

# Прицип на ВКН и УЗКН

Търсим  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n| = ?$

Ако имам сечение, то прилагаме ПР на съдържанието

- ① ПР на съдържанието е частен сл. на ПР на б. ~~всич~~  
вн.
- ② и УЗКН. ③ ④

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < t \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_t| - \dots - (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n|.$$

Особено:

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left( \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k}| \right)$$

D-60: C unggyksua:

$$n=1 \quad |A_1| = |A_1| \quad \checkmark$$

$$n=2 \quad |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \quad \checkmark$$

U.1. Donyckame, we za manoe k ∈ N:

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{i=1}^k |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < l \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_l|$$

U.2 PAZLNEINGAME za k+1

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \right| = \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \cup A_{k+1} \right| \stackrel{\text{от } n+2}{=} \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| + |A_{k+1}| - \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \cap A_{k+1} \right|$$

Na PAZLNEINGAME  $\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \cap A_{k+1} \right|$ . Ne e gus-kojubno ot  
OTNOCHO U.

$$\Rightarrow |(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \dots (A_k \cap A_{k+1})| = \text{(от ung. presn.)}$$

$$= \sum_{i=1}^k |A_i \cap A_{k+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j \cap A_{k+1}| \dots + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{k+1}|$$

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \cup A_{k+1} \right| = \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| + |A_{k+1}| - \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \cap A_{k+1} \right|$$

$$\hookrightarrow \sum_{i=1}^k |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j \cap A_{k+1}| \dots (-1)^k |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{k+1}|$$

$$+ |A_{k+1}| - \left( \sum |A_i \cap A_{k+1}| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_{k+1}| \dots (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{k+1}| \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_{k+1}| \dots (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{k+1}| \checkmark$$

Зад Брои ~~различни~~ четирцицифренни числа,

които започват с 3 или завършват на 0.

Решение 1: Спр. на вкл. и изкл.

$P(x) \Leftrightarrow x$  започва с 3

$Q(x) \Leftrightarrow x$  завършва на 0.

$A_{P(x)}$  - всичко на 4-цицифренни числа, за които  $P(x) = T$ .

Търсих:  $|A_{P(x)} \cup A_{Q(x)}| = |A_{P(x)}| + |A_{Q(x)}| - |A_{P(x)} \cap A_{Q(x)}|$

$$= 1000 + 900 - \frac{100}{\frac{3}{1} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}} = 1800$$

Решение 2: С пригубил на съдържанието.  
(че разделим горе случаите)

	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \vee Q(x)$
1чн	F	F	F
2чн	T	F	T
3чн	T	T	T

$$1 \text{ cn. } P(x) = F \quad Q(x) = T$$

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times 1 = \boxed{1800}$$

$$2 \text{ cn. } P(x) = T \quad Q(x) = F$$

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times 9 = \boxed{1900}$$

$$3 \text{ cn. } P(x) = F \quad Q(x) = T$$

$$\frac{3}{1} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{1} = \boxed{1100}$$

$$800 + 900 + 100 = \boxed{1800} \checkmark$$

Задача Тройци се спорят за числа в  $[1 \dots 100]$ ,  
които не се делят на 2, 3 или 5.

Решение:

$\underbrace{\text{Всички}}_{100} - \text{Ненужните.}$

$A_i$  - множеството от числата в  $[1 \dots 100]$ ,  
които се делят на  $i$ .

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \\ = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$$

Отговор:  $100 - 74 = \boxed{26}$

Зад. № КОПКО НАЧИНА ИМЕЕ ГА

погредим  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  в реду,

ТАКА ЧЕ ГА НЯМА НАРАСТВАЩА ПОГРЕДУ,

С 3 последователни числа.

5 6 4 3 1 2    ✓

③ 6 ④ 2 ⑤ 1    ✗

Решение:  $\underbrace{0 + \text{всич}}_{6! = 720}$  - "Нодите"

$A_{i,j,k}$  - множество от # погреди до 1..6,

ТАКВА ЧЕ  $i, j, k$  са в нарастваш ред.

$$|A_{1,2,3} \cup A_{2,3,4} \cup A_{3,4,5} \cup A_{4,5,6}| = |A_{1,2,3}| + |A_{2,3,4}| + |A_{3,4,5}| +$$

$$|A_{4,5,6}| - |A_{1,2,3} \cap A_{2,3,4}| - |A_{1,2,3} \cap A_{3,4,5}| - |A_{1,2,3} \cap A_{4,5,6}| -$$

$$|A_{2,3,4} \cap A_{3,4,5}| - |A_{2,3,4} \cap A_{4,5,6}| - |A_{3,4,5} \cap A_{4,5,6}| +$$

$$|A_{1,2,3} \cap A_{2,3,4} \cap A_{3,4,5}| + |A_{1,2,3} \cap A_{2,3,4} \cap A_{4,5,6}| + |A_{1,2,3} \cap A_{2,3,4} \cap A_{3,4,5}| +$$

$$|A_{1,2,3} \cap A_{3,4,5} \cap A_{4,5,6}| + |A_{2,3,4} \cap A_{3,4,5} \cap A_{4,5,6}| - |A_{1,2,3} \cap A_{2,3,4} \cap A_{3,4,5} \cap A_{4,5,6}|$$

$$\underbrace{\binom{6}{3} \cdot 3!}_{\text{перм. основание}} + \binom{6}{3} \cdot 3! + \binom{6}{3} \cdot 3! + \binom{6}{3} \cdot 3!$$

фиксирале  
спутовете

$$123456 - \binom{6}{4} \cdot 2! - \binom{6}{5} \cdot 1! - \binom{6}{3} - \binom{6}{4} \cdot 2!$$

$$23456 - \binom{6}{5} \cdot 1! - \binom{6}{4} \cdot 2! + \binom{6}{5} \cdot 1! +$$

$$123456 + 123456 + 23456 = \binom{6}{5} \cdot 1! - 1 =$$

$$= 480 - 30 - 6 - 20 - 30 \\ = 6 - 30 + 6 + 1 + 1 + 6 - 1 = \\ = 371$$

$$\Rightarrow \text{Общо: } 720 - 371 = \boxed{349}$$

~~Задача~~ Копко са  $\neq$  решенија на УР - 10

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

$$x_1 \leq 3 \quad x_2 \leq 4 \quad x_3 \leq 6 \quad \forall x_i \geq 0$$

Бс решенија - "напишите"  
 $\binom{13}{2}$

ПОДСИЧИ:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 > 3 \vee x_2 > 4 \vee x_3 > 6 \end{array} \right.$$

$A_{x_i > y}$  - бс. решенија, когдато  $x_i > y$

$$\begin{aligned} |A_{x_1 > 3} \cup A_{x_2 > 4} \cup A_{x_3 > 6}| &= |A_{x_1 > 3}| + |A_{x_2 > 4}| \\ &\quad + |A_{x_3 > 6}| - |A_{x_1 > 3} \cap A_{x_2 > 4}| - |A_{x_1 > 3} \cap A_{x_3 > 6}| \\ &\quad - |A_{x_2 > 4} \cap A_{x_3 > 6}| + |A_{x_1 > 3} \cap A_{x_2 > 4} \cap A_{x_3 > 6}| \\ &= 36 + 28 + 15 - 6 - 1 - 0 + 0 = 72 \\ \binom{13}{2} - 72 &= 78 - 72 = \boxed{6} \end{aligned}$$

1) Задачата може да се реши  
јез бкп и изкл.  
но копко научила може

$$\frac{3+4+6=13}{\text{за максимум } 2??1 - \boxed{6}}$$

Зад Конко са всички перестройки  
на  $\{1 \dots n\}$ , за които никое член  
не е на мястото си. ? (Derangements)

Решение:

$A_i$  - място на тези пери, в които;  
е на мястото си.

Търсим.  $n! - \underbrace{|A_1 \cup A_2 \dots A_n|}_{\text{"попаде"}}$ ,

$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i| // (n(n-1)!)$  // за всички  $|A_k| = (n-1)!$   
имаме  $n$  м-ба.

$- \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| // \binom{n}{2}(n-2)!$  // за  $t, k \in \mathbb{N}$   $|A_t \cap A_k| =$   
 $= (n-2)!$   
имаме  $\binom{n}{2}$  м-ба.

$+ \sum_{1 \leq i < j < s \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_s| // \binom{n}{3}(n-3)!$  // за  $t, k, r \in \mathbb{N}$   $|A_t \cap A_k \cap A_r| =$   
 $\overset{\text{РАЗЛУЧИ}}{=} (n-3)!$   
имаме  $\binom{n}{3}$  м-ба.

$$n! = \left( \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! \right) \quad // \quad n! = \binom{n}{0} (n-0)!$$

=> O T 20 BOP :

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$

Задача

Задача:  $A, B$  - множества и  $|A|=n$  и  $|B|=m$

a) Колко са всички ~~н~~ фунции  $f: A \rightarrow B$ .

{ Колко са всички стрингове с дължина  $n$   
с азбука от  $m$  символа }

$$\boxed{m^n}$$

б) Колко са всички <sup>частично</sup> ~~н~~ фунции  $f: A \rightarrow B$

$\boxed{m^{n+1}}$   $\rightarrow$  всеки елемент може и да има одраз.

в) Колко са всички инективни фунции  $f: A \rightarrow B$

{ Колко са всички стрингове с дължина  $n$   
с букви от азбука с  $m$  символа и  
неизвестни повторящи се букви }

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m - \cancel{n+1}) = \boxed{\frac{m!}{(m-n)!}}$$

2) БРОЙ обикнови? ( $n=m$ )

{ брои стрингове с дължина  $n$  с всички символи от алфавита с  $n$  символа и всички участства точно веднъз }

$$\boxed{n!}$$

g) брои сюрекции  $f: A \rightarrow B$

{ брои стрингове с дължина  $n$  с буква от алфавита с  $m$  символа, в които всяка буква се среща поне веднъз }

от всички  $\phi$ -ии - "положите"

$X_i$  -  $\phi$ -ии, в които  $i$ -ия елемент няма предходящ (стрингове, в които не участва  $i$ -тата буква)

$$|\bigcup_{i=1}^n X_i| = \sum |X_i| - \sum |X_i \cap X_j| + \sum |X_i \cap X_j \cap X_k| - \dots$$

$\overbrace{\begin{array}{c} m \\ \uparrow \\ \text{брой} \end{array}}^{m-1} \cdot \overbrace{\begin{array}{c} (m-1)^n \\ \uparrow \\ \text{мощност} \\ \text{на} \\ \text{всичко} \\ \text{множество} \end{array}}^{m^n}$ 
 $\overbrace{\begin{array}{c} \binom{m}{2} \cdot (m-2)^n \\ \uparrow \\ \text{брой} \end{array}}^{m-2} \cdot \overbrace{\begin{array}{c} (m-3)^n \\ \uparrow \\ \text{мощност} \\ \text{на} \\ \text{всичко} \end{array}}^{m-3}$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{m}{i} (m-i)^n$$