ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων Τηλεματικής - NETMODE

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80
e-mail: queuing@netmode.ntua.gr, URL: http://www.netmode.ntua.gr

30/3/2020

Συστήματα Αναμονής (Queuing Systems)

1η Ομάδα Ασκήσεων

Κατανομή Poisson

Α) Συνάρτηση μάζας πιθανότητας (Probability Mass Function) της κατανομής Poisson: Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας των κατανομών Poisson με παραμέτρους λ={3, 10, 50}. Οι κατανομές να σχεδιαστούν σε κοινό διάγραμμα και στον οριζόντιο άξονα να επιλεγούν τιμές από 0 μέχρι και 70. Πώς αλλάζει η μορφή τους, καθώς μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου λ;

Β) Μέση τιμή και διακύμανση κατανομής Poisson: Να επιλέξετε την κατανομή Poisson με παράμετρο λ=30. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της και τη διακύμανσή της. Τι παρατηρείτε για τις τιμές που υπολογίσατε;

Γ) Υπέρθεση κατανομών Poisson: Να επιλέξετε τις κατανομές Poisson με παραμέτρους λ=10 και λ=50. Να υπολογίσετε την κατανομή που προκύπτει από τη συνέλιξη των δύο αυτών κατανομών και, στη συνέχεια, να σχεδιάσετε τις τρεις αυτές κατανομές σε κοινό διάγραμμα. Τι είδους κατανομή προέκυψε; Τι παρατηρείτε για τη σχέση της κατανομής που υπολογίσατε με τις δύο επιμέρους κατανομές; Ποια είναι η απαραίτητη προϋπόθεση για να συμβαίνει αυτό;

Δ) Κατανομή Poisson ως το όριο μιας διωνυμικής κατανομής: Πώς μπορεί να ληφθεί μία κατανομή Poisson παραμέτρου λ ως το όριο μιας διωνυμικής (binomial) κατανομής παραμέτρων n και p; Να κατασκευάσετε, με αυτόν τον τρόπο, μία κατανομή Poisson παραμέτρου λ=30 σημεία/sec. Πιο συγκεκριμένα, να σχεδιάσετε, σε κοινό διάγραμμα, την εξέλιξη μιας διωνυμικής κατανομής, καθώς τείνει στην επιθυμητή κατανομή Poisson (τέσσερα διαγράμματα αρκούν για n = 30, 60, 90, 120).

Για την άσκηση αυτή, σας δίνεται έτοιμος ο κώδικας (αρχείο *demo1a.m*).

Εκθετική κατανομή

Α) Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF, Probability Density Function) της εκθετικής κατανομής: Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των εκθετικών κατανομών με μέσους όρους 1/λ={0.5,1,3}. Οι κατανομές να σχεδιαστούν σε κοινό διάγραμμα και στον οριζόντιο άξονα να επιλεγούν τιμές από 0 μέχρι 8

(Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την εντολή k = 0:0.00001:8. Έτσι, μπορείτε να προσεγγίσετε τη συνεχή εκθετική κατανομή ως μία διακριτή με πολύ μικρό σφάλμα).

Β) Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της εκθετικής κατανομής: Να σχεδιάσετε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (Cumulative Distribution Function) των εκθετικών κατανομών του προηγούμενου ερωτήματος σε κοινό διάγραμμα.

Γ) Απώλεια μνήμης της εκθετικής κατανομής: Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της εκθετικής κατανομής για $1/\lambda = 2.5$ sec, να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(X>30000)$ και $Pr(X>50000|X>20000)$. Τι παρατηρείτε για τις δύο πιθανότητες; Γιατί συμβαίνει αυτό; Πώς ερμηνεύεται η παρατήρησή σας; (Επεξήγηση: οι τιμές 30000, 50000 και 20000 δηλώνουν τη θέση του σημείου στο διάνυσμα k = 0:0.00001:8 που χρησιμοποιήθηκε στο προηγούμενο ερώτημα).

<u>Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson</u>

Α) Διαδικασία καταμέτρησης Poisson $N(t)$: Τι κατανομή γνωρίζετε ότι ακολουθούν οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson; Να δημιουργήσετε με την εντολή exprnd( ) 100 διαδοχικά τυχαία γεγονότα και να σχεδιάσετε (συνάρτηση stairs) μία διαδικασία καταμέτρησης Poisson. Θεωρήστε $\lambda = 5$ γεγονότα/sec.

Β) Μέσος αριθμός γεγονότων: Τι κατανομή γνωρίζετε ότι ακολουθεί ο αριθμός γεγονότων σε ένα χρονικό παράθυρο $\Delta T = t1 - t2$; Να βρείτε το μέσο αριθμό γεγονότων στη μονάδα του χρόνου. Να επαναλάβετε για (i) 200, (ii) 300, (iii) 500, (iv) 1000, (v) 10000 διαδοχικά τυχαία γεγονότα. Τι παρατηρείτε;

Για απορίες να στέλνετε στο queuing@netmode.ntua.gr