def: Хамилтонов път/маршрут

· път/маршрут, в който всеки връх участва точно веднъж.

def: Хамилтонов цикъл/контур.

цикъл/контур, в който всеки връх участва точно веднъж (с изключение на началото, което съвпада с края)

<u>зад</u>

Брой хам. пътища в K_n: $n!$

Брой хам. цикли в K_n: $\frac{(n-1)!}{2}$

⚠ Приемаме, че 2 цикъла са различни, ако има ребро, което участва в единия и не участва в другия.

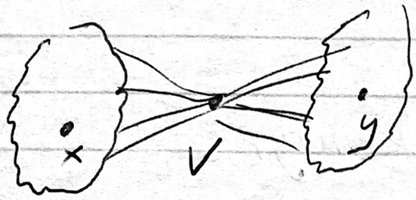
def: Срязващ връх (cut vertex)
(неформално)

Връх в свързан граф, който при премахването му графът няма да е свързан.

зад Нека G е свързан неор. граф

и нека G съдържа срязващ връх v.

Докажете, че в G няма хам. цикъл.

идея: 

$x \rightsquigarrow v \rightsquigarrow y$?

$y \rightsquigarrow v \rightsquigarrow x$

за домашно!

Тв: Нека $G=\langle V,E\rangle$ е двуделен граф с дялове A и B.

Ако G е хамилтонов (има хам. цикъл), то $|A|=|B|$

решение:

Всяко ребро свързва върхове от различни дяло

Допускаме, че $|A| \neq |B|$.

Нека Б.О.О. $|A| = m > n = |B|$.

Нека цикълът започва в $u \in B$.

След $2n$ ребра трябва да сме се върнали обратно в u.

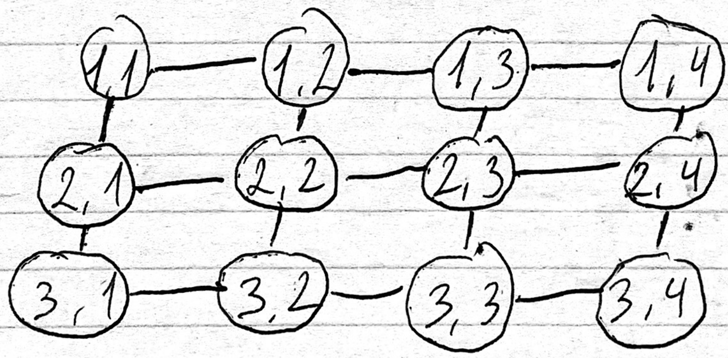
Тогава има $m-n>0$ върхове в A, които не сме обходили. Но тогава това не е хам. цикъл. ↯.

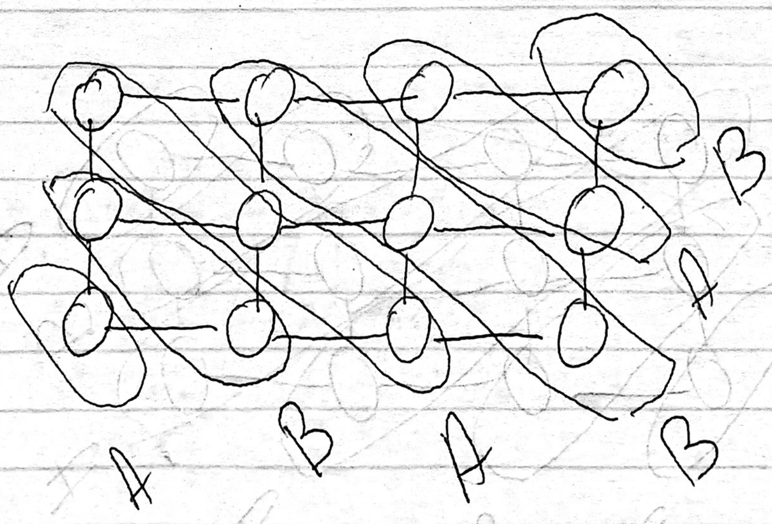
def: Грид-граф (Grid-graph).

$$I_n = \{1 \dots n\}$$

$$G_{p\times q} = \{I_p \times I_q, \{\{\langle i,j\rangle, \langle k,l\rangle\} \subseteq I_p \times I_q : |i-k|+|j-l|=1\}\}$$

$G_{3\times 4}$:





$(p, q > 1)$

$G_{p \times q}$ е хамилтонов $\iff$ p е четно $\vee$ q е четно.

1) $G_{p \times q}$ е хам $\Rightarrow$ p е четно $\vee$ q е четно.

Доказваме контрапозицията:

p е нечетно $\wedge$ q е нечетно $\Rightarrow$ $G_{p \times q}$ не е хам.

Нека p и q са нечетни

$\Rightarrow$ $G_{p \times q}$ има $p \cdot q$ (нечетен) брой върхове

Но $G_{p \times q}$ е двуделен. Нека дяловете са A и B. Тогава $|A| \neq |B|$.

Но ние доказахме, че:

$$G \text{ е хам} \Rightarrow |A| = |B|$$

$$\Updownarrow$$

$$|A| \neq |B| \Rightarrow G \text{ не е хам.}$$

Но $G_{p \times q}$ е двуделен $\lightning$

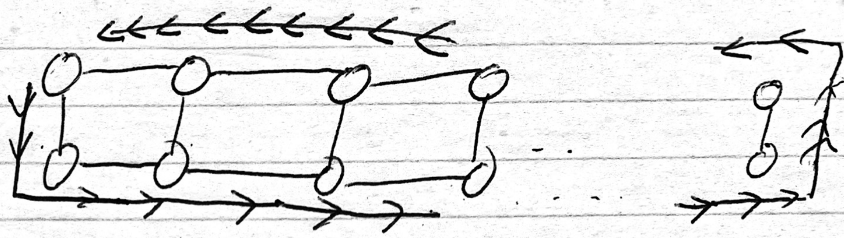
2) p е четно $\vee$ q е четно $\Rightarrow$ $G_{p \times q}$ е хам.

Б.О.О. Нека p е четно.

Д-во по индукция:

(Можем, защото следващия граф е еднозначно определен

База $p=2$



$(1,1)\ (2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)\ \dots\ (2,n-1),\ (2,n)\ (1,n)$

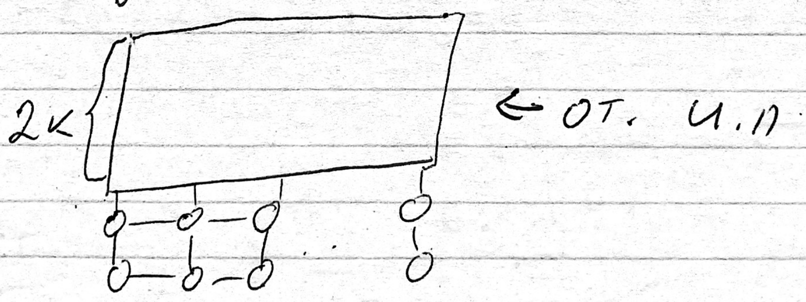
$(1,n-1),\ (1,n-2)\ \dots\ (1,2)\ (1,1)$

(Ще използваме $\langle \dots \rangle$ надолу)

И.П. Нека твърдението е изпълнено за

$p = 2k \quad (k \in \mathbb{N})$

И.С. Разглеждаме за $p = 2(k+1)$



$C_{2k} = V_1 V_2 V_3 \dots V_l V_1$

Б.О.О. $V_1 = \langle 1,1 \rangle$

Първият възел, който ще посети цикъла е $\langle 2k, 1 \rangle$.

$V_s = \langle 2K, 1\rangle \Rightarrow V_{s-1} = \langle 2K-1, 1\rangle$

$V_{s+1} = \langle 2K, 2\rangle$

$C_{2(k+1)} = V_1 \dots V_s, \langle 2k+1,1\rangle, \langle 2k+2,1\rangle \dots \langle 2k+2,q\rangle \langle 2k+1,q\rangle \dots \langle 2k+1,2\rangle, V_{s+1} \dots V_l V_1$.

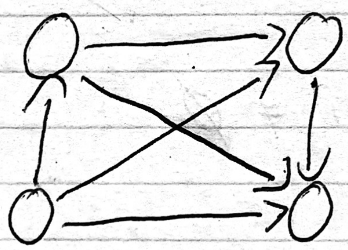
Което е хам. цикъл. ✓

def: Граф - турнир.

$G = \langle V, E\rangle$ - ориентиран граф,

за който $\forall v,u \in V \; (v \neq u \Rightarrow \langle v,u\rangle \in E \oplus \langle u,v\rangle \in E)$

пример.



ребра: $\binom{n}{2}$

Твърдение: Във всеки граф турнир има хамилтонов маршрут.

Д-во: С индукция по броя върхове.

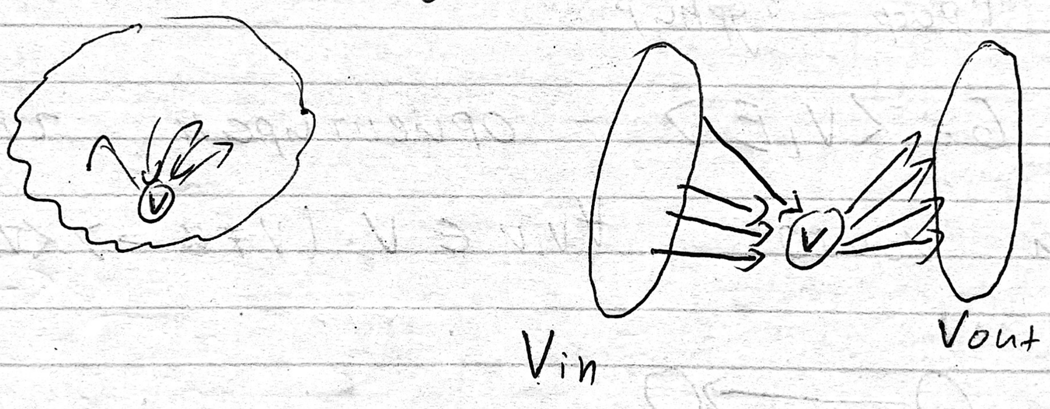
(Тук следващия граф не е еднозначно определен, от което следва че ни трябва силна индукция)

$\boxed{\text{База}}$: Граф с 1 връх – тривиално вярно V.

$\boxed{\text{И.П.}}$ Допускаме, че твърдението е изпълнено за всички граф-турнири с не повече от n върха.

$\boxed{\text{И.С}}$ Разглеждаме произволен граф-турнир $G = \langle V, E \rangle$ с $n+1$ върха.

Фиксираме произволен връх v.



Нека б.о.о. $V_{in} \neq \emptyset$ $V_{out} \neq \emptyset$

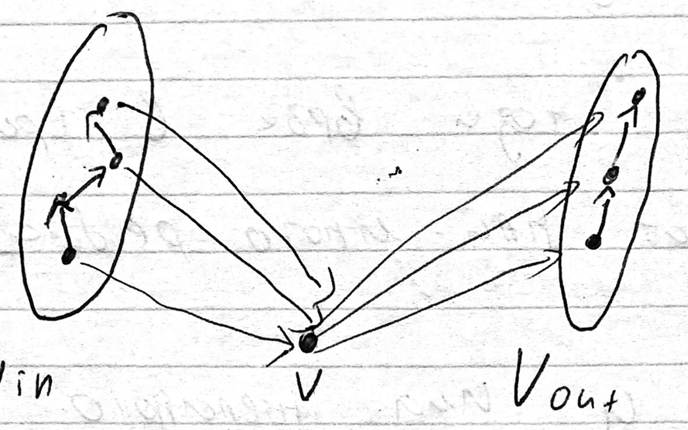
$V_{in} = \{ x \in V \mid \langle x, v \rangle \in E \}$

$V_{out} = \{ x \in V \mid \langle v, x \rangle \in E \}$

Индуцираните подграфи ~~Vi~~ от V_{in} и V_{out} са граф-турнири и имат не повече от n върха

=> От. И.П имат Хам. ~~път~~ маршрута

Нека са C_{in} и C_{out}



$\Rightarrow$ $C_{in}\ v\ C_{out}$ е хам. маршрут в ✓

(Ако $V_{in} = \emptyset$ v $V_{out} = \emptyset$ случаите са аналогични)

<u>зад</u> Нека G е граф-турнир.

Докажете, че има връх u в G, такъв че за всеки връх v в G съществува ~~път~~ маршрут с дължина ≤2, който започва във връх u и завършва в v.

Решение 1 (по метода на екстремалния елемент)

Нека u е този връх в графа, от който излизат най-много ребра.

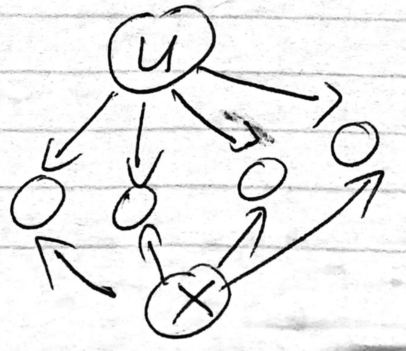
Твърдим, че u има желаното свойство.

Допускаме противното: Същ. връх x, който не може да достигнем от u за 1 или 2 стъпки.

$\Rightarrow$ За всеки връх w, за който $u \to w$ да не може да има ребро от w към x $\underbrace{(w \to x)}_{\text{няма такива}}$

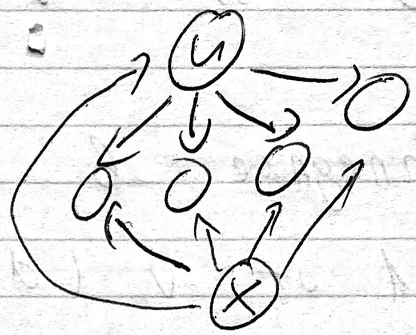
$\Rightarrow x \to w$.

$\Rightarrow$ Излизащите ребра от x са поне толкова, колкото от u



Но от u не можем да стигнем до x за една стъпка

$\Rightarrow$ 



Но тогава x има поне едно изходящо ребро повече от u. Но избрахме u да има макс. брой изходящи ребра. $\lightning$

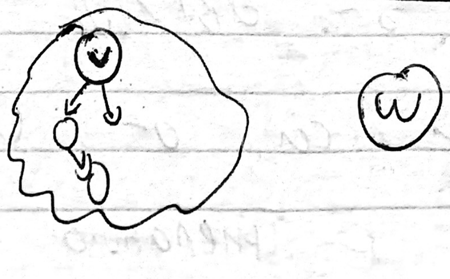
решение 2 (с индукция)

База: $n \leq 2$ - очевидно.

И.С. $n > 2$. $G = \langle V, E \rangle$ турнир с n върха.

Разглеждаме произволен връх w

$G' = G - w$ | G' от. И.П има такъв връх v



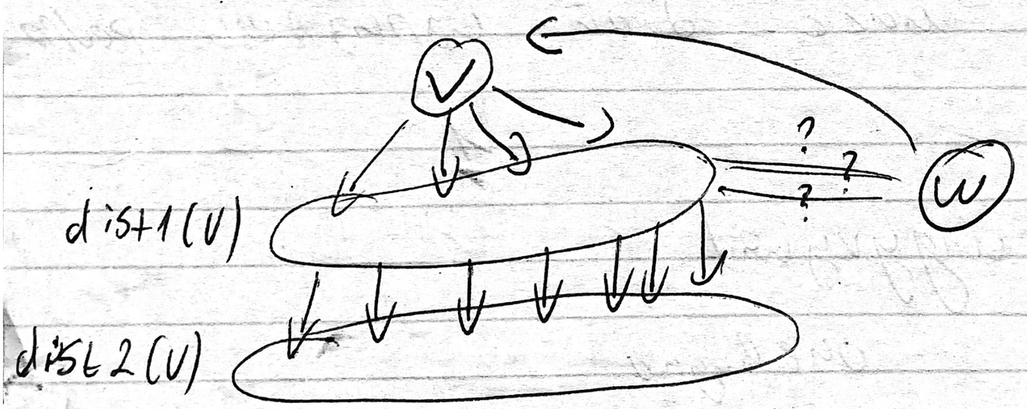
1 сл. В G $v \to w$.

Тогава v има желаното свойство в G.

2 сл. В G $w \to v$.

Да разгледаме в G' върховете на разст 1 от v (dist1(v)) и върховете на разст 2 от v (dist2(v)).

$(v \cup dist1(v) \cup dist2(v) \cup \{w\} = V)$



Ако има ребро от dist1(v) към w, то v е върхът с желаното св-во.

Ако няма ребро от dist1(v) към w, то всички ребра са от w към dist1(v) $\Rightarrow$ w е върхът с желаното свойство.

зад Докажете, че ако граф-турнир съдържа ~~ориентир~~ контур, то съдържа 3-контур.

решение: Нека разгледаме най-краткия контур: $C = v_1 \dots v_k$.

Ако $k > 3$: Да разгледаме

v_1 v_3

Ако $v_1 \longrightarrow v_3$, получаваме по-къс цикъл. ↯

Тогава:

~~Ако~~ $v_3 \to v_1 \Rightarrow$ получихме

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[r] & v_2 \arrow[d] \\ & v_3 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$