

수학 창의적 탐구활동

경기과학고등학교

제출일 2022.08.24

학번 22043

성명 송준원

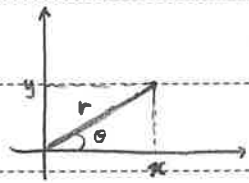
탐구 주제 : 극좌표계로 도형 나타내기

[취향제] #1에서 중심이 (x_0, y_0) , 반지름이 r 인 원을 $(x_0 + r\sin\theta, y_0 + r\cos\theta)$ 와 같이 표현할 수 있음을 알았다.

여러 나라가 원점의 원의 거리 r 과 각도로부터 반시계 방향을 양의 방향으로 한 각인 θ 를 이용해 점의 위치를 나타

내는 극좌표계를 찾아보고, 여러 도형을 극좌표계로 나타내는 방법을 생각해본었다.

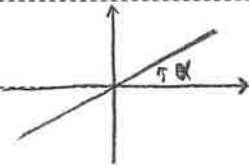
i) 극좌표계



직좌표계에서 (x, y) 를 극좌표계에서 (r, θ) 로 나타낼 수 있고, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $x^2 + y^2 = r^2$ 이고,

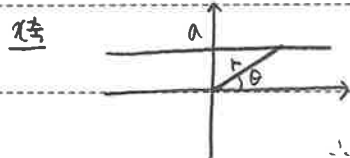
$\tan\theta = \frac{y}{x}$ 인 관계가 있다.

ii) 원점을 지나는 직선



$r \in (-\infty, \infty)$ 이고, $\theta = \alpha$ or $\pi + \alpha$ 이면 기울기가 $\tan\alpha$ 인 직선을 나타낼 수 있다.

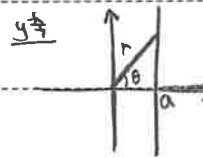
iii) x축, y축에 평행한 직선



$$y = a$$

$$r\sin\theta = a$$

$$\therefore r = \frac{a}{\sin\theta} = a\csc\theta \text{ 로 나타낼 수 있다.}$$



$$x = a$$

$$r\cos\theta = a$$

$$\therefore r = \frac{a}{\cos\theta} = a\sec\theta \text{ 로 나타낼 수 있다.}$$

iv) 임의의 직선 $ax + by = c$

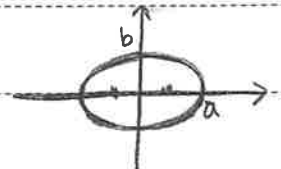
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 를 대입하면 $a(r\cos\theta) + b(r\sin\theta) = c \rightarrow r(a\cos\theta + b\sin\theta) = c$, 삼각함수의 합성으로

$r \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) = c$ 로 나타낼 수 있다. (여기서 $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

$$\therefore r = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)}$$

v) 타원

직교좌표계에서 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 로 나타낸다. (타원의 중심이 원점인 경우)



$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ 이어서 $\frac{x^2}{a^2} = \cos^2\alpha$, $\frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha$ 라면 $x = a\cos\alpha$, $y = b\sin\alpha$ 라는 매개변수 식으로 정리해볼 수 있는데,

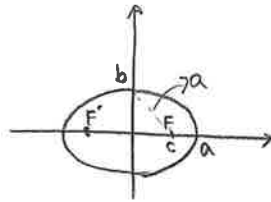
r, θ 로 나타낼 것이 아니기 때문에 극좌표계는 아니다.

타원의 극좌표계 표현

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 에서}$$

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 를 대입한다.

$$\frac{r^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2} = 1$$



$a > b > 0$, 원점에서 ^한 초점까지의 거리를 c 라하면

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\frac{r^2}{b^2} \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2/b^2} + 1 - \cos^2 \theta \right) = 1$$

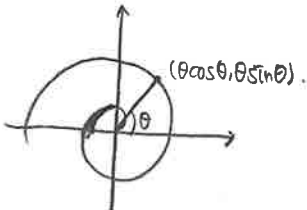
$$\frac{r^2}{b^2} \left(\frac{(b^2 - a^2) \cos^2 \theta}{a^2} + 1 \right) = 1$$

$$\therefore r^2 = \frac{b^2}{1 - \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \theta}$$

$$\therefore r = \frac{b}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \theta}} \text{ 로 나타낼 수 있다.}$$

* 아르케메데스 나선

$x = \theta \cos \theta$, $y = \theta \sin \theta$ 로 정의되는 곡선이다.



극좌표계에서 $r = a + b\theta$ 라고 일반적으로 나타낸다고 한다.

아르케메데스 나선은 직좌표계로 나타내기 어렵지만

극좌표계에서는 간단하게 나타낼 수 있다.

(a 는 $\theta = 0$ 에서의 거리이고, ^{값이 변하면} 나선을 회전시킨다. b 는 θ 가 증가할 때 r 이 증가하는 정도를 결정하는 것으로, 클수록 나선의 폭이 넓다)