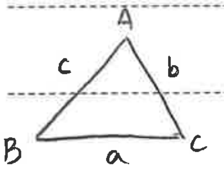
수학 창의적 탐구활동 ※ $s=\frac{a+b+c}{2}$	경기과학고등학교	
	제출일	2022.8.24
	학번	22009
탐구 주제 : 헤론의 정리의 다양한 증명	성명	김민서

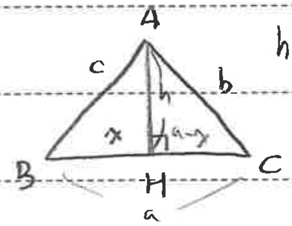
1. 수업시간에 한 내용 (제2코사인 이용)



$$\triangle ABC = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2 C} = \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab-c^2}{2}\cdot\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2}} = \sqrt{\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{c-a+b}{2}\cdot\frac{c+a-b}{2}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

2. 피타고라스 정리를 이용

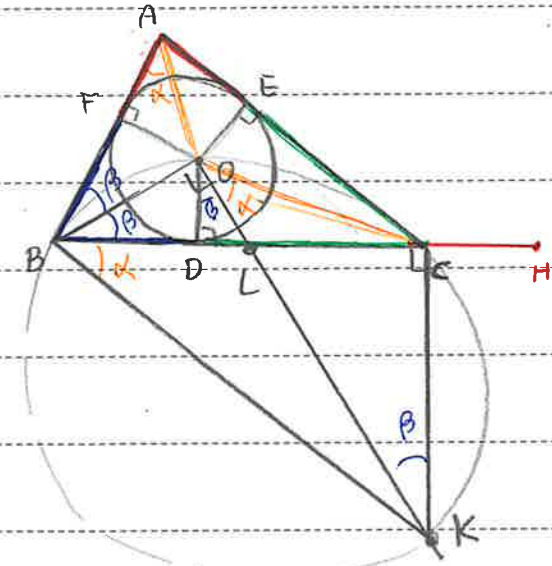


$$h^2 = c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2 \Rightarrow c^2 - b^2 + a^2 = 2ax \Rightarrow x = \frac{a^2-b^2+c^2}{2a}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a\sqrt{c^2-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(c-x)(c+x)a^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+2ac+c^2-b^2}{2}\cdot\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+c+b}{2}\cdot\frac{b-a+c}{2}\cdot\frac{b+a-c}{2}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

3. 초기의 증명 방법



접점 E, F, D

△ABC의 내접원 O가 있다. $\overrightarrow{BC}$ 위에 $\overline{CH}=\overline{AE}$ 인 점 H를 잡는다.

$\triangle ABC = \overline{BH}\times\overline{OD}$

△OBC 외접원 위에 $\overline{BK}$가 외접원의 지름이 되도록 점 K를 잡는다

① $\angle FAO = \alpha$라 하자. $\angle KOC = \frac{180°+2\alpha}{2} - 90° = \alpha$

$\angle KOC = \angle KBC$ (원주각)

② $\angle FBO = \beta$라 하자 $\angle FBO = \angle OBC = \angle OKC$ (원주각)

①,②에 의해 $\triangle BCK \sim \triangle AFO$ (AA 닮음) $\frac{AF}{BC} = \frac{FO}{CK} = \frac{AO}{BK}$

$\triangle ODL \sim \triangle KCL$ (AA) $\frac{OD}{KC} = \frac{DL}{CL} = \frac{OL}{KL}$

$\triangle BOL \sim \triangle KCL$ (AA) $\frac{BO}{KC} = \frac{BL}{KL} = \frac{OL}{CL}$

$\triangle BDO \sim \triangle KCL$ (AA) $\frac{BD}{KC} = \frac{BO}{KL} = \frac{DO}{CL}$

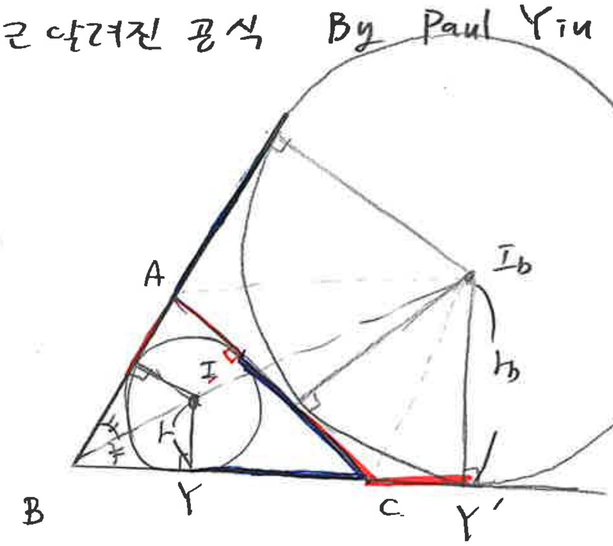
$\Rightarrow \frac{OD}{KC} = \frac{FO}{KC} = \frac{AF}{BC} = \frac{CH}{BC} = \frac{DL}{CL} \Rightarrow \frac{BC}{CH} = \frac{CK}{OD} = \frac{CL}{DL} \Rightarrow \frac{BC}{CH} = \frac{CL}{DL} \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{DC}{DL}$

$\Rightarrow \overline{BH}\times\overline{DL} = \overline{DC}\times\overline{CH}$ 양변에 $\overline{BH}, \overline{BD}$ 곱한다 $\Rightarrow \overline{BH}\times\overline{BH}\times\overline{DL}\times\overline{BD} = \overline{DC}\times\overline{BH}\times\overline{CH}\times\overline{BD}$

△OBL에서 $\overline{OD}^2 = \overline{BD}\times\overline{DL}$ 이므로 $\overline{BH}\times\overline{OD} = \sqrt{\overline{DC}\times\overline{BH}\times\overline{CH}\times\overline{BD}}$

$$S = \sqrt{\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}$$

최근 알려진 공식 By Paul Yiu



내심 I

방심 I_b

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\overline{YC} = \frac{a+b-c}{2}$$

$$\overline{CY'} = \frac{b+c-a}{2}$$

$\triangle IYC \sim \triangle CY'I_b$ (AA)

$$\frac{IY}{CY'} = \frac{YC}{Y'I_b} = \frac{IC}{CI_b} \Rightarrow ① \; r r_b = CY' \times YC = (s-a)(s-c)$$

$\overline{BII_b}$ 다 $\angle ABC$의 이등분선 위에 존재

$\Rightarrow \triangle IBY \sim \triangle I_bBY'$ (AA)

$$\frac{IB}{I_bB} = \frac{IY}{I_bY'} = \frac{BY}{BY'} \Rightarrow ② \; \frac{r}{r_b} = \frac{BY}{BY'} = \frac{s-b}{s}$$

① & ②: $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

$$\triangle ABC = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$