Принцип на вкл и изкл.

Търсим $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_n| = ?$

Ако нямат сечение, то прилагаме пр. на събирането

! Пр. на събирането е частен сл. на Пр. на в~~кл~~.кл.
! и изкл. ! !

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < t \le n} |A_i \cap A_j \cap A_t| \ldots$$

$$\ldots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n|.$$

Обобщено:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \le i_1 < i_2 \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}| \right)$$

Д-во: С индукция:

$n = 1$ $\quad |A_1| = |A_1|$ ✓

$n = 2$ $\quad |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ ✓

И.П. Допускаме, че за някое $k \in \mathbb{N}$:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_t| \ldots$$

И.С. Разглеждаме за $k+1$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup A_{k+1}\right| \overset{\text{от } n=2}{=} \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cap A_{k+1}\right|$$

Да разгледаме $\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cap A_{k+1}\right|$. $\cap$ е дистибутивно относно $\cup$.

$$\Rightarrow |(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \ldots (A_k \cap A_{k+1})| = (\text{от инд. предп.}) \ (k\text{-множества})$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |A_i \cap A_{k+1}| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_{k+1}| \ldots + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_{k+1}|$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup A_{k+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cap A_{k+1}\right|$$

$$\sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le k} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < s \le k} |A_i \cap A_j \cap A_s| \ldots (-1)^{k} |A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_k|$$

$$+ |A_{k+1}| - \left(\sum |A_i \cap A_{k+1}| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_{k+1}| \ldots (-1)^{k-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}|\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_s| \ldots (-1)^{k-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_{k+1}|$$ ✓

Зад Брой ~~[illegible]~~ четирицифрени числа, които започват с 3 или завършват на 0.

Решение 1: С пр. на вкл. и изкл.

$P(x) \Leftrightarrow x$ започва с 3

$Q(x) \Leftrightarrow x$ завършва на 0.

$A_{P(x)}$ – м-вото на $\forall$ четирицифр. числа, за които $P(x) \equiv T$.

Търсим: $|A_{P(x)} \cup A_{Q(x)}| = |A_{P(x)}| + |A_{Q(x)}| - |A_{P(x)} \cap A_{Q(x)}|$

$= \underset{\substack{\underline{3}\,\_\,\_\,\_ \\ 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}}{1000} + \underset{\substack{\_\,\_\,\_\,\underline{0} \\ 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1}}{900} - \underset{\substack{\underline{3}\,\_\,\_\,\underline{0} \\ 10 \cdot 10}}{100} = \boxed{1800}$

Решение 2: С принцип на събирането.
(ще разбием добре случаите)

	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \vee Q(x)$
	F	F	F
1сл	F	T	T
2сл.	T	F	T
3сл.	T	T	T

1 сл. $P(x) \equiv F$ $Q(x) \equiv T$

$$\frac{\cancel{3}}{8} * \frac{}{10} * \frac{}{10} * \frac{0}{1} = \boxed{800}$$

2 сл. $P(x) \equiv T$ $Q(x) \equiv F$

$$\frac{3}{\cancel{1}} * \frac{}{10} * \frac{}{10} * \frac{\cancel{0}}{9} = \boxed{900}$$

3 сл. $P(x) \equiv F$ $Q(x) \equiv T$

$$\frac{3}{1} * \frac{}{10} * \frac{}{10} * \frac{0}{1} = \boxed{100}$$

$$800 + 900 + 100 = \boxed{1800}$$ ✓

Зад Търси се броя числа в [1...100], които не се делят на 2, 3 или 5.

Решение: $\underbrace{\text{Всички}}_{100}$ − Ненужните.

A_i - множеството от числата в [1...100], които се делят на i.

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - \overbrace{|A_2 \cap A_3|}^{A_6} - \overbrace{|A_2 \cap A_5|}^{A_{10}} - \overbrace{|A_3 \cap A_5|}^{A_{15}} + \overbrace{|A_2 \cap A_3 \cap A_5|}^{A_{30}} =$$

$$= 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$$

Отговор: $100 - 74 = \boxed{26}$

Зад. По колко начина може да подредим 1,2,3,4,5,6 в редица, така че да няма нарастваща подредица с 3 последователни числа.

564312 ✓

364251 ×

Решение: $\underbrace{\text{От всички}}_{6! = 720}$ − "лошите"

$A_{i,j,k}$ - множеството от $\forall$ подредби на $1..6$, такива че i,j,k са в нарастващ ред.

$$
\begin{aligned}
|A_{1,2,3} \cup A_{2,3,4} \cup A_{3,4,5} \cup A_{4,5,6}| &= |A_{1,2,3}| + |A_{2,3,4}| + |A_{3,4,5}| + \\
&|A_{4,5,6}| - |A_{1,2,3} \cap A_{2,3,4}| - |A_{1,2,3} \cap A_{3,4,5}| - |A_{1,2,3} \cap A_{4,5,6}| - \\
&|A_{2,3,4} \cap A_{3,4,5}| - |A_{2,3,4} \cap A_{4,5,6}| - |A_{3,4,5} \cap A_{4,5,6}| + \\
&\cancel{|A_{1,2,3} \cap A_{2,3,4} \cap A \cap A} + |A_{1,2,3} \cap A_{2,3,4} \cap A_{3,4,5}| + |A_{1,2,3} \cap A_{2,3,4} \cap A_{4,5,6}| + \\
&|A_{1,2,3} \cap A_{3,4,5} \cap A_{4,5,6}| + |A_{2,3,4} \cap A_{3,4,5} \cap A_{4,5,6}| - |A_{1,2,3} \cap A_{2,3,4} \cap A_{3,4,5} \cap A_{4,5,6}|
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{фиксираме слотовете}} \cdot \underbrace{3!}_{\text{перм. останалите}} + \binom{6}{3}\cdot 3! + \binom{6}{3}\cdot 3! + \binom{6}{3}\cdot 3!$$

$\#$

1→2→3→4   1→2→3→4→5   1→2→3 4→5→6   2→3→4→5

$$-\binom{6}{4}\cdot 2! - \binom{6}{5}\cdot 1! - \binom{6}{3} - \binom{6}{4}\cdot 2!$$

2→3→4→5→6   3→4→5→6   1→2→3→4→5

$$-\binom{6}{5}\cdot 1! - \binom{6}{4}\cdot 2! + \binom{6}{5}\cdot 1! +$$

1→2→3→4→5→6   1→2→3→4→5→6   2→3→4→5→6

$$1 + 1 + \binom{6}{5}\cdot 1! - \underline{1} =$$

$$= 480 - 30 - 6 - 20 - 30$$

$$- 6 - 30 + 6 + 1 + 1 + 6 - 1 =$$

$$= 371$$

$\Rightarrow$ Отговор: $720 - 371 = \boxed{349}$

зад Колко са $\forall$ решения на ур-то

$$x_1+x_2+x_3=11$$

$x_1\le 3$ $\quad x_2\le 4$ $\quad x_3\le 6$ $\quad \forall x_i\ge 0$

вс решения - "лошите"

$\binom{13}{2}$

лоши: $x_1+x_2+x_3=1$

$x_1>3 \vee x_2>4 \vee x_3>6$

$A_{x_i>y}$ - вс. решения, където $x_i>y$

$$|A_{x_1>3}\cup A_{x_2>4}\cup A_{x_3>6}| = \underset{\binom{9}{2}}{|A_{x_1>3}|} + \underset{\binom{8}{2}}{|A_{x_2>4}|}$$

$$+\underset{\binom{6}{2}}{|A_{x_3>6}|} - \underset{\binom{4}{2}}{|A_{x_1>3}\cap A_{x_2>4}|} - \underset{1}{|A_{x_1>3}\cap A_{x_3>6}|}$$

$$-\underset{0}{|A_{x_2>4}\cap A_{x_3>6}|} + \underset{0}{|A_{x_1>3}\cap A_{x_2>4}\cap A_{x_3>6}|}$$

$$= 36+28+15-6-1-0+0 = 72$$

$$\binom{13}{2}-72 = 78-72=\boxed{6}$$

⚠ Задачата може да се реши и без вкл и изкл. По колко начина може $\boxed{3+4+6=13}$ да махнем 2??! - $\boxed{6}$

Зад Колко са всички пермутации на $\{1 \dots n\}$, за които никое число не е на мястото си.? (Derangements)

Решение:

A_i - мн-вото на тези перм, в които i е на мястото си.

търсим. $n! - \underbrace{|A_1 \cup A_2 \dots A_n|}_{\text{"лошите"}}$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| \; // [n(n-1)!] \; //$$ за $k \in \mathbb{N}$ $|A_k| = (n-1)!$ имаме n м-ва.

$$- \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| \; // \binom{n}{2}(n-2)! \; //$$ за $t, k \in \mathbb{N}$ $(t \neq k)$ $|A_t \cap A_k| = (n-2)!$ имаме $\binom{n}{2}$ м-ва.

$$+ \sum_{1 \le i < j < s \le n} |A_i \cap A_j \cap A_s| \; // \binom{n}{3}(n-3)! \; //$$ за $t, k, r \in \mathbb{N}$ ← различни $|A_t \cap A_k \cap A_r| = (n-3)!$ имаме $\binom{n}{3}$ м-ва.

$\vdots$

$$n! - \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (n-i)! \right)$$ // $n! = \binom{n}{0}(n-0)!$

=> Отговор:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \binom{n}{i} (n-i)!$$

~~Вход~~

Зад: A, B - множества и $|A|=n$ и $|B|=m$

а) Колко са всички ф-ии $f: A \to B$.

(Колко са всички стрингове с дължина n с азбука от m символа)

$$\boxed{m^n}$$

б) Колко са всички частични ~~тот~~ ф-ии $f: A \to B$

$$\boxed{m^{n+1}}$$

→ всеки елемент може и да няма образ.

в) Колко са всички инективни ф-ии $f: A \to B$

(Колко са всички стрингове с дължина n с букви от азбука с m символа и без повтарящи се букви)

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots (m-(n-1)) = \boxed{\frac{m!}{(m-n)!}}$$

г) Брой биекции? $(n = m)$

(брой стрингове с дължина n със символи от азбука с n символа и всеки участва точно веднъж)

$$\boxed{n!}$$

д) Брой сюрекции $f: A \to B$

(брой стрингове с дължина n с буква от азбука с m символа, в които всяка буква се среща поне веднъж)

$$\underbrace{\text{От всички ф-ии}}_{m^n} - \text{„лошите"}$$

X_i – ф-ии, в които i-я елемент няма първообраз (стрингове, в които не участва i-тата буква)

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum |X_i| - \sum |X_i \cap X_j| + \sum |X_i \cap X_j \cap X_k| - \dots$$

$m \, (m-1)^n$

брой мн-ва; мощност на всяко множество

$\binom{m}{2} \cdot (m-2)^n$

брой мн-ва; мощност на всяко

$\binom{m}{3} \cdot (m-3)^n$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{m}{i} (m-i)^n$$

$\Rightarrow$ Отговор:

$$m^n - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{m}{i} (m-i)^n =$$

$$= \boxed{\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n}$$