1 符號介紹

底下我們先介紹一些推理時常用的數學符號：

- $A \implies B$：如果 A，那麼 B

  舉例而言，我們可以寫「下雨 $\implies$ 地板濕」，因為如果下雨，地板就會濕。要注意到的是，地板濕了，有可能是有人翻倒水杯，不代表一定有下雨。

- $A \impliedby B$：如果 B，那麼 A

  和 $B \implies A$ 是完全相同的意思，只是不同的寫法。

- $A \iff B$：A 當且僅當 B，即 $A \implies B$ 且 $A \impliedby B$

  舉例而言，我們可以寫「物體有加速度 $\iff$ 物體有受力」，但是我們不能寫「某人會唱歌 $\iff$ 某人會跳舞」。儘管我們找得到一些會唱歌的人會跳舞、也找得到一些會跳舞的人會唱歌，但是這樣子並不保證「會唱歌 $\implies$ 會跳舞」與「會唱歌 $\impliedby$ 會跳舞」。

- $\exists$：存在

  舉例而言，要表示「資訊系裡面有人很宅」就可以用以下的式子

  $$\exists x \in \text{資訊系},\ x\text{很宅}$$

- $\forall$：對所有

  舉例而言，要表示「所有資訊系的人都很宅」就可以寫做

  $$\forall x \in \text{資訊系},\ x\text{很宅}$$

  再舉一例，要表示「所有資訊系的人都至少會寫一種程式語言」可以用

  $$\forall x \in \text{資訊系}, \exists y \in \text{程式語言}, x\text{會寫}y$$

  另外，$\exists$ 和 $\forall$ 前後不能交換，否則意義不同。例如將上面那句改為

  $$\exists y \in \text{程式語言}, \forall x \in \text{資訊系}, x\text{會寫}y$$

  則意思就變成「所有資訊系的人都會寫某一種特定的語言」。

2 極限

極限的嚴謹定義和運算在大學的微積分會詳細說明，在複雜度的證明上不會用到太多，因此這裡就只簡單介紹極限的概念以及一些性質。概念上來說，一個函數在 x 趨近於 a 的極限為 L，記做

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

表示當 x 越來越接近 a(但不等於 a) 時，$f(x)$ 的值就會越來越靠近 L。要特別注意的是，$\lim_{x\to a} f(x)$ 和 $f(a)$ 是完全不同的東西，因為 $f(a)$ 可能不存在，也可能 $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$，或者有各種奇怪的情況 (到了大學微積分就會看到各式各樣莫名其妙的函數了)。舉例來說，可以構造一個函數

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, if } x = 1 \\ 0 & \text{, if } x \neq 1 \end{cases}$$

則

$$f(1) = 1\ ,\ \lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

以下是幾個極限的運算性值，當然這些性質實際上是要證明的，但還是老話一句，這些就留給大學的微積分課吧。

已知 $\lim_{x\to a} f(x) = L, \lim_{x\to a} g(x) = M, \lim_{x\to a} h(x) = \infty$，則

(1) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M$

(2) $\lim_{x\to a}(f(x) \times g(x)) = L \times M$

(3) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}\ (M \neq 0)$

(4) $\lim_{x\to a} \frac{1}{h(x)} = 0$

在複雜度的證明中，只會用到 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 這種極限的形式，以下給出一些常用的等式

(1) $\lim_{x\to\infty} k = k$ (常數)

(2) $\lim_{x\to\infty} x = \infty$ (或者說極限不存在)

(3) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

(4) $\lim_{x\to\infty} k^x = \begin{cases} 0 & \text{, if } k < 1 \\ 1 & \text{, if } k = 1 \\ \infty & \text{, if } k > 1 \end{cases}$

例題 1

請計算 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$。

解答

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})}=\frac{1}{1}=1$$

3 複雜度

以下我們將更深入了解 Big-O 的定義，這部分也許有點難理解，可以跳過沒關係，只要知道可以用兩方程相除結果的極限值來描述複雜度 (量級) 的關係就好 (想忽略此段落的同學可以直接跳到例題 5)。我們會用時間複雜度和空間複雜度的觀念講解 Big-O 的精神，但 Big-O 絕對不僅限於這兩者，而是可以拿來描述所有函數，所以請大家絕對不要有「Big-O 就是時間/空間複雜度」的錯誤觀念。

在演算法的分析中，我們往往希望知道一個演算法在最差的情況下會跑多久，或是當資料量增加時，演算法所需時間的成長幅度。此時可以經過計算得到一個運算次數對資料量大小的函數 $f(n)$，表示該算法的特性，然而這個函數可能長得很醜，運算過程也大都很複雜，因此一般狀況下不會有人想做這種苦工。換個想法，如果我們不要求那麼精準的計算 $f(n)$，而是找到另外一個函數 $g(n)$，並滿足

$$\forall n>0, f(n)\le g(n)$$

則我們就可以知道「不論 $f(n)$ 多大，他最多就是和 $g(n)$ 一樣大」，或是「$f(n)$ 的成長速度最快就是和 $g(n)$ 一樣快」。然而，實際上我們很難知道 $f(n)$ 所帶的常數倍數是多少，或者在不同的情況下，$f(n)$ 所帶的常數倍數也可能會變動。舉例來說，如果現在討論的是空間複雜度，$f(n)$ 表示一個演算法所需要的空間大小，則在不同單位下 (byte,KB,MB$\cdots$)，$f(n)$ 就會被乘上不同的常數，這時如果 $g(n)$ 也要跟著變動就是一件很麻煩的事。因此，我們可以把一個常數加進不等式中，只要 $g(n)$ 乘上一個常數之後可以滿足不等式就好了，如此一來在不同單位下就可以使用相同的 $g(n)$ 了！更改後的式子如下

$$\exists k>0, \forall n>0, f(n)\le k\cdot g(n)$$

另外，我們在意的是一個函數的「趨勢」，也就是當 n 越來越大時，$f(n)$ 的成長速度有多快。反過來說，我們其實不太在意 $f(n)$ 在 n 很小時的特性，因此可以再把不等式的條件放寬，只要在 n 超過一個門檻值 N 之後滿足不等式就好，也就是

$$\exists k>0, \exists N, \forall n>N, f(n)\le k\cdot g(n)$$

而這個就是 Big-O 的正式定義！

$$f(n)\in O(g(n)) \iff \exists k>0, \exists N, \forall n>N, f(n)\le k\cdot g(n)$$

大家可以發現 $O(g(n))$ 其實是一個函數的集合，包含所有滿足以上式子的函數，所以正確的寫法是 $f(n)\in O(g(n))$ 而不是 $f(n)=O(g(n))$，但現在似乎都可以混用了。

以下用一些例子讓大家更了解這個定義：

例題 2

請證明 $3n^2 \in O(n^2)$。

證明

取 $k=3, N=0$，則 $\forall n>0, 3n^2 \leq 3 \cdot n^2$ 成立，得證。
(當然也可以取 $N=1, N=2, \cdots$。)

例題 3

請證明 $3n^2 \in O(n^3)$。

證明

取 $k=1, N=3$，則 $\forall n>3, 3n^2 \leq 1 \cdot n^3$ 成立，得證。

例題 4

請證明 $3n^2 \notin O(n)$。

證明

不論 k 取多少，只要 $n>k$，$3n^2 \leq k \cdot n$ 就不會成立，因此 N 不存在，也就是 $3n^2 \notin O(n)$，得證。

以上可以發現，要說 $n^2 \in O(n^3)$ 是可以的，因為 n^3 的確是 n^2 的上界，只是他是個比較鬆的上界。另外，$O(n+1), O(2n)$ 等等的寫法也都是可以的，只是一般來說都會寫成等價的 $O(n)$。那麼，影片中說的取極限又是怎麼一回事呢？其實只要改寫一下式子就可以了：

$$
\begin{aligned}
f(n) \in O(g(n)) &\iff \exists k>0, \exists N, \forall n>N, f(n) \leq k \cdot g(n) \\
&\iff \exists k>0, \exists N, \forall n>N, \frac{f(n)}{g(n)} \leq k
\end{aligned}
$$

我們不知道 N 是多少，但是一定是個常數，那麼把 n 趨近到無限大就一定會超過 N 了！於是就得到

$$f(n) \in O(g(n)) \iff \exists k>0, \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq k$$

也就是說，只要 $\frac{f(n)}{g(n)}$ 的極限值不是無限大 (例如是一個常數)，則 $f(n) \in O(g(n))$，而這就是影片中講解的判斷方法了。

例題 5

請證明或否證 $f(n) \in O(n^3) \iff f(n) \in O((n+1)^3)$。

證明

對於這類型的命題，我們只須依據定義證明 $A \Longrightarrow B$ 與 $A \Longleftarrow B$ 即可。

(1) 先證明 $f(n) \in O(n^3) \Longrightarrow f(n) \in O((n+1)^3)$：

$$\begin{aligned}
&\because\ f(n) \in O(n^3) \\
&\therefore\ \exists k \geq 0, \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^3} = k \\
&\therefore\ \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{(n+1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^3} \cdot \frac{n^3}{(n+1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} \\
&\quad = k \cdot 1 = k \quad (\text{仍然為一常數}) \\
&\therefore\ f(n) \in O((n+1)^3)
\end{aligned}$$

(2) 接著證明 $f(n) \in O(n^3) \Longleftarrow f(n) \in O((n+1)^3)$：

$$\begin{aligned}
&\because\ f(n) \in O((n+1)^3) \\
&\therefore\ \exists k \geq 0, \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{(n+1)^3} = k \\
&\therefore\ \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{(n+1)^3} \cdot \frac{(n+1)^3}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{(n+1)^3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} \\
&\quad = k \cdot 1 = k \quad (\text{仍然為一常數}) \\
&\therefore\ f(n) \in O(n^3)
\end{aligned}$$

由 (1),(2)，得證 $f(n) \in O(n^3) \iff f(n) \in O((n+1)^3)$ 。

例題 6

請證明或否證 $f(n) \in O(2^n) \iff f(n) \in O(3^n)$。

證明

如果我們直接拿上一個例題的方式來解這個問題，會發現證明途中遇到阻礙，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n}$ 並不會收斂成一個常數。此時我們可以猜想，這個命題是錯誤的，我們所須要的僅僅是一個反例，再用反證法來證明否證原命題。

假設命題成立，那麼我們令 $f(n) = 3^n$，則

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n} = \infty$$

並非收斂為一個常數，矛盾。於是 $f(n) \in O(2^n) \Longleftarrow f(n) \in O(3^n)$ 不成立，從而原命題不成立。

習題

1. 請回答以下問題：
   (a) (10 pts) 請計算 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n-1}$
   (b) (10 pts) 請計算 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}$
   (c) (20 pts) 請證明或否證 $f(n) \in O(2^n) \iff f(n) \in O(2^{n+1})$
   (d) (20 pts) 請證明或否證 $f(n) \in O(n!) \iff f(n) \in O((n+1)!)$
   (e) (20 pts) 請證明或否證 $f(n) \in O(n) \Longrightarrow 2^{f(n)} \in O(2^n)$

2. (20 pts) 已知一遞迴函數

$$f(n) = \begin{cases} 1 & ,n = 1 \\ 2f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 2n & ,n > 1 \end{cases}$$

   證明對所有滿足 $n = 2^m$，其中 m 為正整數的 n，$f(n) \leq 3n\log_2 n$。

3. (20 pts) 已知一遞迴函數

$$f(n) = \begin{cases} 1 & ,n = 1 \\ f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + f(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n^2 & ,n > 1 \end{cases}$$

   證明對所有正整數 n，$f(n) \leq 2n^2 - 1$。(意即：$f(n) \in O(n^2)$)