Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
ANÁLISIS MATEMÁTICO III

APUNTES DE ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA
D. Prelat - 2020

§ 12. SERIES DE LAURENT - SINGULARIDADES AISLADAS - RESIDUOS

El apellido de estas series es el de un ingeniero militar del siglo XIX, Pierre Alphonse Laurent. Sin embargo, hay constancia de que estas series fueron previamente estudiadas por Karl Weierstrass - sí, el mismo - pero parece que no le dio mucha pelota al asunto y lo cajoneó. Pierre las descubrió por su cuenta en forma independiente unos años más tarde y fue el primero que publicó algo al respecto, en 1843. De todos modos, convengamos que a Karl no le hace falta que le atribuyamos estas series, ya que tiene de sobra para figurar en la historia.

Un retrato clásico de una serie de Laurent es el siguiente:

$$\ldots+\frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+c_3(z-z_0)^3+\ldots \qquad (12.1)$$

y otro, más sintético pero más completo, es

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \quad . \qquad (12.2)$$

Los siguientes parágrafos vamos a dedicarlos a describir y definir los objetos retratados. Recordando la notación clásica de las series de potencias (Capítulo VI), deberían resultar naturales las siguientes denominaciones:

(1) para cada $n \in \mathbb{Z}$, c_n es un número complejo denominado «coeficiente n-ésimo» de la serie de Laurent. Estos coeficientes forman una sucesión «doble» $(c_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$, que no es otra cosa que una función $\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ escrita de manera especial: $\alpha(n) = c_n$.

(2) z_0 es un número complejo, denominado «centro» de la serie.

(3) z es un número complejo variable, es decir: una «variable compleja». Esto sugiere que puede haber una función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ para cada $z \in D$, siendo $D \subset \mathbb{C}$ un dominio a determinar, junto con el significado de los símbolos (12.1) o (12.2).

Hay un par de formas equivalentes de entender el sentido de (12.1) o su equivalente (12.2). El primero es separar las sumas de la siguiente manera, sugerida por la simetría evidente de (12.1) respecto del coeficiente c_0:

$$\overbrace{\ldots+\frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{z-z_0}}^{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n}+c_0+\overbrace{c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+c_3(z-z_0)^3+\ldots}^{\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^n} \quad (12.3)$$

El coeficiente c_0 se denomina «coeficiente central», por razones visualmente claras y suele incluirse en la segunda sumatoria, de la siguiente manera:

$$\overbrace{\ldots+\frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{z-z_0}}^{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n}+\overbrace{c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+c_3(z-z_0)^3+\ldots}^{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n} \quad (12.4)$$

Esta separación no tiene la simetría de la anterior, pero es la más utilizada, por razones que veremos más adelante. La sumatoria $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ es una serie de potencias de centro z_0 y coeficientes $(c_n)_{n=0}^{+\infty}$. Si su radio de convergencia es $r_1 > 0$, define la función analítica $f_1 : D(z_0;r) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ para cada $z \in D(z_0;r_1)$.

En cuanto la otra sumatoria,

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n = \ldots+\frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}, \qquad (12.5)$$

es natural pensar en el cambio de variable $w = \dfrac{1}{z-z_0}$ (es decir: $z = z_0 + \dfrac{1}{w}$). Reemplazando en (12.5) obtenemos una serie de potencias (de w) centrada en 0 y coeficientes $(c_{-n})_{n=0}^{+\infty}$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n w^{-n} = \ldots + c_{-3}w^3 + c_{-2}w^2 + c_{-1}w = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n \qquad (12.6)$$

Si esta serie tiene radio de convergencia $r_2 > 0$, define la función analítica $g : D(0;r_2) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$. Para volver a la variable $z = z_0 + \frac{1}{w}$, debemos restringir g al disco reducido $D(0;r_2) - \{0\}$ y obtenemos la función

$$f_2(z) = g\left(\frac{1}{z - z_0}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} \qquad (12.7)$$

definida para todo z tal que $\overbrace{\left|\frac{1}{z - z_0}\right|}^{|w|} < r_2$, es decir: $|z - z_0| > \frac{1}{r_2}$. Por lo tanto, f_2 es holomorfa (por ser composición de holomorfas) en el abierto

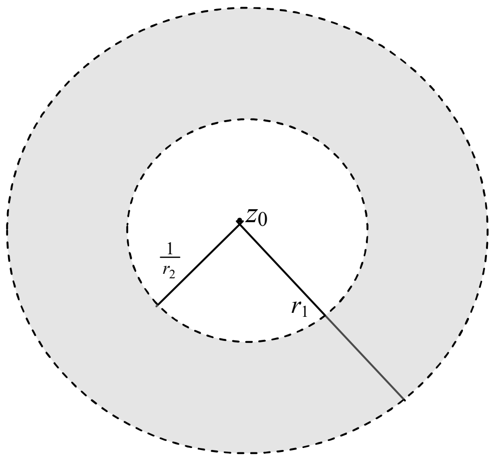
$$E(z_0;\tfrac{1}{r_2}) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > \frac{1}{r_2} \right\}. \qquad (12.8)$$

Obsérvese, para rescatar la simetría perdida, que r_1 es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$. Resumiendo, si ninguno de los radios de convergencia r_1, de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ y r_2, de $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$, son nulos, tenemos dos funciones holomorfas

$$\begin{aligned} &f_1 : D(z_0;r_1) \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &f_2 : E(z_0;\tfrac{1}{r_2}) \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} \end{aligned} \qquad (12.9)$$

Ahora, si sumamos estas funciones obtenemos la sumatoria completa (12.4), pero estas funciones se pueden sumar si las restringimos a la intersección $D(z_0;r_1) \cap E(z_0;\frac{1}{r^2})$ de sus dominios. Y sería bueno que esta intersección no sea no vacía, lo que puede ocurrir (ver Ejemplo 12.1 más adelante). Ahora bien, $D(z_0;r_1)$ es un disco abierto de radio r_1 centrado en z_0 y $E(z_0;\frac{1}{r^2})$ es el exterior del disco cerrado de centro z_0 y radio $\frac{1}{r_2}$. Es muy sencillo ver que la intersección de estos conjuntos es no vacía sii $\frac{1}{r_2} < r_1$, y que en ese caso (ver Figura 1) , la intersección $D(z_0;r_1) \cap E(z_0;\frac{1}{r^2})$ es la «corona circular »

$$D(z_0;\tfrac{1}{r_2};r_1)\overset{def}{=}\left\{z\in\mathbb{C}:\tfrac{1}{r_2}<\left|z-z_0\right|<r_1\right\} \qquad (12.10)$$



Corona circular de centro z_0 y radios $1/r_2$, r_1.
Fig 1

***Observación* 12.1:** En los tiempos que corren, el nombre *corona circular* puede resultar chocante. Si le molesta el nombre, puede llamarla *arandela*. Lo que le pido, por favor, es que no la llame *donut* ni *dona* (salvo que me envíe una docena).

Resumiendo: si los radios de convergencia r_1 y r_2 de las series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$ (respectivamente) son no nulos y verifican $\frac{1}{r_2}<r_1$, entonces queda bien definida y es holomorfa la función $f: D(z_0;\frac{1}{r_2};r_1)\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que

$$f(z)=\overbrace{\ldots+\frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{z-z_0}}^{f_2(z)}+\overbrace{c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+c_3(z-z_0)^3+\ldots}^{f_1(z)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \qquad (12.11)$$

Habíamos mencionado al principio que había más de una forma de entender el significado del símbolo (12.1). Aprovechamos otra (obviamente equivalente) para definir lo que son las series de Laurent (por si no se dio cuenta, todavía no las definimos).

***Definición* 12. 1**: Una *serie de Laurent* de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ y coeficientes $c_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$, es la sucesión $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ de funciones $f_k : \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$
\begin{aligned}
& f_k(z) = \sum_{n=-k}^{k} c_n (z-z_0)^n = \\
& = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \ldots + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \\
& + c_0 + \\
& + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + c_3(z-z_0)^3 + \ldots + c_{k-1}(z-z_0)^{k-1} + c_k(z-z_0)^k
\end{aligned}
\tag{12.12}
$$

***Observación* 12.2**: La notación habitual para la series de Laurent es el símbolo que presentamos al principio, en (12.2): $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$, y es tan confusa como la de las series de potencias, pues es la misma notación que se utiliza para el límite $\underset{k \to \infty}{Lim} f_k(z) = \underset{k \to \infty}{Lim} \sum_{n=-k}^{+k} c_n (z-z_0)^n$, para cada z donde este límite existe. Recordemos que el conjunto de puntos z para los cuales existe el límite se denomina *dominio de convergencia* de la serie.

Prácticamente todos los detalles de la demostración de la siguiente proposición ya los hemos desarrollado en los parágrafos anteriores. Dejamos como ejercicio completar los que faltan (lo que implica descubrir, primero, cuáles son los detalles que faltan).

***Proposición* 12.1**: Si los radios de convergencia r_1 y r_2 de las series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$ (respectivamente) son no nulos y verifican $\frac{1}{r_2} < r_1$, entonces queda bien definida y es holomorfa la función $f : D(z_0; \frac{1}{r_2}; r_1) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$
f(z) = \overbrace{\ldots + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0}}^{f_2(z)} + \overbrace{c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + c_3(z-z_0)^3 + \ldots}^{f_1(z)}
$$

$$
= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n
$$

La convergencia de la serie en cada punto de la corona $D(z_0; \frac{1}{r_2}; r_1)$ es absoluta y además la convergencia es uniforme en cada subconjunto cerrado y acotado contenido en dicha corona. ■

***Observación* 12.3**: Necesitamos extender la definición de corona circular para incluir radios nulos o infinitos. Veamos los posibles casos. Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$ converge para todo *w*, es decir, si su radio de convergencia es $r_2 = \infty$, entonces la serie de Laurent converge en $D(z_0; 0; r_1) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r_1\}$, que no es otra cosa que un disco reducido. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ converge para todo *w*, es decir, si su radio de convergencia es $r_1 = \infty$, entonces la serie de Laurent converge en $D(z_0; \frac{1}{r_2}; \infty) = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r_2} < |z - z_0|\}$, que es el exterior del disco cerrado de radio $\frac{1}{r_2}$ y centro z_0. Finalmente, si los radios de convergencia de ambas series $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ son infinitos, la serie de Laurent converge en $D(z_0; 0; \infty) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0|\} = \mathbb{C} - \{0\}$.

***Ejemplo* 12.1**. Encontrar ejemplos de series de Laurent con dominio de convergencia vacío (es decir: que no convergen en ningún punto del plano) es muy sencillo: basta encontrar dos series de potencias con mismo centro y radios de convergencia que no verifiquen las desigualdades requeridas. Los ejemplos más sencillos y menos sofisticados se construyen con la serie geométrica. Recordemos que $\sum_{n=0}^{\infty} w^n$ converge siempre y cuando $|\, w \,| < 1$ y que en ese caso $\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \dfrac{1}{1-w}$. (Cap VI, Pág. 4) . Entonces, en particular, $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\dfrac{2}{z}\right]^n$ converge sii $\left|\dfrac{2}{z}\right| < 1$, es decir, sii $|z| > 2$. Ahora, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge sii $|z| < 1$. Por lo tanto, la serie de Laurent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{z}\right]^n + 2 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \ldots + \frac{2^3}{z^3} + \frac{2^2}{z^2} + \frac{2}{z} + 2 + z + z^2 + z^3 + \ldots.$$

no converge para ningún *z*, pues no existe ningún *z* que verifique simultáneamente las desigualdades $|z| > 2$ y $|z| < 1$.

***Ejemplos* 12.2**:

(1) Dados un polinomio $P(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$ y una función analítica $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ en un disco $D(0; r)$, se tiene la serie de Laurent

$$P\left(\frac{1}{z}\right)+h(z)=\frac{a_m}{z^m}+\frac{a_{m-1}}{z^{m-1}}+\ldots+\frac{a_1}{z}+\overbrace{a_0+b_0}^{c_0}+b_1z+b_2z^2+b^3z^3+\ldots$$

con dominio de convergencia $D(0;0;r)=\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<r\}$. Este caso va a ser muy importante cuando estudiemos *singularidades aisladas* y *residuos*. Si h es a su vez, un polinomio, $h(z)=\sum_{n=0}^{k}b_nz^n$, la suma finita

$$P\left(\frac{1}{z}\right)+h(z)=\frac{a_m}{z^m}+\frac{a_{m-1}}{z^{m-1}}+\ldots+\frac{a_1}{z}+\overbrace{a_0+b_0}^{c_0}+b_1z+b_2z^2+b^3z^3+\ldots+b_kz^k$$

se denomina *polinomio de Laurent* y su dominio es, obviamente $\mathbb{C}-\{0\}$.

Con leves variantes que incluyen la utilización de coeficientes más generales, estos polinomios han jugado un papel muy importante en el desarrollo del álgebra (y la geometría) del siglo XX. A fines del mismo siglo, curiosa e inesperadamente, aparecieron estos polinomios en la Teoría de Nudos, cuando en 1984 Vaughan Jones descubre los polinomios de Laurent que hoy se conocen como *polinomios de Jones*.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}+1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\ldots+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{2^3}$ converge sii $1<|z|<2$, es decir en la corona $D(0;1;2)$. En este caso es muy sencillo descubrir que converge a una función elemental muy sencillita, gracias - nuevamente - a las series geométricas:

$$\ldots+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1-1+1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{2^3}=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-1+\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{z}{z-1}-1+\frac{2}{2-z}$$

De todos modos, vuelvo a insistir, no siempre una serie convergente termina siendo el desarrollo de una función «conocida». Lo mismo pasa con las series numéricas. La serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n)\sqrt{n}}{n^n+n!+2^n}$ converge (vertiginosamente) a un número real. Seguramente usted no conocía ese número, y le aseguro que yo tampoco. Si quiere podemos bautizarlo con el nombre *Carlos* y lo abreviamos con la letra griega κ (= *kappa*; utilizar letras griegas siempre otorga un poco de glamour y prestigio académico…). Podríamos aprovechar para patentar la función entera $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n)\sqrt{n}\,(z-i)^n}{n^n+n!+2^n}$. Si tiene alguna utilidad o importancia, es otra cuestión.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{n^n}+1+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,z^n=\ldots+\frac{1}{3^3z^3}+\frac{1}{2^2z^2}+\frac{1}{z}+1+z+\sqrt{2}z^2+\sqrt{3}z^3+\ldots$ Aquí también el dominio de convergencia es sencillito de detectar (ejercicio) y resulta que la serie de

Laurent converge sii $0<|z|<1$. Es decir, su dominio de convergencia es el disco reducido $D(0;0;1)=\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1\}$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^n}=\ldots+\frac{2^3}{z^3}+\frac{2^2}{z^2}+\frac{2}{z}+0+z+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{3^3}+\ldots$ Este es parecido al anterior y resulta que la serie de Laurent converge sii $2<|z|$ (ejercicio). Es decir, su dominio de convergencia es $D(0;2;\infty)=\{z\in\mathbb{C}:2<|z|\}$.

(5) Como último ejemplo, pongamos algo bonito y conocido. La siguiente serie de Laurent converge en $D(0;0;\infty)=\mathbb{C}-\{0\}$ y converge a la función indicada (comprobarlo como ejercicio) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{n!}+2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^{\frac{1}{z}}+e^z$

La Proposición 12.1 que venimos de probar y enunciar, establece que las series de Laurent definen funciones holomorfas en sus coronas de convergencia. El siguiente Teorema de Laurent afirma que, recíprocamente, toda función holomorfa en una corona admite un desarrollo en serie de Laurent, y además explicita una fórmula para los coeficientes de la serie que generalizan las Fórmulas Integrales de Cauchy. Una de las consecuencias más importantes de estas fórmulas es «filosófica»: demuestra la unicidad de los coeficientes de una serie de Laurent.

***Proposición* 12.2**: (*Teorema de Laurent*)

Sea $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto que contiene una corona circular $D(z_0;\rho_1;\rho)=\{z\in\mathbb{C}:\rho_1<|z-z_0|<\rho_2\}$. Entonces, para cada $z\in D(z_0;\rho_1;\rho_2)$ se tiene el desarrollo en serie de Laurent

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n \qquad (12.13)(a)$$

donde los coeficientes están dados por las fórmulas

$$\forall n\in\mathbb{Z}:\quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \qquad (12.13)(b)$$

En estas fórmulas, C puede ser cualquier circuito simple positivo contenido en la corona $D(z_0;\rho_1;\rho_2)$ y cuyo recinto interior contenga al punto z_0.

Demostración: El truco es muy parecido al que utilizamos en la demostración de la analiticidad de las holomorfas y se sugiere ir mirando la figura 2 a medida que preparamos el terreno. Dado un punto $z \in D(z_0;\rho_1;\rho_2)$, consideremos las tres circunferencias siguientes, consideradas como circuitos simples y orientadas en el sentido inducido por las parametrizaciones que damos a continuación, lo que está indicado en la Figura 2 (flechitas negras):

$$C_R = \{z_0 + Re^{it} : 0 \le t \le 2\pi\} \;,\; C_r = \{z_0 + re^{it} : 0 \le t \le 2\pi\} \;,\; \Gamma = \{z + \delta e^{it} : 0 \le t \le 2\pi\}$$

Los radios de estas circunferencias verifican las desigualdades necesarias y suficientes para que la corona cerrada $\overline{D(z_0;r;R)}$ esté contenida en la corona abierta $D(z_0;\rho_1;\rho_2)$ y además que el disco cerrado $\overline{D(z;\delta)}$ esté contenido en la corona abierta $D(z_0;r;R)$ (Ver figura 2, de nuevo). Por si no tiene ganas de hacer las cuentas para deducir esas desigualdades, se las paso: $\rho_1 < r < |z - z_0| - \delta < |z - z_0| + \delta < R < \rho_2$; ya que estamos, si se toma el trabajo de verificarlas y encuentra algún error, por favor avíseme. Ahora, es el momento de aplicar la forma generalizada del Teorema de Cauchy-Goursat a las integrales de la función $h(w) = \dfrac{f(w)}{w - z}$, que es holomorfa en $D - \{z\}$, en las tres circunferencias dadas. La versión generalizada del teorema es el Corolario 10.1, página 3, del Capítulo 10. De todos modos, si no quiere volver a ver ese corolario, es muy sencillo deducirlo a partir del Teorema de Cauchy-Goursat. Basta con sumar las integrales de h en cada uno de los triángulos de la triangulación representada gráficamente en la figura 2 mediante líneas y flechitas verdes. La integral de h en cada uno de los triángulos es 0 (por el Teorema de Cauchy-Goursat), y las integrales sobre las aristas que pertenecen a dos triángulos distintos se cancelan. En definitiva nos queda

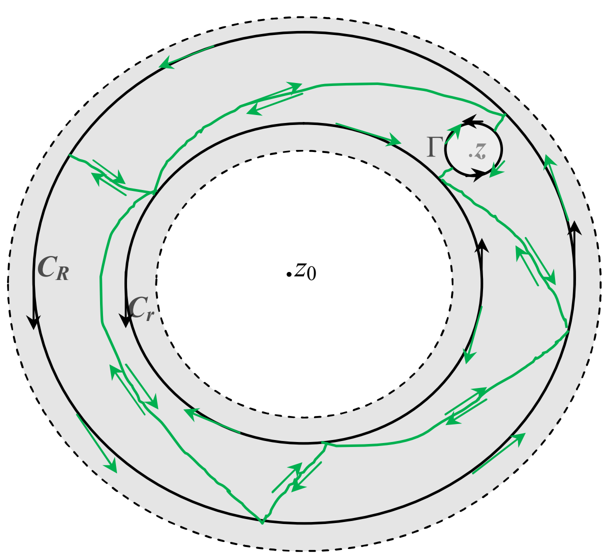


Fig 2

$$\oint_{C_R} h(w)dw - \oint_{C_r} h(w)dw - \oint_{\Gamma} h(w)dw = 0 \tag{12.14}$$

Ahora, lo que sigue son cuentitas utilizando la primera FIC y las series geométricas. En la justificación de uno de los pasos mencionamos el conjunto cerrado y acotado $K = \overline{D(z_0;r;R)} - D(z;\delta)$, que en la Fig. 2 aparece triangulado.

$$2\pi i f(z) \overset{FIC1}{=} \oint_{\Gamma} \frac{f(w)dw}{w-z} = \oint_{\Gamma} h(w)dw \overset{(12.14)}{=} \oint_{C_R} h(w)dw - \oint_{C_r} h(w)dw = \oint_{C_R} \frac{f(w)dw}{w-z} - \oint_{C_r} \frac{f(w)dw}{w-z} =$$

$$= \oint_{C_R} \frac{f(w)dw}{w-z_0-(z-z_0)} - \oint_{C_r} \frac{f(w)dw}{w-z_0-(z-z_0)} =$$

$$= \oint_{C_R} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{w-z_0}\right)} - \oint_{C_r} \frac{f(w)dw}{(z-z_0)\left(\dfrac{w-z_0}{z-z_0}-1\right)} =$$

$$= \oint_{C_R} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{w-z_0}\right)} + \oint_{C_r} \frac{f(w)dw}{(z-z_0)\left(1-\dfrac{w-z_0}{z-z_0}\right)} =$$

(en C_R: $\left|\dfrac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$ y en C_r: $\left|\dfrac{w-z_0}{z-z_0}\right| < 1$)

$$= \oint_{C_R} \frac{f(w)}{w-z_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n}\right)dw + \oint_{C_r} \frac{f(w)}{z-z_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^n}\right)dw =$$

(la convergencia uniforme de las series de potencias en K permite la integración término a término)

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\oint_{C_R} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}\right)(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\oint_{C_r} f(w)(w-z_0)^n dw\right)\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} =$$

(reemplazo de C_R y C_r por un circuito C como en el enunciado: Invariancia Homotópica, alias «propiedad elástica»)

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\oint_{C} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}\right)(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\oint_{C} f(w)(w-z_0)^n dw\right)\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} =$$

(cambio de índice de suma en la segunda sumatoria: $k = n + 1$)

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\oint_{C} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}\right)(z-z_0)^n + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\oint_{C} f(w)(w-z_0)^{k+1} dw\right)\frac{1}{(z-z_0)^{k}} =$$

(cambio de índice de suma en la segunda sumatoria: $n = - k$)

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\oint_C \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}\right)(z-z_0)^n \; + \; \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\oint_C f(w)(w-z_0)^{-n+1}dw\right)\frac{1}{(z-z_0)^{-n}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\oint_C \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}\right)(z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\oint_C \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}\right)(z-z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\oint_C \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}\right)(z-z_0)^n \qquad \blacksquare$$

***Observación* 12.4**: Los casos de coronas con radio interior nulo y/o radio exterior infinito están incluidos, pues si el dominio *D* contiene una corona $D(z_0;0;R)$, entonces también contiene todas las coronas $D(z_0;r;R)$ donde $r < R$. Este caso va a ser el que estudiaremos a continuación, pues cuando esto ocurre z_0 se denomina *singularidad aislada* de *f*. Por otra parte, si el dominio *D* contiene una corona $D(z_0;r;+\infty)$, también contiene todas las coronas $D(z_0;r;R)$ donde $r < R$.

Las fórmulas (12.13)(b) son las Fórmulas Integrales de Cauchy (Capítulo X) pero ahora extendidas a enteros negativos. Implican, como ya hemos mencionado, la unicidad de los coeficientes de una serie de Laurent, y hemos observado la que esta unicidad es « filosóficamente » importante. Pero también las fórmulas (12.13)(b) tienen aplicaciones prácticas, como por ejemplo al cálculo de integrales definidas de funciones reales. El siguiente y sencillo ejemplo ilustra una de estas aplicaciones. Tomemos el último de los Ejemplos 12.2: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{n!} + 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = e^{\frac{1}{z}} + e^z$, desarrollo válido en $D(0;0;\infty) = \mathbb{C} - \{0\}$, que es el dominio de la función $f(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}}$ y que contiene todas las coronas circulares centradas en 0. Aquí hemos obtenido el desarrollo en serie de Laurent (centrado en 0) de *f* sin necesidad de calcular las integrales (12.13)(b) para obtener los coeficientes. Por lo tanto, tenemos todas esas integrales ya calculadas. Por ejemplo para cada $n \geq 1$ y para cualquier circuito simple positivo *C* cuyo recinto interior contenga al 0:

$$\frac{1}{n!} = c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^w + e^{\frac{1}{w}}}{w^{n+1}}dw \quad , \quad \frac{1}{n!} = c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^w + e^{\frac{1}{w}}}{w^{-n+1}}dw$$

mientras que $2 = c_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^w + e^{\frac{1}{w}}}{w}dw$. Estas integrales no son fáciles de calcular directamente y veamos un poco en detalle qué es lo que acabamos de hacer. Primero observamos que la «propiedad elástica» nos permite reemplazar cualquiera de los circuitos C por la circunferencia central unitaria. Parametrizando esta circunferencia como siempre, $w = e^{it}$, tenemos (para cada entero positivo n):

$$\frac{2\pi i}{n!} = \oint_C \frac{e^w + e^{\frac{1}{w}}}{w^{n+1}}dw = \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{it}} + e^{e^{-it}}}{e^{i(n+1)t}} ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi}[e^{\cos(t)+isen(t)} + e^{\cos(t)-isen(t)}]e^{-nit}dt =$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)}[e^{isen(t)} + e^{-isen(t)}]e^{-nit}dt = 2i\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)}\cos(sen(t))e^{-nit}dt =$$

$$= 2i\int_0^{2\pi}[e^{\cos(t)}\cos(sen(t))\cos(nt) - ie^{\cos(t)}\cos(sen(t))sen(nt)]dt =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}[e^{\cos(t)}\cos(sen(t))sen(nt)dt + 2i\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)}\cos(sen(t))\cos(nt)dt$$

Igualando partes real e imaginaria, obtenemos (para todo entero positivo n):

$$\int_0^{2\pi}[e^{\cos(t)}\cos(sen(t))sen(nt)dt = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos(t)}\cos(sen(t))\cos(nt)dt = \frac{\pi}{n!}$$

La primera integral es trivial, pues el integrando es impar y el intervalo de integración se puede reemplazar por $[-\pi,\pi]$. Pero la segunda no parece tan trivial. Tal vez usted quiera intentar calcularla mediante algún astuto cambio de variables y/o integración por partes. Yo no pienso hacerlo. Este es un primer ejemplo de cómo se pueden utilizar los teoremas que estamos viendo al cálculo de integrales definidas de funciones reales. Más adelante veremos - en estos apuntes y en las guías de ejercicios - otros métodos y ejemplos más interesantes. En general, la principal dificultad para calcular integrales definidas reales utilizando métodos de variable compleja reside en «traducir» la integral real a una integral compleja adecuada. Para esto hay ciertos recursos que practicaremos bastante.

Pasemos ahora al segundo tema del título de este capítulo: las singularidades aisladas. Primero las definimos, como corresponde. Recordemos la notación para un caso de corona circular que vamos a utilizar mucho:

$$D(z_0;0;r) \stackrel{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\} = D(z_0;r) - \{z_0\} \qquad (12.15)$$

En los primeros capítulos las denominábamos *discos reducidos*, pero por ahora preferimos la denominación y la notación de las coronas circulares, dado el tema que nos ocupa.

***Definición* 12.2:** Una *singularidad* de una función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en un abierto $D \subset \mathbb{C}$ es un punto $z_0 \in \mathbb{C} - D$, y este punto se denomina *singularidad aislada* sii existe $r > 0$ tal que $D(z_0;0;r) \subseteq D$, es decir, si f es holomorfa en $D(z_0;r) - \{z_0\}$.

En los siguientes ejemplo indicamos con *Sing*(*f*) el conjunto de singularidades de *f* y con *Singais*(*f*) el de sus singularidades aisladas. Obviamente, $Singais(f) \subseteq Sing(f)$. En cada ejemplo explicitamos el dominio, pues es parte de la definición de la función.

***Ejemplos* 12.3:**

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $D = \mathbb{C} - \{-i, i\}$, $Singais(f) = Sing(f) = \{-i, i\}$.

(2) $f(z) = \dfrac{1}{sen(z)}$, $D = \mathbb{C} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $Singais(f) = Sing(f) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(3) $f(z) = \dfrac{1}{sen\left(\dfrac{\pi}{z}\right)}$, $D = \mathbb{C} - \left(\{0\} \cup \left\{\dfrac{1}{k} : k \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\}\right)$,

$$Singais(f) = \left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\},\ Sin(f) = Singais(f) \cup \{0\}.$$

(4) $f(z) = Log(z)$, $D = \mathbb{C} - \{x \in \Re : x \le 0\}$, $Singais(f) = \varnothing$, $Sing(f) = \{x \in \Re : x \le 0\}$.

(5) $f(z) = \cos(z)$, $D = \mathbb{C}$, $Singais(f) = Sing(f) = \varnothing$.

(6) $f(z) = |z|$, $D = \varnothing$, $Singais(f) = \varnothing$, $Sing(f) = \mathbb{C}$.

Los dos últimos ejemplos son un poco alevosos: en el (5) el dominio no deja lugar para singularidades de ningún tipo mientras que en el (6) hay demasiado lugar. Puede discutirse si en este último ejemplo corresponde aplicar la definición, pero sería una discusión bizantina. Es por este tipo de razones que en muchos textos aclaran que el dominio *D* es no vacío, con lo cual al ejemplo (6) no le correspondería la definición. De todos modos, si no le gusta el ejemplo (6), no lo tome en cuenta.

Antes de pasar a un corolario del Teorema de Laurent, una observación bastante pava pero que puede ser útil: si el conjunto de singularidades de una función es finito, todas sus singularidades son aisladas. Es decir: si *Sing*(*f*) es finito, entonces $Singais(f) =$ *Sing*(*f*). Que no vale la recíproca se puede ver en el ejemplo (2) precedente.

***Corolario* 12.1**: Sea z_0 una singularidad aislada de una función $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en un abierto (no vacío…) $D \subset \mathbb{C}$ y sea $r > 0$ tal que $D(z_0;0;r) \subseteq D$. Entonces, para todo $z \in D(z_0;0;r)$ se tiene el desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

donde los coeficientes están dados por las fórmulas

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}$$

donde C puede ser cualquier circuito simple positivo contenido en la corona $D(z_0;0;r)$ y cuyo recinto interior contenga al punto z_0.

Demostración: No hay nada que demostrar, pues se trata de un caso particular de la Proposición 12.2: para todo par de radios $r_1 > 0$, $R_1 > 0$ tales que $0 < r_1 < R_1$, la corona cerrada $\overline{D(z_0;r_1;R_1)}$ está contenida en $D(z_0;0;r)$. ■

***Nota* 12.1**: De la misma demostración del Teorema de Laurent que hemos dado se deduce que el radio r puede ser el máximo posible o infinito, mientras que la corona $D(z_0;0;r)$ esté contenida en D. En particular, puede tomarse como r la distancia entre z_0 y la singularidad más próxima a z_0 (o las singularidades más próximas, pues puede haber más de una: ver ejemplo 12.3 (2)); o bien $r = \infty$ si f tiene una sola singularidad, es decir, si el dominio donde es holomorfa es $D = \mathbb{C} - \{z_0\}$.

CLASIFICACIÓN DE LAS SINGULARIDADES AISLADAS Y DEFINICIÓN DE RESIDUO

Sea z_0 una singularidad aislada de una función $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en un abierto $D \subset \mathbb{C}$ y sea

$$f(z) = \overbrace{\ldots + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0}}^{f_2(z):\ \text{parte principal}} + \overbrace{c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + c_3(z-z_0)^3 + \ldots}^{f_1(z)}$$

su desarrollo en serie de Laurent, válido para todo z en cierta corona $D(z_0;0;r) \subseteq D$. La serie que define a la función f_2, es decir, la parte de la serie de Laurent con exponentes negativos, se denomina ***parte principal*** del desarrollo. El coeficiente c_{-1}, se denomina ***residuo de f en z*$_0$** y se indica $RES(f, z_0)$.

De las fórmulas (12.13)(b) , es decir: $\forall n \in \mathbb{Z}: \quad c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$, tenemos que

$$RES(f,z_0) \overset{def}{=} c_{-1} \overset{(12.13)(b)}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(w)dw \qquad (12.16)$$

donde C es cualquier circuito simple positivo contenido en D y cuyo recinto interior contiene a z_0. La igualdad (12.16), entre un coeficiente de la serie de Laurent y la integral de f en un circuito, va a tener consecuencias prácticas muy importantes para el cálculo de integrales definidas reales. Pasemos ahora a la clasificación anunciada, que se hace a partir de la parte principal $f_2(z) = \ldots + \dfrac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dfrac{c_{n-1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots. + \dfrac{c_{-1}}{z-z_0}$. Por comodidad, vamos a introducir la función

$$\widehat{f}_2(w) = f_2\left(z_0 + \frac{1}{w}\right) = \ldots + c_{-n}w^n + c_{-n+1}w^{n-1} + \ldots + c_{-1}w = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n \qquad (12.17)$$

(está definida y es holomorfa en los puntos w tales que $|w| = \dfrac{1}{|z-z_0|} > \dfrac{1}{r}$). Ahora sí, la clasificación. Una singularidad aislada z_0 de f es:

(*I*) *Evitable* sii $f_2(z) = 0$ para todo $z \in D(z_0;0;r)$, es decir: si $c_{-n} = 0$ para todo entero positivo *n*.

(*II*) *Un polo de orden k* sii $\widehat{f}_2(w) = f_2\left(z_0 + \dfrac{1}{w}\right)$ es un polinomio de grado *k*, es decir, sii

$$f_2(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{k-1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \ldots. + \frac{c_{-1}}{z-z_0} \quad , \quad c_{-k} \neq 0$$

para todo $z \in D(z_0;0;r)$. En términos de los coeficientes esto equivale a la anulación $c_{-n} = 0$ para todo entero $n \geq k+1$. Observe que, efectivamente, resulta que en este caso $f_2\left(z_0 + \dfrac{1}{w}\right) = c_{-k}w^k + c_{-k+1}w^{k-1} + \ldots + c_{-1}w$ es un polinomio de grado *k*. Los polos de orden 1 también se llaman *simple*s, los de orden 2 *dobles*, etc.

(*III*) *Una singularidad esencial* sii no es ni evitable ni un polo, es decir, si $\widehat{f_2}(w) = f_2\left(z_0 + \dfrac{1}{w}\right)$ no es un polinomio (ni nulo ni de cualquier grado). En términos de los coeficientes, esto significa que en el conjunto $\{c_{-1}, c_{-2}, c_{-3}, ..., c_{-n}, ...\} = \{c_{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ existen infinitos elementos no nulos. Dicho de otro modo: para todo $k \in \mathbb{N}$ existe al menos un $n > k$ tal que $c_{-n} \neq 0$.

Intuyo que se requieren ejemplos con urgencia. Van ahora algunos sencillitos como para comenzar; más adelante en estos apuntes y en la práctica veremos ejemplos más sofisticados. Aprovechamos para exhibir los residuos correspondientes

***Ejemplos* 12.4:**

(1) $f(z) = \dfrac{sen(z)}{z}$, $D = \mathbb{C} - \{0\}$, $Sing(f) = Singais(f) = \{0\}$. El desarrollo de Laurent en torno de 0 es inmediato, pues para todo $z \neq 0$:

$$f(z) = \frac{sen(z)}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ...$$

Por lo tanto la parte principal es nula y 0 es una singularidad evitable de *f*. Obviamente, *RES*(*f*,0) = 0.

(2) $f(z) = \dfrac{sen(z)}{z^4}$, $D = \mathbb{C} - \{0\}$, $Sing(f) = Singais(f) = \{0\}$. El desarrollo de Laurent en torno de 0 es totalmente análogo y se tiene para todo $z \neq 0$:

$$f(z) = \frac{sen(z)}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...\right) = \overbrace{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z}}^{f_2(z)} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \frac{z^5}{9!} - ...$$

Por lo tanto, 0 es un polo triple de f y $RES(f,0) = -\dfrac{1}{3!}$.

(3) $f(z) = \dfrac{sen(z)}{z^5}$, $D = \mathbb{C} - \{0\}$, $Sing(f) = Singais(f) = \{0\}$. El desarrollo de Laurent en torno de 0 ya resulta aburrido y se tiene para todo $z \neq 0$:

$$f(z) = \frac{sen(z)}{z^5} = \frac{1}{z^5}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...\right) = \overbrace{\frac{1}{z^4} - \frac{1}{3!z^2}}^{f_2(z)} + \frac{1}{5!} - \frac{z^2}{7!} + \frac{z^4}{9!} - ...$$

Por lo tanto, 0 es un polo de orden 4 de f y $RES(f,0)=0$. El sentido de este ejemplo el siguiente: si z_0 es singularidad evitable, el residuo $RES(f;z_0)$ es nulo, obviamente, pues son nulos todos los coeficientes $c_{-n}=0$ para todo entero positivo n. Pero la recíproca no es cierta, como muestra este ejemplo. Aquí el residuo $RES(f;0)$ es nulo y 0 no es singularidad evitable. Un ejemplo mucho más sencillo es el de la función racional $Q(z)=\dfrac{1}{z^2}$, cuya única singularidad es 0 (obviamente es aislada), cuyo desarrollo de Laurent centrado en 0 está a la vista y el residuo $RES(Q;0)$ es evidentemente nulo.

(4) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}+e^{z}$, $D=\mathbb{C}-\{0\}$, $Sing(f)=Singais(f)=\{0\}$. El desarrollo de Laurent en torno de 0 también es inmediato, pues para todo $z\neq 0$:

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}+e^{z}=\overbrace{\ldots+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{z}}^{f_2(z)=e^{\frac{1}{z}}-1}+2+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots$$

Por lo tanto, 0 es una singularidad esencial y $RES(f,0)=1$.

(5) Algunos ejemplos muy sencillos y variados pueden construirse a pedido del público. Por ejemplo: si usted quiere una función con un polo triple en i con residuo 3, tiene a mano las funciones $f(z)=\dfrac{c_{-3}}{(z-i)^3}+\dfrac{c_{-2}}{(z-i)^2}+\dfrac{3}{z-i}+g(z)$, donde c_{-3} y c_{-2} son dos constantes complejas cualesquiera ($c_{-3}\neq 0$ para que el polo sea triple) y g es una función entera cualquiera.

(6) Este va a ser menos sencillo de estudiar: $f(z)=\dfrac{1}{sen(z)}$, $D=\mathbb{C}-\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$, $Sing(f)=Singais(f)=\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$. Elijamos la singularidad $z_1=\pi$ e intentemos encontrar el desarrollo de Laurent de f en un entorno reducido de $z_1=\pi$. La función *sen* es entera, por lo tanto admite desarrollo de Taylor en torno de $z_1=\pi$ convergente en todo el plano. Por otra parte la distancia de $z_1=\pi$ a las singularidades de f más próximas (que son 0 y 2π) es π, por lo tanto, si $r\leq\pi$, para cada $z\in D(\pi;r)$

$$f(z)=\frac{1}{sen(z)}=\frac{1}{sen(\pi)+sen'(\pi)(z-\pi)+\frac{1}{2!}sen''(\pi)(z-\pi)^2+\frac{1}{3!}sen^{(3)}(\pi)(z-\pi)^3+\ldots}=$$

$$= \frac{1}{-(z-\pi)+\frac{1}{3!}(z-\pi)^3-\frac{1}{5!}(z-\pi)^5+\ldots} = \frac{1}{(z-\pi)}\overbrace{\left(\frac{1}{-1+\frac{1}{3!}(z-\pi)^2-\frac{1}{5!}(z-\pi)^3+\ldots}\right)}^{h(z)}$$

La función $\frac{1}{h(z)} = g(z) = -1+\frac{1}{3!}(z-\pi)^2-\frac{1}{5!}(z-\pi)^3+\ldots$ es entera (es analítica en todo el plano pues la serie de potencias que la define tiene radio de convergencia infinito). Además $g(\pi)\neq 0$, por lo tanto $h(z)=\frac{1}{g(z)}$ es holomorfa en un entorno de π. Entonces, en un entorno reducido de π:

$$f(z) = \frac{1}{(z-\pi)}h(z) = \frac{1}{z-\pi}\left(h(\pi)+h'(\pi)(z-\pi)+\frac{1}{2!}h'(\pi)(z-\pi)^2+\ldots\right)=$$
$$=\overbrace{\frac{h(\pi)}{z-\pi}}^{f_2(z)}+h'(\pi)+\frac{1}{2!}h''(\pi)(z-\pi)+\frac{1}{3!}h^{(3)}(\pi)(z-\pi)^2+\ldots$$

Aquí tenemos el desarrollo de Laurent de f en torno de π, con parte principal $f_2(z)=\frac{h(\pi)}{z-\pi}=\frac{-1}{z-\pi}$. Por lo tanto, $z_1=\pi$ es un polo simple de f con residuo -1. Para aprovechar este cálculo, observemos que para cualquier circuito simple positivo C contenido en el dominio de f y cuyo recinto interior contenga al punto π y ninguna otra singularidad de f (en la Fig. 3 están graficados dos de estos circuitos) se verifica

$$\oint_C \frac{dz}{sen(z)} = \oint_C f(z)dz = 2\pi i\, RES(f;0) = -2\pi i$$

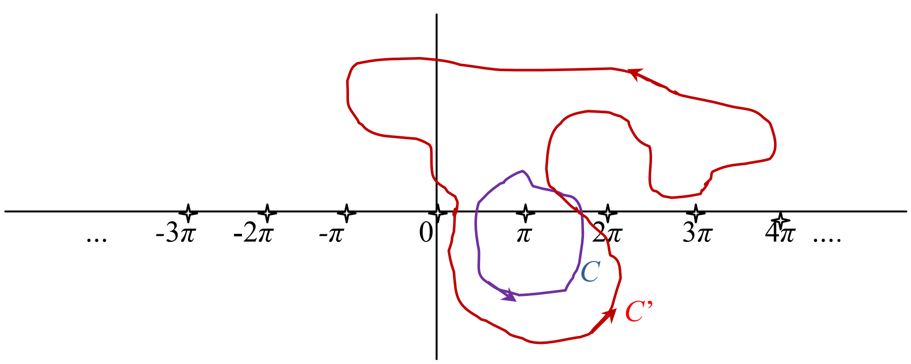


Fig. 3

También aprovechemos este ejemplo para ilustrar el teorema que sigue. La pregunta natural es qué pasa con un circuito simple *C”* contenido en el dominio de *f* y cuyo recinto interior contenga dos singularidades de *f*, por ejemplo 0 y 4π, como el indicado en la figura 4.

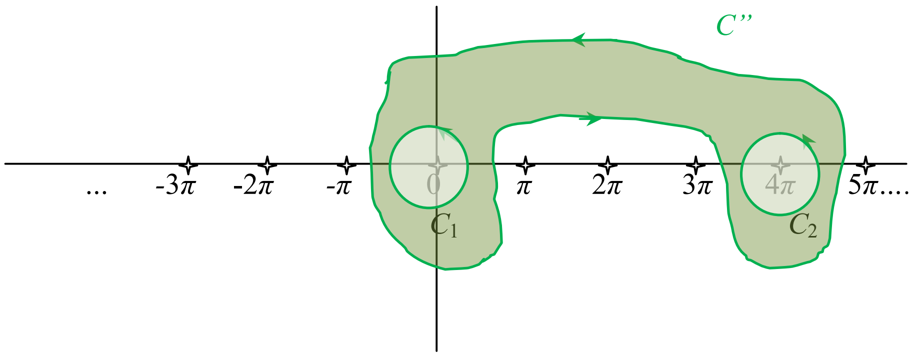


Fig. 4

Utilizando, una vez más, la forma generalizada del teorema de Cauchy-Goursat, es decir el Corolario 10.1, página 3, del Capítulo 10 (o triangulando la región sombreada, como ya hicimos varias veces), se tiene que la integral de f sobre C'' es la suma de sus integrales sobre las dos circunferencias contenidas en el recinto interior de C'' indicadas en la figura 4, ambas consideradas como circuitos simples positivos. A su vez, cada una de estas integrales se puede calcular mediante los correspondientes residuos, es decir (y resumiendo):

$$\oint_{C''} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz = 2\pi i\, RES(f;0) + 2\pi i RES(f;4\pi)$$

Dejamos como ejercicio el cálculo de estos residuos, utilizando el método que utilizamos más arriba para el cálculo del residuo en π, o bien dejarlo para después que veamos algunos truquitos para estos cálculos. El resultado es que ambos residuos valen 1 (que valgan lo mismo en ambos puntos tiene algo que ver con la periodicidad del seno y de su derivada), por lo tanto resulta

$$\oint_{C''} \frac{dz}{sen(z)} = 4\pi i$$

Como vemos, los residuos ayudan a calcular integrales. La idea ya la pudimos ver en estos ejemplos y la presentamos ahora en sociedad. Luego veremos algunos métodos para calcular residuos en polos (métodos que incluyen una forma práctica de detectar el orden del polo).

***Proposición* 12.3**: (*Teorema de los residuos*)

Sean: $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto $D \subset \mathbb{C}$ y C un circuito simple positivo contenido en D cuyo recinto interior contiene una cantidad finita z_1, z_2, z_3, …., z_m de singularidades aisladas [1] de f. Entonces,

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} RES(f; z_k) \qquad (12.18)$$

Demostración: Como el recinto interior de C es un abierto, para cada uno de los puntos z_k , $k \in \{1,2,...,m\}$, existe un radio $r_k > 0$ tal que $D(z_k; r_k) \subseteq RI(C)$. Eligiendo un radio positivo r menor que todos los radios r_1, r_2, r_3, …., r_m y menor que la mitad de todas las distancias entre los puntos z_1, z_2, z_3, …., z_m [2], tenemos disquitos cerrados $\overline{D(z_k; r)}$ incluidos en *RI*(C) y todos disjuntos entre sí. Ahora aplicamos, una vez más, la forma generalizada del teorema de Cauchy-Goursat, es decir el Corolario 10.1, página 3, del Capítulo 10 (o triangulando la región sombreada, como ya hicimos varias veces), al circuito C y las circunferencias $C_k = \{z_k + re^{it} : 0 \le t \le 2\pi\}$, $k \in \{1,2,...,m\}$:

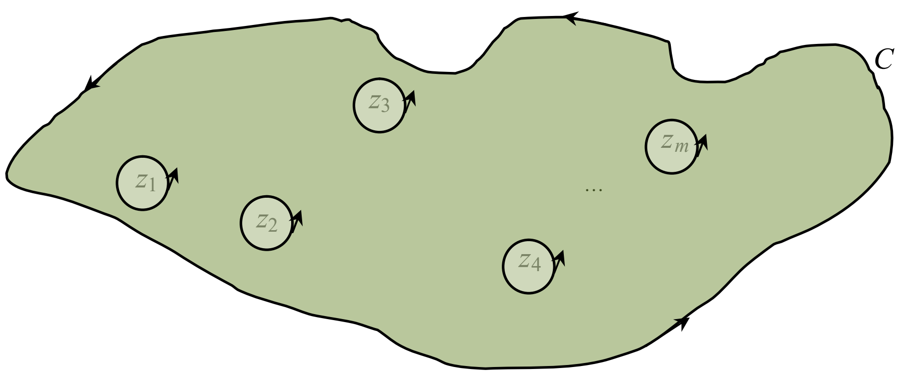


Fig. 5

[1] La hipótesis de que son aisladas es redundante: la nota que sigue es contundente.

[2] Un tal r existe porque el conjunto los $\{z_1, z_2, ..., z_m\}$ son finitos. Un ejemplo: $r = \frac{1}{2}\min\{\rho_1, \rho_2\}$, donde $\rho_1 = \min\{r_1, r_2, ..., r_m\}$ y $\rho_2 = \frac{1}{2}\min\{|z_k - z_l| : 1 \le k, l \le m\}$. Estos dos números, ρ_1, ρ_2, son positivos, por lo tanto r es positivo.

obteniendo, finalmente:

$$\oint_C f(z)dz \overset{Corolario\,10.1}{=} \sum_{k=1}^{m} \oint_{C_k} f(z)dz \overset{\substack{definición\\ de\ residuo}}{=} \sum_{k=1}^{m} 2\pi\, iRES(f;z_k) = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} RES(f;z_k)$$

■

Pasemos ahora a algunos criterios prácticos para detectar polos y calcular los residuos correspondientes. Aclaremos que, en algunos casos, el uso directo de la serie de Laurent puede resultar más efectivo que el criterio dado en la siguiente proposición.

RESIDUO EN UN POLO (*Y ALGO MÁS*)

La clave para lo que sigue es el siguiente teorema de Riemann. Recordemos que si z_0 es una singularidad aislada de una función holomorfa $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces existe $r > 0$ tal que $D_0(z_0;r) \subset D$, donde y $D_0(z_0;r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$. En particular, resulta que $D \cup \{z_0\}$ es un conjunto abierto.

***Proposición* 12.4** (*Teorema de Riemann sobre las singularidades evitables*)

Sea z_0 una singularidad aislada de la función $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, holomorfa en el abierto $D \subset \mathbb{C}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(*i*) Existe una extensión holomorfa de *f* al abierto $D \cup \{z_0\}$, es decir, una función holomorfa $\tilde{f}: D \cup \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{f}(z) = f(z)$ para todo $z \in D$.
(*ii*) Existe una extensión continua de *f* al abierto $D \cup \{z_0\}$, es decir, una función continua $\tilde{f}: D \cup \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{f}(z) = f(z)$ para todo $z \in D$.
(*iii*) Existe $r > 0$ tal que $D_0(z_0;r) \subset D$ y f es acotada en $D_0(z_0;r)$ [es decir: existe *K* real positivo tal que $|f(z)| \leq K$ para todo $z \in D_0(z_0;r)$]
(*iv*) $\underset{z \to z_0}{Lim} (z - z_0) f(z) = 0$

Demostración: Si probamos las implicaciones $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$, habremos probado las equivalencias entre las cuatro afirmaciones. Por suerte las primeras tres implicaciones $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ son inmediatas: la primera porque las holomorfas son continuas; la segunda porque $\widetilde{f}$ es acotada en un entorno $\overline{D(z_0;r)}$ de z_0 (por ser continua); la tercera porque $|z-z_0||f(z)| \le |z-z_0|K$ para todo $z \in D_0(z_0;r)$. Nos queda probar la última: $(iv) \Rightarrow (i)$. Sea $g : D \cup \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$g(z) = \begin{cases} (z-z_0)f(z) & si \quad z \in D \\ 0 & si \quad z = z_0 \end{cases}$$

Claramente, g es holomorfa en todos los puntos de D. Si probamos que es derivable en z_0, resultará holomorfa en $D \cup \{z_0\}$, pues entonces será derivable en todos los puntos de un entorno reducido de z_0. Pero

$$\underset{z \to z_0}{Lim} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \underset{z \to z_0}{Lim} \frac{(z-z_0)^2 f(z) - 0}{z-z_0} = \underset{z \to z_0}{Lim} (z-z_0) f(z) \overset{hip\,(iv)}{=} 0$$

Hemos probado que g es holomorfa en $D \cup \{z_0\}$ y que además $g(z_0) = g'(z_0) = 0$. Ahora, por ser holomorfa en $D \cup \{z_0\}$, es analítica (Teorema de Analiticidad de las Holomorfas). En particular admite un desarrollo de Taylor centrado en z_0:

$$g(z) = \overbrace{g(z_0)}^{=0} + \overbrace{g'(z_0)}^{=0}(z-z_0) + \tfrac{1}{2!} g''(z_0)(z-z_0)^2 + \tfrac{1}{3!} g^{(3)}(z_0)(z-z_0)^3 + \ldots$$

válido para todo z en un disco $D(z_0;\rho) \subseteq D \cup \{z_0\}$ de radio $\rho > 0$. Entonces, para todo $z \in D(z_0;\rho) - \{z_0\}$,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^2} = \tfrac{1}{2!} g''(z_0) + \tfrac{1}{3!} g^{(3)}(z_0)(z-z_0) + \tfrac{1}{4!} g^{(4)}(z_0)(z-z_0)^2 + \ldots$$

donde la serie de potencias del miembro derecho define una función analítica en el entorno $D(z_0;\rho)$ de z_0 y que coincide con f en entorno reducido $D(z_0;\rho) - \{z_0\}$. Por lo tanto, la función $\widetilde{f} : D \cup \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\widetilde{f}(z) = f(z)$ para todo $z \in D$ y $\widetilde{f}(z) = = \tfrac{1}{2!} g''(z_0) + \tfrac{1}{3!} g^{(3)}(z_0)(z-z_0) + \tfrac{1}{4!} g^{(4)}(z_0)(z-z_0)^2 + \ldots$ para todo $z \in D(z_0;\rho)$ es la extensión holomorfa buscada. ■

***Proposición* 12.5** (*Criterio práctico de clasificación de singularidades y cálculos de residuos en polos*)

Sea z_0 una singularidad aislada de la función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, holomorfa en el abierto $D \subset \mathbb{C}$. Entonces:

(a) z_0 es una singularidad evitable de f si y solamente si existe (y es finito) el límite $\underset{z \to z_0}{Lim} f(z)$. En este caso, la función $\tilde{f} : D \cup \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{f}(z) = f(z)$ para todo $z \in D$ y $\tilde{f}(z_0) = = \underset{z \to z_0}{Lim} f(z)$ es holomorfa en $D \cup \{z_0\}$.

(b) z_0 es un polo simple de f si y solamente si existe (y es finito y <u>no nulo</u>) $\underset{z \to z_0}{Lim} (z - z_0) f(z)$. En este caso, $RES(f; z_0) = \underset{z \to z_0}{Lim} (z - z_0) f(z)$.

(c) z_0 es un polo de orden $k \geq 2$ de f si y solamente si existe (y es finito y <u>no nulo</u>) $\underset{z \to z_0}{Lim} (z - z_0)^k f(z)$. En este caso, $RES(f; z_0) = \dfrac{1}{(k-1)!} \underset{z \to z_0}{Lim} \dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)]$.

(d) z_0 es una singularidad esencial de f si y solamente si <u>no existen</u> (o son infinitos) los límites $\underset{z \to z_0}{Lim} (z - z_0)^k f(z)$ para ningún $k \geq 0$.

Demostración: La presento con cierto detalle por ser una de las últimas proposiciones de estos apuntes y por un par de razones más que no vienen al caso.

Sea $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ el desarrollo de Laurent de f en un entorno reducido $D_0(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ de z_0. Veamos punto por punto:

Prueba de (a) Si z_0 es una singularidad evitable de f, entonces para todo $z \in D_0(z_0; r)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + ...$$

y por lo tanto $\underset{z \to z_0}{Lim} f(z) = c_0 \in \mathbb{C}$. Recíprocamente, si $\underset{z \to z_0}{Lim} f(z)$ existe y es finito, entonces z_0 es una singularidad evitable por la proposición anterior, pues existe una extensión continua de f al abierto $D \cup \{z_0\}$: la función $\tilde{f} : D \cup \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{f}(z) = f(z)$ para todo $z \in D$ y $\tilde{f}(z_0) = \underset{z \to z_0}{Lim} f(z)$.

Prueba de (b) Si z_0 es un polo simple de f, entonces para todo $z \in D_0(z_0; r)$:

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots$$

donde $c_{-1}\neq 0$. Entonces, $\underset{z\to z_0}{Lim}(z-z_0)f(z)=c_{-1}\neq 0$, y es el residuo de f en z_0. Recíprocamente, si existe y es finito y no nulo el límite $\underset{z\to z_0}{Lim}(z-z_0)f(z)$, por existir el límite finito y por el ítem (*a*) ya probado resulta que z_0 es singularidad evitable de $g(z)=(z-z_0)f(z)$, por lo tanto tenemos un desarrollo de Laurent de *g* centrado en z_0 :

$$g(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots$$

válido para todo *z* en un entorno reducido de z_0. Por lo tanto, para todo *z* en dicho entorno reducido se tiene

$$f(z)=\frac{g(z)}{z-z_0}=\frac{a_0}{z-z_0}+a_1+a_2(z-z_0)+a_3(z-z_0)^2+\ldots$$

donde $a_0=\underset{z\to z_0}{Lim}g(z)=\underset{z\to z_0}{Lim}(z-z_0)f(z)\neq 0$. Es decir: z_0 es un polo simple.

Prueba de (*c*) Si z_0 es un polo de orden $k\geq 2$ de *f*, entonces para todo $z\in D_0(z_0;r)$:

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}}+\ldots\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots$$

donde $c_{-k}\neq 0$. Entonces, para todo $z\in D_0(z_0;r)$:

$$(z-z_0)^k f(z)=c_{-k}+c_{-k+1}(z-z_0)+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{k-1}+c_0(z-z_0)^k+c_1(z-z_0)^{k+1}+\ldots \tag{12.19}$$

y por lo tanto existe, es finito y no nulo $\underset{z\to z_0}{Lim}(z-z_0)^k f(z)=c_{-k}\neq 0$. Ahora, la serie del segundo miembro de (12.19) define una función analítica *h* en todo el entorno $D(z_0;r)$ (no reducido) de z_0, que coincide con $(z-z_0)^k f(z)$ para todo $z\in D_0(z_0;r)$. Tenemos entonces el desarrollo de Taylor

$$h(z)=h(z_0)+h'(z_0)(z-z_0)+\ldots+\frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}(z-z_0)^{k-1}+\frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k+\ldots$$

válido para todo $z\in D(z_0;r)$. Por lo tanto, para todo $z\in D_0(z_0;r)$ es

$$f(z)=\frac{h(z)}{(z-z_0)^k}=\frac{h(z_0)}{(z-z_0)^k}+\frac{h'(z_0)}{(z-z_0)^{k-1}}+...+\frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!(z-z_0)}+\frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}+\frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)+...$$

y por lo tanto (unicidad de los coeficientes de las series de Laurent):

$$RES(f;z_0)=c_{-1}=\frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} \qquad (12.20)$$

Esta igualdad demuestra la fórmula del enunciado, pues para todo $z\in D_0(z_0;r)$ se tiene la igualdad $h^{(k-1)}(z)=\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]$ (además hay que tener en cuenta que h^{k-1} es continua en todo el disco no reducido $D(z_0;r)$)

Recíprocamente, si existe (y es finito) $\underset{z\to z_0}{Lim}(z-z_0)^k f(z)$, por lo probado en (*a*), z_0 es singularidad evitable de $g(z)=(z-z_0)^k f(z)$ y entonces se tiene un desarrollo $g(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+...$ en un entorno reducido de z_0. Para todo z en dicho entorno tenemos entonces

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^k}=\frac{a_0}{(z-z_0)^k}+\frac{a_1}{(z-z_0)^{k-1}}+...+\frac{a_{k-1}}{z-z_0}+a_k+a_{k+1}(z-z_0)+a_{k+2}(z-z_0)^2+...$$

donde $a_0=g(z_0)=\underset{z\to z_0}{Lim}\,g(z)=\underset{z\to z_0}{Lim}(z-z_0)^k f(z)\neq 0$. Por lo tanto, efectivamente z_0 es un polo de orden k de f.

Prueba de (*d*) Si z_0 es una singularidad aislada, es esencial sii no es evitable ni polo. Por lo tanto (*d*) es consecuencia inmediata de lo probado en (*a*), (*b*) y (*c*). ■

***Observación* 12.5**: En los límites de la forma la forma $\underset{z\to z_0}{Lim}(z-z_0)^k f(z)$ es frecuente la aparición de cocientes que involucran indeterminaciones del tipo « $\frac{0}{0}$ ». En estos casos, se puede utilizar la correspondiente «regla de l'Hôpital». Le pido por favor que vuelva a leer las observaciones 11.3 y 11.4 del capítulo XI sobre el uso y abuso de esta peligrosa herramienta.

***Observación* 12.6**: El Teorema de los Residuos y la última proposición implican una generalización de las Fórmulas integrales de Cauchy. Recordemos estas fórmulas (Capítulo X , Corolario 10.5, página 14). Con mínimas variaciones de notación, establecen que si $h:D\longrightarrow\mathbb{C}$ es holomorfa en un abierto $D\subseteq\mathbb{C}$ y C es un circuito simple contenido en D tal que su recinto interior también está contenido en D, para cualquier punto $z_0\in RI(C)$ y cualquier entero $k\geq 1$ se verifica la igualdad

$$\frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{h(w)dw}{(w-z_0)^k} \qquad (12.21)$$

Ahora bien, z_0 es singularidad aislada de la función $f: D-\{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-z_0)^k}$, cuyo desarrollo de Laurent centrado en z_0 es

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^k} = \frac{h(z_0)}{(z-z_0)^k} + \frac{h'(z_0)}{(z-z_0)^{k-1}} + \frac{\frac{1}{2!}h''(z_0)}{(z-z_0)^{k-2}} + \ldots + \frac{\frac{1}{(k-1)!}h^{(k-1)}(z_0)}{z-z_0} +$$

$$+ \tfrac{1}{k!}h^{(k)}(z_0) + \tfrac{1}{(k+1)!}h^{(k+1)}(z_0)(z-z_0) + \tfrac{1}{(k+2)!}h^{(k+2)}(z_0)(z-z_0)^2 + \ldots$$

Por lo tanto, z_0 es un polo de orden $\leq k$ (o una singularidad evitable si h y todas sus derivadas hasta el orden k-1 se anulan en z_0), pero en todos los casos, el residuo de f en z_0 es $\dfrac{1}{(k-1)!}h^{(k-1)}(z_0)$. Puesto que z_0 es la única singularidad de f en $RI(C)$, por el Teorema de los Residuos tenemos que

$$\frac{2\pi i}{(k-1)!}h^{(k-1)}(z_0) = RES(f; z_0) = \oint_C f(w)dw = \oint_C \frac{h(w)dw}{(w-z_0)^k}$$

Es decir: la Fórmula Integral de Cauchy (12.21). Desde luego, esto no minimiza la importancia de estas fórmulas, puesto que el Teorema de los Residuos es otra de las tantas consecuencias de aquellas fórmulas (en realidad, de la Primera Fórmula Integral de Cauchy). En el siguiente ejemplo veremos un caso donde no se puede aplicar ninguna de las Fórmulas Integrales de Cauchy, pero sí el Teorema de los Residuos.

***Ejemplo* 12. 5**: Calculemos la integral $\oint_C \dfrac{dz}{(e^z-1)^2}$, siendo C el pentágono regular de la figura 6, inscripto en la circunferencia central unitaria y considerado como circuito simple positivo.

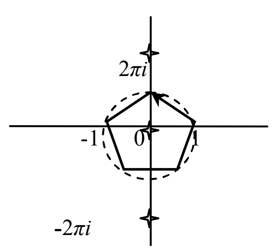


Fig.6

Obsérvese que para el cálculo de esta integral no podemos utilizar ninguna de las Fórmulas Integrales de Cauchy. Vamos por el Teorema de los Residuos. Las singularidades de $f(z)=\dfrac{1}{(e^z-1)^2}$ son $z_k=2k\pi i$, $k\in \mathbb{Z}$. En el recinto interior de C la única es z_0 = 0, por lo tanto:

$$\oint_C \frac{dz}{(e^z-1)^2}=\oint_C f(z)dz=2\pi i RES(f;0)$$

Lo único que tenemos que hacer, entonces, es calcular el residuo en cuestión. Obviamente 0 no es una singularidad evitable, pues no existe el límite $\underset{z\to 0}{Lim} f(z)$ (nos interesan solamente los límites finitos). Veamos el límite $\underset{z\to 0}{Lim}(z-0)f(z)$: se trata de una indeterminación « $\dfrac{0}{0}$ » pues $z\,f(z)=\dfrac{z}{(e^z-1)^2}$. Aplicando l'Hôpital tenemos el cociente $\dfrac{1}{2(e^z-1)e^z}$, que no tiene límite finito cuando z tiende a 0. Por lo tanto, 0 no es un polo simple de f. Veamos entonces $\underset{z\to 0}{Lim}(z-0)^2 f(z)$. Aquí también tenemos una indeterminación « $\dfrac{0}{0}$ », pues $z^2 f(z)=\dfrac{z^2}{(e^z-1)^2}$. Aquí no conviene aplicar la regla de l'Hôpital directamente a este cociente, pues es mucho más sencillo aplicarla a $\dfrac{z}{e^z-1}$, obteniendo que $\underset{z\to \pi}{Lim}\dfrac{z}{e^z-1}=1$, de donde resulta que el límite de $z^2 f(z)=\dfrac{z^2}{(e^z-1)^2}=\left[\dfrac{z}{e^z-1}\right]^2$ también es 1. Por lo tanto estamos en el caso (c) de la proposición anterior (con k = 2): 0 es un polo doble de f y además podemos calcular el residuo mediante la fórmula allí demostrada:

$$(RES(f;0)=\frac{1}{(2-1)!}\underset{z\to \pi}{Lim}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}[z^2 f(z)]=\underset{z\to \pi}{Lim}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{e^z-1}\right]^2=$$

$$=\underset{z\to \pi}{Lim}\left[2\times\frac{z}{e^z-1}\times\frac{e^z-1-ze^z}{(e^z-1)^2}\right]==2\times\overbrace{\underset{z\to \pi}{Lim}\left[\frac{z}{e^z-1}\right]}^{=1}\times\underset{z\to \pi}{Lim}\left[\frac{e^z-1-ze^z}{(e^z-1)^2}\right]=$$

$$=2\times\underset{z\to \pi}{Lim}\left[\frac{e^z-1-ze^z}{(e^z-1)^2}\right]\overset{l'Hôpital}{=}2\times\underset{z\to \pi}{Lim}\left[\frac{e^z-e^z-ze^z}{2(e^z-1)e^z}\right]=2\times\underset{z\to \pi}{Lim}\left[\frac{-z}{2(e^z-1)}\right]=-1$$

(en un par de pasos hemos utilizado la regla de l'Hôpital sin avisar). Por lo tanto,

$$\oint_C \frac{dz}{(e^z-1)^2}=\oint_C f(z)dz=2\pi i RES(f;0)=-2\pi i$$

***Observación* 12.7**: En un entorno reducido de una singularidad esencial, las funciones holomorfas tienen un comportamiento extremadamente complicado y violento. En particular, no solamente no son acotadas en dicho entorno si no que tampoco tienen límite infinito. Este comportamiento despertó la atención de los matemáticos del siglo XIX y el estudio de este fenómeno culminó con el asombroso resultado que hoy se conoce como *Gran Teorema de Picard*: «Si z_0 es una singularidad esencial de una función holomorfa f, entonces en cualquier entorno reducido de z_0 la función f toma todos los valores del plano complejo, salvo - eventualmente - uno solo. Además, toma esos valores infinitas veces». Pongámoslo con más detalle: sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto $D \subset \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad esencial de f, es decir: para todo $r > 0$ tal que el disco reducido $D_0(z_0;r) \subseteq D$, f es holomorfa en ese disco reducido y la parte principal del desarrollo de Laurent de f centrado en z_0 tiene infinitos términos no nulos (z_0 no es ni evitable ni polo de ningún orden). Entonces, lo que afirma el teorema es que para cualquier punto $w \in \mathbb{C}$ o bien para todo punto $w \in \mathbb{C} - \{w_0\}$, y para cualquier entorno reducido $D_0(z_0;r) \subseteq D$, existen infinitos puntos $z \in D_0(z_0;r)$ tales que $f(z) = w$. Otra forma de verlo: con los puntos de cualquier entorno reducido de una singularidad esencial, f cubre todo el plano complejo (salvo eventualmente un punto) y lo cubre infinitas veces: espeluznante… Si se siente atraído por las aventuras peligrosas, puede estudiar lo que ocurre con la función $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ en un entorno reducido cualquiera de 0. Es evidente que f nunca toma el valor 0, y lo que afirma entonces el teorema es que f transforma cualquier entorno $D_0(0;r)$ reducido de 0 en todo el abierto $\mathbb{C} - \{0\}$, y que además lo cubre infinitas veces. Le aconsejo mantener la calma y tener mucha prudencia al acercarse a 0.

Una curiosidad histórica: el autor de este teorema, Émile Picard (1856 - 1941) fue yerno de otro matemáico, Charles Hermite, el mismo que dejó su nombre asociado a las matrices complejas autoadjuntas que usted estudió en Álgebra II. Por último, si quiere saber por qué este teorema se llama Gran Teorema de Picard, puede buscar información sobre el Pequeño Teorema de Picard (no es un chiste).

***Nota* 12.2** (*momento cultural*) Una función *meromorfa* es una función holomorfa cuyas únicas singularidades son aisladas, y todas son polos. Un ejemplo típico de función meromorfa en un abierto conexo D es el cociente $h = \dfrac{f}{g}$ de dos funciones f y g holomorfas en D *y sin ceros comunes y* siendo g no idénticamente nula por razones obvias. La condición de que f y g no tengan ceros comunes no es tan restrictiva: si z_0 es un cero de f de orden k y también un cero de g de orden l, entonces en un entorno de z_0 tenemos $h = \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{(z-z_0)^k f_1(z)}{(z-z_0)^l g_1(z)}$, donde f_1 y g_1 son analíticas y ninguna se anula en z_0 (esto lo vimos cuando dedujimos el Principio de los Ceros Aislados). Entonces, podemos simplificar $h=\dfrac{(z-z_0)^{k-l}f_1(z)}{g_1(z)}$ o bien $h=\dfrac{f_1(z)}{(z-z_0)^{l-k}g_1(z)}$ según que k sea mayor o menor que l (o si son iguales). Las singularidades de h son los ceros de g (que son aislados, caso contrario sería idénticamente nula: Principio de los Ceros Aislados). Por lo tanto todas las singularidades de h son aisladas y le dejo como ejercicio probar que estas singularidades son polos. Más precisamente, los ceros de g de orden k son polos de h de orden k. El tema da para mucho más, pero dejamos por aquí. Ya es un capítulo demasiado extenso y todavía queda una última nota.

***Nota* 12.3** (*Residuo en infinito*) Sea $D\subseteq\mathbb{C}$ un abierto que contiene el exterior de un disco cerrado con centro en 0 salvo, eventualmente, una cantidad finita de singularidades $z_1,z_2,...,z_m$ (obviamente aisladas). Es decir: existe $r>0$ tal que $\{z_1,z_2,...,z_m\}\subset\{z\in\mathbb{C}:|z|>r\}$ y $\{z\in\mathbb{C}:|z|>r\}\subseteq D\cup\{z_1,z_2,...,z_m\}$. Dada una función holomorfa $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ y una circunferencia $C_R=\{Re^{it}:0\le t\le 2\pi\}$ de radio $R>r$, podemos hacer un cambio de variables [1] $w=\dfrac{1}{z}$ en la integral $\oint\limits_{C_R}f(z)dz$ y obtenemos

$$\oint\limits_{C_R}f(z)dz=\oint\limits_{C^{(-)}_{\frac{1}{R}}}f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{-dw}{w^2}=\oint\limits_{C_{\frac{1}{R}}}f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{dw}{w^2} \qquad (12.22)$$

donde $C_{\frac{1}{R}}=\{\frac{1}{R}e^{it}:0\le t\le 2\pi\}$ está recorrida en sentido positivo. La razón de la aparición de $C^{(-)}_{\frac{1}{R}}$, recorrida en sentido negativo (signo que cancelamos con el de - dw), es porque la inversión $w=\dfrac{1}{z}$ transforma C_R en $C^{(-)}_{\frac{1}{R}}$. Se recomienda hacer un dibujito y recordar que el sentido de recorrido de C_R « deja su recinto interior a la izquierda », y la inversión transforma este recinto interior en recinto exterior de $C_{\frac{1}{R}}$. Ahora, la última integral es la función $\breve{f}(w)=\dfrac{1}{w^2}f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ en $C_{\frac{1}{R}}$. Esta función es holomorfa en el recinto interior de la circunferencia $C_{\frac{1}{R}}$ excepto en 0 y en los puntos $w_1=\dfrac{1}{z_1},w_2=\dfrac{1}{z_2},..$ $...,w_m=\dfrac{1}{z_m}$. Por lo tanto,

$$\oint\limits_{C_R}f(z)dz=2\pi i\left(RES(g;0)+\sum_{k=1}^{\infty}RES\left(\breve{f};\frac{1}{z_k}\right)\right)\ ,\ \text{donde}\ \breve{f}(z)=\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) \qquad (12.23)$$

[1] Este paso requiere una buena justificación. ¿Se anima?

Esta fórmula se conoce como el *Teorema de los Residuos para el Recinto Exterior*, y el residuo de $-\breve{f}$ se denomina «residuo de f en infinito », es decir: $RES(f;\infty) =$ $RES(-\breve{f};0)$, donde $-\breve{f}(z) = -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$. La razón por la cual se le cambia el signo (cuestión de gustos) es la siguiente: en la integral $\oint\limits_{C_R^{(-)}} f(z)dz = -\oint\limits_{C_R} f(z)dz$ lo que «queda a la izquierda» del sentido de circulación es el recinto exterior de C_R, donde están, precisamente, las singularidades $z_1, z_2, ..., z_m$. Por lo tanto, cambiando todos los signos desde (12.22) en adelante se tiene, semánticamente, un «teorema de los residuos para el recinto exterior». Cerramos con un ejemplo.

***Ejemplo* 12.6**: Calculemos $\oint\limits_{\Gamma} \frac{z^3}{z^4 - 1} dz$, siendo Γ el cuadrado de vértices 2+2*i*, -2+2*i*, -2-2*i*, 2-2*i*, considerado como circuito simple positivo.

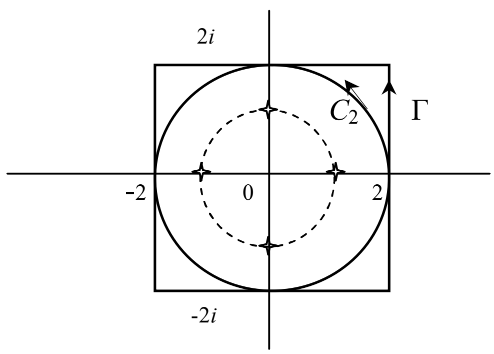


Fig.7

Las singularidades de $f(z) = \frac{z^3}{z^4 - 1} = \frac{z^3}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$ son las cuatro raíces de la unidad y las cuatro pertenecen al recinto interior de *Γ*. Por lo tanto, la integral se puede calcular aplicando astutamente la primera Fórmula Integral de Cauchy o bien utilizando el Teorema de los Residuos, es decir:

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{z^3}{z^4 - 1} dz = 2\pi i [RES(f;1) + RES(f;-1) + RES(f;i) + RES(f;-i)]$$

Es un cálculo bastante sencillo, dado que las cuatro singularidades son polos simples y se lo dejamos para que se divierta. Pero es más astuto (tampoco exageremos…) utilizar los «residuos exteriores», es decir, hacer el cambio de variable $z = \frac{1}{w}$ en la integral. El problema es que el cuadrado Γ se transforma en una curva bonita pero medio complicada. Pero esto se resuelve fácilmente utilizando primero la «propiedad elástica»:

la integral de f sobre Γ es igual a la integral de f sobre la circunferencia inscripta $C_2 = \{2e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$, cuya inversión es la circunferencia $C_{\frac{1}{2}}$ de centro 0 y radio ½ . Entonces,

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^3}{z^4 - 1} dz = \oint_{C_2} \frac{z^3}{z^4 - 1} dz = -\oint_{C_{\frac{1}{2}}^{(-)}} \frac{w^{-3}}{(w^{-4} - 1)} \frac{dw}{w^2} = \oint_{C_{\frac{1}{2}}} \frac{dw}{w(1 - w^5)}$$

Ahora, la única singularidad de $\breve{f}(w) = \dfrac{1}{w(1 - w^5)}$ en el recinto interior de $C_{\frac{1}{2}}$ es 0, y es un polo simple con residuo 1(ejercicio muy sencillito). Por lo tanto

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^3}{z^4 - 1} = \oint_{C_{\frac{1}{2}}} \frac{dw}{w(1 - w^5)} = 2\pi\, iRES(\breve{f};0) = 2\pi\, i\,,$$

cuenta que también se puede hacer utilizando la primera Fórmula Integral de Cauchy.