ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ
(Queuing Systems)

Συστήματα Γεννήσεων – Θανάτων:

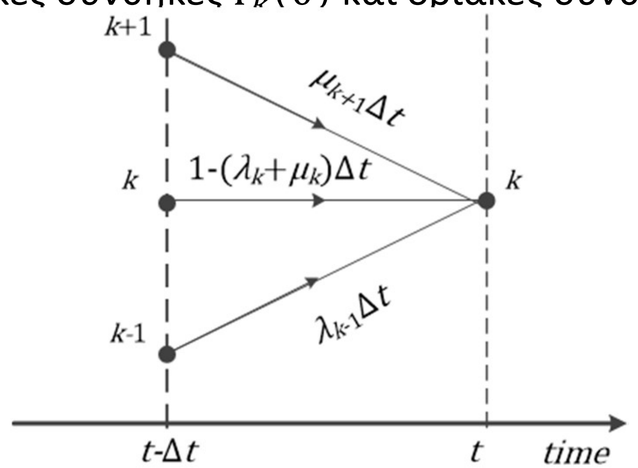
- Σφαιρικές & Λεπτομερείς Εξισώσεις Ισορροπίας
- Ουρές Markov M/M/1, M/M/1/N

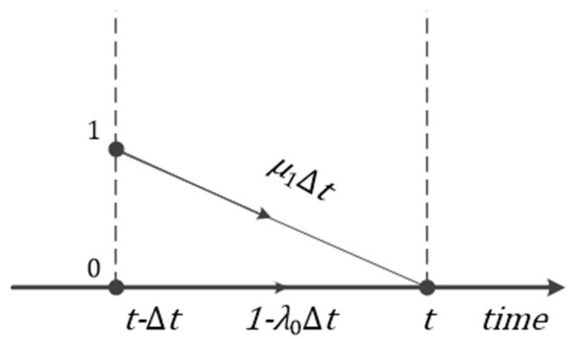
Εβδομάδα 23 Μαρτίου, 2020

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (1/3)

Birth – Death Processes *(επανάληψη)*

- Παραδοχές:
  - Ανεξαρτησία γεννήσεων-θανάτων
  - Εξέλιξη της κατάστασης - πληθυσμού $n(t)$ βασισμένη μόνο στο παρόν (Ιδιότητα Markov)
- Σύστημα Διαφορικών εξισώσεων Διαφορών
  - Κατάσταση ισορροπίας (**steady state**)
  - Την χρονική στιγμή t το σύστημα καταλήγει σε πληθυσμό $n(t) = k$
  - Μπορεί να έχουν προηγηθεί οι ακόλουθες μεταβάσεις από την χρονική στιγμή $t - \Delta t, \Delta t \to 0$:
    - Μία άφιξη στο διάστημα Δt, με πιθανότητα $\lambda_{k-1}\Delta t$ αν $k > 0$
    - Μια αναχώρηση, με πιθανότητα $\mu_{k+1}\Delta t$ αν υπάρχει η $k+1$ (σε περίπτωση περιορισμού μέγιστου πληθυσμού K μπορούμε να θεωρήσουμε $\mu_{k+1} = 0$)
    - Τίποτα από τα δύο, με πιθανότητα $1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t$ αν $k > 0$ ή $1 - \lambda_0 \Delta t$ αν $k = 0$
- Οι εξισώσεις μετάβασης (***Chapman - Kolmogorov***) προκύπτουν από τον τύπο συνολικής πιθανότητας:
  - $\mathrm{P}_k(t) = \lambda_{k-1}\Delta t \mathrm{P}_{k-1}(t-\Delta t) + \mu_{k+1}\Delta t \mathrm{P}_{k+1}(t-\Delta t) + [1-(\lambda_k+\mu_k)\Delta \mathrm{t}]\mathrm{P}_k(\mathrm{t}-\Delta \mathrm{t})$
  - $\mathrm{P}_{\mathbf{0}}(t) = \mu_1 \Delta t \, \mathrm{P}_1(t-\Delta t) + (1 - \lambda_0 \Delta t)\, \mathrm{P}_{\mathbf{0}}(t-\Delta t)$
  - με αρχικές συνθήκες $\mathrm{P}_k(0)$ και οριακές συνθήκες $\sum_k \mathrm{P}_k(t) = 1, \forall t$





ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (2/3)

Birth – Death Processes *(επανάληψη)*

Στο όριο, $\Delta t \approx dt \to 0$, $\frac{\mathrm{P}_k(t)-P_k(t-\Delta t)}{\Delta t} \to \frac{d\mathrm{P}_k(t)}{dt}$ και προκύπτει το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων διαφορών:

- $\frac{d\mathrm{P}_k(t)}{dt} = \lambda_{k-1}\mathrm{P}_{k-1}(t) + \mu_{k+1}\mathrm{P}_{k+1}(t) - (\lambda_k + \mu_k)\mathrm{P}_k(t),\ k > 0$

- $\frac{d\mathrm{P}_0(t)}{dt} = \mu_1\mathrm{P}_1(t) - \lambda_0\mathrm{P}_0(t)$

- με αρχικές συνθήκες $\mathrm{P}_k(0)$ και οριακές συνθήκες $\sum_k \mathrm{P}_k(t) = 1, \forall t$

Όταν $t \to \infty$ και υπό ορισμένες συνθήκες το σύστημα συγκλίνει σε σταθερή κατάσταση. Το μεταβατικό φαινόμενο παρέρχεται για απείρως επισκέψιμες καταστάσεις $n(t) = k$ (***επαναληπτικές, positive recurrent***), ξεχνιέται η αρχική συνθήκη $\mathrm{P}_k(0)$ και οι $\mathrm{P}_k(t)$ συγκλίνουν στις οριακές πιθανότητες $P_k > 0$:

Για $t \to \infty$, $\frac{d\mathrm{P}_k(t)}{dt} = 0$, $\mathrm{P}_k(t) \to P_k > 0$: ***Εργοδικές Οριακές Πιθανότητες***

Σημείωση: Ισχύει η ***εργοδική*** ιδιότητα και οι οριακές πιθανότητες μπορούν να προσεγγισθούν σαν

$P_k = \lim_{T\to\infty}\{\frac{T_k}{T}\}$ όπου T_k είναι το σχετικό συνολικό χρονικό διάστημα T_k όταν $n(t) = k$ σε μεγάλο χρονικό

ορίζοντα T ***μιας*** καταγραφής της ανέλιξης $n(t)$ σε ***ισορροπία***.

Οι εργοδικές οριακές πιθανότητες προκύπτουν από τις γραμμικά ανεξάρτητες ***Εξισώσεις Ισορροπίας***:

- $(\lambda_k + \mu_k)P_k = \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}\,,\ k > 1$
- $\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$
- $P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots = 1$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (3/3)

Birth – Death Processes *(επανάληψη)*

Εφαρμογή σε Απλή Ουρά M/M/1

- Αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec: $\lambda_k = \lambda, \;\; k = 0,1,2,3,\cdots$
- Χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί με μέση τιμή $\mathrm{E}(s) = \frac{1}{\mu}$ sec: $\mu_k = \mu, \; k = 1,2,3,\cdots$
- $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ Erlang (συνθήκη για οριακή ισορροπία – εργοδικότητα)
- Η εξέλιξη των πιθανοτήτων $\mathrm{P}[n(t) = k] = \mathrm{P}_k(t)$ προκύπτει από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:
  - $\frac{d\mathrm{P}_k(t)}{dt} = \lambda \mathrm{P}_{k-1}(t) + \mu \mathrm{P}_{k+1}(t) - (\lambda + \mu)\mathrm{P}_k(t), \; k > 0$
  - $\frac{d\mathrm{P}_0(t)}{dt} = \mu \mathrm{P}_1(t) - \lambda \mathrm{P}_0(t)$
  - με αρχικές συνθήκες $\mathrm{P}_k(0)$ και οριακές συνθήκες $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}_k(t) = 1 \;\; \forall t \geq 0$
- Στο όριο $t \to \infty$, $\frac{d\mathrm{P}_k(t)}{dt} = 0$, $\mathrm{P}_k(t) \to P_k > 0$, τις **εργοδικές πιθανότητες** που προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας:
  - $\lambda P_0 = \mu P_1$ ή $P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 = \rho P_0$
  - $(\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2$ ή $P_2 = \rho^2 P_0$ και γενικά $P_k = \rho^k P_0, \;\; k > 0$
  - $P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots = 1 = P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots)$

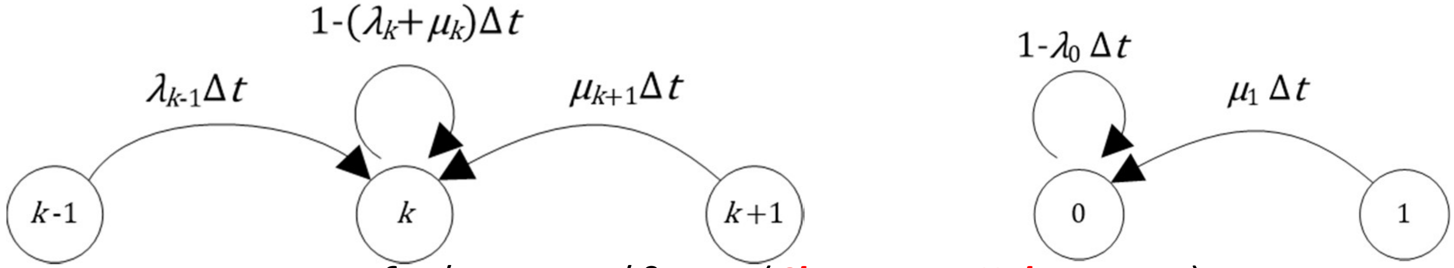
Εφόσον $0 < \rho < 1$ η άπειρη δυναμοσειρά$(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots) \to \frac{1}{1-\rho} \;\; \Rightarrow \;\; P_0(\frac{1}{1-\rho}) = 1$ και

$$P_0 = (1 - \rho), \quad P_k = (1 - \rho)\rho^k, \qquad k > 0$$

Μέσο μήκος ουράς M/M/1 σε ισορροπία: $E[n(t)] \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = \frac{\rho}{1-\rho}$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (1/2)

- Birth-Death Process: Διάγραμμα ***Πιθανοτήτων Μεταβάσεων*** σε χρόνο $\Delta t \to 0$ προς $n(t) = k$

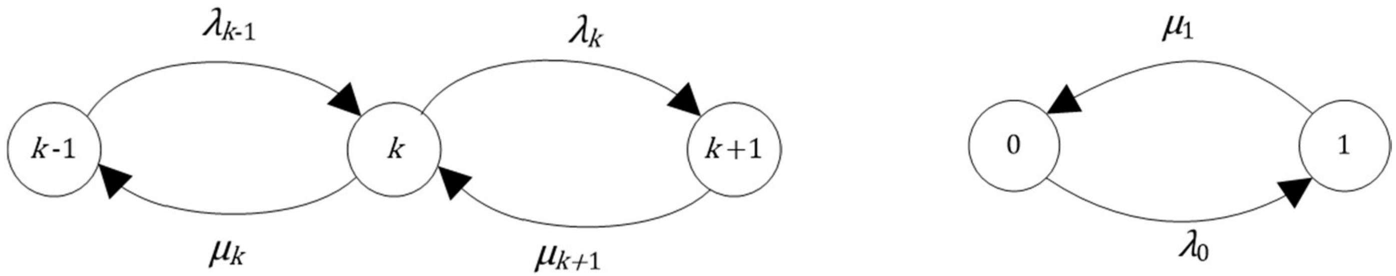


Εξισώσεις Μετάβασης (***Chapman - Kolmogorov***):

$$\mathrm{P}_k(t) = \lambda_{k-1}\Delta t \mathrm{P}_{k-1}(t-\Delta t) + \mu_{k+1}\Delta t \mathrm{P}_{k+1}(t-\Delta t) + [1-(\lambda_k+\mu_k)\Delta \mathrm{t}]\mathrm{P}_k(\mathrm{t}-\Delta \mathrm{t}), \qquad k \geq 1$$

$$\mathrm{P}_{\mathbf{0}}(t) \;=\; \mu_1\,\Delta t\;\mathrm{P}_1(t-\Delta t) \;+\; (1-\;\lambda_0\Delta t)\;\mathrm{P}_{\mathbf{0}}(t-\Delta t)$$

- Birth-Death Process: Διάγραμμα ***Ρυθμών Μεταβάσεων*** μεταξύ ***Εργοδικών*** Καταστάσεων



Εξισώσεις Ισορροπίας:

$(\lambda_k+\mu_k)P_k = \;\lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}$ για $k \geq 1$ και $\lambda_0 P_0 \;=\; \mu_1 P_1$

Σχετικές Πιθανότητες Μεταβάσεων $k \to (k+1), k \to (k-1)$:

$\mathrm{P}[k \to (k+1)/\text{μετάβαση}] = \lambda_k/(\lambda_k+\mu_k)$, $\mathrm{P}[k \to (k-1)/\text{μετάβαση}] = \mu_k/(\lambda_k+\mu_k)$

Dwell Time - Χρόνος Παραμονής στην $n(t) = k$ μέχρι την επόμενη μετάβαση

Εκθετική τυχαία μεταβλητή d_k **με μέσο** $1/(\lambda_k+\mu_k)$: Η μικρότερη δύο ανεξάρτητων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών μέχρι *(1)* την επόμενη άφιξη με μέσο $1/\lambda_k$ ή *(2)* την ολοκλήρωση εξυπηρέτησης με μέσο $1/\mu_k$

$d_k = \min(x,y)\,, F_{d_k}(\tau) = \mathrm{P}\{d_k \leq \tau\} = 1 - \mathrm{P}\{d_k > \tau\} = 1 - e^{-(\lambda_k+\mu_k)\tau}$ διότι

$\mathrm{P}\{d_k > \tau\} = \mathrm{P}\{x > \tau, y > \tau\} = \mathrm{P}\{x > \tau\}\mathrm{P}\{y > \tau\} = e^{-\lambda_k\tau}e^{-\mu_k\tau} = e^{-(\lambda_k+\mu_k)\tau}$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (2/2)

- Απείρως επισκέψιμες επαναληπτικές καταστάσεις $\boldsymbol{s} = n(t)$ ***positive recurrent states***: Με μη μηδενικές εργοδικές πιθανότητες $\mathrm{P}\{n(t) = k\} = P_k(t) \rightarrow P_k > 0,\ k = 0,1,2, \ldots$

- Σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T ισορροπούν οι αριθμοί μεταβάσεων από και προς την κατάσταση $\boldsymbol{s}$:

$$\#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ } \boldsymbol{s}\} = \#\{\text{ΕΚΤΟΣ ΤΗΣ } \boldsymbol{s}\}$$

Εξισώσεις Σφαιρικής Ισορροπίας, ***Global Balance Equations***

- Υπό συγκεκριμένες συνθήκες (ισχύουν για διαδικασίες ***birth-death***) οι ***Εξισώσεις Σφαιρικής Ισορροπίας*** μπορεί να αντικαταστθούν από απλούστερες ***Εξισώσεις Λεπτομερούς (Ακριβούς) Ισορροπίας***, ***Detailed Balance Equations*** ως εξής:
  - Σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T αν ισχύουν οι συνθήκες ***Λεπτομερούς Ισορροπίας*** ισορροπούν οι αριθμοί μεταβάσεων μεταξύ δύο αμφίδρομα γειτονικών καταστάσεων $\boldsymbol{s}_1$ και $\boldsymbol{s}_2$:

$$\#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } \boldsymbol{s}_1 \rightarrow \boldsymbol{s}_2\} = \#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } \boldsymbol{s}_2 \rightarrow \boldsymbol{s}_1\}$$

  - Λόγω ***εργοδικότητας*** σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T, με T_1 και T_2 τους συνολικούς χρόνους παραμονής στις $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2$:

(1) $\#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } \boldsymbol{s}_1 \rightarrow \boldsymbol{s}_2\} = \mathrm{T}_1 \times r_{1,2}$

(2) $\#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } \boldsymbol{s}_2 \rightarrow \boldsymbol{s}_1\} = \mathrm{T}_2 \times r_{2,1}$

όπου $r_{1,2}, r_{2,1}$ οι μέσοι ρυθμοί μεταβάσεων μεταξύ των $\boldsymbol{s}_1$ και $\boldsymbol{s}_2$

(1) = (2) και $r_{1,2} \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}} = r_{2,1} \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{T}}$ ή

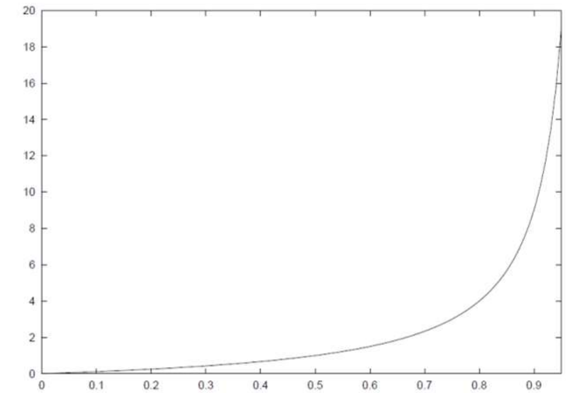
$r_{1,2} P_1 = r_{2,1} P_2$ ***Detailed Balance Equations***

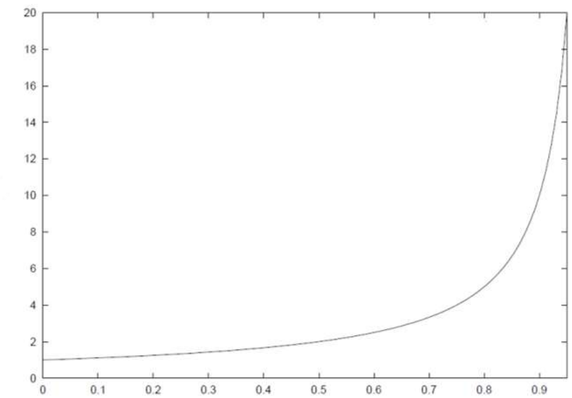
ΟΥΡΑ MARKOV M/M/1 (απείρου μεγέθους)

- Αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec: $\lambda_k = \lambda = \gamma, \quad k = 0,1,2,3,\cdots$
- Χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί με μέση τιμή $\mathrm{E}(s) = \frac{1}{\mu}$sec: $\mu_k = \mu, \ k = 1,2,3,\cdots$
- $\rho = u = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ Erlang (συνθήκη για οριακή ισορροπία – εργοδικότητα)
- Οι **εργοδικές πιθανότητες** προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας:
  - $\lambda P_0 = \mu P_1$ ή $P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 = \rho P_0$
  - $(\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2$ ή $P_2 = \rho^2 P_0$ και $P_k = \rho^k P_0, \quad k > 0$
  - $P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots = 1 = P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots)$

  Με $0 < \rho < 1$ η άπειρη δυναμοσειρά συγκλίνει, $P_0\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1 \Rightarrow$

  $P_0 = (1-\rho), \quad P_k = (1-\rho)\rho^k, k > 0$ και $\mathrm{P}\{n(t) > 0\} = 1 - P_0 = \rho$





- **Μέση κατάσταση συστήματος** M/M/1 σε ισορροπία:

$$\mathrm{E}[n(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = \frac{\rho}{1-\rho}$$

- **Μέσος χρόνος καθυστέρησης**: Τύπος Little

$$\mathrm{E}(T) = \frac{\mathrm{E}[n(t)]}{\gamma} = \frac{\mathrm{E}[n(t)]}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1-\rho}$$

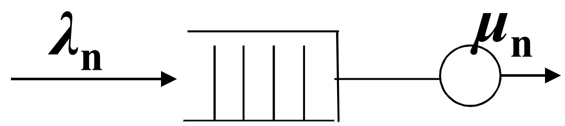
- **Μέσο μήκος ουράς & μέσος χρόνος αναμονής M/M/1**:

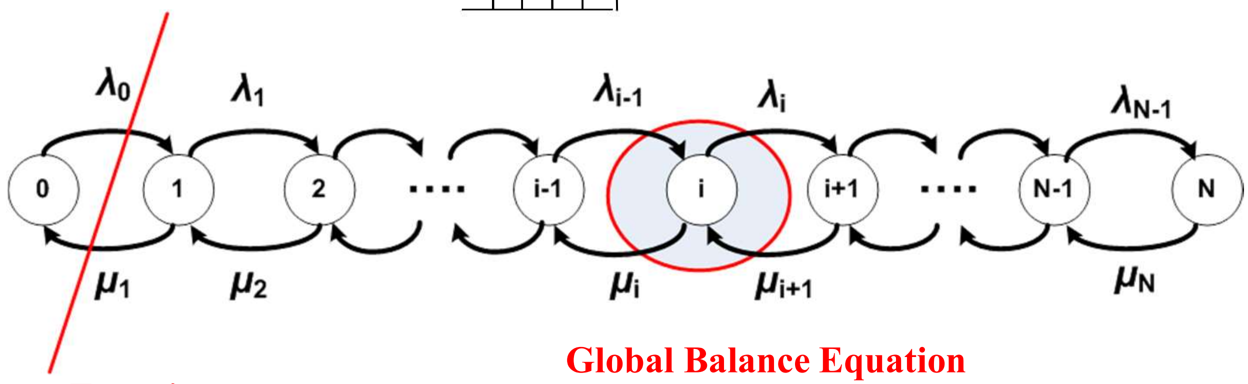
$$\mathrm{E}\left[n_q(t)\right] = \mathrm{E}[n(t)] - \rho, \qquad \mathrm{E}(W) = \mathrm{E}(T) - 1/\mu$$

Ουρές M/M/1 – Ρυθμοί εξαρτώμενοι από παρούσα κατάσταση (state dependent)

- Συστήματα M/M/1 με ρυθμούς άφιξης και ρυθμούς εξυπηρέτησης εξαρτώμενους από τον αριθμό των πελατών στο σύστημα (από την παρούσα κατάσταση του συστήματος)

  (State Dependent M/M/1 Queues)





Local Balance Equation

$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$

$\lambda_{i-1} P_{i-1} = \mu_i P_i$, i = 1, 2, …N

Global Balance Equation

$(\lambda_i + \mu_i) P_i = \lambda_{i-1} P_{i-1} + \mu_{i+1} P_{i+1}$, i = 0, 1,…, N

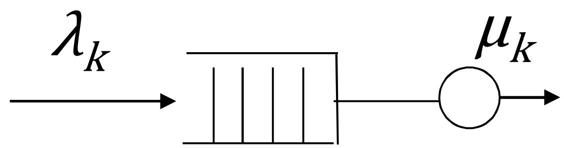
Κανονικοποίηση Εργοδικών Πιθανοτήτων

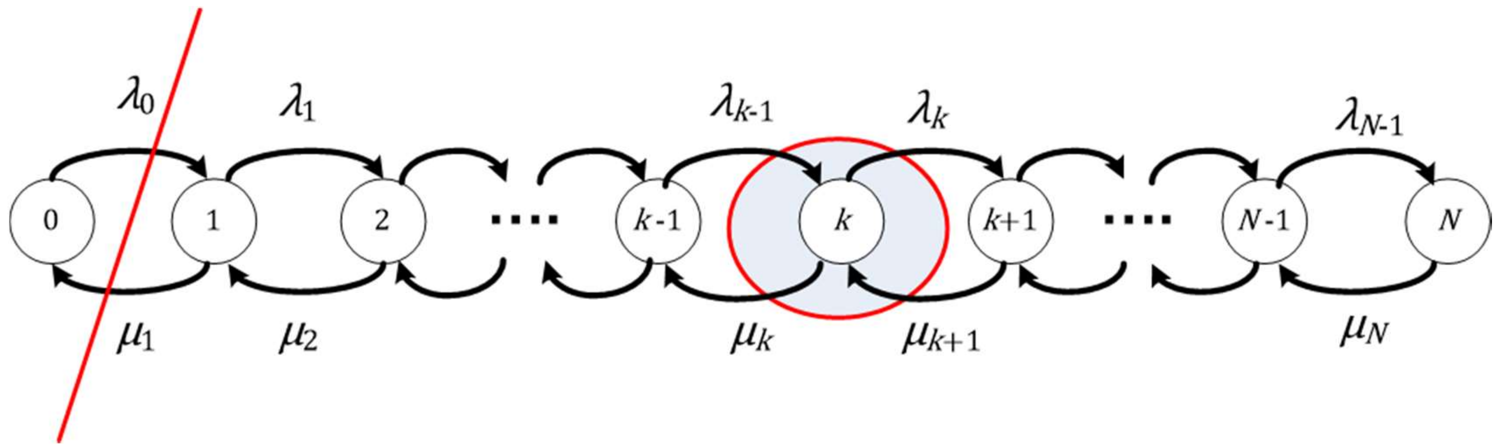
$P_0 + \ldots + P_N = 1$

ΟΥΡΑ M/M/1/N (1/2)

- Συστήματα M/M/1/*N* με ρυθμούς άφιξης και ρυθμούς εξυπηρέτησης εξαρτώμενους από τον αριθμό των πελατών στο σύστημα (από την παρούσα κατάσταση του συστήματος)

  (State Dependent* M/M/1/*N Queues)





Detailed Balance Equations

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$
$$\lambda_{k-1} P_{k-1} = \mu_k P_k \qquad k = 1, 2, \dots N$$

Global Balance Equations

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$
$$(\lambda_k + \mu_k) P_k = \lambda_{k-1} P_{k-1} + \mu_{k+1} P_{k+1} \qquad k = 1, \dots, N$$

Κανονικοποίηση Εργοδικών Πιθανοτήτων

$$P_0 + \cdots + P_N = 1$$

ΟΥΡΑ M/M/1/*N* (2/2)

- Σταθεροί μέσοι ρυθμοί αφίξεων (γεννήσεων)

  $\lambda_k = \lambda$, Poisson, $k = 1,2, \dots, N$
- Σταθεροί μέσοι ρυθμοί εξυπηρέτησης (θανάτων)

  $\mu_k = \mu, \; k = 1,2, \dots, N$

  Εκθετικοί ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης $s, E(s) = 1/\mu$
- Εργοδικές πιθανότητες καταστάσεων

  $P_k = \rho^k P_0, \quad k = 0,1,2, \dots, N$

  $P_0 + P_1 + \cdots + P_{N-1} + P_N = 1$

  $\rho = \lambda/\mu$ Erlangs (η M/M/1/*N* είναι **πάντα ευσταθής** γιατί υπερβολικό φορτίο δεν προωθείται)
- Αντικαθιστώντας με τον τύπο πεπερασμένου αθροίσματος γεωμετρικής προόδου:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, \qquad \rho \neq 1$$

$$P_0 = \frac{1}{N+1}, \qquad \rho = 1$$

- Χρησιμοποίηση Εξυπηρετητή (Server Utilization) $U = 1 - P_0$
- Ρυθμαπόδοση (throughput) $\gamma = \lambda(1 - P_N) = \mu(1 - P_0) = \mu U$
- Πιθανότητα απώλειας $P_{blocking} = P_N$

- Στάσιμος Εργοδικός μέσος όρος πληθυσμού – κατάστασης

$$\mathrm{E}[n(t)] \rightarrow \mathrm{E}(k) = \sum_{k=1}^{N} k P_k = \rho \frac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

- Νόμος του Little: $\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(k)/\gamma = \mathrm{E}(k)/[\lambda(1 - P_N)]$