Control System Design Report

Lab #1

Date: 2017.04.21
ECE106　0210749　賈恩宇
ECE106　0210825　蕭宇杰

A. Objective

透過給予不同的輸入電壓，量測系統輸出參數，並利用此資料估計模型中各項未知的參數，最後將估計的參數帶入模型中利用 Simulink 模擬與驗證。估計到的參數不止能用來在電腦中建立模型進行模擬，接下來還能更進一步用來設計控制器。

B. Principle & Derivation

首先要建立平衡車系統的模型。在此參考[1]中的建模方式。此篇論文中從能量為觀點出發，利用 Lagrange-Euler equation 來取得動態方程式。式(1)為建立 Lagrange-Euler equation 中表示系統的能量項。

$$L = T^* - V = \frac{1}{2}(\psi'^T J\psi + X'^T MX') - M(g * x) \tag{1}$$

其中T^*為動能，V為位能，而$\frac{1}{2}\psi'^T J\psi$為轉動造成的動能，$\frac{1}{2}X'^T MX'$則為移動造成的動能，$M(g * x)$則是位能項。接著使用式(2)，將能量與力結合成等式。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = Z_i, i = 1,2,3 \tag{2}$$

其中的 generalized coordinate vector $q = (\theta_{lw}, \theta_{rw}, \psi)$，而對應的 generalized forces $Z_i = \sum_{j=1}^{N} f_j \cdot \frac{\partial R_j}{\partial q_i}$。藉此可以推導出式(3)。

$$H(q)q'' + C(q, q')q' + G(q) = Qu \tag{3}$$

假設在給定固定電壓下兩輪一樣，經過一連串的簡化與合併可得到下列兩行動態方程式，式(4)和式(5)。

$$\theta_w'' + \sigma_1\psi'' + \sigma_2(2\cos(\psi)\,\psi'' - \sin(2\psi)\sec(\psi)\,\psi') - \sigma_3\psi' + \sigma_4\theta_w' = \sigma_5 v_s \tag{4}$$

$$\psi'' + \rho_1\theta_w'' + \rho_2\cos(\psi)\,\theta_w'' - \rho_3(\theta_w' + \psi') - \rho_4\sin(\psi) = 0 \tag{5}$$

接下來是估計動態方程式中參數$\{\sigma_1 \sim \sigma_5, \rho_1 \sim \rho_4\}$的方式。

首先在沒有外力的狀況使車子自由放倒，假設車子沒移動，輪子角度固定，則可得$V_s = 0, \theta' = \theta'' = 0$，並進一步簡化式(5)成式(6)。

$$\psi'' - \rho_3\psi' - \rho_4\sin(\psi) = 0 \tag{6}$$

量出多組ψ的數據後，利用 Least Square Method 可求出參數ρ_3, ρ_4，如式(7)到式(9)。

$$Ax = \begin{bmatrix} \psi_1 & \sin(\psi_1) \\ \vdots & \vdots \\ \psi_n & \sin(\psi_n) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \rho_3 \\ \rho_4 \end{bmatrix} = \psi'' = b \tag{7}$$

$$A^T A x = A^T b \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} \rho_3 \\ \rho_4 \end{bmatrix} = x = (A^T A)^{-1} A^T b \tag{9}$$

最後給予一個外力，再將ρ_3, ρ_4帶入式(5)，並同樣利用測量與計算來的$\{\psi, \psi', \psi''\}$以及$\{\theta_w, \theta_w', \theta_w''\}$，結合 Least Square Method 獲得剩下的參數ρ_1, ρ_2，如式(10)與式(11)。

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} = x = (A^T A)^{-1} A^T b \tag{10}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\theta_{w1}'' & -\cos(\psi_1)\theta_{w1}'' \\ \vdots & \vdots \\ -\theta_{wn}'' & -\cos(\psi_n)\theta_{wn}'' \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} \psi_1'' \\ \vdots \\ \psi_n'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{w1}' + \psi_1' & \sin(\psi_1) \\ \vdots & \vdots \\ \theta_{wn}' + \psi_n' & \sin(\psi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\rho_3 \\ -\rho_4 \end{bmatrix} \tag{11}$$

利用同樣的方式，也可以透過式(12)和式(13)將式(4)中的未知數$\sigma_1 \sim \sigma_5$求得。

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{bmatrix} = x = (A^T A)^{-1} A^T b \tag{12}$$

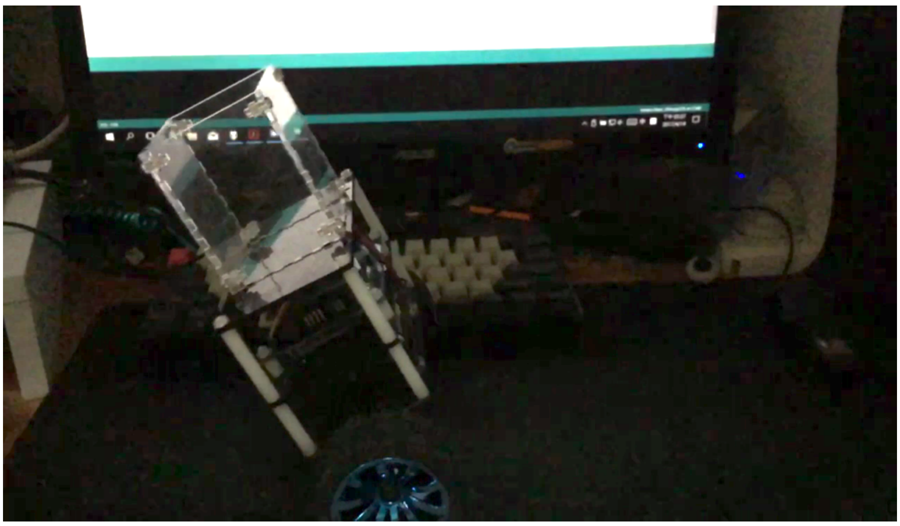
$$A = \begin{bmatrix} -\psi_1'' & -(2\cos(\psi_1)\psi_1'' - \sin(2\psi_1)\sec(\psi_1)\psi_1') & \psi_1' & -\theta_{w1}' & V_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\psi_n'' & -(2\cos(\psi_n)\psi_n'' - \sin(2\psi_n)\sec(\psi_n)\psi_n') & \psi_n' & -\theta_{wn}' & V_s \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} \theta_{w1}'' \\ \vdots \\ \theta_{wn}'' \end{bmatrix} \tag{13}$$

獲得所有參數後，即可帶入 Simulink 模擬。

而在測量平衡車實驗設計的方面，首先平衡車的程式部分，可以選擇是否提供固定的動力，而回傳值的部分則是使用藍芽，並設定 Baud rate 成 38400bps，使其能夠以最快每 20ms 即回傳一次，回傳的資料為經過 Kalman filter 的車傾角ψ，以及左右輪馬達旋轉的角度。

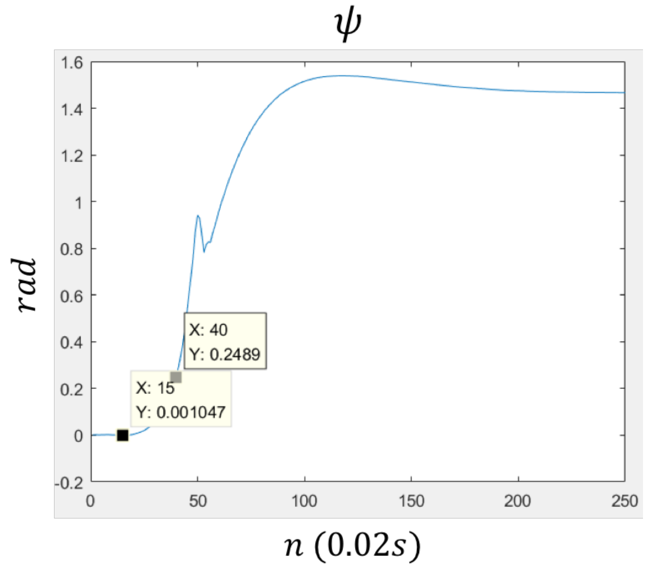
在量測無動力回傳的資料時，開啟平衡車電源後，透過 Matlab 程式與平衡車利用 Serial Port 與藍芽達成連結，由於系統剛啟動時有時傳送的資料會不符合規則，所以會先接收數筆資料並將其丟棄，確保系統穩定後，再指示可以放開平衡車任其自由倒下。

而在測量有輸入電壓的資料時，開啟平衡車電源並與 Matlab 連接上後，同樣會先接收數筆資料並將其丟棄，確保系統穩定後，再傳送一命令給平衡車，使平衡車開始輸出固定電壓給馬達。



C. Data , Chart and Analysis

首先是在無輸入動力情形下，量測平衡車自由倒下時的車傾角ψ。在此回傳的時間間隔為$t = 0.02s$，而回傳的車傾角ψ則有經過 Kalman filter 預先處理過。除此之外，ψ的正方向定義為向車子的前方傾斜的方向。

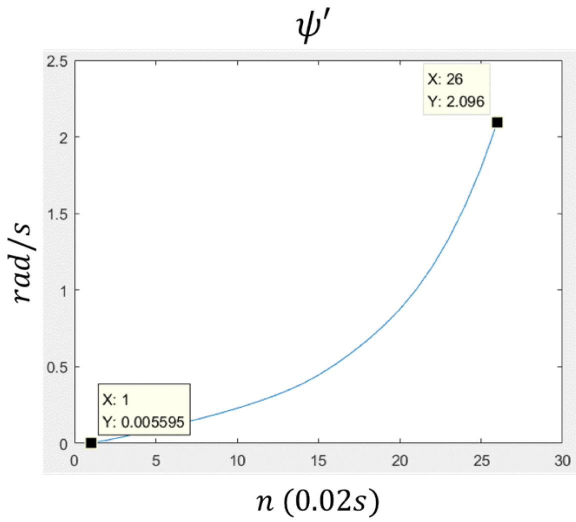


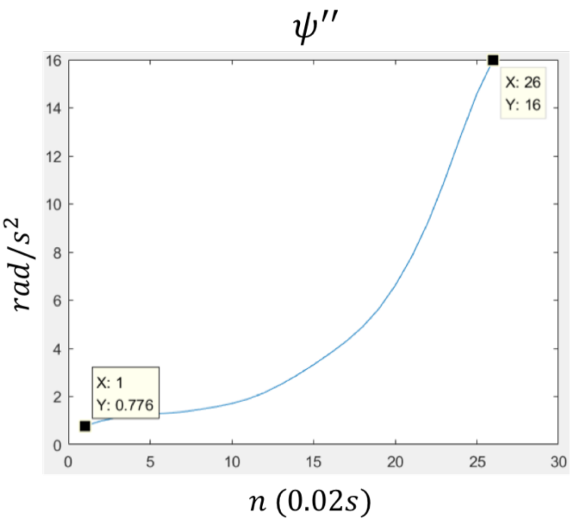
由上圖可見，當車子向前方傾斜時，ψ由零開始遞增至接近$\pi/2$處，與實際觀察到的狀況符合。在上圖中較為特別的是當$n \cong 100$時，$\psi > \pi/2$，此原因我認為和使用 Kalman filter 相關。Kalman filter 可以用來估計參數，但由於是估計，所以不一定會真的與實際情況符合，而是和當時輸入 filter 的資料以及 filter 中的增益有關。

除此之外，在$n \cong 50$處，ψ突然有減少的傾象，然而觀察拍攝自由落下車子的慢動作影片時，發現實際上沒有很明顯的車傾角減少的狀況。原先我認為只和齒輪箱中非線性效應有關，導致即使無輸入動力下車子倒下時，輪子會轉動。後來我想也要考慮 Kalman filter 的影響，可能是因為此 filter 估計時的錯誤，原先預估的傾角增加的速度大於實際的速度，因此才會往回修正。

最後是決定取用資料的範圍，由於我們控制的車傾角範圍不大，所以取資料中的前半段來作為估計參數用的資料。

拿到車傾角的資料後，即可計算ψ', ψ''。計算方式為$(\psi[i+1] - \psi[i])/T$，$T = 0.02$。



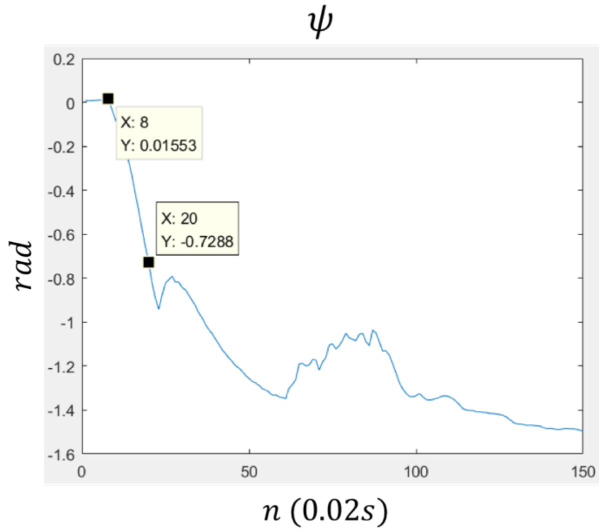


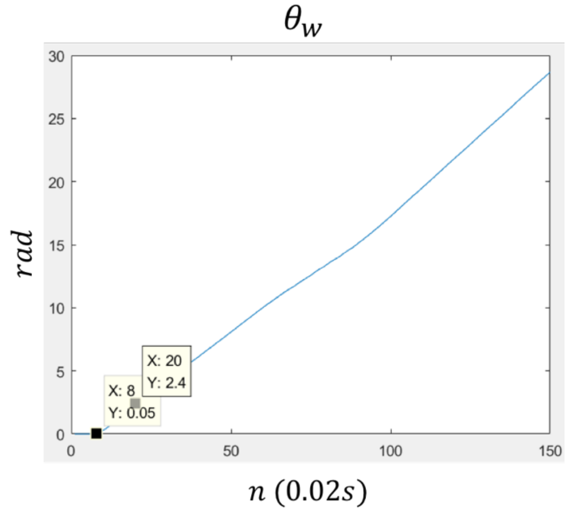
上圖為取選用資料範圍內的ψ', ψ''，其中為了將進行微分時產生的雜訊濾除，ψ'經過

兩次的五點 Moving average，而ψ''則是經過一次的五點 Moving average。由圖可見其均為遞增，與實際物理符合。

接下來是給予車子定值的輸入電壓，在此由於很難實際量測輸出給馬達的電壓，因此將給予的電壓值設定為 PWM 值，並假設此 PWM 值與輸出電壓可以用一簡單的關係來描述，$V_s = V_{PWM} \cdot k_v$，如此便能將k_v也包含入模型帶量測的參數中。

下圖為給予車子定值的輸入電壓(PWM=100)時，車傾角ψ以及馬達轉動角度的變化。





由圖可見，當輸入電壓使平衡車往前走時，車傾角會向後倒，而馬達轉動角度論不斷遞增與實際狀況符合。接下來求取$\{\psi', \psi'', \theta_w', \theta_w''\}$的方式均與前述相同。

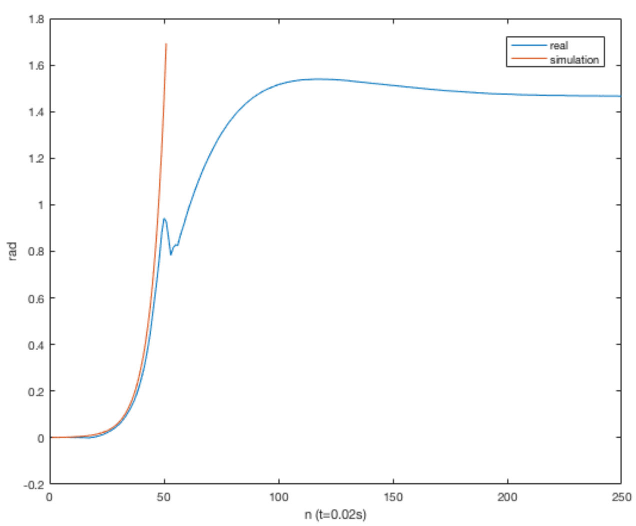
下表就是根據測量到的資料估計出來的參數。

$\boldsymbol{\rho_1}$	$\boldsymbol{\rho_2}$	$\boldsymbol{\rho_3}$	$\boldsymbol{\rho_4}$
-1.7114	2.8881	8.3409	-3.9781

$\boldsymbol{\sigma_1}$	$\boldsymbol{\sigma_2}$	$\boldsymbol{\sigma_3}$	$\boldsymbol{\sigma_4}$	$\boldsymbol{\sigma_5}$
11.0156	-6.5336	33.0155	0.4413	1.6003

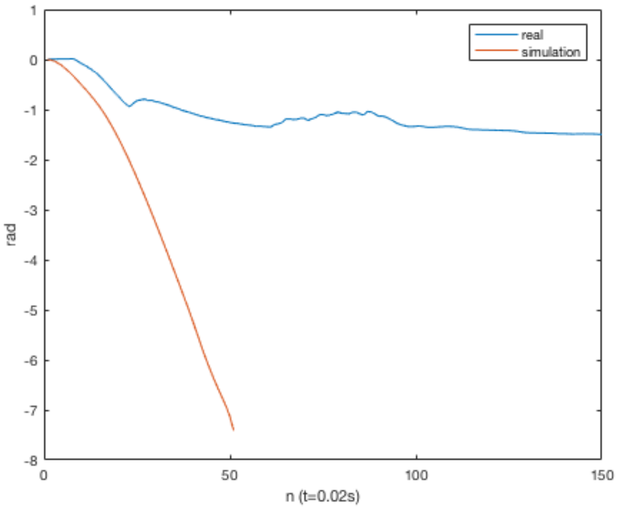
D. Simulation

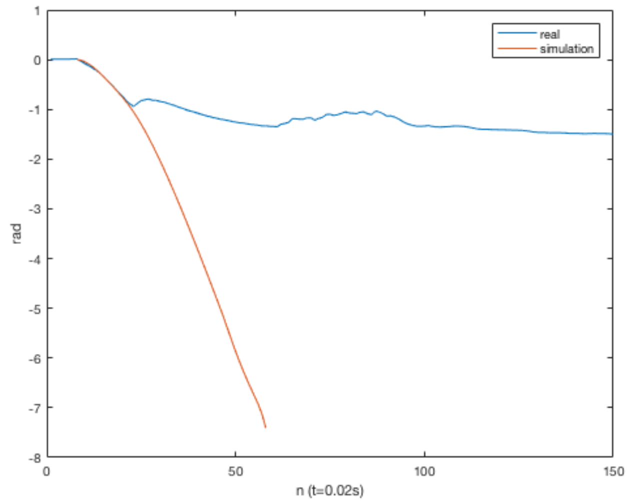
接著將估計的參數帶入原動態方程式模擬。首先只使用ρ_3, ρ_4，並帶回式(6)模擬無動力自由倒下的情況。在此要注意的是在 Simulink 中ψ以及ψ'項皆要給定一微小的初值，否則無法與預期情形相同。下圖為比較模擬的車傾角ψ與實際的差別。



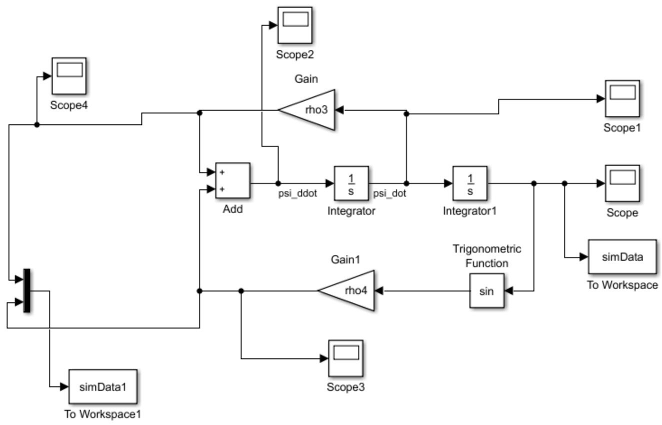
由圖可見兩者在小角度的差別較小。

接下來是模擬有輸入電壓的情況。首先觀察車傾角，下圖左可見模擬與實際有一些差別，此差別可能是實際量測時，馬達開始運作時間的誤差。若將模擬的圖形向右平移，則會發現其在小角度時誤差較小，如下圖右。

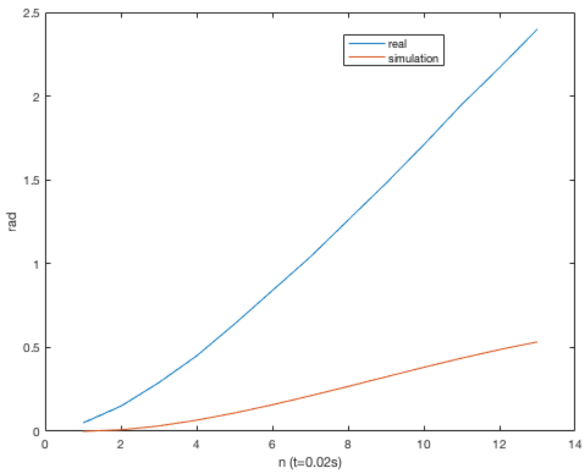




下圖為模擬式(6)使用的 Simulink block。

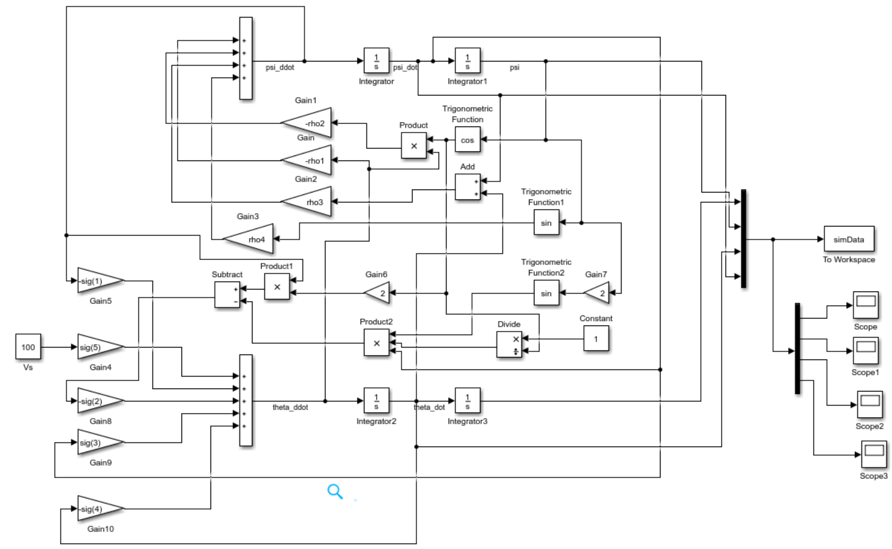


接下來比較馬達旋轉角度實際與模擬的區別。選取前半段用來估計參數的資料範圍，如下圖，可見兩者有明顯的差距。我推測此差距來自於整合用不同方法估計係數時所產生的誤差。由於估測ρ_3,ρ_4時，使用的是無輸入電壓的資料，但同一方程式內的ρ_1,ρ_2卻是用不同資料所估計，在估計後者時會受到前者的影響，因此可能不能最佳擬合所有的資料。



接下來的實驗若使用 PID 單純控制車傾角時可能影響不明顯，但是需要注意在使用 state-feedback 時是否會造成影響。

下圖是同時模擬兩個動態方程式的 Simulink block。



E. Questions and Discussions

1. 為何在無輸入電壓的情形下只需要式(6)，而不需要式(4)?

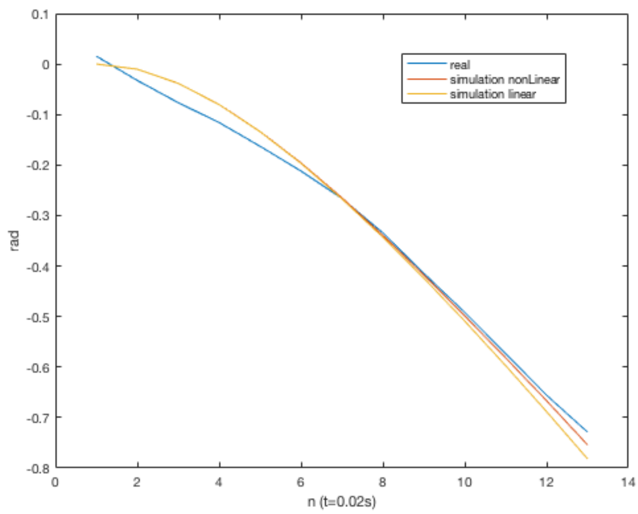
式(4)在假設$\theta_w = 0, \theta_w' = 0, \theta_w'' = 0$的情況下可得到式(14)。

$$\sigma_1 \psi'' + \sigma_2 (2\cos(\psi)\,\psi'' - \sin(2\psi)\sec(\psi)\,\psi') - \sigma_3 \psi' = 0 \qquad (14)$$

乍看之下，似乎也可以解出$\sigma_1 \sim \sigma_3$，但是實際上整理成$Ax = b$的形式時，$b = 0$，會變成在解$Ax = 0$的問題。此時$x \neq 0$只可能發生在A為線性相依的情況下，但如此就不能唯一決定x，因此在無動力的情況下，只能使用式(6)。

2. 模型在線性化後與原系統的差異？

理論上，經過線性化後的系統，在小角度時應該和原非線性系統表現幾乎相同，在此利用 Simulink 模擬系統線性化後在給定固定電壓下車傾角ψ的變化。

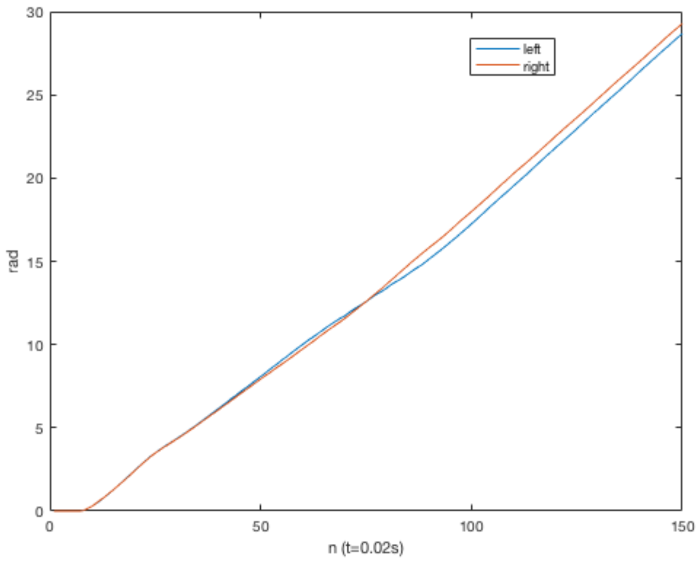


由圖可見，線性化後的系統與原非線性的系統在小角度時極為接近，與理論相符。

3. 假設左右輪在固定電壓下有相同表現是否合理？

由實際上測量到的參數可知，此假設不完全正確。在論文[4]中有提供一個簡單的 PI controller 來同步左右輪，根據此論文這樣做的效果的確較佳。除此之外，在這假設

下無法控制車子左右旋轉，所以之後若有此功能的需求，勢必得將左右輪考慮進模型中。下圖為量測到，在固定電壓下左右輪實際轉動的角度。



F. Conclusion

透過這項實驗，可以將平衡車的系統以動態方程式描述，並且估計好其中的參數，最後以電腦模擬模型並與實際系統相比較。從實驗結果可知，在模擬車傾角的部分，估計的參數以及建模的方式可以很好的描述車傾角的變化，然而對於馬達旋轉角度的部分則沒有這麼的準確。同時在實驗中也了解到在建模時使用的假設與實際系統有一些出入，這部分是將來可以改進之處。

G. Improvement of experiment process

此實驗的建模方式為從 Lagrange-Euler equation 來著手，而參考論文[2][3][4]中，則發現也可由合力以及合力矩為零來下手。根據[3]中，在列完所有的力平衡方程式後，同樣假設左右輪相同，最後可以得到下列兩條動態方程式(式(15)以及式(16))。

$$\left(I_p + l^2 M_p\right)\theta_P'' - \frac{2k_e k_m}{R_r}x' + \frac{2k_m}{R}V_a - M_p g l sin\left(\theta_p\right) = M_p l x'' \cos\left(\theta_p\right) \tag{15}$$

$$\frac{2k_m}{R_r}V_a = \left(2M_\omega + \frac{2I_w}{r^2} + M_p\right)x'' + \frac{2k_e k_m}{Rr^2}x' - M_p l\theta'' p cos\left(\theta_p\right) + M_p l \theta_p^2 \sin\left(\theta_p\right) \tag{16}$$

其中θ_p為車傾角，x則是車子的位移量。重新整理後，可以得到下列兩式(式(17)以及式(18))。

$$\theta_P'' - \frac{2k_e k_m}{R_r\left(I_p+l^2M_p\right)}x' + \frac{2k_m}{R\left(I_p+l^2M_p\right)}V_a + \frac{M_p g l sin\left(\theta_p\right)}{\left(I_p+l^2M_p\right)} = -M_p l x'' * \frac{\cos\left(\theta_p\right)}{\left(I_p+l^2M_p\right)} \tag{17}$$

$$x'' + \frac{2k_e k_m}{Rr^2\left(2M_\omega+\frac{2I_w}{r^2}+M_p\right)}x' + \frac{M_p l\,\theta'' p cos\left(\theta_p\right)}{\left(2M_\omega+\frac{2I_w}{r^2}+M_p\right)} - \frac{M_p l \theta_p^2 \sin\left(\theta_p\right)}{\left(2M_\omega+\frac{2I_w}{r^2}+M_p\right)} = \frac{2k_m}{R_r\left(2M_\omega+\frac{2I_w}{r^2}+M_p\right)}V_a \tag{18}$$

將參數以$\rho_1 \sim \rho_4, \sigma_1 \sim \sigma_4$表示，可得式(19)與式(20)。

$$\theta_p'' + \rho_1 x' + \rho_2 \sin(\theta_P) + \rho_3 x'' \cos(\theta_P) = \rho_4 v_a \tag{19}$$

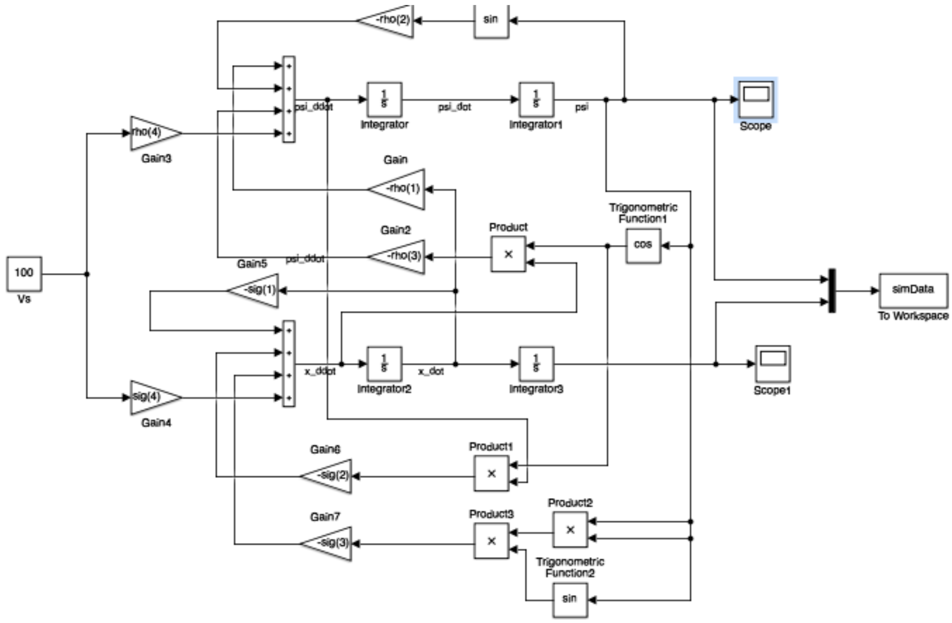
$$x'' + \sigma_1 x' + \sigma_2 \theta_P'' \cos(\theta_P) + \sigma_3 \theta_P^2 \sin(\theta_P) = \sigma_4 v_a \tag{20}$$

接著量測給定電壓下平衡車的輸出，同樣可以利用 Least Square Method 決定動態方程式的參數。

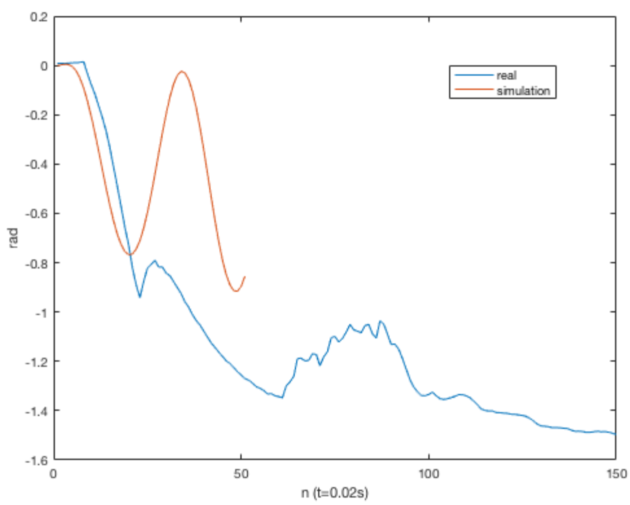
估計出的參數如下表所示。

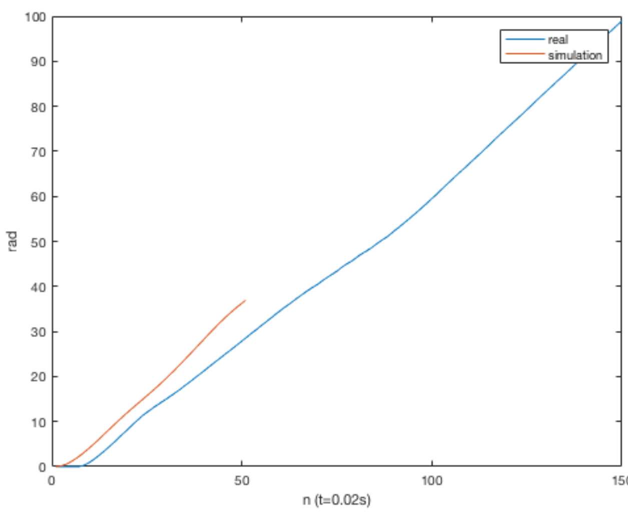
ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4
0.7000	142.0024	-0.1055	-0.2971
σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
9.5530	0.3532	-232.4962	4.2477

將求出的參數帶入動態方程式後，並利用 Simulink 模擬。下圖為模擬的 Simulink block



模擬的結果如下。下左圖為車傾角，下右圖則為車子的位移量。





由上圖可見，使用此種模型的動態方程式，對於兩種輸出值的結果與真實系統均相近。因此可以嘗試在之後的實驗使用這種模型。

論文[5]有此模型的詳細推導過程，而論文[6]則是基於此種模型的進階版，其中的模型加上了無法測量到的摩擦力等等不可預期的外力，並且利用 Neural Network 即時的預測這些外力。由於最後這篇論文[6]的演算法較為複雜，因此可能必須使用額外的控制器，目前規劃下一步除了標準的 PID 以及 state-feedback 控制外，也可用 LQR 來試著控制，最後才是使用 Neural Network。

H. Reference

[1] Modeling and model verification of an intelligent self-balancing two-wheeled vehicle for an autonomous urban transportation system

[2] JOE: A Mobile, Inverted Pendulum

[3] Modeling, Control of a Two-Wheeled Self-Balancing Robot

[4] Design and Control of a Two-Wheel Self-Balancing Robot using the Arduino Microcontroller Board

[5] Balancing a Two-Wheeled Autonomous Robot

[6] Adaptive Neural Network Control of a Self-Balancing Two-Wheeled Scooter