تمرین سوم رباتیک

امیررضا حسینی ۹۸۲۰۳۶۴

محاسبه سینماتیک معکوس برای ربات :

$$ {}^0_3T = {}^0_1T(\theta_1)\,{}^1_2T(d_2)\,{}^2_3T(\theta_3) $$

با داشتن پارامترهای دناویت - هارتنبرگ و همچنین فرمول اصلی ${}^{i-1}_{i}T$ خواهیم داشت:

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^1_2T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	d_2	0
3	0	0	L_2	θ_3

مرحله به مرحله شروع به بدست آوردن مقدار θ ها و d می‌کنیم

$$ [{}^0_1T(\theta_1)]^{-1}\,{}^0_3T = {}^1_2T(d_2)\,{}^2_3T(\theta_3) $$

$$ \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1_3T $$

$$ \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_2-d_2 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

فرض می‌کنیم مشخصات نقطه‌ای از فضا که در حال رسیدن به آن هستیم این گونه هست
($L_2 = 1$ فرض شده)

$$T_{\text{مطلوب}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال در ادامه داریم

$$\begin{bmatrix} 0 & -s_1 & c_1 & 2c_1 \\ 0 & -c_1 & -s_1 & -2s_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_2-d_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از مقادیر معلوم برای بدست آوردن مقدار θ_1 استفاده می‌کنیم

عناصر $(1,4)$ را مساوی می‌گذاریم $\quad 2\cos(\theta_1) = 0$

عناصر $(2,3)$ را مساوی قرار می‌دهیم $\quad -\sin(\theta_1) = -1$

از حل کردن دو معادله فوق و $\tan 2$ گرفتن به این نتیجه می‌رسیم که مقدار θ_1 برابر
است $\frac{\pi}{2}$ یعنی 90 درجه $\quad \boxed{\theta_1 = \frac{\pi}{2}}$

حال به سراغ حل d_2 می‌رویم

$$\underbrace{\left[{}^1_2T(d_2)\right]^{-1}}_{\text{مجهول}} \underbrace{\left[{}^0_1T(\theta_1)\right]^{-1}}_{\text{معلوم}} \underbrace{{}^0_3T}_{\text{معلوم}} = {}^2_3T(\theta_3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2+2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس رابطه به دست آمده به ما هم مقدار θ_3 و هم مقدار d_2 را می دهد

مساوی قرار دادن عناصر (3,4) : $-d_2 + 2 = 1 \Rightarrow \boxed{d_2 = 1}$

مساوی قرار دادن عناصر (1,1) و (1,2) : $\left.\begin{matrix} \cos(\theta_3) = 0 \\ -\sin(\theta_3) = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta_3 = \frac{\pi}{2}}$

پس در نهایت ۳ مقدار مجهول θ_1 ، d_2 ، θ_3 را محاسبه کردیم

برای محاسبه فضای کار قابل دسترس نیازمند محاسبه ^0_3T هستیم که با داشتن پارامترهای دناویت - هارتنبرگ می‌توان به این ماتریس رسید

$$^0_3T = {}^0_1T(\theta_1)\,{}^1_2T(d_2)\,{}^2_3T(\theta_2)$$

$$^0_3T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^0_3T = \begin{bmatrix} c_1c_3 & -c_1s_3 & s_1 & (L_2+d_2)s_1 \\ s_1c_3 & -s_1s_3 & -c_1 & (-L_2-d_2)c_1 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با رها گذاشتن مقادیر θ_1 ، θ_3 و d_2 (یعنی همه مقادیر را بتوانند اخذ کنند) زیر فضای قابل دسترس ربات ساخته می‌شود

و همانطور که می‌دانیم زیر فضای چالاک زیر مجموعه ای از زیر فضای قابل دسترس هست

مجموعه فضای کار چالاک در این ربات برابر است با تهی زیرا هیچ نقطه‌ای در فضا نیست که بتوان از چندین جهت به آن دسترسی پیدا کرد.

و همینطور مجموعه فضای کار قابل دسترس نیز برابر است با دایره تو پری به شعاع L2 منهای مقداری که d2 میتواند باز و بسته شود.