Зад Нека S_4 - множеството от всички пермутации на $\{1,2,3,4\}$

$(\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle, \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \rangle) \in R \iff$

$\alpha_3 + \alpha_4 + \beta_1 + \beta_2$ = четно.

a) рел. на екв.?

1) рефлексивност.

$\forall x (\langle x, x \rangle \in R)$.

Нека x е произволна.

$X = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$

$\langle a_1, a_2, \underbrace{a_3, a_4 \rangle \langle a_1, a_2}, a_3, a_4 \rangle$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10 =$ четно

2) Симетричност

$\forall x, y \in S (\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$

Нека x, y са произволни и $\langle x, y \rangle \in R$.

$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow (\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \langle y_1, y_2, y_3, y_4 \rangle) \in R$

$\Rightarrow x_3 + x_4 + y_1 + y_2 =$ четно.

Знаем, че $x_1 + x_2 + \underbrace{x_3 + x_4 + y_1 + y_2}_{\text{четно}} + y_3 + y_4 = 20$

$\Rightarrow y_3 + y_4 + x_1 + x_2 = \underbrace{20 - \text{четно}}_{\text{четно}}$

$\Rightarrow (y, x) \in R$

3) Транзитивност.

$\forall x, y, z \, [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R]$.

Нека x, y, z - произволни. и $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R$

събиране
$x_3 + x_4 + y_1 + y_2 =$ четно
$y_3 + y_4 + z_1 + z_2 =$ четно.

$x_3 + x_4 + z_1 + z_2 = \underbrace{\text{четно} - \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)}_{20}}_{\text{четно}}$

$\Rightarrow (x, z) \in R$.

б) Класове на екв.

$[\langle 1,2,3,4\rangle] = \{\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\rangle \mid \alpha_1 + \alpha_2 = \text{нечетно}\}$

$[\langle 4,2,3,1\rangle] = \{\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\rangle \mid \alpha_1 + \alpha_2 = \text{четно}\}$

в) Брой елементи в клас.

$|[\langle 1,2,3,4\rangle]| = 16$

$|[\langle 4,2,3,1\rangle]| = 8$

~~зад~~

def: Композиция на ф-ии.

$f: A \to B \qquad g: B \to C$

$g \circ f: A \to C$

$g \circ f(x) = g(f(x))$

задача.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

а) $g = 2x+1$

$g \circ f = 2x - 1 \qquad f = ???$

Решение:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) + 1 = 2x - 3$$

$$\Rightarrow \cancel{\nexists} \qquad 2f(x) = -1 + 2x - 3$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4}{2} = \boxed{x^2 - 2}$$

б)

$$f(x) = 3x - 1$$

$$g \circ f(x) = 6x + 5$$

g е линейна ф-я.

$g = ???$

решение:

$$g(x) = ax + b$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = a \cdot (f(x)) + b =$$

$$= a(3x - 1) + b = 3ax - a + b = 6x + 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a = 6 \\ b - a = 5 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a = 2 \\ b = 7 \end{matrix} \qquad \Rightarrow g(x) = 2x + 7$$

Следствие: Ако $f: A \to B$ е биекция,

и $g: A \to B$ е биекция, то

$g \circ f$ е биекция.

Д-во:

1) $g \circ f$ е сюрекция.

$\forall c \in C \; \exists a \in A \; (g \circ f(a) = c)$

Нека c - произволно.

Знаем, че g е сюрекция

$\Rightarrow \exists b \in B \quad g(b) = c.$

Знаем, че f е сюрекция

$\Rightarrow \exists a \; (f(a) = b)$

$\Rightarrow \quad g(f(a)) = g(b) = \underline{\underline{c}}$

Но c е произволно

$\Rightarrow$ е сюрекция

2) $g \circ f$ е инекция?

? $\forall a_1, a_2 \; (a_1 \neq a_2 \Rightarrow g \circ f(a_1) \neq g \circ f(a_2))$

Нека a_1 и a_2 са произволни. $a_1 \neq a_2$.

f е инекция $\Rightarrow \underbrace{f(a_1)}_{b_1} \neq \underbrace{f(a_2)}_{b_2}$

$b_1 \neq b_2$

g е ~~сюрек~~ инекция

$\Rightarrow g(\overbrace{f(a_1)}^{b_1}) \neq g(\overbrace{f(a_2)}^{b_2})$

$\Rightarrow g \circ f$ е сюрекция

1), 2) $\Rightarrow g \circ f$ е биекция

Твърдение (???)

$g \circ f: A \to C$ е биекция, то $f: A \to B$

и $g: B \to C$ са биекции?

Не!!

Пример:

$f: \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ Не е сюрекция

$f(x) = \langle x, 0 \rangle$

$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Не е инекция

$g(\langle x, y \rangle) = x$

$\langle 3, 7 \rangle \xrightarrow{g} 3$

$\langle 3, 9 \rangle \xrightarrow{g} 3$

но

$g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е биекция (id)

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\langle x, 0 \rangle) = x$

def: S е изброимо, ако е КРАЙНО или съществува $f: S \to \mathbb{N}$, която е биекция.

Пример: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо

$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(\langle x, y \rangle) = 2^x (2y - 1)$

Зад Нека S_{bool} множеството на всички булеви вектори.

Докажете, че S_{bool} е изброимо ($|S_{bool}| = |\mathbb{N}|$)

решение: $f: S \to \mathbb{N}$.

$$f(b_1 b_2 \ldots b_n) = 1 b_1 b_2 \ldots b_n (2) - 1$$

$$b_i \in \{0, 1\}$$

$$f(001) = 1001(2) - 1 = 9 - 1 = 8$$

- инекция: $\cancel{b_1 \ldots b_{n(2)} - 1 \neq t_1 \ldots t_{n(2)} - 1}$

$$\Downarrow$$

$$[b_1 \ldots b_n] \neq [t_1 \ldots t_n]$$

$$\Downarrow$$

$$1b_1 \ldots b_n - 1 \neq 1t_1 \ldots t_n - \underline{1}$$

- сюрекция

$K \in \mathbb{N}$ първообраз?

$(K+1 \geq 1)$ $K+1 = 1b_1 \ldots b_n$ $f([b_1 \ldots b_n]) = K$

зад. Докажете, че Words - множеството на всички думи с буквите {A, Г} е изброимо.

решение:

$$g: Words \to S_{bool}$$

$$g(\alpha_1 \ldots \alpha_n) = b_1 \ldots b_n$$

$$b_i = \begin{cases} 1 & \alpha_i = A \\ 0 & \alpha_i = Г \end{cases}$$

g е биекция.

$$f \circ g = f(g(\alpha_1 \ldots \alpha_n))$$

е биекция (защото f и g са биекции и доказахме, че композицията на 2 биекции е биекция)

Зад

Докажете, че множеството на всички крайни редици от ест. числа е изброимо.

решение: Всяко ест. число се разлага на прости множители.

$$x = 2^{\alpha_1} * 3^{\alpha_2} * 5^{\alpha_3} * 7^{\alpha_4} \dots$$

$$f((\alpha_1 \dots \alpha_n)) = p_1^{\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2+1} p_3^{\alpha_3+1} \dots p_n^{\alpha_n+1} - 1$$

Зад. $f: C \to B$ и $f \circ g$ е биекция

$g: A \to B$

а) докажете, че g е инекция (1) и f е сюрекция (2).

(1) допускаме противното

$$\exists a_1, a_2 \quad a_1 \neq a_2 \quad \underbrace{g(a_1)}_{b} = \underbrace{g(a_2)}_{b}$$

Но тогава

$$f(g(a_1)) = f(b) = c \quad и \quad f(g(a_2)) = f(b) = c$$

т.е $a_1 \neq a_2$ и $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$

но $g \circ f$ беше биекция. ↯

② f е сюрекция.

Допускаме противното.

$\exists c \in C \; \neg\exists b (f(b) = c)$

За това $\boxed{c}$

$\neg\exists a (f \circ g(a) = c)$

Но $f \circ g$ е биекция

↯

~~а)~~ ~~доказ~~ а)

б) g е сюрекция $\Leftrightarrow$ f е инекция.

1) $\underline{g \text{ е сюрекция}} \Rightarrow f$ е инекция

$\forall b (\exists a \; g(a) = b)$

Допускаме, че f не е инекция

$\Rightarrow \exists b_1, b_2 \quad b_1 \neq b_2 \wedge f(b_1) = f(b_2)$

g е сюрекция

$\Rightarrow$ b_1 и b_2 имат първообрази a_1, a_2.

Да разгледаме. $\begin{cases} f\circ g(a_1) = f(g(a_1)) = f(b_1) = c. \\ f\circ g(a_2) = f(g(a_2)) = f(b_2) = c. \end{cases}$

$a_1 \neq a_2$ защото g е ф-я

$\Rightarrow b_1 \neq b_2$ ↯

2) f е инекция $\Rightarrow$ g е сюрекция (разглеждаме контрапоз.)

$\underbrace{g \text{ не е сюр.}}$ $\Rightarrow$ f не е инекция

$\exists b \neg \exists a \; g(a) = b$. Да разгледаме такова $\boxed{b}$

Допускаме, че f е инекция

$\forall b_1\, b_2 \quad b_1 \neq b_2 \Rightarrow f(b_1) \neq f(b_2)$

$f(\boxed{b}) = c$.

Няма друго $b' \in B$ $f(b') = c$.

търсим първообраза на c $(f(\boxed{b}) = c)$.

но $\boxed{b}$ няма първообраз

$\Rightarrow$ c няма първообраз спрямо $f\circ g$

~~[illegible]~~ но $f\circ g$ беше биекция

↯

Домашно:

зад. $h \circ f = h \circ g \Rightarrow f = g \iff h$ е инекция

зад $f \circ h = g \circ h \Rightarrow f = g \iff h$ е сюрекция