Facultad de Ingeniería
Física 1 – 62.01/82.01
Turno Nº 01 - Repetto
Reboredo – Raggio – Indelicato

Trabajo Práctico N·6

Participantes:

Carosio, Ignacio

Demko, Bárbara Ana

Poschenrieder, Victoria

Quiroga, Martino

Zapotoczny, Maia Belen

Fecha de entrega: Lunes 10 de agosto del 2020

Profesora Adjunta: Mgter. Viviana Repetto

Jefe de Trabajos prácticos: Evangelina L. Indelicato

Auxiliares: Graciela Reboredo, Mauricio Raggio, Natalia Nuñez

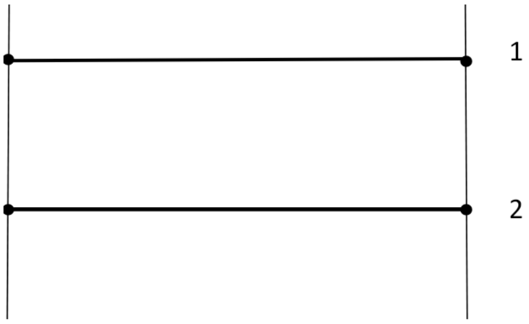
Trabajo a entregar: Obligatorio de ondas

Facultad de Ingeniería
Física 1 – 62.01/82.01
Turno Nº 01 - Repetto
Reboredo – Raggio – Indelicato

PROBLEMA OBLIGATORIO – ONDAS **GRUPO: 13**

1) Ondas estacionarias y batidos:

Se tienen 2 cuerdas de igual longitud L=2m atadas de forma tal que ambos extremos se encuentran fijos. Las densidades lineales de masa de las cuerdas son 1kg/m y 2 kg/m respectivamente. La cuerda 1 vibra en la frecuencia fundamental de 20 Hz.



a) Calcular la tensión de esa cuerda.
b) Si la cuerda 2 vibra en el segundo armónico, calcular la tensión de la cuerda 2 para que la frecuencia de batido sea de 5 hz.

a) Al tener de dato que la soga 1 vibra en la frecuencia fundamental, sabemos que se trata de una onda estacionaria, es decir una superposición de ondas de igual frecuencia pero sentidos opuestos.
Planteando y sumando las correspondientes ecuaciones de onda:

$$\xi_1 = A\ sen\ (kx + \omega t)$$
$$\xi_2 = A\ sen\ (kx - \omega t)$$

El signo invertido indica que se mueven en sentidos opuestos.

Como las frecuencias son iguales, las pulsaciones también lo son.

$$\xi_{total}(x,t) = 2A\ sen\ (kx)\ cos\ (\omega t)$$

Los nodos se producen cuando $\xi(x,t) = 0$, que seguro se están en los extremos de la soga porque están fijos. Entonces, estarán en x=0 y x=L.
Para que $\xi_{total} = 0$independientemente del tiempo, $sen\ (kL) = 0$, que sucede si $kL = n\pi$ siendo $n = 1,2,3 \ldots$.

$$kL = n\pi$$
$$\frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi$$
$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

Como se trata de una cuerda con ambos extremos fijos (condición de entorno) podemos calcular la frecuencia como:

$$f_n = \frac{nV}{2L}$$

Esto es así porque $f = \frac{v}{\lambda}$, siendo $\lambda = \frac{2L}{n}$

Tenemos como dato la frecuencia fundamental ($n = 1$) de la cuerda 1 y la longitud de la cuerda, por lo tanto despejamos la velocidad de propagación y reemplazamos:

$$f_1 = \frac{v}{2L}$$

$$v = f_1 2L$$

$$v = 20Hz\ 4m$$

$$v = 80\frac{m}{s}$$

Al ser una onda transversal en una cuerda la velocidad se puede calcular como:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Como conocemos la densidad lineal de la cuerda, despejamos la tensión y reemplazamos para calcularla:

$$T = v^2\mu$$

$$T = (80\frac{m}{s})^2 1\frac{kg}{m}$$

$$T = 6400\ N$$

b) Se habla de un batido, es decir, superposición de ondas de frecuencia parecida, que viajan en el mismo sentido y de igual amplitud.
Podemos plantear las ecuaciones de onda según funciones coseno

$$\xi_1\ (x,t) = A\ cos(k_1 x - \omega_1 t)$$
$$\xi_2\ (x,t) = A\ cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

Sumando las ecuaciones de onda y aplicando identidades trigonométricas se llega a la ecuación de superposición:

$$\xi(x,t) = 2A\ cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2}x - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) cos\left(\frac{k_2 + k_1}{2}x - \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right)$$

siendo $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \omega_{moduladora}$ la pulsación de la onda que modula la oscilación (o sea que la amplitud de la onda resultante depende del tiempo). Si desarrollamos esta expresión:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \omega_{moduladora}$$

$$\frac{2\pi\, f_2 - 2\pi\, f_1}{2} = 2\pi\, f_{moduladora}$$

$$\frac{f_2 - f_1}{2} = f_{moduladora} = \frac{1}{T_{moduladora}}$$

$$\frac{2}{f_2 - f_1} = T_{moduladora} = 2T_{batido}$$

Entonces llegamos a:

$$f_{batido} = |f_2 - f_1|$$

Por lo tanto hay 2 posibilidades para f_2:

$$\Delta f = f_2 - f_1 \qquad \text{o} \qquad \Delta f = -(f_2 - f_1)$$

Tenemos como dato la frecuencia de batido y la de la cuerda 1, entonces despejamos en ambas la frecuencia de la cuerda 2 y reemplazamos con los datos:

$$f_2 = \Delta f + f_1 \qquad f_2 = -(\Delta f - f_1)$$

$$f_2 = 5Hz + 20Hz \qquad f_2 = -(5Hz - 20Hz)$$

$$f_2 = 25Hz \qquad f_2 = 15Hz$$

Al vibrar en el segundo armónico ($n = 3$) la frecuencia se calcula como:

$$f_3 = \frac{3v}{2L}$$

De esta última ecuación despejamos la velocidad y reemplazamos con ambas frecuencias ($f_2 = f_3$):

$$v_1 = \frac{f_3 2L}{3} \qquad v_2 = \frac{f_3 2L}{3}$$

$$v_1 = \frac{25Hz\, 4m}{3} \qquad v_2 = \frac{15Hz\, 4m}{3}$$

$$v_1 \approx 33{,}33\,\frac{m}{s} \qquad\qquad v_2 \approx 20\,\frac{m}{s}$$

También la onda es transversal, por lo tanto la velocidad se calcula con:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Como conocemos la densidad lineal de la cuerda, despejamos la tensión y reemplazamos para calcularla en cada caso:

$$T_1 = {v_1}^2\mu \qquad\qquad T_2 = {v_2}^2\mu$$

$$T_1 = (33{,}33\,\frac{m}{s})^2 2\,\frac{kg}{s} \qquad\qquad T_2 = (20\,\frac{m}{s})^2 2\,\frac{kg}{s}$$

$$T_1 \approx 2222\ N \qquad\qquad T_2 \approx 800\ N$$

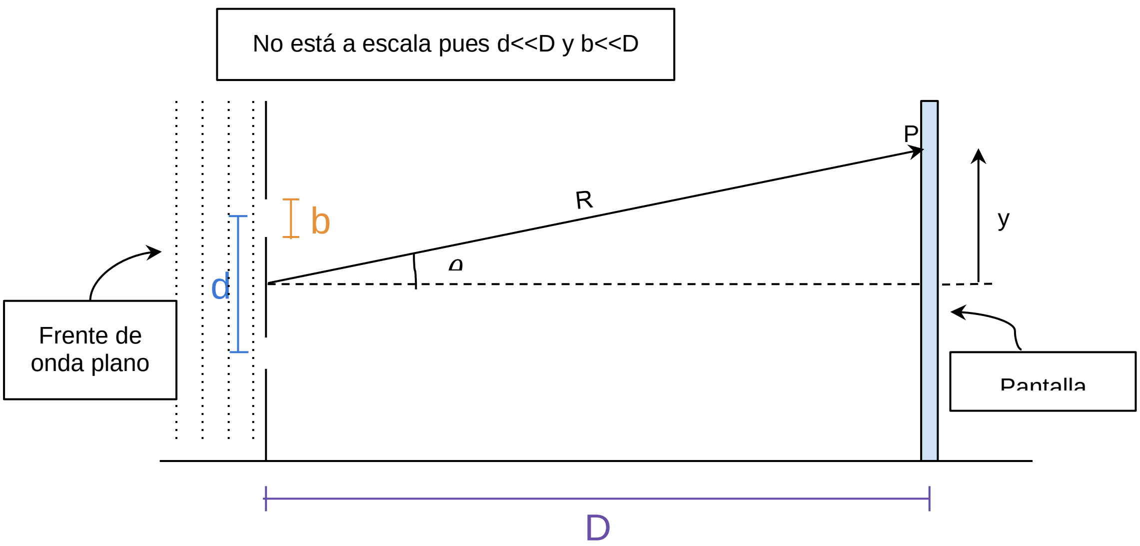
Estas tensiones de la cuerda 2 son las posibles para que la frecuencia de batido sea igual a 5 Hz.

2) <u>Interferencia + Difracción</u>

Dos ranuras de ancho 0.02 mm separadas una distancia de 0.06 mm son iluminadas por luz monocromática de longitud de onda λ=598 nm.

En una pantalla ubicada a una distancia de 3m de las ranuras se observa el patrón resultante.

Diagrama del dispositivo:



Bajo la hipótesis de pantalla lejana, que corresponde a la difracción de Fraunhofer (fuente y pantalla a infinito), tenemos que:

$$sen\ \theta \simeq tg\ \theta \simeq \frac{y}{D}$$

Además, son fuentes coherentes porque a ambas ranuras les llega el mismo frente de onda al mismo tiempo, por lo que las ondas que salen de ellas siempre tienen la misma fase. Y por lo tanto la diferencia de fases será nula.
El frente de onda que pasa por las ranuras da lugar al fenómeno de interferencia y, al considerar el ancho de las mismas, podemos también apreciar la difracción.
Se superponen, entonces, ondas de la misma frecuencia, que viajan en el mismo sentido y que están en fase, las cuales provienen de todas las fuentes puntuales que forman el frente de onda que pasa por cada ranura de ancho b.
Haciendo los respectivos cálculos de superposición, se obtiene que para N ranuras de cierto ancho:

$$I = 4\ I_o\ \frac{sen^2\beta}{\beta^2}\frac{sen^2 N\gamma}{sen^2\gamma}$$

Para el caso de este problema, N=2. La ecuación queda de la siguiente manera:

$$I = 4\ I_o\ \frac{sen^2\beta}{\beta^2}\ cos^2\frac{\delta}{2}$$

Con $\beta = \frac{k}{2} b\ sen\ \theta$ y $\delta = k\Delta r = kd\ sen\ \theta$ $\qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Donde $\frac{sen^2\beta}{\beta^2}$ corresponde al fenómeno de difracción y $cos^2\frac{\delta}{2}$ al fenómeno de interferencia.

a) ¿Cuál es el ancho del máximo central de difracción?

Analizando la contribución de la difracción en la intensidad resultante en la pantalla:

$$\frac{sen^2\beta}{\beta^2}$$

Buscamos los mínimos de difracción:

$$sen\beta = 0 \text{ y } \beta \neq 0 \rightarrow \frac{K\ b\ sen\theta_{min}}{2} = m\pi \text{ ; con } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$$

$$\frac{2\pi\ b\ sen\theta_{min}}{2\lambda} = m\pi \ \Rightarrow b\ sen\theta_{min} = m\lambda$$

$$sen\theta = \frac{Y_{min}}{D} \Rightarrow b\frac{Y_{min}}{D} = m\lambda \Rightarrow Y_{min} = m\lambda\frac{D}{b}$$

Reemplazamos con los datos y $m = 1$ para hallar el primer mínimo de intensidad:

$$Y_{min} = 0{,}0897\ m$$

Este hace referencia a la mitad del ancho del máximo central de difracción, por lo tanto:

$$Ancho = 2Y_{mim}$$

$$Ancho = 2 * 0{,}0897\ m$$

$$Ancho = 0{,}1794\ m$$

b) ¿cuántos máximos de interferencia entran dentro del primer máximo de difracción?

Los máximos y mínimos de interferencia están determinados por $cos^2\frac{\delta}{2}$.

MÁXIMOS

$cos^2\frac{\delta}{2}$----> $\frac{\delta_{máx}}{2}$= $m.\pi$; $m = 0, \pm1, \pm2, ..$. con $\delta = k.d.sen\theta$

$$\frac{k}{2}.d.sen\theta máx = m.\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}.\frac{d}{2}.\underset{\underset{\frac{Ymáx}{D}}{\downarrow}}{sen\theta_{máx}} = m.\pi \qquad \Rightarrow \qquad Ymáx = \frac{m.\lambda.D}{d}$$

MÍNIMOS

$cos^2\frac{\delta}{2}$----> $\frac{\delta_{mín}}{2} = (p + \frac{1}{2}).\pi$; $p = 0, \pm1, \pm2, ..$.

$$\frac{k}{2}.d.sen\theta mín = (p + \frac{1}{2}).\pi$$

$$\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{\lambda}}.\frac{d}{2}.sen\theta_{mín} = (p + \frac{1}{2}).\cancel{\pi} \qquad \Rightarrow \qquad Ymín = (p + \frac{1}{2}).\frac{\lambda.D}{d}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{Ymín}{D}$$

Nos fijamos los máximos que caen cuando la campana de difracción se anula;
sale de la ecuación que deducimos en el ítem a) $\Rightarrow Y_{MIN} = \frac{\lambda.D}{b}$

$$\frac{m.\lambda.D}{d} = \frac{\lambda.D}{b} \Rightarrow cancelando$$

$$[\frac{m}{d} = \frac{1}{b}]*$$

***:** $Busco\ una\ relación\ entre\ b\ y\ d \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{6\times10^{-5}m}{2\times10^{-5}m} = 3 \Rightarrow d = 3b$

$$m.b = 3.b$$

$$\boxed{m = 3}$$

$$\downarrow$$

Esto quiere decir que el 4º máximo de interferencia se anula debido a la modulación de la campana de difracción.

$$\downarrow$$

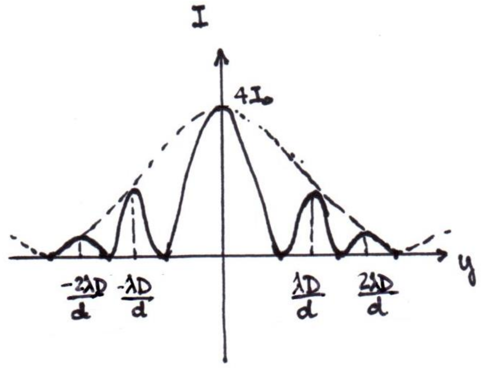
Los máximos confinados a esa zona son $0, \pm1, \pm2$ ⇒*5 Máximos*

c) ¿Cómo es la distribución de intensidades en la pantalla?
Lo que vamos a observar en la pantalla está en el eje Y.
Observamos que los máximos de intensidad ⇒ “zonas luminosas”

$$Y_{MAX} = \frac{m\lambda D}{d} \; ; \; m = 0 \pm 1 \pm 2\ldots$$

Mientras que los mínimos de intensidad ⇒ “zonas oscuras”

$$Y_{MIN} = (p + \frac{1}{2}) \frac{\lambda D}{d} \; ; \; p = 0 \pm 1 \pm 2..$$



d) ¿Qué ocurre con esa distribución si se disminuye la distancia entre ranuras a la mitad?

Si la distancia entre ranuras disminuye a la mitad $\Rightarrow \frac{d}{2}$, el término de interferencia es el que se verá modificado:

$$Y_{MAX} = \frac{m\lambda D}{\frac{d}{2}} => \frac{2m\lambda D}{d}$$

$$Y_{MIN} = (p + \frac{1}{2}) \frac{\lambda D}{\frac{d}{2}} => 2(p + \frac{1}{2}) \frac{\lambda D}{d}$$

Observamos que se duplican las inter-franjas (distancias entre 2 máximos/mínimos)

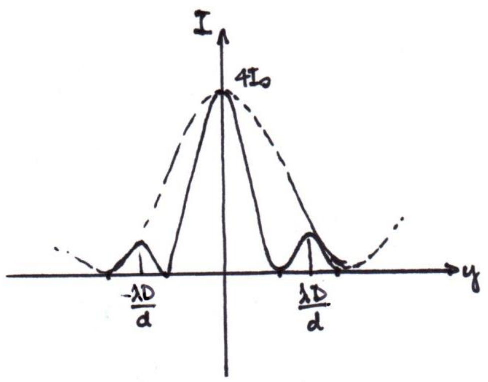
Recordando que $\frac{\lambda D}{b}$ es el 1º mínimo de difracción y $d = 3b$

$$\frac{2m\lambda D}{d} = \frac{\lambda D}{b} \Rightarrow \frac{2m\lambda D}{3b} = \frac{\lambda D}{b} \Rightarrow cancelando \Rightarrow \frac{2m}{3} = 1 \Rightarrow m = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

No es entero

$$2(p + \frac{1}{2}) \frac{m\lambda D}{d} = \frac{\lambda D}{b} \Rightarrow 2(p + \frac{1}{2}) \frac{m\lambda D}{3b} = \frac{\lambda D}{b} \Rightarrow cancelando \Rightarrow \qquad 2(p + \frac{1}{2}) \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow p = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow p = 2$$

Este último resultado nos indica que el 2º mínimo de interferencia coincide con el 1º de difracción.



e) ¿Y si se disminuye el ancho de las ranuras manteniendo constante la distancia entre ellas?

Lo que ocurre cuando se disminuye el ancho de las ranuras manteniendo constante la distancia entre ellas es que aumenta el ancho de la campana de difracción.

Tomamos como ejemplo: $\frac{b}{2}$

El término afectado será el de difracción:

$$\frac{sen^2\beta}{\beta^2}\text{ ; con}\beta = \frac{k}{2} b\ sen\ \theta$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{K\ b\ sen\theta}{4}$$

Para los máximos:

$$\frac{sen\beta}{\beta} \rightarrow_{\beta\rightarrow 0}\rightarrow 1 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{K\ b\ sen\theta_{max}}{4} = 0$$

$$sen\theta_{max} = 0$$

$$\frac{Y_{max}}{D} = 0$$

$Y_{max} = 0$ →El máximo principal se encuentra en el mismo lugar.

Para los mínimos:

$$sen\beta = 0\ \ y\ \beta \neq 0$$

$$\beta = \frac{K\ b\ sen\theta_{min}}{4} = m\pi$$

$$\frac{2\pi\ \ bsen\theta_{min}}{\lambda\ 4} = m\pi$$

$$\frac{bY_{min}}{2D\lambda} = m$$

$$Y_{min} = \frac{2D\lambda}{b}$$

En particular, n=1 $\frac{2.D.\lambda}{b}$ por lo que el ancho de la campana principal se duplica.

Haciendo el mismo cálculo de antes

$$\frac{m\lambda.D}{3.b} = \frac{2.\lambda.D}{b}$$

$$\downarrow$$

El séptimo MÁX de interferencia coincide con el 0 de la campana.

Los MÁX dentro de la campana:

Los MÁX dentro de la campana: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5 \Rightarrow 11\ máximos$