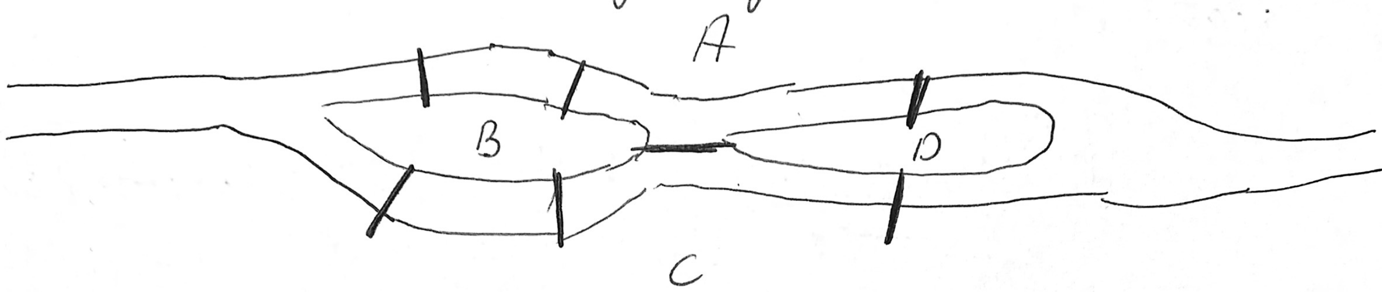
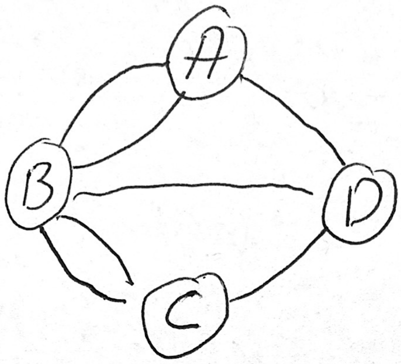
Теория на Графите.

Мостовете на Königsberg



↓ моделираме.



def: Обикновен неориентиран граф.

$G = \langle V, E \rangle$ V - множество от върхове.
$E \subseteq \{ X \subseteq V \mid |X| = 2 \}$

Конвенция: $|V| = n$ $|E| = m$ ⚠ В тази def няма примки.

def: ~~Не~~ Ориентиран граф.

$G = \langle V, E \rangle$ V - множество от върхове
$E \subseteq V \times V$

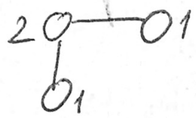
⚠ В тази def позволяваме примки.

⚠ Двете дефиниции варират, в зависимост дали има примки def: Степен на връх на неор. граф.

$d: V \to \mathbb{N}$ $\qquad d(v) =$

брой ребра "инцидентни" с v.

$d(v) = |S(v)|$, където $S(v) = \{e \in E \mid v \in e\}$

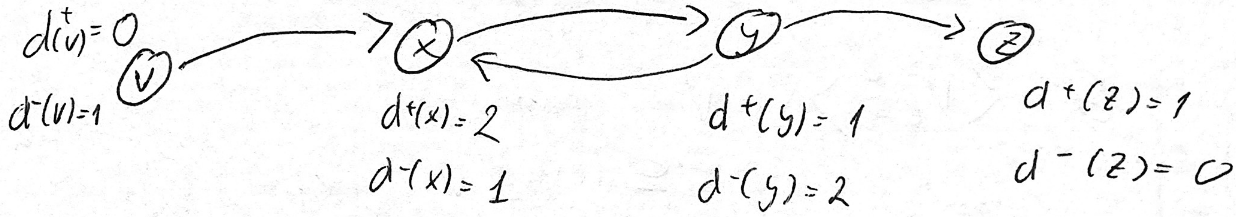


def: Степен на входа $d^+(v)$
Степен на изхода $d^-(v)$ при ор. графи.

$d^+: V \to \mathbb{N}$ $\qquad d^-: V \to \mathbb{N}$.

$d^-(v) = |\{\langle v, x\rangle \in E \mid x \in V\}|$

$d^+(v) = |\{\langle x, v\rangle \in E \mid x \in V\}|$



Th. Първа теорема в Т.Г.
Нека $G = \langle V, E\rangle$ е неор. граф. Тогава

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 * |E|$$

Следствие: $\sum_{v \in V} d(v)$ е четно

Как да пренесем теоремата в контекста на ориентираните графи?

$$\sum_{v \in V} d^+(v) + \sum_{v \in V} d^-(v) = 2|E|$$

Но! $$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v)$$

$x \longrightarrow y$

$d^-(x)\ +1 \qquad d^+(y)\ +1$

$$\Rightarrow \sum d^+(v) = \sum d^-(v) = |E|$$

Зад $G = \langle V, E \rangle$ - неор. граф.

Док, че броят на върховете от нечетна степен е четен.

Решение: Допускаме противното.

Броят на върховете от нечетна степен е нечетен.

$V_{even} \subseteq V$ - в-вет от четна степен

$V_{odd} \subseteq V$ - в-вете от нечетна степен

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V_{even}} d(v) + \sum_{v \in V_{odd}} d(v) =$$

$$= \underbrace{\overbrace{\text{четно} + \text{четно} \ldots + \text{четно}}^{\sum_{v \in V_{even}} d(v)}}_{\text{четно}} + \underbrace{\overbrace{\text{нечетно} + \text{нечетно} \ldots + \text{нечетно}}^{\sum_{v \in V_{odd}} d(v)}}_{\text{нечетно (нечетен брой събираеми)}}$$

$= \text{четно} + \text{нечетно} = \text{нечетно}.$

Но знаем, че $\sum_{v \in V} d(v) = \text{четно}$ ↯

__Зад__ Нека $G = \langle V, E \rangle$ е неор. граф и.

Нека $u \in V$ и $d(u) = \text{нечетно}$.

Докажете, че същ. и друг врх от нечетна ст.

__Решение:__ Да допуснем противното. Но тогава имаме 1 врх от нечетна степен.

Но ние доказахме, че върховете от неч. степен са четен брой ↯

Зад. n потребители в социална мрежа. Докажете, че има 2-ма потребители с равен брой приятели.

Нека $G = \langle V, E \rangle$ е неор. граф.

Докажете, че същ. 2 върха от една и съща степен.

Решение:

1сл. В G няма връх от степен 0.

Тогава: n - върха

$\underbrace{\{1 \dots n-1\}}_{n-1}$ - степени

По Дирихле има 2 от еднаква степен ✓

2сл. В G има връх от степен 0.

Но тогава в G няма връх от степен $n-1$

n - върха

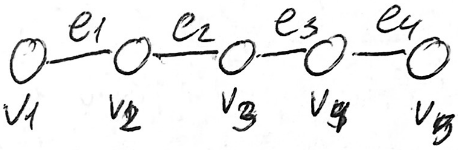
$\underbrace{\{0 \dots n-2\}}_{n-1}$ - степени

По Дирихле има 2 върха от еднаква степен ✓

def: Път в неориентиран граф.

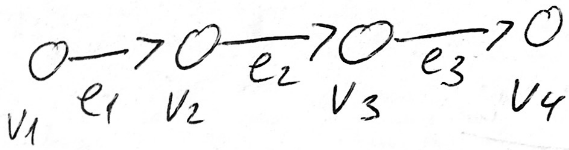
$$V_1 e_1 V_2 e_2 \ldots e_{n-1} V_n$$

$$e_i = \{V_i, V_{i+1}\}$$



def: Маршрут в ориентиран граф.

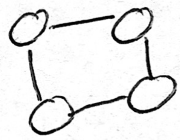
$$V_1 e_1 V_2 e_2 \ldots e_{n-1} V_n$$



$$e_i = \langle V_i, V_{i+1} \rangle$$

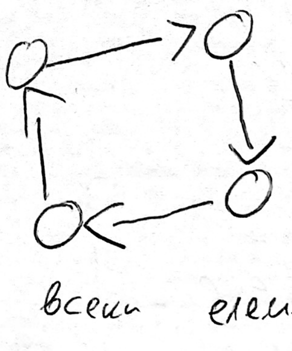
def: цикъл в неор. граф.

Път, в който първият и последният елемент съвпадат.



def: Контур в ор. граф

Маршрут, в който първият и последният елемент съвпадат.



def: Прост път/маршрут, в който всеки елемент е уникален. за път

def: Прост път/Контур, в който $\forall$ елементи са уникални (освен $V_1 = V_n$)

def: Компоненти на свързаност в неор. граф G.

$Path \subseteq V \times V$

$\langle x, y \rangle \in Path \iff \exists$ път от x до y (неформално)

Path е релация на еквивалентност

Компонентите на свързаност на G са класовете на еквивалентност на Path.

Зад $G = \langle V, E \rangle$ е неор. граф и $\forall v \in V \; d(v) \geq 2$. Докажете, че в G има цикъл.

Решение: Нека $v_1 v_2 \ldots v_n$ е най-дългият прост път в G. Допускаме, че в G няма цикъл.

$d(v_n) \geq 2 \Rightarrow$ от v_n има още едно ребро (освен към v_{n-1}).

Нека е към връх x.

1сл. Връх x е част от най-дългия път

$$v_1 - v_2 - v_3 \ldots x \ldots - v_{n-1} - v_n$$

Но получихме цикъл. Допуснахме, че няма цикли $\lightning$

(2 сл.) X не е част от пътя.

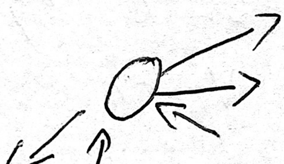
$$V_1 - V_2 - V_3 - \dots V_{n-1} - V_n - X$$

Но тогава получихме по-дълъг път от най-дългия. ↯

=> В G има цикъл. ✓

Зад 6 тенисисти играят в турнир. Да се докаже, че може да изберем двама от тези шест, такива че всеки от останалите да има ~~мач~~ загубен мач с/у някой от тях двамата.

Решение:



15 изиграни мача: 15 победи ($\sum d^- = 15$), 15 загуби ($\sum d^+ = 15$)

$d^+(x)$ - брой загуби на x

$d^-(x)$ - брой победи на x.

Твърдение (помощно): Има играч с поне 3 победи.

Д-во: Допускаме противното

$$\underbrace{d^-(p_1)}_{\le 2} + \underbrace{d^-(p_2)}_{\le 2} + \underbrace{d^-(p_3)}_{\le 2} + \underbrace{d^-(p_4)}_{\le 2} + \underbrace{d^-(p_5)}_{\le 2} + \underbrace{d^-(p_6)}_{\le 2} \le 12$$

Но трябва да е 15 ↯

Доказахме помощното твърдение!

=> Има играч с поне 3 победи.

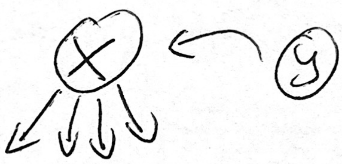
Нека е играч X.

1сл.

X е победил всички

=> избираме $\boxed{X \text{ и произволен друг връх}}$ ✓

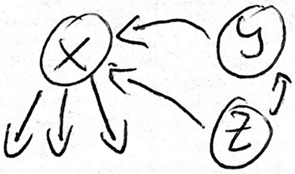
2сл



X има загуба само от y

=> избираме $\boxed{\{X, y\}}$ ✓

3сл.



X има загуба от y и z

=> Избираме X и победителя м/у y,z

$\boxed{\{X, Z\}}$ ✓

<u>Зад</u> Нека G е неор. граф. и <u>n е четно</u> $(|V|=n)$. Всички върхове са от степен $\frac{n}{2}+1$.

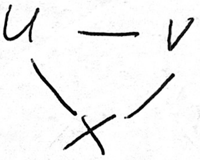
Докажете, че в G има цикъл с дължина 3.

<u>Решение</u>: Нека $\boxed{u}$ и $\boxed{v}$ – произволни различни върхове

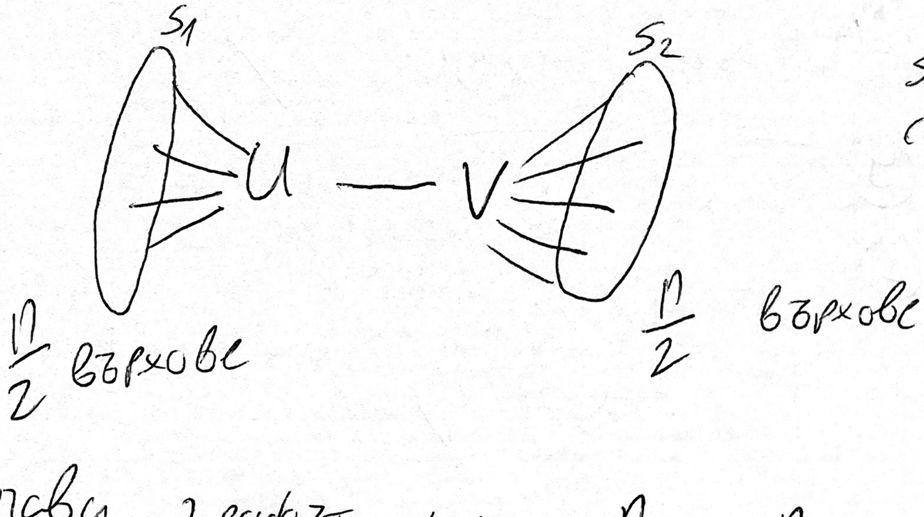
и нека има ребро м/у $\boxed{u}$ и $\boxed{v}$.

$u — v$

Твърдим, че $\exists x \in V$:



Да допуснем противното:



$S_1 \cap S_2 = \emptyset$ (от допускането)

Но тогава графът има $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} + 2 = n+2$ върха ↯

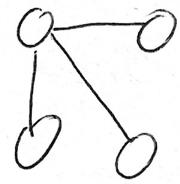
$\Rightarrow$ В G има цикъл с дължина 3.

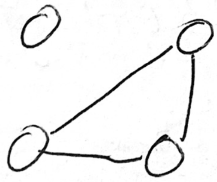
Зад Брой графи (неор.) с n върха.

реш: $2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

def: Допълнение на граф. $G = \langle V, E \rangle$

$\overline{G} = \langle V, E' \rangle$ $\quad E' = \{\{x,y\} \mid \{x,y\} \notin E\}$

G: 

$\overline{G}$: 

Твърдение: G е неор. граф. Тогава:

G е свързан $\vee$ $\overline{G}$ е свързан.

Д-во: $p \vee q \equiv \boxed{\neg p \to q} \equiv \neg q \to p$

Нека G не е свързан. Трябва да покажем, че $\overline{G}$ е свързан.

$\forall u, v \in V$ същ. път от u до v в $\overline{G}$.

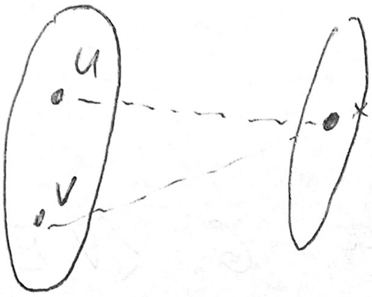
u, v - произволни

1сл. u и v са в различни св компоненти в G.

$\Rightarrow$ Няма ребро м/у u и v в G

$\Rightarrow$ В $\overline{G}$ има ребро м/у тях ✓

2 сл. u и v са в една св. компон. в G.



Не знаем дали м/у u и v има ребро.

~~Но~~ ~~Вз~~ Разглеждаме произволен връх x от друга св компонента (знаем, че има такъв, защото графът не е свързан) м/у u и x и v и x няма ребра в G. $\Rightarrow$ има ребра в $\overline{G}$

$\overline{G}$: 

✓

Но u и v бяха произволни

$\Rightarrow$ $\overline{G}$ е свързан ✓