ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ
(Queuing Systems)

Δίκτυα Ουρών

- Ουρές M/M/1 εν σειρά
- Θεώρημα Burke
  Ανοικτά Δίκτυα Ουρών Markov
- Θεώρημα Jackson
- Εφαρμογή σε Δίκτυα Μεταγωγής Πακέτου
- Ασκήσεις/Παραδείγματα

Εβδομάδα 25ης Μαΐου και 1ης Ιουνίου, 2020

ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ ΕΝ ΣΕΙΡΑ (1/2)

- ***Θεώρημα Burke***: Η έξοδος πελατών από ουρά *M/M/1* ακολουθεί κατανομή Poisson με ρυθμό τον ρυθμό εισόδου λ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

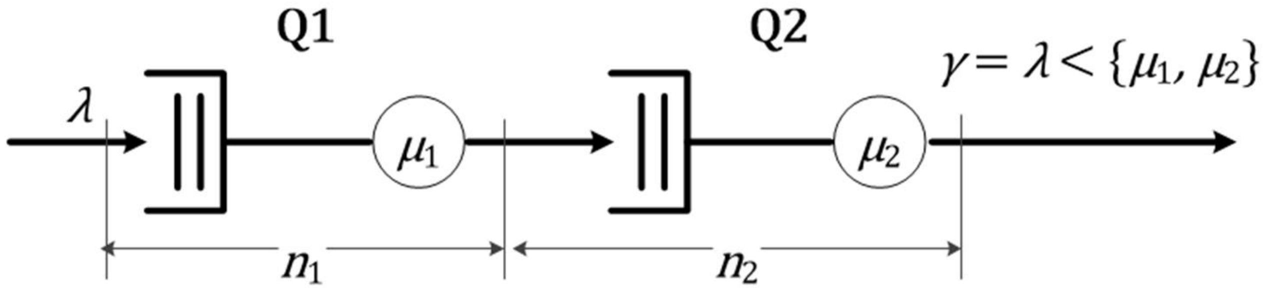
  - Θεωρούμε δύο εκθετικές ουρές $\mathbf{Q1}$, $\mathbf{Q2}$ (π.χ. μεταγωγείς πακέτου) με χρόνους εξυπηρέτησης **ανεξάρτητες** εκθετικές μεταβλητές με μέσους όρους $1/\mu_1, 1/\mu_2$
  - Προσέγγιση με **Παραδοχή Ανεξαρτησίας** ***Leonard Kleinrock*** **σε δίκτυα μεταγωγής πακέτου**: Οι χρόνοι εξυπηρέτησης (ανάλογοι του μήκους πακέτου) δεν διατηρούν τα μεγέθη τους όταν προωθούνται μεταξύ συστημάτων (ουρών) εξυπηρέτησης . Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ανατίθενται σε κάθε σύστημα σαν **ανεξάρτητε**ς εκθετικές τυχαίες μεταβλητές
  - Η είσοδος στην $\mathbf{Q1}$ είναι Poisson με ρυθμό λ (η $\mathbf{Q1}$ είναι ***M/M/1***), $\lambda < \{\mu_1, \mu_2\}$ για εργοδικότητα (ισορροπία)
  - Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από το διάνυσμα $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ όπου
    n_1# πελατών στην $\mathbf{Q1}$, n_2 # πελατών στην $\mathbf{Q2}$
  - Καταστρώνουμε το διάγραμμα μεταβάσεων καταστάσεων Markov σε δύο διαστάσεις και γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας
  - Εξετάζουμε αν οι εργοδικές πιθανότητες έχουν **μορφή γινομένου** (***product form solution***)
    $P(\boldsymbol{n}) = P(n_1, n_2) \mathrel{?=} P(n_1)P(n_2)? = (1-\rho_1){\rho_1}^{n_1}(1-\rho_2){\rho_2}^{n_2} = K{\rho_1}^{n_1}{\rho_2}^{n_2}$
    όπου $\rho_1 = \lambda/\mu_1$, $\rho_2 = \lambda/\mu_2$ και $K = (1-\rho_1)(1-\rho_2)$ η ***Σταθερά Κανονικοποίησης***:
    $$\sum_{\boldsymbol{n}} P(\boldsymbol{n}) = 1$$
  - Οι εξισώσεις επαληθεύονται.
  - Άρα οι δύο ουρές συμπεριφέρονται σαν **δύο ανεξάρτητες ουρές *M/M/1*** σε ισορροπία με ρυθμούς εισόδου λ και ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_1, μ_2

Έπεται πως ο ρυθμός εξόδου της $\mathbf{Q1}$ *(και εισόδου στην* $\mathbf{Q2}$*) είναι Poisson με ρυθμό* λ

ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ ΕΝ ΣΕΙΡΑ (2/2)

Επαλήθευση Υπόθεσης Γινομένου

$$P(\boldsymbol{n}) = P(n_1, n_2) = P(n_1)P(n_2) = (1-\rho_1)\rho_1^{\,n_1}(1-\rho_2)\rho_2^{\,n_2} = K\rho_1^{\,n_1}\rho_2^{\,n_2}$$



Επαλήθευση για Αντιπροσωπευτικές Καταστάσεις:

$\boldsymbol{n} = (2,2)$

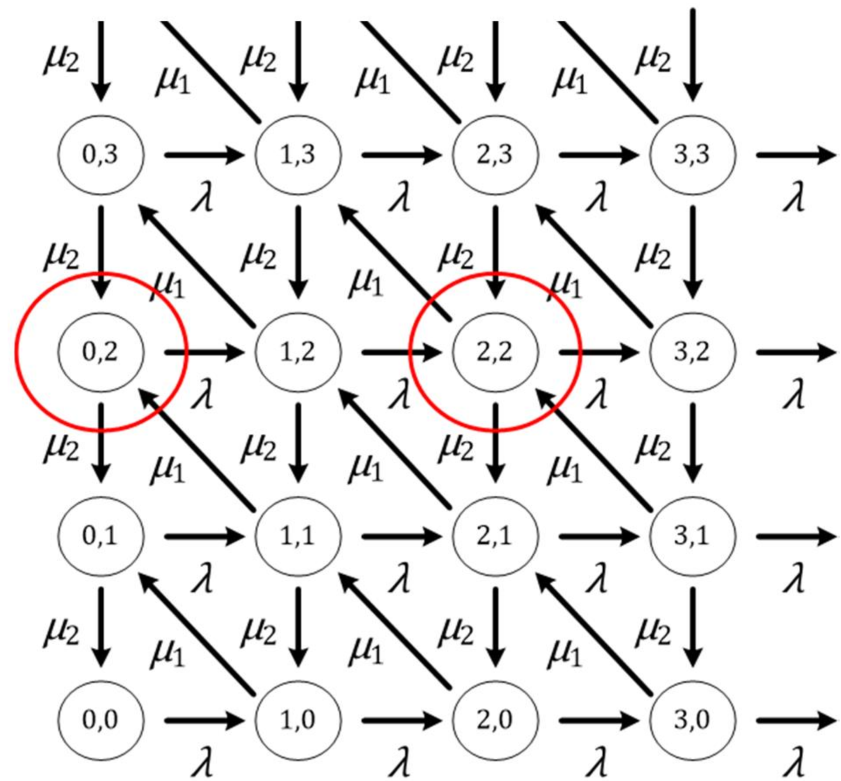
$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(2,2) =?\ \lambda P(1,2) + \mu_1 P(3,1) + \mu_2 P(2,3)$$

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)K(\lambda/\mu_1)^2(\lambda/\mu_2)^2$$
$$=?\ \lambda K(\lambda/\mu_1)\,(\lambda/\mu_2)^2 + \mu_1 K(\lambda/\mu_1)^3(\lambda/\mu_2)$$
$$+\ \mu_2 K(\lambda/\mu_1)^2(\lambda/\mu_2)^3 \quad \surd$$

$\boldsymbol{n} = (0,2)$

$$(\lambda + \mu_2)P(0,2) =?\ \mu_1 P(1,1) + \mu_2 P(0,3)$$

$$(\lambda + \mu_2)K(\lambda/\mu_2)^2$$
$$=?\ \mu_1 K(\lambda/\mu_1)\,(\lambda/\mu_2) + \mu_2 K(\lambda/\mu_2)^3 \quad \surd$$



ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (1/3)

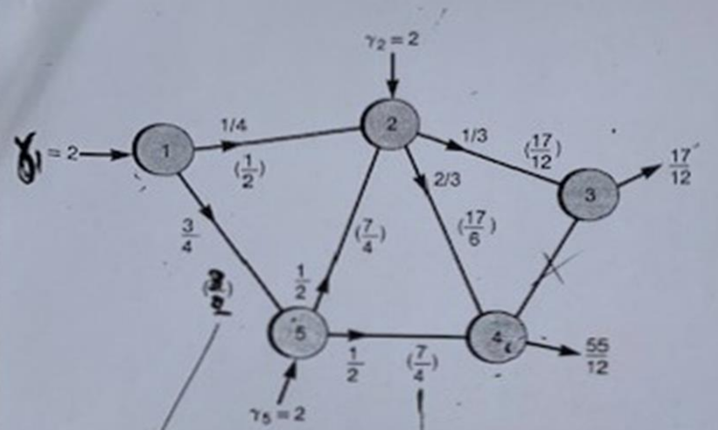
Παραδοχές για Κατάσταση Δικτύου χωρίς Μνήμη (Markov)

- Έξοδος Ουράς M/M/1 – Θεώρημα ***Burke***
  - Οι αναχωρήσεις πελατών από σύστημα ***M/M/1*** αποτελούν διαδικασία Poisson

- Άθροιση – Διάσπαση διαδικασιών Poisson
  - Άθροιση (aggregation) ανεξαρτήτων ροών Poisson λ_1, λ_2: Poisson με μέσο ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
  - Τυχαία Διάσπαση (random split, routing) ροής Poisson μέσου ρυθμού λ με πιθανότητες $p,\ q = 1 - p$:

    Παράγει διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $p\lambda, (1-p)\lambda$

Παράδειγμα Ανοικτού Δικτύου Ουρών



$2 * \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\left(2 * \frac{3}{4} + 2\right) \times \frac{1}{2} = \frac{14}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$

$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_5 = 2 + 2 + 2 = 6 =$ Εξερχόμενη κίνηση από 3+4 κόμβους $= \frac{17}{12} + \frac{55}{12} = 6$

ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (2/3)

Θεώρημα Jackson

Παραδοχές

- Ανοικτό δίκτυο M ***δικτυακών κόμβων εξυπηρέτησης κορμού*** (ουρών αναμονής) $\mathbf{Q}_i$, $i = 1,2, \dots, M$ με εκθετικούς ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_i
- Αφίξεις πελατών (πακέτων) από εξωτερικές πηγές (sources) άμεσα συνδεμένες στον δικτυακό κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_s$ προς εξωτερικούς προορισμούς (destinations) άμεσα συνδεμένους στον δικτυακό κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_d$: ***Ανεξάρτητες ροές Poisson*** μέσου ρυθμού γ_{sd} όπου $s, d \in \{1,2, \dots, M\}$

  Συνολική εξωγενής ροή Poisson σε $\mathbf{Q}_s$: $\gamma_s = \sum_{d=1, d\neq s}^{M} \gamma_{sd}$, $s, d \in \{1,2, \dots, M\}$
- Εσωτερική ***δρομολόγηση*** (routing) με τυχαίο τρόπο και πιθανότητα δρομολόγησης πελάτη από τον κόμβο κορμού (ουρά) $\mathbf{Q}_i$ στον κόμβο $\mathbf{Q}_{\boldsymbol{j}}$: r_{ij}
- Τότε τον κόμβο εξυπηρέτησης $\mathbf{Q}_j$ διαπερνούν ροές με συνολικό μέσο ρυθμό

$$\lambda_j = \gamma_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{M} r_{ij}\lambda_i \,, \qquad j = 1,2, \dots, M$$

- Οι χρόνοι εξυπηρετήσεις πελατών όπως διαπερνούν το δίκτυο δεν διατηρούν την τιμή τους (έλλειψη μνήμης) αλλά αποκτούν χρόνο εξυπηρέτησης ανάλογα με την κατανομή του κάθε εξυπηρετητή (***Kleinrock's Independence Assumption***, επαληθευμένη με προσομοιώσεις σε δίκτυα με όχι απλοϊκή τοπολογία)

ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (3/3)
Θεώρημα Jackson

Αποτέλεσμα

- Κατάσταση του δικτύου: Διάνυσμα $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ αριθμού πελατών n_i στις ουρές (κόμβους κορμού) $\mathbf{Q}_i$
- Η ***Εργοδική Πιθανότητα*** των καταστάσεων $\boldsymbol{n}$ (αν υπάρχει) έχει μορφή γινομένου (product form) ***ανεξαρτήτων ουρών M/M/1***

$$P(\boldsymbol{n}) = P(n_1, n_2, \dots, n_M) = P(n_1)P(n_2)\dots P(n_M)$$

$$P(n_i) = (1-\rho_i){\rho_i}^{n_i} \text{ με } \rho_i = \lambda_i/\mu_i$$

όπου λ_i ο συνολικός μέσος ρυθμός (***Poisson***) των πελατών που διαπερνούν τον κόμβο κορμού (ουρά) $\mathbf{Q}_i$ με ρυθμό εκθετικής εξυπηρέτησης μ_i

- Ουρά (κόμβος κορμού) συμφόρησης: Η $\mathbf{Q}_i$ με το μέγιστο ρ_i

- Μέσος αριθμός πελατών (πακέτων) στο δίκτυο: $\mathrm{E}(\boldsymbol{n}) = \sum_{i=1}^{M} \mathrm{E}(n_\iota) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$

- Μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από άκρο σε άκρο: $\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(\boldsymbol{n})/\boldsymbol{\gamma}$ (***τύπος Little***)

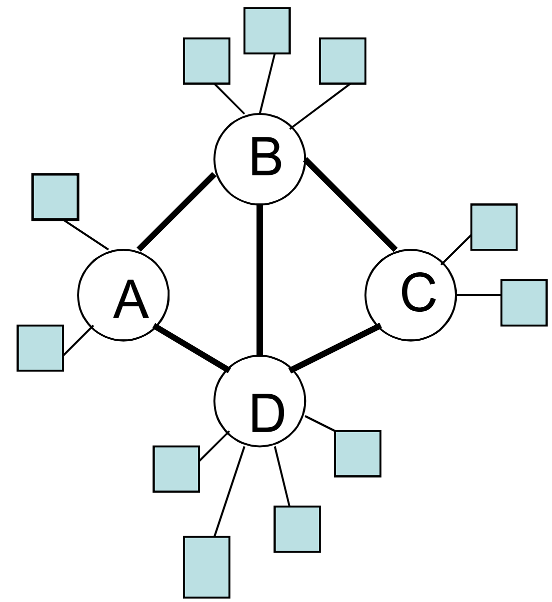
  όπου $\boldsymbol{\gamma}$ ο συνολικός μέσος ρυθμός πελατών (***Poisson***) που εισέρχονται στο δίκτυο από εξωτερικές πηγές (***network throughput***) $\boldsymbol{\gamma} = \sum_{s=1}^{M} \sum_{d=1, d\neq s}^{M} \gamma_{sd}$

- Μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από κόμβο s σε κόμβο d:

  $\mathrm{E}(T_{sd}) = \sum_{i-1}^{M} \delta_{sd}(i) \frac{1/\mu_i}{1-\rho_i}$ όπου $\delta_{sd}(i)$ το κλάσμα της ροής γ_{sd} που διαπερνά τον κόμβο $\mathbf{Q}_i$

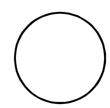
ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΔΙΚΤΥΟ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΠΑΚΕΤΩΝ (1/2)

- Θεωρήστε ένα δίκτυο μεταγωγής πακέτων.
  - Όλες οι γραμμές (FDX) θεωρούνται χωρητικότητας $C_i = C = 10$ Gbits/sec. Το μέσο μήκος του πακέτου είναι $E(L) = 1000$ bits (θεωρείστε εκθετική κατανομή).
  - Μεταξύ κόμβων θεωρείστε προσφερόμενους ρυθμούς πακέτων Poisson, με ίσους ρυθμούς r packets/sec (από άκρο σε άκρο).
  - Πακέτα από το A στο C και αντίστροφα δρομολογούνται εξίσου στους δύο ισότιμους δρόμους: (A-B-C) και (A-D-C). Τα πακέτα μεταξύ κόμβων κατευθείαν συνδεδεμένων (A-B), (A-D), (B-D), (B-C), (D-C) δρομολογούνται κατευθείαν.

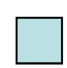


- (A) Βρείτε το ρυθμό r ώστε η γραμμή συμφόρησης (με τη μέγιστη χρησιμοποίηση) να είναι 50%
- (B) Με το r του (A) βρείτε τη μέση καθυστέρηση ενός τυχαίου πακέτου στο δίκτυο (από άκρο σε άκρο)

ΟΔΗΓΙΑ: Οι FDX γραμμές του δικτύου κορμού αναλύονται σε δύο ουρές με ροές πακέτων συνολικού μέσου ρυθμού λ_i (προκύπτει από την δρομολόγηση πακέτων) και μέσου ρυθμού εκθετικής εξυπηρέτησης $\mu_i = C_i / E(L)$. Το ανοικτό δίκτυο ουρών (**επόμενη διαφάνεια**) αναλύεται σαν **δίκτυο ανεξαρτήτων ουρών M/M/1** με το **Θεώρημα του Jackson**

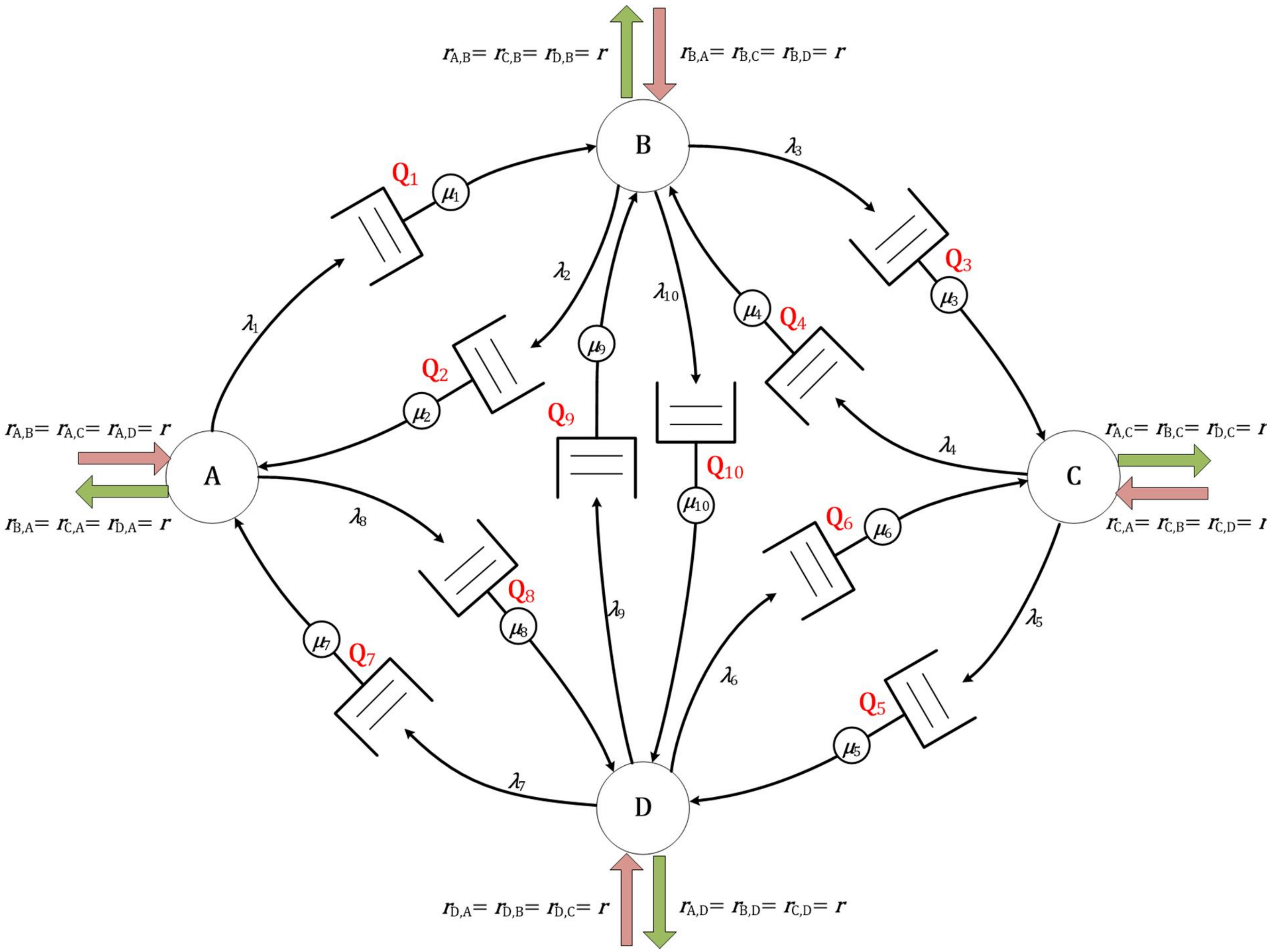


Κόμβος Δικτύου Κορμού
(Δρομολογητής Κορμού, Backbone Router, Packet Switch)



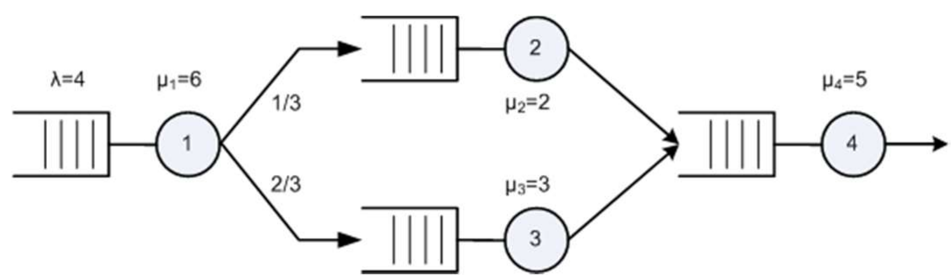
Κόμβος Εισόδου
(Η/Υ, Access Node, Customer Network - LAN)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΔΙΚΤΥΟ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΠΑΚΕΤΩΝ (2/2)



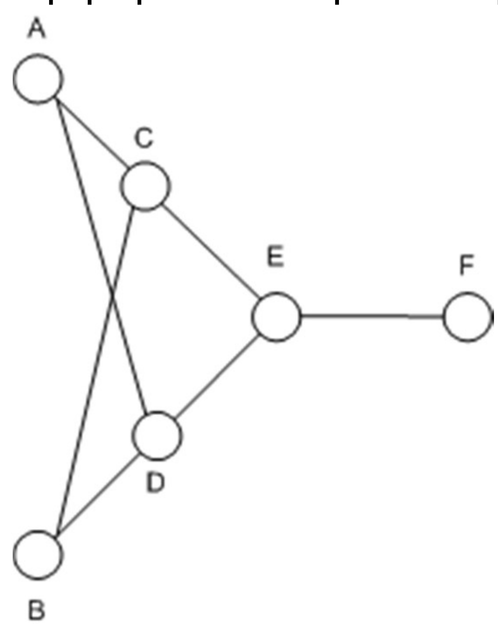
ΑΣΚΗΣΗ 1

- Το παρακάτω σχήμα (δίκτυο ουρών αναμονής) παριστά ένα τηλεπικοινωνιακό δίκτυο. Μια ροή κίνησης έντασης εισέρχεται στον κόμβο 1 και διασπάται τυχαία με πιθανότητα 1/3 προς τον κόμβο 2 και με πιθανότητα 2/3 προς τον κόμβο 3. Βρείτε τις εργοδικές κατανομές πιθανοτήτων του αριθμού πακέτων σε κάθε ουρά αναμονής. Βρείτε το μέσο αριθμό πακέτων σε κάθε ουρά και το μέσο χρόνο συστήματος που ακολουθούν τα πακέτα στις διαδρομές (υποροές) 1-2-4 και 1-3-4. Κάθε σύνδεση μεταξύ διαδοχικών ουρών αναμονής μπορεί να θεωρηθεί ως μια ουρά *M/M/1*.
- Σε κάθε περίπτωση $\lambda_i < \mu_i, \quad i = 1,2,3,4$



ΑΣΚΗΣΗ 2

- Θεωρήστε το παρακάτω δίκτυο. Υπάρχουν 4 σύνοδοι (ροές πακέτων) ACE, ADE, BCEF, BDEF οι οποίες δημιουργούν κίνηση Poisson με ρυθμούς, 200, 400, 800 και 900 πακέτα ανά δευτερόλεπτο αντίστοιχα. Τα μήκη των πακέτων είναι εκθετικά κατανεμημένα με μέση τιμή 1000bits. Όλες οι γραμμές μετάδοσης έχουν χωρητικότητα 5Mbit/sec. Υποθέστε ότι η κάθε γραμμή μετάδοσης μπορεί να θεωρηθεί ως μια M/M/1 ουρά.
- A) Βρείτε το μέσο αριθμό πακέτων στο σύστημα και τη μέση καθυστέρηση ανά πακέτο (ανεξαρτήτως συνόδου).
- B) Βρείτε τη μέση καθυστέρηση πακέτου για κάθε μία σύνοδο.



ΑΣΚΗΣΗ 3

- Θεωρείστε δύο κανάλια επικοινωνίας, καθένα από τα οποία θα εξυπηρετεί μια ροή πακέτων, όπου όλα τα πακέτα έχουν τον ίδιο σταθερό χρόνο μετάδοσης T και τον ίδιο σταθερό χρόνο μεταξύ διαδοχικών αφίξεων, $R>T$. Θεωρήστε εναλλακτικά, ότι οι δύο σταθερές ροές συγχωνεύονται με τυχαίο συγχρονισμό έναρξης σε ένα κανάλι διπλής ταχύτητας. Δείξτε ότι ο μέσος χρόνος συστήματος (αναμονή + εξυπηρέτηση) ενός πακέτου θα μειωθεί από T σε μια τιμή μεταξύ $T/2$ και $3T/4$.