Зад. $\{\oplus, \wedge, \tilde{1}\}$ - пълно?

$\neg x = x \oplus \tilde{1}(x)$

$\{\neg, \vee\}$ - знаем, че е пълно.

$x \vee y = x \wedge y \oplus x \oplus y$

def: Полином на Жегалкин.

Функция от вида:

$$f(x_1 \ldots x_n) = a_0 \oplus \underset{1 \le i \le n}{a_i x_i} \oplus \underset{1 \le i < j \le n}{a_{ij} x_i \wedge x_j} \ldots \oplus a_{12\ldots n} x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$$

$a_i \in \{0, 1\}$

$x \vee y$ — $x \wedge y \oplus x \oplus y$

$x \to y$ — $x \wedge y \oplus x \oplus 1$

$x \oplus y$ — $x \oplus y$

$x \mid y$ — $(x \wedge y) \oplus 1$

$x \downarrow y$ — $x \wedge y \oplus x \oplus y \oplus 1$

На две променливи изглежда така (не винаги)

$$f(x, y) = a_0 \oplus a_1 \wedge x_1 \oplus a_2 \wedge x_2 \oplus a_{12} \wedge x_1 \wedge x_2$$

Th. на Жегалкин.

Всяка булева ф-я може да се представи по ~~единствен~~ начин като полином на Жегалкин

зад ~~Предст~~ намерете полиномът на Жегалкин на

$f = \langle 11010011 \rangle$.

a	b	c	f(a,b,c)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(x_1,x_2,x_3) = a_0 \oplus a_1 \wedge x_1 \oplus a_2 \wedge x_2 \oplus a_3 \wedge x_3 \oplus a_{12} \wedge x_1 \wedge x_2 \oplus a_{13} \wedge x_1 \wedge x_3$

$\oplus\, a_{23} \wedge x_2 \wedge x_3 \oplus a_{123} \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$

Търсим коефициентите

- $f(0,0,0) = a_0 = 1$ $\quad \boxed{a_0 = 1}$
- $f(0,0,1) = a_0 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow \boxed{a_3 = 0}$
- $f(0,1,0) = a_0 \oplus a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = 1}$
- $f(0,1,1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23} = 1 \Rightarrow \boxed{a_{23} = 1}$
- $f(1,0,0) = a_0 \oplus a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$

- $f(1,0,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus \oplus a_3 \oplus a_{13} = 0 \Rightarrow \boxed{a_{13} = 0}$

- $f(1,1,0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} = 1 \Rightarrow \boxed{a_{12} = 0}$

- $f(1,1,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123} = 1$

$\boxed{\Rightarrow a_{123} = 1}$

$\Rightarrow$ Търсеният полином на Жегалкин:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_2 \wedge x_3 \oplus x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$$

def: Булеви функции, които запазват константите.

- f запазва 0, ако $f(0,0,\dots 0) = 0 \}$ м-во T_0
- f запазва 1, ако $f(1,1\dots 1) = 1 \}$ м-во T_1

$\wedge, \vee \in T_0 \cap T_1$ $\qquad \oplus \in T_0$

$\oplus \notin T_1$

- T_0 и T_1 са затворени, относно ~~...~~ композиция и унификация
- Твърдение: S-мво от булеви функц.

Ако $S \in T_0$ (или T_1), то S не е пълно.

- Не можем да построим ф-я, която $f(0,0) = 1$

T_1 $\quad (f(1,1) = 0)$

def: Самодвойнствена булева ф-я.

f - булева ф-я.

$f^*(x_1 .. x_n) = \neg f(\overline{x_1} .. \overline{x_n})$

Пример:

f	f^*
$\tilde{0}$	$\tilde{1}$
$\tilde{1}$	$\tilde{0}$
$x \wedge y$	$x \vee y$
$x \oplus y$	$x \leftrightarrow y$
$x \mid y$	$x \downarrow y$
$x \downarrow y$	$x \mid y$

! $(f^*)^* = f$

def: f е самодвойствена, ако: $f = f^*$

Пример: $m(x, y, z) = x \wedge y \vee y \wedge z \vee z \wedge x$ (ф-ята медиана)

S - м-вото на всички самодвойствени ф-ции.

S - затворено!

def: Линейна булеви функция

F - линейна, ако полиномът на Жегалкин на f е "линеен".

$$f(x_1 \dots x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n.$$

Пример: $x \Longleftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1$ ✓

$x \vee y = x \wedge y \oplus x \oplus y$ ✗

L - м-вото от ∀ линейни булеви ф-ии.

L - затворено!

def: Монотонна булева функция.

дефиниране наредба (частична, но не пълна/линейна) в n-мерните булеви вектори.

$$\langle \alpha_1 \dots \alpha_n \rangle \leq \langle \beta_1 \dots \beta_n \rangle \Longleftrightarrow \alpha_1 \leq \beta_1 \dots \alpha_n \leq \beta_n.$$

f е монотонна, ако $\alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)$

Пример: $x \vee y$ ✓

$x \wedge y$ ✓ $\quad x \Leftrightarrow y$ ✗

M - множеството на всички монотонни ф-ии

M - затворено!

Теорема на Пост – Яблонски.

Нека $F \subseteq F_2^n$. F е пълно, тогава и само тогава, когато:

$$F \not\subseteq T_0 \wedge F \not\subseteq T_1 \wedge F \not\subseteq S \wedge F \not\subseteq M \wedge F \not\subseteq L.$$

Критерий за шеферовост.

f е шеферова ~~тогава~~ $\iff f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$

<u>Зад</u> $\underbrace{\{\neg, \Rightarrow\}}_{X}$ е пълно?

I начин. С критерий на Пост.

- $X \not\subseteq T_0$ (заради $\neg$)
- $X \not\subseteq T_1$ (заради $\neg$)
- $X \not\subseteq S$ (заради $\Rightarrow$) $\underbrace{f^*(0\,0)}_{1} \neq \neg \underbrace{f(1\,1)}_{\underbrace{1}_{0}}$
- $X \not\subseteq M$ (заради $\Rightarrow$) $0\,0 \leq 1\,0$, но $f(0\,0) \not\leq f(1\,0)$
- $X \not\subseteq L$ (заради $\Rightarrow$) $x_1 \Rightarrow x_2 \equiv x_1 \oplus x_2$

II начин. Теорема на Бул.

$\{\vee, \neg\}$ е пълно (знаем от упражнения).

$$p \vee q \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$$

зад.

Шеферова ли е ф-я-та ?

$$f = \langle 10111110 \rangle$$

(Предния семинар задачата е решена с th. Boole).

f е шеферова $\Leftrightarrow$ $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$.

- $f \notin T_0$ $\quad f(0,0,0) = 1$
- $f \notin T_1$ $\quad f(1,1,1) = 0$
- $f \notin S$ $\quad f(0,1,0) \neq \neg f(1,0,1)$

$\Rightarrow$ f е шеферова

✓