Зад $\left(\forall f \, \forall g \;\; h\circ f = h\circ g \Rightarrow f = g\right) \Leftrightarrow h$ е инекция

1) $\Rightarrow$ Да допуснем, че h не е инекция. $\Rightarrow$ $(\exists a_1, a_2 \in A)(a_1 \neq a_2 \wedge h(a_1) = h(a_2))$

Да разгледаме за произволно $c \in A$.

$$f'(a) = \begin{cases} a & a \neq c \\ a_1 & a = c \end{cases} \quad \left(\text{или } \forall a \; f'(a) = a_1\right)$$

$$f''(a) = \begin{cases} a & a \neq c \\ a_2 & a = c \end{cases} \quad \left(\text{или } \forall a \; f''(a) = a_2\right)$$

f' и f'' са ф-ии и $f' \neq f''$

Ще покажем, че $h\circ f' = h\circ f''$ и $f' \neq f''$

$f'(c) \neq f''(c)$

$h\circ f' = h\circ f''$

$\forall x \, (h\circ f'(x) = h\circ f''(x))$

1сл. $x \neq c$ $\quad h(f'(x)) = h(a) = h(f''(x))$

2сл. $x = c$ $\quad h(f'(x)) = h(a_1) = h(a_2) = h(f''(x))$

$\Rightarrow h\circ f' = h\circ f''$ но $f' \neq f''$. Противоречие.

$\Leftarrow$ Нека h е инекция. Ще покажем, че

$\forall f \forall g \quad h \circ f = h \circ g \Rightarrow f = g$.

Нека f и g - произволни и нека

$h \circ f = h \circ g$. Ще покажем, че $f = g$.

$\forall a \, (f(a) = g(a))$

Нека a - произволно ~~за~~

Тогава $\quad h \circ f(a) = h(f(a)) = h(g(a)) = h \circ g(a)$

Но h е инекция $(\forall x, y \; h(x) = h(y) \Rightarrow x = y)$

$\Rightarrow f(a) = g(a)$

Но a е произволно.

$\forall a \, (f(a) = g(a)) \quad \checkmark$

За домашно:

$\forall h \forall f \forall g \left[(f \circ h = g \circ h \Rightarrow f = g) \Leftrightarrow h \text{ е сюрекц} \right.$

2

Комбинаторика.

Броим елементи на дадено мн-во.

Броим обекти съставени с ел-ти от ~~наредб~~ множество.

1) С наредба (Вариация)

1.1) Без повторение.

Решаваме задачата:
Колко са всички к-орки с елементи от дадено n елементно множество, като всеки елемент може да участва най-много веднъж?
$(n \geq k)$

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Задача:
5 студенти – {А, Б, В, Г, Д} участват в турнир. Брой начини да се раздадат първите 3 награди.

1-во 2-ро 3-то

Отг: $V_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$

При $n = k$, то ~~V~~ това са пермутации

$$P_n = n! = \frac{n!}{(n-\cancel{n})!} = \frac{n!}{1} = V_n^k.$$

1.2) С повторение.

Осн. задача: брой k-орки с елементите от n-елементно множество

$$\tilde{V}_n^k = n^k$$

- Задача: Брой всички думи с Английската азбука с дължина 5

$$V_{26}^5 = 26^5$$

- ~~Задача~~:

② Без наредба (комбинация)

2.1 Без повторение

Задача: брой k-елементни подмножества на n-елементни множества.

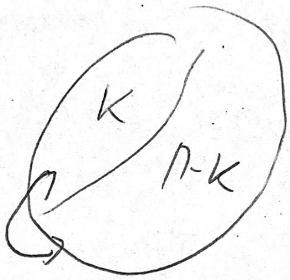
$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

$\left.\begin{array}{c} 123 \\ 132 \\ 231 \\ 213 \\ 312 \\ 321 \end{array}\right\} \{1,2,3\}$

- $^{*}\ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad 0 \le k \le n$

- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

- (**) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad 0 \le k \le n$



примерна
Задача: Брой начини да изберем отбор от 11 футболисти от 20 души

решение: $\binom{20}{11} = \frac{20!}{9!\,11!} = 167960$

Задача: $\forall n \binom{2n}{n}$ е четно

1 начин: с индукция

2 начин: $\binom{2n}{n} \overset{(*)}{=} \underbrace{\binom{2n-1}{n}} + \underbrace{\binom{2n-1}{n-1}} \Rightarrow$ четно

$\overset{(**)}{=}$

Зад $\binom{n+1}{k} = \sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n-p}{k-p}$

Решение:

$$\binom{n+1}{k} = \boxed{\binom{n}{k}} + \binom{n}{k-1}$$

$$\binom{n}{k-1} \to \boxed{\binom{n-1}{k-1}} \quad \binom{n-1}{k-2}$$

$$\binom{n-1}{k-2} \to \boxed{\binom{n-2}{k-2}} \quad \binom{n-2}{k-3}$$

Зад Колко са $\forall$ стрингове с дължина n съставен от $\{a, b\}$ и точно k а-та.

Решение:

$\binom{n}{k}$ — фиксираме позициите за 'a'

позициите за 'b' са еднозначно определени от тези за 'a'

2.2 с повторение

Брой k-елементни мултимножества с елементи от n-елементни множества

$$C^{k}_{n+k-1} = \binom{n+k-1}{k} = \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$$

$\{1, 2, 3, 4\}$ $\quad \left(\!\!\binom{4}{3}\!\!\right) = 20$

$\{1, 1, 1\}$ $\quad$ ∘∘∘ | | |

$\{1, 3, 3\}$ $\quad$ ∘ | | ∘∘ |

Брой стрингове с дължина n+k-1 и точно k- ~~[illegible]~~ точки

Зад брой булеви вектори с дължина n, които започват и завърва с различна цифра.

решение:

$1 \dots 0 \mid 0 \dots 1$

Броим: $1 \dots 0$ $\quad \boxed{2^{n-2}}$

$0 \dots 1$ $\quad \boxed{2^{n-2}}$

$\boxed{2^{n-2}} + \boxed{2^{n-2}} = 2^{n-1}$

Принцип на ~~събирането~~:
разбиването/събирането.

Ако $Y_1 \dots Y_n$ е разбиване на X

$$|X| = |Y_1| + |Y_2| \dots + |Y_n|$$

Зад Брой числа в [1000 .. 9999], които започват с 3 или завършват на 4.

I начин. Принцип на събирането

$P(x) \Leftrightarrow x$ зап. с 3

$Q(x) \Leftrightarrow x$ зав. на 4.

	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \vee Q(x)$
	F	F	F
1сл.	F	T	T
2сл.	T	F	T
3сл	T	T	T

1 сл. $P(x) = F$ $Q(x) = T$

$\underline{8} * \underline{10} * \underline{10} * \underline{\cancel{10}\,1} = 800$

2 сл. $P(x) = T$ $Q(x) = F$

$\underline{1} * \underline{10} * \underline{10} * \underline{9} = 900$

9

3 сл. $P(x) = T$ $Q(x) = T$

$$\underline{1} * \underline{10} * \underline{10} * \underline{1} = 100.$$

$\Rightarrow$ отг: $800 + 900 + 100 = \boxed{1800}$

II начин. Принцип на изваждането

$$|S| = |U| - |\overline{S}|$$

Ще извадим ненужните

$Q(x) = F$ $T(x) = F$

$$\underline{8} * \underline{10} * \underline{10} * \underline{9} = 7200$$

Всички четирицифрени числа

$$9 * 10 * 10 * 10 = \boxed{9000}$$

$\Rightarrow$ По принципа за изваждането

$9000 - 7200 = \boxed{1800}$

10

Зад. Брой на петцифрени числа, k за които е изпълнено, че ако k е четно, то съдържа 5.

$P(x) \Leftrightarrow x$ е четно

$Q(x) \Leftrightarrow x$ съдържа 5.

$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \to Q(x)$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Принцип на изваждането

$P(x) = T \land Q(x) = F$

$\bar{8} * \bar{9} * \bar{9} * \bar{9} * \bar{5} = 29160$

Отг: Всички − ненужните =

$9000 - 29160 = \boxed{60840}$

Зад. 7 ~~[illegible]~~ сандъка с материали (различни)

10-етажна сграда.

По колко начина може да ги разпределим, така че на последния етаж да има поне 2 вида материали.

Решение: Представяме решенията като наредени 7-орки.

___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

1. етаж на сандък 1

7 етаж на сандък 4.

всички − 7-орки с точно една 10-ка − 7-орки без срещания на 10

$10^7 - 7 \cdot 9^6 - 9^7 =$ Отговор

Зад Всички думи с $\{\underbrace{A\ldots A}_{5}, \underbrace{Б\ldots Б}_{5}, \underbrace{В\ldots В}_{5}, \underbrace{Г\ldots Г}_{5}\}$

с дължина 20, такива че:

а) без ограничение $\boxed{\binom{20}{5}\cdot\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{5} = \frac{20!}{5!\times5!\times5!\times5!}}$

перм. с повторение

б) зап. с А и завършва на Г или В

$A \ldots Г \quad \underset{А}{\binom{18}{4}}\ \underset{Б}{\binom{14}{5}}\ \underset{В}{\binom{9}{5}}$

$A \ldots В \quad \underset{А}{\binom{18}{4}}\ \underset{Б}{\binom{14}{5}}\ \underset{Г}{\binom{9}{5}}$

$\boxed{2\binom{18}{4}\binom{14}{5}\binom{9}{5}}$

в) Всички еднакви букви са заедно

| А | Б | В | Г |

$\boxed{4! = 24}$

г) Всички букви А са заедно

$\ldots\ |\ А\ |\ \ldots$

$16\cdot\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{5}$

д) Всяко А е преди всяко Б

$$\binom{20}{10} \cdot \binom{10}{5}$$

10 позиции за А .. А . А Б —

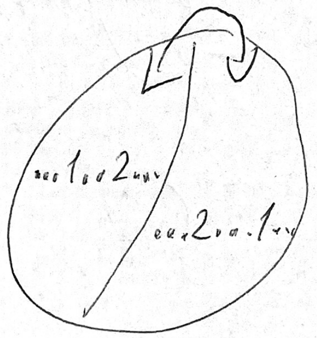
↳ А-тата и Б-тата се разполагат по един начин

Принцип на биекцията:

$|A| = |B| \iff \exists f: A \to B$ и f е биекция.

<u>зад</u> Брой пермутации на $\{1..n\}$, където $n \geq 2$ 1 е преди 2.

Решение:



има биекция м/у двете множества.

$123 \to 213$

$\Rightarrow$ отговор: $\dfrac{n!}{2}$