۵- ۱ معادله حرکت ارتعاشی یک تار مرتعش یا موج یک بعدی

به عنوان اولین کاربرد معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات نسبی، معادلهٔ حاکم بر حرکت تار الاستیک به طول l، که به طور کشیده در دو انتها تثبیت شده باشد، به دست می‌آوریم. امتداد تار را محور x ها و ابتدای آن را مبداء و خط عمود بر امتداد تار از مبداء را محور yها می‌گیریم. در لحظهٔ $t = 0$، تار را از حالت سکون خارج کرده و در محورهای مختصات موقعیت عرضی آن را بر حسب طول x و زمان $t = 0$ با معادلهٔ $y\,(x\ ,\ 0) = f\,(x)$ نشان می‌دهیم (شکل۵-۱). شرایط فیزیکی زیر را می‌پذیریم

۱- جرم تار به طول واحد ثابت است (تار همگن است)

۲- تار کاملاً الاستیک است و در مقابل خم کردن مقاومتی ندارد.

۳- نیروهای کششی از ابتدا و انتهای تار به اندازه‌ای است که می‌توان نیروی جاذبه بر تار را درمقابل آن صرف‌نظر کرد.

۴- طبق قانون هوک، نیروهای کششی در هر نقطه مماس بر تار هستند.

۵- ارتعاش، حرکتی محدود در صفحه xoy در امتداد قائم است و حرکت افقی وجود ندارد.

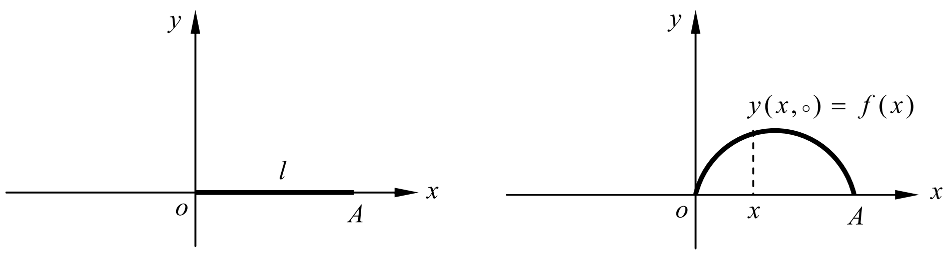
برای به دست آوردن معادلهٔ حرکت، یعنی تعیین موقعیت نقطه x $0 < x < l$ در زمان t به صورت تابع، قسمتی کوچک از تار مثلاً قطعهٔ PQ به طول Δx را در نظر گرفته و نیروهای وارد برآن را مشخص می‌کنیم.

نیروی کششی از نقطهٔ O بر PQ را T_1 و زاویهٔ بردار نیرو با محور x ها را α می‌گیریم. نیروی کششی از نقطه A بر PQ را T_2 و زاویه بردار نیرو با محور x ها را β می‌نامیم. تصویر نیروها بر محور x ها عبارتند از $T_1 \cos\alpha$ و $T_2 \cos\beta$ چون حرکت افقی وجود ندارد. (شکل۵-۲)

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta \left(= T\right) \qquad (۱)$$

تصویر نیروها برمحور y ها عبارتند از $-T_1 \sin\alpha$ و $T_2 \sin\beta$. بنا بر قانون دوم نیوتن برآیند این نیروها در هر نقطه بین x و $x + \Delta x$ برابر است با جرم ($\rho\Delta x$) ضرب در شتاب $\partial^2 y / \partial t^2$، یعنی

شکل۵-۱



$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

با توجه به رابطه (۱) می‌توان نوشت

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

و یا

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho \Delta x}{T} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

حال $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ ضریب زاویهٔ آن خط مماس در نقاط x و $x+\Delta x$ هستند. یعنی

$$\tan\beta = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \quad \text{و} \quad \tan\alpha = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}$$

بنابراین

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x} = \frac{\rho \Delta x}{T} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

اگر طرفین را بر Δx تقسیم و Δx را به سمت صفر میل دهیم، خواهیم داشت.

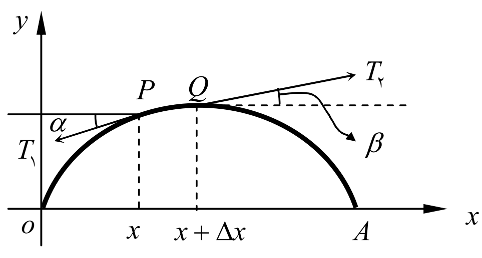
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \ , \quad \left(c^2 = \frac{\rho}{T}\right) \tag{۲}$$

که معادلهٔ حرکت تار مرتعش و یا معادلهٔ موج حاصل از آن است. هرگاه نیروی خارجی $F(x,t)$ در نقطهٔ x و در زمان t اثر کند معادلهٔ حرکت به صورت

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F(x,t) \tag{۳}$$

خواهد بود. یک روش برای حل PDE فوق همانند آنچه در مورد PDE با ضرایب ثابت و ناهمگن گفته شده می‌باشد. یعنی جواب عمومی برابر است با مجموع جواب PDE بدون طرف دوم و یک جواب خصوصی که به کمک عملگرها به دست می‌آید. در این مورد باید جواب حاصل در شرایطی صادق باشد. ملاحظه می‌شود که نقاط O و A در طول حرکت ثابت هستند، پس باید شرایط

شکل ۵-۲



$$B.C \ : \begin{cases} y\,(\circ\,,t)=\circ \\ y\,(l\ ,t)=\circ \end{cases} \qquad (۴)$$

مرزی فوق برقرار باشند. به علاوه وضعیت اولیه $g(x)$ با معادلهٔ $y\,(x\ ,\circ)=f\,(x)$ مشخص شده است. حال اگر ارتعاش با سرعت اولیهٔ $g(x)$ انجام شود باید داشته باشیم

$$\frac{\partial y}{\partial x}\,(t\ ,\circ)=g\,(x)$$

بنابراین شرایط اولیه به صورت

$$I.C \ : \begin{cases} y\,(x\ ,\circ)=f\,(x) \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x\ ,\circ)=g\,(x) \end{cases} \ , \quad \circ<x<l \qquad (۵)$$

خواهند بود. یعنی جواب معادله باید در شرایط مرزی (۴) و شرایط اولیه (۵) صدق کنند.

۵- ۲ روشهای مختلف برای حل معادلهٔ موج

۱- روش دالامبر (حالت همگن): معادلهٔ موج بدون طرف دوم را با شرایط اولیه و مرزی حل می‌کنیم

$$\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲}=c^۲\,\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲}$$

$$y\,(x\,,t)=\varphi(x+ct)+\psi(x-ct)$$

برحسب شرایط اولیه

$$\begin{cases} y\,(x\ ,\circ)=f\,(x) \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x\ ,\circ)=g\,(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f\,(x)=\varphi(x)+\psi(x) & (۱) \\ g\,(x)=c\varphi'(x)-c\psi'(x) & (۲) \end{cases} \ , \ \circ<x<l$$

با مشتق‌گیری از رابطه اول و به کمک رابطه دوم حاصل می‌شود.

$$\varphi'(x)=\frac{۱}{۲c}g(x)+\frac{۱}{۲}f'(x)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین

$$\varphi(x)=\frac{۱}{۲}f(x)+\frac{۱}{۲c}\int_\circ^x g(x)dx+\lambda$$

با جایگذاری در رابطه (۱) خواهیم داشت

$$\psi(x)=\frac{۱}{۲}f\,(x)-\frac{۱}{۲c}\int_\circ^x g\,(u)du-\lambda$$

بنابراین

$$y(x,t)=\varphi(x+ct)+\psi(x-ct)$$

$$=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\left[\int_0^{x+ct} g(u)du-\int_0^{x-ct} g(u)du\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(u)du \qquad (6)$$

۲- روش دالامبر(حالت ناهمگن): معادله موج با طرف دوم با شـرایط اولیه $y(x,0)=f(x)$, $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=g(x)$ را حل می‌کنیم. یعنی معادله

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=F(x,t) \qquad t>0$$

با شرایط اولیه

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=g(x) \text{ و } y(x,0)=f(x)$$

در این حالت، تغییر متغیرهای $u=x+ct$ و $v=x-ct$ را اعمال می‌کنیم و با روشی مشابه حالت (۱)

$$y(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(u)du+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\bar{t})}^{x+c(t-\bar{t})} F(\bar{x},\bar{t})d\bar{x}d\bar{t} \quad (7)$$

به دست خواهد آمد. ملاحظه می‌شود که در حالت خاص $F=0$ جواب حالت (۱) حاصل می‌شود.

۳- متغیرهای جدا شونده: معادلهٔ موج به صورت همگن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad 0\le x\le l \qquad t\ge 0$$

و شرایط اولیه و کناری زیر را در نظر می‌گیریم

$$u(0,t)=0\,,\ u(l,t)=0$$

$$u(x,0)=f(x)\,,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$$

جوابی را به صورت $u(x,t)=F(x)G(t)$ جستجو می‌کنیم. با مشتق‌گیری و جایگذاری، خواهیم داشت

$$F''(x)G(t)=\frac{1}{c^2}F(x)G''(t)$$

یا

$$\frac{F''(x)}{F(x)}=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{G''(t)}{G(t)}$$

شرط تساوی دو تابع از دو متغیر مستقل x و t آن است که مقداری ثابت باشند که در غیر این صورت

رابطه‌ای بین x و t ایجاد می شود که مغایر استقلال آنها است. پس

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{G''(t)}{G(t)} = \lambda$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda \ \rightarrow\ F''(x) - \lambda F(x) = 0$$

ابتدا فرض می‌کنیم $\lambda = 0$ در نتیجه

$$F''(x) = 0 \ \rightarrow\ F(x) = Ax + B$$

با توجه به شرایط مرزی

$$u(0, t) = 0 \ \rightarrow\ F(0)G(t) = 0$$

$G(t) \neq 0$ بوده زیرا در غیر این‌صورت $u(x, t) = 0$ و هیچ حرکتی مشخص نمی‌شود در نتیجه

$$F(0) = 0 \ \rightarrow\ B = 0$$

همچنین

$$u(l,t) = 0 \ \rightarrow\ F(l)G(t) = 0 \rightarrow\ F(l) = 0 \rightarrow A = 0$$

در این حالت $F(x) = 0$ و در نتیجه $u(x, t) = 0$ و حرکتی تعیین نمی‌شود. حال فرض کنیم λ مثبت باشد یعنی $\lambda = p^2$ در نتیجه

$$F''(x) - p^2F(x) = 0 \rightarrow\ F(x) = Ae^{px} + Be^{-px}$$

با در نظرگرفتن شرایط اولیه

$$u(0,t) = 0 \ \rightarrow\ F(0) = 0 \rightarrow\ A + B = 0$$

$$u(l,t) = 0 \ \rightarrow\ F(l) = 0 \rightarrow\ Ae^{pl} + Be^{-pl} = 0$$

با حل این دو معادله مجدداً $A = B = 0$ و $F(x) = 0$ به دست می‌آید که جواب مطلوب نیست.

اگر λ منفی باشد، یعنی $\lambda = -p^2$، خواهیم داشت

$$F''(x) + p^2F(x) = 0 \ \rightarrow\ F(x) = A\cos px + B\sin px$$

$$u(0,t) = 0 \ \rightarrow\ F(0) = 0 \rightarrow\ A = 0$$

$$u(l,t) = 0 \ \rightarrow\ F(l) = 0 \rightarrow\ B\sin pl = 0$$

که اگر $B = 0$ باشد، همان نتیجه قبلی به دست می‌آید، حالت دیگر این است که

$$B \neq 0 \ ,\ \ \sin pl = 0 \rightarrow\ pl = k\pi \rightarrow\ p = \frac{k\pi}{l}\ ,\ k = 1, 2, \ldots$$

در نتیجه

$$F(x) = B\sin\frac{k\pi}{l}x$$

چون به ازای هر k یک جواب به دست می‌آید قرار می‌دهیم

$$F_k(x) = B_k \sin\frac{k\pi}{l}x\ ,\ \ k = ۱\ ,۲\ ,...$$

معادلهٔ دیفرانسیل بر حسب G به صورت

$$G''(t) + c^۲ p^۲ G(t) = ۰ \to \quad G''(t) + \frac{k^۲ c^۲ \pi^۲}{l^۲} G(t) = ۰$$

$$G(t) = C\cos\frac{kc\pi}{l}t + D\sin\frac{kc\pi}{l}t\ ,\quad k = ۱\ ,۲\ ,...$$

و یا

$$G_k(t) = C_k \cos\frac{kc\pi}{l}t + D_k \sin\frac{kc\pi}{l}t$$

در نتیجه

$$u_k(x,t) = \left(\alpha_k \cos\frac{kc\pi}{l}t + \beta_k \sin\frac{kc\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

که در آن $\alpha_k = B_k C_k$ و $\beta_k = B_k D_k$، $k = ۱\ ,۲\ ,...$ می‌باشند. حال با توجه به قضیهٔ ابر وضعیت (رویهم گذاری) جواب نهایی به صورت

$$u(x,t) = \sum_{k=۰}^{\infty}\left(\alpha_k \cos\frac{kc\pi}{l}t + \beta_k \sin\frac{kc\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x \qquad (۸)$$

خواهد بود. برای محاسبه ضرایب از شرایط اولیه کمک می‌گیریم

$$u(x,۰) = f(x) \to f(x) = \sum_{k=۰}^{\infty}\alpha_k \sin\frac{k\pi}{l}x$$

به کمک سری فوریه سینوسی

$$\alpha_k = \frac{۲}{l}\int_۰^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x dx$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,۰) = g(x) \to \ g(x) = \sum_{k=۰}^{\infty}\left(\frac{k\pi c}{l}\beta_k\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

در نتیجه

$$\beta_k = \frac{l}{k\pi c}\frac{۲}{l}\int_۰^l g(x)\sin\frac{k\pi}{l}x dx = \frac{۲}{k\pi c}\int_۰^l g(x)\sin\frac{k\pi}{l}x dx$$

و $u\ (x\ ,t)$ وضعیت نقطه x را در زمان t کاملاً معین می کند یعنی $u\ (x\ ,t)$ حرکت نوسانی (حرکت

موج) را تعیین می‌کند. حال فرض کنیم حرکت بدون سرعت اولیه باشد یعنی $g(x)=\circ$، در این صورت $\beta_k=\circ$ و

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\cos\frac{k\pi c}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

که با توجه به رابطه مثلثاتی

$$\cos\frac{k\pi c}{l}t\sin\frac{k\pi}{l}x=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{k\pi}{l}(x-ct)+\sin\frac{k\pi}{l}(x+ct)\right]$$

می‌توان نوشت

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{k=\circ}^{\infty}\alpha_k\sin\frac{k\pi}{l}(x-ct)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sin\frac{k\pi}{l}(x+ct)$$

این دو سری از جایگذاری $(x-ct)$ و $(x+ct)$ به جای x در سری فوریه

$$u(x,\circ)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sin\frac{k\pi}{l}x=f(x)$$

به دست می‌آیند بنابراین می‌توان معادلهٔ حرکت را به صورت

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(f^*(x-ct)+f^*(x+ct)\right)$$

نیز نوشت که در آن f^* بسط فوریه سینوسی تابع f با دوره تناوب $(2l)$ است.

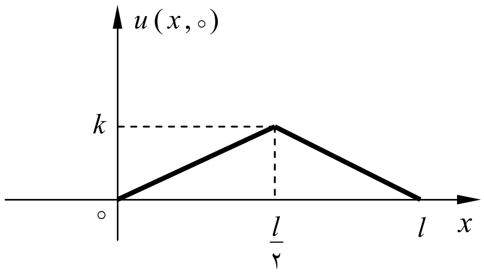
● **مثال ۱**

معادلهٔ حرکت موج $\circ\le x\le l$ ، $t\ge\circ$ $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ وقتی وضعیت اولیه به صورت شکل (۵-۳) معین شده باشد، عبارت است از

$$u(x,\circ)=f(x)=\begin{cases}\frac{2k}{l}x & \circ<x<\frac{l}{2}\\[4pt] \frac{2k}{l}(l-x) & \frac{l}{2}<x<l\end{cases}$$

شکل۵-۳

وضعیت اولیه تار مرتعش



$$g(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \beta_n = 0$$

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{8k}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{l}\ , \quad n = 1, 2, \ldots$$

در نتیجه

$$u(x\ ,\ t) = \frac{8k}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{l}x\ \cos\frac{\pi c}{l}t - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{l}x\ \cos\frac{3\pi c}{l}t + \cdots\right]$$

● مثال ۲

معادلهٔ حرکت تار مرتعش $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ وقتی وضعیت اولیه تار به صورت کشیده در امتداد محور x ها و با سرعت اولیه $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(x\ ,\ 0) = g(x)$ به ارتعاش درآمده باشد عبارت است از

$$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_k = 0$$

$$\beta_k = \frac{2}{k\pi c}\int_0^l g(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx$$

که با معلوم بودن $g(x)$ معادلهٔ ارتعاش به صورت

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_k\sin\frac{k\pi c}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

به دست می‌آید.

۴- حل معادلهٔ موج در حالت ناهمگن

الف- طرف دوم معادلهٔ موج، تابعی مستقل از زمان باشد، یعنی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x)\quad , 0 \le x \le l\quad , t \ge 0 \qquad (9)$$

و دارای شرایط اولیه و شرایط مرزی به صورت

$$IC:\begin{cases} u(x\ ,\ 0) = f(x) \\ u_t(x\ ,\ 0) = g(x)\end{cases} \qquad BC:\begin{cases} u(0\ ,\ t) = a \\ u(l\ ,\ t) = b\end{cases}$$

باشد. جوابی را به صورت $u(x\ ,\ t) = v(x\ ,\ t) + h(x)$ در نظر می‌گیریم و $h(x)$ را چنان تعیین می‌کنیم که معادله به حالت بدون طرف دوم بدل شود. با مشتق‌گیری و جایگذاری در رابطه (۹) خواهیم داشت

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + F(x)$$

اگر $h(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل $c^{2}\dfrac{\partial^{2} h}{\partial x^{2}}+F(x)=0$ صدق کند، معادلهٔ (۹) به صورت همگن

$$\frac{\partial^{2} v}{\partial t^{2}}=c^{2}\frac{\partial^{2} v}{\partial x^{2}} \qquad (10)$$

بدل خواهد شد. شرایط اولیه و شرایط مرزی جدید نیز به صورت

$$IC:\begin{cases} v(x,0)=f(x)-h(x)\\ v_{t}(x,0)=g(x)\end{cases} \qquad BC:\begin{cases} v(0,t)=a-h(0)\\ v(l,t)=b-h(l)\end{cases}$$

تبدیل خواهند شد.بنابراین اگر $h(x)$ محاسبه شود، تغییر متغیری که معادلهٔ (۹) را به صورت معادلهٔ همگن (۱۰) تبدیل کند، به دست خواهد آمد. و چنانچه معادله دیفرانسیل $c^{2}h''(x)+F(x)=0$ را با شرایط $h(0)=a$ و $h(l)=b$ حل کنیم معادله (۹) به صورت

$$\frac{\partial^{2} v}{\partial t^{2}}=c^{2}\frac{\partial^{2} v}{\partial x^{2}}$$

با شرایط اولیه و شرایط مرزی ساده تری تبدیل می‌شود

$$IC:\begin{cases} v(x,0)=f(x)-h(x)\\ v_{t}(x,0)=g(x)\end{cases} \qquad BC:\begin{cases} v(0,t)=0\\ v(l,t)=0\end{cases}$$ شرایط مرزی همگن

که با یکی از روشهای قبل قابل حل است.

ب- طرف دوم معادلهٔ موج تابع زمان و مکان باشد، یعنی

$$\frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}}=c^{2}\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}+h(x,t)\ ,\ 0<x<l\ ,\ t>0 \qquad (11)$$

$$IC:\begin{cases} u(x,0)=f(x)\\ u_{t}(x,0)=g(x)\end{cases}$$ شرایط اولیه $$BC:\begin{cases} u(0,t)=0\\ u(l,t)=0\end{cases}$$ شرایط مرزی همگن

تابعی را به صورت $u(x,t)=\sum_{1}^{\infty}u_{n}(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$ اختیار و $u_{n}(t)$ را چنان تعیین می‌کنیم که $u(x,t)$ جواب معادله (۱۱) باشد. با مشتق‌گیری و جایگذاری داریم

$$\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n^{2}\pi^{2}}{l^{2}}u_{n}(t)\sin\frac{n\pi}{l}x\right) \quad , \quad \frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(u''_{n}(t)\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u''_{n}(t)+\frac{c^{2}n^{2}\pi^{2}}{l^{2}}u_{n}(t)\right)\sin\frac{n\pi}{l}x=h(x,t)$$

و با فرض $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n''(t)+\lambda_n^2 u_n(t)\right)\sin\frac{n\pi}{l}x = h(x,t)$$

حال بسط فوریه سینوسی $h(x,t)$ را در نظر می گیریم

$$h(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

که در آن

$$h_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l h(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad (12)$$

و پس از جایگذاری، خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n''(t)+\lambda_n^2 u_n(t)-h_n(t)\right)\sin\frac{n\pi}{l}x=0$$

چون دسته توابع $\left\{\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ متعامد در نتیجه مستقل خطی‌اند، نتیجه می‌شود که

$$u_n''(t)+\lambda_n^2 u_n(t)=h_n(t) \qquad (13)$$

این معادله دیفرانسیل دارای جواب

$$u_n(t)=a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^l h_n(\alpha)\sin\lambda_n(t-\alpha)\,d\alpha \qquad (14)$$

می‌باشد، بنابراین جواب معادلهٔ (۱۱) به صورت

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^l h_n(\alpha)\sin\lambda_n(t-\alpha)\,d\alpha\right\}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

خواهد بود که در آن

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

در نتیجه

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad (15)$$

همچنین $u_t(x,0)=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\lambda_n\sin\frac{n\pi}{l}x$ و از آنجا

$$b_n=\frac{2}{l\lambda_n}\int_0^l\left(g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\right)dx \qquad (16)$$

که جواب $u(x,t)$ کاملاً معین می شود.

پ– حالت عمومی، وقتی که شرایط مرزی همگن نباشد، یعنی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=h(x,t)\quad ,\ 0\le x\le l\ \ ,\ t\ge 0 \tag{17}$$

و شرایط اولیه و شرایط مرزی به صورت

$$IC:\begin{cases}u(x\ ,0)=f\ (x)\\ u_t\ (x\ ,0)=g\ (x)\end{cases}\qquad BC:\begin{cases}u(0\ ,t)=p(t)\\ u(l\ ,t)=q(t)\end{cases} \tag{18}$$

باشد برای حل، جوابی را به صورت $u(x,t)=v(x,t)+\omega(x,t)$ در نظر می‌گیریم و $\omega(x,t)$ را چنان تعیین می‌کنیم که شرایط مرزی همگن شوند. با مشتق‌گیری و جایگذاری خواهیم داشت

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=h(x,t)-\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}+c^2\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \tag{19}$$

در مورد شرایط (۱۸) داریم

$$IC:\begin{cases}v\ (x\ ,0)=f\ (x)-\omega(x\ ,0)\\ v_t\ (x\ ,0)=g\ (x)-\omega_t\ (x\ ,0)\end{cases}\qquad BC:\begin{cases}v\ (0\ ,t)=p(t)-\omega(0\ ,t)\\ v\ (l\ ,t)=q(t)-\omega(l\ ,t)\end{cases}$$

حال شرایط $\omega(0\ ,t)=p\ (t)$ و $\omega(l\ ,t)=q\ (t)$ را اعمال می‌کنیم، در نتیجه تابع $\omega\ (x\ ,t)$ باید به صورت $\omega(x\ ,t)=p\ (t)+\frac{x}{l}\big(q\ (t)-p\ (t)\big)$ انتخاب شود. با توجه اینکه می‌توانستیم تغییر متغیر را به صورت

$$u(x,t)=v\ (x\ ,t)+\omega(x\ ,t)=v\ (x\ ,t)+a\ (t)x\ +b\ (t)$$

اختیار کرده، $a(t)$ و $b(t)$ را چنان تعیین کنیم که شرایط اولیه برای متغیرجدید $v\ (x\ ,t)$ همگن شود، مجدداً

$$\omega(x\ ,t)=p\ (t)+\frac{x}{l}\big(q\ (t)-p\ (t)\big)$$

به دست خواهد آمد. در هرحالت معادلهٔ (۱۷) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=h(x,t)-\left[p''(x)+\frac{x}{l}\big(q''(x)-p''(x)\big)\right]=H(x,t)$$

با شرایط

$$IC:\begin{cases}v\ (x\ ,0)=f\ (x)-\omega(x\ ,0)=F(x)\\ v_t\ (x\ ,0)=g\ (x)-\omega_t\ (x\ ,0)=G(x)\end{cases}\qquad BC:\begin{cases}v\ (0\ ,t)=0\\ v\ (l\ ,t)=0\end{cases}$$

که با حالت (ب) قابل حل است.

● **مثال ۳**

در معادلهٔ موج $\lambda = \frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} - \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$ با شرایط (λ ثابت)

$$BC:\begin{cases} u(\circ, t) = t \\ u(۱, t) = \sin t \end{cases} \quad , \quad t \geq \circ \qquad IC\begin{cases} u(x\ , \circ) = x\,(۱ - x) \\ u_t\ (x\ , \circ) = \circ \end{cases} \quad \circ \leq x \leq ۱$$

خواهیم داشت $\omega(x\ , t) = t + x\,(\sin t - t)$ در نتیجه معادله جدید به صورت

$$\frac{\partial^۲ v}{\partial t^۲} - \frac{\partial^۲ v}{\partial x^۲} = \lambda + x \sin t$$

با شرایط

$$IC:\begin{cases} v\ (x\ , \circ) = x\,(۱ - x) \\ v_t\ (x\ , \circ) = -۱ \end{cases} \quad , \qquad BC:\begin{cases} v\ (\circ, t) = \circ \\ v\ (۱, t) = \circ \end{cases}$$

با توجه به روابط (۱۲)، (۱۵) و (۱۶) داریم

$$h_n(t) = ۲\int_{\circ}^{l} \left(\lambda + x \sin t\right) \sin n\pi x dx$$

$$= \frac{۲\lambda}{n\pi}\left[۱ - (-۱)^n\right] + \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n\pi} \sin t = A_n + B_n \sin t$$

$$a_n = ۲\int_{\circ}^{۱} \left(x(۱ - x) \sin n\pi x\right) dx = \frac{۴}{(n\pi)^۳}\left[۱ - (-۱)^n\right]$$

$$b_n = \frac{۲}{n\pi}\int_{\circ}^{۱} \sin n\pi x dx = \frac{۴}{(n\pi)^۲}\left[۱ - (-۱)^n\right]$$

حال با تعریف

$$\varphi_n(t) = \frac{۱}{n\pi}\int_{\circ}^{t} \left(A_n + B_n \sin\alpha\right) \sin\left[n\pi(t - \alpha)\right] d\alpha$$

$$= \frac{۱}{n\pi}\left\{\frac{A_n}{n\pi}\left(۱ - \cos n\pi t\right) + \frac{B_n}{n\pi}\left(\sin ۲t - ۲t\right)\cos n\pi t - \left(\cos ۲t - ۱\right)\sin n\pi t\right\}$$

خواهیم داشت

$$v(x,t) = \sum_{۱}^{\infty}\left(a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t + \varphi_n(t)\right)$$

از آنجا جواب معادله به صورت $u\,(x\ , t) = v\ (x\ , t) + t + x\ (\sin t - t)$ به دست می آید.

۱

● **مثال ۵**

معادلهٔ حرکت موج برای $x > \circ$ همانند حالت محدود $\circ < x < l$ حل می‌شود، مثلاً

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{l}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \;,\; t > \circ \;,\; x > \circ$$

برای شرایط اولیه و شرایط مرزی به صورت

$$IC:\begin{cases} u(x\;,\circ) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x\;,\circ) = g(x) \end{cases} \qquad BC:\; u(\circ\,,t) = \circ$$

و شرط اضافی، کراندار بودن $u(x\;,t)$ به ازای $x \to \infty$، قرارمی دهیم $u(x\;,t) = F(x)G(t)$ که پس از مشتق‌گیری و جایگذاری، معادلات دیفرانسیل زیر برای توابع F و G به دست می‌آیند.

$$F''(x) + \lambda^2 F(x) = \circ \;\;,\;\; F(\circ) = \circ \;\;,\;\; \left|F(x)\right| < \infty$$

$$G''(t) + \lambda^2 c^2 G(t) = \circ$$

در نتیجه

$$F(x\;,\lambda) = \sin \lambda x$$

$$G(t) = A\cos \lambda ct + B\sin \lambda ct$$

$$u_\lambda(x,t) = \big(A(\lambda)\cos \lambda ct + B(\lambda)\sin \lambda ct\big)\sin \lambda x$$

$$u(x,t)=\int_{\circ}^{\infty}\big(A(\lambda)\cos\lambda ct+B(\lambda)\sin\lambda ct\big)\sin\lambda x d\lambda$$

با در نظر گرفتن شرایط اولیه داریم

$$u(x,\circ)=f(x)=\int_{\circ}^{\infty}A(\lambda)\sin\lambda x d\lambda \;\rightarrow\; A(\lambda)=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}f(x)\sin\lambda x dx$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}u(x,\circ)=g(x)=\int_{\circ}^{\infty}\lambda cB(\lambda)\sin\lambda x d\lambda \;\rightarrow\; B(\lambda)=\frac{۲}{\pi\lambda c}\int_{\circ}^{\infty}g(x)\sin\lambda x dx$$

کافی‌است که شرایط کراندار بودن $\int_{\circ}^{\infty}|f(x)|dx$ و $\int_{\circ}^{\infty}|g(x)|dx$ را اعمال کنیم. با جایگذاری $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ در $u\,(x\,,\,t)$، جواب نهایی به دست می‌آید، که می‌تواند به صورت

$$u(x,t)=\varphi(x+ct)+\psi(x-ct)$$

نوشته شود.

● **مثال ۶**

معادله حرکت موج به صورت

$$c^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}-\frac{\partial^{۲}u}{\partial t^{۲}}=f(x,t) \qquad -\infty<x<\infty \qquad t>\circ$$

با شرایط

$$u\,(x\,,\,\circ)=g\,(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x\,,\,\circ)=\circ$$

را در نظر می‌گیریم. با فرض $\Im\{u\,(x\,,\,t)\}=U\,(\omega\,,\,t)$ و توجه به فرمولهای تبدیل فوریه مشتقها، از طرفین معادله تبدیل فوریه می‌گیریم

$$c^{۲}\omega^{۲}U+\frac{d^{۲}U}{dt^{۲}}=F(\omega,t)$$

پس از حل معادلهٔ دیفرانسیل معمولی

$$\frac{d^{۲}U}{dt^{۲}}+c^{۲}\omega^{۲}U=F(\omega,t)$$

با شرایط $U\,(\omega,\circ)=G\,(\omega)$، $\frac{dU}{dt}(\omega,\circ)=\circ$ که در آن $G(\omega)$ تبدیل فوریه $g(x)$ می‌باشد، تابع $U(\omega,t)$ حاصل می‌شود که به کمک تبدیل وارون فوریه تابع جواب $u\,(x\,,\,t)$ به دست می‌آید.

برای حالت خاص $f(x, t) = ۰$ داریم

$$U(\omega, t) = Ae^{i\omega ct} + Be^{-i\omega ct}$$

با توجه به شرایط اولیه

$$U(\omega, t) = \frac{۱}{۲}G(\omega)\left(e^{i\omega ct} + e^{-i\omega ct}\right)$$

در نتیجه

$$u(x,t) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\left(e^{i\omega ct} + e^{-i\omega ct}\right)e^{i\omega x}d\omega$$

مجدداً برای حالت خاص

$$g(x) = \begin{cases} ۱ & , \quad |x| < ۱ \\ ۰ & , \quad |x| > ۱ \end{cases}$$

داریم

$$G(\omega) = \frac{۲\sin\omega}{\omega}$$

در نتیجه جواب معادله به صورت

$$u(x, t) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۲\sin\omega}{\omega}\left(e^{i\omega(x+ct)} + e^{i\omega(x-ct)}\right)d\omega$$

حاصل می شود.

۵- ۴ معادلهٔ ارتعاش غشاء نازک یا معادلهٔ حرکت موج دو بعدی

غشاء نازکی را اختیار و شرایط فیزیکی زیر را در مورد آن می‌پذیریم

۱- غشاء کاملاً همگن (جرم واحد سطح ثابت است) و طوری قابل انعطاف است که در مقابل خم کردن مقاومتی ندارد، در نتیجه نیروی کششی همواره بر سطح غشاء مماس است.

۲- غشاء کاملاً کشیده شده و در نقاط مرزی بر صفحهٔ xoy ثابت شده است (شکل۵-۵)

افزایش طول بر واحد سطح غشاء در نظر گرفته نمی‌شود، در نتیجه مطابق قانون هوک نیروی کشش در تمام نقاط و در تمام جهت‌ها ثابت است.

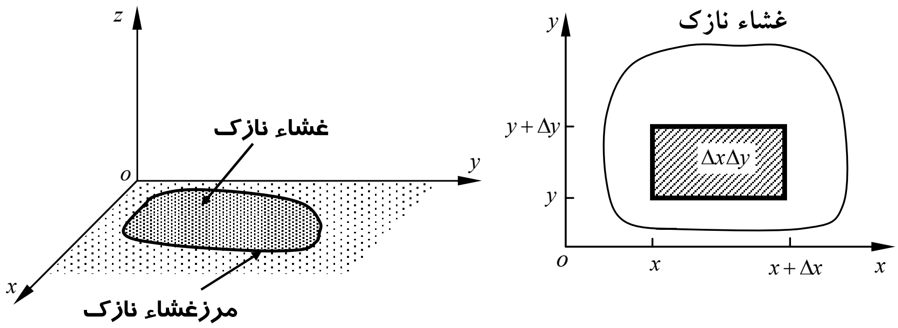
۳- تغییر مکان در جریان نوسان (ارتعاش) ، نسبت به سطح غشاء کوچک و ضریب زاویه‌های مماس کوچک‌اند.

۴- تنها نوسانهای قائم مورد نظراند و حرکت افقی موجود نخواهد بود.

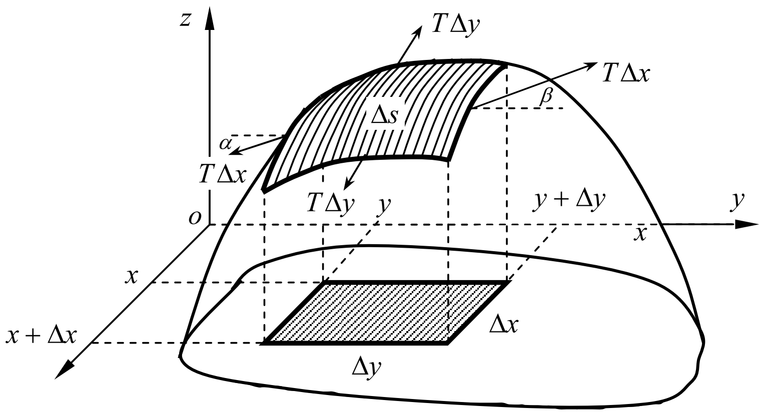
برای به دست آوردن معادلهٔ حرکت، نیروهای موثر در قسمت کوچکی از سطح غشاء را تعیین می‌کنیم (شکل۵-۶).

چون انحراف غشاء، کوچک در نظر گرفته می‌شود، اضلاع غشاء تقریباً برابر Δx و Δy هستند. کشش T نیروی وارد بر واحد طول است، پس نیروهای وارد بر اضلاع تقریباً $T\Delta x$ و $T\Delta y$ اند و چون غشاء کاملاً قابل انعطاف است پس این نیروها مماس بر سطح غشاء هستند. ابتدا مولفه‌های افقی نیروها را در نظر می‌گیریم. این مولفه‌ها از ضرب کردن، اندازه نیرو در زاویه‌های انحراف به دست می‌آیند. چون این زاویه‌ها کوچک اند، کسینوس آنها برابر واحد و مؤلفه‌های این نیروها در دو ضلع مقابل همدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین حرکت افقی غشاء قابل اغماض است. مؤلفه‌های قائم نیروها بر امتداد y ها عبارتند از $T\Delta y\sin\beta$ و $-T\Delta y\sin\alpha$ چون α و β کوچک هستند، پی می‌توان به جای سینوس، تانژانت در نظر گرفت، بنابراین

شکل۵-۵
غشاءِ نازک در صفحه xoy



شکل۵-۶
ارتعاش غشاءِ دراثراعمال نیرو



$$T\Delta y\left(\sin\beta-\sin\alpha\right)\simeq T\Delta y\left(\tan\beta-\tan\alpha\right)$$
$$=T\Delta y\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,y_1)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,y_2)\right]$$

که در آن y_1 , y_2 بین y و $y+\Delta y$ هستند. همچنین مؤلفه‌های نیروها در امتداد x ها عبارتند از

$$T\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial y}x_1,y+\Delta y\right)-\frac{\partial u}{\partial y}(x_2,y)$$

که در آن x_1 و x_2 بین x و $x+\Delta x$ قرار دارند.

بنابر قانون دوم نیوتن برآیند نیروهای فوق برابر است با جرم $\rho\Delta s$ (قسمتی از غشاء در نظر گرفته شده) ضرب در شتاب $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ که ρ چگالی غشاء و $\Delta s=\Delta x\Delta y$. بنابراین

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\Delta y\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,y_1)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,y_2)\right]+T\Delta x\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_1,y+\Delta y)-\frac{\partial u}{\partial y}(x_2,y)\right]$$

با تقسیم طرفین بر $\rho\Delta x\Delta y$ و استفاده از تعریف مشتق، معادلهٔ حرکت به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\ ,\ \ c^2=\frac{T}{\rho}$$

و یا به طور خلاصه

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\ \nabla^2 u$$

شرایط اولیه معمولاً به صورت

$$IC:\begin{cases}u(x,y,0)=f(x,y)\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0)=g(x,y)\end{cases}$$

خواهند بود، و شرایط مرزی برای تمام نقاط مرزی $u=0$ خواهد بود. هر گاه نیروی خارجی مانند $F(x,y,t)$ نیز در حرکت غشاء مؤثر باشد، معادلهٔ حرکت به صورت

$$(*)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\ \nabla^2 u+F(x,y,t)$$

خواهد بود.

● مثال ۷

برای تعیین حرکت غشاء نازک مستطیل شکل باید $u(x,y,t)$ را چنان تعیین کنیم که برای محیط مستطیل، $u=0$ و شرایط اولیه به صورت $u(x,y,0)=f(x,y)$ و $\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0)=f(x,y)$ باشد. با فرض $u(x,y,t)=F(x,y)G(t)$ و با مشتق‌گیری و جایگذاری در معادلهٔ $(*)$

خواهیم داشت

$$FG'' = c^{۲}(F_{xx}G + F_{yy}G)$$

$$\frac{G''}{c^{۲}G} = \frac{۱}{F}(F_{xx} + F_{yy}) = -q^{۲}$$

$$\begin{cases} G'' + \lambda^{۲}G = ۰ \\ F_{xx} + F_{yy} + q^{۲}F = ۰ \end{cases} , \quad \lambda = cq$$

برای حل معادله بار دیگر روش متغیرهای جدا شونده را به کار می‌گیریم

$$F(x, y) = H(x)Q(y)$$

$$\frac{۱}{H}\frac{d^{۲}H}{dx^{۲}} = -\frac{۱}{Q}(\frac{d^{۲}Q}{dy^{۲}} + q^{۲}Q) \triangleq -k^{۲} \ , \ (k > ۰)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^{۲}H}{dx^{۲}} + k^{۲}H = ۰ \\ \dfrac{d^{۲}Q}{dy^{۲}} + p^{۲}Q = ۰ \end{cases} , \ p^{۲} = q^{۲} - k^{۲}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} H(x) = A\cos kx + B\sin kx \\ Q(y) = C\cos py + D\sin py \end{cases}$$

با توجه به شرایط اولیه $Q(۰) = Q(b) = ۰$ و $H(۰) = H(a) = ۰$ خواهیم داشت

$$A = ۰ \ , \ B\sin ka = ۰$$

اجباراً $B \neq ۰$، پس $ka = m\pi$ در نتیجه $k = \frac{m\pi}{a}$، $m = ۱ , ۲ , ...$ به همین روش $C = ۰$، $D \neq ۰$، $p = \frac{n\pi}{b}$، $n = ۱ , ۲ , ...$ بنابراین

$$\begin{cases} H_m(x) = B_m \sin\dfrac{m\pi}{a}x \ , \ m = ۱ ,۲,... \\ Q_n(y) = D_n \sin\dfrac{n\pi}{b}y \ , \ n = ۱ ,۲,... \end{cases}$$

چون $p^{۲} = q^{۲} - k^{۲}$ و $\lambda = cq$ پس $\lambda = c\sqrt{k^{۲} + p^{۲}}$ و به ازای $k = \frac{m\pi}{a}$ و $p = \frac{n\pi}{b}$، مقدار $\lambda = \lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^{۲}}{a^{۲}} + \frac{n^{۲}}{b^{۲}}}$، حاصل می‌شود و جواب متناظر با $G'' + \lambda^{۲}G = ۰$ عبارت است از

$$G_{mn}(t) = B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + C_{mn}\sin\lambda_{mn}t$$

و جوابهای معادله برابراند با

$$u_{mn}(x,y,t) = \left(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + C_{mn}\sin\lambda_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

و جواب کلی به صورت زیر خواهد بود

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}(x,y,t)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + C_{mn}\sin\lambda_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

برای محاسبه ضرایب برحسب شرایط اولیه از سری فوریه دوگانه کمک می‌گیریم

$$u(x,y,0) = f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$B_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b\left(f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\right)dxdy\ ,\quad m,n=1,2,\ldots$$

همچنین

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = g(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{mn}\lambda_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\right)$$

و از آنجا

$$C_{mn} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^a\int_0^b\left(g(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\right)dxdy\ ,\quad m,n=1,2,\ldots$$

و معادلهٔ حرکت به طور کامل معین می‌شود.

۵- ۵ معادلهٔ انتشار حرارت

در یک جسم صلب فلزی حرارت از سمت نقاط پر دما به سمت نقاط کم دما منتشر می‌شود. آزمونهای فیزیکی نشان داده‌اند که سرعت انتشار حرارت با گرادیان درجه حرارت متناسب است (قانون فوریه)، یعنی اگر $u(x,y,z,t)$ درجه حرارت نقطه (x,y,z) در لحظهٔ t باشد، سرعت انتشار حرارت v برابر است با

$$\vec{v} = -k.grad(u)\ (\text{ضریب حرارتی } k) \tag{۲۹}$$

که اگر R قسمتی از جسم فلزی و S سطح خارجی آن باشد، مقدار حرارتی که در واحد زمان از R خارج می شود برابراست با $\iint_S v_n ds$ که در آن $v_n = \vec{v}\cdot\vec{n}$ مؤلفهٔ قائم در امتدادبردار $\vec{n}$ عمود بر S

می‌باشد.از رابطهٔ (۲۹) و به کمک قضیهٔ دیورژانس خواهیم داشت

$$\iint_S v_n ds = \iiint_R div(\vec{v})dxdydz$$
$$= -k\iiint_R div(gradu)dxdydz$$
$$= -k\iiint_R \nabla^۲ udxdydz \qquad (۳۰)$$

از طرف دیگر مقدار کل حرارت در جسم R برابر است با

$$H = \iiint_R \sigma\rho udxdydz$$

که در آن σ گرمای ویژهٔ جسم و ρ چگالی آن است. بنابراین تغییر گرمای جسم برابر است با

$$-\frac{\partial H}{\partial t} = -\iiint_R \rho\sigma \frac{\partial u}{\partial t} dxdydz \qquad (۳۱)$$

که با مقدار حرارتی که از جسم R خارج می‌شود، برابر است.

$$-\iiint_R \sigma\rho \frac{\partial u}{\partial t} dxdydz = -k\iiint_R \nabla^۲ udxdydz$$

و یا

$$-\iiint_R (\sigma\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k\ \nabla^۲ u)dxdydz = ۰ \qquad (۳۲)$$

شرط برقراری تساوی (۳۲) در تمام نقاط جسم R، آن است که

$$\sigma\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k\ \nabla^۲ u = ۰ \ \rightarrow \nabla^۲ u = c^۲ \frac{\partial u}{\partial t}\ ,\ c^۲ = \frac{k}{\sigma\rho}$$

و یا

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲} = c^۲ \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (۳۳)$$

که معادلهٔ انتشارحرارت است.یعنی جواب $u\ (x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ t)$ مشخص کنندهٔ درجهٔ حرارت نقطهٔ $(x\ ,\ y\ ,\ z)$ در لحظهٔ t است. در حالتهای خاصی، معادلهٔ انتشار حرارت در جسم دو بعدی به صورت

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = c^۲ \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (۳۴)$$

و در جسم یک بعدی معادلهٔ انتشار حرارت به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = c^۲ \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (۳۵)$$

● مثال ۸

میله ای فلزی به طول l را در نقاط $(x=\circ)$ و $(x=l)$ به درجه حرارت صفر و در نقاط $\circ<x<l$ به درجه حرارت $f(x)$ می رسانیم. شرایط اولیه و مرزی عبارتند از

$$BC:\begin{cases}u(\circ,t)=\circ\\ u(l,t)=\circ\end{cases}\ (\text{همگن})\quad ,\quad t\geq\circ \qquad\qquad IC: u(x,\circ)=f(x)$$

برای حل روش متغیرهای جداشونده را در نظر می گیریم

$$u(x,t)=F(x)G(t)$$

در نتیجه

$$\frac{G'}{c^{۲}G}=\frac{F''}{F}\triangleq -p^{۲}\ ,\ (p>\circ)$$

$$F''(x)+p^{۲}F(x)=\circ\rightarrow F(x)=A\cos px+B\cos px$$

$$u(\circ,t)=\circ\rightarrow F(\circ)=\circ\rightarrow A=\circ$$

$$u(l,t)=\circ\rightarrow\ F(l)=\circ\rightarrow B\sin pl=\circ$$

$$B\neq\circ\ ,\ \sin pl=\circ\rightarrow pl=n\pi\ \ ,\ \ p=\frac{n\pi}{l}$$

در نتیجه

$$F_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

از معادلهٔ $G'+c^{۲}p^{۲}G=\circ$ و با توجه به $p=\frac{n\pi}{l}$ و اختیار $\lambda_n=\frac{cn\pi}{l}$ خواهیم داشت

$$G_n(t)=C_ne^{-\lambda_n^{۲}t}$$

در نتیجه

$$u_n(x,t)=\alpha_ne^{-\lambda_n^{۲}t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$u(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}\alpha_ne^{-\lambda_n^{۲}t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

که با توجه به شرایط اولیه

$$u(x,\circ)=f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

و به کمک سری فوریه سینوسی

$$\alpha_n=\frac{۲}{l}\int_{\circ}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

و معادلهٔ انتشار حرارت، کاملاً معین می‌شود.

در حالت خاص $f(x)=\begin{cases} x & , \quad 0<x<\frac{l}{2} \\ l-x & , \quad \frac{l}{2}<x<l \end{cases}$ خواهیم داشت

$$\alpha_n=\begin{cases} 0 & n=2,2,6,\ldots. \\ \dfrac{4l}{n^2\pi^2} & n=1\ ,5\ ,9\ ,\ldots \\ \dfrac{-4l}{n^2\pi^2} & n=3\ ,7\ ,11\ ,\ldots \end{cases}$$

$$u(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)e^{-\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 t}-\frac{1}{q}\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right)e^{-\left(\frac{3c\pi}{l}\right)^2 t}+\cdots\right]$$

● **مثال ۹**

(مسئله انتشار حرارت در میله بادوسر نامتناهی) معادلهٔ انتشار حرارت در یک میلهٔ فلزی با طول بینهایت عبارت است از

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad ,-\infty<x<\infty \quad , \quad t\geq 0$$

تنها شرط اولیه $u(x\ ,0)=f\ (x)$ است. شرایط مرزی می‌تواند به صورت $u\ (\pm\infty\ ,t)=0$ مطرح شود

$$u(x,t)=F(x)G(t)$$

$$\frac{G'}{c^2G}=\frac{F''}{F}\triangleq -p^2 \ , \ \ (p>0)$$

$$\begin{cases} F''+p^2F=0 \\ G'+c^2p^2G=0 \end{cases}$$

در نتیجه $F(x)=A\cos px+B\sin px$ و $G(t)=e^{-c^2p^2t}$ بنابراین

$$u(x,t;p)=\big(A(p)\cos px+B(p)\sin px\big)e^{-c^2p^2t}$$

برای تعیین $A(p)$ و $B(p)$ از شرط اولیه و انتگرال فوریه کمک می‌گیریم. جواب معادله به صورت

$$u(x,t)=\int_0^\infty u(x,t;p)dp=\int_0^\infty \big(A(p)\cos px+B(p)\sin px\big)e^{-c^2p^2t}dp$$

حاصل می‌شود. با توجه به شرط اولیه، داریم

$$u(x,\circ)=f(x)=\int_{\circ}^{\infty}\left(A(p)\cos px+B(p)\sin px\right)dp$$

در نتیجه

$$A(p)=\frac{\text{۱}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos px dx\ \ ,\ \ B(p)=\frac{\text{۱}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin px dx$$

برای ساده کردن جواب از فرمول دیگر انتگرال فوریه، یعنی

$$g(x)=\frac{\text{۱}}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(g(v)\cos(\omega x-\omega v)\right)dv d\omega$$

می‌توان نوشت

$$u(x,\circ)=\frac{\text{۱}}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(v)\cos p(x-v)\right)dv dp$$

و یا

$$u(x,t)=\frac{\text{۱}}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos p(x-v)\ e^{-c^{\text{۲}}p^{\text{۲}}t}dv\right)dp$$

با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری

$$u(x,t)=\frac{\text{۱}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\left(\int_{\circ}^{\infty}e^{-c^{\text{۲}}p^{\text{۲}}t}\cos p(x-v)dp\right)dv$$

با استفاده ازانتگرال $\int_{\circ}^{\infty}e^{-s^{\text{۲}}}\cos bs ds=\frac{\sqrt{\pi}}{\text{۲}}e^{-b^{\text{۲}}}$ که روش محاسبهٔ آن دربخش محاسبهٔ انتگرال‌های حقیقی به کمک مانده‌ها بیان خواهد شد و تغییر متغیر $s=cp\sqrt{t}$ و اختیار $b=\frac{x-v}{\text{۲}c\sqrt{t}}$ خواهیم داشت

$$\int_{\circ}^{\infty}e^{-c^{\text{۲}}p^{\text{۲}}t}\cos p(x-v)dp=\frac{\sqrt{\pi}}{\text{۲}c\sqrt{t}}\exp\left[-\frac{(x-v)^{\text{۲}}}{\text{۴}c^{\text{۲}}}t\right]$$

در نتیجه

$$u(x,t)=\frac{\text{۱}}{\text{۲}c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\exp\left[-\frac{(x-v)^{\text{۲}}}{\text{۴}c^{\text{۲}}t}\right]dv$$

و بالاخره با انتخاب $\omega=\frac{v-x}{\text{۲}c\sqrt{t}}$ معادلهٔ انتشار حرارت به صورت

$$u(x,t)=\frac{\text{۱}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+\text{۲}c\omega\sqrt{t})e^{-\omega^{\text{۲}}}d\omega$$

نوشته می‌شود. در حالت خاص $f(x)=\begin{cases}u_{\circ}\ , & |x|\leq\text{۱}\\ \circ\ , & |x|>\text{۱}\end{cases}$، نتیجه

$$u(x,t)=\frac{u_\circ}{\sqrt{\pi t}}\int_{-۱}^{۱}\exp\left[-\frac{(x-v)^۲}{۴c^۲t}\right]dv$$

و اگر $u_\circ=۱۰۰$ و $c^۲=۱$ و توجه به $\omega=\frac{v-x}{۲c\sqrt{t}}$ خواهیم داشت

$$u(x,t)=\frac{۵۰}{۲c\sqrt{\pi t}}\int_{-\frac{(۱+x)}{۲\sqrt{t}}}^{\frac{(۱+x)}{۲\sqrt{t}}} e^{-\omega^۲}d\omega$$

که بر حسب جدول توزیع نرمال در احتمال، به ازای هر نقطهٔ x و هر زمان t درجهٔ حرارت $u(x,t)$ معین می‌شود. نمودار $u(x,t)$ به ازای افزایش t در شکل (۵-۷) رسم شده است.

● **مثال ۱۰**

(مسئله انتشار حرارت در میله بایک سر نامتناهی) انتهای میله‌های فلزی در نقطهٔ $x=\circ$ همواره در درجه حرارت صفر نگهداری می‌شود، انتهای دیگر در بینهایت است، نقطهٔ $x>\circ$ را در لحظهٔ اولیه به درجه حرارت $f(x)$ می‌رسانیم، هدف تعیین درجه حرارت نقطـهٔ دلخـواه x در زمـان t یعنـی تـابع انتشار حرارت است. باید معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات نسبی را با شرایط

$$BC: u(\circ,t)=\circ \qquad t\geq\circ \qquad \text{(همگن)}$$

$$IC: u(x,\circ)=f(x) \qquad x>\circ$$

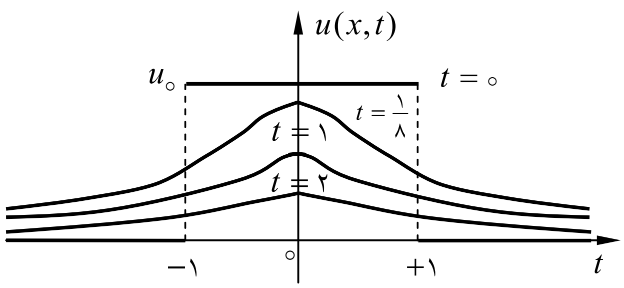
حل کنیم. با روش متغیرهای جدا شونده خواهیم داشت

$$u(x,t)=e^{-c^۲\lambda^۲t}\left(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x\right)$$

$$u(\circ,t)=\circ \;\rightarrow\; A=\circ$$

در نتیجه

$$u(x,t)=Be^{-c^۲\lambda^۲t}\sin\lambda x$$



شکل۵-۷
نمودار $u(x,t)$ **به ازای افزایش** t

هیچ شرطی برای مقدار λ وجود ندارد و به ازای هر مقدار λ، یک جواب حاصل می‌شود. بنابراین

$$u_\lambda(x,t) = B(\lambda)e^{-c^۲\lambda^۲ t}\sin\lambda x$$

در نتیجه

$$u(x,t) = \int_\circ^\infty B(\lambda)e^{-c^۲\lambda^۲ t}\sin\lambda x d\lambda$$

توجه اینکه می‌توانستیم برای مقادیر منفی λ نیز جوابهایی در نظر بگیریم، ولی جوابهای حاصل از مقادیر منفی λ، مستقل از جوابهای حاصل از مقادیر مثبت λ نیستند و براساس اصل رویهم گذاری[1] مجموع جوابهای مستقل در معادلهٔ دیفرانسیل، جواب کامل خواهد بود. با توجه به شرایط اولیه

$$u(x,\circ) = f(x) = \int_\circ^\infty B(\lambda)\sin\lambda x d\lambda$$

و بر حسب انتگرال فوریه سینوسی خواهیم داشت

$$B(\lambda) = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\infty f(x)\sin\lambda x dx = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\infty f(v)\sin\lambda v dv$$

و با جایگذاری، تابع انتشار حرارت کاملاً معین می‌شود

$$u(x,t) = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\infty\int_\circ^\infty \left(f(v)e^{-c^۲\lambda^۲ t}\sin\lambda v\sin\lambda x\right)dv d\lambda$$

۵-۵-۱ معادله انتشار حرارت همگن باشرایط مرزی ناهمگن

در مثالهای(۷) و (۸) شرایط مرزی، همگن در نظر گرفته شدند. یعنی نقاط انتهایی در لحظهٔ $t=\circ$ با درجه حرارت صفر (همگن) اختیار شدند در ادامه حالتهایی را بررسی خواهیم کرد که در آنها دمای نقاط انتهایی در لحظهٔ $(t=\circ)$ مخالف صفر باشد (شرایط مرزی ناهمگن).

حالت اول:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^۲\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} \quad ,\circ \le x \le l \quad , t \ge \circ$$

$$BC:\begin{cases} u(\circ,t) = T_\circ \\ u(l,t) = T_\circ \end{cases} \quad , \quad IC: u(x,\circ) = f(x)$$

در این حالت تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + T_\circ$ شرایط را به همگن بدل می‌کند. با مشتق‌گیری و جایگذاری خواهیم داشت

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c^۲\frac{\partial^۲ v}{\partial x^۲}$$

---

[1] Superposition

$$BC:\begin{cases} v(\circ,t)=\circ \\ v(l,t)=\circ \end{cases} \quad , IC:\ v(x,\circ)=f(x)-T_\circ$$

که با حل مسالهٔ همگن $v(x,t)$ در نتیجه $u(x,t)=v(x,t)+T_\circ$ به دست خواهد آمد.

حالت دوم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^{۲}\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} \quad ,\circ\le x\le l \quad ,t>\circ$$

$$BC:\begin{cases} u(\circ,t)=T_\circ \\ u(l,t)=T_۱ \end{cases} \quad , \quad IC:u(x,\circ)=f(x)$$

در این حالت با تغییر متغیر $u(x,t)=v(x,t)+ax+b$، a و b را چنان تعیین می‌کنیم که شرایط همگن شوند.

$$u(\circ,t)=v(\circ,t)+b \quad \rightarrow \quad T_\circ=v(\circ,t)+b$$

که اگر قرار دهیم $T_\circ=b$، شرط $v(\circ,t)=\circ$ به دست خواهد آمد. همین طور

$$u(l,t)=v(l,t)+al+T_\circ \quad \rightarrow \quad T_۱=v(l,t)+al+T_\circ$$

با اختیار $T_۱=al+T_\circ$ یا $a=\frac{T_۱-T_\circ}{l}$ شرط همگن $v(l,t)=\circ$ حاصل می‌شود، در نتیجه تغییر متغیر

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{T_۱-T_\circ}{l}x+T_\circ$$

منجر به شرایط همگن به صورت زیر خواهد شد.

$$\frac{\partial v}{\partial t}=c^{۲}\frac{\partial^{۲} v}{\partial x^{۲}} \quad ,\circ\le x\le l \quad ,t\ge\circ$$

$$BC:\begin{cases} v(\circ,t)=\circ \\ v(l,t)=\circ \end{cases} \quad , \quad IC:v(x,\circ)=f(x)-\frac{T_۱-T_\circ}{l}x-T_\circ$$

حالت سوم: اگر دو انتها در زمانهای مختلف درجه حرارت متفاوت داشته باشند یعنی

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^{۲}\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} \quad ,\circ\le x\le l \quad ,t>\circ$$

$$BC:\begin{cases} u(\circ,t)=p(t) \\ u(l,t)=q(t) \end{cases} \quad , \quad IC:\ u(x,\circ)=f(x)$$

در این حالت در تغییر متغیر $u(x,t)=v(x,t)+a(t)x+b(t)$، توابع $a(t)$ و $b(t)$ را چنان می‌گیریم که معادله بر حسب v دارای شرایط همگن شود.

$$u(0,t)=v(0,t)+b(t)\rightarrow p(t)=v(0,t)+b(t)$$

و با اختیار $p(t)=b(t)$ ، شرط $v(0,t)=0$ بدست خواهد آمد.

$$u(l,t)=v(l,t)+a(t)l+p(t)\quad\rightarrow\ q(t)=v(l,t)+la(t)+p(t)$$

و بـا اختیـار $a(t)=\dfrac{q(t)-p(t)}{l}$، شـرط $v\,(l\,,t)=0$ حاصـل مـی شـود. بنـابراین تغییـر متغیـر $u\,(x\,,t)=v\,(x\,,t)+\dfrac{q(t)-p(t)}{l}x+p(t)$ منجر به معادله با شرایط همگن بـه صـورت زیـر خواهد شد

$$\frac{\partial v}{\partial t}=c^{2}\frac{\partial^{2}v}{\partial x^{2}}-\varphi(x,t)\quad,0\le x\le l\quad,t\ge 0$$

که در آن $\varphi(x,t)=\dfrac{q'(t)-p'(t)}{l}x+p'(t)$ و

$$BC:\begin{cases}v\,(0\,,\,t)=0\\ v\,(l\,\,,t)=0\end{cases}\quad,\ IC:\ v\,(x\,\,,0)=f\,\,(x)-a\,(0)x\,-b\,(0)=g\,(x)$$

ابتدا معادله بدون طرف دوم و با شرایط مرزی همگن را حل می کنیم سپس یک جواب خصوصی بـا طرف دوم را به دست آورده نتیجه را با هم جمع می کنیم. و یا به کمک تبدیل فوریه یا تبدیل لاپلاس مساله قابل حل خواهد بود.

حالت چهارم: در حالت کلی اگر x_0 را نمادی از نقطه مرزی بگیریم، می توان شرط مرزی را به صورت

$$u\,(x_{0}\,,t)=p\,(t)\qquad(۳۶)$$

نوشت. این شرط را دیریخله یا **شرط مرزی نوع اول** می نامند.

اگر از نقطه مرزی با محیط خارج تبادل حرارت صورت گیرد، بر حسب قانون فوریه قرار می‌دهند،

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_{0}\,,t)=q\,(t)\qquad(۳۷)$$

این شرط را **شرط نیومان** یا شرط مرزی نوع دوم می‌نامند. شرط

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_{0}\,,t)=0\qquad(۳۸)$$

متناظر است با اینکه فقط x_0 عایق‌بندی شده و از این نقطه هیچ تبادل حرارت با محیط خارج صورت نمی‌گیرد. ترکیبی از این دو شرط به نام شرط **رابین** و یا **شرط مرزی نوع سوم** است. یعنی

$$c_{1}u\,(x_{0}\,,t)+c_{2}\frac{\partial u}{\partial x}(x_{0}\,,t)=\gamma(t)\qquad(۳۹)$$

اگر مرز به طور آزاد در هوا و یا مایع دلخواهی قرار داشته باشد بر حسب **قانون سرد شدن نیـوتن**[1]، نسبت تعادل حرارت متناسب است با تفاوت درجه حرارت در جسم و محیط خارج، یعنی

$$q(x_\circ , t) = h\big(u(x_\circ ,\ t) - T(t)\big)$$

که در آن $T(t)$ درجه حرارت محیط خارج از جسم و h ضریب تناسب است. بر اساس قانون فوریه، رابطه فوق به صورت زیر نوشته می شود

$$-k\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_\circ , t) = h\big(u(x_\circ , t) - T(t)\big) \qquad (۴۰)$$

● مثال ۱۱

(انتشار حرارت در میله متناهی ودوسر عایق بندی شده) میله ای فلزی به طول l را در دو انتهای $(x=\circ)$ و $(x=l)$ عایق بندی کرده نقطه x و $\circ < x < l$ را در لحظه $(t=\circ)$ به درجه حرارت $f(x)$ می‌رسانیم هدف تعیین تابع انتشار حرارت $u(x,t)$ است. بنابراین باید معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات نسبی زیر را با شرایط داده شده، حل کنیم

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = \frac{۱}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \quad , \qquad \circ \le x \le l \quad , \qquad t \ge \circ$$

$$BC: \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(\circ , t) = \circ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(l\ , t) = \circ \end{cases} \quad , \quad IC: u(x , \circ) = f(x)$$

با فرض $u(x,t) = F(x)G(t)$ و با مشتق‌گیری و جایگذاری خواهیم داشت

$$\frac{F''}{F} = \frac{G'}{kG} \triangleq -\lambda^۲ \ , \ (\lambda > \circ)$$

$$\begin{cases} F'' + \lambda^۲ F = \circ \\ G' + k\lambda^۲ G = \circ \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی می‌توان داشت

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\circ , t) = \circ \quad \to \quad F'(\circ)G(t) = \circ \quad \to \quad F'(\circ) = \circ$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l , t) = \circ \ \to F'(l)G(t) = \circ \quad \to F'(l) = \circ$$

حال معادلهٔ دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی به صورت زیر به دست می‌آید

[1] Newton's law of cooling

$$\begin{cases} F'' + \lambda^2 F = 0 \\ F'(0) = 0 \ , \ F'(l) = 0 \end{cases}$$

این معادله را معمولاً معادلهٔ مقادیر ویژه (مسالهٔ مقادیر ویژه) می‌نامند. مقادیری از λ که به ازای آنها معادلهٔ دیفرانسیل فوق دارای جواب باشد، مقادیر ویژه و جوابهای متناظر را **توابع ویژه** می‌نامند.

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $F'' + \lambda^2 F = 0$ به صورت

$$F(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

است که با اعمال شرایط $F'(0) = 0$ و $F'(l) = 0$ خواهیم داشت $c_2 = 0$ و

$$F(x) = c_1 \cos \lambda x$$

$$F'(x) = -c_1 \ \lambda \sin \lambda x$$

$$F'(l) = 0 \rightarrow -c_1 \lambda \sin \lambda l \ = 0$$

$c_1 = 0$ و $\lambda = 0$ جوابهای بدیهی $F(x) = 0$ را تولید می‌کنند که مورد نظر نیستند، بنابراین حالت

$$\sin \lambda l = 0 \ \rightarrow \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$ (پارامتر اساسی λ^2 است)

را در نظر می‌گیریم. برای $\lambda = 0$ داریم

$$F''(x) = 0$$

$$F'(0) = F'(l) = 0$$

که هر تابع ثابت $F(x) = k$ جواب خواهد بود، و اگر قرار دهیم

$$F_0(x) = 1 \ , \ \lambda_0^2 = 0$$

در نتیجه

$$F_n(x) = \cos \lambda_n x \ \ , \ \ n = 1 \, , 2 \, , \ldots$$

توابع ویژه خواهند بود. با روش مشابه برای تابع $G(t)$ داریم

$$G_0(x) = 1 \ , \ G_n(t) = \exp\left(-\lambda_n^2 kt\right)$$

بنابراین

$$u_n(x \, , t) = \cos \lambda_n x \ \exp\left(-\lambda_n^2 kt\right) \ , \ u_0(x \, , t) = 1$$

و برحسب اصل رویهم گذاری

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x \exp\left(-\lambda_n^2 kt\right)$$

و برحسب شرط اولیه

$$u(x,0) = f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x \quad , \quad 0 < x < l$$

و برحسب سری فوریهٔ کسینوسی داریم

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)dx \quad , \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x \right) dx$$

که با توجه به مقادیر معلوم $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$، تابع انتشار حرارت $u\,(x\,,\,t)$ کاملاً مشخص می شود.

● **مثال ۱۲**

هدف حل معادل زیر با شرایط داده شده است

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \quad , 0 \le x \le l \quad , t \ge 0$$

$$u(0\,,t) = T_0$$

$$-k\,\frac{\partial u}{\partial x}u\,(l\;\,,t) = h\,(u\,(l\;\,,t) - T_1)$$

$$u\,(x\;\,,0) = f\;\,(x\,)$$

چون T_0 و T_1 ثابت هستند، تغییر متغیر $u\,(x\,,\,t) = \omega(x\,,\,t) + ax + b$ را با مقادیر ثابت a و b در نظر می‌گیریم و این دو مقدار را چنان تعیین می‌کنیم که معادله همگن شود.

$$u\,(0\,,t) = \omega(0\,,t) + b \;\;\rightarrow\;\; b = T_0$$

$$-k\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(l,t)\right) = h(\omega(l,t) + al + T_0 - T_1) \;\;\rightarrow\;\; a = \frac{h(T_1 - T_0)}{k + hl}$$

و معادله جدید با شرایط جدید عبارتند از

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial \omega}{\partial t} \;\; , 0 \le x \le l \;, t \ge 0$$

$$\omega(0\,,t) = 0 \quad , \quad h\omega\,(l\;\,,t) + k\,\frac{\partial \omega}{\partial x}\,(l\;\,,t) = 0$$

$$\omega\,(x\;\,,0) = f\,(x\,) - \frac{h(T_1 - T_0)}{k + hl}x - T_0 = g\,(x\,)$$

این معادله را با روش متغیرهای جدا شونده حل می‌کنیم، با فرض $\omega(x\,,t) = F(x\,)G(t)$ خواهیم داشت

$$F'' + \lambda^2 F = 0 \;\; , \;\; 0 < x < 1$$

$$G' + k\lambda^2 G = 0 \;\; , \quad t > 0$$

بر حسب شرایط مرزی

$$\omega(0,t)=F(0)G(t)=0$$

$$k\frac{\partial\omega}{\partial x}(l\ ,t)+h\omega(l\ ,t)=(kF'(l)+hF(l))\,G(t)=0$$

در مورد معادله دیفرانسیل شامل $F(x)$، و با توجه به شرایط اولیه متناظرمعادلهٔ مقادیر ویژه به صورت

$$F''+\lambda^2F=0\ ,\ \ 0<x<l$$

$$F(0)=0\ \ ,\quad kF'(l)+hF(l)=0$$

که دارای جواب عمومی

$$F(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x$$

$$F(0)=0\ \rightarrow c_1=0\ \ \rightarrow F(x)=c_2\sin\lambda x$$

$$kF'(l)+hF(l)=0\rightarrow c_2\left(k\,\lambda\cos\lambda l+h\sin\lambda l\right)=0$$

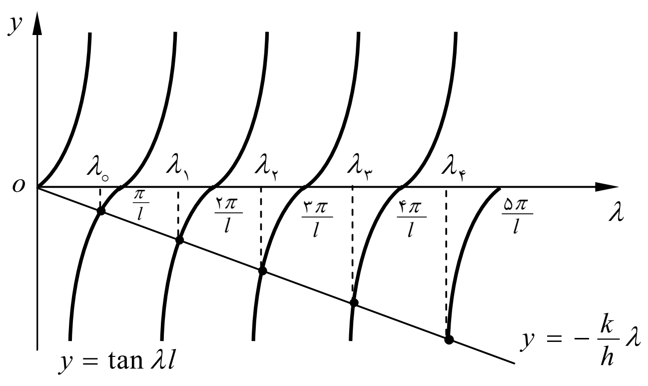
حالتهای $\lambda=0$ و $c_2=0$ جواب بدیهی را تولید می‌کنند. بنابراین مقادیر ویژهٔ λ، جوابهای معادلـهٔ $k\lambda\cos\lambda l+h\sin\lambda l=0$ یعنی جوابهای معادلهٔ $\tan\lambda l=-\frac{k}{h}\lambda$ می‌باشند که با ترسیم $y=\tan\lambda l$ و $y=-\frac{k}{h}\lambda$ در محورهای y و λ محل تلاقی آنها متناظر با مقادیر ویژه λ خواهند بود.(شکل ۵- ۸)

برای مقادیر بزرگ n، مقادیر ویژه تقریباً برابرند با

$$\lambda_n\simeq\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{l}$$

جوابهای معادله $G'+\lambda^2kG=0$ عبارتند از

$$G_n(t)=\exp\left(-\lambda_n^2kt\right)$$



شکل۵-۸

تعیین جوابهای معادلهٔ

$\tan\lambda l=-\frac{k}{h}\lambda$

به روش ترسیمی

در نتیجه

$$\omega_n(x, t) = F_n(x) G_n(t)$$

و از آنجا

$$\omega(x,t) = \sum b_n \sin \lambda_n x \exp\left(-\lambda_n^2 kt\right)$$

و با توجه به شرط اولیه خواهیم داشت

$$\omega(x,0) = g(x) = \sum_1^\infty b_n \sin \lambda_n x$$

که چون λ_1، λ_2، ... لزوماً مضربهای صحیحی از λ_1 نیستند، نمی‌توان از سری فوریهٔ سینوسی برای تعیین b_n کمک گرفت، بلکه باید مفهوم توابع متعامد را به کار ببریم. ملاحظه می‌شود که

$$\int_0^l \sin \lambda_n x \sin \lambda_m x dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

و بر حسب بسط تابع بر حسب توابع متعامد، خواهیم داشت

$$b_n = \frac{\int_0^l g(x) \sin \lambda_n x dx}{\int_0^l \sin^2 \lambda_n x dx}$$

پس از جایگذاری مقادیر حاصل، تابع انتشار حرارت $u(x, t)$ به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$u(x,t) = T_0 + \frac{h(T_1 - T_0)}{k + hl} x + \sum_1^\infty b_n \sin \lambda_n x \exp\left(-\lambda_n^2 kt\right)$$

● مثال۱۳

برای حل معادلهٔ انتشار حرارت به صورت

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu \quad , 0 \leq x \leq l \quad , t \geq 0$$

با شرایط $\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(l, t) = 0$ و $u(x, 0) = f(x)$ معادله را با تبدیل فوریهٔ کسینوسی متناهی حل می‌کنیم. با فرض $\Im_c\{u(x, t)\} = U(n, t)$ از طرفین معادله، تبدیل فوریهٔ کسینوسی می‌گیریم

$$\frac{dU}{dt} + (kn^2 - b)U = 0$$

که دارای جواب

$$U(n,t) = ce^{-(kn^2 - b)t}$$

و با توجه به تبدیل فوریه شرط اولیه $u(x, 0) = f(x)$ خواهیم داشت

$$U(n,t)=U(n,\circ)e^{-(kn^{۲}-b)t}$$

که در آن $U(n,\circ)=\frac{۲}{l}\int_{\circ}^{l}f(x)\cos nx\,dx$. حال اگر از طرفین جواب $U(n,t)$ تبدیل وارون فوریهٔ کسینوسی بگیریم خواهیم داشت

$$u(x,t)=\frac{۱}{۲}U(\circ,\circ)+\sum_{n=۱}^{\infty}U(n,t)\cos nx$$

در حالت خاص $f(x)=x$ و $\circ\le x\le\pi$ و $U(\circ,\circ)=\pi$، نتیجه می‌شود

$$U(n,\circ)=\frac{۲}{n^{۲}\pi l}\left[(-۱)^{n}-۱\right]$$

از آنجا

$$u(x,t)=\Im_c^{-۱}\left\{U(n,t)\right\}=\frac{\pi}{۲}+\frac{۱}{\pi}\sum_{۱}^{\infty}\frac{۲}{n^{۲}}\left[(-۱)^{n}-۱\right]\cos nx$$

۵- ۶ حالت تعادل

موضوع را با در نظر گرفتن معادلهٔ انتشار حرارت

$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial t^{۲}}=\frac{۱}{k}\frac{\partial u}{\partial t}\quad,\quad \circ\le x\le l\ ,\ t\ge\circ$$

با شرایط مرزی و اولیه

$$BC:\begin{cases}u(\circ,t)=T_{\circ}\\ u(l,t)=T_{۱}\end{cases}\quad,\quad IC:\ u(x,\circ)=f(x)$$

مطرح می‌کنیم انتظار این است که تابع انتشار حرارت $u(x,t)$ برای $t\to\infty$ موجود و مستقل از t باشد یعنی

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=v(x)$$

به علاوه داریم

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\partial u}{\partial t}=\circ$$

تابع $v(x)$ مشخص کننده درجه حرارت حالت تعادل است، بدیهی است که تابع $v(x)$ در معادلهٔ انتشار حرارت همچنین شرایط مرزی صادق است یعنی

$$\frac{\partial^{۲}v}{\partial x^{۲}}=\circ\ ,\quad \circ<x<l$$

$$v(\circ)=T_{\circ}\quad,\quad v(l)=T_{۱}$$

در نتیجه

$$v(x) = Ax + B$$

که پس از اعمال شرایط مرزی، داریم

$$v(x) = T_{\circ} + \left(\frac{T_{۱} - T_{\circ}}{l}\right)x$$

معمولاً برای حل معادلهٔ $\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}} = \frac{۱}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$ با شرایط ناهمگن تغییر متغیر $u(x, t) = \omega(x, t) + v(x)$ را اعمال می‌کنیم. یعنی در تغییر متغیر $u(x, t) = \omega(x, t) + ax + b$ که قبلاً انجام و محاسبه گردید، نتیجه یکسان تولید می‌کنند. همچنین اگر در معادلهٔ $\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}} = \frac{۱}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$ با شرایط مرزی و اولیه

$$u(\circ, t) = T_{\circ}$$

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}u(l, t) = h(u(l, t) - T_{۱}) \quad , \quad t > \circ$$

$$u(x, \circ) = f(x) \quad , \quad \circ < x < l$$

$v(x)$ را حالت تعادل بگیریم، معادله دیفرانسیل

$$\frac{\partial^{۲}v}{\partial x^{۲}} = \circ \quad , \quad v(\circ) = T_{\circ} \quad , \quad -kv'(l) = h\left(v(l) - T_{۱}\right)$$

دارای جواب $v(x) = Ax + B$ و با توجه به شرایط داده شده

$$A = T_{\circ} \ , \ B = \frac{h(T_{۱} - T_{\circ})}{k + hl}$$

و در نتیجه $v(x) = \frac{h(T_{۱} - T_{\circ})}{l}x + T_{\circ}$ خواهد بود و تغییر متغیر

$$v(x, t) = \omega(x, t) + v(x)$$

معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی $\frac{\partial^{۲}v}{\partial x^{۲}} = \frac{۱}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$ با شرایط ناهمگن را به معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی $\frac{\partial^{۲}\omega}{\partial x^{۲}} = \frac{۱}{k}\frac{\partial \omega}{\partial t}$ با شرایط همگن بدل می‌کند. لذا از آنجایی که در وضعیت تعادل زمان t نقشی ندارد و تابع انتشار حرارت، منحصراً به مختص (مختصات) مکان بستگی دارد و مستقل از زمان خواهد بود، بنابراین معادله دیفرانسیل انتشار حرارت به صورت

$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}} = \circ \ , \ \circ < x < l$$

بوده و در حالت کلی جواب معادلهٔ لاپلاس

$$\nabla^{۲}u = \circ$$

وضعیت تعادل را در انتشار حرارت مشخص می کند.

● **مثال ۱۴**

جواب کراندار معادلهٔ لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ را برای نیم صفحه $y \geq 0$، وقتی $u(x,0) = f(x)$ باشد (وضعیت تعادل) عبارت است از جواب معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

با شرایط

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{و} \quad \left| u(x,y) \right| < \infty$$

با روش متغییرهای جدا شونده، قرار می‌دهیم $u(x,y) = F(x)G(y)$ که با مشتق گیری و جایگذاری خواهیم داشت

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} \triangleq -\lambda^2 \ , \ \ (\lambda > 0)$$

$$\begin{cases} F'' + \lambda^2 F = 0 \\ G'' - \lambda^2 G = 0 \end{cases}$$

$$u_\lambda(x,y) = \left(a_1 \cos \lambda x + b_1 \sin \lambda x\right)\left(a_2 e^{\lambda y} + b_2 e^{-\lambda y}\right)$$

چون λ مثبت اختیار می‌شود، جمله $e^{\lambda y}$ وقتی $y \to \infty$، کراندار نخواهد بود، بنابراین باید $a_2 = 0$ اختیار شود. در نتیجه

$$u(x,y) = \int_0^\infty e^{-\lambda y}\left(A(\lambda)\cos \lambda x + B(\lambda)\sin \lambda x\right) d\lambda$$

با توجه به شرط اولیه داریم

$$u(x,0) = f(x) = \int_0^\infty \left(A(\lambda)\cos \lambda x + B(\lambda)\sin \lambda x\right) d\lambda$$

و بر حسب انتگرال فوریه

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos \lambda u du \ \ , \ \ B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(u)\sin \lambda u du$$

بنابراین

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda=0}^\infty \int_{u=-\infty}^\infty \left(f(u)e^{-\lambda y}\cos \lambda(u-x)\right) du d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(u)\left(\int_0^\infty e^{-\lambda y}\cos \lambda(u-x) d\lambda\right) du$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توان نشان داد که

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda y} \cos \lambda(u-x) d\lambda = \frac{y}{y^{2}+(u-x)^{2}}$$

بنابراین

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(u)}{y^{2}+(u-x)^{2}} du$$