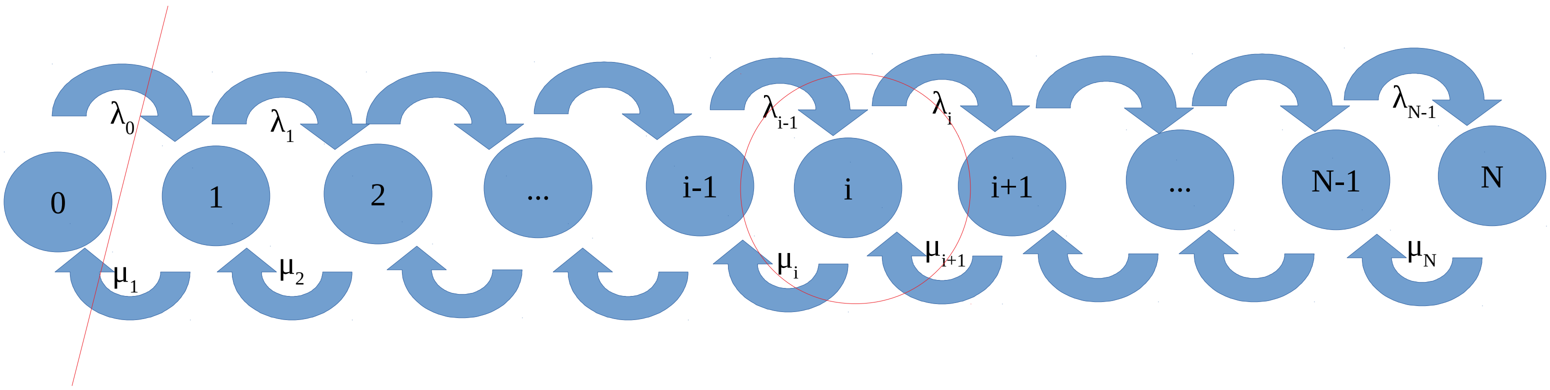
Συστήματα Αναμονής (Queuing Systems)
Δεύτερη εργαστηριακή άσκηση

Όνομα: Αλεξόπουλος Ιωάννης
AM: 0317001

Θεωρητική μελέτη της ουράς M/M/1

A)
Η απαραίτητη συνθήκη ώστε η ουρά M/M/1 να βρίσκεται σε οριακή ισορροπία, δηλαδή να είναι εργοδική είναι: ρ = λ / μ < 1 Erlang



Εφόσον στην συγκεκριμένη περίπτωση οι αφίξεις ακολουθούν κατανομή Poisson με παράμετρο λ πελάτες/sec και οι εξυπηρετήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ πελάτες/sec ισχύει: $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_i = \ldots = \lambda$ και $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_i = \ldots = \mu$ για i=0,1,2,…,

Με χρήση των τοπικών και global εξισώσεων ισορροπίας:

$\lambda P_0 = \mu P_1$

$\lambda P_1 = \mu P_2$

……………

$\lambda P_{i-1} = \mu P_i$, i=1,2,…

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

$$(\lambda_k + \mu_k) P_k = \lambda_{k-1} P_{k-1} + \mu_{k+1} P_{k+1}, k=1,\ldots,N$$

καθώς και της σχέσης κανονικοποίησης εργοδικών πιθανοτήτων $P_0 + \ldots + P_N = 1$ καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \, ή \, P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 = \rho P_0$$

$$(\lambda + \mu) P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \, ή \, P_2 = \rho^2 P_0 \, και \, P_k = \rho^k P_0, k>0$$

$$P_0\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1 \Rightarrow P_0 = (1-\rho), P_k = (1-\rho)\rho^k, k>0 \, και \, P(n(t)>0) = 1 - P_0 = \rho$$

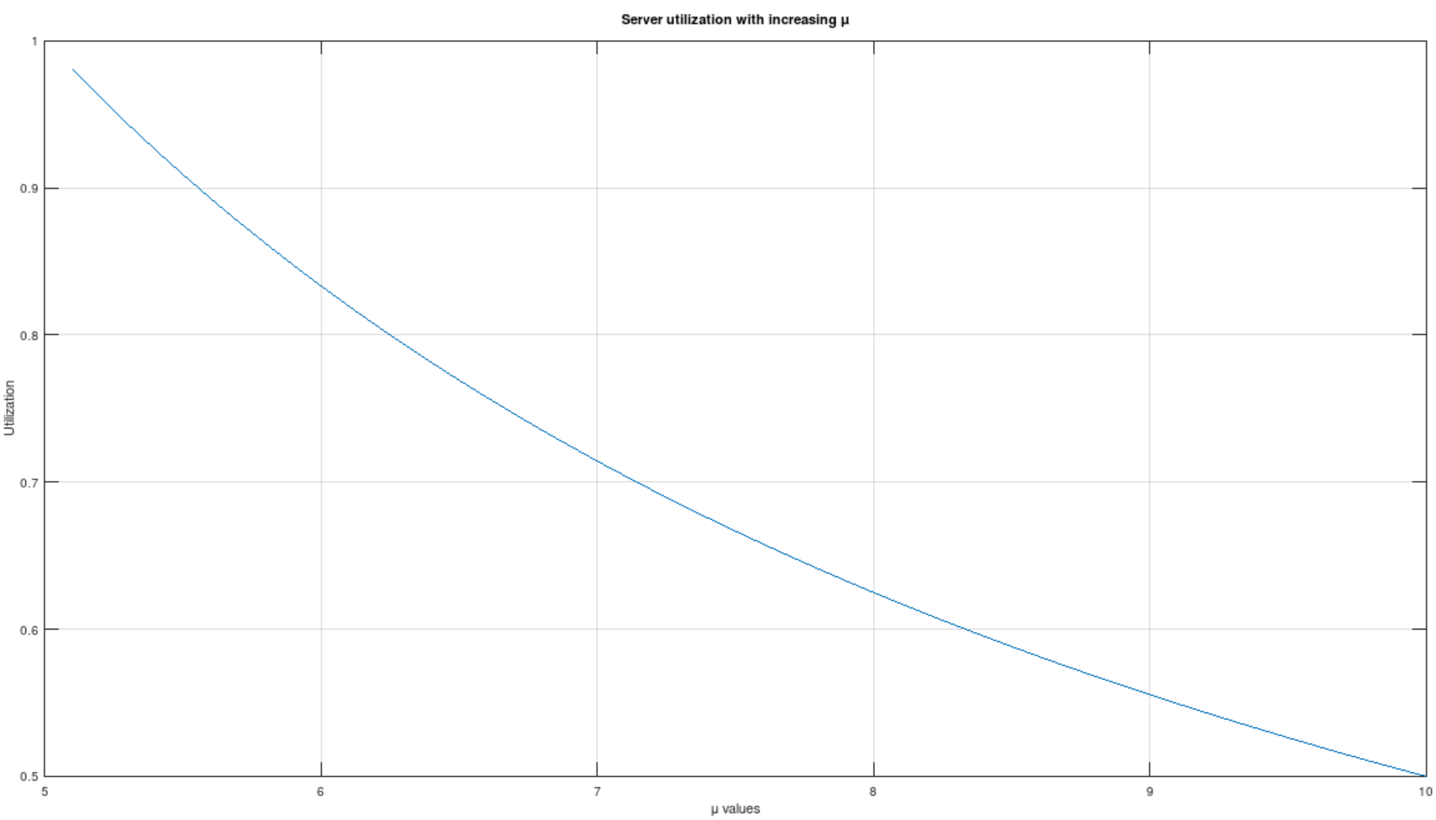
Β)
Με χρήση του του Little προκύπτει ότι ο μέσος χρόνος καθυστέρησης ενός πελάτη στο σύστημα όταν αυτό βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας προκύπτει:

$$E(T)=\frac{E[n(t)]}{\gamma}=\frac{E[n(t)]}{\lambda}=\frac{1/\mu}{1-\rho}$$

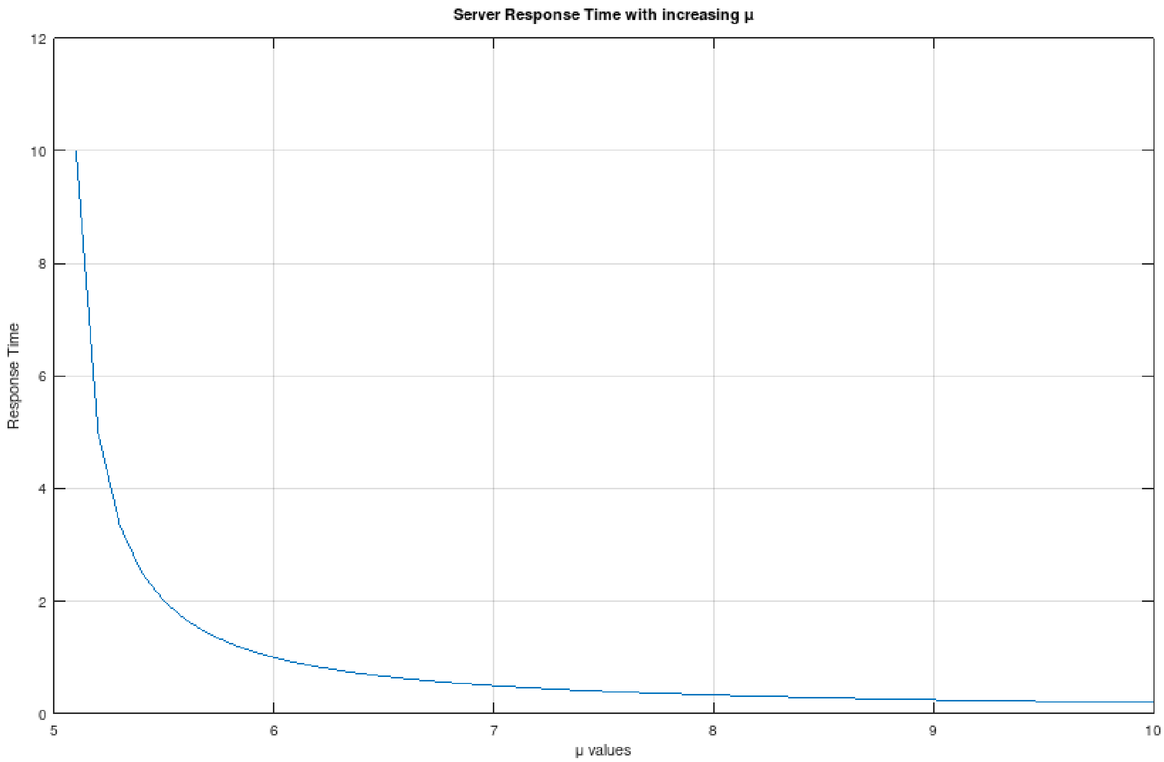
Γ)
Για k = 57 έχουμε $P_{57}=(1-\rho)\rho^{57}$ δηλαδή υπάρχει θετική πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση με 57 πελάτες. Παρατηρούμε ότι όσο ο λόγος ρ=λ/μ αυξάνεται τόσο αυξάνεται και η πιθανότητα αυτή.

Δ)
Τα παραπάνω αποτελέσματα αναφέρονται στη μόνιμη εργοδική κατάσταση του συστήματος t → ∞ αφού παρέλθουν τα μεταβατικά φαινόμενα και ξεχαστεί η αρχική συνθήκη. Συνεπώς εάν στο σύστημα υπήρχαν αρχικά 5 πελάτες δεν θα παρατηρούσαμε καμία αλλαγή.

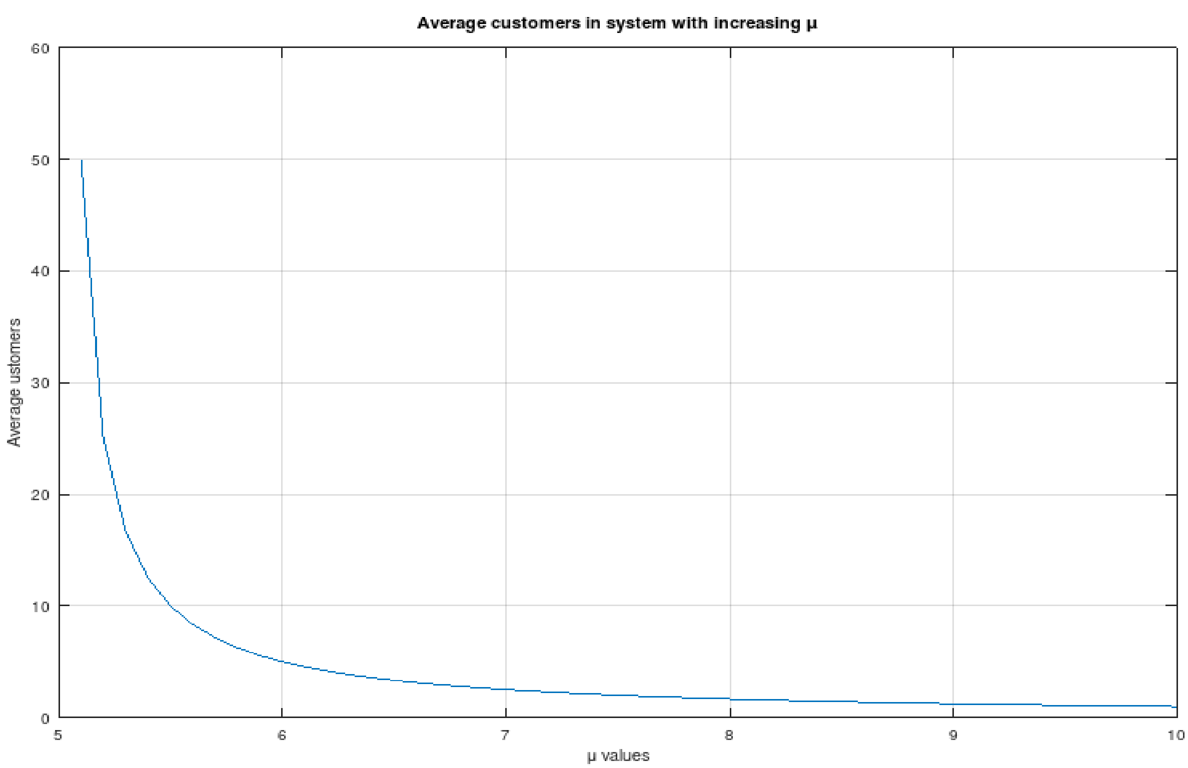
<u>Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave</u>
Όπως αναλύθηκε στην προηγούμενη άσκηση, για να είναι εργοδικό το σύστημα πρέπει να ισχύει ρ = λ/μ < 1 → μ>λ
Διαλέγουμε 50 δείγματα για το μ από 5.1 έως 10 πελάτες/min
i) Το διάγραμμα του βαθμού χρησιμοποίησης ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης:



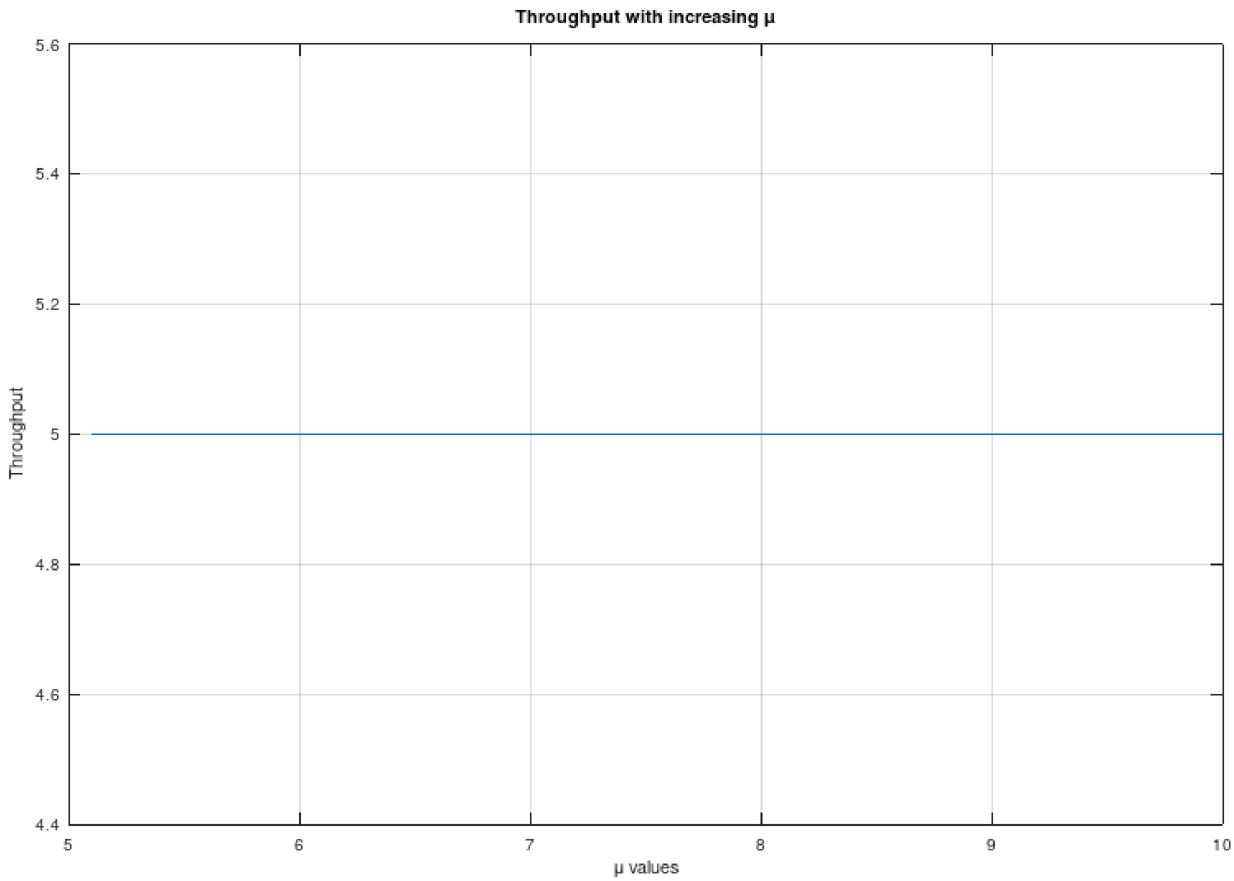
ii) Το διάγραμμα του μέσου χρόνου καθυστέρησης (Response Time) ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης:



iii)Το διάγραμμα του μέσου αριθμού πελατών στο σύστημα ως προν τον ρυθμό εξυπηρέτησης μ με χρήση του τύπου Little.



iv) Το διάγραμμα της ρυθμαπόδοσης(throughput) πελατών ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης:



γ) Παρατηρούμε πως ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης σχεδόν σταθεροποιείται για τιμές του ρυθμού εξυπηρέτησης από 8 έως 10 πελάτες/min. Λόγω της αύξησης του κόστους ανάλογα με τον ρυθμό εξυπηρέτησης θα επιλέγαμε τον ελάχιστο ρυθμό ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις του συστήματος μας, δηλαδή στην συγκεκριμένη περίπτωση κάποια τιμή κοντά στο 8, εφόσον οι βελτιώσεις με περαιτέρω αύξηση είναι μη σημαντικές.

δ) Γνωρίζουμε ότι γ = λ(1-P(blocking)) όπου P(blocking) είναι η πιθανότητα να χαθεί ένας πελάτης επειδή βρήκε το σύστημα πλήρες. Σε ένα σύστημα M/M/1 η ουρά έχει άπειρη περιεκτικότητα και συνεπώς η πιθανότητα αυτή είναι μηδενική και το throughput ταυτίζεται με τον ρυθμό αφίξεων λ.

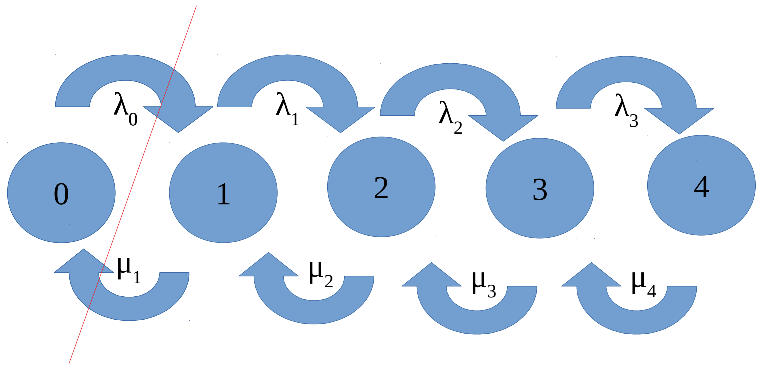
<u>Σύγκριση συστημάτων με δύο εξηπηρετητές</u>

Μέσω του octave εξάγουμε τα αποτελέσματα: $R_1 = 0.13333$ min και $R_2 = 0.20000$ min όπου ο πρώτος χρόνος αναφέρεται σε μέσο χρόνο καθυστέρησης ενός πελάτη σε σύστημα M/M/2 με ρυθμό άφιξης $\lambda_1 = 10$ πελάτες/min και ο δεύτερος σε μέσο χρόνο καθυστέρησης ενός πελάτη σε σύστημα M/M/1 με ρυθμό άφιξης $\lambda_2 = 5$ πελάτες/min. Γνωρίζουμε ότι η διάσπαση μιας ανέλιξης Poisson μέσω ανεξάρτητων τυχαίων επαναλήψεων Bernoulli με πιθανότητες p,q = 1 - p δημιουργεί ανεξάρτητες ανελίξεις Poisson με μέσους ρυθμούς λ1 = pλ και λ2 = qλ

Έτσι, στην συγκεκριμένη περίπτωση με p = 0.5 έχουμε την δημιουργία δύο ανεξάρτητων συστημάτων M/M/1 με ρυθμό λ_2 = 5 πελάτες/min. Με βάση θεώρημα της συνολικής μέσης τιμής θα έχουμε ότι ο μέσος χρόνος καθυστέρησης ενός πελάτη στη δεύτερη περίπτωση θα είναι ίσος με 0.5 * R_2 + 0.5 * R_2 = 0.20000 min. Συνεπώς, θα επιλέγαμε το σύστημα M/M/2.

<u>Διαδικάσια γεννήσεων θανάτων (birth-death process): εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K</u>

α)



Έχουμε $\lambda_i = \lambda/(i+1)$ $\gamma\iota\alpha\ i=0,1,2,3$: $\lambda_0 = \lambda$ $\lambda_1 = \lambda/2$ $\lambda_2 = \lambda/3$ $\lambda_3 = \lambda/4$ και $\mu_i = \mu$ $\gamma\iota\alpha\ i=1,2,3,4$

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

$$\lambda_{k-1} P_{k-1} = \mu_k P_k \quad k=1,2,\ldots 4$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \qquad P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu} P_1 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0 \qquad P_3 = \frac{\lambda_2}{\mu} P_2 = \frac{\lambda^3}{6\mu^3} P_0 \qquad P_4 = \frac{\lambda_3}{\mu} P_3 = \frac{\lambda^4}{24\mu^4} P_0$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0 \quad k=1,2,\ldots 4$$

$\sum \frac{\rho^k}{k!} P_0 = 1 \quad k=0,1,2,3,4$ όπου με υπολογισμό του αθροίσματος έχουμε τις εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος:

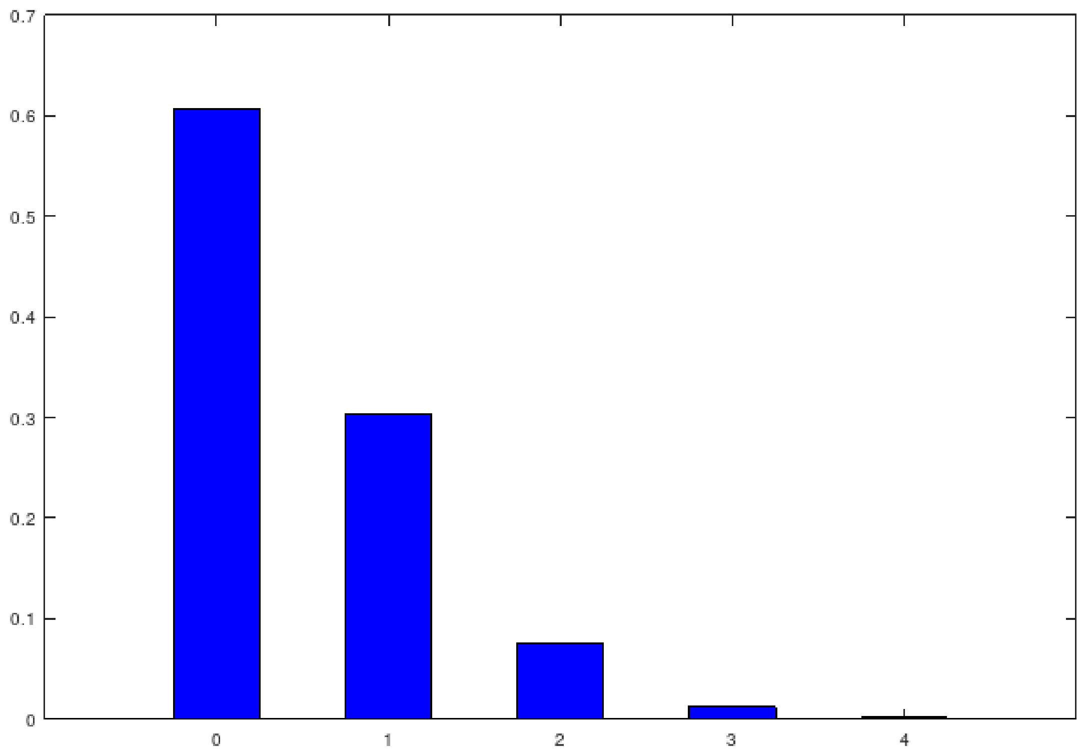
$$1.6484\, P_0 = 1 \rightarrow P_0 = 0.60664 \qquad P_1 = 0.30332 \qquad P_2 = 0.075830 \qquad P_3 = 0.012638 \qquad P_4 = 0.0015798$$

και για την πιθανότητα απώλειας πελάτη έχουμε $P_{loss} = P_4 \lambda_4 = 0.0015798$

B)
i)Ο πίνακας μεταβάσεων δίνεται:

-5	5	0	0	0
10	-12.5	2.5	0	0
0	10	-11.667	1.6667	0
0	0	10	-11.25	1.25
0	0	0	10	-10

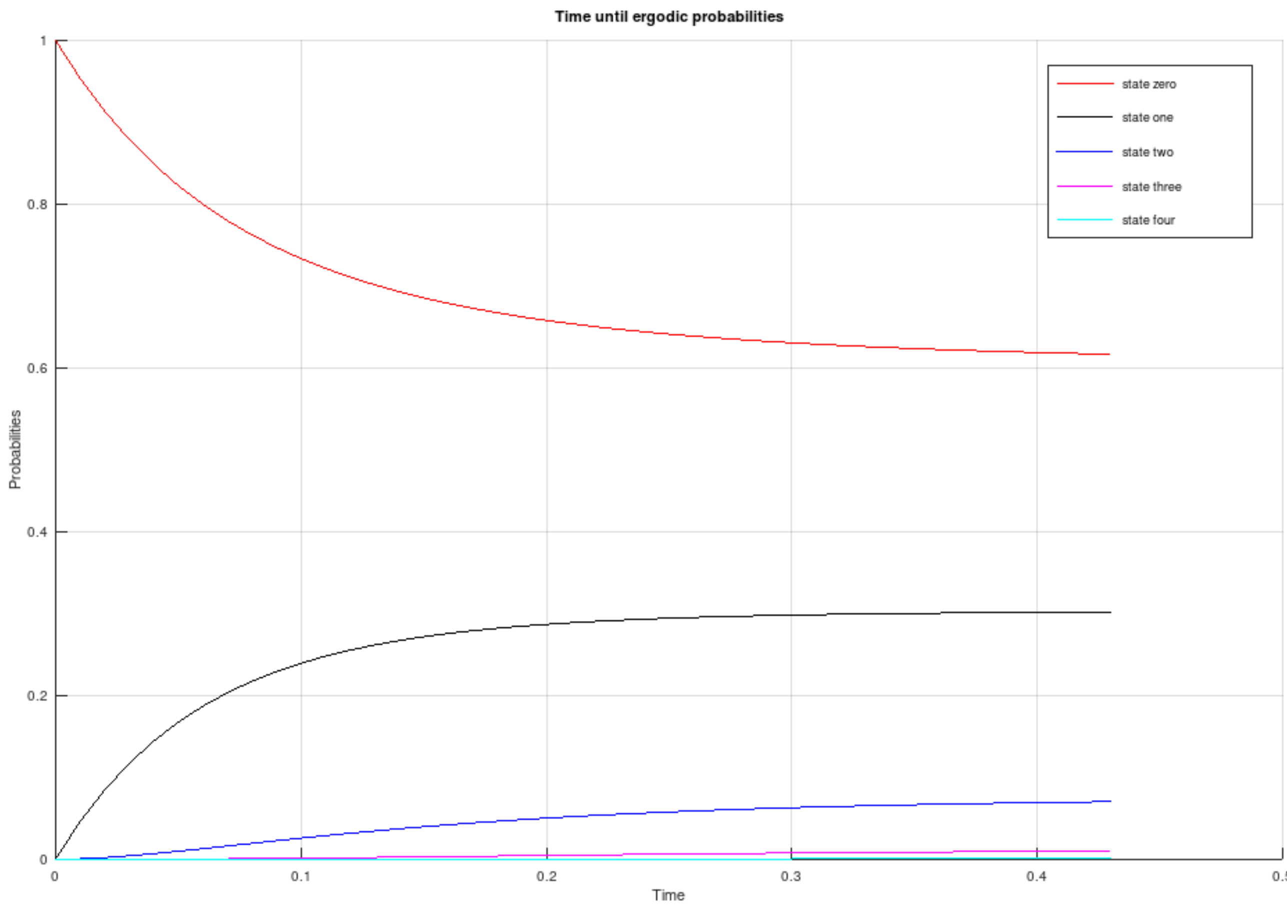
ii)
Οι εργοδικές πιθανότητες που υπολογίζονται μέσω της εντολής ctmc ταυτίζονται με τις πιθανότητες που υπολογίστηκαν στο ερώτημα α)



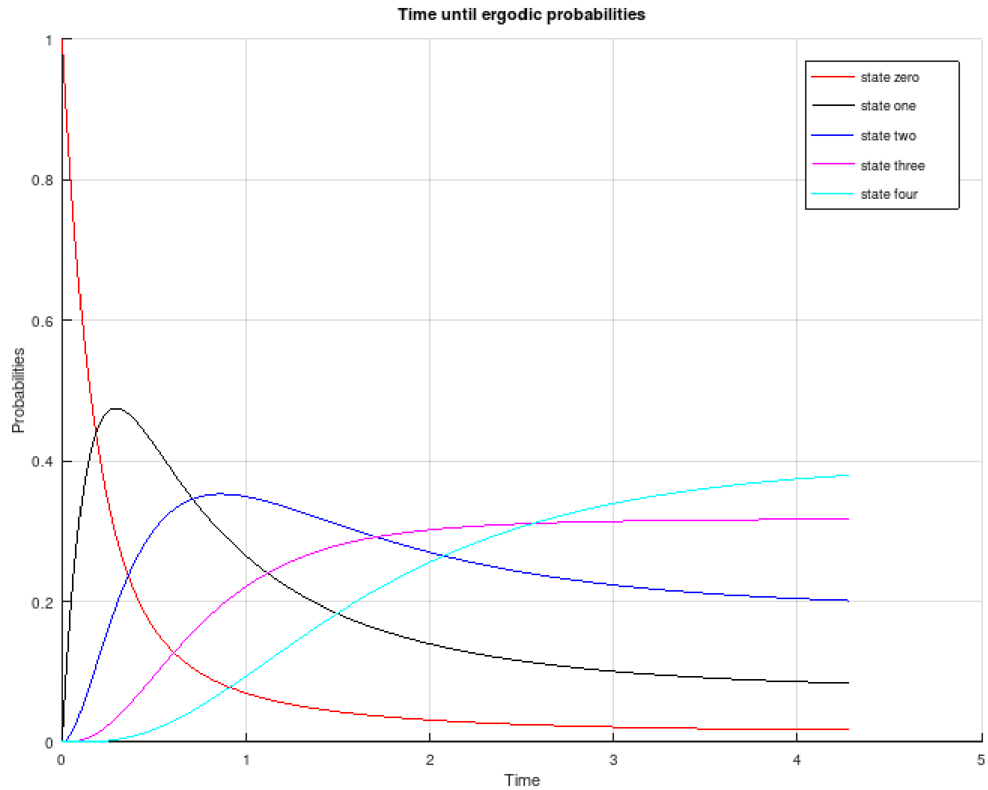
iii) Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα, όταν εκείνο βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας υπολογίζεται σύμφωνα με τον ορισμό: $\sum k P_k = 0.49921 \quad k=0,1,2,3,4$

iv) $P_{blocking} = P_4 = 0.0015798$

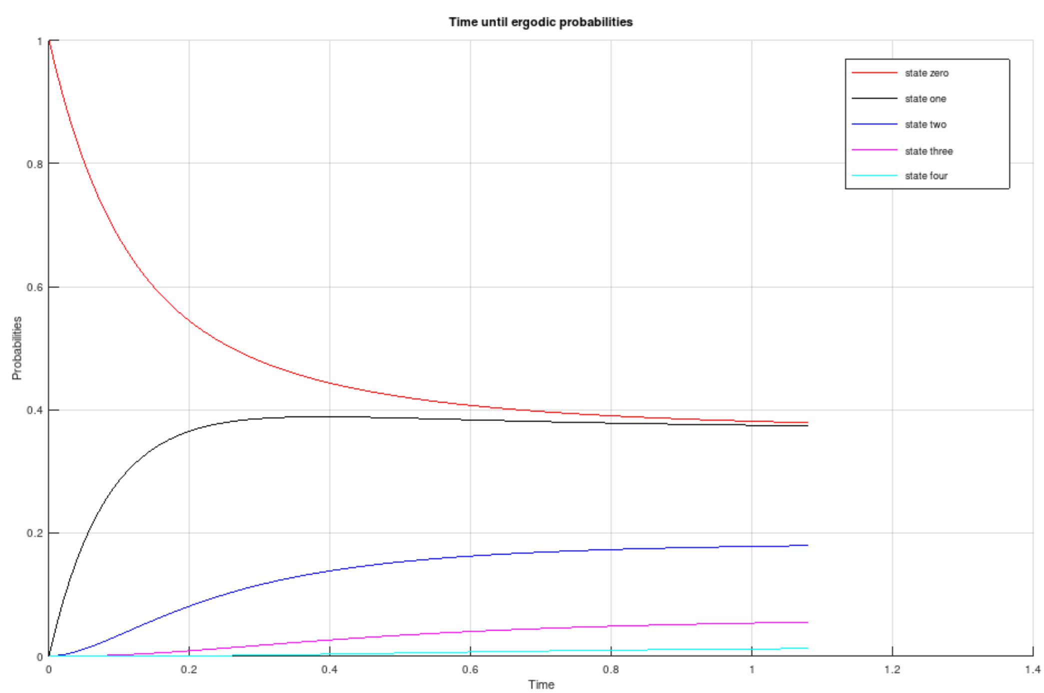
v)


Time until ergodic probabilities
Probabilities
Time
state zero
state one
state two
state three
state four
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

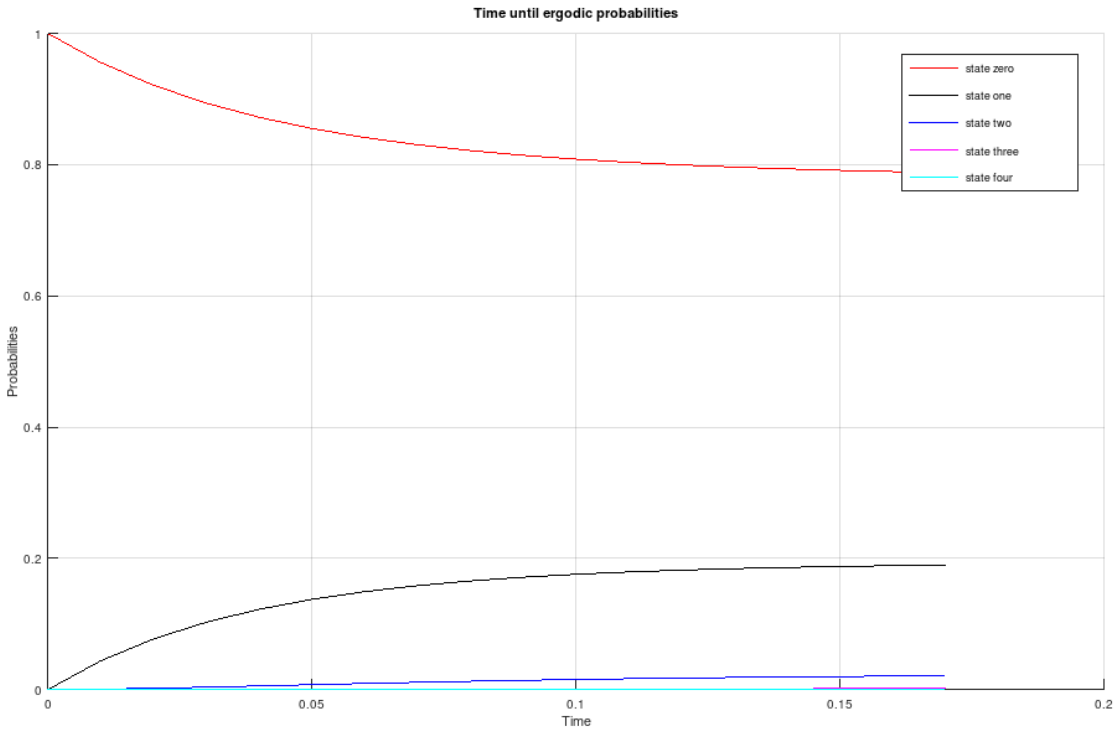
vi)i)λ=5,μ=1



ιι)λ-5,μ=5



iii) λ=5, μ=20



Παρατηρούμε ότι όσο μικρότερος είναι ο λόγος λ/μ τόσο οι πιθανότητες συσσωρεύονται προς την μηδενική κατάσταση (αυξάνονται οι πιθανότητες καταστάσεων “λίγων” πελατών”) ενώ ο χρόνος μεχρι οι πιθανότητες να έχουν απόσταση μικρότερη του 1% από τις εργοδικές πιθανότητες μειώνεται με αποτέλεσμα η ταχύτητα σύγκλισης να αυξάνεται.