def: Детерминиран краен автомат

$$A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$$

Σ - азбука

Q - крайно м-во от състояния

$\delta: Q \times \Sigma \to Q$ тотална ф-я

$s \in Q$ стартово състояние

$F \subseteq Q$ финални състояния

дефинираме и $\delta^*: Q \times \Sigma^* \to Q$

$$\delta^*(q, \alpha) = \begin{cases} q & \alpha = \varepsilon \\ \delta(\delta^*(q, \beta), a) & \alpha = \beta a \end{cases}$$

$$L(A) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(s, \alpha) \in F\}$$

def: Недетерминистичен краен автомат

$$N = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$$

Q - крайно мн-во от състояния

Σ - крайна азбука

$\delta: Q \times \Sigma \to 2^Q$

$s \in Q$ стартово състояние

$F \subseteq Q$ м-во от фин. състояния

Разглеждаме разширение на δ

$$\delta^*(R, \alpha) = \begin{cases} R, & \text{ако } \alpha = \varepsilon \\ \bigcup \{\delta(q, a) \mid q \in \delta^*(R, \beta)\}, & \text{ако } \alpha = \beta a \end{cases}$$

$$L(N) = \{ w \in \Sigma^* \mid \delta^*(\{s\}, w) \cap F \neq \emptyset \}$$

Th. Rabin - Scott

За $\forall$ недетерминистичен автомат N съществува еквивалентен на него дет. авт. A

т.е $$L(N) = L(A)$$

Д-во (скица):

Нека $N = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$ - Н.К.А.

ще построим еквивалентен Д.К.А

$$A = \langle 2^Q, \Sigma, \{s\}, F', \delta' \rangle$$

$$F' = \{ M \subseteq Q \mid M \cap F \neq \emptyset \}$$

$$\delta'(M, a) = \bigcup_{q \in M} \delta(q, a)$$

твърдя, че $L(A) = L(N)$. Наистина

$$L(N) = \{ w \in \Sigma^* \mid \delta^*(\{s\}, w) \cap F \neq \emptyset \} = \{ w \in \Sigma^* \mid \delta^*(\{s\}, w) \in F' \}$$
$$= L(A)$$

Затвореност на автоматните езици относно рег. опер.

• обединение

$$A_1 = \langle Q_1, \Sigma, s_1, F_1, \delta_1 \rangle, A_2 = \langle Q_2, \Sigma, s_2, F_2, \delta_2 \rangle$$

Б.о.о. $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

$$A = \langle \underset{s \notin Q_1 \cup Q_2}{Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\}}, \Sigma, s, F', \delta' \rangle$$

$$F' = \begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \{s\} & s_1 \in F_1 \vee s_2 \in F_2 \\ F_1 \cup F_2 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \\ \delta_2(q,a) & q \in Q_2 \\ \delta_1(s_1,a) \cup \delta_2(s_2,a) & q = s \end{cases}$$

Твърдя, че: $L(A) = L(A_1) \cup L(A_2)$

1сл. $w = \varepsilon$ $\quad w \in L(A) \Leftrightarrow \delta'^*(\{s\}, \varepsilon) \subseteq F' \Leftrightarrow \{s\} \subseteq F' \Leftrightarrow s \in F' \Leftrightarrow s_1 \in F_1 \vee s_2 \in F_2$

$\Leftrightarrow w \in L(A_1) \vee w \in L(A_2)$

2сл. $w = au$, $a \in \Sigma$, $u \in \Sigma^*$

$\boxed{au \in L(A)} \Leftrightarrow \delta'^*(\delta'(\{s\}, a), u) \subseteq F' \Leftrightarrow$

$(\exists q \in Q_1 \cup Q_2)(\delta'(s,a) \ni q \wedge \delta'^*(q,u) \subseteq F') \Leftrightarrow$

$[(\exists q \in Q_1)(\delta'(s,a) \ni q \wedge \delta'^*(q,u) \subseteq F_1) \vee$

$(\exists q \in Q_2)(\delta'(s,a) \ni q \wedge \delta'^*(q,u) \subseteq F_2)] \Leftrightarrow$

$\boxed{w \in L(A_1) \vee w \in L(A_2)}$

- Конкатенация

$$A_1 = \langle Q_1, \Sigma, s_1, F_1, \delta_1 \rangle, \quad A_2 = \langle Q_2, \Sigma, s_2, F_2, \delta_2 \rangle$$

$$Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$$

$$A = \langle Q_1 \cup Q_2, \Sigma, s_1, F', \delta' \rangle$$

$$F' = \begin{cases} F_1 \cup F_2 & s_2 \in F_2 \\ F_2 & \text{иначе} \end{cases} \qquad \delta'(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \setminus F_1 \\ \delta_1(q,a) \cup \delta_2(s_2,a) & q \in F_1 \\ \delta_2(q,a) & \text{else} \end{cases}$$

$$L(A) = L(A_1) \cdot L(A_2)$$

- Звезда на Клини.

$$A_1 = \langle Q_1, \Sigma, s_1, F_1, \delta_1 \rangle$$

$$A = \langle Q_1 \cup \{s\}, \Sigma, s, F_1 \cup \{s\}, \delta' \rangle$$

$$s \notin Q_1$$

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \setminus F_1 \\ \delta_1(q,a) \cup \delta_1(s_1,a) & q \in F_1 \\ \delta_1(s_1,a) & q = s \end{cases}$$

Th. Kleeny.

Всеки автоматен език се описва с рег израз (е регулярен)

Д-во: Нека $L = L(A)$ за A - ДКА.

Да фиксираме изброяване на състоянията

$Q = \{q_0, q_1 \dots q_{n-1}\}$ $\quad q_{start} = q_0$ (S)

$L(i,j,k)$ - множеството от тези думи, които могат да се разпознаят от автомата по път, който започва от q_i, завършва в q_j и междинните съст. имат индекс $< k$.

$$L(A) = \bigcup \{L(0,j,|Q|) \mid q_j \in F\} = \bigcup_{q_j \in F} L(0,j,|Q|)$$

С индукция по к ще докажем, че $L(i,j,k)$ $\forall i \forall j$ се описва от рег. израз/е регулярен.

База: $k = 0$

- $i \neq j$ $\quad L(i,j,0) = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}$
- $i = j$ $\quad L(i,j,0) = \{\varepsilon\} \cup \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}$

И.П. $\forall i \forall j$ ($L(i,j,k)$ се описва от рег. израз / е регулярен) за някое k.

И.С. Разглеждаме $L(i,j,k+1)$ за произволни i,j

- Нека $w \in L(i,j,k+1)$

  - q_k не е измежду вътрешните състояния, които участват в изчислението на w
    $\Rightarrow w \in L(i,j,k)$

  - q_k е измежду вътрешните състояния, които участват в изчислението на w.
    $\Rightarrow w \in L(i,k,k) \cdot L(k,k,k)^* \cdot L(k,j,k)$

$$L(i,j,k+1) = L(i,j,k) \cup L(i,k,k) \cdot (L(k,k,k))^* \cdot L(k,j,k)$$

от И.П. са регулярни / описват се от рег. израз

Прилагаме рег. операции

$\Rightarrow L(i,j,k+1)$ е рег / описва се от рег. израз.

$\Rightarrow L(A)$ е регулярен / се описва от рег. израз

Pumping lemma.

Ако L е рег. език, то:

$\exists p \in \mathbb{N}^+$, такова че за всяка дума $w \in L$

ако $|w| \geq p$, то

$(\exists x, y, z \in \Sigma^*)(w = xyz \wedge |y| \geq 1 \wedge |xy| \leq p \wedge (\forall i \in \mathbb{N})(xy^i z \in L))$

Д-во: Щом L е регулярен, то L е автоматен.

Нека $A = \langle Q, \Sigma, q_s, F, \delta \rangle$ е КДА за L.

Полагаме $p = |Q|$. Разглеждаме дума от L с дължина k ($k \geq p = |Q|$). Първите k стъпки от изчислението на думата:

$$q_{start} \xrightarrow{\alpha_1} q_1 \xrightarrow{\alpha_2} q_2 \ldots \xrightarrow{\alpha_p} q_p$$

участват p+1 състояния => по Дирихле $(\exists i, j)(0 \leq i < j \leq n)$ $(q_i = q_j)$

Разделяме думата на 3 части

$$\underbrace{\alpha_1 \ldots \alpha_i}_{x} \quad \underbrace{\alpha_{i+1} \ldots \alpha_j}_{y} \quad \underbrace{\alpha_{j+1} \ldots \alpha_k}_{z}$$

- $|y| > 1$ (защото $i < j$)
- $|xy| = j \leq p$

Наистина щом $xyz \in L$, то $xz, xyyz \ldots \in L$. $(\forall i \in \mathbb{N})(xy^i z \in L)$

Примери за нерегулярни езици:

$L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $L_2 = \{w w^{rev} \mid w \in \Sigma^*\}$

- Нека L е рег. език.

Релация на Майхил-Нероуд за L

$$R_L = \{\langle x, y\rangle \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \forall z \in \Sigma^*: xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$$

Автоматна релация за $A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta\rangle$ $L(A) = L$

$$R_A = \{\langle x, y\rangle \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \delta^*(s, x) = \delta^*(s, y)\}$$

R_L и R_A са релации на еквивалентност,

Тв1: R_M прецизира R_L $(\forall w \in \Sigma^*\ [w]_{R_M} \subseteq [w]_{R_L})$

Д-во: $(\forall \langle x, y\rangle \in \Sigma^* \times \Sigma^*)(\delta^*(s,x) = \delta^*(s,y) \Rightarrow \forall z(\delta^*(s,xz) = \delta^*(s,yz))$

$\Rightarrow \forall z: xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$

Автомат на Нероуд

$M = \langle \{[w_1] \ldots [w_k]\}, \Sigma, [\varepsilon], F', \delta'\rangle$

$F' = \{[w] \mid w \in F\}$

$\delta'([w], a) = [wa]$.

• Лема 1

$$xR_Ly \Rightarrow (\forall a \in \Sigma)(xa\, R_L\, ya)$$

Д-во:

$$xR_Ly \Rightarrow (\forall z \in \Sigma^*)(xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$$

$$\Rightarrow \Big(\forall \underset{\in \Sigma}{a}z \in \Sigma^*\Big): (x(az) \in L \Leftrightarrow y(az) \in L)$$

$$\Rightarrow (\forall a \in \Sigma)(\forall z \in \Sigma^*)((xa)z \in L \Leftrightarrow (ya)z \in L)$$

$$\Rightarrow (\forall a \in \Sigma)(xa\, R_L\, ya).$$

Лема 2

$$(\delta')^*([x], y) = [xy]$$

Д-во с индукция по $|y|$

$$\delta'^*([x], \varepsilon) = [x] \quad \checkmark$$

$$\delta'^*([x], aw) = \delta'^*(\delta([x], a), w) = \delta'^*([xa], w) =$$

$$= [xaw] \quad \checkmark$$

Лема 3 $\quad L(M) = L$

$$w \in L(M) \Leftrightarrow \delta'^*([\varepsilon], w) \in \{[w] \mid w \in L\} \underset{\text{от предната лема}}{\Leftrightarrow} [w] \in \{[w] \mid w \in L\}$$

$$\Leftrightarrow x \in L$$

класовете на екв. са или изцяло в, или извън L

. Th. на Майхил – Нероуд

$$L \text{ е регулярен} \iff |R_L| < \infty$$

$\Rightarrow$ Разглеждаме контрапозицията.

$|R_L| = \infty \Rightarrow L$ не е рег.

Да допуснем, че L е рег.

$\Rightarrow \exists$ КДА $A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$ $L(A) = L$.

R_A прецизира R_L

$\Rightarrow |Q| \geq |R_A| \geq |R_L| = \infty$

↯ (Q трябва да е крайно)

$\Leftarrow$ Нека $|R_L| < \infty$

$\Rightarrow M$ (автоматът на Нероуд) разпознава L

$\Rightarrow L$ е автоматен $\iff L$ е регулярен.

• Алгоритъм за конст. на мин. авт. по даден дет. авт.

Нека $A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$ е КДА

$$L(q) = \{ w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q, w) \in F \}$$

Тогава: $L(s) = L(A)$

$\equiv_A \subseteq Q \times Q \qquad p \equiv_A q \iff L(p) = L(q)$

Търсим класовете на екв на $\equiv_A$.

$p \equiv_A^n q \iff L_A^n(p) = L_A^n(q)$

$L_A^n(q) = \{ w \mid |w| \leq n \wedge \delta^*(q, w) \in F \}$

$\equiv_A^n$ е апроксимация на $\equiv_A$.

$\equiv_A^{n+1}$ е по-фина от $\equiv_A^n$.

Търсим такова $k \in \mathbb{N}$: $\equiv_A^k = \equiv_A^{k+1}$

Тогава: $\equiv_A^k = \equiv_A$

$p \equiv_A^{n+1} q \iff p \equiv_A^n q \wedge (\forall a \in \Sigma)(\delta(p, a) \equiv_A^n \delta(q, a))$

Класовете на екв. на $\equiv_A$ са състоянията на минималния автомат