ANÁLISIS MATEMÁTICO III – PRIMER CUATRIMESTRE 2021
EXAMEN INTEGRADOR – TERCERA FECHA –20/08/2021
RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

---

1) Hallar todas las funciones enteras f tales que $\underset{z\to\infty}{Lim}|f(z)-sen(z)|=4$ y además $\mathrm{Re}(f(0))=\sqrt{7}$.

Resolución: Para cada función entera *f*, la función $h(z)=f(z)-sen(z)$ también es entera (por serlo la función seno). Ahora, si *h* verifica $\underset{z\to\infty}{Lim}|h(z)|=4$, entonces es acotada.[1] Por el Teorema de Liouville (uno de ellos….), *h* es constante. Por lo tanto, existe un complejo c tal que $f(z)-sen(z)=c$. Ahora, la hipótesis $\underset{z\to\infty}{Lim}|f(z)-sen(z)|=4$ implica que $|c|=4$, y la hipótesis $\mathrm{Re}(f(0))=\sqrt{7}$ significa que $\mathrm{Re}(c)=\sqrt{7}$, por razones obvias: $\mathrm{Re}(f(0))=\mathrm{Re}(f(0)-sen(0))$. Por lo tanto, $c=\sqrt{7}+i3$ o bien $c=\sqrt{7}-i3$. Por lo tanto, las dos únicas funciones *f* que verifican las condiciones del enunciado son:

$$f(z)=sen(z)+\sqrt{7}+i3 \quad \text{y} \quad f(z)=sen(z)+\sqrt{7}-i3$$

[1]Probemos esto una vez más: por definición, dado $\varepsilon=18$, existe $R>0$ tal que para todo $z\in\{z\in\mathbb{C}:|z|\geq R\}$ se verifica $||h(z)|-4|\leq 18$, es decir: $14\leq|h(z)|\leq 22$. Por otra parte, la función $z\mapsto|h(z)|$ es continua en todo el plano y por lo tanto es acotada en el disco compacto $\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq R\}$. Sea M una cota superior de $|h(z)|$ en este disco. Se deduce inmediatamente que $\forall z\in\mathbb{C}:|h(z)|\leq 22+M$.

---

2) Especificar el conjunto de valores reales positivos de α, β y γ para los cuales la integral $\int_0^\infty \frac{(x+3)^\alpha}{x^\beta(9+x^\gamma)}dx$ converge y calcular el valor de esta integral para el caso $\alpha=1$, $\beta=\frac{1}{2}$ y $\gamma=3$

Resolución: Por ser $\beta>0$, el integrando tiene una singularidad en $x=0$ y por lo tanto tenemos que estudiar por separado las integrales impropias $\int_0^c \frac{(x+3)^\alpha}{x^\beta(9+x^\gamma)}dx$ y $\int_c^\infty \frac{(x+3)^\alpha}{x^\beta(9+x^\gamma)}dx$ para algún $c>0$ (por ejemplo, $c=1$). Comencemos por la segunda utilizando el criterio comparación asintótica (Apuntes sobre Integrales Impropias, página

8, criterio (4.2)), comparando el integrando $f(x)=\dfrac{(x+3)^{\alpha}}{x^{\beta}(9+x^{\gamma})}$ (que es positivo en todo el intervalo de integración) con la función $g(x)=\dfrac{1}{x^{\beta+\gamma-\alpha}}$, también positiva y continua en el intervalo $[1,+\infty)$:

$$\underset{x\longrightarrow+\infty}{Lim}\frac{f(x)}{g(x)}=\underset{x\longrightarrow+\infty}{Lim}\frac{(x+3)^{\alpha}}{x^{\beta}(9+x^{\gamma})}x^{\beta+\gamma-\alpha}=\underset{x\longrightarrow+\infty}{Lim}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{\alpha}\frac{x^{\gamma}}{9+x^{\lambda}}=1$$

Por lo tanto, la integral $\int_1^{\infty}\frac{(x+3)^{\alpha}}{x^{\beta}(9+x^{\gamma})}dx$ converge <u>si y solamente si</u> es convergente la integral $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\beta+\gamma-\alpha}}dx$, es decir, si y solamente si $\beta+\gamma-\alpha>1$.

Para estudiar la convergencia de la integral $\int_0^{1}\frac{(x+3)^{\alpha}}{x^{\beta}(9+x^{\gamma})}dx$ podemos recurrir al mismo criterio de comparación asintótica mediante el cambio de variable $x=\dfrac{1}{t}$:

$$\int_0^1\frac{(x+3)^{\alpha}}{x^{\beta}(9+x^{\gamma})}dx=-\int_{+\infty}^{1}\frac{(\frac{1}{t}+3)^{\alpha}}{\frac{1}{t^{\beta}}(9+\frac{1}{t^{\gamma}})}\frac{-dt}{t^2}=\int_1^{+\infty}\frac{(\frac{1}{t}+3)^{\alpha}}{t^{2-\beta}(9+\frac{1}{t^{\gamma}})}dt$$

Comparando el integrando $h(t)=\dfrac{(\frac{1}{t}+3)^{\alpha}}{t^{2-\beta}(9+\frac{1}{t^{\gamma}})}$ (que es positivo en el intervalo de integración) con $k(t)=\dfrac{1}{t^{2-\beta}}$, observamos que

$$\underset{t\longrightarrow+\infty}{Lim}\frac{h(t)}{k(t)}=\underset{x\longrightarrow+\infty}{Lim}\frac{(\frac{1}{t}+3)^{\alpha}}{t^{2-\beta}(9+\frac{1}{t^{\gamma}})}t^{2-\beta}=\underset{x\longrightarrow+\infty}{Lim}\frac{(\frac{1}{t}+3)^{\alpha}}{9+\frac{1}{t^{\gamma}}}\overset{\gamma>0}{=}\frac{3^{\alpha}}{9}\neq 0$$

Por lo tanto, la integral $\int_0^{1}\frac{(x+3)^{\alpha}}{x^{\beta}(9+x^{\gamma})}dx$ converge si y solamente si converge la integral $\int_1^{\infty}\frac{1}{t^{2-\beta}}dt$, es decir: si y solamente si $2-\beta>1$. Por lo tanto, la integral $\int_0^{\infty}\frac{(x+3)^{\alpha}}{x^{\beta}(9+x^{\gamma})}dx$ converge (para valores positivos de los exponentes α, β y γ) si y solamente si se verifican simultáneamente las dos desigualdades

(1) $\beta+\gamma-\alpha>1$
(2) $\beta<1$

Tomando en cuenta que $\alpha>0$, $\beta>0$ y $\gamma>0$, la condición necesaria y suficiente para la convergencia de la integral puede describirse de la siguiente manera:

$$(i)\ \ 0<\beta<1$$
$$(ii)\ \ \gamma>1-\beta$$
$$(iii)\ \ 0<\alpha<\beta+\gamma-1$$

Se puede visualizar el dominio de variación de estos parámetros, graficándolo en el primer octante del espacio $\Re^3$, eligiendo coordenadas β, γ y α (en ese orden, por la secuencia de desigualdades (*i*) (*ii*) y (*iii*))

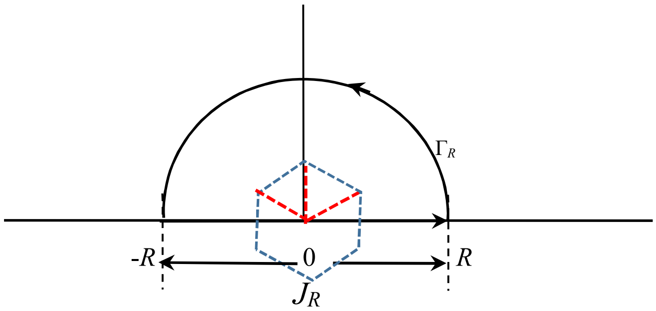
Cálculo de la integral para $\alpha=1$, $\beta=\frac{1}{2}$ y $\gamma=3$. Se trata de la integral

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x+3}{x^{\frac{1}{2}}(9+x^3)}dx$$

Mediante el cambio de variables $x=t^2$ (bastante natural, por cierto):

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x+3}{x^{\frac{1}{2}}(9+x^3)}dx=\int_0^{\infty}\frac{t^2+3}{t(9+t^6)}2tdt=2\int_0^{\infty}\frac{t^2+3}{9+t^6}dt\overset{Integrando\ par}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2+3}{9+t^6}dt$$

Podemos utilizar, el teorema de los residuos aplicado a la función $f(z)=\frac{z^2+3}{z^6+9}$ y los circuitos simples positivos habituales y populares $J_R\cup\Gamma_R$ indicados en la figura, donde $J_R=\left\{x\in\Re:-R\le x\le R\right\}$ y $\Gamma_R=\left\{R.e^{i\theta}:0\le\theta\le\pi\right\}$. Las singularidades de f son las seis raíces sextas de -9, tres de las cuales están en el semiplano superior: $z_1=\sqrt[3]{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2=\sqrt[3]{3}\,i$ y $z_3=\sqrt[3]{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ (las hemos indicado en rojo). Las otras tres son los conjugados $\bar{z}_1=\sqrt[3]{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $\bar{z}_2=-\sqrt[3]{3}\,i$ y $\bar{z}_3=\sqrt[3]{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.



Por lo tanto, para todo $R>\sqrt[3]{3}$:

$$\int_{J_R} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i\left[RES(f,z_1) + RES(f,z_2) + RES(f,z_3)\right] \quad (2.1)$$

Cuando $R \longrightarrow +\infty$, la primera integral del primer miembro tiende a $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{x^6+9}dx$ y la segunda tiende a 0 , lo que se puede verificar de la manera habitual:

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right| \leq Longitud(\Gamma_R).Max\left\{|f(z)| : z \in \Gamma_R\right\} = \pi R.Max\left\{\left|\frac{R^2.e^{i2\theta}+3}{9+R^6.e^{i6\theta}}\right| : 0 \leq \theta \leq \pi\right\} =$$

$$\leq \pi R.\frac{R^2+3}{R^6-9} = \pi\frac{R^3+3R}{R^4-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Por lo tanto,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{x^6+9}dx = 2\pi i\left[RES(f,z_1) + RES(f,z_2) + RES(f,z_3)\right] \quad (2.2)$$

Calculemos los residuos. Tratándose de polos simples, el cálculo es bastante sencillito:

$$RES(f,z_1) = \underset{z \to z_1}{Lim}\frac{(z-z_1)(z^2+3)}{z^6+9} = (z_1^2+3)\underset{z\to z_1}{Lim}\frac{z-z_1}{z^6+9} \overset{L'Hopital}{=} (z_1^2+3)\frac{1}{6z_1^5}$$

$$RES(f,z_2) = \underset{z \to z_{21}}{Lim}\frac{(z-z_2)(z^2+3)}{z^6+9} = (z_2^2+3)\underset{z\to z_2}{Lim}\frac{z-z_2}{z^6+9} \overset{L'Hopital}{=} (z_2^2+3)\frac{1}{6z_2^5}$$

$$RES(f,z_3) = \underset{z \to z_{31}}{Lim}\frac{(z-z_3)(z^2+3)}{z^6+9} = (z_3^2+3)\underset{z\to z_3}{Lim}\frac{z-z_3}{z^6+9} \overset{L'Hopital}{=} (z_3^2+3)\frac{1}{6z_3^5}$$

Para ahorrar un poco de cuentas: sabemos que $-9 = z_1^6 = z_1 z_1^5$, por lo tanto $\frac{1}{z_1^5} = -\frac{z_1}{9}$, y lo mismo con las otras raíces. Por lo tanto:

$$RES(f,z_1) = -\frac{z_1(z_1^2+3)}{54} \quad , \quad RES(f,z_2) = -\frac{z_2(z_2^2+3)}{54} \quad , \quad RES(f,z_3) = -\frac{z_3(z_3^2+3)}{54}$$

Ahora, sumemos:

$$RES(f,z_1) + RES(f,z_2) + RES(f,z_3) = -\frac{1}{54}[z_1(z_1^2+3) + z_2(z_2^2+3) + z_3(z_3^2+3)] =$$

$$= -\frac{1}{54}[z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 3(z_1+z_2+z_3)] = -\frac{1}{54}[3e^{i\frac{\pi}{2}} + 3i^3 + 3e^{i\frac{5\pi}{2}} + 3^{1+\frac{1}{3}}(e^{i\frac{\pi}{6}} + i + e^{i\frac{5\pi}{6}})] =$$

$$= -\frac{3}{54}[i - i + i + 3^{\frac{1}{3}}(e^{i\frac{\pi}{6}} + i + e^{i\pi - i\frac{\pi}{6}})] = -\frac{1}{16}[i + 3^{\frac{1}{3}}(e^{i\frac{\pi}{6}} + i - e^{-i\frac{\pi}{6}})] =$$

$$= -\frac{1}{6}[i + \sqrt[3]{3}(i + 2isen(\tfrac{\pi}{6})] = -\frac{i}{6}[1 + \sqrt[3]{3}(1 + 2\overbrace{sen(\tfrac{\pi}{6})}^{=\frac{1}{2}})] = -\frac{i}{6}[1 + 2\sqrt[3]{3}]$$

Por lo tanto, finalmente:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{x^6+9}dx = 2\pi i\left[RES(f,z_1) + RES(f,z_2) + RES(f,z_3)\right] = \frac{1}{3}[1 + 2\sqrt[3]{3}]\pi$$

---

3) Sea $f(t) = \begin{cases} 3+2t & si\ -1 \le t < 0 \\ -2+2t & si\ \ 0 \le t \le 1 \end{cases}$ y sea $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi t}$ la serie exponencial de Fourier de f en [-1,1]. Analizar si la serie converge uniformemente en el intervalo [-1,1] y calcular $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n$ y $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$.

Resolución: f no es continua en [-1,1] y por lo tanto no puede ser límite uniforme, en este intervalo, de las funciones continuas $f_m(t) = \sum_{n=-m}^{+m} c_n e^{in\pi t}$ (Teorema de Weierstrass). Por otra parte, la extensión 2-periódica $\widetilde{f}$ de f es seccionalmente continua y con derivadas laterales finitas en todo punto. Por lo tanto satisface las condiciones de Dirichlet para la convergencia puntual de su serie de Fourier: para todo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi t} = \frac{1}{2}[\widetilde{f}(t^+) + \widetilde{f}(t^-)]$$

En particular, para $t = 0$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n = \frac{1}{2}[\widetilde{f}(0^+) + \widetilde{f}(0^-)] = \frac{1}{2}[-2+3] = \frac{1}{2}$$

Para el cálculo de la segunda serie (de su suma), podemos aplicar el Teorema de Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{P}\|f\|_2^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}(3+2x)^2 dx + \int_{0}^{1}(-2+2x)^2 dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{(3+2x)^3}{6}\right]_{x=-1}^{x=0} + \left[\frac{(-2+2x)^3}{6}\right]_{x=0}^{x=1}\right) = \frac{1}{12}[3^3 - (3-2)^3 + 0 - (-2)^3] = \frac{17}{6}$$

---

4) Plantear un problema que modelice la temperatura T de régimen estacionario en una lámina plana y homogénea que ocupa la región del semiplano superior del plano xy si la temperatura en todo punto x del eje real es $\dfrac{1}{9x^2+1}$. Resolverlo.

Resolución: La distribución de temperaturas, $T = u(x,y)$ es solución del problema

$$\begin{cases} (i)\ \Delta u(x,y) = 0 & -\infty < x < +\infty\ ,\ y > 0 \\ (ii)\ u(x,0) = \dfrac{1}{9x^2+1} & -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{3.1}$$

Por lo tanto, u es la parte real de una función $f : \overline{\mathbb{H}} \longrightarrow \mathbb{C}$, holomorfa en el semiplano $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ y continua en $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$, que además verifica, para todo x real: $\operatorname{Re}(f)(x) = \dfrac{1}{9x^2+1}$.

Con un poco de suerte y astucia, se puede encontrar una. Por ejemplo, la función

$$f(z) = \frac{1}{1-3iz}$$

es una de ellas. Esta función tiene una única singularidad en $z = \dfrac{1}{3i} = -\dfrac{i}{3}$, que no pertenece a $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$, y para todo $z = x + iy \in \mathbb{C} - \left\{-\dfrac{i}{3}\right\}$ tenemos:

$$f(z) = \frac{1}{1-3iz} = \frac{1+3i\bar{z}}{|1-3iz|^2} = \frac{1+3i(x-iy)}{|1-3i(x+iy)|^2} = \frac{1+3y+3ix}{|1+3y-3ix|^2} =$$

$$= \frac{1+3y+3ix}{9x^2+(1+3y)^2} = \overbrace{\frac{1+3y}{9x^2+(1+3y)^2}}^{u(x,y)} + i\frac{3x}{9x^2+(1+3y)^2}$$

Por lo tanto, $u(x,y) = \dfrac{1+3y}{9x^2+(1+3y)^2}$ es armónica en $\Re^2 - \{(0,-\frac{1}{3})\}$ (en particular, es de clase C^∞ en el semiplano superior) por ser la parte real de una función holomorfa en $\mathbb{C} - \left\{-\dfrac{i}{3}\right\}$, y además verifica $u(x,0) = \dfrac{1}{9x^2+1}$. Es decir, esta u es una solución del problema (3.1). Obviamente, no es la única, pues por ejemplo $u(x,y)+y$, $u(x,y)+xy$ y $u(x,y)+e^x sen(y)$ también son soluciones del mismo problema. Pero puede demostrarse que u es la única solución de (3.1) que, además, verifica

$$(iii)\ \underset{y\longrightarrow+\infty}{Lim} u(x,y)=0 \quad -\infty<x<+\infty \tag{3.2}$$

Se trata de una condición asociada al problema físico planteado que puede reemplazarse por otra menos restrictiva pero más natural: que la función *u* sea acotada en el semiplano superior, es decir, que exista una constante *K* tal que para todo $x\in\Re$ y todo $y\in[0,+\infty)$ se verifique $|u(x,y)|\le K$. Pero la condición (3.2) está implícita en el uso de la transformación de Fourier para resolver el problema, como pasamos a describir sintéticamente: buscamos una solución *u* del problema (3.1) de clase C^∞ tal que *u* y sus derivadas parciales tiendan a 0 uniformemente cuando $(x,y)\longrightarrow(\pm\infty,+\infty)$. Para esta función maravillosa tenemos (sintéticamente):

$(a)\quad u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(\omega,y)e^{i\omega x}d\omega$, donde $\quad \hat{u}(\omega,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y)e^{-i\omega x}dx$

$(b)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}(x,y)=0$ para todo $(x,y)\in\Re\times(0,+\infty)$

$\Rightarrow -\omega^2\hat{u}(\omega,y)+\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial^2 y}(\omega,y)=0$ para todo $(\omega,y)\in\Re\times(0,+\infty)$

si y solamente si existen dos funciones $\alpha,\beta:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$ tales que

$\hat{u}(\omega,y)=\alpha(\omega)e^{\omega y}+\beta(\omega)e^{-\omega y}$ para todo $(\omega,y)\in\Re\times(0,+\infty)$

La transformada de Fourier de toda función bonita tiende a cero cuando $\omega\longrightarrow+\infty$ y cuando $\omega\longrightarrow-\infty$. Puesto que *y* no toma valores negativos (por suerte no cambia de signo….), esto exige que $\hat{u}(\omega,y)$ sea de la forma

$\hat{u}(\omega,y)=\gamma(\omega)e^{-|\omega|y}$ para todo $(\omega,y)\in\Re\times(0,+\infty)$

para alguna función $\gamma:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$ (hemos abreviado las deducciones; de todos modos, si encontramos alguna solución acotada, sabemos que es la única)

(c) Para y = 0, tenemos $\gamma(\omega)=\hat{u}(\omega,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,0)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega x}}{9x^2+1}dx$. Mediante el cambio de variable de integración $x=\frac{1}{3}t$, resulta $\gamma(\omega)=\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\frac{\omega}{3}t}}{t^2+1}dt$. El cálculo de esta integral (para cualquier $\omega\in\Re$) puede verse en la página 10 de los Apuntes sobre la Transformación de Fourier, ejemplo 3:

$$\gamma(\omega)=\tfrac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\frac{\omega}{3}t}}{t^2+1}dt=\frac{\pi}{3}e^{-\frac{|\omega|}{3}}$$

Por lo tanto,

$$\hat{u}(\omega,y)=\gamma(\omega)e^{-|\omega|y}=\frac{\pi}{3}e^{-(y+\frac{1}{3})|\omega|}$$

$$(d)\ u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(\omega,y)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{6}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y+\frac{1}{3})|\omega|+i\omega x}d\omega=\frac{1}{6}\int_{-\infty}^{0}e^{(y+\frac{1}{3})\omega+i\omega x}d\omega\ +$$

$$+\frac{1}{6}\int_{0}^{+\infty}e^{-(y+\frac{1}{3})\omega+i\omega x}d\omega=\frac{1}{6}\left[\frac{e^{(y+\frac{1}{3})\omega+i\omega x}}{(y+\frac{1}{3})+ix}\right]_{\omega=-\infty}^{\omega=0}+\frac{1}{6}\left[\frac{e^{-(y+\frac{1}{3})\omega+i\omega x}}{-(y+\frac{1}{3})+ix}\right]_{\omega=0}^{\omega=+\infty}=$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{y+\frac{1}{3}+ix}-0\right]+\frac{1}{6}\left[0-\frac{1}{-(y+\frac{1}{3})+ix}\right]=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{y+\frac{1}{3}+ix}-\frac{1}{-(y+\frac{1}{3})+ix}\right]=$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{-(y+\frac{1}{3})+ix-(y+\frac{1}{3})-ix}{-(y+\frac{1}{3})^2-x^2}\right]=\ =\frac{1}{6}\left[\frac{2(y+\frac{1}{3})}{(y+\frac{1}{3})^2+x^2}\right]=\frac{1}{9}\,\frac{3y+1}{(y+\frac{1}{3})^2+x^2}=$$

$$==\frac{3y+1}{(3y+1)^2+9x^2}$$, que es exactamente la solución encontrada previamente.

---

5) Resolver el siguiente sistema utilizando la transformación de Laplace:

$$\begin{cases} x''(t)+y(t)=2H(t) \\ -x'(t)+y'(t)=3H(2t-1) \end{cases}$$

con las condiciones $x(0^+)=x'(0^+)=0,\ y(0^+)=1$, siendo H la función de Heaviside.

Resolución: Transformando el sistema y utilizando mayúsculas para las transformadas de Laplace de las funciones involucradas, tenemos

$$\begin{cases} s^2X(s)+Y(s)=\dfrac{2}{s} \\ -sX(s)+sY(s)-1=\dfrac{3}{s}e^{-\frac{s}{2}} \end{cases} \quad , \quad \mathrm{Re}(s)>0$$

Despejando, tenemos

$$X(s)=\frac{\det\begin{bmatrix}\frac{2}{s} & 1\\ 1+\frac{3}{s}e^{-\frac{s}{2}} & s\end{bmatrix}}{s^3+s}=\frac{2-1-\frac{3}{s}e^{-\frac{s}{2}}}{s^3+s}=\frac{1}{s^3+s}-\frac{3e^{-\frac{s}{2}}}{s(s^3+s)}$$

$$Y(s)=\frac{\det\begin{bmatrix}s^2 & \frac{2}{s}\\ -s & 1+\frac{3}{s}e^{-\frac{s}{2}}\end{bmatrix}}{s^3+s}=\frac{s^2(1+\frac{3}{s}e^{-\frac{s}{2}})+2}{s^3+s}=\frac{s^2}{s^3+s}+\frac{3se^{-\frac{s}{2}}}{s^3+s}+\frac{2}{s^3+s}$$

$$=\frac{s}{s^2+1}+\frac{3e^{-\frac{s}{2}}}{s^2+1}+\frac{2}{s^3+s}$$

Factorizamos (a) $\frac{1}{s^3+s}=\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}$

(b) $\frac{1}{s(s^3+s)}=\frac{1}{s^2(s^2+1)}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}$

y resulta:

$$X(s)=\frac{1}{s^3+s}-\frac{3e^{-\frac{s}{2}}}{s(s^3+s)}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}-3\frac{e^{-\frac{s}{2}}}{s^2}+3\frac{e^{-\frac{s}{2}}}{s^2+1}$$

$$Y(s)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{3e^{-\frac{s}{2}}}{s^2+1}+\frac{2}{s}-\frac{2s}{s^2+1}=-\frac{s}{s^2+1}+\frac{3e^{-\frac{s}{2}}}{s^2+1}+\frac{2}{s}$$

Entonces, utilizando las propiedades de la transformación de Laplace (por ejemplo la Tabla 1 - página 18 -, y la Tabla 2 - página 21 -, del Apunte sobre la Transformación de Laplace) obtenemos directamente:

$$x(t)=H(t)-\cos(t)H(t)-3(t-\tfrac{1}{2})H(t-\tfrac{1}{2})+3sen(t-\tfrac{1}{2})H(t-\tfrac{1}{2})$$

$$y(t)=-\cos(t)H(t)+3sen(t-\tfrac{1}{2})H(t-\tfrac{1}{2})+2H(t)$$
