RESOLUCIÓN INTEGRADOR ANÁLISIS MATEMÁTICO III

Primer Cuatrimestre 2020 - Tercera oportunidad - 25/09/2020

Ad usum populorum

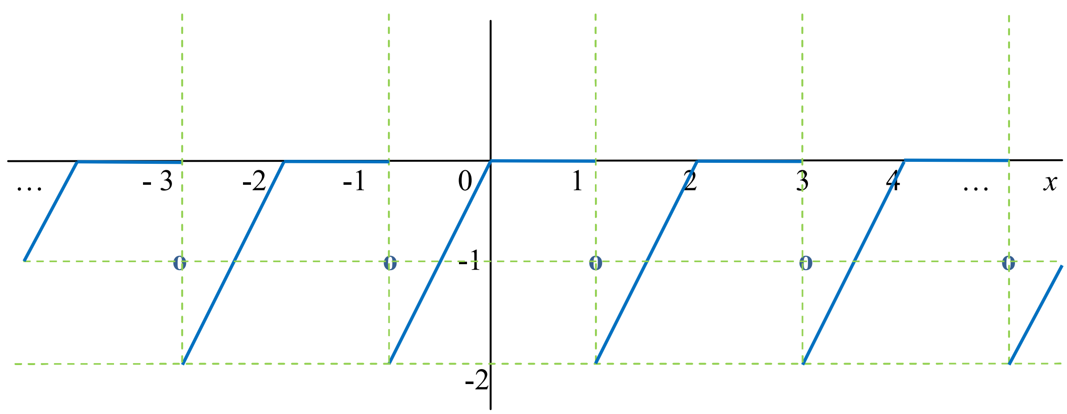
EJERCICIO 1: Sabiendo que la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x) = x - |x|$ en [-1,1] es

$$-\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2} \cos((2n-1)\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} sen(n\pi x)$$

obtener el valor de las serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ y determinar todos los valores x reales que cumplen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2 \pi^2} \cos((2n-1)\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} sen(n\pi x)$$

Resolución: Sea $\not f : \Re \longrightarrow \Re$ la extensión 2-periódica de f tal que en los puntos de discontinuidad toma el valor promedio, es decir: $\not f(x) = \dfrac{\not f(x^-) + \not f(x^+)}{2}$. El gráfico aproximado de $\not f$ es el siguiente:



Por el teorema de convergencia puntual de Dirichlet (agradecemos el dato del enunciado) y dada la definición de $\not f$, podemos afirmar que para todo $x \in \Re$ se verifica la igualdad

$$\not f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos((2n-1)\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} sen(n\pi x) \qquad (*\ 1)$$

En particular, para $x = 0$ tenemos $0 = \not f(0) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}$ de donde se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad (*2)$$

Ahora,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2\pi^2}\cos((2n-1)\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} sen(n\pi x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2\pi^2}\cos((2n-1)\pi x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} sen(n\pi x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

(multiplicando ambos miembros por 2 y teniendo en cuenta que $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$)

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos((2n-1)\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} sen(n\pi x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos((2n-1)\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} sen(n\pi x) = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, los puntos buscados son los x tales que $\not f(x) = -\frac{1}{2}$. En el intervalo (-1, 1) el único punto es $x_0 = -\frac{1}{4}$, pues $x - |x| = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$. Ahora, por la periodicidad de $\not f$ deducimos que los puntos buscados son los infinitos puntos $x_k = -\frac{1}{4} + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. (Si no está convencido, observe el gráfico).

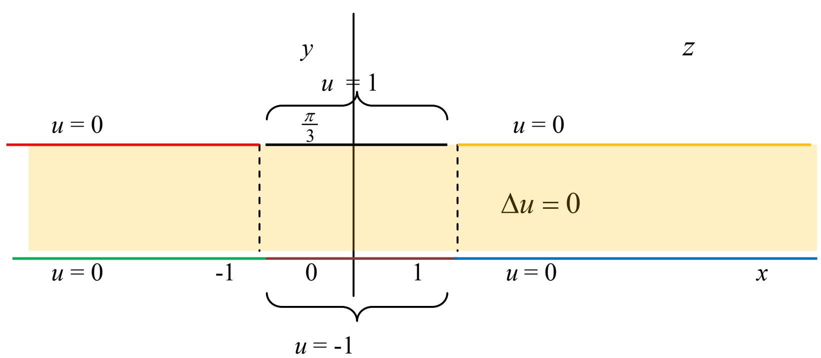
***Respuesta* 1**: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ y los todos los puntos $x \in \Re$ donde se verifica la igualdad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2\pi^2}\cos((2n-1)\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} sen(n\pi x)$ son los puntos $x_k = -\frac{1}{4} + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

EJERCICIO 2: Considerar el problema del potencial electrostático en la banda infinita:

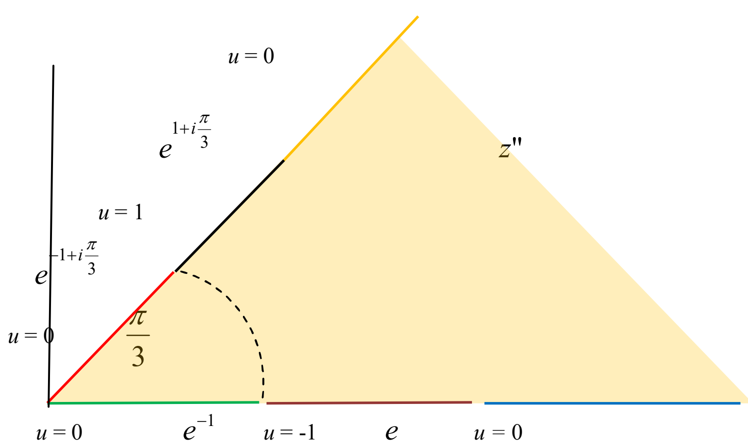
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial y^2} = 0 & -\infty < x < +\infty \quad , \quad 0 < y < \frac{\pi}{3} \\ u(x,0) = -\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) & -\infty < x < +\infty \\ u(x,\frac{\pi}{3}) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

y resolverlo mediante transformación conforme.

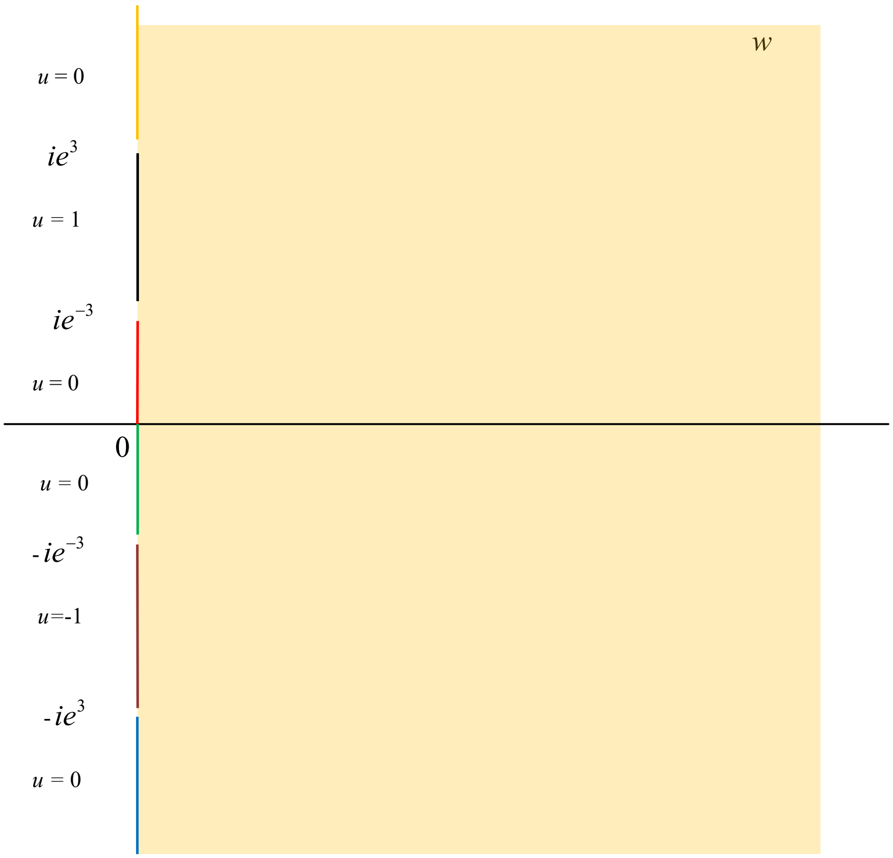
Resolución : Transformamos la banda en el semiplano $\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) > 0\}$, en el cual se verifica $Arg(w) = artg\left(\dfrac{\mathrm{Im}(w)}{\mathrm{Re}(w)}\right)$:



$z \mapsto z'' = \exp(z)$



$z'' \mapsto w = -iz''^3$



Planteamos $u = c_1 Arg(w - ie^3) + c_2 Arg(w - ie^{-3}) + c_3 Arg(w + ie^{-3}) + c_4 Arg(w + ie^3) + c_5$ y tenemos las cinco condiciones de contorno siguientes:

(1) $c_1 \frac{\pi}{2} + c_2 \frac{\pi}{2} + c_3 \frac{\pi}{2} + c_4 \frac{\pi}{2} + c_5 = 0$

(2) $-c_1 \frac{\pi}{2} + c_2 \frac{\pi}{2} + c_3 \frac{\pi}{2} + c_4 \frac{\pi}{2} + c_5 = 1$

(3) $-c_1 \frac{\pi}{2} - c_2 \frac{\pi}{2} + c_3 \frac{\pi}{2} + c_4 \frac{\pi}{2} + c_5 = 0$

(4) $-c_1 \frac{\pi}{2} - c_2 \frac{\pi}{2} - c_3 \frac{\pi}{2} + c_4 \frac{\pi}{2} + c_5 = -1$

(5) $-c_1 \frac{\pi}{2} - c_2 \frac{\pi}{2} - c_3 \frac{\pi}{2} - c_4 \frac{\pi}{2} + c_5 = 0$

Sumando (1) + (5) : $c_5 = 0$. Restando (1) - (2): $c_1\pi = -1$. Restando (2) - (3): $c_2\pi = 1$. Restando (3) - (4): $c_3\pi = 1$. Restando (4) - (5): $c_4\pi = -1$. Por lo tanto:

$$u=\frac{1}{\pi}[-Arg(w-ie^{3})+Arg(w-ie^{-3})+Arg(w+ie^{-3})-Arg(w+ie^{3})]=$$

$$=\frac{1}{\pi}[-Arg(-ie^{3z}-ie^{3})+Arg(-ie^{3z}-ie^{-3})+Arg(-ie^{3z}+ie^{-3})-Arg(-ie^{3z}+ie^{3})]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(artg\left(\frac{e^{3x}\cos(3y)+e^{3}}{e^{3x}sen(3y)}\right)-artg\left(\frac{e^{3x}\cos(3y)+e^{-3}}{e^{3x}sen(3y)}\right)-artg\left(\frac{e^{3x}\cos(3y)-e^{-3}}{e^{3x}sen(3y)}\right)+artg\left(\frac{e^{3x}\cos(3y)-e^{3}}{e^{3x}sen(3y)}\right)\right)$$

***Respuesta* 2:**

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\left(artg\left(\frac{e^{3x}\cos(3y)+e^{3}}{e^{3x}sen(3y)}\right)-artg\left(\frac{e^{3x}\cos(3y)+e^{-3}}{e^{3x}sen(3y)}\right)-artg\left(\frac{e^{3x}\cos(3y)-e^{-3}}{e^{3x}sen(3y)}\right)+artg\left(\frac{e^{3x}\cos(3y)-e^{3}}{e^{3x}sen(3y)}\right)\right)$$

EJERCICIO 3: Estudiar si el problema del Ejercicio 2 también se puede resolver mediante transformada de Fourier. En caso afirmativo, resolverlo de ese modo. ¿Es la solución obtenida la misma que la que se obtuvo en el ejercicio anterior?

Resolución: El uso de la transformación de Fourier requiere que las funciones involucradas tengan un comportamiento excelente. Es decir, tenemos que buscar como solución una función $u(x,y)$ tan maravillosa que permite las siguientes operaciones:

$$\hat{u}(\omega,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y)e^{-i\omega x}dx \quad , \quad u(x,y)=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(\omega,y)e^{i\omega x}d\omega \quad ,$$

$$\widehat{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}(\omega,y)=-\omega^2\hat{u}(\omega,y)\,, \qquad \widehat{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}(\omega,y)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(\omega,y)\,,$$

Aplicando la transformación de Fourier a la ecuación de Laplace:

$$-\omega^2\hat{u}(\omega,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(\omega,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{u}(\omega,y)=A(\omega)e^{\omega y}+B(\omega)e^{-\omega y}$$

donde A y B son dos funciones a determinar por las condiciones de contorno:

$$(a)\ \hat{u}(\omega,0)=A(\omega)+B(\omega)=-\hat{1}_{[-1,1]}(\omega)=-2\frac{sen(\omega)}{\omega}$$

$$(b)\ \hat{u}(\omega,\tfrac{\pi}{3})=A(\omega)e^{\omega\frac{\pi}{3}}+B(\omega)e^{-\omega\frac{\pi}{3}}=\hat{1}_{[-1,1]}(\omega)=2\frac{sen(\omega)}{\omega} \qquad (*1)$$

Despejando, obtenemos $A(\omega)=\dfrac{sen(\omega)\left[1+e^{-\omega\frac{\pi}{3}}\right]}{\omega senh\left(\frac{\pi}{3}\omega\right)}$ y $B(\omega)=-\dfrac{sen(\omega)\left[1+e^{\omega\frac{\pi}{3}}\right]}{\omega senh\left(\frac{\pi}{3}\omega\right)}$, es decir:

$$\hat{u}(\omega,y)=A(\omega)e^{\omega y}+B(\omega)e^{-\omega y}=\frac{sen(\omega)}{\omega senh\left(\frac{\pi}{3}\omega\right)}\left[\left(1+e^{-\omega\frac{\pi}{3}}\right)e^{\omega y}-\left(1+e^{\omega\frac{\pi}{3}}\right)e^{-\omega y}\right]=$$

$$=\frac{2sen(\omega)\left[senh(\omega y)+senh(\omega(y-\frac{\pi}{3}))\right]}{\omega senh\left(\frac{\pi}{3}\omega\right)} \qquad (*2)$$

Observe que, efectivamente:

$$\hat{u}(\omega,0)=\frac{2sen(\omega)\left[0+senh(\omega(0-\frac{\pi}{3}))\right]}{\omega senh\left(\frac{\pi}{3}\omega\right)}=\frac{2sen(\omega)\left[-senh(\omega\frac{\pi}{3})\right]}{\omega senh\left(\frac{\pi}{3}\omega\right)}=-2\frac{sen(\omega)}{\omega}$$

$$\hat{u}(\omega,\tfrac{\pi}{3})=\frac{2sen(\omega)\left[senh(\omega\frac{\pi}{3})\right]}{\omega senh\left(\frac{\pi}{3}\omega\right)}=2\frac{sen(\omega)}{\omega}$$

Observación 1: Estudiemos el límite de $\hat{u}(\omega,y)$ cuando $\omega\longrightarrow 0$: en primer lugar, tenemos que $\underset{\omega\to 0}{Lim}\dfrac{sen(\omega)}{\omega}=1$; en segundo, mediante l´Hôpital, $\underset{\omega\to 0}{Lim}\dfrac{senh(\omega y)}{senh(\frac{\pi}{3}\omega)}=\underset{\omega\to 0}{Lim}\dfrac{y\cosh(\omega y)}{\frac{\pi}{3}\cosh(\frac{\pi}{3}\omega)}=\dfrac{3y}{\pi}$; por último, con la misma herramienta, $\underset{\omega\to 0}{Lim}\dfrac{senh(\omega(y-\frac{\pi}{3}))}{senh(\frac{\pi}{3}\omega)}=\underset{\omega\to 0}{Lim}\dfrac{(y-\frac{\pi}{3})\cosh(\omega y)}{\frac{\pi}{3}\cosh(\frac{\pi}{3}\omega)}=\dfrac{3(y-\frac{\pi}{3})}{\pi}$

Por lo tanto, el límite existe y es $\underset{\omega\to 0}{Lim}\hat{u}(\omega,y)=2\left(\dfrac{3y}{\pi}+\dfrac{3(y-\frac{\pi}{3})}{\pi}\right)=\dfrac{6y}{\pi}-2$. Para y = 0, este límite coincide con el que se obtiene de (*1) (*a*).

Observación 2: Estudiemos ahora el límite de $\hat{u}(\omega,y)$ cuando $\omega\longrightarrow+\infty$ y $\omega\longrightarrow-\infty$. El factor $\dfrac{sen(\omega)}{\omega}$ tiende a 0 en ambos casos, por lo tanto tenemos que estudiar el factor $\dfrac{\left[senh(\omega y)+senh(\omega(y-\frac{\pi}{3}))\right]}{senh\left(\frac{\pi}{3}\omega\right)}=\dfrac{e^{\omega y}-e^{-\omega y}+e^{\omega y}e^{-\frac{\pi}{3}\omega}-e^{-\omega y}e^{\frac{\pi}{3}\omega}}{e^{\frac{\pi}{3}\omega}-e^{-\frac{\pi}{3}\omega}}$. Si $0<y<\frac{\pi}{3}$, sacando factor común $e^{\omega y}$ en el numerador y $e^{\frac{\pi}{3}\omega}$ en el denominador:

$$\frac{e^{\omega y}-e^{-\omega y}+e^{\omega y}e^{-\frac{\pi}{3}\omega}-e^{-\omega y}e^{\frac{\pi}{3}\omega}}{e^{\frac{\pi}{3}\omega}-e^{-\frac{\pi}{3}\omega}}=e^{\omega(y-\frac{\pi}{3})}\frac{(1-e^{-2\omega y}+e^{-\frac{\pi}{3}\omega}-e^{-2\omega y}e^{\frac{\pi}{3}\omega})}{1-e^{-2\frac{\pi}{3}\omega}}\xrightarrow[\omega\to+\infty]{}0$$

Ahora, en los casos $y=0$ e $y=\dfrac{\pi}{3}$ la propiedad resulta de (*1). Finamente, para $\omega \longrightarrow -\infty$, sacando factor común $e^{-\omega y}$ en el numerador y $e^{-\frac{\pi}{3}\omega}$ en el denominador:

$$\frac{e^{\omega y}-e^{-\omega y}+e^{\omega y}e^{-\frac{\pi}{3}\omega}-e^{-\omega y}e^{\frac{\pi}{3}\omega}}{e^{\frac{\pi}{3}\omega}-e^{-\frac{\pi}{3}\omega}}=e^{\omega(\frac{\pi}{3}-y)}\frac{(e^{2\omega y}-1+e^{2\omega y}e^{-\frac{\pi}{3}\omega}-e^{\frac{\pi}{3}\omega})}{e^{2\frac{\pi}{3}\omega}-1}\xrightarrow[\omega\to-\infty]{}0$$

Nota: esta verificación la hemos hecho para controlar nuestras cuentas y nuestra resolución, pues por el lema de Riemann-Lebesgue, en efecto debe verificarse que $\underset{\omega\to+\infty}{Lim}\hat{u}(\omega,y)=0$ $=\underset{\omega\to-\infty}{Lim}\hat{u}(\omega,y)$. Este tipo de verificaciones las hacemos los que preparamos los enunciados y escribimos las resoluciones con detalle.

La función buscada es, entonces:

$$u(x,y)=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(\omega,y)e^{i\omega x}d\omega=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2sen(\omega)[senh(\omega y)+senh(\omega(y-\frac{\pi}{3}))]}{\omega\, senh(\frac{\pi}{3}\omega)}e^{i\omega x}d\omega\ .$$

Queda por responder si esta solución es la misma que la obtenida en el ejercicio anterior. Indiquemos con u_2 y u_3 las soluciones obtenidas en los Ejercicios 2 y 3 respectivamente. No podemos utilizar el Teorema de Unicidad para afirmar que $u_2 = u_3$, pues ese teorema solo puede aplicarse al problema de Dirichlet en dominios acotados. Por ejemplo, la función $u_2(x,y)+e^{3x}sen(3y)$ también es armónica en la banda $D=\left\{(x,y)\in\Re^2:0<y<\frac{\pi}{3}\right\}$ y toma los mismos valores que u_2 en el borde $\partial D=\{(x,0):x\in\Re\}\cup\{(x,\frac{\pi}{3}):x\in\Re\}$. La clave está en el Principio del Máximo para armónicas (Ver el apéndice del Apunte sobre Ecuaciones Diferenciales en la página de la materia). La función $v = u_2 - u_3$ es armónica en la banda D y se anula en el borde de dicho ∂D. Puede comprobarse sin demasiada dificultad que la solución u_2 del ejercicio 2 tiende a 0 cuando $x\longrightarrow+\infty$ y cuando $x\longrightarrow-\infty$. Y lo mismo ocurre con la que obtuvimos en este ejercicio, u_3, utilizando el Lema de Riemann-Lebesgue. Por lo tanto, la función $v = u_2 - u_3$ también tiende a cero cuando $x\longrightarrow+\infty$ y cuando $x\longrightarrow-\infty$. El Principio del Máximo para funciones armónicas implica entonces que el máximo de v es cero y lo mismo ocurre con $-v$, con lo cual el máximo y el mínimo de v es 0, es decir: v es la función nula y por lo tanto, efectivamente, $u_2 = u_3$.

Respuesta 3: Se puede resolver el problema de Ejercicio2 mediante transformada de Fourier, la solución es $u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2sen(\omega)[senh(\omega y)+senh(\omega(y-\frac{\pi}{3}))]}{\omega\, senh(\frac{\pi}{3}\omega)}e^{i\omega x}d\omega$ y es la misma que la obtenida en el ejercicio anterior. Por lo tanto, para todo $x\in\Re$ y todo $y\in(0,\frac{\pi}{3})$ se verifica la igualdad

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2sen(\omega)[senh(\omega y)+senh(\omega(y-\frac{\pi}{3}))]}{\omega\, senh(\frac{\pi}{3}\omega)}e^{i\omega x}d\omega =$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(artg\left(\frac{e^{3x}\cos(3y)+e^{3}}{e^{3x}sen(3y)}\right)-artg\left(\frac{e^{3x}\cos(3y)+e^{-3}}{e^{3x}sen(3y)}\right)-artg\left(\frac{e^{3x}\cos(3y)-e^{-3}}{e^{3x}sen(3y)}\right)+artg\left(\frac{e^{3x}\cos(3y)-e^{3}}{e^{3x}sen(3y)}\right)\right)$$

(créase o no….)

EJERCICIO 4: Resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria (expresar la solución en forma integral).

$$x''(t)+x(t)=f(t) \qquad , \quad t\geq 0$$

con las condiciones iniciales $x(0)=x'(0)=0$ y donde $L(f)(s)=Log\left(\frac{s-4}{s+7}\right)$.

Resolución: Aplicando la transformación de Laplace en ambos miembros de la ecuación y teniendo en cuenta los datos del enunciado, obtenemos $s^2X(s)+X(s)=Log\left(\frac{s-4}{s+7}\right)$ es decir:

$$X(s)=\frac{1}{s^2+1}Log\left(\frac{s-4}{s+7}\right) \qquad (*)$$

Veamos el dominio de validez de esta fórmula. El dominio de holomorfía del logaritmo principal es $\mathbb{C}-\{x\in\Re : x\leq 0\}$. Con la notación usual $s=\sigma+i\omega$

$$\frac{s-4}{s+7}=\frac{s+7-11}{s+7}=1-\frac{11}{s+7}=1-11\frac{\sigma+7-i\omega}{(\sigma+7)^2+\omega^2}=1-11\frac{\sigma+7}{(\sigma+7)^2+\omega^2}+11i\frac{\omega}{(\sigma+7)^2+\omega^2}$$

Por lo tanto, $\frac{s-4}{s+7}$ es real sii *s* es real, es decir, si $\omega=0$. Ahora, $\frac{s-4}{s+7}=\frac{\sigma-4}{\sigma+7}\leq 0$ sii $-7<\sigma\leq 4$ y el dominio de la función $Log\left(\frac{s-4}{s+7}\right)$ es, entonces, $\mathbb{C}-\{\sigma\in\Re : -7<\sigma\leq 4\}$. Resulta, entonces, que la abscisa de convergencia de la transformada de *f* es $\sigma_c=4$ y la validez de la fórmula (*) es, por lo tanto, el semiplano $\mathbb{H}=\{\sigma+i\omega\in\mathbb{C} : \sigma>4\}$. Para aplicar el Teorema de Inversión para la Transformación de Laplace, podemos elegir cualquier recta vertical contenida en dicho semiplano:

***Respuesta* 4**:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\ \underset{b\to+\infty}{Lim}\int_{-b}^{b}\left(\frac{1}{(\sigma_0+i\omega)^2+1}Log\left(\frac{\sigma_0+i\omega-4}{\sigma_0+i\omega+7}\right)\right)e^{(\sigma_0+i\omega)t}d\omega$$

donde $\sigma_0 > 4$. La forma más habitual de expresar esta fórmula de inversión es más sencilla pero menos clara:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - \infty}^{\sigma_0 + \infty}\left(\frac{1}{s^2+1}Log\left(\frac{s-4}{s+7}\right)\right)e^{st}ds$$

Observación: Si usted se quedó con la ganas de conocer la función *f*, calcule la derivada de $L(f)(s) = Log\left(\frac{s-4}{s+7}\right)$ y luego utilice alguna propiedad conocida de la Transformación de Laplace. O bien diríjase a la página 11 del Apunte sobre la Transformación de Laplace que está en la página de la asignatura y va a encontrar lo que necesita en el ejemplo 4.

EJERCICIO 5: ¿Es posible que una función polinómica y no idénticamente nula sea la transformada de Laplace de una función $f:[0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ continua y de orden exponencial?

Resolución: Por hipótesis, existen dos constantes reales tales M y α tales que $|f(t)| \le Me^{\alpha t}$ para todo $t \ge 0$. Entonces (recordemos), su transformada de Laplace F está definida en - al menos - el semiplano $\mathbb{H}_\alpha = \{\sigma + i\omega \in C : \sigma > \alpha\}$, y además se tiene, para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(s) > \alpha$:

$$|F(s)| = \underset{b \to +\infty}{Lim}\left|\int_0^b f(t)e^{-st}dt\right| \le \underset{b \to +\infty}{Lim}\int_0^b |f(t)|e^{-\mathrm{Re}(s)t}dt \le \underset{b \to +\infty}{Lim}\int_0^b Me^{\alpha t}e^{-\mathrm{Re}(s)t}dt =$$

$$= M\underset{b \to +\infty}{Lim}\int_0^b e^{[\alpha - \mathrm{Re}(s)]}dt = M\underset{b \to +\infty}{Lim}\frac{e^{[\alpha - \mathrm{Re}(s)]b} - 1}{\alpha - \mathrm{Re}(s)} \overset{\alpha - \mathrm{Re}(s) < 0}{=} \frac{M}{\mathrm{Re}(s) - \alpha}$$

Entonces, la transformada de Laplace de f verifica $\underset{\sigma \to +\infty}{Lim}F(\sigma + i\omega) = 0$ para todo $\omega \in \Re$, por lo tanto, no puede ser un polinomio no nulo. Lo que sigue es una demostración esquemática de esto, aunque el alumno puede simplemente mencionar alguna propiedad que justifique esta afirmación: supóngase que $F(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_m s^m$ donde $a_m \ne 0$. En particular, para $\omega = 0$ y $\sigma = \frac{1}{\lambda} > \max\{\alpha, 0\}$, $F\left(\frac{1}{\lambda}\right) = a_0 + a_1\frac{1}{\lambda} + \ldots + a_m\frac{1}{\lambda^m}$ tiende a 0 cuando $\lambda \longrightarrow 0$ (por hipótesis). Entonces, $F\left(\frac{1}{\lambda}\right)\lambda^m = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m$ y tomando límites en ambos miembros cuando $\lambda \longrightarrow 0$, resulta $a_m = 0$: absurdo.
