

## 4 Код Хемінга

Код Хемінга відноситься до систематичних кодів, в яких з  $p$  символів, які утворюють комбінацію,  $n_0$  символів є інформаційними, а останні  $k = p - n_0$  надлишковими (контрольними), призначеними для перевірки (контрольні символи у всіх комбінаціях займають однакові позиції). Коди Хемінга дозволяють виправити всі одиничні помилки (при кодовій відстані  $d=3$ ) і визначити всі подвійні помилки (при  $d=4$ ), але не виправляти їх.

Зв'язок між кількістю інформаційних та контрольних символів в коді Хемінга знаходять на основі таких міркувань. При передачі комбінації по каналу з шумами може бути спотворений довільний з  $p$  символів коду, або комбінація може бути передана без спотворень. Таким чином може бути  $p + 1$  варіантів спотворення (включаючи передачу без спотворення). Використовуючи контрольні символи, необхідно перевірити всі  $p+1$  варіантів. За допомогою контрольних символів  $k$  можна описати  $2^k$  подій. Для цього повинна бути використана умова:

В таблиці 1 подана залежність між  $k$  і  $n_0$ , яка отримана з цієї нерівності, де  $k$  - число контрольних символів в коді Хемінга,  $n_0$  - інформаційних символів.

Таблиця 1 – Розміщення контрольних символів в комбінаціях коду Хемінга

$n_0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$k$	2	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5

В коді Хемінга контрольні символи розташовують на місцях, кратних степеню числа 2, тобто на позиціях 1, 2, 4, 8 і т. п. Інформаційні символи розташовують на місцях, що залишилися. Наприклад, для семиелементної закодованої комбінації можна записати

$k_1$	$k_2$	$a_{04}$	$k_3$	$a_{03}$	$a_{02}$	$a_{01}$
$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$

Символи коду Хемінга, які обведені прямокутниками, є *контрольними*, останні – *інформаційні*, де  $a_3$  – старший (четвертий) розряд вихідної кодової комбінації двійкового коду, який необхідно кодувати,  $a_7$  – молодший (перший) розряд. Після розташування на відповідних місцях кодової комбінації контрольних і інформаційних символів в коді Хемінга складають спеціальні перевірні рівняння, які використовують для визначення наявності спотворень і їх виправлення. З перевірних рівнянь і отримують контрольні символи при кодуванні вихідної кодової комбінації двійкового коду. Для визначення контрольних символів необхідно використати такий алгоритм.

1. Всі символи коду Хемінга з номерами розрядів розташовують в порядку збільшення номерів і під ними записують номери розрядів в двійковому коді

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$

0001 0010 0011 0100 0101 0110 0111

2. Перше перевірне рівняння складають як суму за mod 2 всіх розрядів, в номерах яких в молодшому розряді  $2^0$  стоїть одиниця:  $S_1 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_7$ .

Друге перевірне рівняння складають як суму за mod 2 всіх розрядів, в номерах яких стоїть одиниця на другому місці відповідного двійкового еквівалента ( $2^1$ ):  $S_2 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7$ .

Третє перевірне рівняння складають як суму за mod 2 всіх розрядів, в номерах яких стоїть одиниця на третьому місці ( $2^2$ ):  $S_3 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7$ .

Аналогічно утворюються і інші перевірні суми (при більшій кількості інформаційних і контрольних символів, відповідно).

Як видно з наведених рівнянь, в кожному перевірни суму входить тільки один невизначений контрольний символ  $k_i$  ( $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_4$ , відповідно), а всі інші інформаційні символи відомі

Всі перевірни рівняння за умовою Хемінга повинні дорівнювати 0 при підсумовуванні за mod 2. З цієї умови і знаходять контрольні символи.