Análisis Matemático III
Examen Integrador. Quinta Fecha. 28 de febrero de 2019

1. *a*) Analizar convergencia y calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+4}$ aplicando variable compleja.

   b) Siendo $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ el desarrollo en serie de Taylor con centro en el origen de la función compleja $\dfrac{1}{z-2}$, considerar la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n sen(nx)$ y responder: ¿converge?, ¿de qué manera?, ¿para qué valores de x? Si converge, ¿cómo es la función a la que converge?

2. *a*) Sean $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n sen(n\pi x)$ su desarrollo en serie de Fourer de senos.

   Enunciar condiciones sobre f que garanticen que $lim_{N\to\infty} \displaystyle\sum_{N=1}^{\infty} b_n sen(n\pi x)$ existe para todo x real y bajo esas condiciones, decir cuál es el límite para cada x.

   b) Hallar la serie exponiencial de Fourer en $[-\pi,\pi]$ de $f(x) = e^{i(\pi-x)a}$ para $a \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$ y obtener $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2}$

3. Sea $f(x) = \dfrac{dx}{x^2-2x+4}$

   a) Estudiar la existencia de la transformada de Fourier de f y calcularla.

   b) Resolver

$$a = \begin{cases} u_{xx} = \dfrac{1}{c^2} u_t & -\infty < x < +\infty, t > 0 \quad (c > 0) \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

   y describir un problema físico que se pueda modelar mediante este sistema

4. *a*) Determinar si existe la transformada de Laplace de $f : [0,\infty] \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} sen(\dfrac{2\pi}{T} t) & (k-1)T \le t < kT/2 \\ 0 & kT/2 \le t \le kT \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}$$

   y dar su región de convergencia. Calcular dicha transformada.

   b) Hallar $y : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ que verifique la ecuación diferencial:

$$ty''(t) + ty'(t) + y(t) = 0$$

   con condiciones iniciales $y(0) = 0, y'(0) = 1$