

$$U_\alpha = 1 - P_0 - P_{1b} \qquad \gamma_\alpha = \mu_\alpha U_\alpha$$
$$U_b = 1 - P_0 - P_{1\alpha} \qquad \gamma_b = \mu_b U_b$$
$$\gamma = \lambda = \gamma_a + \gamma_b$$

ΟΥΡΑ M/M/N/K

– Αφίξεις Poisson με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό $\lambda_k = \lambda$
– N ανεξάρτητοι εκθετικοί εξυπηρετητές με ίσους ρυθμούς μ
– Χωρητικότητα K, $\mathrm{N} \leq \mathrm{K}$ (π.χ. **call center** με N εξυπηρετητές & δυνατότητα αναμονής μέχρι $\mathrm{K}-\mathrm{N}$ κλήσεις)
– Μέσοι ρυθμοί εξυπηρέτησης στη κατάσταση k:
  - $\mu_k = k\mu, \quad k = 1,2,\dots,\mathrm{N}$
  - $\mu_k = \mathrm{N}\mu, \quad k = \mathrm{N},\mathrm{N}+1,\dots,\mathrm{K}-1,\mathrm{K}$
– Εργοδική κατάσταση $n(t)$: Αριθμός πελατών στο σύστημα, αδιάφορα από χρήση συγκεκριμένων εξυπηρετητών (π.χ. σε σύστημα M/M/N, $\mu_a = \mu_b = \mu$, $P_1 = P_{1\alpha} + P_{1b}$



Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$P_k = \left[\frac{\boldsymbol{\lambda}}{k\mu}\right] P_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \dots, \mathrm{N}-1$$

$$P_k = \left[\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{N}\mu}\right] P_{k-1}, \qquad k = \mathrm{N}, \mathrm{N}+1, \dots, \mathrm{K}-1, \mathrm{K}$$

$$P_0 + P_1 + \cdots + P_{\mathrm{K}-1} + \; + P_{\mathrm{K}} = 1, \qquad P_{\mathrm{K}} = P_{\text{blocking}}, \qquad \gamma = \lambda\,(1 - P_{\text{blocking}})$$

$$P_{\text{waiting}} = P_{\mathrm{N}} + P_{\mathrm{N}+1} + \cdots + P_{\mathrm{K}-1}$$

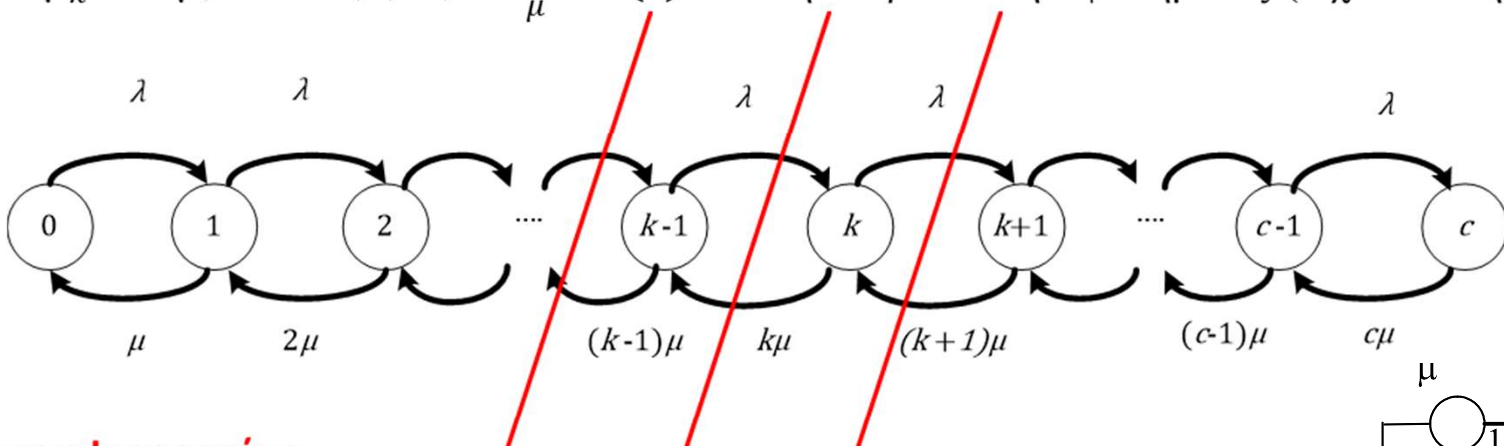
Για $\mathrm{K} \to \infty$ σύστημα M/M/N και $P_{\text{waiting}} = P_{\mathrm{N}} + P_{\mathrm{N}+1} + \cdots = 1 - \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} P_k$

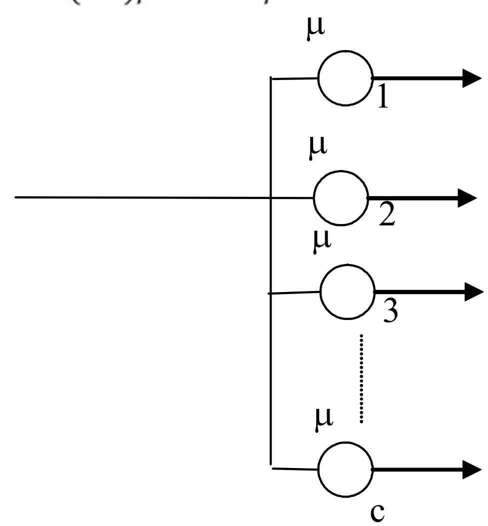
ΟΥΡΑ M/M/*c*/*c* (*Erlang-B*)

(τηλεφωνικό κέντρο με *c* εξωτερικές γραμμές, trunks)

- Αφίξεις Poisson με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό $\lambda_n = \lambda$ (εξωτερικές κλήσεις - τηλεφωνήματα/sec)
- c ανεξάρτητοι εκθετικοί εξυπηρετητές (εξωτερικές γραμμές τηλεφωνικού κέντρου)
- Χωρητικότητα c πελάτες (τηλεφωνήματα, εξωτερικές κλήσεις)
- Ρυθμοί εξυπηρέτησης στη κατάσταση k:

$$\mu_k = k\mu,\ k = 1,2,\dots,c \qquad \frac{1}{\mu} = \mathrm{E}(s):\ \text{Μέση Διάρκεια Τηλεφωνήματος (π.χ. 3 min ή 180 sec)}$$





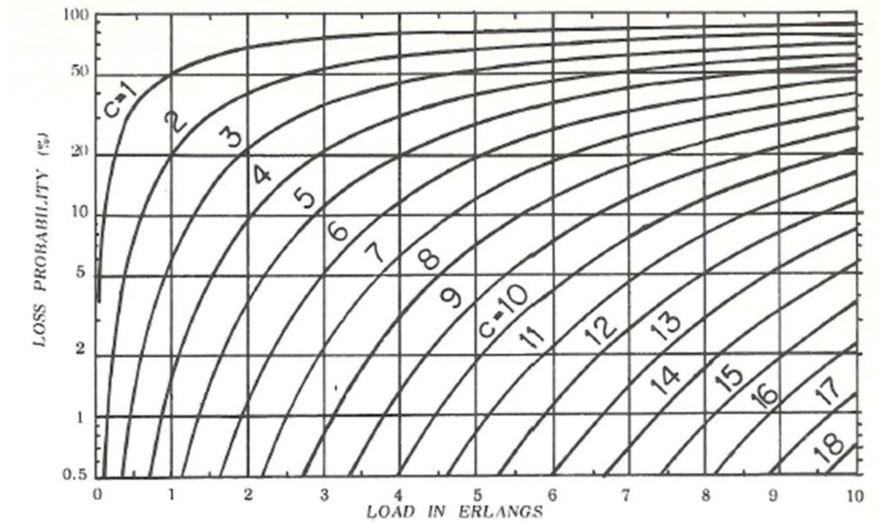
Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$P_k = \left[\frac{\lambda}{k\mu}\right] P_{k-1} = \left(\frac{\rho^k}{k!}\right) P_0,\ k = 1,2,\dots,c \qquad \rho \triangleq \frac{\lambda}{\mu}\ \text{Erlangs}$$

$$P_0 + P_1 + \cdots + P_{c-1} + P_c = 1 \Rightarrow \mathrm{P}_0 = \frac{1}{\sum_{k=1}^{c} \frac{\rho^k}{k!}}$$

$$P_c = P_{\text{blocking}} = \frac{\rho^c/c!}{\sum_{k=0}^{c} \frac{\rho^k}{k!}} \triangleq \mathrm{B}(\rho, c)$$ (***Erlang-B Formula***)

ΠΙΝΑΚΕΣ Erlang $\mathrm{B}(\rho, c)$



Αναδρομικός Υπολογισμός

$$\mathrm{B}(\rho, 0) = 1$$

$$\mathrm{B}(\rho, n) = \frac{\rho \mathrm{B}(\rho, n-1)}{\rho \mathrm{B}(\rho, n-1) + n}, \qquad n = 1,2,\ldots,c$$

ρ	$c=1$	2	3	4	5	6	7	8
0.00	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
0.25	.2000	.0244	.0020	.0001	**	*	*	*
0.50	.3333	.0769	.0127	.0016	.0002	**	*	*
0.75	.4286	.1385	.0335	.0062	.0010	.0001	**	*
1.00	.5000	.2000	.0625	.0154	.0031	.0005	.0001	**
1.25	.5556	.2577	.0970	.0294	.0073	.0015	.0003	**
1.50	.6000	.3103	.1343	.0480	.0142	.0035	.0008	.0001
1.75	.6364	.3577	.1726	.0702	.0240	.0070	.0017	.0004
2.00	.6667	.4000	.2105	.0952	.0367	.0121	.0034	.0009
2.25	.6923	.4378	.2472	.1221	.0521	.0192	.0061	.0017
2.50	.7143	.4717	.2822	.1499	.0697	.0282	.0100	.0031
2.75	.7333	.5021	.3152	.1781	.0892	.0393	.0152	.0052
3.00	.7500	.5294	.3462	.2062	.1101	.0522	.0219	.0081
3.25	.7647	.5541	.3751	.2336	.1318	.0666	.0300	.0121
3.50	.7778	.5765	.4021	.2603	.1541	.0825	.0396	.0170
3.75	.7895	.5968	.4273	.2860	.1766	.0994	.0506	.0232
4.00	.8000	.6154	.4507	.3107	.1991	.1172	.0628	.0304
4.25	.8095	.6324	.4725	.3343	.2213	.1355	.0760	.0388
4.50	.8182	.6480	.4929	.3567	.2430	.1542	.0902	.0483
4.75	.8261	.6624	.5119	.3781	.2643	.1730	.1051	.0587
5.00	.8333	.6757	.5287	.3983	.2849	.1919	.1205	.0701
5.25	.8400	.6880	.5463	.4176	.3048	.2106	.1364	.0822
5.50	.8462	.6994	.5618	.4358	.3241	.2290	.1525	.0949
5.75	.8519	.7101	.5764	.4531	.3426	.2472	.1688	.1082
6.00	.8571	.7200	.5902	.4696	.3604	.2649	.1851	.1219
6.25	.8621	.7293	.6031	.4852	.3775	.2822	.2013	.1359
6.50	.8667	.7380	.6152	.4999	.3939	.2991	.2174	.1501
6.75	.8710	.7462	.6267	.5140	.4096	.3155	.2333	.1644
7.00	.8750	.7539	.6376	.5273	.4247	.3313	.2489	.1788
7.25	.8788	.7611	.6478	.5401	.4392	.3467	.2642	.1932

ρ	$c=9$	10	11	12	13	14	15	16
0.00	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
0.25								
0.50								
0.75								
1.00	*							
1.25	**							
1.50	**	*						
1.75	.0001	**	*					
2.00	.0002	**	**					
2.25	.0004	.0001	**	*				
2.50	.0009	.0002	.0001	**	*			
2.75	.0016	.0004	.0001	**	**			
3.00	.0027	.0008	.0002	.0001	**	*		
3.25	.0043	.0014	.0004	.0001	**	**		
3.50	.0066	.0023	.0007	.0002	.0001	**	*	
3.75	.0096	.0036	.0012	.0004	.0001	**	**	
4.00	.0133	.0053	.0019	.0006	.0002	.0001	**	*
4.25	.0180	.0076	.0029	.0010	.0003	.0001	**	**
4.50	.0236	.0105	.0043	.0016	.0006	.0002	.0001	**
4.75	.0301	.0141	.0060	.0024	.0009	.0003	.0001	**
5.00	.0375	.0184	.0083	.0034	.0013	.0005	.0002	.0001
5.25	.0457	.0234	.0111	.0048	.0019	.0007	.0003	.0001
5.50	.0548	.0293	.0144	.0066	.0028	.0011	.0004	.0001
5.75	.0647	.0358	.0184	.0087	.0039	.0016	.0006	.0002
6.00	.0751	.0431	.0230	.0114	.0052	.0022	,0009	.0003
6.25	.0862	.0511	.0282	.0145	.0069	.0031	.0013	.0005
6.50	.0978	.0598	.0341	.0181	.0090	.0042	.0018	.0007
6.75	.1098	.0690	.0406	.0223	.0115	.0055	.0025	.0010
7.00	.1221	.0787	.0477	.0271	.0144	.0071	.0033	.0015
7.25	.1347	.0890	.0554	.0324	.0177	.0091	.0044	.0020

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΗΛΕΦΩΝΙΚΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ

- Τηλεφωνικό Κέντρο με 7 εξωτερικές γραμμές προωθεί κίνηση Θεωρώ ότι οι εξωτερικές κλήσεις ακολουθούν διαδικασία ***Poisson*** με μέσο ρυθμό $\lambda = 2$ κλήσεις/min και χρόνο εξυπηρέτησης ***Εκθετικό*** με μέση διάρκεια $1/\mu = 3$ min, άρα το συνολικό προσφερόμενο φορτίο (***offered traffic***) είναι

  $\rho = \lambda/\mu = 6$ Erlangs

- Υποθέτουμε πως οι κλήσεις που δεν βρίσκουν γραμμή χάνονται οριστικά. Άρα η πιθανότητα απώλειας δίνεται από τον τύπο

  $\mathrm{B}(\rho, c) = \mathrm{B}(6{,}7) = 18.51\%$

- Το εξυπηρετούμενο φορτίο (***carried traffic***) είναι

  $$\rho[1 - \mathrm{B}(\rho, c)] = \frac{\lambda}{\mu}[1 - \mathrm{B}(\rho, c)] = \frac{\gamma}{\mu} = 4.8894 \text{ Erlangs}$$

- Το φορτίο υπερχείλισης (***overflow traffic***) είναι

  $\rho B(\rho, c) = 1.1106$ Erlangs

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΤΗΛΕΦΩΝΙΚΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ

- Τηλεφωνικό Κέντρο με c εξωτερικές γραμμές (trunks) προωθεί κίνηση με μέσο ρυθμό κλήσεων 2 κλήσεις το λεπτό με μέση διάρκεια κλήσης 3 min.
- Θεωρώ ότι οι εξωτερικές κλήσεις ακολουθούν διαδικασία ***Poisson*** με μέσο ρυθμό $\lambda = 2$ κλήσεις/min και χρόνο εξυπηρέτησης ***Εκθετικό*** με μέση διάρκεια $\frac{1}{\mu} = 3$ min, άρα το συνολικό προσφερόμενο φορτίο (***offered traffic***) είναι

  $$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 6 \text{ Erlangs}$$
- Υποθέτουμε πως οι κλήσεις που δεν βρίσκουν γραμμή χάνονται οριστικά. Ζητείται ο απαιτούμενος αριθμός εξωτερικών γραμμών (trunks) c ώστε ο ρυθμός απωλειών (***Grade of Service, GOS***) να είναι μικρότερος από 0.3%
- Από τους πίνακες προκύπτει πως $\mathrm{B}(6{,}13) = 0.52\%$ και $\mathrm{B}(6{,}14) = 0.24\%$, άρα οι απαιτήσεις καλύπτονται με ελάχιστο αριθμό εξωτερικών γραμμών $c = 14$ trunks

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕΣΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΠΑΚΕΤΟΥ ΣΕ ΔΙΚΤΥΟ ΤΥΠΟΥ INTERNET

- *10* υπολογιστές (Η/Υ) διασυνδέονται σε Δίκτυο μέσω μεταγωγέα πακέτου (***Router*** ή ***Ethernet Switch***) που τα προωθεί προς τον προορισμό τους. Η ταχύτητα της πολυπλεγμένης εξόδου (***trunk port***) είναι $C = 100$ Mbps
- Τα δεδομένα παράγονται στους Η/Υ σε μορφή πακέτων (πλαισίων) μεταβλητού μήκους L bits (***data payload***). Θεωρείστε πως κάθε Η/Υ παράγει δεδομένα που αντιστοιχούν σε 1 Mbps κατά μέσο όρο
- Οι Η/Υ προσθέτουν σε κάθε πακέτο επικεφαλίδα (***header***) με υποχρεωτικές πληροφορίες πρωτοκόλλου (***protocol overhead*** με διευθύνσεις, σηματοδοσία ελέγχου, ανίχνευσης λαθών κλπ.) μήκους 200 bits
- Θεωρείστε πως ο μεταγωγέας έχει άπειρη χωρητικότητα αποθήκευσης πακέτων, το συνολικό μήκος πακέτου $(L + 200)$ bits είναι κατά προσέγγιση ***Εκθετικά*** κατανεμημένο και πως η συνολική ροή πακέτων γίνεται με διαδικασία ***Poisson***
- Βρείτε το μέσο ωφέλιμο μήκος πακέτου $\mathrm{E}(L)$ που να βελτιστοποιεί την μέση καθυστέρηση προώθησης πακέτου στο μεταγωγέα
- Θεωρείστε πως η ανάστροφη ροή πακέτων ***Δίκτυο → Η/Υ*** γίνεται ανεξάρτητα από την ροή ***Η/Υ → Δίκτυο*** (FDX) και πως η στατιστική συμπεριφορά των δύο κατευθύνσεων είναι συμμετρική

Λύση

- Θεωρώ μοντέλο ουράς M/M/1 με

  $\lambda = \frac{10 \times 10^6}{\mathrm{E}(L)} = 10^7/\mathrm{E}(L)$ packets/sec

  $\mu = \frac{C}{200+E(L)}$ sec^{-1} $= 10^8/[200 + E(L)]$ sec^{-1}

- Η μέση καθυστέρηση δίνεται από τον τύπο

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{\frac{10^8}{200+\mathrm{E}(L)} - \frac{10^7}{\mathrm{E}(L)}}$$

- Με $\mathrm{E}(L) = x$, ελαχιστοποιώ την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{\frac{10^8}{200+x} - \frac{10^7}{x}} = \frac{x(200+x)}{10^7(9x-200)}$$

  και βρίσκω το βέλτιστο μέσο payload ανά πακέτο $\mathrm{E}(L) = x$ όταν $\frac{df(x)}{dx} = 0 \Rightarrow$

$$\text{optimal}\{\mathrm{E}(L)\} \cong 92.495 \text{ bits}$$

- **Προσοχή:** Για εργοδικότητα πρέπει $\rho = \lambda/\mu < 1$ και $\mathrm{E}(L) > 200/9 = 22.222$ bits