فصل سوم

انتگرال و تبدیل فوریه و توابع متعامد

۳-۱ مقدمه

فرض می‌کنیم تابع f متناوب و با دوره تناوب $(۲l)$ باشد، ممکن است وقتی l به سمت بی‌نهایت میل کند $f_{۲l}(x)$ به سمت تابع حدی مانند $f(x)$ میل کند، بدیهی است که f متناوب نخواهد بود. به عنوان مثال فرض کنیم

$$f(x)=\begin{cases}\circ\ , & -l<x<-۱\\ ۲\ , & -۱<x<۱\\ \circ\ , & ۱<x<l\end{cases}\quad , \ f_{۲l}(x+۲l)=f_{۲l}(x)$$

$$\lim_{l\to\infty} f_{۲l}(x)=f(x)=\begin{cases}\circ\ , & x<-۱\\ ۲\ , & -۱<x<۱\\ \circ\ , & x>۱\end{cases}$$

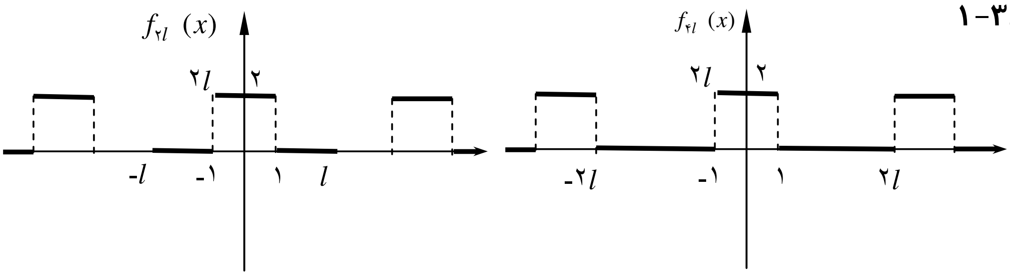
شکل (۳- ۱) را ببینید. و یا برای

$$f_{۲l}(x)=e^{-|x|}\quad , \quad -l<x<l \quad , \quad f_{۲l}(x+۲l)=f_{۲l}(x)$$

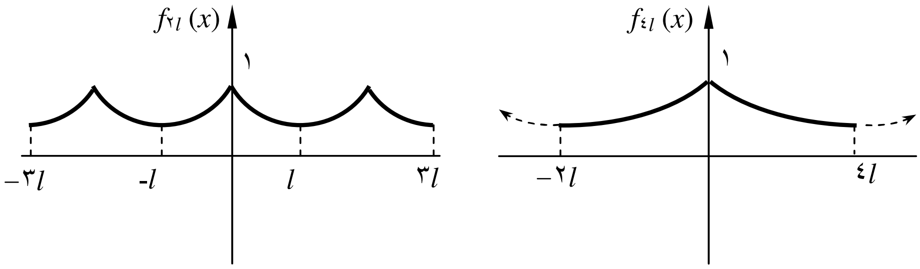
ملاحظه می‌شود که (شکل ۳ − ۲ را ببینید)

$$\lim_{l\to\infty} f_{۲l}(x)=f(x)=e^{-|x|}\qquad -\infty<x<\infty$$

شکل۳-۱



شکل۳-۲



۲-۳ انتگرال فوریه

فرض می‌کنیم تابع f_{2l} با دوره تناوب $(-l,l)$ دارای سری فوریه باشد.

$$f_{2l}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad (1)$$

هدف تعیین حد طرفین تساوی است وقتی که l به سمت بی‌نهایت میل کند، ابتدا فرض کنیم

$$\lim_{l\to\infty} f_{2l}(x)=f(x)$$

و $\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\right|<\infty$ همچنین $\omega_n=\frac{n\pi}{l}$ در نتیجه

$$\Delta\omega=\omega_{n+1}-\omega_n=\frac{\pi}{l}$$

بنابراین $\frac{1}{l}=\frac{\Delta\omega}{\pi}$ در نتیجه

$$f_{2l}(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f_{2l}(u)du+\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\left[\left(\int_{-l}^{l}f_{2l}(u)\cos\frac{n\pi}{l}udu\right)\cos\frac{n\pi}{l}x+\int_{-l}^{l}\left(f_{2l}(u)\sin\frac{n\pi}{l}udu\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\right]\Delta\omega$$

ملاحظه می‌شود که اگر l به سمت بی‌نهایت میل کند، $\Delta\omega$ به سمت صفر میل خواهد کرد. حال با جایگذاری $\frac{1}{l}=\frac{\Delta\omega}{\pi}$ ، l را به سمت بینهایت میل می‌دهیم با توجه به شرایط داده شده و مفهوم انتگرال معین خواهیم داشت

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega udu\right)\cos\omega x+\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\omega udu\right)\sin\omega x\right]d\omega$$

که با فرض

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\omega udu \quad ، \quad A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega udu \qquad (2)$$

خواهیم داشت

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega \qquad (3)$$

که بیان تابع f برحسب یک انتگرال است و آن را انتگرال فوریه تابع f می‌نامند، $A(\omega)$, $B(\omega)$ ضرایب انتگرال فوریه خواهند بود. ملاحظه می‌شود که انتگرال فوریه همان سری فوریه برای مجموع پیوسته است.

توجه : شرط لازم برای وجود انتگرال فوریه تابع f آن است که $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ کراندار باشد.

قضیهٔ ۱: فرض کنیم تابع f در هر بازه کراندار به طور قطعه‌ای هموار و $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ کراندار باشد، آنگاه در هر نقطه $(x\in R)$

$$\int_{0}^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega=\tfrac{1}{2}\left(f(x+)+f(x-)\right)$$

که در آن

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\omega u\,du \quad ، \quad A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega u\,du$$

● **مثال ۱**

برای محاسبهٔانتگرال فوریهٔ $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ داریم

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega u\,du=\frac{2\sin\omega}{\omega} \quad , \quad B(\omega)=0\rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega$$

با توجه به انتگرال فوریهٔ به دست آمده برای تابع $f(x)$ می‌توان نتیجه گرفت که

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & , \quad -1<x<1\\[2mm] \dfrac{\pi}{4} & , \quad x=\pm 1\\[2mm] 0 & , \quad |x|>1\end{cases}$$

که در حالت خاص $x=0$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}=\frac{\pi}{2}$$

● **مثال ۲**

انتگرال فوریهٔ $f(x)=\begin{cases}\sin x & , \ 0\le x<\pi\\ 0 & , \ \text{سایرنقاط}\end{cases}$ برابر است با

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega u\,du=\int_{0}^{\pi}\sin u\cos\omega u\,du=\frac{1+\cos\pi\omega}{1-\omega^2}$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\omega u\,du=\int_{0}^{\pi}\sin u\sin\omega u\,du=\frac{-\sin\pi\omega}{1-\omega^2}$$

در نتیجه

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega x+\cos\omega(\pi-x)}{1-\omega^2}d\omega$$

بدیهی است که اگر f تابعی زوج باشد انتگرال فوریه آن کسینوسی و به صورت زیر خواهد بود.

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\,d\omega$$

$$A(\omega)=\int_{0}^{\infty}f(u)\cos\omega u\,du$$

همچنین اگر f فرد باشد انتگرال فوریه آن سینوسی و به صورت زیر خواهد بود.

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}B(\omega)\sin\omega x\,d\omega$$

$$B(\omega)=\int_{0}^{\infty}f(u)\sin\omega u\,du$$

۳- ۳ شکل مختلط انتگرال فوریه یا تبدیل فوریه

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\big(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\big)d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega u\,du\right)\cos\omega x+\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\omega u\,du\right)\sin\omega x\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega(u-x)\,du\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega(u-x)\,du\,d\omega$$

تابع زیر علامت انتگرال نسبت به ω زوج است. همچنین تابع $f(u)\sin\omega(u-x)$ نسبت به ω فرد است بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\omega(u-x)\,du\,d\omega=0$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega(u-x)\,du\,d\omega-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\omega(u-x)\,du\,d\omega$$

و از آنجا

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\big(\cos\omega(u-x)-i\sin\omega(u-x)\big)\,du\,d\omega$$

و یا

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\omega(u-x)}\,du\,d\omega$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega u}f(u)\,du\right)d\omega$$

فرض کنیم

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega u}f(u)du$$

در این صورت خواهیم داشت

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}F(\omega)d\omega$$

در نتیجه برای تابع f تبدیل فوریه به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\mathscr{F}\{f(x)\}=F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}f(x)dx \qquad (۴)$$

که وارون این تبدیل به صورت

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(\omega)\}=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}F(\omega)d\omega \qquad (۵)$$

خواهد بود. مجدداً اگر f تابع زوج یا فرد باشد تبدیل‌های فوریه کسینوسی $F_c(\omega)$ و سینوسی $F_s(\omega)$ حاصل می‌شوند.

$$\mathscr{F}_c\{f(x)\}=F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx$$

$$\mathscr{F}_s\{f(x)\}=F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}F_c(\omega)\cos\omega x d\omega \ , \ f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}F_s(\omega)\sin\omega x d\omega$$

معمولاً می‌نویسند

$$\mathscr{F}\{f(x)\}=F(\omega)$$

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(\omega)\}=f(x)$$

در انتهای همین فصل جدول‌های تبدیل فوریه آورده شده‌اند.

● مثال ۳

برای حل معادله انتگرال $\int_{0}^{\infty}f(x)\cos\alpha x dx=\begin{cases}1-\alpha & , \ 0\le\alpha<1\\ 0 & , \ \alpha>1\end{cases}$ آن را با تبدیل فوریه کسینوسی مقایسه می‌کنیم، در نتیجه قرار می‌دهیم

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\cos\alpha x dx$$

$$F(\alpha)=\begin{cases}\sqrt{\frac{۲}{\pi}}(۱-\alpha) & \text{و} \quad ۰\le\alpha<۱\\ ۰ & \text{و} \quad \alpha>۱\end{cases}$$

بنابراین با در نظر گرفتن تبدیل فوریه وارون، $f(x)$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$f(x)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_۰^\infty F(\alpha)\cos\alpha x d\alpha=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_۰^۱\sqrt{\frac{۲}{\pi}}(۱-\alpha)\cos\alpha x d\alpha$$

$$=\frac{۲}{\pi}\int_۰^۱(۱-\alpha)\cos\alpha x d\alpha=\frac{۲(۱-\cos x)}{\pi x^۲}$$

$$\frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty\frac{۱-\cos x}{x^۲}\cos\alpha x dx=\begin{cases}۱-\alpha & \text{و} \quad ۰\le\alpha\le۱\\ ۰ & \text{و} \quad \alpha>۱\end{cases}$$

نتیجه: با جایگذاری $f(x)$ به دست آمده در معادلهٔ انتگرال می‌توان انتگرال ناسرهٔ $\int_۰^\infty\frac{\sin^۲ u}{u^۲}du$ را محاسبه کرد

$$\alpha=۰ \;\rightarrow\; \int_۰^\infty\frac{۱-\cos x}{x^۲}=\frac{\pi}{۲} \;\rightarrow\; \int_۰^\infty\frac{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}{x^۲}dx=\frac{\pi}{۲}$$

$$x=۲u \;\rightarrow\; \int_۰^\infty\frac{\sin^۲ u}{u^۲}du=\frac{\pi}{۲}$$

● **مثال ۴**

انتگـرال‌هـای لاپـلاس: تبـدیل فوریـه کـسینوسی تـابع زوج $f(x)=e^{-kx}$ ، $x>۰$ ، $k>۰$ و $f(-x)=f(x)$ برابر است با

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_۰^\infty f(u)\cos\omega u du=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_۰^\infty e^{-ku}\cos\omega u du$$

$$=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\left[\frac{-k}{k^۲+\omega^۲}e^{-ku}\left(\cos\omega u-\frac{\omega}{k}\sin\omega u\right)\right]_۰^\infty=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{k}{k^۲+\omega^۲}$$

و لذا انتگرال فوریهٔ کسینوسی عبارت است از

$$f(x)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_۰^\infty\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{k}{k^۲+\omega^۲}\cos\omega x d\omega=\frac{۲k}{\pi}\int_۰^\infty\frac{\cos\omega x}{k+\omega^۲}d\omega$$

و از آنجا

$$\int_۰^\infty\frac{\cos\omega x}{k^۲+\omega^۲}d\omega=\frac{\pi}{۲k}e^{-kx} \qquad \text{(الف)}$$

به روشی مشابه و با نوشتن انتگرال فوریه سینوسی داریم

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{k^{۲}+\omega^{۲}} d\omega = \frac{\pi}{۲} e^{-kx} \qquad \text{(ب)}$$

انتگرال‌های (الف) و (ب) به انتگرال‌های لاپلاس موسومند.

● **مثال ۵**

برابری $\int_{\circ}^{\infty} \frac{\cos \omega x + \omega \sin \omega x}{۱+\omega^{۲}} d\omega = \begin{cases} \circ & \text{و} \quad x<\circ \\ \frac{\pi}{۲} & \text{و} \quad x=\circ \\ \pi e^{-x} & \text{و} \quad x>\circ \end{cases}$ را بررسی می‌کنیم

با فرض $f(x) = \begin{cases} \circ & \text{و} \quad x<\circ \\ \frac{۱}{۲} & \text{و} \quad x=\circ \\ e^{-x} & \text{و} \quad x>\circ \end{cases}$ ضرایب فوریه $A(\omega)$, $B(\omega)$ عبارت‌اند از

$$A(\omega) = \int_{\circ}^{\infty} f(x) \cos x dx = \int_{\circ}^{\infty} e^{-x} \cos \omega x dx = \frac{۱}{۱+\omega^{۲}}$$

$$B(\omega) = \int_{\circ}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx = \int_{\circ}^{\infty} e^{-x} \sin \omega x dx = \frac{\omega}{۱+\omega^{۲}}$$

در نتیجه بر حسب انتگرال فوریه برای تابع f داریم

$$f(x) = \frac{۱}{\pi} \int_{\circ}^{\infty} \left(A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x \right) d\omega$$

و یا

$$e^{-x} = \frac{۱}{\pi} \int_{\circ}^{\infty} \left(\frac{۱}{۱+\omega^{۲}} \cos \omega x + \frac{\omega}{۱+\omega^{۲}} \sin \omega x \right) d\omega$$

از آنجا

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\cos \omega x + \omega \sin \omega x}{۱+\omega^{۲}} d\omega = \pi e^{-x}$$

۳- ۴ خاصیت پیچش[1] در تبدیل فوریه

در تبدیل فوریه، پیچش برای دو تابع f و g به صورت

$$(f * g)(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(x-u)\, du \qquad (۶)$$

تعریف می‌شود که شرط $f * g = g * f$ برقرار است. ثابت می‌کنیم

[1] Convolution

$$\mathscr{F}\{f*g\}=\mathscr{F}\{f\}.\mathscr{F}\{g\}$$

یعنی تبدیل فوریه پیچش f و g برابر حاصلضرب تبدیل‌های فوریه f و g است.

اثبات: اگر f, g دارای تبدیل‌های فوریه باشند داریم

$$\mathscr{F}\{f\}=F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\omega u}du$$

$$\mathscr{F}\{g\}=G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(v)e^{-i\omega v}dv$$

$$F(\omega)\cdot G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(v)e^{-i\omega(u+v)}dudv$$

با تغییر متغیر $(u\ ,v)$ به $(u\ ,x)$ با رابطهٔ $u+v=x$ داریم

$$\begin{cases}u=u\\ v=x-u\end{cases}\quad ,\quad |J|=1$$

$$F(\omega)\cdot G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(x-u)e^{-i\omega x}dudx$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(x-u)du\right)dx$$

در نتیجه

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(f_*g)(x)e^{-i\omega x}dx=\mathscr{F}\{f_*g\} \qquad (7)$$

● **مثال ۶**

برای حل معادله انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y(u)du}{(x-u)^2+a^2}=\frac{1}{x^2+b^2}$ ، $0<a<b$ با توجه به انتگرالهای لاپلاس مثال (٤) داریم

$$\mathscr{F}\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega v}}{v^2+b^2}dv=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega v}{v^2+b^2}dv$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\pi}{2b}e^{-b\omega}\right)$$
$$=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-b\omega}$$

حال اگر از طرفین معادله، انتگرال فوریه گرفته و قضیهٔ پیچش را به کار بگیریم، خواهیم داشت

$$\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y(u)du}{(x-u)^{2}+a^{2}}\right\}=\mathscr{F}\left\{\frac{1}{x^{2}+b^{2}}\right\}\rightarrow\mathscr{F}\left\{\sqrt{2\pi}\,y(x)*\frac{1}{x^{2}+b^{2}}\right\}=\mathscr{F}\left\{\frac{1}{x^{2}+b^{2}}\right\}$$

$$\sqrt{2\pi}\mathscr{F}\{y(x)\}\times\mathscr{F}\left\{\frac{1}{x^{2}+a^{2}}\right\}=\mathscr{F}\left\{\frac{1}{x^{2}+b^{2}}\right\}$$

$$\sqrt{2\pi}\mathscr{F}\{y(x)\}\times\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\omega}=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-b\omega}$$

$$\mathscr{F}\{y(x)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{a}{b}e^{-(b-a)\omega}$$

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\mathscr{F}\{y(x)\}d\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{a}{b}e^{-(b-a)\omega}d\omega$$

$$=\frac{a(b-a)}{b\pi[x^{2}+(b-a)^{2}]}$$

● **مثال ۷**

برای محاسبهٔ $y(x)$ در معادلهٔ انتگرالی $\int_{0}^{\infty}y(x)\sin xt\,dx=\begin{cases}1, & 0\le t<1\\ 2, & 1\le t<2\\ 0, & t\ge 2\end{cases}$ تبدیل فوریهٔ سینوسی را در نظر می‌گیریم

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}B(\omega)\sin\omega x\,d\omega$$

$$B(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(u)\sin\omega u\,du$$

که با تغییر نام در متغیرها به صورت $f\rightarrow y$ ، $u\rightarrow x$ ، $\omega\rightarrow t$ می‌توان نوشت

$$B(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1\\ 2, & 1\le t<2\\ 0, & t\ge 2\end{cases}$$

از آنجا

$$y(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}B(t)\sin tx\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\sin tx\,dt+\frac{2}{\pi}\int_{1}^{2}2\sin tx\,dt$$

$$=2\frac{\cos x}{\pi x}+\frac{2}{\pi x}-\frac{8}{\pi x}\cos 2x=\frac{2}{\pi x}(\cos x-4\cos 2x+1)$$

● **مثال ۸**

با انتخاب $f(x)=g(x)=e^{-x^{2}}$ قضیه پیچش را تحقیق می‌کنیم

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^{2}}e^{-i\alpha u}du=\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-u^{2}+i\alpha u)}du=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u+i\frac{\alpha}{2})^{2}}\times e^{\frac{\alpha^{2}}{4}}du$$

$$=e^{\frac{\alpha^{2}}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u+i\frac{\alpha}{2})^{2}}du$$

با تغییر متغیر $v^{2}=\left(u+i\dfrac{\alpha}{2}\right)^{2}$ و با توجه به اینکه $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^{2}}dv=\sqrt{\pi}$ می‌باشد داریم

$$F(\alpha)=e^{\frac{\alpha^{2}}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^{2}}dv=\sqrt{\pi}e^{\frac{\alpha^{2}}{4}}$$

در نتیجه $F(\alpha)G(\alpha)=\pi e^{\frac{\alpha^{2}}{2}}$. حال نشان می‌دهیم که $\mathscr{F}\{f_{*}g\}=\pi e^{\frac{\alpha^{2}}{2}}$.

$$f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^{2}}e^{-(x-u)^{2}}du=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2u^{2}+2xu+x^{2})}du=\frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-\frac{x^{2}}{2}}$$

$$\mathscr{F}\{f_{*}g\}=\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ e^{-i\alpha u}\times e^{-\frac{u^{2}}{2}}du=\pi e^{\frac{\alpha^{2}}{2}}$$

و تساوی برقرار است.

● **مثال ۹**

تبدیل فوریهٔ تابع مستطیل $f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2T}\ , & -T<t<T\\ 0\ , & \text{سایرنقاط}\end{cases}$ عبارت است از

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T}\frac{1}{2T}e^{-i\omega u}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\omega T}{\omega T}\quad ,\quad \lim_{\omega\to 0}F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

شکل(۳-۳) را ببینید.

۳- ۵ برخی از خواص تبدیل فوریه

اگر $\lim_{x\to\infty}f(x)=0\,,\ \lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ ، آنگاه $f'(x)$ دارای تبدیل فوریه کسینوسی است.

$$\mathscr{F}_{c}\{f'(x)\}=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)+\omega F_{c}(\omega)\qquad (8)$$

و تبدیل فوریه سینوسی برابر است با

$$\mathscr{F}_{s}\{f'(x)\}=-\omega F_{s}(\omega)\qquad (9)$$

$$\mathscr{F}_c\left\{f''(x)\right\}=-\sqrt{\frac{۲}{\pi}}f'(۰)-\omega^۲F_c(\omega) \qquad (۱۰)$$

$$\mathscr{F}_s\left\{f''(x)\right\}=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega f'(۰)-\omega^۲F_s(\omega) \qquad (۱۱)$$

$$\mathscr{F}\{f(\lambda x)\}=\frac{۱}{\lambda}F(\frac{s}{\lambda}) \qquad (۱۲)$$

$$\mathscr{F}\left\{e^{i\lambda x}f(x)\right\}=F(\omega-\lambda) \qquad (۱۳)$$

$$\mathscr{F}\{f(x-\lambda)\}=e^{-i\lambda\omega}F(\omega) \qquad (۱۴)$$

اگر $u(x\ ,\ t)$ دارای دو متغیر مستقل x , t و مثلاً نسبت به x دارای تبدیل فوریه باشد، یعنی $\lim\limits_{x\to\pm\infty}u(x,t)=۰$ ، آنگاه روابط زیر قابل اثبات هستند. اگر $\mathscr{F}\left\{u(x,t)\right\}=U(\omega,t)$ باشد آنگاه

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=i\omega\mathscr{F}\left\{u\right\}=i\omega U(\omega,t) \qquad (۱۵)$$

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^۲u}{\partial x^۲}\right\}=-\omega^۲\mathscr{F}\left\{u\right\}=-\omega^۲U(\omega,t) \qquad (۱۶)$$

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right\}=(i\omega)^n\mathscr{F}\left\{u\right\}=(i\omega)^nU(\omega,t) \qquad (۱۷)$$

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}\left\{u\right\}=\frac{dU}{\partial t} \qquad (۱۸)$$

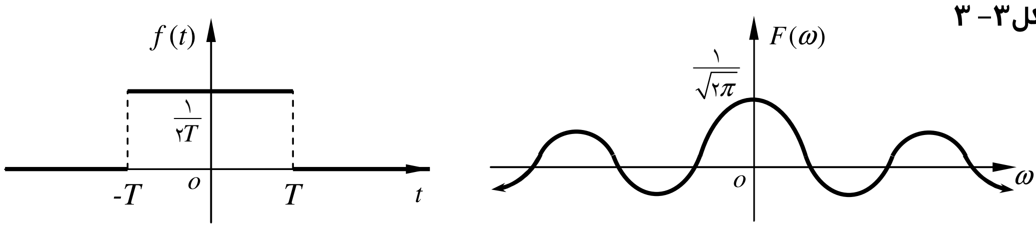
$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right\}=\frac{\partial^n}{\partial t^n}\mathscr{F}\left\{u\right\}=\frac{d^nU}{dt^n} \qquad (۱۹)$$

به عنوان نمونه روابط (۱۶) و (۱۸) را ثابت می‌کنیم. با فرض $v=\dfrac{\partial U}{\partial x}$ داریم

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^۲u}{\partial x^۲}\right\}=\mathscr{F}\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\}=i\omega\mathscr{F}\{v\}=(i\omega)\mathscr{F}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\}=\left(i\omega\right)^۲\mathscr{F}\left\{u\right\}$$

همچنین

شکل۳- ۳



$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-i\omega x}dx=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}Udx\right)=\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}\{u\}=\frac{dU}{dt}$$

در مورد تبدیلات فوریه کسینوسی و سینوسی روابط زیر وجود دارند.

$$\mathscr{F}_s\left\{\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}\right\}=-\omega^۲\mathscr{F}_s\{u\}+\omega u(\circ,t) \qquad (۲۰)$$

$$\mathscr{F}_c\left\{\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}\right\}=-\omega^۲\mathscr{F}_c\{u\}-u(\circ,t) \qquad (۲۱)$$

۳- ۶ تبدیل فوریه متناهی (محدود)

فرض کنیم f در بازه محدود مثلاً $(\circ,\pi)$ پیوسته تکه‌ای باشد. تبدیل **فوریه متناهی** سینوسی $F_s(n)$ برای $f(x)$ عبارت است از

$$\mathscr{F}_s\{f(x)\}=F_s(n)=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}f(x)\sin nxdx \quad , \quad n=۱,۲,... \qquad (۲۲)$$

و تبدیل وارون

$$\mathscr{F}_s^{-۱}\{F_s(n)\}=f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}F_s(n)\sin nx \qquad (۲۳)$$

همچنین تبدیل فوریهٔ متناهی کسینوسی $F_c(n)$ برای تابع f عبارت است از

$$\mathscr{F}_c\{f(x)\}=F_c(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad , \quad n=۱,۲,... \qquad (۲۴)$$

و تبدیل وارون

$$\mathscr{F}_c^{-۱}\{F_c(x)\}=f(x)=\frac{F_c(\circ)}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}F_c(n)\cos nx \qquad (۲۵)$$

هرگاه f' پیوسته و f'' پیوستهٔ تکه‌ای باشد، خواهیم داشت

$$\mathscr{F}_s\{f''(x)\}=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}f''(x)\sin nxdx=\frac{۲n}{\pi}\left[f(\circ)-(-۱)^n f(\pi)\right]-n^۲F_c(n) \qquad (۲۶)$$

همچنین

$$\mathscr{F}_c\{f''(x)\}=\frac{۲}{\pi}\left[(-۱)^n f'(\pi)-f'(\circ)\right]-n^۲F_c(n) \qquad (۲۷)$$

۳- ۷ تبدیل انتگرال

تبدیل $\mathscr{T}$ بر مجموعه توابع را تبدیل **خطی** گویند هر گاه به ازای هر دو تابع $f_۱(t)$ و $f_۲(t)$ و مقادیر ثابت $c_۱$ و $c_۲$ ، تساوی زیر برقرار باشد.

$$\mathscr{T}\{c_۱ f_۱(t)+c_۲ f_۲(t)\}=c_۱\mathscr{T}\{f_۱(t)\}+c_۲\mathscr{T}\{f_۲(t)\} \qquad (۲۸)$$

هر یک از تبدیلات گفته شده، فقط برای یک مجموعه خاصی از توابع قابل اعمال هستند. مثلاً عملگر d، بر مجموعه توابع پیوسته و عملگر I بر مجموعه توابع پیوسته یا پیوسته قطعه‌ای، عمل می‌کنند.

تبدیلات خطی خاصی به نام **تبدیلات انتگرال** در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی، که مهمترین ابزار در حل مسائل مهندسی و فیزیک هستند، کاربردی بسیار دارند.

اگر $f(t)$ بر بازه محدود یا نامحدود $a \le t \le b$ تعریف شده و $K(t,s)$ تابع مشخصی از متغیرهای t و s باشد، تبدیل انتگرال برای $f(t)$ با هسته یا مبدل $K(t,s)$، با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$I\{f(t)\}=\int_b^a K(t,s)f(t)dt \qquad (۲۹)$$

حاصل این تبدیل، تابعی است مانند $F(s)$ که تبدیل انتگرال برای تابع $f(t)$ نامیده می‌شود. بدیهی است تبدیل انتگرال برای تابع معین $f(t)$ وقتی با معنی است که انتگرال رابطه (۲۹) موجود باشد.

انتخاب مناسب مبدل $K(t,s)$ در تبدیل (۲۹)، معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه بر حسب $f(t)$ به معادلات جبری بر حسب $F(s)$ ویا معادلات دیفرانسیل قابل حل برحسب $F(s)$ تغییر می‌یابند، که اگر تبدیل وارون موجود باشد، پس از حل معادله تبدیل شده و تعیین تبدیل وارون، جواب معادلهٔ دیفرانسیل به دست می‌آید. همچنین در مورد معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی، معادلات انتگرال و انتگرودیفرانسیل، می‌توان از تبدیل انتگرال کمک گرفت.

برای $a=۰$ ، $b=+\infty$ و $K(t,s)=e^{-st}$ تبدیل (۲۹) را ***تبدیل لاپلاس*** می‌نامند و آن را به صورت زیر نمایش می‌دهند.

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_۰^\infty e^{-st}f(t)dt=F(s) \qquad (۳۰)$$

برای $a=-\infty$ ، $b=+\infty$ و $K(t,s)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-ist}$ تبدیل (۲۹) را ***تبدیل فوریه*** می‌نامند وآن را به صورت زیر نمایش می‌دهند.

$$\mathscr{F}\{f(t)\}=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t}f(t)dt=F(\omega) \qquad (۳۱)$$

برای $a=۰$، $b=+\infty$ و $K(t,s)=tJ_n(ts)$ تبدیل (۴) را ***تبدیل هنکل*** نوع اول مرتبه n می‌نامند و آن را به صورت زیر نمایش می‌دهند.

$$\mathscr{H}_n\{f(t)\}=\int_۰^\infty tJ_n(ts)f(t)dt=H(s) \qquad (۳۲)$$

برای $a=0$ ، $b=+\infty$ و $K(t,s)=t^{s-1}$ تبدیل (۲۹) را ***تبدیل ملیین*** می‌نامند.

$$\mathscr{M}\{f(t)\}=\int_0^\infty t^{s-1}f(t)dt=M(s) \qquad (۳۳)$$

۳- ۸ تبدیل Z

برای دنباله‌ای از مقادیر $y(k)$ ، $k=0,1,\ldots$ برحسب تعریف، تبدیل Z عبارت است از

$$Y(z)=\mathscr{Z}\{y(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty}y(k)z^{-k} \qquad (۳۴)$$

به عنوان مثال اگر $\{y(k)\}=\{0,2,1,0,0,\ldots\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد، خواهیم داشت

$$Y(z)=0\times1+2\times\frac{1}{z}+1\times\frac{1}{z^2}+0+0,\ \ldots=\frac{2z+1}{z^2} \qquad (۳۵)$$

تابع $Y(z)$ دارای قطب مرتبه دوم در مبداء صفحهٔ مختلط و صفر مرتبه اول در $z=-\frac{1}{2}$ است.

● **مثال ۱۰**

اگر $y(k)=\delta(k)=\begin{cases}1\ , & k=0\\ 0\ , & k=1,2,\ldots\end{cases}$ ، آنگاه، $Y(z)=y(0)z^{-0}=1$

برای $y(k)=\delta(k-n)$ خواهیم داشت

$$Y(z)=z^{-n}=\frac{1}{z^n} \qquad (۳۶)$$

که دارای قطب صفر با مرتبه n است.

۳-۸-۱ خواص تبدیل Z

$$\mathscr{Z}\{ay_1(k)+by_2(k)\}=a\mathscr{Z}\{y_1(k)\}+b\mathscr{Z}\{y_2(k)\} \qquad (۳۷)$$

$$\mathscr{Z}\{y(k-n)\}=z^{-n}\mathscr{Z}\{y(k)\}=z^{-n}Y(z) \qquad (۳۸)$$

$$\mathscr{Z}\{y(k+n)\}=z^{-n}Y(z)-\sum_{k=0}^{\infty}Y(k)z^{n-k} \qquad (۳۹)$$

$$\mathscr{Z}\left\{a^k y(k)\right\}=Y\left(\frac{z}{a}\right) \qquad (۴۰)$$

$$\mathscr{Z}\{ky(k)\}=-z\frac{d}{dz}Y(z) \qquad (۴۱)$$

● **مثال ۱۱**

برای حل معادلهٔ تفاضلی $y(k)+4y(k-1)=\delta(k)$ از طرفین تبدیل Z می‌گیریم

$$Y(z)+۴z^{-۱}Y(z)=۱$$

ویا

$$Y(z)=\frac{z}{z+۴}$$

ناحیه همگرایی $|z|>۴$، وبرای تبدیل وارون باید انتگرال مختلط زیر حل شود، که روش آن در بخش توابع مختلط گفته خواهد شد

$$y(k)=\frac{۱}{۲\pi i}\oint_c Y(z)z^{n-۱}dz=\frac{۱}{۲\pi i}\oint_c \frac{z^n}{z+۴}dz$$

در رابطهٔ فوق c دایره $|z|=۴$ مرز ناحیه همگرایی است.

● **مثال۱۲**

تبدیل Z برای تابع $y(n)=۷\left(\frac{۱}{۳}\right)^n u(n)-۶\left(\frac{۱}{۲}\right)^n u(n)$, $n=۰,۱,۲,...$ که در آن $u(n)$ تابع پله‌ای در مبداء می‌باشد، برابر است با

$$\mathcal{Z}\{y(n)\}=Y(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}\left\{۷\left(\frac{۱}{۳}\right)^n u(n)-۶\left(\frac{۱}{۲}\right)^n u(n)\right\}z^{-n}$$

$$=۷\sum_{۰}^{\infty}\left(\frac{۱}{۳}z^{-۱}\right)^n-۶\sum_{۰}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲}z^{-۱}\right)^n$$

$$=\frac{۷}{۱-\frac{۱}{۳}z^{-۱}}-\frac{۶}{۱-\frac{۱}{۲}z^{-۱}}=\frac{z\left(z-\frac{۳}{۲}\right)}{\left(z-\frac{۱}{۳}\right)\left(z-\frac{۱}{۲}\right)}$$

برای همگرایی باید داشته باشیم

$$\left|\frac{۱}{۳}z^{-۱}\right|<۱ \quad , \quad \left|\frac{۱}{۲}z^{-۱}\right|<۱$$

که ناحیه مشترک آنها $|z|>\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

● **مثال۱۳**

برای تابع ضربه $\delta(n)=\begin{cases}۱ & , \quad n=۰\\ ۰ & , \quad n\neq ۰\end{cases}$ داریم

$$\mathcal{Z}\{\delta(n)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=۱$$

$$\mathscr{Z}\{\delta(n-۱)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = \frac{۱}{z}$$

$$\mathscr{Z}\{\delta(n+۱)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n+۱) z^{-n} = z$$

۳- ۹ توابع متعامد

دسته توابع غیر صفر و انتگرال‌پذیر $\{g_k(x)\}_{k=۱}^{n}$ را در بازه $[a,b]$ در نظر می‌گیریم، ضرب عددی در این مجموعه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. برحسب خاصیت انتگرالهای معیّن این ضرب عددی اکیداً مثبت و بر حسب هر مؤلفه، خطی و متقارن است.

$$< g_m, g_n > \ = \int_a^b g_m(x) g_n(x) dx \qquad (۴۲)$$

نرم هر تابع برابر است با

$$\|g_m\|^{۲} = \int_a^b \left(g_m(x)\right)^{۲} dx \qquad (۴۳)$$

این دسته توابع را نسبت به این **ضرب عددی متعامد** می‌نامند، هرگاه

$$< g_m, g_n > \ = \int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = ۰ \qquad , \qquad m \neq n$$

چنانچه نرم این توابع واحد باشد، یعنی

$$< g_m, g_n > \ = \delta_{mn}$$

آنگاه این دسته توابع را **متعامد یکه** می‌نامند.

دسته توابع $\{g_k\}_{k=۱}^{\infty}$ را در بازه $[a,b]$ متعامد می‌نامند هرگاه هر دسته متناهی از آنها در این بازه متعامد باشند. از هر دسته توابع متعامد $\{g_k\}_{k=۱}^{\infty}$ می‌توان یک دسته توابع متعامد یکه ایجاد کرد. کافی است قرار دهیم $f_k = \dfrac{g_k}{\|g_k\|}$ که در این صورت $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ توابع متعامد یکه خواهند بود.

● **مثال۱۴**

دسته توابع $g_m(x) = \sin mx \quad (m = ۱, ۲, ۳, ...)$ در بازه $-\pi < x < \pi$ متعامدند و $\|g_m\|^{۲} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{۲} mx dx = \pi$. بنابراین دسته توابع $f_m(x) = \dfrac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}$ متعامد یکه خواهند بود.

● **مثال۱۵**

دسته توابع $g_m(x) = \cos mx$ همچنین دسته توابع

$$\{1\ ,\ \cos x\ ,\ \sin x\ ,\ \cos 2x\ ,\ \sin 2x\ ,\ \dots\ ,\ \cos mx\ ,\ \sin mx\ ,\dots\}$$

در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ متعامدند.

دسته توابع $\{f_k\}_{k=1}^{n}$ در بازهٔ $[a\ ,\ b]$ مستقل خطی هستند هرگاه از هر ترکیب خطی برابر صفر، نتیجه شود که همه ضرایب صفرند،یعنی

$$a_1 f_1(n)+a_2 f_2(n)+\dots+a_n f_n(n)=0 \quad \rightarrow \quad a_k=0 \quad , \quad k=1,2,..,n$$

دسته توابع $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ استقلال خطی دارند هرگاه هر تعداد متناهی از آنها مستقل خطی باشند

قضیه۲: هر دسته توابع متعامد مستقل خطی‌اند.

اثبات : فرض کنیم توابع $\{f_k\}_{k=1}^{n}$ در بازه $[a\ ,\ b]$ متعامد باشند.

$$a_1 f_1(n)+a_2 f_2(n)+\cdots+a_n f_n(n)=0$$

نشان می‌دهیم که هر ضریب دلخواه a_k برابر صفر است. طرفین تساوی فوق را به طور عددی در f_k ضرب می‌کنیم.

$$a_1\int_a^b f_1(x)f_k(x)dx+\cdots+a_k\int_a^b \left(f_k(x)\right)^2 dx+\cdots+a_n\int_a^b f_n(x)f_k(x)dx=0$$

بر حسب خاصیت متعامد بودن، همهٔ جملات $a_m\int_a^b f_m(x)f_k(x)dx$, $m\neq k$ برابر صفر خواهند بود بنابراین داریم

$$a_k\left\|f_k\right\|^2=0 \quad \rightarrow \quad a_k=0 \qquad , \quad k=1\ ,2,\dots,n$$

در نتیجه هر دسته توابع متعامد، مستقل خطی است.

قضیه۳: فرض کنیم $\{f_k\}_{k=1}^{n}$ دسته توابع متعامد بر بازه$[a\ ,\ b]$ بوده و f تابعی باشد که در این بازه انتگرال‌پذیر است، آنگاه f ترکیب خطی از f_kها خواهد بود. (f را می‌توان بر حسب f_kها بسط داد).

اثبات : برای تعیین ضرایب a_k در بسط

$$f(x)=a_1 f_1(x)+\cdots+a_n f_n(x)$$

طرفین را به طور عددی در f_k ضرب می‌کنیم

$$\int_a^b f(x)f_k(x)dx=a_1\int_a^b \left(f_1(x)f_k(x)dx\right)+\cdots+a_k\int_a^b \left(f_k(x)\right)^2 dx$$

$$+\cdots+a_n\int_a^b f_k(x)f_n(x)dx$$

که بر حسب خاصیت متعامد بودن خواهیم داشت

$$\int_a^b f_k(x)f(x)dx = a_k \|f_k\|^2$$

در نتیجه

$$a_k = \frac{1}{\|f_k\|^2}\int_a^b f_k(x)f(x)dx \quad , \quad k = 1,2,\dots n$$

ملاحظه می‌شود که فرمول فوق همان ضریب فوریه در سری فوریه است.

یعنی قضیه فوق تعمیم مفهوم سری فوریه است که به جای توابع متعامد $\cos nx, \sin nx$، توابع متعامد $f_k(x)$ به کار گرفته شده‌اند.

● **مثال۱۶**

برای نرم توابع قضیهٔ فیثاغورث برقرار است.

$$\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g\rangle = \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle \le \|f\|^2 + \|g\|^2$$

در حالت کلی (نابرابری مثلثی) اگر f و g متعامد باشند $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle = 0$ بوده و بنابراین

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

● **مثال۱۷**

توابع $g_0(x) = 1$ ، $g_1(x) = x$ ، $g_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ در بازهٔ $[-1,1]$ متعامدند.

$$\langle g_0, g_1\rangle = \int_{-1}^{1} xdx = 0$$

$$\langle g_0, g_2\rangle = \int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)dx = 0$$

$$\langle g_1, g_2\rangle = \int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right)dx = 0$$

۳- ۹-۱ توابع متعامد وزنی

ممکن است دسته توابع $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در بازهٔ $[a\ ,\ b]$ متعامد نباشند ولی بتوان تابعی مانند $\omega(x)$ یافت به طوری که دسته توابع $\left\{f_n(x)\sqrt{\omega(x)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متعامد باشند یعنی

$$\int_a^b \omega(x)f_n(x)f_m(x)dx = 0 \quad ، m \ne n$$

در این صورت تابع ω را تابع وزن می‌نامند. و بسط تابع f بر حسب توابع متعامد وزن دار به صورت زیر خواهد بود.

$$f(x)=c_1 g_1(x)+\cdots+c_k g_k(x)$$

که در آن

$$g_k(x)=\sqrt{\omega(x)}f_k(x)\ ,\ c_k=\frac{1}{k_n}\int_a^b f(x)g_k(x)dx$$

بطوری‌که

$$k_n=\int_a^b \omega(x)\left(f_k(x)\right)^2 dx$$

ثابت شد که دسته توابع متعامد، مستقل خطی‌اند. عکس این مطلب صادق نیست ولی بر حسب روش **گرام- اشمیت** می‌توان از دسته توابع مستقل خطی، دسته توابع متعامد ایجاد کرد.

۳- ۹-۲ روش متعامد سازی گرام- اشمیت

فرض کنیم دسته توابع $\{f_n\}_{k=0}^{n}$ در بازهٔ $[a\ ,\ b]$ مستقل خطی باشند، هدف ایجاد دسته توابع متعامد در این بازه از f_k ها است. ابتدا قرار می‌دهیم $g_0=f_0$ سپس تابع g_1 را به کمک g_0 چنان تعیین می‌کنیم که g_0 و g_1 بر هم عمود باشند. قرار می‌دهیم $g_1=f_1(x)-c_{10}g_0(x)$، برای تعیین c_{10} داریم

$$<g_0,g_1>\ =0\ \rightarrow\ \int_a^b f_1(x)g_0(x)-c_{10}g_0(x)g_0(x)dx=0$$

$$c_{10}=\frac{\int_a^b f_1(x)g_0(x)}{\|g_0\|^2}=\frac{<f_1,g_0>}{\|g_0\|^2}$$

$$g_0=f_0\ ,\ g_1=f_1-c_{10}g_0$$

حال g_2 را به صورت $g_2=f_2-c_{21}g_1-c_{20}g_0$ معرفی می‌کنیم و ضرایب c_{20} و c_{21} را چنان تعیین می‌کنیم که g_2 بر g_1 و g_0 عمود باشد

$$<g_2,g_0>\ =0\quad\rightarrow\quad c_{20}=\frac{\int_a^b f_2(x)g_0(x)}{\|g_0\|^2}=\frac{<f_2,g_0>}{\|g_0\|^2}$$

$$<g_2,g_1>\ =0\quad\rightarrow\quad c_{21}=\frac{\int_a^b f_2(x)g_1(x)}{\|g_1\|^2}=\frac{<f_2,g_1>}{\|g_1\|^2}$$

و با همین روش g_k را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$g_k = f_k - c_{k,k-1} g_{k-1} - \cdots - c_{k1} g_1 - c_{k0} g_0$$

ضرایب را چنان تعیین می‌کنیم که g_k بر توابع تعیین‌شدهٔ قبلی متعامد باشد، در این صورت خواهیم داشت

$$c_{ki} = \frac{\int_a^b f_k(x) g_i(x)}{\|g_i\|^2} = \frac{<f_k, g_i>}{\|g_i\|^2} \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, k$$

● **مثال۱۸**

توابع $f_0(x) = 1$، $f_1(x) = x$ و $f_2(x) = e^x$ در بازهٔ $0 \le x \le 1$ مستقل خطی‌اند، برای ایجاد توابع متعامد قرار می‌دهیم

$$g_0 = f_0$$

$$g_1 = f_1 - c_{10} g_0$$

$$< g_1, g_0 > = 0 \quad \to \quad \int_0^1 (x - c_{10}) dx = 0 \;\Rightarrow\; c_{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow g_1 = x - \frac{1}{2}$$

$$g_2 = f_2 - c_{21} g_1 - c_{20} g_0$$

$$< g_2, g_0 > = 0 \quad \to \quad \int_0^1 (e^x - c_{20}) dx = 0 \quad \Rightarrow c_{20} = e - 1$$

$$< g_2, g_1 > = 0 \quad \to \quad \int_0^1 e^x \left(x - \frac{1}{2}\right) dx - c_{21} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = 0$$

از آنجا $c_{21} = 18 - 6e$ و لذا دسته توابع متعامد عبارتند از

$$g_0 = 1 \;,\; g_1 = x - \frac{1}{2}$$

$$g_2 = e^x + (6e - 18)x + 10 - 4e$$

● **مثال۱۹**

فرض کنیم $f_0(x) = 1$، $f_1(x) = x$، ...،$f_n(x) = x^n$ در بازهٔ $-1 \le x \le 1$ داده شده باشند. از هر ترکیب خطی $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$ که به ازای مقادیر مختلف x ایجاد گردد، با حل دستگاه $n+1$ معادلهٔ $n+1$ مجهولی همگن برای ضرایب a_k و $k = 0, 1, \ldots, n$ همهٔ ضرایب برابر صفر خواهند شد، در نتیجه این دسته توابع مستقل خطی خواهند بود. برای ایجاد دسته توابع متعامد، قرار می‌دهیم

$$g_0(x) = f_0(x) = 1$$

$$g_1(x) = f_1(x) - c_{10} g_0(x)$$

$$< g_1, g_0 > \; = 0 \rightarrow \quad c_{10} = 0$$

$$g_2(x) = f_2(x) - c_{21} g_1(x) - c_{20} g_0(x)$$

$$< g_2, g_0 > \; = 0 \rightarrow \int_{-1}^{1} (x^2 - c_{20}) dx = 0 \Rightarrow c_{20} = \frac{1}{3}$$

$$< g_2, g_1 > \; = 0 \quad \rightarrow \quad c_{21} = 0$$

در نتیجه

$$g_0(x) = 1$$
$$g_1(x) = x$$

به همین روش

$$g_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$g_3(x) = x^3 - \frac{3}{5} x$$

الی آخر، که با فرض $p_0(x) = g_0(x)$ و $p_n(x) = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{n!} g_n(x)$، چند جمله‌ایهای لژاندر به دست می‌آیند

$$p_0(x) = 1$$
$$p_1(x) = x$$
$$p_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$
$$p_3(x) = \frac{15}{6} x^3 - \frac{3}{2} x$$

و در حالت کلی

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

نتیجه اینکه چند جملها های لژاندر متعامدند.

◀ تمرین ۳-۱

۱- برابری‌های زیر را بررسی کنید.

$$1)\ \int_{0}^{\infty}\frac{\sin\pi\omega\sin\omega x}{1-\omega^{2}}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin x & , \quad 0\le x\le\pi\\ 0 & , \quad x\ge\pi\end{cases}$$

$$2)\ \int_{0}^{\infty}\frac{\omega^{3}\sin\omega x}{\omega^{4}+4}d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-x}\cos x \quad x\ge 0$$

$$3)\ \int_{0}^{\infty}\frac{2\cos^{2}\frac{\pi\omega}{2}\sin\omega x}{\omega^{2}-1}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos x & 0\le x\le\pi\\ 0 & x\ge\pi\end{cases}$$

۲- معادلهٔ انتگرالی زیر را حل کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty}y(u)y(x-u)du=e^{-x^{2}}$$

۳- نشان دهید که $g(x)=\begin{cases}x^{2} & , \quad 0<x<1\\ 0 & , \quad \text{در خارج}\end{cases}$ دارای انتگرال فوریه است. سپس انتگرال فوریهٔ آن را محاسبه کنید.

۴- نشان دهید که $f(x)=\begin{cases}x & , \quad 0<x<1\\ 1 & , \quad 1<x<2\\ 0 & , \quad \text{در خارج}\end{cases}$ دارای انتگرال فوریه است سپس انتگرال فوریهٔ آن را محاسبه و به کمک آن $f(1)$ را تعیین کنید.

۵- با داشتن $f_n(x)=x^n$، $n=0,1,2,\ldots$ که دربازهٔ $(0,\infty)$ تعریف شده باشد، یک دسته توابع متعامد یکه با وزن e^{-x} ایجاد کنید.

۶- با فرض $\varphi_m(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx}$ ، $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ نشان دهید

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_m(x)\overline{\varphi}_n(x)dx=1$$

نتیجه: دسته توابع $\{\varphi_m\}$ متعامد مزدوج هستند.

۷- درمجموعهٔ توابع a_0 ، a_1+a_2x و $a_3+a_4x+a_5x^{2}$ ضرایب a_k ، $0\le k\le 5$ را چنان تعیین کنید که توابع در بازهٔ $(-1,1)$ متعامد یکه باشند.

۸- ثابت کنید $f_\circ(x)=۱$, $f_۱(x)=x+۱$ ، ... ، $f_۵(x)=x^۵+۵$ در بازهٔ $-۱\le x\le ۱$ مستقل خطی‌اند، سپس دسته توابع متعامد حاصل از آنها را به دست آورید.

۹- توابع $p_۱$ ، $p_۲$ ، ... ، p_n را از فرمول رودریک

$$p_n(x)=\frac{۱}{۲^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^۲-۱)^n \quad , \quad -۱\le x\le ۱$$

ایجاد کنید و ثابت کنید متعامد خواهند بود.

۱۰- نشان دهید که توابع ۱ ، $۱-x$ و $۲-۴x+x^۲$ در بازهٔ $(\circ,\infty)$ نسبت به تابع وزن $\omega(x)=e^{-x}$ متعامد یکه هستند.

۱۱- نشان دهید که انتگرال فوریهٔ $f(x)=e^{-x}+e^{-۲x}$, $x>\circ$ ، برابر است با

$$\frac{۶}{\pi}\int_\circ^\infty \frac{\left(۲+\omega^۲\right)\cos\omega x}{۴+۵\omega^۲+\omega^۴}d\omega$$

۱۲- با استفاده از انتگرال فوریه ثابت کنید.

۱) $$\int_\circ^\infty \frac{\sin\pi\omega\sin\omega x}{۱-\omega^۲}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}\sin x & , \quad \circ<x\le\pi\\ \circ & , \quad x\ge\pi\end{cases}$$

۲) $$\int_\circ^\infty \frac{\cos\omega x}{۱+\omega^۲}d\omega=\frac{\pi}{۲}e^{-x} \quad , \quad x>\circ$$

۳) $$\int_\circ^\infty \frac{۱-e^{-kx}}{x}\sin x dx=\tan^{-۱}k \quad , \quad k>\circ$$

٤) $$\int_\circ^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{۲}$$ (**راهنمایی** :در تمرین قبل مقدار k را بینهایت بگیرید)

۱۳- انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی توابع زیر را بنویسید

۱) $$f(x)=\begin{cases}\sin x & , \quad \circ<x<\pi\\ \circ & , \quad \text{در خارج}\end{cases}$$

۲) $$f(x)=\begin{cases}|\sin x| & , \quad -\pi<x\le\pi\\ \circ & , \quad \text{در خارج}\end{cases}$$

۱۴- اگر n,m اعداد صحیح باشند نشان دهید که $$\int_{-\pi}^{\pi}e^{inx}e^{-imx}dx=\begin{cases}\circ & , \quad n\ne m\\ ۲\pi & , \quad n=m\end{cases}$$

۱۵- تبدیل فوریهٔ کسینوسی تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x<0 \end{cases}$$

۱۶- انتگرال فوریهٔ تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & , \quad a<x<a+\varepsilon \\ 0 & , \quad \text{در خارج} \end{cases}$ را بنویسید.

۱۷- انتگرال فوریهٔ سینوسی توابع زیر را بنویسید.

$$1)\quad f(x)=\begin{cases} 1-x & , \quad 0<x<1 \\ 0 & , \quad x>1 \end{cases} \qquad 2)\quad f(x)=\begin{cases} 1 & , \quad 0<x<1 \\ 2-x & , \quad 1<x<2 \\ 0 & , \quad x>2 \end{cases}$$

۱۸- ضرایب c_1 ، c_2 و c_3 را چنان تعیین کنید که

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[x-\left(c_1\sin x+c_2\sin 2x+c_3\sin 3x\right)\right]^2 dx$$

می نیمم شود.

۱۹- تبدیل فوریه کسینوسی برای تابع $f(x)=e^{-mx}\ ,\ m>0$ را بنویسید و با استفاده از آن ثابت کنید.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos p\omega}{\omega^2+\beta^2}d\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-p\beta}\ ,\ p>0\ ,\ \beta>0$$

۲۰- تبدیل فوریه کسینوسی توابع زیر را تعیین کنید.

$$1)\ f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad 0<x<k \\ 0 & , \quad x>k \end{cases} \qquad 2)\ f(x)=xe^{-ax}\ ,\quad a>0 \qquad 3)\ f(x)=\frac{1}{1+x^2}\ ,\ x>0$$

۲۱- تبدیل فوریه سینوسی توابع زیر را محاسبه کنید.

$1)\ f(x)=xe^{-x}\ ,\quad x>0$

$2)\ f(x)=e^{-x}\sin x\ ,\quad x>0$

$3)\ f(x)=e^{-ax^2}\ ,\quad a>0$

۲۲- ثابت کنید دسته توابع $T_0=1$، $T_1(x)=x$ ، $T_2(x)=2x^2-1$ و $T_3(x)=4x^3-3x$ در بازه $(-1\ ,\ 1)$ با وزن $\omega(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ متعامدند.

۲۳- تبدیل فوریه تابع $f\left(x\right)=\dfrac{x^{۳}}{x^{۴}+۴}$ ، $x>۰$ را محاسبه کنید.

۲۴- از دسته توابع مستقل خطی $\left\{۱,x,x^{۲},x^{۳},...\right\}$ در بازه $(۱-,۱)$ دسته توابع متعامد یکه ایجاد کنید.

۲۵- بسط فوریه کسینوسی تابع $f\left(x\right)=x\ ,\quad ۰<x<۲$ به صورت

$$f\left(x\right)=۱+\sum_{۱}^{\infty}\frac{۴}{n^{۲}\pi^{۲}}\left(\cos n\pi-۱\right)\cos\frac{n\pi x}{۲}$$

است. اولاً اتحاد پار سوال را بنویسید، ثانیاً مجموع سری $\sum_{۱}^{\infty}\dfrac{۱}{n^{۴}}$ را محاسبه کنید.

۲۶- در تبدیل $\mathscr{Z}$ برای تابع گسسته $x(n)$ ملاحظه شد که

$$\mathscr{Z}\left(z\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(n\right)z^{-n}$$

حال اگر قرار دهیم $z=re^{i\omega}$ خواهیم داشت

$$\mathscr{Z}\left(re^{i\omega}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x\left(n\right)\left(re^{i\omega}\right)^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x\left(n\right)r^{-n}\right]e^{-i\omega n}=\mathscr{F}\left[x\left(n\right)r^{-n}\right] \qquad (۱)$$

و برای حالت خاص $r=۱$

$$\mathscr{Z}\left(e^{i\omega}\right)=\mathscr{F}\left\{x\left(n\right)\right\}$$

برای ایجاد تبدیل وارون از رابطه (۱) داریم

$$x\left(n\right)r^{-n}=\mathscr{F}^{-۱}\left\{\mathscr{Z}\left(re^{i\omega}\right)\right\}$$

از آنجا

$$x\left(n\right)=r^{n}\mathscr{F}^{-۱}\left\{\mathscr{Z}\left(re^{i\omega}\right)\right\}=\frac{r^{n}}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi}\mathscr{Z}\left(re^{i\omega}\right)e^{i\omega n}d\omega$$

$$=\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi}\mathscr{Z}\left(re^{i\omega}\right)\left(re^{i\omega}\right)^{n}d\omega$$

از $z=re^{i\omega}$ داریم $dz=ire^{i\omega}d\omega$ و یا $d\omega=\dfrac{۱}{i}z^{-۱}dz$ در نتیجه

$$x\left(n\right)=\frac{۱}{۲\pi i}\oint_{c}\mathscr{Z}\left(z\right)z^{n-۱}dz$$

که در آن c دایره‌ای به مرکز و شعاع برابر شعاع همگرایی $\mathscr{Z}(z)$ است.