(قبلاً ۳۲ مسأله داده شده است)

تمرین های معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE)

۳۲- مسأله زیر را بکمک روش تفکیک متغیرها (متغیرهای جدا شونده) حل کنید

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\pi \le x \le \pi \qquad t \ge 0$$

$$u(x,0)=x \quad , \quad u(0,t)=0 \quad , \quad u_x(0,t)=u_x(\pi,t)$$

راهنمای حل:

$$u(x,t)=F(x)G(t) \Rightarrow F(x)G'(t)=cF''(x)G(t) \Rightarrow \frac{G'}{cG}=\frac{F''}{F}=-\lambda^2$$

$$\begin{cases} F''+\lambda^2 F=0 \Rightarrow F(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x \Rightarrow u(0,t)=0 \Rightarrow A=0 \\ G'+c\lambda^2 G=0 \Rightarrow G(t)=Ce^{-c\lambda^2 t} \end{cases}$$

$F(x)=B\sin\lambda x$ و $u_x(0,t)=u_x(\pi,t) \Rightarrow \lambda B=\lambda B\cos\lambda\pi \Rightarrow \lambda=2k$

$$F(x)=B\sin 2kx \Rightarrow u_k(x,t)=D_k e^{-4ck^2 t}\sin 2kx$$

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} D_k e^{-4ck^2 t}\sin 2kx$$

$$u(x,0)=x \Rightarrow x=\sum_{k=0}^{\infty} D_k \sin 2kx \Rightarrow D_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2kx\,dx$$

۳۳- معادله زیر را بکمک تبدیل لاپلاس حل کنید

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}=xt \qquad u(0,t)=u(x,0)=1 \qquad x>0 \quad t>0$$

راهنمای حل: با فرض $U(x,s)=\mathcal{L}\{u(x,t)\}$ از طرفین تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$x\frac{dU}{dx}+\left(sU(x,s)-u(x,0)\right)=\frac{x}{s^2} \Rightarrow U'-sU=1+\frac{x}{s^2}$$

معادله دیفرانسیل معمولی $U'-sU=0$ را حل کرده، جواب خصوصی با طرف دوم را نیز تعیین می‌کنیم. سپس با تبدیل وارون لاپلاس تابع $u(x,t)$ بدست می‌آید.

۳۴- معادله زیر را بکمک تبدیل فوریه حل کنید.

$$u_{tt} = u_{xx} \quad -\infty < x < \infty \quad ; \quad u(x,0) = e^{-2|x|} \;,\; u_t(x,0) = 0$$

ابتدا، فرمولهای لازم را یادآوری می‌کنیم.

$$\mathcal{F}\{u(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x,t)\,dx = U(\omega,t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{U(\omega,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} U(\omega,t)\,d\omega = u(x,t)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = i\omega U(\omega,t) \;;\; \mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \frac{dU}{dt}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = -\omega^2 U(\omega,t) \;;\; \mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = \frac{d^2 U}{dt^2}$$

حال از طرفین معادله تبدیل فوریه می‌گیریم.

$$\frac{d^2U}{dt^2} = -\omega^2 U \Rightarrow U'' + \omega^2 U = 0 \Rightarrow U(\omega,t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

با توجه به شرایط داریم:

$$\mathcal{F}\{u(x,0)\} = \mathcal{F}\{e^{-2|x|}\} = U(\omega,0)$$

$$A = U(\omega,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} e^{-i\omega x}\,dx = \frac{4}{\sqrt{2\pi}(\omega^2+4)}$$

$$\frac{\partial U(\omega,0)}{\partial t} = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow U(\omega,t) = \frac{4\cos\omega t}{\sqrt{2\pi}(\omega^2+4)}$$

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\{U(\omega,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4e^{i\omega x}\cos\omega t}{\sqrt{2\pi}(\omega^2+4)}\,d\omega$$

که باید انتگرال محاسبه شود.

۳۵- معادله موج زیر را بکمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$u_{tt} = 4u_{xx} + \cos at \quad 0 < x < \infty \quad t > 0 \quad a > 0$$

$$u(x,0) = u(0,t) = 0 \quad u_t(x,0) = 0 \;,\; \lim_{x\to\infty} u_x(x,t) = 0$$

راه حل: با فرض $\mathcal{L}\{u(x,t)\} = U(x,s)$ از طرفین تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$s^2 U(x,s) - s\,u(x,0) - u_t(x,0) = 4 U_{xx}(x,s) + \frac{s}{a^2+s^2}$$

و یا

$$U_{xx} - \frac{s^2}{4} U = \frac{-s}{4(a^2+s^2)}$$

با حل معادله دیفرانسیل جواب عمومی

$$U(x,s) = A e^{\frac{s}{2}x} + B e^{-\frac{s}{2}x} + \frac{1}{s(a^2+s^2)}$$

با توجه به شرایط اولیه

$$\lim_{x\to\infty} u_x(x,t) = 0 \Rightarrow \lim U_x(x,s) = 0 \quad , \quad \mathcal{L}\{u(0,t)\} = 0 \Rightarrow U(0,s) = 0$$

پس

$$B = \frac{-1}{s(a^2+s^2)} \quad , \quad A = 0$$

$$U(x,s) = \frac{1}{s(a^2+s^2)}\left[1 - e^{-\frac{s}{2}x}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+a^2)}\right) = \frac{1}{a^2}(1-\cos at) = \frac{2}{a^2}\sin^2\frac{a}{2}t$$

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{2}{a^2}\left[\sin^2\frac{a}{2}t - \sin^2\frac{a}{2}\left(t-\frac{x}{2}\right)\right] & t \ge \frac{x}{2} \\ \frac{2}{a^2}\sin^2\frac{a}{2}t & t \le \frac{x}{2} \end{cases}$$

زیرا

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = \begin{cases} f(t-a) & t>a \\ 0 & t<a \end{cases}$$

---

۳۶ - به کمک تبدیل فوریه معادله گرمای زیر را حل کنید

$$u_t - u_{xx} = \begin{cases} 1+x & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases} \qquad u(x,0) = \begin{cases} e^{x} & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases}$$

راهنمای حل: با فرض $\mathcal{F}\{u(x,t)\} = U(\omega,t)$ از طرفین معادله تبدیل فوریه می‌گیریم.

$$\frac{dU}{dt} - (-\omega^2 U) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}(1+x)e^{-i\omega x}\,dx = F(\omega)$$

با حل معادله $U' + \omega^2 U = F(\omega)$ مقدار $U(\omega,t)$ بدست می‌آید. در نتیجه

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\{U(\omega,t)\}$$

---

۳۷ - به کمک تبدیل لاپلاس معادله گرمای زیر را حل کنید.

$$u_t - 4u_{xx} = e^{-x} \qquad x>0 \quad t>0$$

$$u(0,t) = \frac{1}{4}(e^{4t}-1) \qquad u(x,0) = 0$$

۳۸ - بکمک تبدیل فوریه مسئله زیر را حل کنید.

$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \qquad u_t(x,0) = 0$$

راه حل: قرار میدهیم

$$F(u(x,t)) = U(w,t) \Rightarrow$$

از طرفین تبدیل فوریه میگیریم:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + w^4 U = 0 \Rightarrow U = A\cos w^2 t + B\sin w^2 t$$

با توجه به شرایط داده شده:

$$A = U(w,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\, e^{-iwx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} x(\cos wx - i\sin wx)\, dx = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 x \sin wx\, dx$$

$$= i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{w\cos w - \sin w}{w^2}$$

$$U_t(w,0) = F(u_t(x,0)) = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dt}(w,0) = w^2 B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$U(w,t) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{w\cos w - \sin w\ \cos w^2 t}{w^2}$$

$$u(x,t) = F^{-1}(U(w,t)) = -2i \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \left(\frac{w\cos w - \sin w}{w^2}\right) \cos w^2 t\, dw$$

$$u(x,t) = 4 \int_0^{\infty} \frac{e^{iw} \sin w \cos w^2 t}{w^2}\, dw$$

---

۳۹ - بکمک تغییر متغیرهای $u = x^2$ ، $v = y^2$ مسئله زیر را حل کنید.

$$y^3\left(x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + x^3\left(y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

راه حل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x \frac{\partial z}{\partial u}\right) = 2\frac{\partial z}{\partial u} + 2x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 2\frac{\partial z}{\partial u} + 4x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \frac{\partial z}{\partial v} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\frac{\partial z}{\partial v} + 4y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$y^3\left(\cancel{2x \frac{\partial z}{\partial u}} + 4x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \cancel{2x \frac{\partial z}{\partial u}}\right) + x^3\left(\cancel{2y \frac{\partial z}{\partial v}} + 4y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \cancel{2y \frac{\partial z}{\partial y}}\right) = 0$$

$$4x^3y^3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$$

که شکل حل است.

۴ـ معادله ناهمگن، رسانش گرما را حل کنید، $t \geq 0$, $0 < x < 1$ $\quad u_t - u_{xx} = t$

$$u(x,0) = x \ , \quad u(0,t) = 2t \ , \quad u_x(1,t) = t+1$$

راه حل: تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + a(t)x + b(t)$ را چنان می‌گیریم که شرایط مرزی همگن شوند. یعنی $v(0,t) = 0$ و $v_x(1,t) = 0$.

$$u(0,t) = 2t = 0 + 0 + b(t) \Rightarrow b(t) = 2t$$

$$u_x(1,t) = v_x(1,t) + a(t) \Rightarrow t+1 = 0 + a(t) \Rightarrow a(t) = t+1$$

پس تغییر متغیر به صورت

$$u(x,t) = v(x,t) + (t+1)x + 2t$$

خواهد بود. پس

$$\begin{cases} u_t = v_t + x + 2 \\ u_{xx} = v_{xx} \end{cases} \Rightarrow v_t + x - 2 - v_{xx} = x \Rightarrow v_t - v_{xx} = -2$$

و شرایط جدید به صورت همگن درآید.

$$v(x,0) = 0 \ , \quad u(0,t) = 0 \ , \quad u_x(1,t) = 0$$

جواب را به صورت

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \sin n\pi x$$

در نظر می‌گیریم و $h_n(t)$ را بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases} v_t = \sum_1^{\infty} h_n'(t) \sin n\pi x \\ v_{xx} = \sum_1^{\infty} h_n(t)(-n^2\pi^2) \sin n\pi x \end{cases}$$

$$h_n'(t) + n^2\pi^2 h_n(t) = -2\int_0^1 2 \sin n\pi x \, dx$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$h_n^h(t) = c\, e^{-n^2\pi^2 t}$ جواب معادله همگن

جواب خصوصی با طرف دوم

$h_n^p(t) = \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{4}{n^3\pi^3}\left((-1)^n - 1\right)$

$h_n(t) = c\, e^{-n^2\pi^2 t} + \frac{4}{n^3\pi^3}\left((-1)^n - 1\right)$

$v(x,t) = \sum_1^\infty \left(c\, e^{-n^2\pi^2 t} + \frac{4}{n^3\pi^3}\left((-1)^n - 1\right)\right)\sin n\pi x$

برای تعیین c ،

$v(x,0) = \sum_1^\infty \left(c + \frac{4}{n^3\pi^3}\left((-1)^n - 1\right)\right)\sin n\pi x = 0$

درنتیجه

$c = -\frac{4}{n^3\pi^3}\left((-1)^n - 1\right)$

پس

$u(x,t) = v(x,t) + a(t)x + b(t)$

$= (t+1)x + 2t + \sum_1^\infty \frac{4}{n^3\pi^3}\left((-1)^n - 1\right)\left[1 - e^{-n^2\pi^2 t}\right]\sin n\pi x$

---

۴۱ - مسأله زیر را با روش تفکیک متغیرها حل کنید

$u_{tt} + 2u_t + u = 4u_{xx} \qquad 0<x<1$

$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$

---

۴۲ - یکی از دو مسأله زیر را حل کنید.

(۱) $u_{zz} + \frac{1}{z}u_z + \frac{1}{z^2}u_{\theta\theta} = 0$

$u_z(1,\theta) = \sin\theta, \quad u_z(2,\theta) = 0$

(۲) سری فوریه دو متغیره ی $f(x,y) = x^2y^2$ ، $-\pi<x<\pi$ ، $-\pi<y<\pi$ را بنویسید.

---

۴۳ - هرگاه $f(x)$ دارای نمایش انتگرالی $f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos wx + w\sin wx}{1+w}\,dw$ باشد،

نمایش $x^3 f(x)$ را بدست آورید

راه حل: برابری زیر را داریم که $f(x) = \int_0^{\infty} (A(w) \cos wx + B(w) \sin wx)\, dw$

و پس

$$A(w) = \frac{1}{1+w} \quad , \quad B(w) = \frac{w}{1+w} = 1 - \frac{1}{1+w}$$

که در آن

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx \, dw \Rightarrow A'''(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x) \sin wx \, dx$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin wx \, dw \Rightarrow B'''(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x) \cos wx \, dx$$

در نتیجه:

$$x^3 f(x) = \int_0^{\infty} (A_1(w) \cos wx + B_1(w) \sin wx)\, dw$$

که در آن

$$A_1(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x) \cos wx \, dx = A'''(w) = -6(1+w)^{-4}$$

$$B_1(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x) \sin wx \, dx = B'''(w) = 6(1+w)^{-4}$$

بنابراین

$$x^3 f(x) = 6 \int_0^{\infty} \frac{\sin wx - \cos wx}{(1+w)^4} \, dw$$

---

۱۴ - با تبدیل متغیرهای $v = x$ ، $z = xy$ جواب عمومی $x u_{xy} - y u_{yy} - u_y = 0$ را بدست آورید.

راه حل:

$$u_x = u_v + y u_z \quad , \quad u_y = x u_z$$

$$u_{xy} = x u_{vz} + u_z + xy u_{zz} \quad , \quad u_{yy} = x^2 u_{zz}$$

در نتیجه:

$$x(x u_{vz} + u_z + xy u_{zz}) - y x^2 u_{zz} - x u_z = 0$$

و یا

$$x^2 u_{vz} = 0 \Rightarrow u_{vz} = 0 \Rightarrow u = \int \varphi(v)\, dv + g(z)$$

$$u(x,y) = h(x) + g(xy)$$

۴۵- مسأله زیر را حل کنید.

$$\nabla^2 u = 0 \qquad -\infty < x < \infty \,,\ y > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} -1 & -2 \le x \le 0 \\ 0 & 0 < x \le 2 \\ e^{-2|x|} & |x| > 2 \end{cases} \qquad \lim_{y \to \infty} u(x,y) = 0$$

راه‌حل:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$u(x,y) = f(x)g(y) \implies \frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g} = -w^2$$

$$f''(x) + w^2 f(x) = 0 \implies f(x) = A\cos wx + B\sin wx$$

$$g''(y) - w^2 g(y) = 0 \implies g(y) = A_1 e^{wy} + B_1 e^{-wy}$$

$$\lim_{y \to \infty} u(x,y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \to \infty} g(y) = 0 \implies A_1 = 0$$

$$u(x,y) = (A\cos wx + B\sin wx)(B_1 e^{-wy}) = (\alpha\cos wx + \beta\sin wx)e^{-wy}$$

$$u(x,0) = \alpha\cos wx + \beta\sin wx$$

$$u_w(x,y) = \alpha(w)\cos wx + \beta(w)\sin wx$$

$$u(x,y) = \int_0^\infty (\alpha(w)\cos wx + \beta(w)\sin wx)e^{-wy}\,dw$$

$$u(x,0) = \int_0^\infty (\alpha(w)\cos wx + \beta(w)\sin wx)\,dw$$

$$\alpha(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\cos wx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-2} e^{2x}\cos wx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_2^\infty e^{-2x}\cos wx\,dx$$

$$= -\frac{\sin 2w}{\pi w}$$

$$\beta(w) = \frac{\cos 2w}{\pi w}$$ به طریق مشابه، $\beta(w)$ بدست می‌آید.

$$u(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(2+x)w}{w} e^{-wy}\,dw$$ و در نتیجه.

۱۳ - معادله زیر را حل کنید $\quad 0<x,y<\infty \quad u_{xx}+u_{yy}+2u_y=0$

$$u_x(0,y)=0,\quad \lim_{x\to\infty}u(x,y)=\lim_{x\to\infty}u_x(x,y)=0,$$

$$u(x,0)=e^{x},\quad \lim_{y\to\infty}u(x,y)=M<\infty.$$

راه حل: با توجه به شرایط داده شده، از طرفین تبدیل فوریه کسینوسی نسبت به x می‌گیریم

$$F_c(u(x,y))=U_c(w,y),\quad F_c(u_{xx})=-w^2U_c(w,y)$$

$$F_c(u_{yy})=(U_c)_{yy}\qquad F_c(u_y)=(U_c)_y$$

با جایگذاری:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(U_c)+2\frac{\partial U_c}{\partial y}-w^2U_c=0$$

بفرض $k=\sqrt{1+w^2}$

$$\lambda^2+2\lambda-w^2=0\qquad \lambda=-1\pm\sqrt{1+w^2}=-1\pm k$$

$$U_c=a(w)e^{(-1-k)y}+b(w)e^{(-1+k)y}$$

$$U_c(w,0)=a(w)+b(w)\qquad (1)$$

$$(2)\quad u(x,0)=e^{-x}\Rightarrow U_c(w,0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\cos wx\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{-1}{1+}\right)=H(w)$$

$$1,2\Rightarrow a(w)+b(w)=H(w)$$

از طرف دیگر

$$u(x,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U_c(w,y)\cos wx\,dw$$

$$u(x,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\left[a(w)e^{(-1-k)y}+b(w)e^{(-1+k)y}\right]\cos wx\,dw$$

چون $k>1$ و $\lim_{y\to\infty}u(x,y)=M<\infty$ پس $b(w)=0$ و $a(w)=H(w)$

در نتیجه

$$u(x,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty H(w)e^{(-1-k)y}\cos wx\,dw$$

۲۷ - نوع معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را در نقاط صفحه xoy تعیین کنید

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} + xy$$

راهنمای حل:

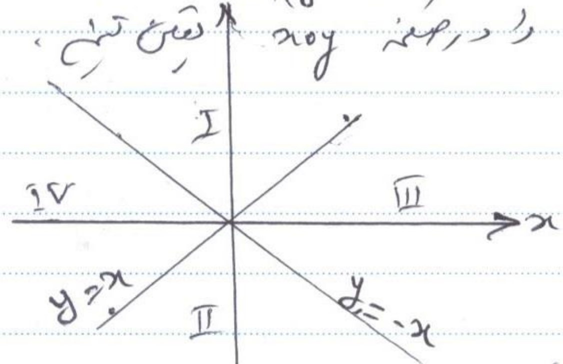
گفته شد که نوع معادله با علامت Δ در مشتقات جزئی مرتبه دوم تعیین می‌شود.

در این مسأله، $a=x$ ، $b=2y$ و $c=x$ پس

$$\Delta = b^2-4ac = 4(y^2-x^2)$$

حال باید علامت y^2-x^2 را در صفحه xoy تعیین کنیم. $y^2-x^2=0$

$y=\pm x$



روی دو خط $y=\pm x$ مقدار Δ صفر و معادله از نوع سهموی است.

در دو ناحیه III و IV مقدار Δ منفی است و معادله از نوع بیضوی است.

در دو ناحیه I و II مقدار Δ مثبت است و معادله از نوع هذلولوی است.

---

۲۸ - نشان دهید که تابع دو متغیری $u=(x^2+y^2)^{3/2}$ در معادله زیر صدق می‌کند

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 9\sqrt{u}$$

راهنمای حل:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + 3x^2(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

به دلیل همگن بودن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + 3y^2(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 9(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = 9\sqrt[3]{u}$$

---

۲۹ - معادله لاپلاس دو بعدی $\nabla^2 u=0$ را در مختصات قطبی و با شرایط زیر حل کنید.

$$u_r(3,\theta)=0 \qquad u_r(1,\theta)=\sin\theta$$

راهنمای حل:

$x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$ ، $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ،

$u(x,y) \to u(r,\theta)$ $\qquad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

با دقت مشتق دوم‌ها را محاسبه و جایگذاری می‌کنیم خواهیم داشت:

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

حال معادله حاصل را به روش متغیرهای جدا شونده حل می‌کنیم.

$$u(r,\theta)=F(r)G(\theta)\Rightarrow \frac{r^2F''}{F}+r\frac{F'}{F}=-\frac{G''}{G}\quad(=\lambda^2)$$

$$G''(\theta)+\lambda^2G(\theta)=0\Rightarrow G(\theta)=A\cos\theta+B\sin\theta$$

$$r^2F''(r)+rF'(r)-\lambda^2F(r)=0$$ (معادله کوشی است)

جواب را به صورت $F(r)=r^k$ جستجو می‌کنیم.

$$F'=kr^{k-1}\Rightarrow F''=(k-1)kr^{k-2}\Rightarrow k(k-1)r^k+kr^k-\lambda^2r^k=0$$

$$k^2-k+k-\lambda^2=0\Rightarrow k=\pm\lambda$$

$$F(r)=C_1r^{\lambda}+C_2r^{-\lambda}$$

$$u_\lambda(r,\theta)=(C_1r^{\lambda}+C_2r^{-\lambda})(A\cos\lambda\theta+B\sin\lambda\theta)$$

$$\lim_{r\to\infty}u(r,\theta)=0\Rightarrow C_1=0,\quad u_\lambda(r,\theta)=\int_1^{\infty}r^{-\lambda}(a\cos\lambda\theta+b\sin\lambda\theta)\,d\lambda$$

برای محاسبه a و b از شرایط $u_r(2,\theta)=0$ و $u_r(1,\theta)=\sin\theta$ کمک می‌گیریم. در نتیجه $u(r,\theta)$ بدست می‌آید. که دیگر لازم است با جایگذاری $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$، جواب را برحسب x و y بدست می‌آوریم.

۵۰- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=-2xy \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \qquad (2)$$

راه دوم حل: (۱) $\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{-2xy} \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow x^2 - y^2 = c_1$$

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dz}{-2xy} \Rightarrow 2x\,dx + z\,dz = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{2} z^2 = c_2$$

$$x^2 + \frac{1}{2} z^2 = \varphi(x^2 - y^2)$$

(۲) $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ معادله از نوع بیضوی است.

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = 1 \pm i$$

$$z = f(y + (1+i)x) + g(y + (1-i)x)$$

---

۵۱ - معادله دیفرانسیل بنویسید که جواب آن $f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}) = 0$ باشد.

راه حل: $u = \frac{x}{y}$ و $v = \frac{y}{z}$ قرار می‌دهیم $f(u,v) = 0$ داریم

با مشتق‌گیری داریم.

$\dfrac{\partial f}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$ توجه: z تابع وابسته و x و y مستقل‌اند

(۱) $\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial f}{\partial u} - \dfrac{y}{z^2}\dfrac{\partial f}{\partial v} = 0$ ، $\dfrac{\partial f}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \Rightarrow$

(۲) $-\dfrac{x}{y^2}\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{z - y\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}\dfrac{\partial f}{\partial v} = 0$

از معادلات (۱) و (۲) باید f و مشتقات آن را حذف کنیم. دستگاه معادلات نسبت به $\frac{\partial f}{\partial u}$ و $\frac{\partial f}{\partial v}$ همگن است و شرط داشتن جواب غیر صفر، باید دترمینان صفر شود، پس

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x} \\ -\frac{x}{y^2} & \frac{z - y\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

---

۵۲ - هرگاه x و y متغیرهای مستقل و z متغیر وابسته باشد، PDE بنویسید که جواب آن

(۱) $x^2 + y^2 + z^2 = y\,\varphi(\frac{z}{y})$

باشد. حل: با فرض $u = \frac{z}{y}$ از معادله نسبت به x و y مشتق می‌گیریم:

(۲) $2x + 2z\dfrac{\partial z}{\partial x} = y\,\varphi'(\frac{z}{y})\left(\frac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$

(۳) $2y + 2z\dfrac{\partial z}{\partial y} = \varphi(u) + y\left(\dfrac{y\,\partial z/\partial y - z}{y^2}\right)\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$

$\varphi(u)$ و $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ را بین سه معادله حذف می‌کنیم

۵۳- ثابت کنید توابع 1 ، $1-x$ ، $2-4x+x^2$ در بازه $0<x<\infty$ با وزن e^{-x} متعامدند.

راه حل:

$$\langle 1, 1-x \rangle = \int_0^\infty e^{-x}(1-x)\,dx = \int_0^\infty e^{-x}dx + xe^{-x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}dx = 0$$

$$\langle 1, 2-4x+x^2 \rangle = 2\int_0^\infty e^{-x}dx - 4\int_0^\infty xe^{-x}dx + \int_0^\infty x^2e^{-x}dx = 0$$

$$\langle 1-x, 2-4x+x^2 \rangle = \int_0^\infty e^{-x}(-x^3+5x^2-6x+2)\,dx = 0$$

یعنی این توابع با وزن e^{-x} متعامدند.

۵۴- معادله موج به صورت $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ، $0<x<1$ ، $t>0$ را با شرایط $IC \equiv u(x,0)=x,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$ و $BC \equiv u(0,t)=0,\ u(1,t)=1$ حل کنید.

راه حل: چون شرایط مرزی تابع ثابت است از تغییر متغیر $u(x,t)=v(x,t)+f(x)$ ، تابع $f(x)$ را چنان مشخص می کنیم که شرایط مرزی برای متغیر جدید $v(x,t)$ همگن شوند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f''(x)$$

با جایگذاری در معادله بر حسب متغیر جدید $v(x,t)$ داریم

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f''(x) + x^2$$

قرار می دهیم $f''(x)+x^2=0$ با شرایط،

$$u(0,t)=0 \Rightarrow f(0)=0 \quad , \quad u(1,t)=1 \Rightarrow f(1)=1$$

دارای جواب $f(x)=\frac{1}{12}(13x-x^4)$ خواهد بود. در نتیجه معادله $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ دارای شرایط همگن مرزی $v(0,t)=0$ و $v(1,t)=0$ خواهد بود.

شرایط اولیه $v(x,0)=x-f(x)$ ، $\dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0)=0$ و معادله جدید دارای جواب

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\pi t + B_n\sin n\pi t)\sin n\pi x$$

که ضرایب A_n ، B_n به صورت $B_n=0$ و $A_n=2\int_0^1 (x-f(x))\sin n\pi x\,dx$ خواهند بود. در نتیجه

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{1}{12}(13x-x^4).$$

۵۵- تار مرتعش به طول ۲ را در نقاط $x=\pm1$ تثبیت کرده و با سرعت اولیه $g(x)=\begin{cases}1+x & -1<x<0\\ 1-x & 0<x<1\end{cases}$ به حرکت در می آوریم. معادله حرکت و موقعیت نقطه $x=\frac{1}{2}$ را در زمان $t=2$ مشخص کنید.

راه حل: با توجه به صفات تار، شرایط زیر بوجود می آید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (c=1)$$

$$u(-1,t)=0,\quad u(1,t)=0 \qquad u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$$

با روش تفکیک متغیرها جواب $u(x,t)=\sum_{1}^{\infty}(\beta_k \sin k\pi t \sin k\pi x)$ بدست می‌آید. که در آن

$$\beta_k = \frac{1}{2k\pi}\left(\int_{-1}^{0}(1+x)\sin k\pi x\,dx\right) + \frac{1}{2k\pi}\left(\int_{0}^{1}(1-x)\sin k\pi x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2k^2\pi^2}$$

$$u(x,t) = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2k^2\pi^2}\sin k\pi t \sin k\pi x$$

و نقطه $x=\frac{1}{2}$ بر محور xها جای می‌گیرد (در زمان $t=2$) زیرا

$$u\left(\tfrac{1}{2},2\right) = 0$$

---

۵۶ - حالت تعادل حرارتی در میله‌ای بطول $l=a$ به صورت $u(x)$ با معادله دیفرانسیل $-k\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{hc}{A}u(x)$ ، $u(0)=T_0$ و $u(a)=T_0$ داده شده است.
حالت تعادل را مشخص کنید.

راه حل: قرار می‌دهیم $p^2=\frac{hc}{A}$ در نتیجه

$$\frac{d^2u}{dx^2} - p^2u = 0$$

$$u(x) = c_1 ch(px) + c_2 sh(px)$$

$$u(0)=T_0 \Rightarrow c_1 = T_0 \quad , \quad u(a)=T_0 \Rightarrow T_0 = T_0 ch(ap) + c_2 sh(ap)$$

در نتیجه:

$$c_2 = \frac{T_0(1-ch(ap))}{sh(ap)} \quad , \quad u(x) = T_0 ch px + \frac{1-ch(ap)}{sh(ap)}sh(px)$$

---

۵۷ - قانون سرد شدن میله‌ای با یک سر نامحدود واقع در محیطی با دمای T و یک سر در دمای T_0، عبارت است از

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{hc}{kA}(u-T) \qquad x>0$$

$$|u(x)|<\infty \quad , \quad |u'(x)|<\infty$$

حالت تعادل $u(x)$ را بدست آورید. راه حل: قرار می‌دهیم $\frac{hc}{kA}=p^2$،

$$\frac{d^2u}{dx^2} - p^2u = -p^2T$$

جواب بدون طرف دوم، $u_h(x)$ و جواب خصوصی $u_p(x)$ عبارتند از

$$u_h(x) = c_1 ch(px) + c_2 sh(px) \quad , \quad u_p(x) = T$$

در نتیجه:

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = c_1 ch(px) + c_2 sh(px) + T$$

با توجه به شرط اول،

$$u(0) = c_1 + T = T_0 \Rightarrow c_1 = T_0 - T$$

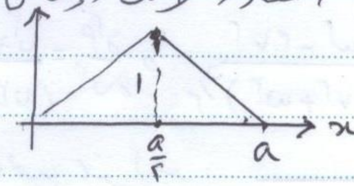
اندازه‌ای که هر ترکیب خطی از $chpx$ و $shpx$ وقتی $x\to\infty$ کراندار خواهد بود هرگاه

$$chpx - shpx = e^{-px}$$

بنا براین باید داشته باشیم $c_1 = -\frac{c}{2}$ در نتیجه $U(x) = T + (T_0 - T)(\cosh px - \sinh px)$

$$= T + (T_0 - T)e^{-px}.$$

۵۸ - تار مرتعشی بطول $l = a$ را بطور کشیده از دو سر تثبیت کرده و وسط آن را به اندازه یک بالا برده و رها می کنیم، معادله حرکت ارتعاشی را تشکیل داده و حل کنید. و فرض است که سرعت اولیه صفر است.



$c = 1$

معادله حرکت $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(c=1)$ و شرایط

$$u(a,t) = 0, \quad u(0,t) = 0$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} \frac{2x}{a} & 0<x<\frac{a}{2} \\ 2 - \frac{2x}{a} & \frac{a}{2}<x<a \end{cases}$$

از روش متغیرهای جدا شونده کمک می گیریم.

$$u(x,t) = F(x)\,G(t)$$

$$F'' + \lambda^2 F = 0, \quad G'' + \lambda^2 G = 0$$

$$F(x) = A_1 \cos\lambda x + B_1 \sin\lambda x, \quad G(t) = A_2 \cos\lambda t + B_2 \sin\lambda t$$

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \Rightarrow F(x) = B_1 \sin\lambda x$$

$$u(a,t) = 0 \Rightarrow F(a) = 0 \Rightarrow B_1 \sin\lambda a = 0 \Rightarrow B_1 \neq 0, \ \sin\lambda a = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda a = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{a} \quad n = 1, 2, \ldots \Rightarrow F(x) = B_1 \sin\frac{n\pi}{a}x$$

در نتیجه:

$$u_n(x,t) = \left(a_n \cos\frac{n\pi}{a}t + b_n \sin\frac{n\pi}{a}t\right)\sin\frac{n\pi}{a}x$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{a}t + b_n \sin\frac{n\pi}{a}t\right)\sin\frac{n\pi}{a}x$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \Rightarrow b_n = 0, \quad u(x,0) = \sum_{1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{a}x = \begin{cases} \frac{2x}{a} \\ 2 - \frac{2x}{a} \end{cases} = f(x)$$

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx = \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}\right)\cos\frac{n\pi}{a}t\,\sin\frac{n\pi}{a}x.$$

۵۹ - نشان دهید که تابع پتانسیل $\rho = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$ در معادله لاپلاس صدق می کند. راهنمایی حل: با فرض $x-a=u$ ، $y-b=v$ ، $z-c=w$

ملاحظه می‌شود که مشتق گیری نسبت به x، y و z با مشتق گیری نسبت به u، v، و w برابر است،

پس معادله لاپلاس:

$$\nabla^2\rho=\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial w^2}$$

حال از $\rho=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$ نسبت به u، v، w هر یک دو بار مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2}=\frac{v^2+w^2-2u^2}{(u^2+v^2+w^2)^{5/2}},\quad \frac{\partial^2\rho}{\partial v^2}=\frac{u^2+w^2-2v^2}{(u^2+v^2+w^2)^{5/2}},\quad \frac{\partial^2\rho}{\partial w^2}=\frac{u^2+v^2-2w^2}{(u^2+v^2+w^2)^{5/2}}$$

داریم مجموع صفر است.

مثال - (۱) اگر $F(w)$ تبدیل فوریه $f(t)$ باشد، تبدیل فوریه $e^{iw_0t}f(t)$ را

تحقیق کنید. راه حل:

$$\mathcal{F}\{e^{iw_0t}f(t)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iw_0t}f(t)\,e^{-iwt}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(w-w_0)t}f(t)$$

$$=F(w-w_0)$$

(۲) اگر $F(w)$ تبدیل فوریه $f(x)$ باشد، ثابت کنید $\frac{d^nf}{dx^n}=\mathcal{F}\{(iw)^nF(w)\}$

راه حل: برحسب فرمول وارون فوریه داریم

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iwx}F(w)\,dw$$

از طرفین n بار نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$\frac{d^nf}{dx^n}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(iw)^nF(w)\,e^{iwx}=\mathcal{F}\{(iw)^nF(w)\}$$

(۳) نوع PDF زیر را تحقیق کنید

$$(y+1)\frac{\partial^2z}{\partial x^2}-2x\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+(y-1)\frac{\partial^2z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}+2=0$$

راه حل: $a=y+1$ ، $b=-2x$ ، $c=y-1$ ، $\Delta=b^2-4ac$

برای تحقیق علامت Δ:

$$\Delta=4(x^2-(y^2-1))$$

$$x^2-y^2+1=0\Rightarrow y^2-x^2=1$$