Apellido y Nombres: ....,,,,,...
DNI: .... Padrón: .... Código Asignatura: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....
Correo electrónico: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Segunda fecha. 18 de febrero de 2022.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Determinar todos los valores $c \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ para los que la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \ \operatorname{sen} x}{(3x-2)^2+c}\, dx$ converge. Calcular su valor en el caso $c=1$.

Ejercicio 2. Considerar la distribución de temperatura en estado estacionario en una placa plana y homogénea ubicada en la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1, x>0\}$ sabiendo que, la temperatura es igual a 1 sobre la parte de la frontera coincidente con la circunferencia y es igual a cero sobre la parte correspondiente al segmento vertical. Describir el sistema matemático que lo modela y representar gráficamente. Hallar la temperatura en el interior de la placa y explicar porqué allí $0 < u(x,y) < 1$.

Ejercicio 3. Sabiendo que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$ es el desarrollo trigonométrico de Fourier en $[-1,1]$ de

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(3\pi x) + 3 & \text{si} \quad |x| < 1/2 \\ \\ x \operatorname{sen}(2\pi x) + 2 & \text{si} \quad 1/2 \leqslant |x| \leqslant 1 \end{cases},$$

calcular a_0, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n}$. ¿Es la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$ uniformemente convergente en la recta real?

Ejercicio 4. Resolver:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + g(x) & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2} & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

introduciendo sobre g las hipótesis necesarias. Indicar, si corresponde, toda condición adicional supuesta sobre la función incógnita.

Ejercicio 5. Resolver para $t > 0$, usando transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x'(t) = 3\,x(t) + 4\,y(t) + \cos \mathrm{t} \\ y'(t) = x(t) - 3\,y(t) + (H * H_1)(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales nulas, siendo H la función de Heaviside y $H_1(t) = H(t-1)$.