def: Безконтекстна граматика

$$G = \langle V, \Sigma, S, P \rangle$$

V - крайно мн-во от променливи (нетерминали)

Σ - крайна азбука

$S \in V$ начална променлива

$P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$ ($\langle \alpha, \beta \rangle \in P$ означаване с $\alpha \underset{G}{\to} \beta$)

def: Релация $\gamma \underset{G}{\Rightarrow} \gamma'$ (думата γ' се получава от γ, чрез прилагане на правило от граматиката)

$$\frac{\langle \alpha, \beta \rangle \in P \qquad \lambda, \mu \in (V \cup \Sigma)^*}{\lambda \alpha \mu \underset{G}{\Rightarrow} \lambda \beta \mu}$$

def: $\alpha \overset{k}{\Rightarrow} \beta$ (β се получава за k стъпки от α)

$$\frac{\alpha \in (V \cup \Sigma)^*}{\alpha \overset{0}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha} \qquad \frac{\alpha \underset{G}{\Rightarrow} \beta \qquad \beta \overset{k}{\Rightarrow} \gamma}{\alpha \overset{k+1}{\Rightarrow} \gamma}$$

def: $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \beta \iff (\exists k \in \mathbb{N})[\alpha \overset{k}{\Rightarrow} \beta]$

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \}$$

L е безконтекстен $\iff \exists$ безконтекстна граматика $G : L(G) = L$

■ Синтактично дърво на извод (КН)

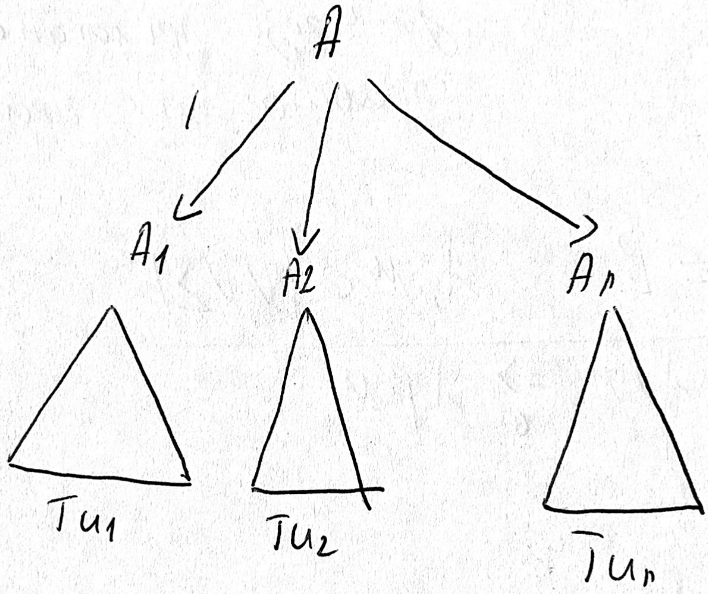
• Корен: S

• Ако на i-тата стъпка правим заместването $A \to Z = Z_1 \dots Z_k$, то възлите наследници на A са $Z_1 \dots Z_k$

Наблюдение: Листата са буквите на изведената дума.

Дърво с резултат $u_1 \dots u_n$

$A \to A_1 \dots A_n$



■ Нормална Форма на Чомски (СЧ)

Една безконтекстна граматика е в НФЧ, ако всяко правило е във вида: $A \to BC$ или $A \to a$, където A, B и C са произволна променлива, а a е произволна буква.

Th: $\forall$ безконт. език, който не съд. ε, се поражда от ~~език~~ безконтекстна гр в НФЧ.

Твърдение: Всеки регулярен език е безконтекстен.

Скица на доказателство:

$\{a\}$ $\quad S \to a$

$\emptyset$ $\quad S \to S.$

безконтекстните езици са затворени относно регулярните операции.

$G_1 = \langle V_1, \Sigma, S_1, P_1 \rangle \quad G_2 = \langle V_2, \Sigma, S_2, P_2 \rangle$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$G_\cup = \langle V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 | S_2\} \rangle$

$S \notin V_1 \cup V_2$

$L(G_\cup) = L(G_1) \cup L(G_2)$

$G_\circ = \langle V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\} \rangle$

$S \notin V_1 \cup V_2$

$L(G_\circ) = L(G_1) . L(G_2)$

$G_* = \langle V_1 \cup \{S\}, \Sigma, S, P_1 \cup \{S \to S_1 S | \varepsilon\} \rangle$

$S \notin V_1$

$L(G_*) = L(G_1)^*$

Недетерминистичен стеков автомат

$$P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, s, \#, \Delta \rangle$$

- Q – крайно множество от състояния
- Σ – крайна азбука
- Γ – крайна азбука на стека. $(\Sigma \cup \{\#\} \subseteq \Gamma)$
- $s \in Q$ начално съст.
- $\# \notin \Sigma$ дъно на стека
- $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$

Моментна конфигурация

$$\langle q, w, x \rangle \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$$

q – текущо съст.

w – останалата (непрочетена) част от думата

x – съдържание на стека

Преходи: $\langle q, aw, bx \rangle \overset{\langle q', x' \rangle \in \Delta(q,a,b)}{\vdash} \langle q', w, x'x \rangle$

(ε-преход) $\langle q, w, bx \rangle \overset{\langle q', x' \rangle \in \Delta(q,\varepsilon,b)}{\vdash} \langle q', w, x'x \rangle$

$$L(P) = \{ w \in \Sigma^* \mid \underbrace{\langle s, w, \# \rangle \vdash \ldots \vdash \langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle}_{\langle s, w, \# \rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle} \ (q \in Q \text{ произволно}) \}$$

Th. L е конт.-свободен $\Leftrightarrow \exists$ Н.С.А $P : L(P) = L$.

Д-во в едната посока

L е конт-св $\Rightarrow \exists$ Н.С.А $P : L(P) = L$.

Щом L е к.-с., то $\exists\ G = \langle V, \Sigma, S, P \rangle : L(G) = L$.

ще построим Н.С.А за L:

$$M = \langle \{q\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \cancel{q}, q, S, \Delta \rangle$$

тип 1 $\quad \forall A \xrightarrow[G]{} \alpha \in P : \langle q, \alpha \rangle \in \Delta \langle q, \varepsilon, A \rangle$

тип 2 $\quad \forall a \in \Sigma : \langle q, \varepsilon \rangle \in \cancel{\Delta \langle q, a \rangle}$ $\Delta \langle q, a, a \rangle$

• лема $\quad$ Ако $w \in \Sigma^*$ и $\alpha \in V(V \cup \Sigma)^* \cup \{\varepsilon\}$, то

$$S \overset{*}{\Rightarrow} w\alpha \iff \langle q, w, S \rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \alpha \rangle$$

Следствие на лемата: $\alpha = \varepsilon \longrightarrow S \overset{*}{\Rightarrow} w \iff \langle q, w, S \rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle$

Доказателство на лемата:

1) Нека $S \overset{*}{\Rightarrow} w\alpha$. Тогава имаме извод: $S \Rightarrow u_1 \Rightarrow u_2 \ldots \Rightarrow u_n = w\alpha$

С индукция по дължината на думата ще покажем, че $\langle q, w, S \rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \alpha \rangle$

База: Дължина на извод 0 ($S \overset{0}{\underset{G}{\Rightarrow}} S$)

$\Rightarrow w = \varepsilon,\ \alpha = S$. $\langle q, w, S\rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \alpha\rangle$ ✓

И.С. разглеждаме дължина на извод $n+1$

$S \Rightarrow u_1 \dots u_n \Rightarrow u_{n+1} = w\alpha$.

Нека $u_n = xA\beta,\ x \in \Sigma^*,\ u_{n+1} = x\gamma\beta,\ A \to \gamma \in P$.

От И.П. $\langle q, x, S\rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, A\beta\rangle$

$A \to \gamma \in P$ следователно $\langle q, \varepsilon, A\beta\rangle \vdash \langle q, \varepsilon, \gamma\beta\rangle$.

$u_{n+1} = w\alpha = x\gamma\beta$ α започва с променлива и $x, w \in \Sigma^*$.

Следователно $w = xy,\ y\alpha = \gamma\beta\ (y \in \Sigma^*)$.

$\langle q, w, S\rangle \vdash^* \langle q, y, \gamma\beta\rangle = \langle q, y, y\alpha\rangle$

След прилагането на $|y|$ пъти правила от тип 2

$\langle q, w, S\rangle \vdash^* \langle q, y, y\alpha\rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \alpha\rangle$

2) $\langle q, w, S\rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \alpha\rangle \to S \overset{*}{\Rightarrow} w\alpha$

Индукция по броя n на преходите от тип(1).

База: $n=0$

$$\langle q, w, S\rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, S\rangle \quad \begin{array}{l} w=\varepsilon \\ \alpha=S \ \checkmark \end{array}$$

$$S \overset{*}{\Rightarrow} w\alpha = S$$

И.С.

$$\langle q, w, S\rangle \overset{n}{\vdash^*} \langle q, y, A\beta\rangle \vdash \langle q, y, \gamma\beta\rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \alpha\rangle$$

където $w = xy$, $A \to \gamma \in P$, $\gamma\beta = y\alpha$

От И.П $S \overset{*}{\Rightarrow} xA\alpha$ (защото $\langle q, x, S\rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, A\beta\rangle$)

$$S \overset{*}{\Rightarrow} xA\cancel{\alpha} \Rightarrow x\gamma\beta = xy\alpha = w\alpha$$

т.е $S \overset{*}{\Rightarrow} w\alpha$

$\square$

Pumping Lemma за К.С.Е.

Ако L е конт-свободен, то

$\exists p \in \mathbb{N}^+ \ \forall w \in L: |w| \geq p \Rightarrow (\exists xyzuv \in \Sigma^*)$

$(w = xyzuv \wedge |yu| \geq 1 \wedge |yzu| \leq n \wedge (\forall i \in \mathbb{N})(xy^iz u^i v \in L))$

Д-во: Нека $G = \langle V, \Sigma, S, P \rangle$ - граматика (безконт)

Нека Б.О.О G е в НФЧ.

Нека $k = |V|$, $p = 2^k$, $w \in L$ $(|w| = m \geq p)$.

Разглеждаме синт. дърво за w.

Макс брой наследници: 2

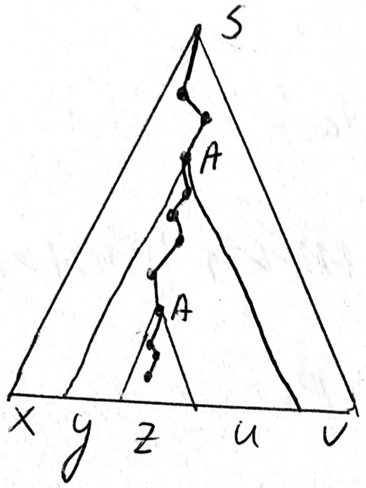
Имаме $\geq n = 2^k$ листа.

$\Rightarrow \exists$ път Path с дължина ~~…~~ k. $|Path| > k$ (доказателство?)

$\Rightarrow$ Поне $k+1$ променливи в Path

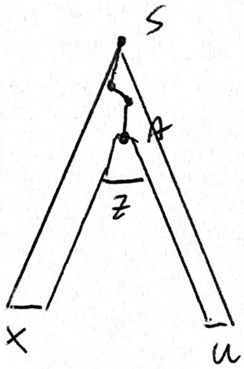
$\Rightarrow \exists$ променлива $A \in Path$ и A се появява ≥ 2 пъти.

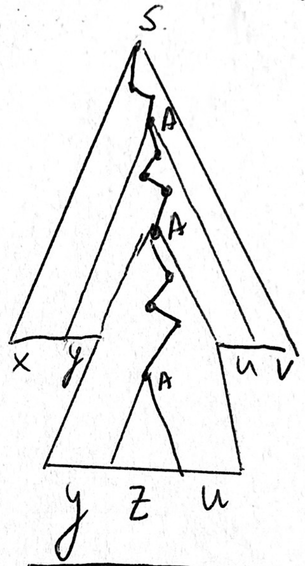
$(|yu| \geq 1)$



(!) Второто появяване отдолу нагоре е на разстояние $\leq k$.

$\Rightarrow$ Е корен на поддърво на поддумата yzu с дължина $\leq p$.





$\boxed{xy^0zu^0v}$

$\boxed{xy^2zu^2v}$

т.е $(\forall i \in \mathbb{N})(xy^izu^iv)$ се извеждат от S.

Пример.

$L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е безконтекстен.

Допускаме, че е. Следователно е изпълнена P.L.

$w = a^p b^p c^p$ $\quad |w| = 3p > p$ ✓

$w \in L$ ✓

1сл. y започва в a-тата

$|yzu| \leq p \Rightarrow$ имаме 2 подслучая

1.1) u завършва в a-тата

$yu = a^r \ (r \geq 1)$

$xy^2zu^2v = a^{p+r} b^p c^p \notin L$. $\quad p+r \neq p$

1.2) u завършва в b-тата.

$yu = a^r b^s \quad r \geq 1, \ s \geq 1$

! $xy^0zu^0v = xzv = a^{p-r} b^{p-s} c^p \notin L \quad p-r \neq p$

$p-s \neq p$

2сл. y започва в b-тата.

$|yzu| \leq p \Rightarrow$ имаме 2 подсл.

2.1) u завършва в b-тата

$yu = b^r \ (r \geq 1)$

$xy^2uz^2v = a^p b^{p+r} c^p \notin L \quad p+r \neq p$.

2.2) u завършва в c-тата.

$$yu = b^r c^s \qquad r \geq 1,\ s \geq 1$$

$$xy^0 z u^0 v = a^p b^{p-r} c^{p-s} \notin L \qquad \begin{matrix} p \neq p-r \\ p \neq p-s. \end{matrix}$$

3 а) y започва в c-тата

$$yu = c^r \qquad r \geq 1$$

$$xy^2 u z^2 v = a^p b^p c^{p+r} \notin L \qquad p \neq p+r.$$

$\Rightarrow$ Р.L не е изпълнена $\lightning$

$\Rightarrow$ L не е безконтекстен.

(!) Важно: Безконтекстните езици не са затворени относно обединение и сечение.

- $\{a^n b^k c^k \mid n,k \in \mathbb{N}\} \cap \{a^k b^k c^n \mid n,k \in \mathbb{N}\} = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

безконтекстен ($\{a\}^* . \{b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$)

безконтекстен ($\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} . \{c\}^*$)

не е безконтекстен

$\Rightarrow$ не е затворен относно $\cap$.

- $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

Ако бяха затворени относно $\overline{\ }$, то щяха да са затворени относно $\cap$, но видяхме, че не са.