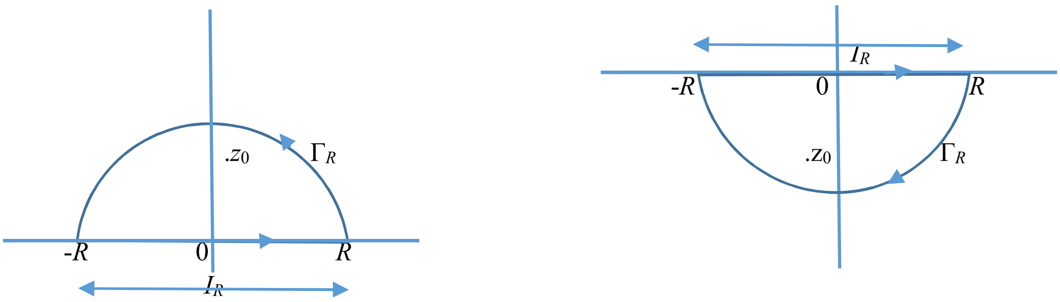
ANÁLISIS MATEMÁTICO III – PRIMER CUATRIMESTRE 2021
EXAMEN INTEGRADOR – PRIMERA FECHA – 06/08/2021
RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

1. Dado un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, considerar una función f holomorfa en $\mathbb{C} - \{z_0\}$. Establecer hipótesis sobre f que permitan calcular el valor principal de la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ a partir de $RES[f, z_0]$ y mostrar cómo se relacionan. ¿Puede asegurarse la convergencia de la integral impropia?

Resolución: Por lo estudiado y practicado en el curso, sabemos que debemos plantear algunas de las siguientes situaciones:



(a) caso Im(z_0) > 0

(b) caso Im(z_0) < 0

En ambos casos, el radio R de la semicircunferencia Γ_R es mayor que $|z_0|$. Y la idea básica es utilizar el teorema de los residuos:

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{I_R} f(z)dz = 2\pi i\, RES[f, z_0] \qquad (1)$$

y tomar límites cuando $R \longrightarrow +\infty$. El segundo miembro de (1) no depende de R y por lo tanto permanece constante. En el primer miembro tenemos

$$\int_{I_R} f(z)dz = \int_{-R}^{+R} f(x)dx \xrightarrow[R\to+\infty]{} vp\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \qquad (2)$$

Por lo tanto, si $\underset{R\to+\infty}{Lim} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$, obtenemos

$$vp\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2\pi i\, RES[f, z_0] \qquad (3)$$

Por lo tanto, las hipótesis más general que podemos establecer sobre *f* es, precisamente, que $\underset{R \to +\infty}{Lim} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$. Una hipótesis más fuerte, pero que puede aplicarse con frecuencia en la práctica, surge de la acotación (válida para todo $R > |z_0|$):

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)dz \right| \le Max\{|f(z)| : z \in \Gamma_R\}\pi R \qquad (4)$$

Pues si, por ejemplo, $Max\{|f(z)| : z \in \Gamma_R\} \le cR^{-\alpha}$ para alguna constante positiva c y a alguna constante real $\alpha > 1$, entonces es evidente que (4) implica $\underset{R \to +\infty}{Lim} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$.

***Observación* 1**: Si utilizamos la hipótesis $Max\{|f(z)| : z \in \Gamma_R\} \le cR^{-\alpha}$, tenemos, en particular, que para todo $R > |z_0|$ se verifica $|f(R)| \le \frac{c}{R^\alpha}$ y $|f(-R)| \le \frac{c}{R^\alpha}$, es decir: $|f(t)| \le \frac{c}{|t|^\alpha}$ para todo $t \in (-\infty, -|z_0|) \cup (|z_0|, +\infty)$. Dado que *f* es continua en toda la recta real, esta acotación implica la convergencia absoluta de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ (pues $\alpha > 1$). En cambio, la hipótesis más débil $\underset{R \to +\infty}{Lim} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$ solo garantizaría la existencia del valor principal.

***Observación* 2**: La utilización de residuos para el cálculo del valor principal de la integral impropia en el caso en que $z_0 \in \Re$ impone una limitación adicional: que esta singularidad sea un polo simple, como en el muy conocido ejemplo $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$.

***Observación* 3**: En lugar de las semicircunferencias Γ_R pueden utilizarse otros circuitos, por ejemplo rectángulos con un lado en el intervalo real I_R.

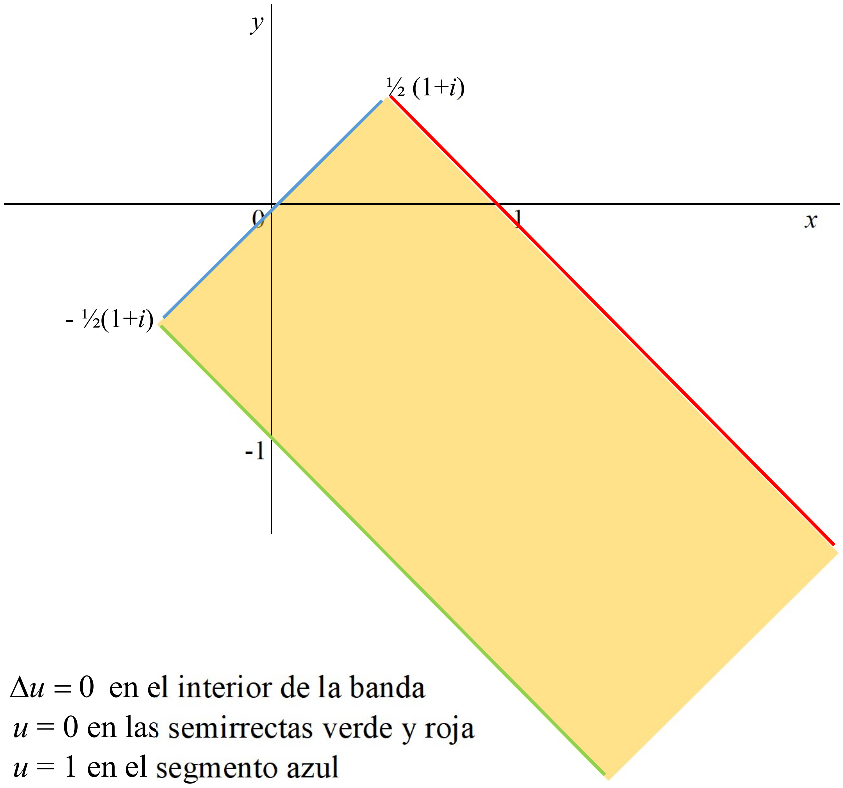
---

2. Modelar el problema del potencial electroestático en la banda infinita

$$\left\{ (x, y) \in \Re^2 : x > y \,, -x - 1 < y < -x + 1 \right\}$$

si en la frontera toma el valor 0, salvo en el segmento de puntos (x, x), donde es igual a 1. Dar ecuaciones de las líneas equipotenciales y de las líneas de corriente.

Resolución: Se trata del problema de Dirichlet esquematizado en el siguiente gráfico:



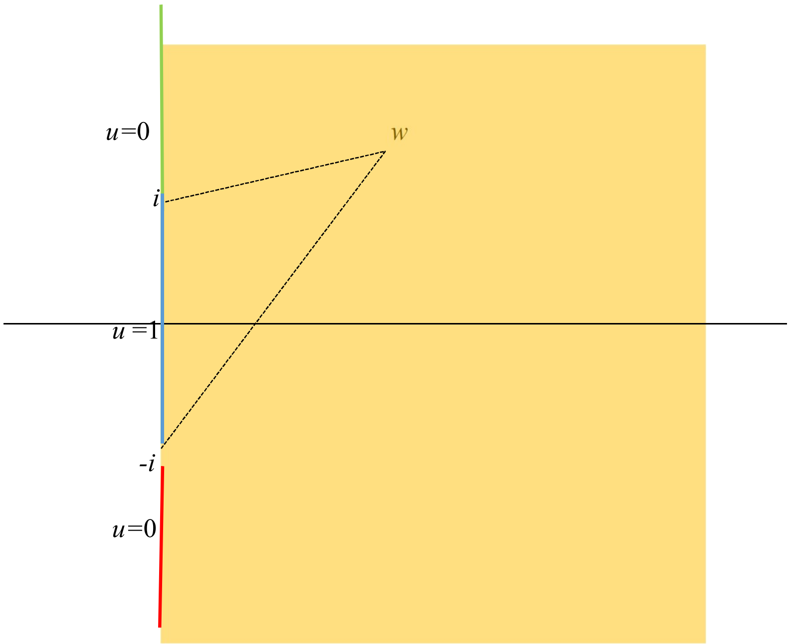
Para resolver este problema, donde las condiciones de contorno son seccionalmente constantes, podemos utilizar el método de las transformaciones conformes.

Primera transformación: $z \mapsto z_1 = e^{\frac{3\pi}{4}i} z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)z$: rotación en sentido antihorario en torno del origen y en ángulo $\dfrac{3\pi}{4}$. La banda gira en este sentido y en este ángulo en torno de 0 y queda ubicada verticalmente, apoyada en el segmento $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ de la recta real.

Segunda transformación: $z_1 \mapsto z_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} z_1$: dilatación de la banda, que queda en posición vertical pero ahora su base es el segmento $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (engordó un poquito….)

Tercera transformación: $z_2 \mapsto z_3 = sen(z_2)$: esta es la más violenta: extiende la banda en todo el semiplano superior (ver la figura siguiente, donde se ve una rotación de esta región y su frontera)

Cuarta transformación: $z_3 \mapsto w = -iz_3$: rotación en sentido anti-horario en torno del origen y en ángulo recto. Lo hacemos para trabajar más cómodamente con los argumentos. El resultado es el siguiente:



$$w=-iz_3=-isen(z_2)=-isen\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}z_1\right)=-isen\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)z\right)=isen\left(\frac{\pi}{2}(1-i)z\right)$$

Ahora, buscamos u en la forma $u=A\arg(w-i)+B\arg(w+i)+C$ y determinamos las constantes de manera que se verifiquen las condiciones de contorno:

(1) semirrecta verde: $A\frac{\pi}{2}+B\frac{\pi}{2}+C=0$

(2) segmento azul: $-A\frac{\pi}{2}+B\frac{\pi}{2}+C=1$

(3) semirrecta roja: $-A\frac{\pi}{2}-B\frac{\pi}{2}+C=0$

Resolviendo (sumar y restar ecuaciones ayuda….) resultan $A=-\frac{1}{\pi}$, $B=\frac{1}{\pi}$ y C = 0. Finalmente, entonces:

$$u=-\frac{1}{\pi}\arg(w-i)+\frac{1}{\pi}\arg(w+i)=-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(w-i)}{\mathrm{Re}(w-i)}\right)+\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(w+i)}{\mathrm{Re}(w+i)}\right)$$

donde

$$w=-iz_3=-isen(z_2)=-isen\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}z_1\right)=-isen\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)z\right)$$

(por favor, no confundir argumentos con arcotangentes….) Observemos que aquí podemos utilizar la función arcotangente pues los argumentos de w-i y de w+i varían entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Se puede completar la cuenta para obtener la forma explícita de u como función de x e y, es decir: de la parte real y de la parte imaginaria de z (no terminamos las cuentas aquí). Una conjugada armónica de u es

$$v = -\frac{1}{\pi}\ln|w-i| + \frac{1}{\pi}\ln|w+i|$$

pues la función $f(z) = -\frac{1}{\pi}Log(w-1) + \frac{1}{\pi}Log(w+i)$ (w es función holomorfa de z) es holomorfa en la región utilizada. Entonces, las ecuaciones de las líneas equipotenciales son u = cte y las ecuaciones de las líneas de corriente (= trayectorias ortogonales a las equipotenciales) son v = cte.

---

3. Dada $f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ -x+\pi & si \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$, encontrar constantes reales a, b y c de modo que $\int_0^{\pi} |f(x) - a - bsen(4x) - csen(10x)|^2 dx$ sea mínimo y explicar por qué es el mínimo valor. Resolver:

$$\begin{cases} (i)\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 & 0 < x < \pi \quad , \quad 0 < y < 2\pi \\ (ii)\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 & 0 \le y \le 2\pi \\ (iii)\ u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le \pi \\ (iv)\ u(x,2\pi) = sen(2x) & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Resolución: En el espacio de las funciones reales seccionalmente continuas en el intervalo $[0,\pi]$ tenemos el producto interno $< f, g > = \int_0^{\pi} f(x)g(x)dx$ (atención: en realidad se trata de un "casi"-producto interno, pues verifica todas las propiedades de los productos internos excepto la implicación $< f, f > = 0 \Rightarrow f = 0$; lo que sí es cierto es que si $<f,f> = 0$, entonces f es nula en todo el intervalo $[0,\pi]$ excepto a lo sumo una cantidad finita (o nula) de puntos de dicho intervalo, es decir: f es "casi nula"). La expresión integral $\int_0^{\pi} |f(x) - a - bsen(4x) - csen(10x)|^2 dx$ es el cuadrado de la distancia entre f y un elemento $a\alpha + b\beta + c\gamma$ del subespacio generado por las funciones $\alpha(x) = 1$ (constante), $\beta(x) = sen(4x)$ y $\gamma(x) = sen(10x)$. Entonces, como sabemos desde Álgebra II, el elemento más próximo a f en este subespacio es la proyección ortogonal de f a dicho subespacio. Por otra parte, estas tres funciones son ortogonales. Comprobemos esto y aprovechemos a calcular sus normas:

$$\int_0^{\pi} \alpha(x)^2 dx = \int_0^{\pi} dx = \pi$$

$$<\alpha,\beta> = \int_0^{\pi} \alpha(x)\beta(x)dx = \int_0^{\pi} sen(4x)dx = -\tfrac{1}{4}\cos(4\pi) + \tfrac{1}{4}\cos(0) = 0$$

$$<\alpha,\gamma> = \int_0^{\pi} \alpha(x)\gamma(x)dx = \int_0^{\pi} sen(10x)dx = -\tfrac{1}{10}\cos(10\pi) + \tfrac{1}{10}\cos(0) = 0$$

$$\int_0^{\pi} \beta(x)^2 dx = \int_0^{\pi} sen(4x)^2 dx = \tfrac{1}{2}[x - \tfrac{1}{4} sen(4x)\cos(4x)]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$<\beta,\gamma> = \int_0^{\pi} \beta(x)\gamma(x)dx = \int_0^{\pi} sen(4x)sen(10x)dx = \tfrac{1}{2}[-\tfrac{1}{6} sen(6x) + \tfrac{1}{14} sen(14x)]_{x=0}^{x=\pi} = 0$$

$$\int_0^{\pi} \gamma(x)^2 dx = \int_0^{\pi} sen(10x)^2 dx = \tfrac{1}{2}[x - \tfrac{1}{10} sen(10x)\cos(10x)]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Entonces, la proyección ortogonal de f sobre el subespacio generado por estas tres funciones es

$$\Pi(f) = \frac{<f,\alpha>}{\|\alpha\|^2}\alpha + \frac{<f,\beta>}{\|\beta\|^2}\beta + \frac{<f,\gamma>}{\|\gamma\|^2}\gamma$$

y los coeficientes buscados son:

$$a = \frac{<f,\alpha>}{\|\alpha\|^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx \quad ,$$

$$b = \frac{<f,\beta>}{\|\beta\|^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sen(4x)dx \quad \text{y}$$

$$c = \frac{<f,\gamma>}{\|\gamma\|^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sen(10x)dx$$

Dejamos las cuentitas “a cargo del lector”. Todo esto está explicado con más entusiasmo que eficiencia en los apuntes sobre Series de Fourier que están a disposición de todo el alumnado en la página de la materia.

Ahora, para resolver el problema planteado podemos simplificar las condiciones de contorno (sin alterar la ecuación) mediante la función

$$v(x,y) = u(x,y) - \frac{sen(2x)\cosh(2y)}{\cosh(4\pi)} \qquad (5)$$

Esta función es armónica sii lo es u (pues el segundo término del segundo miembro es una función armónica) y el problema queda, en términos de v:

$$\begin{cases} (i)\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0 & 0 < x < \pi \quad , \quad 0 < y < 2\pi \\ (ii)\ v(0,y) = v(\pi,y) = 0 & 0 \le y \le 2\pi \\ (iii)\ v(x,0) = f(x) - \dfrac{sen(2x)}{\cosh(4\pi)} & 0 \le x \le \pi \\ (iv)\ v(x,2\pi) = 0 & 0 \le x \le \pi \end{cases} \qquad (6)$$

Mediante separación de variables y tomando en cuenta las condiciones lineales de contorno (es decir: (*ii*) y (*iii*)) obtenemos

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen(nx) senh[n(y-2\pi)] \qquad (7)$$

La condición (*iii*) es, ahora:

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen(nx) senh(-2n\pi) = f(x) - \frac{sen(2x)}{\cosh(4\pi)}$$

Todo lo que sigue es clásico y popular: considerando la extensión $2\pi -$periódica impar $\widetilde{g}(x)$ de la función $g(x) = f(x) - \dfrac{sen(2x)}{\cosh(4\pi)}$, calculamos

$$c_n senh(-2n\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{g}(x) sen(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(x) sen(nx)dx$$

y resulta entonces: $c_n = -\dfrac{2}{\pi senh(2n\pi)}\displaystyle\int_0^{\pi} g(x) sen(nx)dx$.

---

4. Sea $f:\Re \longrightarrow \Re$ con $\hat{f}(\omega)=\dfrac{4-\omega^3}{(\omega^2+4)^7}$. Determinar a qué convergen cada una de las siguientes integrales:

$$(i)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} sen(t) f'\left(\frac{t-5}{2}\right) e^{-i\omega t}dt \qquad , \qquad (ii)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau-t)e^{-3|\tau|}d\tau\right)e^{-i\omega t}dt$$

Resolución: No se pretende que el alumno demuestre que f y f' son absolutamente integrables utilizando (por ejemplo) su transformada de Fourier y el teorema de inversión:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4-\omega^3}{(\omega^2+4)^7}e^{i\omega x}dx$$

Pero, por lo menos, podría mencionar que estas propiedades son necesarias para legitimar los siguientes cálculos:

$$(i)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} sen(t) f'\left(\frac{t-5}{2}\right) e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} f'\left(\frac{t-5}{2}\right) e^{-i\omega t}dt =$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(\frac{t-5}{2}\right)e^{-it(\omega-1)}dt-\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(\frac{t-5}{2}\right)e^{-it(\omega+1)}dt=$$

[cambio de variable: $x=\dfrac{t-5}{2}$, $t=2x+5$]

$$=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i(\omega-1)(2x+5)}2dx-\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i(\omega+1)(2x+5)}2dx=$$

$$=\frac{e^{-i(\omega-1)5}}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i2(\omega-1)x}dx-\frac{e^{-i(\omega+1)5}}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i2(\omega+1)x)}dx=$$

[propiedad: $\Im(f')(\omega)=i\omega\Im(f)(\omega)$ para todo $\omega\in\Re$: ver condiciones de aplicación]

$$=\frac{e^{-i(\omega-1)5}}{i}i2(\omega-1)\hat{f}[2(\omega-1)]-\frac{e^{-i(\omega+1)5}}{i}i2(\omega+1)\hat{f}[2(\omega+1)]=$$

$$=e^{-i5(\omega-1)}2(\omega-1)\frac{4-4(\omega-1)^2}{[4(\omega-1)^2+4]^7}-e^{-i5(\omega+1)}2(\omega+1)\frac{4-4(\omega+1)^2}{[4(\omega+1)^2+4]^7}$$

(ii) La función $\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau - t)e^{-3|\tau|}d\tau\right)e^{-i\omega t}dt$ es la transformada de Fourier de la convolución $f * g$, donde $g(t) = e^{-3|t|}$. Sobre la convergencia de la integral y las propiedades de la convolución puede consultarse, por ejemplo, el apunte sobre Transformación de Fourier a disposición en la página de la materia, y/o cualquiera de los textos recomendados en la bibliografía de la misma página. En el mencionado apunte se presenta como ejemplo la transformada de Fourier de la función $t \mapsto e^{-|t|}$, que es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-i\omega x}dx = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Mediante el cambio de variable de integración $x = 3t$, se tiene $3\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|}e^{-i\omega 3t}dt = \frac{2}{1+\omega^2}$; ahora, para $\alpha = 3\omega$: $3\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|}e^{-i\alpha t}dt = \frac{2}{1+\left(\frac{\alpha}{3}\right)^2}$ y por lo tanto la tranformada de Fourier de g es $\hat{g}(\omega) = \frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{\omega^2}{9}} = \frac{6}{9+\omega^2}$. Finalmente, entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau - t)e^{-3|\tau|}d\tau\right)e^{-i\omega t}dt = \widehat{(f * g)}(\omega) \overset{(1)}{=} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \frac{6(4-\omega^3)}{(\omega^2+4)^7(9+\omega^2)}$$

(1) El miembro izquierdo es la transformada de Fourier de $f * g$ y la igualdad está garantizada por el Teorema de Convolución.

---

5. Sea $f : [0,+\infty) \longrightarrow \Re$ continua a trozos y de orden exponencial tal que para todo $t \geq 0$

$$f(t) = 3t^2 - e^{-\alpha t} - \int_0^t f(\tau)e^{(t-\tau)}d\tau \ .$$

Determinar, si existen, los valores de α para los que la abscisa de convergencia de la transformada de Laplace de f resulta igual a cero. Hallar f en el caso $\alpha = 1$.

Resolución: La función $h(t) = H(t)\int_0^t f(\tau)e^{(t-\tau)}d\tau$ es la convolución de f con la exponencial (multiplicada por la función de Heaviside). Por lo tanto, aplicando la transformación de Laplace a la ecuación del enunciado:

$$F(s) = 3\frac{2!}{s^3} - \frac{1}{s+\alpha} - F(s)\frac{1}{s-1}$$

(donde F es la transformada de Laplace de f). Esta igualdad vale para todo complejo s tal que $\mathrm{Re}(s) > 1$, independientemente de α. Para $\alpha = 1$, tenemos, para $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$F(s)\left(1 + \frac{1}{s-1}\right) = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1} \quad .$$

Haciendo cuentas, resulta

$$F(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s(s+1)} = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1}$$

Por lo tanto, usando una tablita, tenemos que para todo $t \geq 0$:

$$f(t) = 3t^2 - t^3 + 1 - 2e^{-t}$$
