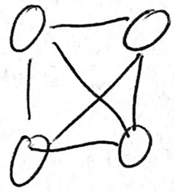
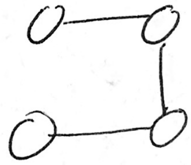
def: Покриващо дърво на $G = \langle V, E \rangle$ е всяко дърво $T = \langle V, E' \rangle$ $E' \subseteq E$

G: 

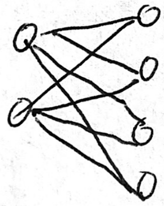
T: 

Тв: G има покриващо дърво $\Leftrightarrow$ G е свързан

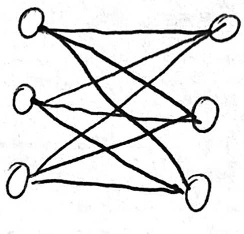
Ф-ла на Cayley: Брой покриващи дървета на K_n е n^{n-2}. (Брой именувани дървета на n върха)

Д-вото използва кодове на Prüfer.

def: $K_{n,m}$ – пълен двуделен граф.

$K_{2,4}$: 

Зад. Брой покриващи дървета в $K_{3,3}$?



Реш:
5 ребра. 5 можем да го разбием на

3 неравни части: $5 = 3+1+1$
(за дял А)
$5 = 2+2+1$

$\langle 3,1,1 \rangle$ избиране връх от степен 3.

$\binom{3}{1}$

Избиране ребрата за останалите

$\binom{3}{1}\binom{3}{1}$

$\boxed{27}$

$\langle 2,2,1 \rangle$ избиране връх от степен 1

$\binom{3}{1}, \binom{3}{1}$ ← за кой да е свързан

~~избиране~~

Първия връх го свързвам с 2 от В.

$\binom{3}{2}$

Другия връх го свързвам с 2 от В но други.

$\binom{3}{2} - 1$

$\boxed{54}$

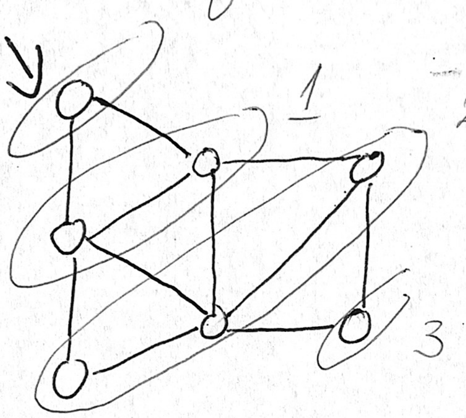
$27+54 = \boxed{81}$

Th: Брой покриващи дървета в $K_{n,n}$ е $n^{(n-1)^2}$

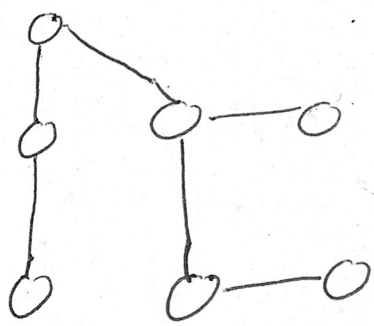
Алгоритми въз графи.

I Обхождане.

BFS - обхождане в ширина. (използва опашка).

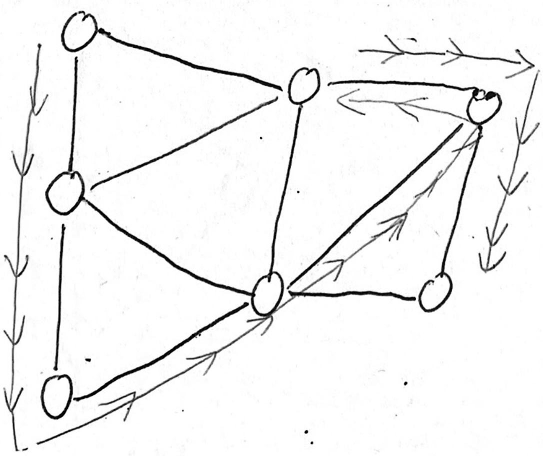


Дърво на обх:

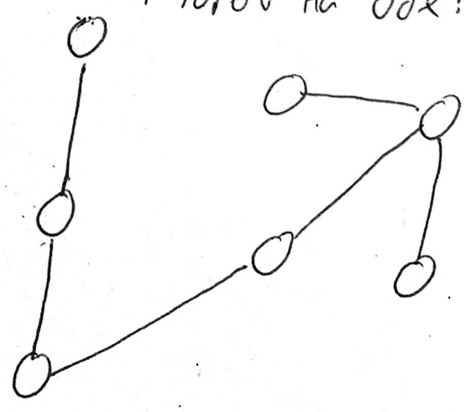


• Намира най-къс път в нетегловен граф.

DFS - обхождане в дълбочина



Дърво на обх:



def: Тегловен граф.

$G = \langle V, E \rangle \quad w : E \to \mathbb{R}$.

def: T е покриващо дърво на G.

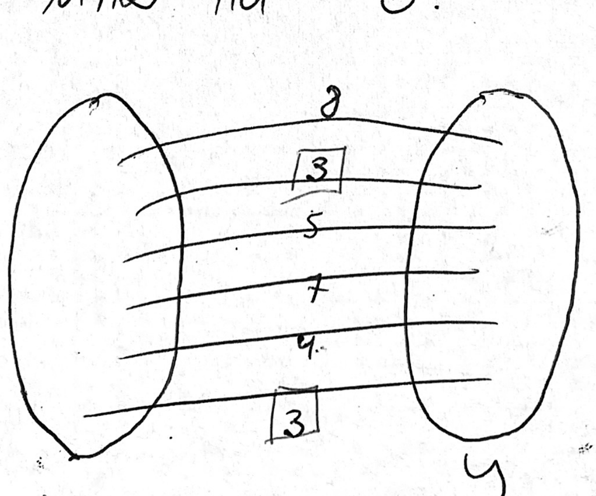
$$w(T) = \sum_{e \in T} w(e)$$

def: Минимално покриващо дърво.

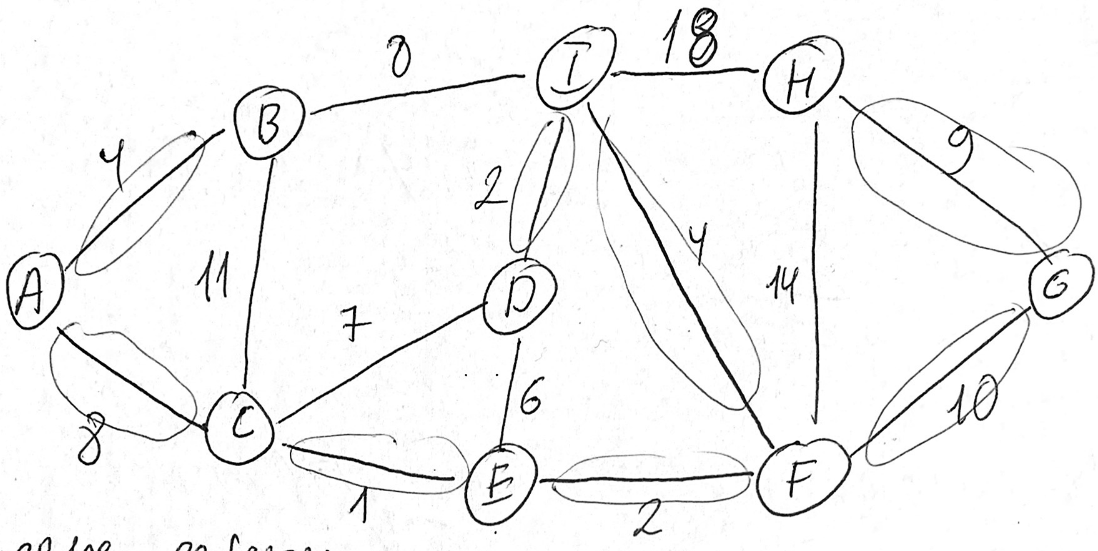
Покриващо дърво T с минимално тегло.

МПД теорема.

Нека $G = \langle V, E \rangle$, w е тегловен граф.
Нека $\{X, Y\}$ е произволен срез в G.
Всяко минимално по тегло ребро, което свързва върхове от двата среза участва в някое МПД на G.



Алгоритъм на Крускал за МПД.



Сортиране ребрата:

$\boxed{\langle C, E \rangle\ 1}$

$\boxed{\langle E, F \rangle\ 2}$

$\boxed{\langle I, D \rangle\ 2}$

$\boxed{\langle A, B \rangle\ 4}$

$\boxed{\langle I, F \rangle\ 4}$

$\langle D, E \rangle\ 6$ X - цикъл.

$\langle C, D \rangle\ 7$ X - цикъл.

$\boxed{\langle A, C \rangle\ 8}$

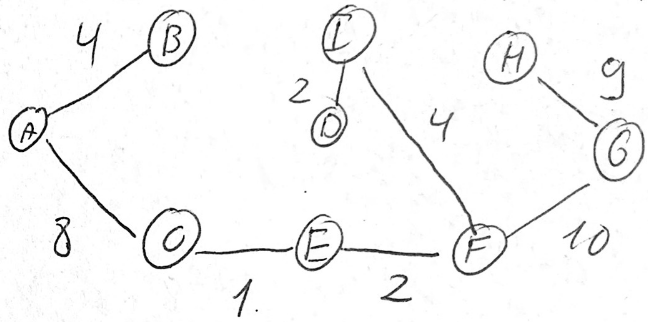
$\boxed{\langle H, G \rangle\ 9}$ $\leftarrow$ $\langle B, I \rangle, 8$ X - цикъл

$\boxed{\langle F, G \rangle\ 10}$

$\langle B, C \rangle\ 11$

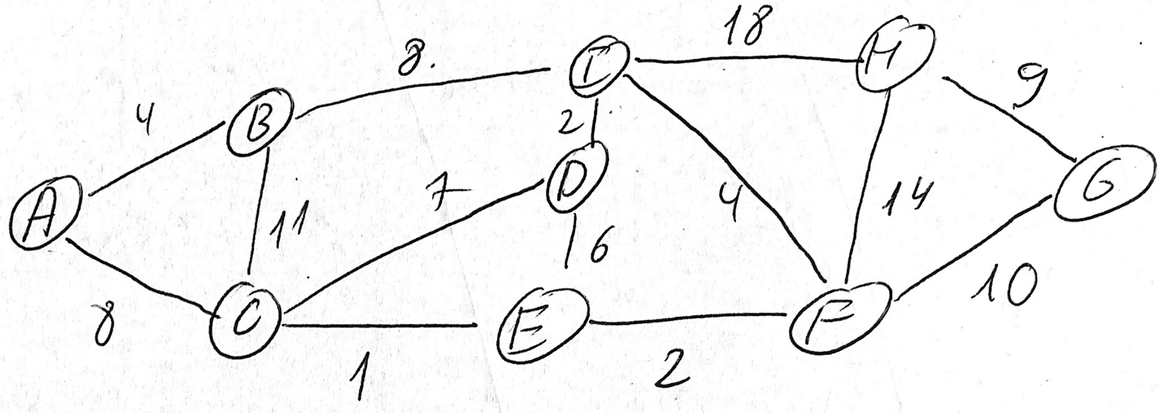
$\langle H, F \rangle\ 14$

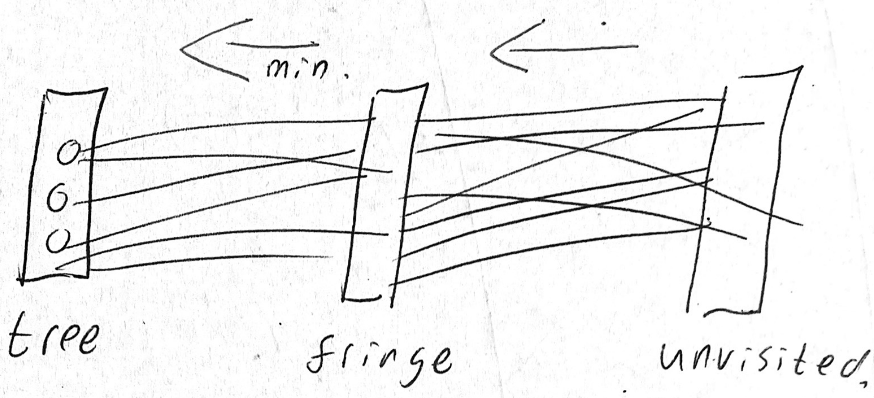
$\langle I, H \rangle\ 18$

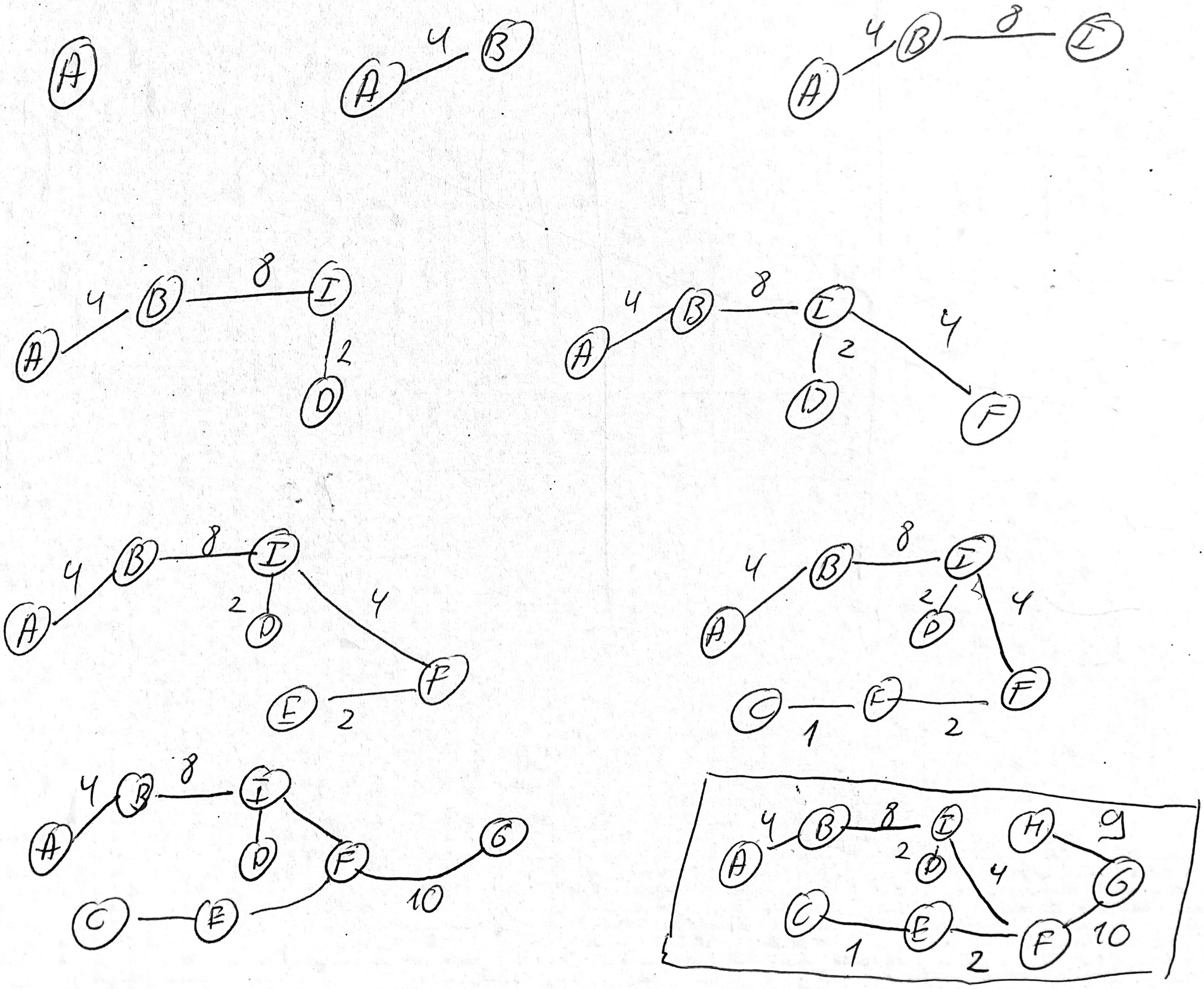


Тегло: 40

Алгоритъм на Прим за МПД



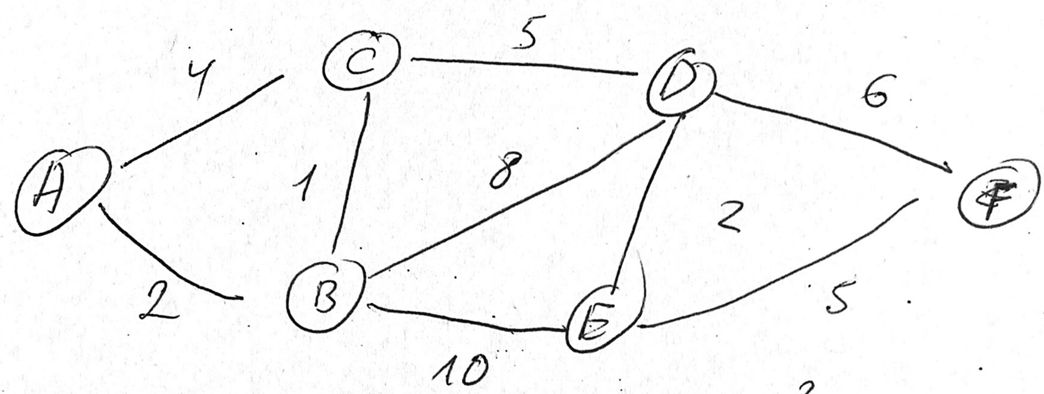




Алгоритъм на Дийкстра.

Най-къс път в тегловен граф.

(!) Без отрицателни ребра.



A $\xrightarrow{?}$ F

A	B	C	D	E	F
0 ✓	∞	∞	∞	∞	∞
	2 ✓	4			
		3 ✓	10	12	∞
			8 ✓		
				10 ✓	14 ✓
					14

Булеви функции

def: Булева ф-я $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

$$\mathcal{F}_2^n = \{ f \mid f: \{0,1\}^n \to \{0,1\} \} \quad ! \quad |\mathcal{F}_2^n| = 2^{2^n}$$

$$\mathcal{F}_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_2^n$$

$\mathcal{F}_2^1$

x	g_1	g_2	g_3	g_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
	$\tilde{0}$	id	$\neg$	$\tilde{1}$

$\mathcal{F}_2^2$:

			$\wedge$					$\oplus$	$\vee$		$\Leftrightarrow$				$\Rightarrow$		
x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

! Каноничен запис: $f_{14} = \langle 1101 \rangle$

def: Композиция:

$f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ $\quad g_1 \dots g_n: \{0,1\}^k \to \{0,1\}$

$h: \{0,1\}^k \to \{0,1\}$

$\underbrace{h(a_1 \dots a_k)}_{\text{композиция на } f \text{ с } g_1 \dots g_n} = f(g_1(a_1 \dots a_k), g_2(a_1 \dots a_k) \dots g_n(a_1 \dots a_k))$

Пример: $h(x,y) = \overline{x \Rightarrow y} = g_3(f_{14}(x,y))$

def: Проекстивна ф-ия.

$I_k^n: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

$I_k^n(x_1 \dots x_n) = x_k$.

$I_2^2 = f_6$ $\quad I_1^2 = f_4$.

def: Нека F - м-во булеви ф-ии.
Дефинираме индуктивно $[F] = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$

$F_0 = F \cup \{I_k^n \mid 1 \le k \le n\}$

$F_{n+1} = F_n \cup \{h \mid \exists f, g_1 \dots g_n \in F_n \mid h(x_1 \dots x_k) = f(g_1(x_1 \dots x_k) \dots g_n(x_1 \dots x_k))\}$

$$[F] = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$$

def: F е пълно, ако можем да представим всяка булева функция, чрез ф-иите от F.

$$[F] = \mathcal{F}_2.$$

Th. на Boole.

$\{\wedge, \vee, \neg\}$ е пълно.

Защо? Конструкция със съвършена дизюктивна нормална форма. (СДНФ)

$f = (10011001)$

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\boxed{(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)}$$

↑

ф-ията само чрез $\wedge, \vee$ и $\neg$.

Зад: Докажете, че $\{\wedge, \neg\}$ е пълно.

Реш: Знаем, че $\{\wedge, \vee, \neg\}$ е пълно.

$$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

т.е дизюнкцията се изразява чрез $\wedge$ и $\neg$.

Зад: Докажете, че $\{\vee, \neg\}$ е пълно.

Реш: $\{\wedge, \vee, \neg\}$ - пълно и $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$

def: f е шеферова, ако $[\{f\}] = \mathcal{F}_2$

($\{f\}$ е пълно).

Пример 1: $x \mid y = \langle 1110 \rangle$ (черта на шефер).

$\{\wedge, \neg\}$ е пълно.

- $\neg x \equiv x \mid x$
- $x \wedge y = \neg(x \mid y) = (x \mid y) \mid (x \mid y)$

Пример 2: $x \downarrow y = \langle 1000 \rangle$ стрелка на Пирс.

$\{\downarrow\}$ е пълно.

- ~~$x \wedge$~~ $\neg x \equiv x \downarrow x$
- $x \wedge y \equiv \neg(x \downarrow y) = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$.

Зад. Докажете, че $f = \langle 10111110 \rangle$

решение:

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$\{\neg, \vee\}$ – пълно м-во

$$\neg x \equiv f(x, x, x)$$

$$x \vee y = f(x, y, \neg x) = f(x, y, f(x, x, x))$$