def: Ойлеров цикъл - цикъл в G, който съдържа всяко ребро точно веднъж

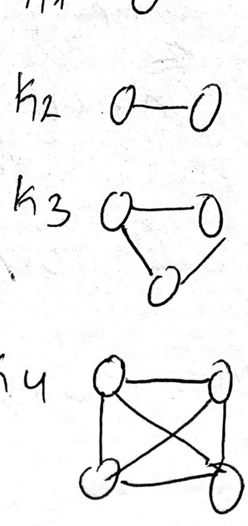
Тв: G има ойлеров цикъл $\Leftrightarrow$ G е свързан, всички върхове в G са от четна степен.

def. Ойлеров път - път в G, който съдържа всяко ребро точно веднъж.

Тв: G има ойлеров път (който не е цикъл) $\Leftrightarrow$ (G е свързан) и има точно 2 върха от нечетна степен

def: Пълен неор. граф с n върха.

K_n - има всички възможни ребра



K_n има $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ребра.

Зад За кои с-ти на n K_n има Ойлеров цикъл?

Решение: При n - нечетно, защото тогава всеки връх е от четна степен

Зад А ойлеров път?

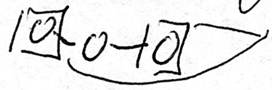
$n=1$ и $n=2$ ✓

~~Деф~~

def: Клика - (непразно) подмн-во на върховете, ~~което~~ ~~образува~~ такава че м/у всеки 2 има ребро.

 ← клика

def Антиклика — || — м/у всеки 2 няма ребро

 Антиклика

Зад (твърдение.)

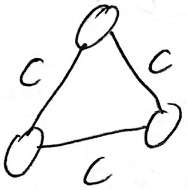
Социална мрежа с поне 6 души. Докажете, че има 3-ма, които са приятели помежду си или 3-ма, които не са приятели помежду си.

→ Нека $G=(V,E)$ е граф с поне 6 върха. Докажете, че в G има 3-клика или 3-антиклика.

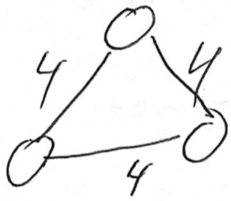
Решение: Б.О.О доказване за $|V|=6$.

Да разгледаме K_6 - със синьо "боядисване" ребрата, които участват в G и с червено тези, които ги няма в G.

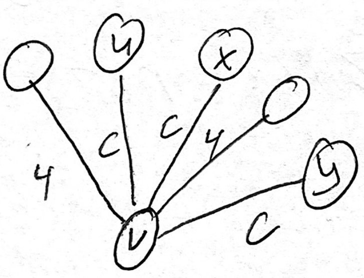
Искаме да покажем, че в K_6 има

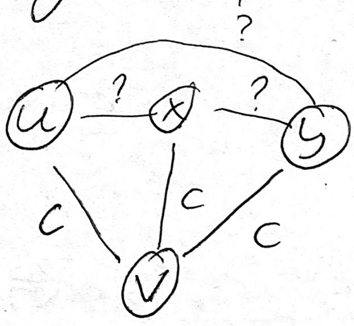


или



Разгледаме произволен връх.
Той е свързан с 5 други.
По обобщения принцип на Дирихле има 3 ребра от един цвят. Нека Б.О.О е син.





1 сл. Поне едно от ребрата м/у u, x, y е синьо $\Rightarrow$ 3-клика. ↯

2 сл. Всички ребра м/у u, x, y са червени $\Rightarrow$ 3-антиклика (u, x, y)

□

Зад Брой клики в K_n?

Решение: Всяко непр. подмн. на V е клика

$\Rightarrow \boxed{2^{|V|}-1}$

Зад Брой антиклики в K_n?

Решение: Само множествата с 1 ~~ребро~~ връх.

$\boxed{|V|}$

Зад Брой клики в граф без ребра?

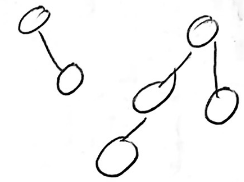
Решение: $|V|$ (само мн-ва с 1 връх).

Зад Брой антиклики в граф без ребра?

$\boxed{2^{|V|}-1}$

Извод за връзка м/у клики и антиклики?

Деф: Дърво - свързан граф без цикли.

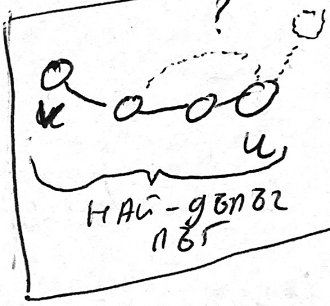


Зад. Докажете, че в дърво има поне 2 върха от степен 1 (висящи върхове)

Решение: Подобна идея като вече решавана задача. Да разгледаме най-дълъг път в дървото. $u - w_1 - \dots - w_k - v$.

Твърдим, че $d(u) = 1$ и $d(v) = 1$

Б.О.О да допуснем, че $d(u) > 1$.



~~Това~~ Т.е има още едно ребро. Това ребро или ще е част от цикъл или ще е част от по-дълъг път ↯

□

Зад. G е дърво $\Leftrightarrow$ м/у всеки 2 върха има точно един път.

① G е дърво $\Rightarrow$ м/у всеки 2 върха точно един път.

Нека $u, v \in V$. Да допуснем, че няма точно 1 път

$\boxed{1 \text{ сл.}}$ Няма път. Но тогава графът не е свързан ↯ (G е дърво)

$\boxed{2 \text{ сл.}}$ Има поне 2 пътя. Но тогава в G има цикъл (G е дърво)

Трябва да се опише по-добре има го в PDF файла.

② $\Leftarrow$ (за домашно)

Индуктивна дефиниция за дърво:

База: $G = \langle \{v\}, \emptyset \rangle$ е дърво.

Ако $G = \langle V, E \rangle$ е дърво, то и следното е дърво:

$$G' = \langle V \cup \{x\}, E \cup \{\{x, u\}\} \rangle$$

$$x \notin V$$

Двете дефиниции са еквивалентни. С индуктивната дефиниция се прави структурна индукция.

Тв. Нека $T = \langle V, E \rangle$. Тогава:

$$|E| = |V| - \underline{1}$$

Д-во: Структурна индукция

База $T = \langle \{v\}, \emptyset \rangle$ $\underbrace{|E|}_{0} = \underbrace{|V|}_{1} - 1$ ✓

И.П. Нека е изпълнено за $T = \langle V, E \rangle$

И.С. Разглеждаме $T' = \langle \underbrace{V \cup \{x\}}_{V'}, \underbrace{E \cup \{x, u\}}_{E'} \rangle$

$|E'|$

$$|E'| = |E| + 1 = (|V| - 1) + 1 = |V| = |V'| - 1 \checkmark$$

Зад Нека $G = (V, E)$ и $|E| < |V| - 1$

Докажете, че:

G не е свързан $\vee$ В G има цикъл.

Решение: Доказахме, че

$$G \text{ е дърво} \Rightarrow |E| = |V| - 1$$

Разглеждаме контрапозицията.

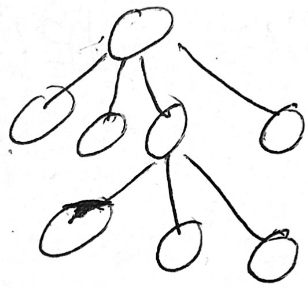
$$\underbrace{|E| \neq |V| - 1}_{\substack{\text{В частност} \\ |E| < |V| - 1}} \Rightarrow \underbrace{G \text{ не е дърво}}_{\substack{G \text{ не е свързан} \vee G \text{ е} \\ \text{цикличен}}}$$

$\square$

Зад. Нека T е дърво ($T = \langle V, E \rangle$)

Докажете, че ако всички върхове са от степен 1 или 4, то $n \equiv 2 \pmod 3$

Решение:



Щом T е дърво, то ребрата са $n-1$.

k - брой върхове от степен 4

$n-k$ - брой върхове от степен 1

От първата теорема в теория на графите:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

$$4k + (n-k).1 = 2n-2$$

$$3k = n-2$$

$$n = 3k+2$$

$$n \equiv 2 \pmod 3$$

Зад. $G = (V, E)$ - неор. граф.

Докажете, че броят на циклите в G е $\geq |E| - |V| + 1$

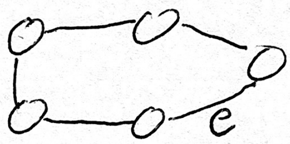
Решение: С индукция по $|E|$.

База: $|E| \leq |V| - 1$ - тривиално вярно е, че броят на циклите $\geq |E| - |V| + 1$

Разглеждаме за $|E| > |V| - 1$

тогава в G има поне 1 цикъл.

Разглеждаме $\underbrace{\text{произволно ребро}}_{e}$ от някой цикъл



Разглеждаме $G' = \langle V, \overbrace{E \setminus \{e\}}^{E'} \rangle$ $|E'| = |E| - 1$

От И.П. $\underbrace{\text{брой цикли в } G'}_{cycle(G')} \geq |E'| - |V| + 1$

В G има поне един повече от в G'

$$\mathrm{Cycle}(G) \geq \mathrm{Cycle}(G') + 1$$

$$\mathrm{cycle}(G') \underset{\text{от и.п}}{\geq} |E'| - |V| + 1$$

$$\mathrm{cycle}(G) \geq |E'| - |V| + 1 + 1$$

$$\mathrm{cycle}(G) \geq |E| - 1 - |V| + 1 + 1$$

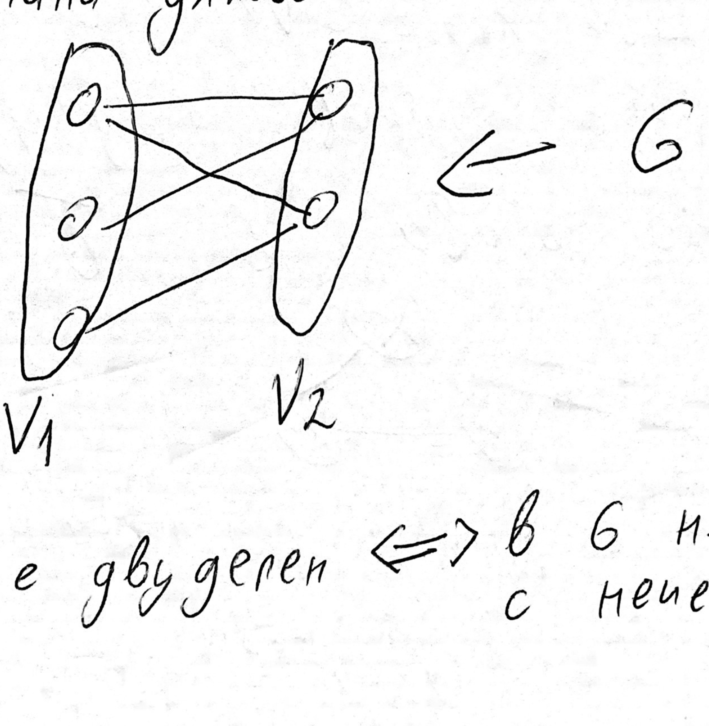
$$\mathrm{cycle}(G) \geq E - |V| + 1$$

---

def: Двуделен граф (bipartite graph).

$G = (V, E)$ $\exists V_1, V_2$ – разбиване на V $(V_1 \cup V_2 = V \wedge V_1 \cap V_2 = \emptyset)$

и всяко ребро от E свързва върхове от различни дялове.



Твърдение: G е двуделен $\iff$ в G няма цикъл с нечетна дължина

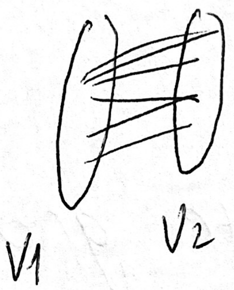
Зад. $G = \langle V, E \rangle$ - двуделен граф. ~~граф~~

и $|V| \geq 5$. Докажете, че:

$\overline{G}$ не е двуделен.

Решение: Щом G е двуделен, то

G има 2 дяла – V_1 и V_2



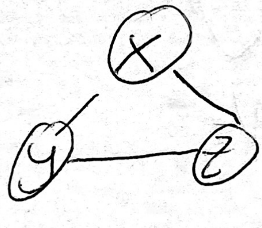
Но $|V| \geq 5$. От обобщения пр. на Дирихле

поне 3 попадат в един дял. Б.о.о. нека е V_1.

Щом $x, y, z \in V_1$, то м/у тях

няма ребра (G е двуделен).

Но тогава в $\overline{G}$ има ребра:



Но това е цикъл с нечетна дължина!

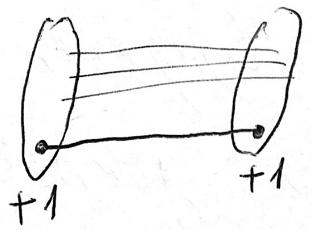
$\Rightarrow \overline{G}$ не е двуделен ✓.

Тв. Нека G е двуделен граф с дялове V_1 и V_2.

Тогава:

$$\sum_{v \in V_1} d(v) = \sum_{v \in V_2} d(v)$$

(Всяко ребро свързва върхове от двата дяла).



Нека G е ~~двуделен~~ двуделен граф.

Зад. Ако всички в-ве са от една с съща степен, то: $|V_1| = |V_2|$

Решение: Нека степента е k ($k \in \mathbb{N}$).

$$\sum_{v \in V_1} d(v) = \sum_{v \in V_2} d(v)$$

$$\Downarrow$$

$$|V_1| \cdot \cancel{k} = |V_2| \cdot \cancel{k}$$

$\Rightarrow |V_1| = |V_2|$ ✓

Зад Нека G е граф, за който:

(1) • $|V|$ е нечетен.

(2) • $\exists t \in \mathbb{N} \ (\forall v \in V \ d(v) = t)$

Докажете, че не е двуделен.

Решение: ~~Следствие~~

Да допуснем, че е двуделен с дялове V_1 и V_2. От (2) и доказаното ~~та~~ твърдение (от ~~предната~~ задача) следва че:

$$|V_1| = |V_2|.$$

Но $|V| = |V_1| + |V_2| = \underbrace{2|V_1|}_{\text{четно}} \ (2|V_2|).$

Но от (1) $|V|$ е нечетно

↯

$\Rightarrow$ G не е двуделен!