ANÁLISIS MATEMÁTICO III – SEGUNDO CUATRIMESTRE 2021
EXAMEN INTEGRADOR – QUINTA FECHA – 11/03/2022
RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

1. Sea u una función armónica en el disco $B(0,R)$ ($R>1$). Argumentar la existencia y unicidad de f holomorfa en $B(0, R)$ tal que $\mathrm{Re}(f) = u$, $\mathrm{Im}f(0) = 0$. Sabiendo, además, que $u(0,0) = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \dfrac{2}{\pi}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$, calcular:

$$i) \int_0^{2\pi} u(\cos(\theta), sen(\theta))d\theta \quad , \quad ii) \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z}dz \quad , \quad iii) \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2}dz$$

(En *ii*) y *iii*) el camino de integración se considera como circuito simple positivo)

Resolución: La demostración de la existencia de armónicas conjugadas puede verse, por ejemplo, en la Proposición 3.1 de la página 12 de los *Apuntes Sobre Ecuaciones Diferenciales*, a disposición en la página de la materia. Cabe señalar que los argumentos utilizados en la prueba de la existencia de conjugadas armónicas son muy parecidos a los que se utilizan para demostrar la existencia de primitivas de funciones holomorfas en abiertos simplemente conexos. Ver, por ejemplo, el Corolario 10.3, página 6 del Apunte de Análisis de Variable Compleja (Capítulo X), en la página de la materia.

Resumimos otra forma de probarlo, exhibiendo una forma de construir v:

Toda función armónica u en un abierto D simplemente conexo admite una conjugada armónica, es decir: existe una armónica v en el dominio D tal que $f = u + iv$ es holomorfa en D. Una forma de probarlo y de construir v a partir de u: elegimos un punto $(x_0, y_0) \in D$; para cada punto $(x, y) \in D$ existe un camino $C_{(x,y)} \subset D$ de origen (x_0, y_0) y extremo (x, y) (por ser D un abierto simplemente conexo, en particular es arco-conexo). Ahora, para cada uno de estos puntos y caminos tenemos la identidad obvia

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = \int_{C_{(x,y)}} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad (*1)$$

(pues u es potencial de su gradiente, como el caballo blanco de San Martín, que casualmente era blanco). Ahora, definiendo $v : D \longrightarrow \Re$ tal que

$$v(x,y) = \int_{C_{(x,y)}} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy \right) \qquad (*2)$$

Obtenemos una función que verifica $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$, y por lo tanto es una conjugada armónica de *u*. Obsérvese que por ser *D* simplemente conexo, la integral (∗2) del segundo miembro no depende del camino de integración, pues aplicando el teorema de Green, para cualquier circuito simple $\Gamma \subset D$:

$$\oint_{\Gamma}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)=\iint_{Ri(\Gamma)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy=0$$

Por último, dos conjugadas armónicas de *u* en *D* difieren en una constante (pues *D* es conexo). La que está definida por (∗2) es la única que se anula en el punto (x_0, y_0).

Fin del resumen.

Ahora, por ser *B*(0,*R*) simplemente conexo, podemos afirmar que existe, efectivamente, al menos una conjugada armónica de *u*. Más aún, en este dominio podemos elegir como punto $(x_0, y_0)\in B(0,R)$ al punto (0,0) y para cada $(x,y)\in B(0,R)$ tenemos el camino sencillito $C_{(x,y)}=\{(tx,ty):0\le t\le 1\}$. Entonces,

$$v(x,y)=\int_{C_{(x,y)}}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)=\int_0^1\left(-\frac{\partial u}{\partial y}(tx,ty)+\frac{\partial u}{\partial x}(tx,ty)y\right)dt \qquad (*3)$$

es una conjugada armónica de *u*. Más aún, es <u>la</u> conjugada armónica que se anula en (0,0).

Por lo tanto, para cualquier constante real *c*, la función *f* = *u* + *i*(*v*+*c*) es holomorfa en *B*(0,*R*) y tiene a *u* como parte real. Puesto que Im*f*(0) = *v*(0,0) + *c* = *c*, para que se verifique la condición Im*f*(0) = 0, debe ser *c* = 0. Por lo tanto: la función (∗3) es la única conjugada armónica de *u* que satisface las condiciones del enunciado (lo que equivale a decir que existe una única función *f* holomorfa en *B*(0,*R*) que tiene a *u* como parte real y además Im*f*(0) = 0).

Ahora, los cálculos. Por ser *f* holomorfa en *B*(0,*R*), es analítica en este dominio y por lo tanto admite el desarrollo de Taylor

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+\frac{1}{2}f''(0)z^2+\frac{1}{3!}f'''(0)z^3+\dots \quad , \ |z|<R \qquad (*4)$$

Ahora bien, por las condiciones del enunciado, tenemos:

$$f(0)=u(0,0)+iv(0,0)=\frac{1}{2}$$

y, teniendo en cuenta las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$f'(0)=\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=\frac{2}{\pi}$$

Reemplazando en (*4):

$$f(z)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}z+\frac{1}{2}f''(0)z^2+\frac{1}{3!}f'''(0)z^3+\ldots \qquad , |z|<R$$

Entonces, para todo $z\in B(0,R)$ no nulo:

$$\frac{f(z)}{z}=\frac{1}{2z}+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2}f''(0)z+\frac{1}{3!}f'''(0)z^2+\ldots$$

$$\frac{f(z)}{z^2}=\frac{1}{2z^2}+\frac{2}{\pi\, z}+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{3!}f'''(0)z+\ldots$$

Por lo tanto:

$$RES\left(\frac{f(z)}{z};0\right)=\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad RES\left(\frac{f(z)}{z^2};0\right)=\frac{2}{\pi}$$

Dado que R > 1, la única singularidad de $\frac{f(z)}{z}$ y de $\frac{f(z)}{z^2}$ en el interior de la circunferencia central unitaria es 0 y resulta (recordemos que se considera a esta circunferencia como circuito simple positivo):

$$\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}dz=2\pi\, iRES\left(\frac{f(z)}{z},0\right)=\pi\, i$$

$$\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2}dz=2\pi\, iRES\left(\frac{f(z)}{z^2},0\right)=4i$$

Finalmente, parametrizando esta circunferencia de la manera habitual:

$$\pi i = \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta =$$

$$= i \int_0^{2\pi} [u(\cos(\theta), sen(\theta)) + iv(\cos(\theta), sen(\theta))] d\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi} v(\cos(\theta), sen(\theta)) d\theta + i \int_0^{2\pi} u(\cos(\theta), sen(\theta)) d\theta$$

de donde resulta:

$$\int_0^{2\pi} v(\cos(\theta), sen(\theta)) = 0 \text{ (no se pide)}$$

y

$$\int_0^{2\pi} u(\cos(\theta), sen(\theta)) = \pi \text{ (sí se pide)}$$

***Respuesta* 1**: Existe y es única la función holomorfa en $B(0, R)$ tal que $\mathrm{Re}(f) = u$ y $\mathrm{Im} f(0) = 0$, por los argumentos arriba expuestos. Además:

$$(i) \int_0^{2\pi} u(\cos(\theta), sen(\theta)) = \pi, \quad (ii) \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = \pi i \quad \text{y} \quad (ii) \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2} dz = 4i$$

---

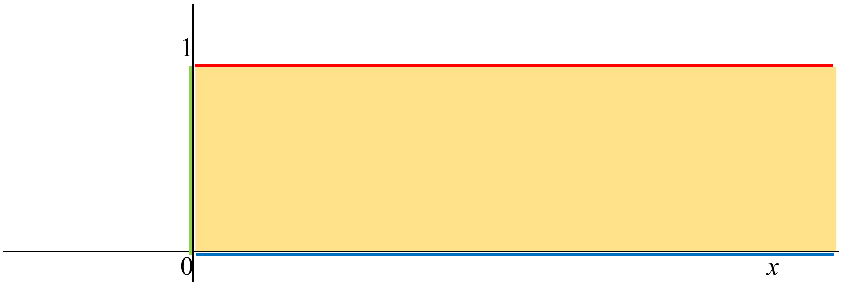
2. Hallar u <u>acotada</u> en $\{(x, y) \in \Re^2 : x > 0, 0 < y < 1\}$ que verifique:

$$\begin{cases} (i)\ \Delta u(x, y) = 0 & para \quad x > 0, \quad 0 < y < 1 \\ (ii)\ u(0, y) = y & para \quad 0 < y < 1 \\ (iii)\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 & para \quad x > 0 \\ (iv)\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0 & para \quad x > 0 \end{cases}$$

y describir un sistema físico que pueda modelarse mediante estas ecuaciones.

Resolución: Un sistema físico que puede modelarse mediante estas ecuaciones es el de la distribución de temperaturas $u(x,y)$ en estado estacionario en una placa plana homogénea que ocupa la banda infinita $\{(x, y) \in \Re^2 : x > 0, 0 < y < 1\}$, térmicamente aislada en las dos semirrectas paralelas $\{(x, y) \in \Re^2 : x > 0, y = 0\}$, $\{(x, y) \in \Re^2 : x > 0, y = 1\}$, y en cada punto $(0,y)$ del segmento $\{(x, y) \in \Re^2 : x = 0, 0 < y < 1\}$ la temperatura es y.

Gráficamente:



$$\Delta u(x,y)=0 \qquad \text{en el interior de la banda}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,1)=0 \qquad \text{(en la semirrecta roja)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0 \qquad \text{(en la semirrecta azul)}$$

$$u(0,y)=y \qquad \text{(en el segmento verde)}$$

Separando variables y aplicando el principio de superposición en las condiciones lineales (homogéneas) del problema, obtenemos la solución

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\pi\, y)e^{-n\pi x} \qquad (*1)$$

Obsérvese que las funciones $u_n(x,y)=\cos(n\pi y)e^{-n\pi x}$ son armónicas y acotadas en la banda $\{(x,y)\in\Re^2 : x>0,\, 0<y<1\}$, verifican $\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,0)=\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,1)=0$, y además tienden a 0 cuando $x\longrightarrow+\infty$. Esto no garantiza que la función $(*1)$ sea acotada, pero va a ayudar bastante. Todavía nos falta determinar los coeficientes de la serie de manera que se verifique la condición (*ii*): $u(0,y) = y$, pero esto ya lo hemos practicado bastante: los coeficientes son los coeficientes de la extensión 2-periódica par de la función $f:[0,1]\longrightarrow\Re$ tal que $f(y)=y$. Indiquemos con $\widetilde{f}$ dicha extensión. Entonces, la ecuación (*ii*) es

$$u(0,y)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\pi\, y)=\widetilde{f}(y)$$

y conviene renombrar los coeficientes: $c_0=\frac{1}{2}a_0$ y $c_n=a_n$ para cada $n\geq 1$. Con esta notación:

$$u(x,y)=\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\pi\, y)e^{-n\pi x}$$

y en particular

$$u(0,y)=\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\pi\, y)=\widetilde{f}(y)$$

Ahora sí: para cada $n\geq 0$

$$a_n=\tfrac{2}{2}\int_{-1}^{1}\widetilde{f}(t)\cos(n\pi t)dt=\int_{-1}^{1}\widetilde{f}(t)\cos(n\pi t)dt\overset{\substack{Integrando\\par}}{=}2\int_{0}^{1}\widetilde{f}(t)\cos(n\pi t)dt=$$

$$=2\int_{0}^{1}t\cos(n\pi t)dt\overset{n\neq 0}{=}2\left(\frac{t}{n\pi}sen(n\pi t)+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t)\right)_{t=0}^{t=1}=$$

$$=2\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}=\begin{cases}=0 & si \quad n\ es\ par>0\\ =-\dfrac{4}{n^2\pi^2} & si \quad n\ es\ impar\end{cases}$$

$$a_0=2\int_{0}^{1}tdt=1$$

Podemos afirmar entonces que la solución es

$$u(x,y)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos[(2k+1)\pi\, y]e^{-(2k+1)\pi x} \qquad (*2)$$

Nos queda por ver que, efectivamente, se trata de una función acotada en la banda infinita $\{(x,y)\in\Re^2 : x>0, 0<y<1\}$. No se pretende que el alumno desarrolle el estudio que sigue, pero sí que al menos preste atención al enunciado, donde se pide enfáticamente que *u* sea acotada.

Momento cultural:

En lo personal, me interesaría conocer el comportamiento asintótico de esta función, más que si es acotada o no (es una curiosidad que tengo, dado que *u* puede estar representando una distribución de temperaturas). Una de las claves del asunto es que en el interior de la placa, las abscisas son siempre positivas, por lo tanto, para todo $k\geq 0$ tenemos que $e^{-(2k+1)\pi x}\leq e^{-\pi x}$. Entonces

$$\left|u(x,y)-\frac{1}{2}\right| \le \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\,|\cos[(2k+1)\pi\, y]|\, e^{-(2k+1)\pi x} \le \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)\pi x}}{(2k+1)^2} \le$$

$$\le \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\pi x}}{(2k+1)^2} = \frac{4e^{-\pi x}}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

pues la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ es convergente. Más aún, sabemos que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ (es un ejercicio de aplicación de la identidad de Parseval para series de Fourier). Por lo tanto, en la última acotación podemos ser más precisos:

$$\left|u(x,y)-\frac{1}{2}\right| \le \frac{4e^{-\pi x}}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{e^{-\pi x}}{2},$$

desigualdad que nos da bastante información sobre el comportamiento asintótico de *u*.

Fin del momento cultural.

---

3. Considerar el problema de la distribución de temperatura $T(x,y)$ en estado estacionario en una placa plana y homogénea que cubre el semiplano $\left\{(x,y)\in\Re^2 : x\ge 0\right\}$, sabiendo que la temperatura en el borde coincide con $g(y)$ para todo $y\in\Re$. Describir cómo lo resolvería en cada uno de los siguientes casos:

$$i)\ g(y)=e^{-|y|} \quad,\quad ii)\ g(y)=1_{[-1,1]}(y) \quad,\quad iii)\ g(y)=1_{[0,+\infty)}(y)$$

Resolución: Se trata del problema

$$\begin{cases}(i)\ \Delta T(x,y)=0 & ,\quad x>0\,,-\infty<y<+\infty\\ (ii)\ T(0,y)=g(y) & ,\quad -\infty<y<+\infty\end{cases}$$

y se requieren soluciones acotadas, dada la índole del problema físico (lo mismo que en el ejercicio anterior). Veamos caso por caso:

Caso $i)\ g(y)=e^{-|y|}$: esta función tiene una bonita transformada de Fourier y podemos buscar T utilizando la transformación de Fourier respecto de la variable y. Asumiendo que T verifica todas las condiciones que permiten aplicar este método (debe ser absolutamente integrable respecto de y, lo mismo que sus derivadas parciales primera y segunda respecto de *x*, etc.), procedemos como es habitual. Seremos muy esquemáticos en esta parte, dado que este procedimiento lo hemos expuesto ya muchas veces:

$$T(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{T}(x,\omega)e^{i\omega y}d\omega \quad , \quad \hat{T}(x,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}T(x,y)e^{-i\omega y}dy$$

$$\Delta T(x,y)=0 \qquad , \qquad \frac{\partial^2\hat{T}}{\partial x^2}(x,\omega)-\omega^2\hat{T}(x,\omega)=0 \quad (*1)$$

La solución general de $(*1)$ es $\hat{T}(x,\omega)=A(\omega)e^{\omega x}+B(\omega)e^{-\omega x}$, donde A y B son dos funciones arbitrarias, que supondremos continuas y acotadas (por lo menos…). Dado que $x>0$ en el dominio considerado y que $\underset{\omega\to-\infty}{Lim}\hat{T}(x,\omega)=0$ y $\underset{\omega\to+\infty}{Lim}\hat{T}(x,\omega)=0$, elegimos A y B de manera que $\hat{T}(x,\omega)$ sea de la forma $\hat{T}(x,\omega)=C(\omega)e^{-|\omega|x}$. Ahora, para $x=0$ tenemos

$$C(\omega)=\hat{T}(0,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}T(0,y)e^{-i\omega y}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)e^{-i\omega y}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|y|}e^{-i\omega y}dy=\frac{2}{1+\omega^2}$$

(este último cálculo es sencillo y puede verse en el ejemplo 3 de la página 9 de los *Apuntes sobre la Transformación de Fourier* – página virtual de la materia). Por lo tanto,

$$\hat{T}(x,\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}e^{-|\omega|x}$$

y, finalmente,

$$T(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{T}(x,\omega)e^{i\omega y}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\omega^2}e^{-|\omega|x}e^{i\omega y}d\omega$$

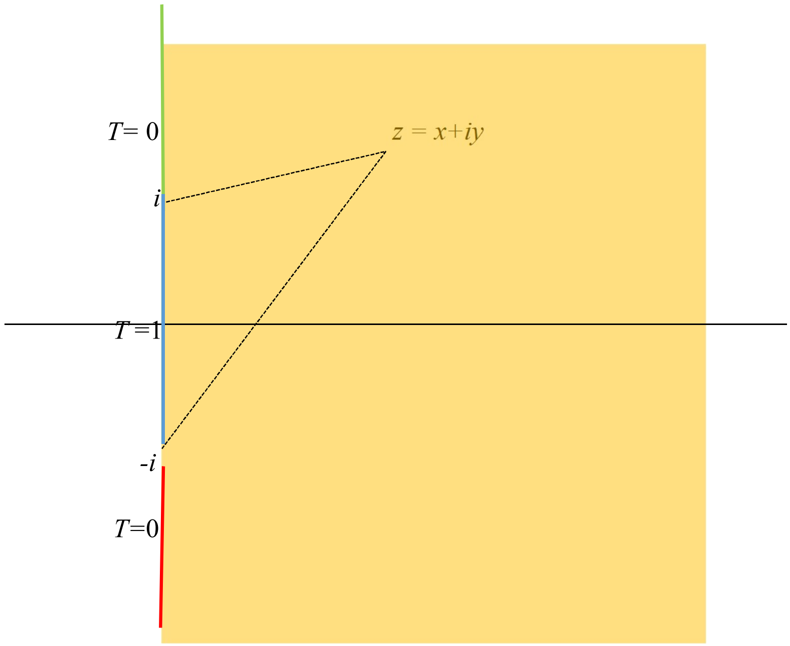
Observación: Para cada $x>0$, y todos y y ω reales, es $\left|\frac{e^{-|\omega|x}e^{i\omega y}}{1+\omega^2}\right|=\frac{e^{-|\omega|x}}{1+\omega^2}\leq\frac{1}{1+\omega^2}$. Por lo tanto, para cada $b>0$: $\left|\int_{-b}^{+b}\frac{e^{-|\omega|x}e^{i\omega y}}{1+\omega^2}d\omega\right|\leq\int_{-b}^{+b}\left|\frac{e^{-|\omega|x}e^{i\omega y}}{1+\omega^2}\right|d\omega\leq\int_{-b}^{+b}\frac{1}{1+\omega^2}d\omega=2arctg(b)\leq\pi$.

Se deduce inmediatamente que $|T(x,y)|\leq\pi$ para todo $x>0$, y todo $y\in\Re$. Es decir: T es, efectivamente, acotada. Desde ya que puede hacerse un estudio asintótico más fino, como en el ejercicio anterior, pero no lo haremos aquí.

Caso *ii*) $g(y) = 1_{[-1,1]}(y)$: En este caso se puede proceder de la misma manera que en el caso anterior, dado que la transformada de Fourier de esta función es $\hat{g}(y) = 2\dfrac{sen(\omega)}{\omega}$ (ejemplo 1, página 8 de los *Apuntes sobre la Transformación de Fourier* – página virtual de la materia). Obtenemos, por este camino:

$$T(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{T}(x,\omega)e^{i\omega y}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen(\omega)}{\omega}e^{-|\omega|x}e^{i\omega y}d\omega$$

Pero también se puede buscar la solución (acotada) de la siguiente manera, que le va a resultar muy familiar:



Aquí no hay que hacer ninguna transformación: está servido en bandeja. Obtenemos:

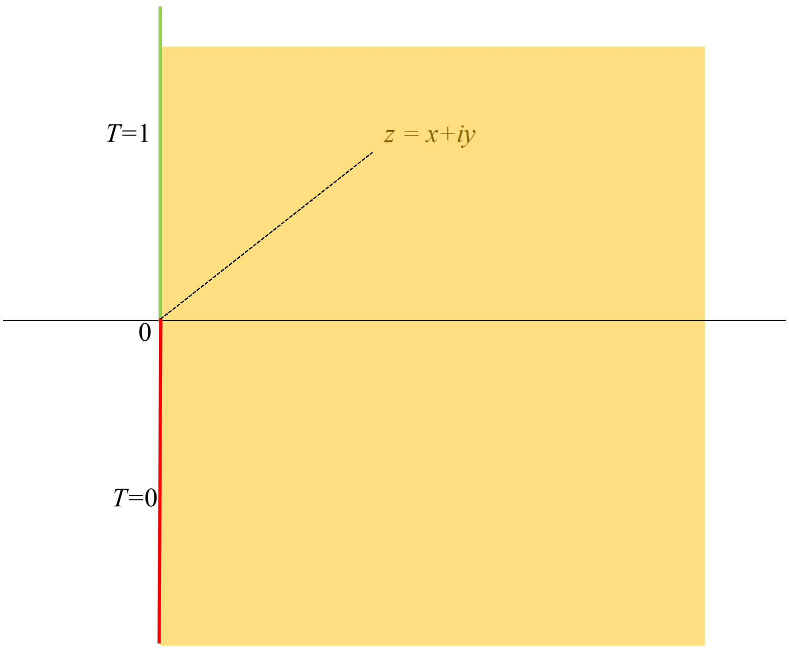
$$T(x,y) = \frac{1}{\pi}\arg(x+iy+i) - \frac{1}{\pi}\arg(x+iy-i) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{y+1}{x}\right) - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{y-1}{x}\right)$$

Dicho sea de paso, la unicidad de la solución acotada nos permite escribir (sin hacer ninguna otra cuenta y simplificando los factores $\frac{1}{\pi}$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen(\omega)}{\omega}e^{-|\omega|x}e^{i\omega y}d\omega = \arctan\left(\frac{y+1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{y-1}{x}\right)$$

(impresionante, ¿no?).

Caso *iii*) $g(y) = \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(y)$: En este caso (atenção! warning! achtung! ¡araca!) no podemos utilizar el método que involucra la transformación de Fourier, pues $\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(y)$ no tiene transformada de Fourier (usted puede encontrar su transformada en textos más avanzados, pero no se trata de una función $\Re \longrightarrow \mathbb{C}$; es lo que se denomina una *distribución* o *función generalizada*). La razón es muy sencilla: la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(y) e^{-i\omega y} dy = \int_{0}^{+\infty} e^{-i\omega y} dy$ diverge alevosamente. Pero en el caso anterior ya vimos cómo podemos resolver este caso: planteamos



y resolvemos: $T(x,y) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} artg\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

---

4. Hallar $f:\Re \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} (1-i)\hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = e^{-a|t|}$ $(a>0)$, donde $\hat{f}$ es la transformada de Fourier de *f*. ¿Es única? Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$

Resolución: Podemos calcular directamente:

$$e^{-a|t|}=\int_{-\infty}^{+\infty}(1-i)\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega=(1-i)\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \overset{\substack{\text{Teorema}\\ \text{de Inversión}}}{=} (1-i)2\pi\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}$$

En particular, si f es continua tenemos $e^{-a|t|}=(1-i)2\pi f(t)$. Por lo tanto, existe una única función <u>continua</u> $f:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty}(1-i)\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega=e^{-a|t|}$, y es

$$f(t)=\frac{e^{-a|t|}}{2\pi(1-i)}=\frac{(1+i)}{4\pi}e^{-a|t|}$$

Cualquier otra función seccionalmente continua que difiera de ésta en una cantidad finita de puntos (en cada intervalo acotado), tiene la misma transformada de Fourier y por lo tanto también verifica las condiciones del enunciado. Para el cálculo de la integral que se pide en el enunciado, podemos aplicar la Identidad de Parseval, pues f es de cuadrado absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\omega)|^2d\omega=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{(1+i)}{4\pi}e^{-a|t|}\right|^2dt=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{16\pi^2}e^{-2a|t|}dt=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2a|t|}dt=\frac{1}{4\pi}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{2at}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-2at}dt\right)=\frac{1}{4\pi a}$$

---

5. Hallar para $t > 0$, mediante la transformación de Laplace, $y(t)$ y $\varphi(t)$:

$$\begin{cases}(i)\ y''(t)-3y'(t)+2=\varphi(t-1)H(t-1)\\ (ii)\ \varphi'(t)+\int_0^t\varphi(t-x)dx=H(t)\end{cases}$$

con $y(0^+)=y'(0^+)=\varphi(0^+)=0$. (H es la función de Heaviside)

Resolución: Para la función $u=y'$, tenemos

$$\begin{cases}(i)\ u'(t)-3u(t)+2=\varphi(t-1)H(t-1)\\ (ii)\ \varphi'(t)+\int_0^t\varphi(t-x)dx=H(t)\end{cases}\qquad(*1)$$

con las condiciones iniciales $u(0^+) = \varphi(0^+) = 0$. Por otra parte, $\int_0^t \varphi(t-x)dx = (\varphi * H)(t)$, por lo tanto, aplicando la transformación de Laplace al sistema $(*1)$ tenemos

$$\begin{cases} (i)\ sU(s) - 3U(s) + \dfrac{2}{s} = \Phi(s)e^{-s} \\ (ii)\ s\Phi(s) + \Phi(s)\dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{s} \end{cases}$$

donde U y Φ son las transformadas de Laplace de u y de φ respectivamente. De la segunda ecuación obtenemos directamente $\Phi(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$, es decir: $\varphi(t) = sen(t)H(t)$. Ahora, reemplazando en la primera ecuación:

$$sU(s) - 3U(s) + \frac{2}{s} = \frac{e^{-s}}{s^2+1}$$

podemos despejar fácilmente:

$$U(s) = -\frac{2}{s(s-3)} + \frac{e^{-s}}{(s^2+1)(s-3)} \ .$$

El viejo truco de las fracciones simples:

(a) $\dfrac{1}{s(s-3)} = \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s-3}\right)$

(b) $\dfrac{1}{(s^2+1)(s-3)} = \dfrac{1}{10}\left(-\dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{3}{s^2+1} + \dfrac{1}{s-3}\right)$

y ya casi estamos:

$$U(s) = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s-3}\right) + \frac{1}{10}\left(-\frac{se^{-s}}{s^2+1} - \frac{3e^{-s}}{s^2+1} + \frac{e^{-s}}{s-3}\right)$$

Es decir:

$$u(t)=\frac{2}{3}[H(t)-e^{3t}H(t)]+\frac{1}{10}[-\cos(t-1)H(t-1)-3sen(t-1)H(t-1)+e^{3(t-1)}H(t-1)]$$

Finalmente, dado que $u=y'$, $y(0^{+})=0$:

$$y(t)=H(t)\int_{0}^{t}u(x)dx=H(t)\int_{0}^{t}\left(\frac{2}{3}[1-e^{3x}]H(x)+\frac{1}{10}[-\cos(x-1)-3sen(x-1)+e^{3(x-1)}]H(x-1)\right)dx$$

Según mis cuentas:

$$y(t)=\begin{cases}=0 & si\ t<0\\ =\frac{2}{3}t-\frac{2}{9}e^{3t}+\frac{2}{9} & si\ 0\le t<1\\ =\frac{2}{3}t-\frac{2}{9}e^{3t}-\frac{1}{10}sen(t-1)+\frac{3}{10}\cos(t-1)+\frac{1}{3}e^{3(t-1)}-\frac{37}{90} & si\ t\ge 1\end{cases}$$

Obsérvese que la constante $-\frac{37}{90}$ puede calcularse directamente a partir de la continuidad de y en 1, es decir, de la igualdad $y(1^{-})=y(1^{+})$ (de la misma manera que se puede calcular la constante $\frac{2}{9}$ a partir de $y(0^{+})=0$).

***Respuesta* 5:** $\varphi(t)=sen(t)H(t)$,

$$y(t)=\begin{cases}=0 & si\ t<0\\ =\frac{2}{3}t-\frac{2}{9}e^{3t}+\frac{2}{9} & si\ 0\le t<1\\ =\frac{2}{3}t-\frac{2}{9}e^{3t}-\frac{1}{10}sen(t-1)+\frac{3}{10}\cos(t-1)+\frac{1}{3}e^{3(t-1)}-\frac{37}{90} & si\ t\ge 1\end{cases}$$
