Принцип на Дирихле.

~~деф~~: Нека $|A| = n$ и $|B| = m$ и $\underbrace{f: A \to B}_{\text{тотална ф-я}}$.

Ако $n > m$, то f не е инекция.

$(\exists a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \wedge f(a_1) = f(a_2))$

[n - молива, m - чекмеджета $(n > m) \Rightarrow \exists$ чекм. с поне 2 молива]

Зад Избрани са случайни $n+1$ цели числа. Докажете, че измежду тях има 2, чиято разлика се дели на n.

решение: За произволно ест. число при делене на n може да се получи един от следните остатъци: $\underbrace{0, 1, 2 \dots n-1}_{n \text{ остатъка}}$

По пр. на Дирихле от избраните има две, които дават един и същ остатък при делене на n.

$x = a.n + r \quad (0 \leq r \leq n)$

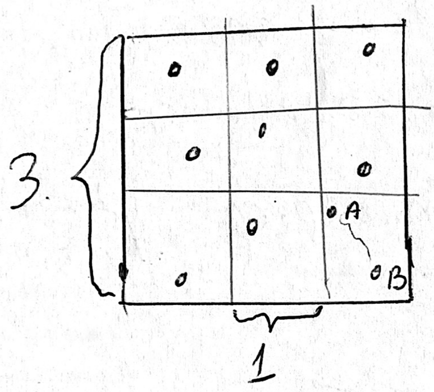
$y = b.n + r \quad (0 \leq r \leq n)$

$x - y = a.n + \cancel{r} - b.n + \cancel{r} = (a-b).n \quad \checkmark$

Зад. Даден е квадрат със страна 3. Във вътрешността или по контура са избрани 10 точки. Да се докаже, че поне две от тях са на разстояние, не по-голямо от $\sqrt{2}$.

Решение: Разрязваме квадрата на 9 единични квадратчета. Квадратчетата са 9, а точките – 10.

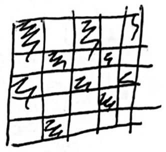
По принципа на Дирихле има две точки, които попадат в 1 квадратче. Означаваме ги с A и B.



Диагоналът на 1 квадратче е $\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow AB \le \sqrt{2}$

Домашно: В квадрат със страна 1 са взети 101 точки. Докажете, че поне 5 от тях лежат на кръг с радиус $\frac{1}{7}$



Зад 1. Дадена е мрежа 5x5

11 квадратчета са озветени.

Докажете, че можем да изберем 3 цветни квадратчета, такива че всеки 2 от тях не лежат на един ред и една колона.

Решение: Разглеждаме мрежата по диагонали.

x	β	α	z	y
y	x	β	α	z
z	y	x	β	α
α	z	y	x	β
β	α	z	y	x

Имаме 5 вида диагонала.

Всеки 2 квадратчета от един диагонал ~~лежат~~ не лежат на един ред и колона.

11 квадратчета, 5 диагонала.

По принципа на Дирихле - поне 3 квадратчета в 1 диагонал

Рекурентни Уравнения
(Recurrence relations).

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ... – числа на фибоначи

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

↑

Рек. ур-е за числата на фибоначи.

Решаване на рек. ур-е – ф-ла (без рекурсия) за a_n.

При числата на фибоначи: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Решаване чрез:

- налучкване + доказване
- метод с хар. ур-е (алгоритъм)
- други методи

Зад. Решете рек. ур-е.

$a_0 = \underline{1}$

$a_1 = 3$

$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$

0	1	2	3	4
$\underline{1}$	3	9	27	81

Твърдя че: $a_n = 3^n$.

Д-во: $\forall n \; a_n = 3^n$

БАЗА: $0 \quad 3^0 = 1$ ✓

$1 \quad 3^1 = 3$ ✓

И.П. Допускаме, че $k \in \mathbb{N}$ $\quad a_{k-1} = 3^{k-1}$

$a_{k-2} = 3^{k-2}$

И.С. Разглеждаме a_k

$$a_k = a_{k-1} + 6a_{k-2} = 3^{k-1} + 6.3^{k-2} = 3^{k-1} + 2.3^{k-1} = 3^k \checkmark$$

Метод на Хар. - уравнение.

$$a_n = c_1 a_{n-b_1} + c_2 a_{n-b_2} + \dots c_k a_{n-b_k} + E_1 P_1(n) d_1^n + E_2 P_2(n) d_2^n + \dots + E_t P_t(n) d_t^n$$

$$c_1, c_2 \dots, c_k, b_1 \dots, b_k, E_1 \dots, E_t, d_1, d_2 \dots d_t \in \mathbb{Z}$$

зад. Докажете, че $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ с рек-ур-е.

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + n \end{cases}$$

$$\underbrace{a_n - a_{n-1}}_{\text{Рекурсия}} = \underset{c.P(n)a^n}{n} \to 1.n^{1}.1^n$$

$$x^n - x^{n-1} = 0 \qquad \{1,1\}_M$$

$$x - 1 = 0$$

$$\{1\}_M \longrightarrow \{1,1,1\}_M$$

Общо решение: $a_n = A \underset{n^0}{\underset{1}{\cdot}} 1^n + B.n.1^n + C.n^2 1^n$

Търсим точно решение.

$a_0 = A.1^0 + B.0.1^n + C.0^2.1^0 = 0$

$a_1 = A.1^1 + B.1.1^n + C.1^2.1^1 = 1$

$a_2 = A.1^2 + B.2.1^2 + C.2^2.1^2 = 3$

$A = 0$

$B + C = 1$

$\Rightarrow B = \frac{1}{2} \quad C = \frac{1}{2}$

$2B + 4C = 3$

$a_n = \frac{1}{2} n + \frac{1}{2} n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$

Зад Докажете, че $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 2^n \end{cases}$$

$$\underbrace{a_n - a_{n-1}} = \underbrace{2^n}$$

$x^n - x^{n-1}$ $\qquad 1 . n^{\boxed{0}} \boxed{2}^n$

$\qquad\qquad 2 \{2\}_M$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

$\{1\}_M \longrightarrow \{1, 2\}_M$

=> Общо решение: $a_n = A . 1^n + B . 2^n$

$a_0 = A + B = 1$

=> $B = 2$, $A = -1$

$a_1 = A + 2B = 3$

Точно решение: $a_n = \cancel{A}\, 2 . 2^n - 1 = \boxed{2^{n+1} - 1}$

Зад Колко са $\forall$ думи с дължина n с буквите $\Sigma = \{a, b, c\}$, такива че няма 2 последователни а-та.

Решение: Нека a_n е търсеното количество

$a_1 = 3$

$a_2 = 8$

За стринговете с n символа имаме 2 случая:

$\boxed{1\text{сл.}}$ завършва на 'a'. броят на тези е

$2 * a_{n-2}$ ← ограничението се запазва за останалата част от думата.

предпоследната може да е 'b, c'

$\boxed{2\text{сл.}}$ не завършва на 'a'.

$2 * a_{n-1}$ ← ограничението за останалата част от думата.

последната може да е 'b, c'

$$\boxed{a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}}$$

$a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$

$x^2 - 2x - 2 = 0$

$\{1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\}_M$

Общо решение:

$$a_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n$$

$$a_1 = A(1+\sqrt{3}) + B(1-\sqrt{3}) = 3$$

$$a_2 = A(1+\sqrt{3})^2 + B(1-\sqrt{3})^2 = 8$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad B = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1+\sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1-\sqrt{3})^n$$

Зад $a_0 = 1$

$a_n = a_0 + a_1 \dots \quad a_{n-1}$

Решение: ур-то не е от познатия вид.

$a_0 = 1, \; a_1 = 1, \; a_2 = 2, \; a_3 = 4, \; a_4 = 8$

Твърдим, че $\forall n \geq 1 \quad a_n = 2^{n-1}$

Д-во с индукция:

БАЗА: $n = 1 \quad a_1 = a_0 = 1 = 2^0$ ✓

И.П. $\forall k < n \quad a^k = 2^{k-1}$

И.С. $a_n = \underbrace{a_0}_{1} + \underbrace{a_1}_{2^0} + \underbrace{a_2}_{2^1} \dots + \underbrace{a_{n-1}}_{2^{n-2}} =$

$= \sum_{i=1}^{n-2} 2^i + 1 = 2^{n+1} - \cancel{1} + \cancel{1} = \boxed{2^{n-1}}$

доказане 10.

$\Rightarrow \boxed{a_n = 2^{n-1}}$

II начин. $a_n = a_{n-1} + \underbrace{a_{n-2} \dots a_1}_{a_{n-1}}$

$a_n = 2a_{n-1}$

О.Р: $a_n = A \cdot 2^n, \; A = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a_n = 2^{n-1}}$

Зад $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} \dots 2a_0 \end{cases}$

решение:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	6	18	54	162.

Твърдим: $a_n = 2\cdot 3^{n-1}$ $(\forall n \geq 1)$

БАЗА: $n=1$ $a_1 = 2 = 2\cdot 3^0$

И.П. Допускаме, че $\forall k < n$ $a_k = 2\cdot 3^{k-1}$

И.С.

$$a_n = 2\cdot \underbrace{a_{n-1}}_{2\cdot 3^{n-2}} + 2\underbrace{a_{n-2}}_{2\cdot 3^{n-3}} \dots 2\cdot\underbrace{a_1}_{2\cdot 3^0} + 2\cdot \underbrace{a_0}_{1} =$$

$$= 4\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-2} 3^i\right)}_{\frac{3^{n+1}-2}{2}} + 2 = \cancel{4}\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(3^{n-1}-1)\right) + 2$$

$$= 2\cdot 3^{n-1} - \cancel{2} + \cancel{2} = \boxed{2\cdot 3^{n-1}}$$

II начин.

$$a_n = 2a_{n-1} + \underbrace{2a_{n-2} \dots 2a_0}_{a_{n-1}}$$

$a_n = 3a_{n-1}$

$a_n - 3a_{n-1} = 0$

О.Р: $\boxed{A\cdot 3^n}$

$a_1 = A\cdot 3 = 2$

$A = \frac{2}{3}$

$\boxed{a_n = 2\cdot 3^{n-1}}$