

Výroková logika - úvod

Úvod do výpočtovej logiky

Jozef Šiška

2013/2014

Syntax

Formula

Štruktúra

Sémantika

Boolovské ohodnotenie

Interpretácia

Splniteľnosť, tautológie, vyplývanie

Vlastnosti

Syntax

Definícia (Jazyk)

Jazyk prvorádovej logiky bude pozostávať z nasledovných symbolov:

- ▶ spočítateľná množina symbolov pre *výrokové premenné* (*Var*):
 p_1, p_2, \dots
- ▶ symboly pre logické spojky: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- ▶ pomocné symboly: $(,)$

Definícia (Formula)

Formula je postupnosť symbolov vytvorená nasledovnými rekurzívnymi pravidlami:

- ▶ Každá výroková premenná je formula (atomická formula).
- ▶ Ak A je formula, tak aj $\neg A$ je formula.
- ▶ Ak A a B sú formuly, tak aj $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú formuly.

Množinu všetkých formúl budeme označovať E .

Formula – alternatívna definícia

Definícia (Vytvárajúca postupnosť)

Vytvárajúca postupnosť je ľubovoľná konečná postupnosť, ktorej každý člen je výroková premenná, alebo má tvar $\neg A$, pričom A je nejaký predchádzajúci člen postupnosti, alebo má jeden z tvarov $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, kde A a B sú nejaké predchádzajúce členy postupnosti.

Definícia (Formula)

Postupnosť symbolov A je formula, ak existuje vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je A . Túto postupnosť voláme tiež vytvárajúca postupnosť pre A .

Jednoznačnosť rozkladu

Pre každú formulu X platí práve jedna z nasledujúcich možností:

- ▶ X je výroková premenná.
- ▶ Existuje práve jedna formula A taká, že $X = \neg A$.
- ▶ Existuje práve jedna dvojica formúl A, B a jedna spojka $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ taká, že $X = (AbB)$.

Definícia (Vytvárajúci strom)

Vytvárajúci strom pre formulu X je binárny strom T obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- ▶ v koreni T je formula X ,
- ▶ ak vrchol obsahuje formulu $\neg A$, tak má práve jedného syna, ktorý obsahuje formulu A ,
- ▶ ak vrchol obsahuje formulu (AbB) , kde b je jedna z binárnych spojok, tak má dvoch synov, pričom ľavý syn obsahuje formulu A a pravý formulu B ,
- ▶ vrcholy obsahujúce výrokové premenné sú listami.

Sémantika

- ▶ Syntax
 - ▶ pravidlá, ako formuly vyzerajú, ako ich spájame
 - ▶ sú to len reťazce symbolov, bez nejakého významu
- ▶ Sémantika
 - ▶ prirad'uje formulám zmysel, význam
 - ▶ pravdivostná hodnota, ohodnotenie formúl
 - ▶ chceme ale aby spĺňalo nejaké podmienky (vzhľadom na štruktúru formuly)

Definícia (Ohodnotenie)

Ohodnotenie množiny formúl S je zobrazenie v , ktoré každej formule Z z S priradí jednu z pravdivostných hodnôt t (pravda) a f (nepravda). Hovoríme, že formula X je *pravdivá pri v* , ak v prirad'uje X hodnotu t ($v(X) = t$), a *nepravdivá pri v* ak v prirad'uje X hodnotu f ($v(X) = f$).

Definícia (Priama podformula)

- ▶ Priamou podformulou $\neg A$ je formula A .
- ▶ Priamymi podformulami $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú formuly A a B .

Definícia (Podformula)

- ▶ Ak X je priama podformula Y , tak X je podformula Y .
- ▶ Ak X je podformula Y a Y je podformula Z , tak X je podformula Z .

Definícia (Stupeň formuly $\deg(X)$)

- ▶ Premenná je nultého stupňa.
- ▶ Ak A je n -tého stupňa, tak $\neg A$ je $(n + 1)$ -ho stupňa.
- ▶ Ak A je n_1 -ho stupňa a B je n_2 -ho stupňa, tak $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú $(n_1 + n_2 + 1)$ -ho stupňa.

Boolovské ohodnotenie

Definícia

Ohodnotenie v množiny E sa nazýva *boolovské*, ak pre každú formulu A a B z E platí:

- ▶ Formula $\neg A$ je pravdivá pri v (má hodnotu t) ak A je nepravdivá pri v , a naopak.
- ▶ Formula $(A \wedge B)$ je pravdivá pri v ak A aj B sú pravdivé pri v , ináč je $(A \wedge B)$ nepravdivá.
- ▶ Formula $(A \vee B)$ je pravdivá pri v ak aspoň jedna z A a B je pravdivá pri v , ináč je $(A \vee B)$ nepravdivá.
- ▶ Formula $(A \rightarrow B)$ je nepravdivá pri v ak A je pravdivá pri v a B je nepravdivá pri v , ináč je $(A \rightarrow B)$ pravdivá.

Definícia

Nech $S_1 \subset S_2$ sú množiny formúl, nech v_1 je ohodnotenie formúl z S_1 a v_2 ohodnotenie formúl z S_2 . Hovoríme, že v_2 je *rozšírením* v_1 ak sa zhodujú na každej formule X z S_1 (t.j. $v_1(X) = v_2(X)$).

Definícia

Interpretácia je ohodnotenie množiny výrokových premenných (Var).

Pozorovanie

Každá interpretácia v_0 sa dá rozšíriť na práve jedno boolovské ohodnotenie v (množiny E).

Definícia

Hovoríme, že formula X je pravdivá (nepravdivá) pri interpretácii v_0 ak je pravdivá (nepravdivá) pri jej rozšírení v na množinu všetkých formúl E .

Pozorovanie

Každá interpretácia v_0 sa dá rozšíriť na práve jedno boolovské ohodnotenie v (množiny E).

Dôkaz.

- ▶ že sa interpretácia dá rozšíriť nanajvýš na jedno boolovské ohodnotenie vyplýva z predchádzajúceho pozorovania.
- ▶ že sa vôbec dá rozšíriť na nejaké ohodnotenie ukážeme tak, že indukčne podľa stupňa formuly zostrojíme ohodnotenie v :
 - ▶ $v(X) = v_0(X)$ pre všetky $X \in Var$
 - ▶ Nech X je formula stupňa $n > 0$. Táto formula musí byť tvaru $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ alebo $(A \rightarrow B)$, pričom $\deg(A) < n$ a $\deg(B) < n$. Podľa indukčného predpokladu teda existuje ohodnotenie $v(A)$ a $v(B)$. Rozobraním prípadov v definícii boolovského ohodnotenia zistíme, že existuje práve jeden spôsob ako priradiť hodnotu $v(X)$ formule (X) .

□

Pozorovanie

Ak sa dve boolovské ohodnotenia zhodujú na množine všetkých premenných, potom sa zhodujú na množine všetkých formúl E .

Dôkaz.

Tvrdenie očividne platí pre formuly stupňa 0 (premenné). Rozobraním jednotlivých prípadov v definícii boolovského ohodnotenia ľahko overíme, že ak sa dve ohodnotenia zhodujú na nejakých formulách A a B , potom sa musia zhodovať aj na formulách $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ (ktoré majú stupeň o jedna väčší ako súčet stupňov A a B). Indukciou na stupeň formuly teda dostávame, že sa musia zhodovať na všetkých formulách z E . □

Definícia (Tautológia)

Formula X je *tautológia* (značíme aj $\models X$) vtt X je pravdivá pri každom boolovskom ohodnotení (množiny E).

Definícia (Splniteľnosť)

Formula X je výrokovologicky *splniteľná* vtt X je pravdivá pri aspoň jednom boolovskom ohodnotení.

Množina formúl S je *súčasne výrokovologicky splniteľná* vtt existuje aspoň jedno boolovské ohodnotenie, pri ktorom sú všetky formule z S pravdivé. Hovoríme, že takého ohodnotenie *spĺňa* množinu S alebo aj, že je *modelom* S .

Definícia (Vyplývanie)

Z množiny formúl S *výrokovologicky vyplýva* formula X (X je *výrokovologickým dôsledkom* S , značíme $S \models X$) ak X je pravdivá pri každom boolovskom ohodnotení, ktoré spĺňa S .

Definícia (Ekvivalencia)

Dve formuly X a Y sú *výrokovologicky ekvivalentné* vtt X a Y sú pravdivé pri tých istých boolovských ohodnoteniach.

Pozorovanie

Formula X je tautológia vtt keď $\neg X$ je nespĺniteľná.

Dôkaz.

(\Rightarrow) Nech X je tautológia, teda je pravdivá pri každom boolovskom ohodnotení. To znamená, že $\neg X$ je nepravdivá pri každom boolovskom ohodnotení (podľa definície bool. ohodnotenia) a teda neexistuje žiadne ohodnotenie, pri ktorom by $\neg X$ bola pravdivá.

(\Leftarrow) Opačne, nech $\neg X$ je nespĺniteľná. To znamená, že pri každom boolovskom ohodnotení je $\neg X$ nepravdivá a podľa definície bool. ohodnotenia je teda X pri každom ohodnotení pravdivá a teda je tautológia. \square

Pozorovanie

Pravdivostná hodnota formuly X závisí iba od ohodnotenia (konečne veľa) premenných, ktoré sa v nej vyskytujú.

Dôkaz.

Uvažujme vytvárajúci strom pre formulu X . Očividne ohodnotenie nejakého vrcholu závisí iba od ohodnotenia jeho potomkov. \square

Vieme teda vždy (v konečnom čase) rozhodnúť, či je formula tautológia, či sú dve formuly ekvivalentné, alebo či z konečného počtu formúl vyplýva nejaká formula: stačí nám vždy skontrolovať 2^n možných ohodnotení.

Pozorovanie

Formula X výrokovologicky vyplýva z množiny formúl

$S = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ *vtt keď je množina*

$S' = \{X_1, X_2, \dots, X_n, \neg X\}$ *nesplniteľná.*

Dôkaz.

(\Rightarrow) Predpokladajme, že X vyplýva z množiny S , nech v je nejaké boolovské ohodnotenie. Potrebujeme ukázať, že v nespĺňa S' .

Máme dve možnosti:

- ▶ Ak v nespĺňa S , tak nespĺňa ani S' .
- ▶ Ak v spĺňa S , tak X musí byť pravdivá pri v (definícia splniteľnosti). To znamená, že $\neg X$ je nepravdivá pri v a teda v nespĺňa S' .

(\Leftarrow) Opačne, nech S' je nespĺniteľná a nech v je nejaké boolovské ohodnotenie. v teda nespĺňa S' . Potrebujeme ukázať, že ak v spĺňa S , tak potom X je pravdivé pri v . Ak v spĺňa S , tak každé X_i je pravdivé pri v . Keďže ale v nespĺňa S' , musí byť $\neg X$ (jediná zostávajúca formula z S') nepravdivé pri v , čo znamená, že X je pravdivé pri v . \square