def: Детерминиран краен автомат

$$A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$$

Σ - азбука

Q - крайно м-во от състояния

$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ тотална ф-я

$s \in Q$ стартово състояние

$F \subseteq Q$ финални състояния

дефинираме и $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$

$$\delta(q, \alpha) = \begin{cases} q & \alpha = \varepsilon \\ \delta(\delta^*(q, \beta), a) & \alpha = \beta a \end{cases}$$

$$L(A) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(s, \alpha) \in F\}$$

def: Недетерминистичен краен автомат

$$N = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$$

Q - крайно мн-во от състояния

Σ - крайна азбука

$\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$

$s \in Q$ стартово състояние

$F \subseteq Q$ м-во от фин. състояния

Разглеждаме разширение на δ

$$\delta^*(R, \alpha) = \begin{cases} R, & \text{ако } \alpha = \varepsilon \\ \bigcup \{ \delta(q, a) \mid q \in \delta^*(R, \beta) \}, & \text{ако } \alpha = \beta a \end{cases}$$

$$L(N) = \{ w \in \Sigma^* \mid \delta^*(\{s\}, w) \cap F \neq \emptyset \}$$

Th. Rabin - Scott

За $\forall$ недетерминистичен автомат N съществува еквивалентен на него дет. авт. A

т.е $$L(N) = L(A)$$

Д-во (скица):

Нека $N = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$ - Н.К.А.

ще построим еквивалентен Д.К.А

$$A = \langle 2^Q, \Sigma, \{s\}, F', \delta' \rangle$$

$$F' = \{ M \subseteq Q \mid M \cap F \neq \emptyset \}$$

$$\delta'(M, a) = \bigcup_{q \in M} \delta(q, a)$$

твърдя, че $L(A) = L(N)$. Наистина

$$L(N) = \{ w \in \Sigma^* \mid \delta^*(\{s\}, w) \cap F \neq \emptyset \} = \{ w \in \Sigma^* \mid \delta^*(\{s\}, w) \in F' \}$$

$$= L(A)$$

Затвореност на автоматните езици относно рег. опер.

- Обединение

$$A_1 = \langle Q_1, \Sigma, s_1, F_1, \delta_1 \rangle, \; A_2 = \langle Q_2, \Sigma, s_2, F_2, \delta_2 \rangle$$

Б.о.о. $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

$$A = \langle \underbrace{Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\}}_{s \notin Q_1 \cup Q_2}, \Sigma, s, F', \delta' \rangle$$

$$F' = \begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \{s\} & s_1 \in F_1 \vee s_2 \in F_2 \\ F_1 \cup F_2 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \\ \delta_2(q,a) & q \in Q_2 \\ \delta_1(s_1,a) \cup \delta_2(s_2,a) & q = s \end{cases}$$

Твърдя, че: $L(A) = L(A_1) \cup L(A_2)$

1сп. $w = \varepsilon$ $\quad w \in L(A) \iff \delta'^*(\{s\}, \varepsilon) \subseteq F' \iff \{s\} \subseteq F' \iff s \in F' \iff s_1 \in F_1 \vee s_2 \in F_2$
$\iff w \in L(A_1) \vee w \in L(A_2)$

2сп. $w = au$, $a \in \Sigma$, $u \in \Sigma^*$ $\quad \boxed{au \in L(A)} \iff \delta'^*(\delta'(\{s\},a), u) \subseteq F' \iff$
$(\exists q \in Q_1 \cup Q_2)(\delta'(s,a) \ni q \wedge \delta'^*(q,u) \subseteq F') \iff$

$[(\exists q \in Q_1)(\delta'(s,a) \ni q \wedge \delta'^*(q,u) \subseteq F_1) \vee$
$(\exists q \in Q_2)(\delta'(s,a) \ni q \wedge \delta'^*(q,u) \subseteq F_2)] \iff$

$$\boxed{w \in L(A_1) \vee w \in L(A_2)}$$

- Конкатенация

$$A_1 = \langle Q_1, \Sigma, s_1, F_1, \delta_1 \rangle, \quad A_2 = \langle Q_2, \Sigma, s_2, F_2, \delta_2 \rangle$$

$$Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$$

$$A = \langle Q_1 \cup Q_2, \Sigma, s_1, F', \delta' \rangle$$

$$F' = \begin{cases} F_1 \cup F_2 & s_2 \in F_2 \\ F_2 & \text{иначе} \end{cases} \qquad \delta'(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \setminus F_1 \\ \delta_1(q,a) \cup \delta_2(s_2,a) & q \in F_1 \\ \delta_2(q,a) & \text{else} \end{cases}$$

$$L(A) = L(A_1) \cdot L(A_2)$$

- Звезда на клини.

$$A_1 = \langle Q_1, \Sigma, s_1, F_1, \delta_1 \rangle$$

$$A = \langle Q_1 \cup \{s\}, \Sigma, s, F_1 \cup \{s\}, \delta' \rangle$$

$$s \notin Q_1$$

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \setminus F_1 \\ \delta_1(q,a) \cup \delta_1(s_1,a) & q \in F_1 \\ \delta_1(s_1,a) & q = s \end{cases}$$

Th. Kleeny.

Всеки автоматен език се описва с рег израз (е регулярен)

D-во: Нека $L = L(A)$ за A - ДКА.

Да фиксираме изброяване на състоянията

$Q = \{q_0, q_1 \dots q_{n-1}\}$ $\quad q_{start} = q_0$
(S)

$L(i,j,k)$ - множеството от тези думи, които могат да се разпознаят от автомата по път, който започва от q_i, завършва в q_j и междинните съст. имат индекс $< k$.

$$L(A) = \bigcup \{L(0,j,|Q|) \mid q_j \in F\} = \bigcup_{q_j \in F} L(0,j,|Q|)$$

С индукция по k ще докажем, че $L(i,j,k)$ се описва от рег. израз / е регулярен. $\forall i \forall j$

База: $k = 0$

- $i \neq j$ $\quad L(i,j,0) = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}$
- $i = j$ $\quad L(i,j,0) = \{\varepsilon\} \cup \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}$

И.П. $\forall i \forall j$ ($L(i,j,k)$ се описва от рег. израз / е регулярен) за някое k.

И.С. Разглеждаме $L(i,j,k+1)$ за произволни i,j

- Нека $w \in L(i,j,k+1)$

  - q_k не е измежду вътрешните състояния, които участват в изчислението на w

    $\Rightarrow w \in L(i,j,k)$

  - q_k е измежду вътрешните състояния, които участват в изчислението на w.

    $\Rightarrow w \in L(i,k,k) . L(k,k,k)^* . L(k,j,k)$

$$L(i,j,k+1) = L(i,j,k) \cup L(i,k,k).(L(k,k,k))^*.L(k,j,k)$$

от И.П. са регулярни / описват се от рег. израз

Прилагаме рег. операции

$\Rightarrow L(i,j,k+1)$ е рег / описва се от рег. израз.

$\Rightarrow L(A)$ е регулярен / се описва от рег. израз

Pumping Lemma.

Ако L е рег. език, то:

$\exists p \in \mathbb{N}^+$, такова че за всяка дума $w \in L$

ако $|w| \geq p$, то

$$(\exists x, y, z \in \Sigma^*)(w = xyz \wedge |y| \geq 1 \wedge |xy| \leq p \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(xy^iz \in L))$$

Д-во: Щом L е регулярен, то L е автоматен.

Нека $A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$ е КДА за L.

Полагаме $p = |Q|$. Разглеждаме дума от L с дължина k ($k \geq p = |Q|$). Първите k стъпки от изчислението на думата:

$$q_{start} \xrightarrow{\alpha_1} q_1 \xrightarrow{\alpha_2} q_2 \dots \xrightarrow{\alpha_p} q_p$$

участват $p+1$ състояния => по Дирихле $(\exists i, j)(0 \leq i < j \leq n)$
$(q_i = q_j)$

Разделяме думата на 3 части.

$$\underbrace{\alpha_1 \dots \alpha_i}_{x} \quad \underbrace{\alpha_{i+1} \dots \alpha_j}_{y} \quad \underbrace{\alpha_{j+1} \dots \alpha_k}_{z}$$

- $|y| > 1$ (защото $i < j$)
- $|xy| = j \leq p$

Наистина щом $xyz \in L$, то $xz, xyyz \dots \in L$. $(\forall i \in \mathbb{N})(xy^iz \in L)$

Примери за нерегулярни езици:

$L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $L_2 = \{w w^{rev} \mid w \in \Sigma^*\}$

- Нека L е рег. език.

Релация на Майхил-Нероуд за L

$$R_L = \{\langle x, y\rangle \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$$

Автоматна релация за $A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta\rangle$ $L(A) = L$

$$R_A = \{\langle x, y\rangle \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \delta^*(s, x) = \delta^*(s, y)\}$$

R_L и R_A са релации на еквивалентност.

Тв1: R_M прецизира R_L $(\forall w \in \Sigma^* \ [w]_{R_M} \subseteq [w]_{R_L})$

Д-во: $(\forall \langle x, y\rangle \in \Sigma^* \times \Sigma^*)(\delta^*(s, x) = \delta^*(s, y) \Rightarrow \forall z(\delta^*(s, xz) = \delta^*(s, yz))$

$\Rightarrow \forall z : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$

Автомат на Нероуд

$$M = \langle \{[w_1] \ldots [w_k]\}, \Sigma, [\varepsilon], F', \delta'\rangle$$

$F' = \{[w] \mid w \in F\}$

$\delta'([w], a) = [wa]$.

• Лема 1

$$xR_Ly \Rightarrow (\forall a\in\Sigma)(xa\,R_L\,ya)$$

Д-во:

$$xR_Ly \Rightarrow (\forall z\in\Sigma^*)(xz\in L \Leftrightarrow yz\in L)$$

$$\Rightarrow \left(\forall \underset{\in\Sigma}{a} z\in\Sigma^*\right): (x(az)\in L \Leftrightarrow y(az)\in L)$$

$$\Rightarrow (\forall a\in\Sigma)(\forall z\in\Sigma^*)((xa)z\in L \Leftrightarrow (ya)z\in L)$$

$$\Rightarrow (\forall a\in\Sigma)(xa\,R_L\,ya).$$

Лема 2 $(\delta')^*([\cancel{x}], y) = [\cancel{xy}]$

Д-во с индукция по $|y|$

$\delta'^*([x], \varepsilon) = [x]$ ✓

$\delta'^*([x], aw) = \delta'^*(\delta([x], a), w) = \delta'^*([xa], w) =$

$= [xaw]$ ✓

Лема 3 $L(M) = L$

от предната лема

$w\in L(M) \Leftrightarrow \delta'^*([\varepsilon], w) \in \{[w] \mid w\in L\} \Leftrightarrow [w]\in\{[w] \mid w\in L\}$

$\Leftrightarrow x\in L$

класовете на екв. са или изцяло в, или извън L

. Th. на Майхил – Нероуд

L е регулярен $\iff |R_L| < \infty$

$\Rightarrow$ Разглеждаме контрапозицията.

$|R_L| = \infty \Rightarrow L$ не е рег.

Да допуснем, че L е рег.

$\Rightarrow \exists$ КДА $A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$ $L(A) = L$.

R_A прецизира R_L

$\Rightarrow |Q| \geq |R_A| \geq |R_L| = \infty$

$\lightning$ (Q трябва да е крайно)

$\Leftarrow$ Нека $|R_L| < \infty$

$\Rightarrow M$ (автоматът на Нероуд) разпознава L

$\Rightarrow L$ е автоматен $\iff L$ е регулярен.

• Алгоритъм за конст. на мин. авт. по даден дет. авт.

Нека $A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$ е КДА

$$L(q) = \{ w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q, w) \in F \}$$

Тогава: $L(s) = L(A)$

$\equiv_A \subseteq Q \times Q$ $\quad p \equiv_A q \iff L(p) = L(q)$

Търсим класовете на екв на $\equiv_A$.

$$p \equiv_A^n q \iff L_A^n(p) = L_A^n(q)$$

$$L_A^n(q) = \{ w \mid |w| \leq n \wedge \delta^*(q, w) \in F \}$$

$\equiv_A^n$ е апроксимация на $\equiv_A$.

$\equiv_A^{n+1}$ е по-фина от $\equiv_A^n$.

Търсим такова $k \in \mathbb{N}$: $\equiv_A^k = \equiv_A^{k+1}$

Тогава: $\equiv_A^k = \equiv_A$

$$p \equiv_A^{n+1} q \iff p \equiv_A^n q \wedge (\forall a \in \Sigma)(\delta(p, a) \equiv_A^n \delta(q, a))$$

Класовете на екв. на $\equiv A$ са състоянията на минималния автомат