Apellido y Nombres: ..........................................................................................,,,,,,...
DNI: ................................ Padrón: ................................ Código Asignatura: .............
Cursada. Cuatrimestre: ................. Año: ................... Profesor: ..............................
Correo electrónico: ..........................................................................................

**Análisis Matemático III.**
**Examen Integrador. Primera fecha. 11 de febrero de 2022.**

*Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios*

**Ejercicio 1.** Determinar para qué valores de $\beta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{2\beta}}{1+x^2}\,dx$ es convergente.

Calcular la integral para el caso $\beta = 1/4$.

**Ejercicio 2.** Considerar el problema de la temperatura en estado estacionario en una placa plana y homogénea que coincide con el conjunto del plano dado por

$$A=\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant 4,\ \ y \geqslant 0\right\}$$

y con temperatura de valor 1 en los puntos de la frontera de $A$ que satisfacen $y > 1$ y cero en los que $y < 1$. Formularlo en términos de una ecuación diferencial con condiciones de contorno. Obtener la solución $u(x,y)$ y analizar su simetría respecto al eje $y$.

**Ejercicio 3.** Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, continua y con derivada continua a trozos, con desarrollo seno de Fourier dado por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$.
Indicar en qué valores de $x \in [0,2]$, la serie coincide con la función y en cuáles no.
Resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_{tt}=3u_{xx} & 0<x<2,\ t>0 \\ u(0,t)=u(2,t)=0 & t\geqslant 0 \\ u(x,0)=f(x) & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ u_t(x,0)=0 & 0\leqslant x\leqslant 2 \end{cases}$$

incluyendo, si es necesario, hipótesis adicionales sobre $f$.

**Ejercicio 4.** Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}'(w)e^{iwt}dw = \operatorname{sh} t\, \mathbb{1}_{(-1,1)}(t)$, siendo $\hat{f}(w)$ la transformada de Fourier de $f$. ¿Es única? Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}'(w)\right|^2 dw$.

**Ejercicio 5.** Obtener la transformada de Laplace de la solución de la ecuación:

$$xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) = 0 \quad \forall x > 0$$

con condiciones iniciales $y(0^+)= 1, y'(0^+)=0$.