ΙΩΑΝΝΗΣ ΡΙΖΑΣ

03117189

$1^{η}$ ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ στα ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

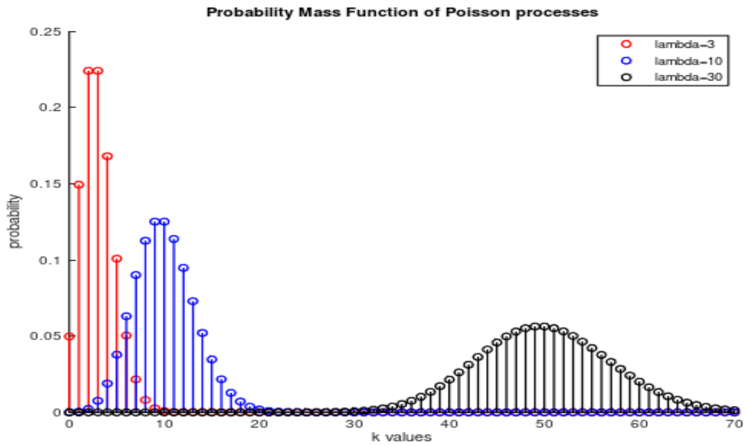
$1^{η}$ Άσκηση (Κατανομή Poisson)

Για την κατανομή Poisson που είναι μια διακριτή κατανομή, γνωρίζουμε από τις πιθανότητες ότι:

- $E[x] = \lambda t$
- $Var[x] = \lambda t$

ΕΡΩΤΗΜΑ Α

Φαίνονται οι τέσσερις κατανομές Poisson για διαφορετικές τιμές του λ. Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει το λ, η μέση τιμή και η διασπορά μεγαλώνουν, επιβεβαιώνοντας τον θεωρητικό τύπο,ώστε η κατανομή Poisson όσο το λ-> άπειρο, η μέση τιμή γίνεται άπειρη και το ύψος μειώνεται ώστε να φτάνει να γίνεται σχεδόν σταθερή συνάρτηση. Όσο λ->0 τότε η κατανομή θυμίζει περισσότερο Dirac, έχοντας «άπειρο» ύψος, επειδή η διασπορά τείνει στο 0 και στη τιμή 0 που τείνει και η μέση τιμή. Παρακάτω προστίθεται ο κώδικας του συγκεκριμένου ερωτήματος:




```
clc;
clear all;
close all;
k = 0:1:70;
lambda = [3,10,50];
for i=1:columns(lambda)
  poisson(i,:) = poisspdf(k,lambda(i));
endfor
colors = "rbkm";
figure(1);
hold on;
for i=1:columns(lambda)
  stem(k,poisson(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor
hold off;
title("Probability Mass Function of Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=3","lambda=10","lambda=30","lambda=50");
```

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων Τηλεματικής - NETMODE

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80
e-mail: queuing@netmode.ntua.gr, URL: http://www.netmode.ntua.gr

30/3/2020

Συστήματα Αναμονής (Queuing Systems)

1η Ομάδα Ασκήσεων

Κατανομή Poisson

Α) Συνάρτηση μάζας πιθανότητας (Probability Mass Function) της κατανομής Poisson: Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας των κατανομών Poisson με παραμέτρους λ={3, 10, 50}. Οι κατανομές να σχεδιαστούν σε κοινό διάγραμμα και στον οριζόντιο άξονα να επιλεγούν τιμές από 0 μέχρι και 70. Πώς αλλάζει η μορφή τους, καθώς μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου λ;

Β) Μέση τιμή και διακύμανση κατανομής Poisson: Να επιλέξετε την κατανομή Poisson με παράμετρο λ=30. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της και τη διακύμανσή της. Τι παρατηρείτε για τις τιμές που υπολογίσατε;

Γ) Υπέρθεση κατανομών Poisson: Να επιλέξετε τις κατανομές Poisson με παραμέτρους λ=10 και λ=50. Να υπολογίσετε την κατανομή που προκύπτει από τη συνέλιξη των δύο αυτών κατανομών και, στη συνέχεια, να σχεδιάσετε τις τρεις αυτές κατανομές σε κοινό διάγραμμα. Τι είδους κατανομή προέκυψε; Τι παρατηρείτε για τη σχέση της κατανομής που υπολογίσατε με τις δύο επιμέρους κατανομές; Ποια είναι η απαραίτητη προϋπόθεση για να συμβαίνει αυτό;

Δ) Κατανομή Poisson ως το όριο μιας διωνυμικής κατανομής: Πώς μπορεί να ληφθεί μία κατανομή Poisson παραμέτρου λ ως το όριο μιας διωνυμικής (binomial) κατανομής παραμέτρων n και p; Να κατασκευάσετε, με αυτόν τον τρόπο, μία κατανομή Poisson παραμέτρου λ=30 σημεία/sec. Πιο συγκεκριμένα, να σχεδιάσετε, σε κοινό διάγραμμα, την εξέλιξη μιας διωνυμικής κατανομής, καθώς τείνει στην επιθυμητή κατανομή Poisson (τέσσερα διαγράμματα αρκούν για n = 30, 60, 90, 120).

Για την άσκηση αυτή, σας δίνεται έτοιμος ο κώδικας (αρχείο *demo1a.m*).

Εκθετική κατανομή

Α) Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF, Probability Density Function) της εκθετικής κατανομής: Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των εκθετικών κατανομών με μέσους όρους 1/λ={0.5,1,3}. Οι κατανομές να σχεδιαστούν σε κοινό διάγραμμα και στον οριζόντιο άξονα να επιλεγούν τιμές από 0 μέχρι 8

ΕΡΩΤΗΜΑ Β

Η μέση τιμή της Poisson υπολογίζεται από τον τύπο :

- $E(x) = \sum_{1}^{\infty} xP(x)$

Η διασπορά υπολογίζεται από τον τύπο:

- $Var(x) = E(x^2) - E(x)^2$

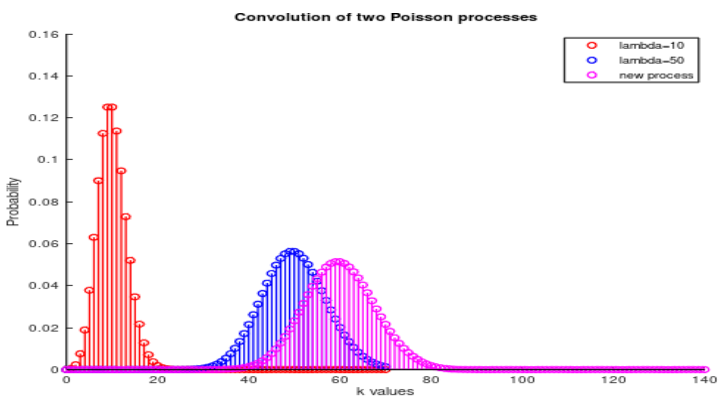
Το αποτέλεσμα επιβεβαιώνεται από τα παρακάτω:

```
mean value of Poisson with lambda 30 is
mean_value =  30.000
Variance of Poisson with lambda 30 is
variance =  30.000
>> |
```

```
index = find(lambda == 30);
chosen = poisson(index,:);
mean_value = 0;
for i=0:(columns(poisson(index,:))-1)
  mean_value = mean_value + i.*poisson(index,i+1);
endfor
display("mean value of Poisson with lambda 30 is");
display(mean_value);
second_moment = 0;
for i=0:(columns(poisson(index,:))-1)
  second_moment = second_moment + i.*i.*poisson(index,i+1);
endfor
variance = second_moment - mean_value.^2;
display("Variance of Poisson with lambda 30 is");
display(variance);
```

ΕΡΩΤΗΜΑ Γ

Από τη θεωρεία ξέρουμε ότι η συνέλιξη δύο κατανομών Poisson με παραμέτρους λ_1και λ_2 είναι και αυτή επίσης κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda_1 + \lambda_2$. Αυτό φαίνεται να επιβεβαιώνεται από την εικόνα του Octave, εφ' όσον $\lambda_1 = 10$ και $\lambda_2 = 50$ και φαίνεται ότι το νέο λ=60.




```
first = find(lambda==10);
second = find(lambda==50);
```

```
poisson_first = poisson(first,:);
poisson_second = poisson(second,:);
composed = conv(poisson_first,poisson_second);
new_k = 0:1:(2*70);
figure(2);
hold on;
stem(k,poisson_first(:),colors(1),"linewidth",1.2);
stem(k,poisson_second(:),colors(2),"linewidth",1.2);
stem(new_k,composed,"mo","linewidth",2);
hold off;
title("Convolution of two Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
legend("lambda=10","lambda=50","new process");
```

<u>ΕΡΩΤΗΜΑ Δ</u>

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το όριο μιας διωνυμικής κατανομής είναι μια κατανομή Poisson, ως εξής:

- $Poisson: P[X \leq k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} \; p^k (1-p)^k$. Βλέπουμε και την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος:

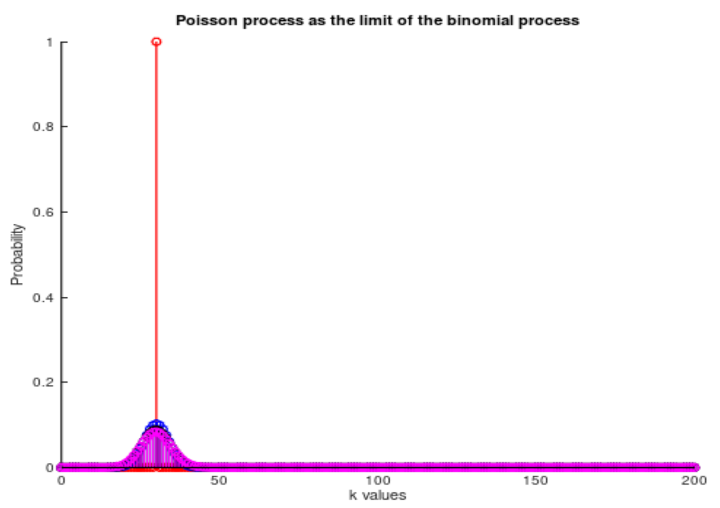
$$P[N(t) = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0,1,\cdots,n$$

$$P[N(t) = k] = \binom{n}{k} (\lambda \Delta t)^k (1 - \lambda \Delta t)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

Στο όριο $\Delta t \to 0,\ n \to \infty, t = n\Delta t$ έχουμε $\frac{n!}{(n-k)!} \to n^k$, $\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \to e^{-\lambda t}$ και

$$P[N(t) = k] = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \to \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Κοιτώντας το σχήμα, βλέπουμε ότι αν n=30 τότε το Var<<1, αλλά όσο μεγαλώνει το n, το Variance αρχίζει να ισορροπεί γύρω από την μέση τιμή που παραμένει 30.000 . Έτσι για αρκετά μεγάλο n=300, που αντέχει το σύστημά μας, η διωνυμική κατανομή προσεγγίζει την κατανομή Poisson.



```
k = 0:1:200;
lambda = 30;
i = 1:1:5;
n = lambda.*i;
p = lambda./n;
figure(3);
title("Poisson process as the limit of the binomial process");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
hold on;
for i=1:4
  binomial = binopdf(k,n(i),p(i));
  stem(k,binomial,colors(i),'linewidth',1.2);
endfor
hold off;
```

2η Άσκηση(Εκθετική κατανομή)

Για την εκθετική κατανομή που είναι μια συνεχής κατανομή, γνωρίζουμε ότι:

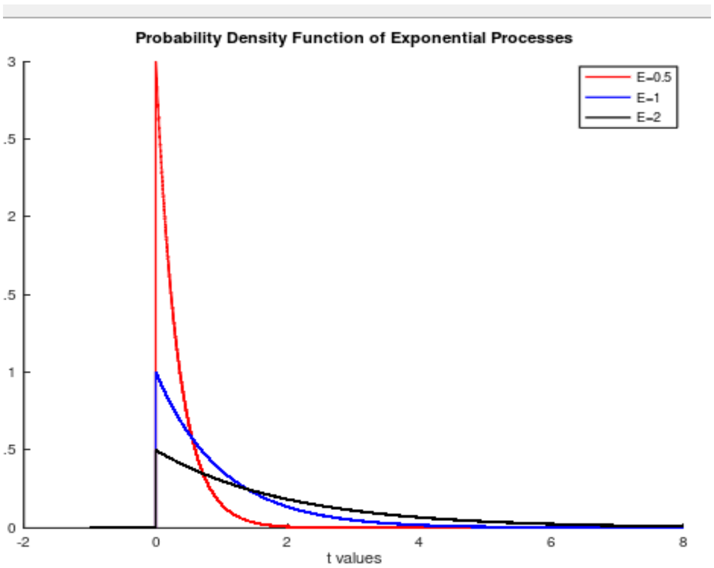
- $E(x) = \frac{1}{\lambda}$
- $Var(x) = \frac{1}{\lambda^2}$

ΕΡΩΤΗΜΑ Α(pdf of Exponential processes)

Ξέρουμε από τη θεωρία ότι:

- $f_x(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0 \; \kappa\alpha\iota \; 0 \; \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}$

Σε αυτό το ερώτημα βλέπουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που φαίνεται να μειώνεται εκθετικά με τη πάροδο του χρόνου. Το εύρος του είναι (-1,8).Παρατηρούμε ότι : $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ στο παρακάτω γράφημα:



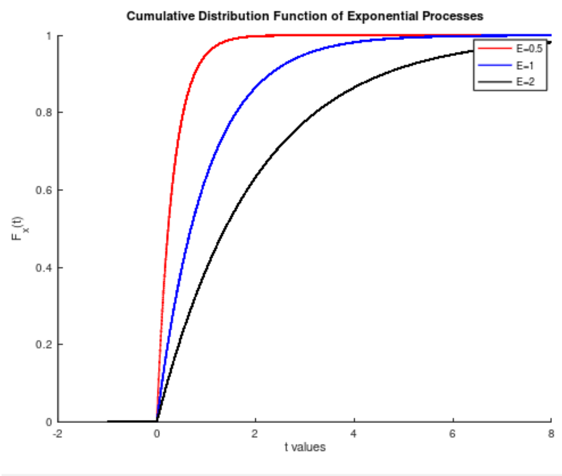
```
clc;
clear all;
close all;
k = 0:0.001:8;
measure_value=[0.5,1,3];
k_2=1./3;
lambda=[k_2,1,2];
for i=1: columns(measure_value)
  exponential(i,:)=exppdf(k,lambda(i));
endfor
colors="rbkm";
figure(1);
hold on;
for i=1:columns(measure_value)
  plot(k,exponential(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor
hold off;
title("Probability Density Function of Exponential Processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("E=0.5","E=1","E=2");
```

ΕΡΩΤΗΜΑ Β(cdf of exponential processes)

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:

- $F_x(t) = P[X \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}\ για\ t \geq 0\ και\ 0\ αλλού$

Εδώ σχεδιάσαμε τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της εκθετικής κατανομής που φαίνεται να έχει τη κατάλληλη γραφική παράσταση . Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, και όσο μεγαλύτερο είναι το λ η εκθετική κατανομή τείνει στο 1 με ταχύτερο ρυθμό.




```
for i=1:columns(measure_value)
  exponential(i,:)=expcdf(k,lambda(i));
endfor
colors="rbkm";
figure(2);
hold on;
for i=1:columns(measure_value)
  plot(k,exponential(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor
hold off;
title("Cumulative Distribution Function of Exponential Processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("E=0.5","E=1","E=2");
```

<u>ΕΡΩΤΗΜΑ Γ(memory loss)</u>

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι:

- $P[X > t + s | X > s] = \frac{P[(X>t+s)\cap(X>s)]}{P[X>s]} = \frac{P[X>t+s]}{P[X>s]} = e^{-\lambda t} = P[X > t] = 1 - F_x(t)$

Έτσι η $P[X > 5000 | X > 2000] = P[X > 3000 + 2000 | X > 2000] = P[X > 3000] = 1 - F_x(3000) \cong 0$.

Αυτός είναι ο ορισμός του memory loss, δηλαδή ότι η εκθετική κατανομή παίρνει τιμές για τη τωρινή χρονική στιγμή και δεν επηρεάζεται από παρελθούσες τιμές της. Γι' αυτό και είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα. Οπότε τώρα υπολογίζουμε την :

$$P[X > 50000|X > 20000] = \frac{P[X > 50000]}{P[X > 20000]} = \frac{1 - F_x(50000)}{1 - F_x(20000)}$$

και $P[X > 30000] = 1 - F_x(30000)$, αφού `t = 0:0.00001:8;`

άρα διαιρούμε το 50,000 με το 10,000.

Φαίνεται ότι οι υπολογισμοί επιβεβαίωσαν την ιδιότητα του memory loss

```
P[X>50000|X>20000] is
result1 =  0.88692
P[X>30000] is
result2 =  0.88692
>> |
```

```
t = 0:0.00001:8;
#θεωρήθηκε δεδομένο ότι 1/λ είναι η τιμή που θα βάλουμε στη σ.κ.π.
lambda=2.5;
A=expcdf(0.5,lambda);
C=expcdf(0.3,lambda);
B=expcdf(0.2,lambda);
result1 =(1-A)./(1-B);
result2=1.0-C;
display("P[X>50000|X>20000] is");
display(result1);
display("P[X>30000] is");
display(result2);
```

3η Άσκηση(Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson)

Γνωρίζουμε ότι για τη διαδικασία Poisson ισχύουν:

- $E[N(T)] = \lambda T$
- $Var[N(T)] = \lambda T$
- $P[N(T) = k] = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$

(Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την εντολή k = 0:0.00001:8. Έτσι, μπορείτε να προσεγγίσετε τη συνεχή εκθετική κατανομή ως μία διακριτή με πολύ μικρό σφάλμα).

Β) Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της εκθετικής κατανομής: Να σχεδιάσετε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (Cumulative Distribution Function) των εκθετικών κατανομών του προηγούμενου ερωτήματος σε κοινό διάγραμμα.

Γ) Απώλεια μνήμης της εκθετικής κατανομής: Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της εκθετικής κατανομής για $1/\lambda = 2.5$ sec, να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(X>30000)$ και $Pr(X>50000|X>20000)$. Τι παρατηρείτε για τις δύο πιθανότητες; Γιατί συμβαίνει αυτό; Πώς ερμηνεύεται η παρατήρησή σας; (Επεξήγηση: οι τιμές 30000, 50000 και 20000 δηλώνουν τη θέση του σημείου στο διάνυσμα k = 0:0.00001:8 που χρησιμοποιήθηκε στο προηγούμενο ερώτημα).

<u>Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson</u>

Α) Διαδικασία καταμέτρησης Poisson $N(t)$: Τι κατανομή γνωρίζετε ότι ακολουθούν οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson; Να δημιουργήσετε με την εντολή exprnd( ) 100 διαδοχικά τυχαία γεγονότα και να σχεδιάσετε (συνάρτηση stairs) μία διαδικασία καταμέτρησης Poisson. Θεωρήστε $\lambda = 5$ γεγονότα/sec.

Β) Μέσος αριθμός γεγονότων: Τι κατανομή γνωρίζετε ότι ακολουθεί ο αριθμός γεγονότων σε ένα χρονικό παράθυρο $\Delta T = t1 - t2$; Να βρείτε το μέσο αριθμό γεγονότων στη μονάδα του χρόνου. Να επαναλάβετε για (i) 200, (ii) 300, (iii) 500, (iv) 1000, (v) 10000 διαδοχικά τυχαία γεγονότα. Τι παρατηρείτε;

Για απορίες να στέλνετε στο queuing@netmode.ntua.gr

ΕΡΩΤΗΜΑ Α

Οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών συμβάντων Poisson ακολουθούν εκθετική κατανομή.

Απόδειξη

$Αν\ T_1 ο\ χρόνος\ μέχρι\ την\ εμφάνιση\ του\ 1^{ου} συμβάντος, αυτή\ ακουλουθεί\ εκθετική\ κατανομή$

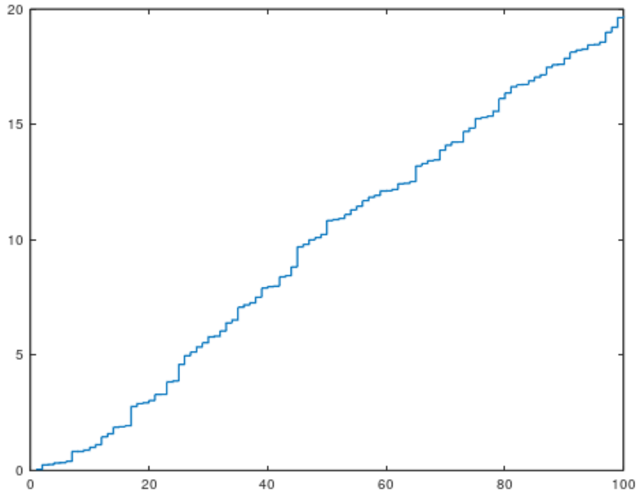
$με\ παράμετρο\ λ. Έστω\ τώρα\ T_i = S_i - S_{i-1}, i = 2,3 \ldots$

$Οι\ ενδιάμεσοι\ χρόνοι\ μεταξύ\ (i-1, i) συμβάντων.$

$Ωστόσο\ η\ T_2\ ακολουθει\ την\ ίδια\ κατανομή\ με\ την\ \ T_1 και\ είναι\ ανεξάρτητες\ μεταξύ\ τους. Οπότε$

$κάθε\ T_i \sim \exp(\lambda).$

Με τα δεδομένα της άσκησης έχουμε :




```
LAMBDA=0.2;

K=exprnd(LAMBDA,1,100);

for i=1:columns(K)

  cntt(i)=0;

endfor

cnt = 0;

for i=1:columns(K)

   cnt+=K(i);

   cntt(i)=cnt;

endfor

stairs(cntt);
```

ΕΡΩΤΗΜΑ Β

Ο αριθμός των συμβάντων, σε ένα χρονικό παράθυρο Δt, ακολουθούν τη διακριτή κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda(T_{i-1}+T_i)$, εφόσον ο απαριθμητής N(t) είναι ανέλιξης Poisson, όπου: $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$, και έχει την ιδιότητα των ισόνομων προσαυξήσεων. Ο μέσος αριθμός γεγονότων είναι:

$$\mathrm{E[N(t)]} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}\lambda t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t}\lambda t e^{\lambda t} = \lambda t\,.$$

Έτσι ο μέσος αριθμός γεγονότων ανά μονάδα χρόνου είναι : $\frac{\mathrm{E[N(t)]}}{t} = \lambda$. Επίσης βλέπουμε ότι όσο μεγαλώνει το πλήθος των δειγμάτων τόσο πλησιάζει το λ.

```
   5.2868    4.7904    4.8694    5.0970    4.9610

>>
```

```
clc;
clear all;
close all;
LAMBDA=0.2;
f=[200,300,500,1000,10000];
K1=exprnd(LAMBDA,1,f(1));
K2=exprnd(LAMBDA,1,f(2));
K3=exprnd(LAMBDA,1,f(3));
K4=exprnd(LAMBDA,1,f(4));
K5=exprnd(LAMBDA,1,f(5));
for j=1:5
mean(j)=0;
avg(j)=0;
endfor
mv=0;
for i=1:f(1)
 mv+= K1(i);
 mean(1) = mv;
endfor
avg(1)=f(1)/mean(1);
mv=0;
for i=1:f(2)
  mv+=K2(i);
```

```
  mean(2) = mv;
endfor
avg(2)=f(2)/mean(2);
mv=0;
for i=1:f(3)
  mv+=K3(i);
  mean(3) = mv;
endfor
avg(3)=f(3)/mean(3);
mv=0;
for i=1:f(4)
  mv+=K4(i);
  mean(4) = mv;
endfor
avg(4)=f(4)/mean(4);
mv=0;
for i=1:f(5)
  mv+=K5(i);
  mean(5) = mv;
endfor
avg(5)=f(5)/mean(5);
display(avg);
```