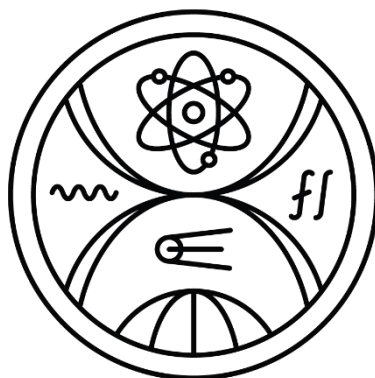
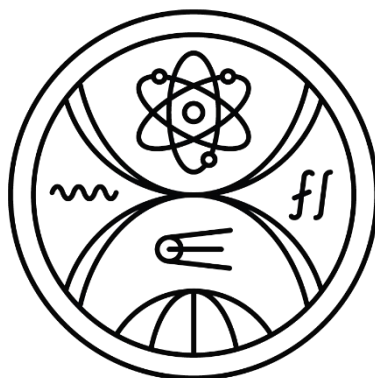


UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



TOKEN GRAFY  
Bakalárska práca

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



TOKEN GRAFY  
Bakalárska práca

Študijný program: Aplikovaná informatika

Študijný odbor: Informatika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej informatiky

Školiteľ: Mgr. Dominika Mihálová

Bratislava, 2024

Timotea Chalupová



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Timotea Chalupová  
**Študijný program:** aplikovaná informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** informatika  
**Typ záverečnej práce:** bakalárska  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský  
**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** Token grafy  
*Token graphs*

**Anotácia:** Cieľom bakalárskej práce je implementovať algoritmy na token grafoch. Súčasťou práce je naštudovať a vytvoriť prehľad vlastností token grafov.

**Vedúci:** Mgr. Dominika Mihálová  
**Katedra:** FMFI.KAI - Katedra aplikovanej informatiky  
**Vedúci katedry:** doc. RNDr. Tatiana Jajcayová, PhD.  
**Dátum zadania:** 04.10.2023

**Dátum schválenia:** 05.10.2023  
doc. RNDr. Damas Gruska, PhD.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

## **ČESTNÉ PREHLÁSENIE**

Čestne prehlasujem, že bakalársku prácu som vypracovala samostatne, len s použitím uvedenej literatúry a za pomoci konzultácií mojej školiteľky.

Bratislava, 2024

.....  
Timotea Chalupová

## **POĎAKOVANIE**

...

abstrakt

abstract

# Obsah

Slovník .....	1
Úvod.....	2
1. Východisková kapitola .....	3
1.1. Základné pojmy.....	3
1.1.1 Jednoduchý graf.....	3
1.1.2 Pravidelný graf.....	3
1.1.3 Cesty a cykly.....	3
1.1.4 Hranová a vrcholová súvislosť .....	4
1.1.5 Vyfarbovanie .....	4
1.1.6 Girth.....	4
1.1.7 Euler.....	4
1.1.8 Hamilton .....	4
1.1.9 Isomprphism .....	5
1.1.10 Tree .....	5
1.1.11 Planar .....	5
1.2. Token grafy .....	6
1.2.1. Základné vlastnosti .....	6
1.3. Analýza technológií .....	6
1.3.1. Programovací jazyk .....	6
1.3.2. Knižnice .....	6
2. Návrh .....	8
3. Implementácia.....	9
4. Testovanie.....	10
5. Použitá literatúra .....	11





## SLOVNÍK

Endpointy

Vrcholy  $u$  a  $v$  definujúce hranu  $\{u, v\}$  sa nazývajú endpointy

# ÚVOD

V dnešnom rýchlo vyvíjajúcom sa svete, plnom rôznych informačných technológií, je dôležité hľadať nové algoritmy a dátové štruktúry, ktoré môžu nájsť uplatnenie nielen v teoretickej informatike ale aj v praxi. V matematike, v informatike a rovnako aj v reálnom svete sa veľké množstvo problémov dá znázorniť pohybom objektov po vrcholoch grafu. Z toho dôvodu sú token grafy významnou matematickou štruktúrou, ktorá nachádza využitie v analýze grafov, grafovej teórii a distribuovaných systémoch. Ich výskum a analýza môžu poskytnúť užitočné poznatky pre optimalizáciu algoritmov.

...

V prvej kapitole si objasníme základné pojmy z teórie grafov, ktoré sú nevyhnutné pre porozumenie danej problematike. (Spomenieme termíny ako sú ...). Taktiež sa pozrieme na porovnanie technológií

V druhej kapitole si priblížime

V tretej....

Cieľom je...

# 1. VÝCHODISKOVÁ KAPITOLA

## 1.1. Základné pojmy

V tejto kapitole vysvetlíme základné pojmy a definície, ktoré sú nevyhnutné pre vypracovanie našej práce.

### 1.1.1 Jednoduchý graf

**Definícia:** Jednoduchý graf je usporiadaná dvojica množín  $G = (V, E)$ , kde  $V$  je neprázdna množina vrcholov  $G$ , a  $E$ , množina hrán  $G$ , je množina dvojíc vrcholov. Každá hrana  $G$  môže byť vyjadrená ako  $\{u, v\}$ , kde  $u$  a  $v$  sú odlišné vrcholy, t. j.  $u, v \in V, u \neq v$  [4, s. 497].

Jednoduchý graf je jedným zo základných pojmov v teórii grafov. Neformálne napísane jednoduchý predstavuje matematickú štruktúru, ktorá sa skladá z množiny vrcholov a množiny hrán. V tomto type grafu sa nenachádzajú žiadne zložitejšie prvky, ako sú slučky alebo viacnásobné hrany.

### 1.1.2 Pravidelný graf

**Definícia:** Ak  $v$  je vrcholom grafu  $G$ , potom stupeň  $v$  označený ako  $\deg(v)$ , je počet hrán pripadajúcich na  $v$ , pričom každá slučka sa počíta dvakrát. Jednoduchý graf, v ktorom majú všetky vrcholy rovnaký stupeň sa nazýva pravidelný graf, presnejšie  $k$ -pravidelný graf [4, s. 499].

Pre jednoduchý graf, stupeň vrcholu je číslo vyjadrujúce počet susedov tohto vrcholu. To znamená že v  $k$ -pravidelnom grafe má každý vrchol presne  $k$  susedov, pričom  $k$  je z intervalu  $0$  až  $|V(G)| - 1$ .

### 1.1.3 Cesty a cykly

**Definícia:** Predpokladajme že  $G = (V, E)$  je graf a  $v, w \in V$  sú dvojice vrcholov. Cesta v  $G$  z  $v$  do  $w$  je striedavá postupnosť vrcholov a hrán:  $P = \langle v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k \rangle$  pri čom endpointy hrany  $e_i$  sú vrcholy  $\{v_{i-1}, v_i\}$ , pre  $1 \leq i \leq k$ ,  $v_0 = v$  a  $v_k = w$ . Hovoríme že cesta  $P$  prechádza cez vrcholy  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k$  a prechádza hranami  $e_1, e_2, \dots, e_k$  a cesta má dĺžku  $k$ , nakoľko prechádza  $k$  hranami [4, s. 540]. Cesta sa nazýva cyklus ak

začína a končí v tom istom vrchole, čiže ak  $v = w$  a jej dĺžka je väčšia ako nula, takže ak  $k \geq 1$ . Ak cesta alebo cyklus neobsahuje žiadnu z hrán viac ako jeden raz, hovoríme o jednoduchej ceste respektíve o jednoduchom cykle [5, s. 679].

#### 1.1.4 Hranová a vrcholová súvislosť

**Definícia:** Nech  $G = (V, E)$  je súvislý graf. Množinu  $A$ :

$A \subseteq V$  nazývame vrcholovým rezom grafu  $G$ , ak graf  $(V \setminus A, \{e \mid e \in E, e \cap A = \emptyset\})$  je nesúvislý.

$A \subseteq E$  nazývame hranovým rezom grafu  $G$ , ak graf  $(V, E \setminus A)$  je nesúvislý.

**Definícia:** Minimálna veľkosť hranového rezu sa nazýva hranová súvislosť grafu  $G$ , označujeme  $k_E(G)$ . Graf sa nazýva  $k$ -hranovo súvislý, ak  $k \leq k_E(G)$ . Minimálna veľkosť vrcholového rezu sa nazýva vrcholová súvislosť grafu  $G$ , označujeme  $k_V(G)$ . Graf sa nazýva  $k$ -vrcholovo súvislý, ak  $k \leq k_V(G)$  [6, s. 8].

Hranová súvislosť je teda minimálny počet hrán potrebných vymazať aby sme dostali neprepojené grafy.

Podobne vrcholová súvislosť predstavuje minimálny počet vrcholov, ktorých odstránením dostaneme neprepojené grafy.

#### 1.1.5 Vyfarbovanie

**Definícia:** Pod pojmom vyfarbovanie jednoduchého grafu rozumieme priradenie farby každému vrcholu grafu tak, aby žiadne dva susedné vrcholy nemali priradenú rovnakú farbu [5, s. 727].

#### 1.1.6 Girth

**Definícia:** Girth grafu  $G$  označený ako  $g(G)$  je dĺžka najmenšieho cyklu v  $G$ . Ak neexistuje v  $G$  žiaden cyklus  $g(G) = \infty$  [7].

#### 1.1.7 Euler

...

#### 1.1.8 Hamilton

...

*1.1.9 Isomprphism*

...

*1.1.10 Tree*

...

*1.1.11 Planar*

...

## 1.2. Token grafy

### 1.2.1. Základné vlastnosti

Majme graf  $G$  s  $n$  vrcholmi a  $k$  je kladné celé číslo. Aby sme sa vyhli triviálnym prípadom, budeme predpokladať že  $n \geq k + 1$ . Počet vrcholov  $F_k(G)$  je:

$$|V(F_k(G))| = \binom{n}{k}$$

## 1.3. Analýza technológií

V tejto podkapitole sa zameriame na niekoľko rôznych programovacích jazykov a knižníc, ktoré sme vzájomne porovnávali, aby sme našli najvhodnejšie technológie na implementáciu token grafov.

### 1.3.1. Programovací jazyk

**Python** je vysokoúrovňový interpretovaný jazyk. Medzi jeho základné vlastnosti patrí jednoduchá syntax, ktorá zlepšuje čitateľnosť. Výhodou je veľké množstvo knižníc slúžiacich na prácu s webovými aplikáciami, s vývojom hier ale aj databázami a mnoho ďalšími. Taktiež je multiplatformový, takže aplikácia naprogramovaná v tomto jazyku môže byť spustená na zariadeniach s rôznymi operačnými systémami bez potreby upravovať kód. Python je na rozdiel od staticky typovaných jazykov, kde je potrebné vopred deklarovать typy všetkých dát, typovaný dynamicky [1].

### 1.3.2. Knižnice

**NetworkX** je open-source knižnica pre jazyk Python, používaná najmä na vytváranie, manipuláciu a študovanie štruktúry, dynamiky a funkcií grafových štruktúr. Poskytuje veľké množstvo algoritmov na analýzu, ako sú vzdialenosti medzi uzlami, hľadanie najkratšej cesty, hľadanie najmenšieho cyklu a mnoho ďalších. Zaujímavosťou je, že vrcholom grafu môže byť čokoľvek, od textového reťazca až po obrázky [2].

**Tkinter** je open-source knižnica pre jazyk Python, určená predovšetkým na tvorbu používateľského rozhrania pre desktopové aplikácie. Vývojárom poskytuje množstvo nástrojov na vytváranie, manipuláciu a správu grafických komponentov, ako sú napríklad tlačidlá alebo polia na zadávanie textu. Tkinter je schopný práce s viacvláknovým prostredím, čo umožňuje efektívne riadenie viacerých úloh súčasne. Je obľúbený hlavne vďaka jednoduchej syntaxi a intuitívnemu používaniu [3].

## **1.4. Analýza existujúcich systémov**

...

### *1.4.1. Gephi*

...

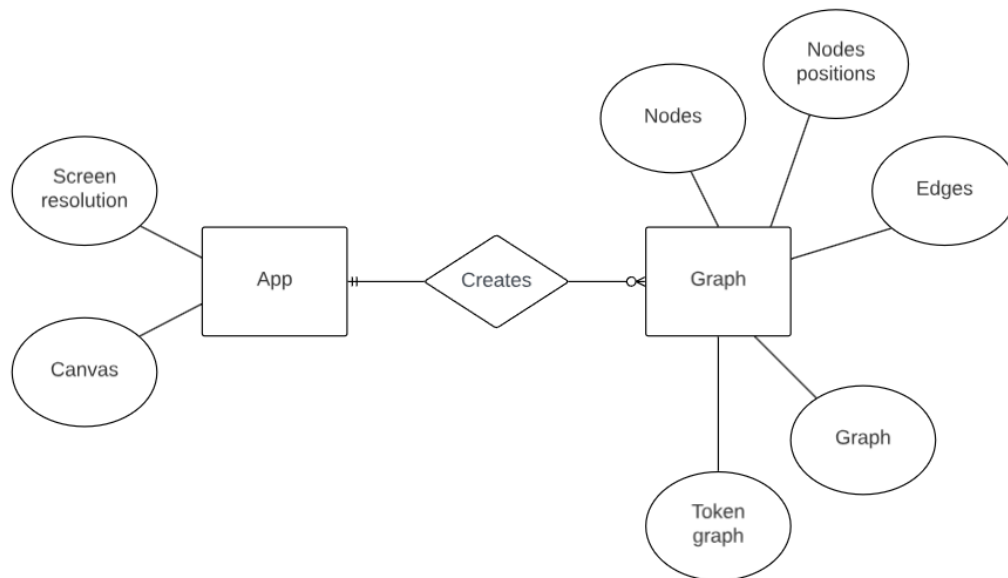
### *1.4.2. Cytoscape*

...



## 2. NÁVRH

ERD



### **3. IMPLEMENTÁCIA**

## **4. TESTOVANIE**

## 5. POUŽITÁ LITERATÚRA

- [1] <https://www.python.org/doc/>
- [2] <https://networkx.org/documentation/stable/>
- [3] <https://docs.python.org/3/library/tkinter.html>
- [4] kniha
- [5] Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications
- [6] <https://edu.fmph.uniba.sk/~winczer/diskretna/pred8z03.pdf>
- [7] [http://people.qc.cuny.edu/faculty/christopher.hanusa/courses/634sp12/Documents/634sp12\\_ch1-4.pdf](http://people.qc.cuny.edu/faculty/christopher.hanusa/courses/634sp12/Documents/634sp12_ch1-4.pdf)
- [8]
- [9]
- [10]
- [11]
- [12]
- [13]
- [14]
- [15]
- [16]
- [17]
- [18]
- [19]
- [20]
- [21]

[22]

[23]