Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

Кафедра системного программирования

Программная инженерия

Суханова Анжела Кирилловна

Реализация элиминации кванторов для арифметики Пресбургера, обогащённой функцией возведения двойки в степень

Производственная практика

Научный руководитель:
ассистент кафедры ИАС Смирнов К. К.

Санкт-Петербург
2021

Оглавление

Введение

Современный этап развития индустрии программных систем характеризуется значительным усложнением процесса их разработки, что приводит к увеличению числа ошибок, возникающих при проектировании программного обеспечения. В таких условиях крайне важными оказываются проверка и доказательство корректности разрабатываемой программы, ведь они необходимы для контроля соответствия поведения программы ожидаемому и обеспечения её безопасности. Существуют разные методы, направленные на разработку качественного программного обеспечения, отвечающего поставленным требованиям: одним из них является формальная верификация.

Формальная верификация — это доказательство соответствия или несоответствия программы её формальному описанию или, что более распространено на практике, проверка формализованных условий, описывающих ожидаемое или недопустимое поведение программы (часто у разработчиков нет формального описания программы, но есть представление о «запрещённых» состояниях, в которые она не должна попадать). В основу этой проверки нередко ложится решение задачи выполнимости формул в теориях (SMT[1]), так как условия программы и ограничения, накладываемые на неё требованиями, могут быть сведены к определению выполнимости логических формул. Существуют SMT-решатели (SMT-солверы), автоматически определяющие выполнимость формулы в теориях. SMT-решатели используются инструментами формальной верификации, такими как Frama-C, BLAST, Java Pathfinder и другие.

Распространённым подходом к решению задачи выполнимости формул в теориях является bit-blasting. Он заключается в сведении SMT-задачи к соответствующей задаче выполнимости булевых формул, что достигается введением пропозициональных переменных для всех битов исходных термов. К сожалению, этот способ очень трудоёмкий. В ка-

[1]SMT — задача выполнимости формул в логике первого порядка, где функциональные и предикатные символы интерпретируются согласно конкретным теориям. В дальнейшем будет использоваться эта аббревиатура.

честве альтернативного подхода к решению SMT-задачи (или способа сократить bit-blasting) может быть рассмотрено упрощение исходных формул.

Обычно легче определить, выполнима ли формула без кванторов, поэтому полезно уметь преобразовывать формулы, содержащие кванторы, в семантически эквивалентные бескванторные. Процесс такого преобразования называется элиминацией кванторов (quantifier elimination, QE)[2].

Так как в основе архитектуры компьютера лежат операции с битовыми векторами, то необходимо уметь решать SMT в теории битовых векторов, что вызывает интерес к упрощающим это решение алгоритмам исключения кванторов из формул над двоичными векторами. Операции над последними можно свести к вычислениям в арифметике Пресбургера[3], обогащённой функцией 2^x. Доказательство того, что эта теория допускает элиминацию кванторов, а также алгоритм элиминации, сопутствующий построению доказательства, впервые были представлены А. Л. Семёновым [7], а затем более подробно описаны в других работах [4, 6]. Однако идеи этого алгоритма не использовались для реализации элиминации кванторов в теории битовых векторов, чему и посвящена эта работа.

[2]Теория T допускает элиминацию кванторов, если для любой формулы этой теории ϕ существует формула ψ без кванторов, такая что $T \vDash \forall y.\phi(y) \leftrightarrow \psi(y)$

[3]Арифметика Пресбургера — это теория первого порядка, описывающая натуральные числа со сложением и названная в честь предложившего её Мойжеша Пресбургера.

1. Постановка задачи

Целью данной работы является реализация элиминации кванторов для арифметики битовых векторов на основе элиминации кванторов в арифметике Пресбургера, расширенной функцией возведения двойки в степень[4]. Для её достижения были поставлены следующие задачи.

- Выбор SMT-решателя.
- Изучение алгоритма элиминации кванторов для расширенной арифметики Пресбургера и реализация его в рамках арифметики битовых векторов и выбранного SMT-решателя.
- Экспериментальное исследование элиминации: сравнение времени работы и длины результирующей формулы реализации и поддерживающего элиминацию кванторов SMT-решателя.

[4]Далее она иногда будет упоминаться как «расширенная арифметика Пресбургера», но имеется в виду, что теория расширяется функцией 2^x.

2. Теоретический обзор

2.1. Элиминация кванторов для арифметики битовых векторов

В настоящее время большинство SMT-решателей работают только с бескванторными формулами. Арифметику битовых векторов с кванторами поддерживают SMT-решатели Boolector, CVC4, Yices[5], Z3 и Q3B [8], однако процесс элиминации ни одного из них не основывается на идеях элиминации кванторов для арифметики натуральных чисел, расширенной 2^x.

2.2. Обогащённая арифметика Пресбургера и теория битовых векторов

Говоря о расширенной арифметике Пресбургера, мы будем иметь в виду арифметику со следующей сигнатурой: $\langle 0, 1, +, 2^x, \leqslant \rangle$. Запись вида $1 + 1 + \cdots + 1$ обозначим соответствующим натуральным числом. Воспользуемся некоторыми обозначениями, введёнными на [6, p. 2-3, 5].

- $x < y \leftrightarrow x + 1 \leqslant y$ и $x \geqslant (>) y \leftrightarrow y \leqslant (<) x$.
- $x - y = 0$, если $x < y$, и $x - y = x - y$, если $y \leqslant x$.
- $n \cdot x$, где $n \in \mathbb{N}^*$ — обозначение $x + x + \cdots + x$ (n раз).
- $t_1 + z \cdot x \leqslant (=, \geqslant) t_2$, где $z \in \mathbb{Z}$, означает, что $t_1 \leqslant (=, \geqslant) t_2 + (-z) \cdot x$ при $z < 0$.
- $\frac{x}{n} = y \leftrightarrow x = n \cdot y + z$, где $0 \leq z < n$.
- $l_2(x) = y \leftrightarrow 2^y \leqslant x < 2^{y+1}$.
- $x \equiv_d m$, где $0 \leqslant m \leqslant d - 1$, если $x - \frac{x}{d} \cdot d = m$.

[5] В отличие от остальных упомянутых решателей Yices работает не с произвольными формулами, а только с формулами вида $\exists x.\ \forall y.\ Q(x, y)$ [8].

Таблица 1 — Сравнение арифметики битовых векторов размер n и обогащённой арифметики Пресбургера

Обогащенная арифметика Пресбургера	Теория битовых векторов (синтаксис SMT-LIB)
Носитель: $\mathbb{N}$	Носитель: битовые векторы фикс. размеров (_ BitVec n)
$t_1 \leqslant t_2$	bvslte t_1 t_2 (bvulte t_1 t_2)
$t_1 + t_2$	bvadd t_1 t_2
2^t	bvshl 1 t
	bvand, bvor, bvnot, bvslt/bvult, bvsgt(e)/bvugt(e) и другие

Несмотря на интуитивность сведения формул в арифметике битовых векторов к формулам в арифметике Пресбургера, расширенной двоичной экспонентой, эти теории имеют существенные различия (таблица 1).

Во-первых, множество натуральных чисел не ограничено сверху, а носитель теории битовых векторов — это множество двоичных векторов размера n. Сведение формул в арифметике битовых векторов размера n к формулам в расширенной арифметике Пресбургера может быть осуществлено по следующим правилам (t_i — терм, x — переменная в теории битовых векторов):

$$Tr(\varphi \wedge \psi) = Tr(\varphi) \wedge Tr(\psi)$$
$$Tr(\varphi \vee \psi) = Tr(\varphi) \vee Tr(\psi)$$
$$Tr(\varphi \rightarrow \psi) = Tr(\varphi) \rightarrow Tr(\psi)$$
$$Tr(\neg\varphi) = \neg Tr(\varphi)$$

$$Tr(t_1 \ op \ t_2) = (Tr(t_1) \ op \ Tr(t_2)) \ mod \ 2^n \tag{1}$$

$$Tr(x) = x$$

Заметим, что по рассматриваемому алгоритму можно проэлиминировать некоторое подмножество формул в арифметике битовых векторов без сведения к арифметике натуральных чисел, но оно весьма ограничено.

Во-вторых, битовые векторы могут быть знаковыми и беззнаковыми, из-за чего у некоторых операций с ними существует две версии. Однако числа, соответствующие знаковым битовым векторам, легко могут быть выражены через числа, соответствующие беззнаковым, по следующему неформальному правилу:

$$x_s = ite(x_u < 2^{n-1},\ x_u,\ x_u - 2^n)$$

Также в арифметике двоичных векторов есть множество функции и предикатов, не имеющих аналогов в обогащённой арифметике Пресбургера. Эта проблема может быть решена рассмотрением таких функций и предикатов в отдельности и поиском для каждого из них эквивалентной последовательности операций в арифметике Пресбургера, расширенной 2^x.

2.3. Алгоритм элиминации кванторов для расширенной арифметики Пресбургера

Заметим, что формулу, содержащую квантор всеобщности, $\forall x.F$ можно заменить эквивалентной ей формулой $\neg\exists x.\neg F$, а все кванторы существования можно элиминировать последовательно от самого внутреннего к внешнему. Также любая бескванторная формула первого порядка может быть представлена в конъюктивной нормальной форме. Таким образом, алгоритм элиминации сводится к устранению квантора существования из формулы вида $\exists x.\theta(x, \overline{y})$, где $\overline{y}$ — свободные переменные, а сама функция $\theta(x, \overline{y})$ — конъюнкт атомарных формул. Это устранение квантора будет построено по материалу, изложенному в [6]. Термины и обозначения согласованы с этой работой.

Первым шагом в элиминации кванторов для рассматриваемой арифметики является преобразование формулы под квантором в дизъюнкт конъюнктов неравенств между термами следующего вида:

- $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 2^{d \cdot x_i} + \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot x_i + c$, где a_i, b_i, $c \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$, а x_i — связанные переменные, причём x_0 — обозначение x (будем называть их S-термами);
- термы сигнатуры арифметики Пресбургера, обогащённой функцией возведения двойки в степень, без связанных переменных (будем называть их L-термами).

Это преобразование осуществляется посредством введения новых переменных, связанных кванторами существования — отсюда и возникают x_i (подробнее об этом шаге можно прочитать на [6, p. 5]).

Существует два варианта вида преобразованной формулы.

- x появляется во всех неравенствах линейно. Тогда можно считать, что формула под кванторами выглядит следующим образом:

  $$\bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant q, 1 \leqslant k \leqslant s, 1 \leqslant i \leqslant p} f_j(\overline{x}) + g_j(\overline{y}) \leqslant d_k \cdot x \leqslant f_i(\overline{x}) + g_i(\overline{y}),$$

  где $d_k \in \mathbb{Z}$ и зависит от i и j, $\overline{y}$ — свободные переменные, а $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то есть $g_j(\overline{y})$, $g_i(\overline{y})$ — L-термы, а $f_j(\overline{x})$, $f_i(\overline{x})$ — S-термы.

- Хотя бы в одно неравенство x входит в экспоненциальном терме, то есть существует неравенство, имеющее вид:

  $$a_0 \cdot 2^{d \cdot x_0} + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 2^{d \cdot x_i} + \sum_{j=0}^{n} b_j \cdot x_j + c \leqslant t(\overline{y}), \tag{2}$$

  где $t(\overline{y})$ — L-терм, a_i, b_j, $c \in \mathbb{Z}$, $a_0 \neq 0$, $d \in \mathbb{N}^*$.

Таким образом, реализация подразумевает разбор двух случаев: линейного и экспоненциального вхождения x.

2.3.1. Случай линейного вхождения связанной переменной

Работа над этим случаем была начата с упрощённого варианта, а именно с элиминации кванторов для формул с единственной связанной переменной:

$$\exists x. \bigwedge_{1\leqslant j\leqslant q, 1\leqslant k\leqslant s, 1\leqslant i\leqslant p} g_j(\overline{y}) \leqslant d_k \cdot x \leqslant g_i(\overline{y}), \text{ где } q,\ p \in \mathbb{N}.$$

Если для всех k $d_k = 1$, то эквивалентная ей формула без квантора:

$$\bigwedge_{1\leqslant j\leqslant q, 1\leqslant i\leqslant p} g_j(\overline{y}) \leqslant g_i(\overline{y}).$$

Если $\exists k$ $d_k > 1$, то неточность предложенного алгоритма (её описание можно найти в 2.4) не позволяет нам найти эквивалентную формулу без квантора.

2.3.2. Случай экспоненциального вхождения связанной переменной

Опишем то подмножество этого случая, которое не требует применения операции сведения (1). С этого подмножества была начата работа над экспоненциальным случаем.

Введём обозначение для формулы под квантором из прошлого случая:

$$\psi(x, \overline{y}) = \bigwedge_{1\leqslant j\leqslant q, 1\leqslant k\leqslant s, 1\leqslant i\leqslant p} g_j(\overline{y}) \leqslant d_k \cdot x \leqslant g_i(\overline{y}).$$

Рассмотрим следующее подмножество формул, в которых элиминируемая переменная встречается в экспоненциальном терме

$$\exists x. \psi(x, \overline{y}) \wedge \bigwedge_i (2^x \leqslant g_i(\overline{y}) \vee g_i(\overline{y}) \leqslant 2^x).$$

Обозначим формулу $2^x \leqslant g_i(\overline{y}) \vee g_i(\overline{y}) \leqslant 2^x$ под квантором $\tau_i(x, \overline{y})$.

Заметим, что формулы $2^x \leqslant g_i(\overline{y})$ и $g_i(\overline{y}) \leqslant 2^x$ — частные случаи формулы (2). Для обеих верно $n = 0$, $d = 1$, $b_0 = 0$, $c = 0$, но в первой $a_0 = 1$ и $l_2(a_0) = 0$, а во второй $a_0 = -1$. Для них по [6, p. 7] верно следующее:

- $J = \{0 \ldots n\} = \{0\}$, $J_1 = \{j \in J : b_j \geqslant 0\} = \{0\}$;

- $b_+ < 0$, так как

$$b_+ = \begin{cases} 2 \cdot (l_2(\sum\limits_{j \in J_1} b_j) + 3), & J_1 \neq \varnothing \\ 0, & J_1 = \varnothing \end{cases}$$

- $b_- = 0$, так как

$$b_- = \begin{cases} 2 \cdot (l_2(\sum\limits_{j \in J \setminus J_1} -b_j) + 4), & J \setminus J_1 \neq \varnothing \\ 0, & J \setminus J_1 = \varnothing \end{cases}$$

- $c_+ = 0$, так как

$$c_+ = \begin{cases} l_2(c) + 3, & c > 0 \\ 0, & c \leqslant 0 \end{cases}$$

- $c_- < 0$, так как

$$c_- = \begin{cases} 0, & c > 0 \\ l_2(-c) + 4, & c \leqslant 0 \end{cases}$$

Таким образом, $N = max\{b_+,\ b_-,\ c_+,\ c_-\} = 0$. Искомая формула без квантора в данном случае:

$$\bigwedge_i \bigvee_{0 \leqslant k \leqslant M} \tau_i(k, \overline{y}),$$

где $M = ite(a_0 > 0,\ max\{N,\ l_2(g_i(\overline{y})),\ l_2(g_i(\overline{y})) + 1\},\ N)$.

2.4. Проблема рассматриваемого алгоритма

В процессе изучения алгоритма элиминации кванторов для расширенной арифметики Пресбургера была обнаружена неточность, ставящая под сомнение завершаемость описанных в [6] действий.

По предложенному методу входная формула приводится к определённому виду, для чего вводится конечное число новых переменных, связанных кванторами существования. Утверждается, что после этого переменные, требующие элиминации, вводится не будут, и так как на каждой итерации алгоритма происходит устранение одной из них, то мы получим искомую формулу за конечное число шагов.

Термы вида $\tau(x_i',\ \overline{y}) \equiv_d m$ (где x_i' — переменная, связанная квантором существования), в некоторых случаях возникающие в формуле по завершении итерации, приводятся к $\tau(x_i',\ \overline{y}) - \frac{\tau(x_i',\ \overline{y})}{d} \cdot d = m$. Частное $\frac{\tau(x_i',\ \overline{y})}{d}$ должно быть заменено на переменную, связанную $\exists$. Таким образом, некоторые формулы требуют повторного введения переменных под кванторами.

Продемонстрируем проблему на примере.

Рассмотрим формулу $\exists x_0.(\frac{2 \cdot x_0}{3} \leqslant 2 \cdot x_0 \leqslant 10)$ и воспроизведём для неё шаги по элиминации квантора.

- *Первый шаг* [6, p. 5]. Обозначив $\frac{2 \cdot x_0}{3}$ новой связанной переменной x_1 по пункту (3), получаем:

$$\exists x_0.\exists x_1. \bigvee_{0 \leqslant m < 3} (x_1 \leqslant 2 \cdot x_0 \leqslant 10 \wedge 3 \cdot x_1 + m = 2 \cdot x_0)$$

$$\leftrightarrow$$

$$\exists x_0.\exists x_1. \bigvee_{0 \leqslant m < 3} (x_1 \leqslant 2 \cdot x_0 \leqslant 10 \wedge 3 \cdot x_1 + m \leqslant 2 \cdot x \leqslant 3 \cdot x_1 + m)$$

  Вид формулы позволяет перейти ко второму шагу. Введём обозначение:

$$\theta_0(x_0, x_1) = \bigvee_{0 \leqslant m < 3} (x_1 \leqslant 2 \cdot x_0 \leqslant 10 \wedge 3 \cdot x_1 + m \leqslant 2 \cdot x_0 \leqslant 3 \cdot x_1 + m)$$

- *Второй шаг* [6, p. 5]. Рассмотрим все перестановки $\{x_0, x_1\}$: для каждой перестановки σ определена $\theta_{0,\sigma}(x_0, x_1)$.

- *Третий шаг* [6, p. 6]. Рассмотрим случай $\sigma = id$, $m = 0$:

$$x_1 \leqslant 2 \cdot x_0 \leqslant 10 \wedge 3 \cdot x_1 \leqslant 2 \cdot x_0 \leqslant 3 \cdot x_1 \wedge x_1 \leqslant x_0. \tag{3}$$

Переменная x_0 встречается в каждом неравенстве линейно, то есть нас интересует случай A).

НОК $d = 2$. Поскольку $d = 2^r \cdot d_0$, то $r = 1$, $d_0 = 1$, $\phi(d_0) = 1$, $0 \leqslant k < 2$.

Домножим обе части нерванства $x_1 \leqslant x_0$ на d и произведём замену $x_1 \to 1 + k + x_1'$. Теперь формула 3 выглядит следующим образом:

$$\bigvee_{0 \leqslant k < 2} (1 + k + x_1' \leqslant 2 \cdot x_0 \leqslant 10 \wedge 3 \cdot (1 + k + x_1') \leqslant 2 \cdot x_0 \leqslant 3 \cdot (1 + k + x_1') \wedge$$
$$2 \cdot (1 + k + x_1') \leqslant 2 \cdot x_0)$$

Так как $1 + k + x_1' < 2 \cdot (1 + k + x_1') < 3 \cdot (1 + k + x_1')$, то эквивалентная формула без x_0 это

$$\bigvee_{0 \leqslant k < 2} (3 \cdot (1 + k + x_1') \leqslant 10 \wedge 2 \leqslant 10 - 3 \cdot (1 + k + x_1') \wedge (\bigvee_{0 \leqslant c < 2} 10-$$
$$3 \cdot (1 + k + x_1') = c \ \wedge (\bigvee_{0 \leqslant c' \leqslant c} 3 \cdot (1 + k + x_1') \equiv_2 2 - c')))$$

Перейдём к элиминации x_1'. Терм $3 \cdot (1 + k + x_1') \equiv_2 2 - c'$ эквивалентен

$$3 \cdot (1 + k + x_1') - \frac{3 \cdot (1 + k + x_1')}{2} \cdot 2 = 2 - c'$$

По пункту (3) [6, p. 5] производится замена $\frac{3 \cdot (1+k+x_1')}{2}$ на новую переменную x_2, связанную квантором существования:

$$3 \cdot (1 + k + x_1') = (2 - c') \cdot 2 + x_2.$$

Таким образом, мы вынуждены ввести новую переменную.

В настоящее время по описанной проблеме ведётся переписка с Франсуазой Поинт, автором статьи [6].

Из-за обнаруженной неточности не совсем понятно, как должно осуществляться сведение формул в теории битовых векторов к формулам в расширенной арифметике Пресбургера, так как по правилу (1) возникают описанные термы со сравнением по модулю. Пока сведение одной арифметики к другой не получило реализацию.

3. Описание реализации

3.1. SMT-решатель

В настоящее время существует несколько поддерживаемых, конкурентоспособных SMT-решателей, работающих с двоичными векторами: Boolector, Z3, CVC4 и другие. В рамках этой курсовой работы будет использоваться Boolector, так как он специализируется на теории битовых векторов, а также в течение многих лет побеждал в The SMT Competition[6] (за исключением 2020-го года, в котором актуальная версия Boolector-а не принимала участие в соревновании).

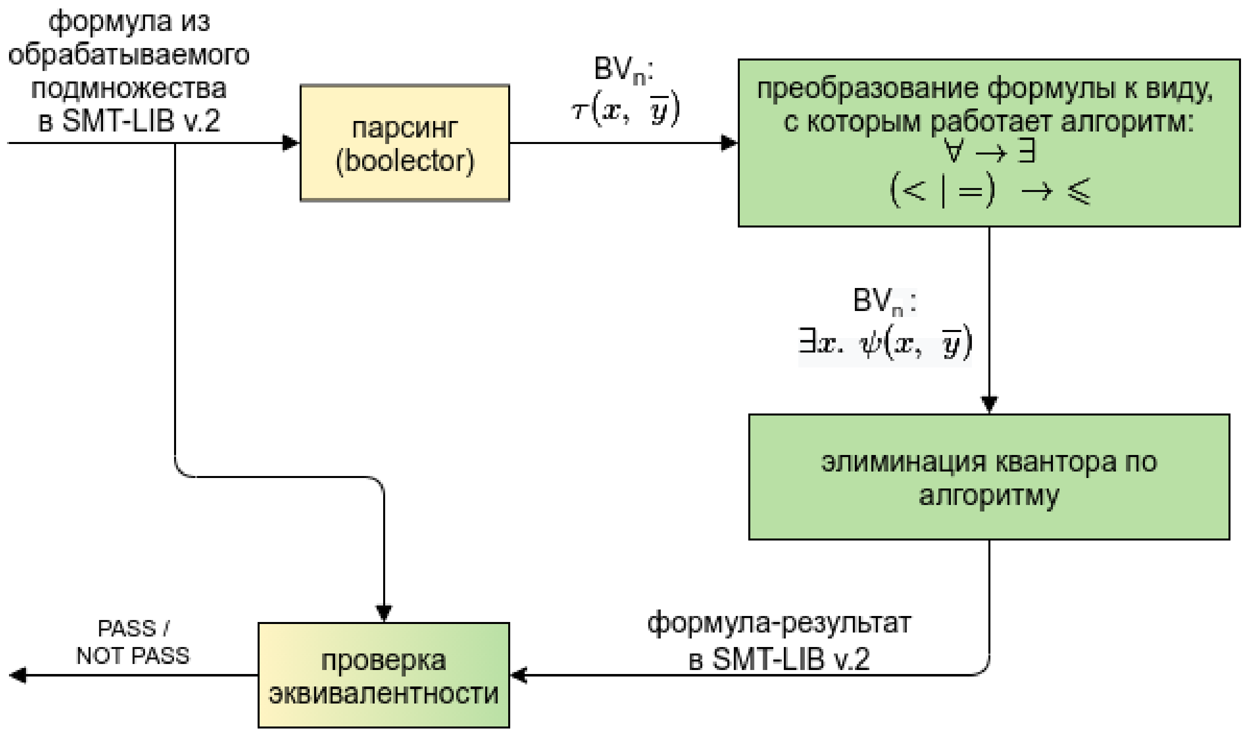
3.2. Формат ввода формул

Изначально в качестве формата ввода рассматривались стандарты Btor [2] и Btor2 [3]. Оба формата не поддерживают работу с кванторами, и хотя это неудобство может быть преодолено (например, договорённостью, что первые введённые переменные связаны кванторами существования), было принято решение работать со стандартом SMT-LIB v.2 [1], в котором можно записывать формулы с кванторами. Парсеры всех вышеупомянутых стандартов записи встроены в Boolector.

Работая с Boolector-ом, можно задать любую формулу над битовыми векторами (даже с кванторами) программно, используя функции решателя, но такой ввод не очень удобен. К тому же важно, чтобы программа могла работать с общепринятым, распространённым форматом, ведь в нём записывались и пишутся условия и ограничения, накладываемые на реальное программное обеспечение. Идея написать собственный парсер выражений над битовыми векторами также была отброшена из-за неоправданной трудоёмкости.

[6] The SMT Competition или SMT-COMP — ежегодное соревнование между SMT-солверами: https://smt-comp.github.io/2020/index.html

Рисунок 1 — Архитектура решения



3.3. Архитектура реализации

Для достижения поставленной цели была разработана следующая архитектура (рис. 1).

В настоящий момент алгоритм элиминации кванторов реализован для следующих формул теории битовых беззнаковых векторов (вместо $\leqslant$ может быть $<$ или $=$, а вместо $\exists$ — $\forall$):

1. $\exists x. \bigwedge_{i,j}(g_i(\overline{y}) \leqslant x \wedge x \leqslant g_j(\overline{y}))$, где $g_i(\overline{y}), g_j(\overline{y})$ — термы в арифметике битовых векторов, представляющие из себя линейные комбинации констант, свободных переменных $(\overline{y})$ и сдвигов $1 \ll y_k$;

2. $\exists x. \bigwedge_{i}((1 \ll x) \leqslant g_i(\overline{y}) \vee g_i(\overline{y}) \leqslant (1 \ll x))$.

3.4. Проверка корректности результата

Для тестирования программы была реализована проверка эквивалентности исходной и результирующей формул. Обратим внимание на следующий факт: пусть φ — исходная формула, а θ — результат, тогда

$\varphi \oplus \theta$ должна быть невыполнима. Таким образом, проверка формул на эквивалентность заключается в решении SMT-задачи для строгой дизъюнкции исходной формулы и результата: если эта формула выполнима, то результат некорректен, иначе — полученная формула эквивалентна исходной.

4. Экспериментальные исследования

Замеры проводились на ноутбуке с Ubuntu 20.10, Intel Core i5-7300HQ CPU, 2.50GHz, DDR4 8Gb RAM. В таблице 2 приведено сравнение элиминации квантора по времени и длине итоговой формулы для SMT-решателя Z3 и созданной реализации. Заметим, что замерялось только время элиминации без учёта парсинга входной формулы и вывода результата. В таблице 2 представлены средние значения и стандартные отклонения (σ) по 7 запускам (в миллисекундах), а также длина найденной формулы (в символах[7]).

Таблица составлена по результатам запуска программ на следующих тестах (n — размер битовых векторов):

1. $\exists x.\ x \geqslant 9505$ $(n = 16)$ — тест */conjunction_level_benchmarks/ DeltaTR_RFRNC_OUT_QESMT_benchmark_conjunction_38.smt*[8] из набора тестов Benchmarks, на которых построено экспериментальное исследование [5].
2. $\exists x.\ y \leq x \wedge 2 \leq x \wedge z \leq x$ $(n = 4)$
3. $\forall x.\ 3 \cdot y \leq x \wedge x \leq 12 \cdot y$ $(n = 4)$
4. $\exists x.\ x \leq 997 \cdot y \wedge z \leq x \wedge x \leq t$ $(n = 10)$
5. $\exists x.\ x \leq 2 \cdot y + z \wedge 10 \cdot y \leq x$ $(n = 6)$
6. $\exists x.\ x \leq 5 \cdot y + 7 \wedge 8 \cdot (y + z) \leq x$ $(n = 8)$
7. $\exists x.\ y + 15 < x \wedge x < 1$ $(n = 4)$
8. $\exists x.\ 3 \cdot (1 \ll y) \leq x \wedge x \leq 7 \cdot (1 \ll y)$ $(n = 4)$
9. $\forall x.\ (1 \ll y) \leq x \wedge 2 \leq x \wedge z \leq x$ $(n = 4)$
10. $\exists x.\ 3 \cdot (1 \ll y) \leq x \wedge x \leq 12 \cdot y$ $(n = 6)$

[7]Служебные слова и символы не учитываются (в Z3 «(goals (goal» и закрывающая скобка), а длину тождественно верных/ложных формул будем считать равной 1 для единообразия (на самом деле они могут выводится как «true», «false», «»).

[8]Формула была переведена из формата SMT-LIB в SMT-LIB v.2.

11. $\exists x.\ x \le 3 \cdot (1 \ll y) \land (1 \ll z) \le x \land x \le t\ (n = 6)$

12. $\forall x.\ x \le 2 \cdot (1 \ll y) + (1 \ll z) \land 10 \cdot (1 \ll y) \le x\ (n = 8)$

13. $\exists x.\ x \le 5 \cdot (1 \ll y) + 7 \land 8 \cdot ((1 \ll y) + z) \le x\ (n = 8)$

14. $\exists x.\ (1 \ll x) \le (1 \ll y) + 11 \cdot y + 4\ (n = 4)$

15. $\exists x.\ (1 \ll x) \le y + 3 \cdot z + 8\ (n = 6)$

16. $\exists x.\ (1 \ll x) \le 7 \cdot y \land (1 \ll x) \le z \land (1 \ll x) \le (1 \ll t)\ (n = 8)$

Таблица 2 — Сравнение времени элиминации (мс) и длины формулы-результата (количество символов).

Тест	Boolector (PA + 2^x)			Z3		
	Среднее время	σ	Длина формулы	Среднее время	σ	Длина формулы
1	0.006	$< 10^{-3}$	1	1.093	0.008	1
2	0.011	$< 10^{-3}$	1	6.062	4.539	1
3	0.033	$< 10^{-3}$	1	4.859	0.035	2210
4	0.010	$< 10^{-3}$	62	26226.810	176.819	287204
5	0.015	$< 10^{-3}$	61	21.506	0.163	14431
6	0.012	$< 10^{-3}$	66	128.293	0.358	62412
7	0.024	$< 10^{-3}$	1	0.810	0.009	1
8	0.009	$< 10^{-3}$	41	4.376	0.042	2361
9	0.024	$< 10^{-3}$	1	4.856	0.029	1
10	0.009	$< 10^{-3}$	51	17.915	0.084	14837
11	0.010	$< 10^{-3}$	95	16.149	0.066	15171
12	0.032	$< 10^{-3}$	1	125.997	0.502	88648
13	0.011	$< 10^{-3}$	79	69.868	0.297	44904
14	0.048	$< 10^{-3}$	1	4.685	0.035	1
15	0.055	$< 10^{-3}$	395	19.793	0.054	716
16	0.105	$< 10^{-3}$	1	122.836	0.472	1

По результатам замеров видно, что для подмножества формул теории двоичных векторов 3.3 созданная реализация значительно обгоняет SMT-решатель Z3 по времени, а также на большинстве тестов выдаёт более короткую формулу.

5. Текущие результаты

- Выбран SMT-решатель, в рамках которого осуществлялась реализация описанного алгорима.

- Реализован[9] алгоритм элиминации кванторов для следующих формул (вместо $\leqslant$ может быть $<$ или $=$, а вместо $\exists$ — $\forall$):

   1. $\exists x. \bigwedge\limits_{i,j} (g_i(\overline{y}) \leqslant x \land x \leqslant g_j(\overline{y}))$, где $g_i(\overline{y}), g_j(\overline{y})$ — термы в арифметике битовых векторов, представляющие из себя линейные комбинации констант, свободных переменных ($\overline{y}$) и сдвигов $1 \ll y_k$;
   2. $\exists x. \bigwedge\limits_{i} ((1 \ll x) \leqslant g_i(\overline{y}) \lor g_i(\overline{y}) \leqslant (1 \ll x))$.

- Проведено сравнение реализации с элиминацией кванторов SMT-решателем Z3 и выяснено, что на указанном подмножестве она выдаёт более короткую формулу и работает быстрее, чем Z3.

[9] https://github.com/AnzhelaSukhanova/QE_expPA

Список литературы

[1] Barrett Clark, Stump A., Tinelli Cesare. The SMT-LIB standard — version 2.0 // Proceedings of the 8th international workshop on satisfiability modulo theories, Edinburgh, Scotland,(SMT '10). — 2010.

[2] Brummayer Robert, Biere Armin, Lonsing Florian. BTOR: Bit-Precise Modelling of Word-Level Problems for Model Checking // Proceedings of the Joint Workshops of the 6th International Workshop on Satisfiability Modulo Theories and 1st International Workshop on Bit-Precise Reasoning. — SMT '08/BPR '08. — New York, NY, USA : Association for Computing Machinery, 2008. — P. 33–38. — Access mode: https://doi.org/10.1145/1512464.1512472 (online; accessed: June 9, 2021).

[3] Btor2 , BtorMC and Boolector 3.0 / Aina Niemetz, Mathias Preiner, Clifford Wolf, Armin Biere // Computer Aided Verification / Ed. by Hana Chockler, Georg Weissenbacher. — Cham : Springer International Publishing, 2018. — P. 587–595.

[4] Cherlin Gregory, Point Françoise. On extensions of Presburger arithmetic // Proc. 4th Easter Model Theory conference, Gross Köris. — 1986. — P. 17–34.

[5] John Ajith K., Chakraborty Supratik. A layered algorithm for quantifier elimination from linear modular constraints // Formal Methods in System Design. — 2016. — Dec. — Vol. 49, no. 3. — P. 272–323. — Access mode: https://doi.org/10.1007/s10703-016-0260-9 (online; accessed: June 9, 2021).

[6] Point Françoise. On the expansion $(\mathrm{N},+,2^x)$ of Presburger arithmetic. — 2007. — 01.

[7] Semenov A L. ON CERTAIN EXTENSIONS OF THE ARITHMETIC OF ADDITION OF NATURAL NUMBERS // Mathematics of the USSR-Izvestiya. — 1980. — apr. — Vol. 15, no. 2. — P. 401–418. — Access

mode: https://doi.org/10.1070/im1980v015n02abeh001252 (online; accessed: June 9, 2021).

[8] Solving Quantified Bit-Vectors Using Invertibility Conditions / Aina Niemetz, Mathias Preiner, Andrew Reynolds et al. // Computer Aided Verification / Ed. by Hana Chockler, Georg Weissenbacher. — Cham : Springer International Publishing, 2018. — P. 236–255.