Apellido y Nombres: ....,,,,,...
DNI: .... Padrón: .... Código Asignatura: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....
Correo electrónico: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Cuarta fecha. 27 de agosto de 2021.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Demostrar la convergencia de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^3}\,dx$ y explicar en detalle un método para calcularla, usando variable compleja.

Ejercicio 2. Considerar la función

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+1 & \text{si}\quad 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}\\ x+2 & \text{si}\quad \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}.$$

y la serie de Fourier de senos de f en $[0,1]$. Se pide:
i) obtener, si existen, todos los valores de α para los que función y serie coinciden en todo el intervalo $(0,1)$,
ii) analizar si para algún valor de α la serie converge uniformemente en $[0,1]$.

Ejercicio 3. Describir un problema físco modelable mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}u_t=u_{xx} & 0<x<\pi,\ t>0\\ u(0,t)=10 & t\geqslant 0\\ u(\pi,t)=15 & t\geqslant 0\\ u(x,0)=h(x) & 0\leqslant x\leqslant \pi\end{cases}$$

y resolverlo, introduciendo las hipótesis necesarias sobre h.

Ejercicio 4. Determinar si existe una función $f:[0,\infty]\to\mathbb{R}$ tal que:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,cos(\omega x)\,dx=\begin{cases}1-e^{-(w^2-4)}| & \text{para}\quad |w|\leqslant 2\\ 0 & \text{para}\quad |w|>2\end{cases}$$

y obtener $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(x,t)\cos(wx)\,dx$ sabiendo que:

$$\begin{cases}u_{xx}=u_t & 0<x<+\infty,\quad t>0\\ u(x,0)=f(x) & x\geqslant 0\\ u_x(0,t)=0 & t\geqslant 0\end{cases}$$

Ejercicio 5. Estudiar para qué valores de s es válida la igualdad:

$$\mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f_n\right](s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\mathcal{L}\left[f_n\right](s)$$

donde $f_n(t)=t^n\ \forall t\in\mathbb{R},\ \forall n\geqslant 0$ y $H(t)$ es la función de Heaviside.