Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
ANÁLISIS MATEMÁTICO III

APUNTES DE ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA
D. Prelat - 2020

§ 11. PROPIEDADES SURTIDAS DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS

Este capítulo va a tener como punto de partida el Corolario 10.5 que hemos demostrado en el capítulo anterior y cuyo enunciado repetimos a continuación:

***Corolario* 10.5**: (*Analiticidad de las holomorfas - Fórmulas Integrales de Cauchy*): Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en un abierto $D \subseteq \mathbb{C}$. Entonces, *f* es analítica en *D*. Más aún: para cada disco abierto $D(z_0;r) \subseteq D$ y todo $z \in D(z_0;r)$ se verifica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{11.1}$$

donde
$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}} \tag{11.2}$$

para todo $n \geq 0$, y *C* es cualquier circuito simple positivo contenido en $D(z_0;r)$ tal que $z_0 \in RI(C)$. Además, el radio de convergencia de (11.1) es $\geq r$, y si $D = \mathbb{C}$ el radio de convergencia es infinito (para cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$). ■

Las igualdades (11.2) se denominan Fórmulas Integrales de Cauchy (*FIC'*s) y de ellas se deducen las siguientes desigualdades, muy importantes:

***Proposición* 11.1** (*Desigualdades de Cauchy*). Bajo las mismas hipótesis del Corolario 10.5, para todo $n \geq 0$ y para todo radio $\rho < r$:

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n! M_f(C(z_0;\rho))}{\rho^n} \tag{11.3}$$

donde $C(z_0;\rho)$ es la circunferencia de centro z_0 y radio ρ, y

$$M_f(C(z_0;\rho)) = \max\left\{ \left| f(w) \right| : w \in C(z_0;\rho) \right\} \tag{11.4}$$

***Demostración**:* Podemos utilizar las *FIC*'s (11.2) con el circuito $C(z_0;\rho)$, y tenemos

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C(z_0;\rho)} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}$$

Ahora, hacemos las acotaciones ya habituales de los módulos de las integrales:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_{C(z_0;\rho)} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}\right| \leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{C(z_0;\rho} \frac{|f(w)||dw|}{|w-z_0|^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi} \oint_{C(z_0;\rho)} \frac{|f(w)||dw|}{\rho^{n+1}} =$$

$$= \frac{n!}{2\pi\rho^{n+1}} \oint_{C(z_0;\rho)} |f(w)||dw| \leq \frac{n!}{2\pi\rho^{n+1}} M_f(C(z_0;\rho)) \overbrace{2\pi\rho}^{L(C(z_0;\pi))} = \frac{n! M_f(C(z_0;\rho))}{\rho^n} \qquad \blacksquare$$

Una consecuencia impresionante de esta proposición es el siguiente Teorema (de Liouville). Como se puede observar, seguimos con corolarios de corolarios del Teorema de Cauchy-Goursat. Pero en este capítulo pensé que ya era hora de salir un poco de la ya extensa « letanía corolaria »**.**

***Proposición* 11.2** (*Teorema de Liouville*) Sea $f:\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ entera (es decir: homorfa en todo el plano complejo) y acotada (es decir: existe $K > 0$ tal que $\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq K$. Entonces, f es constante.

Demostración: Por hipótesis, como el dominio donde f es holomorfa es todo el plano complejo, las desigualdades (11.3) valen para todo $z_0 \in \mathbb{C}$ y para todo radio $\rho > 0$, pues para cualquier $r > 0$ tenemos $D(z_0;r) \subseteq \mathbb{C}$. En particular, para $n = 1$ tenemos

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M_f(C(z_0;\rho))}{\rho} \leq \frac{K}{\rho}$$

Como esta desigualdad se verifica para todo $\rho > 0$, tomando límites en el sandwich $0 \leq |f'(z_0)| \leq \frac{K}{\rho}$ para $\rho \longrightarrow +\infty$, resulta que $|f'(z_0)| = 0$. Hemos demostrado que $f'(z_0) = 0$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$, lo que implica que f es constante (por ser $\mathbb{C}$ arco-conexo).

Digresión pedagógica: Observe que esta conclusión no es válida en el sandwich $0 \leq |f'(z_0)| \leq \frac{M_f(C(z_0;\rho))}{\rho}$ pues estas cotas $M_f(C(z_0;\rho)) = \max\{|f(w)| : w \in C(z_0;\rho)\}$

dependen, en general, de ρ (y de z_0). Podrían ser, por ejemplo, $M_f(C(z_0;\rho)) = |z_0|\rho^2$ (un ejemplo muy sencillito). Aquí la clave es que la cota K no depende ni de z_0 ni de ρ. Por otra parte, si pudiéramos obtener la misma conclusión sin esta hipótesis, estaríamos probando que todas las funciones enteras son constantes. Y el universo sería muy distinto ■

***Observación* 11.1:** Este teorema marca otra diferencia sustancial entre el análisis de variable real y el de variable compleja. Por ejemplo, la función $f(x) = e^{-x^2}$ es analítica y acotada en $\Re$, y obviamente no es constante. Otros ejemplos notables son las circulares *seno* y *coseno*, que son en analíticas y acotadas en $\Re$. Aprovecho para recordar que estas funciones, *seno* y *coseno*, no son acotadas en $\mathbb{C}$, como puede verse directamente observando sus componentes real e imaginaria y sin necesidad de molestar a Liouville.

El Teorema de Liouville tiene consecuencias muy fuertes. Damos a continuación un ejemplo muy puntual de su alcance, y luego lo utilizaremos en la demostración de uno de los Teoremas más importantes en la Historia de la Humanidad.

***Ejemplo* 11.1**: Determinar, si existen, todas las funciones enteras f tales que $|f(z)| \le e^{\mathrm{Re}(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Resolución: Puesto que $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$, tenemos, para todo $z \in \mathbb{C}$: $\left|\dfrac{f(z)}{e^z}\right| \le 1$. Entonces, la función $h(z) = \dfrac{f(z)}{e^z} = f(z)e^{-z}$ es entera y acotada. Por el teorema de Liouville h es constante, es decir: existe $c \in \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}$ se verifica que $\dfrac{f(z)}{e^z} = c$, o sea: $f(z) = ce^z$. Finalmente, de la misma acotación $|c| = \left|\dfrac{f(z)}{e^z}\right| \le 1$ resulta que todas las funciones que verifican las condiciones requeridas son de la forma $f(z) = e^{i\alpha}e^z$, $\alpha \in \Re$

***Observación* 11.2:** Insisto en la diferencia con el análisis real. En este caso, si nos planteamos el mismo problema para funciones analíticas $f : \Re \longrightarrow \Re$, la respuesta es substancialmente distinta, pues existen funciones mucho más variadas que verifican lo pedido. Por ejemplo, $f(x) = sen(x)e^x$, $g(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$, $h(x) = e^{-x^2}e^x$.

***Proposición* 11.3** (*Teorema Fundamental del Álgebra*) Sea P un polinomio de grado ≥ 1 y coeficientes complejos. Entonces, P tiene al menos una raíz compleja.

Demostración: La idea es muy sencilla y consiste en averiguar qué pasaría si P no tuviera ninguna raíz compleja. Supongamos entonces que P no tiene ninguna raíz, es decir, que $P(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces, la función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ sería entera (= holomorfa en todo el plano). Si probamos que en ese caso f es necesariamente acotada, por el teorema de Liouville f resultaría constante, y por lo tanto el polinomio P sería constante: absurdo, pues los únicos polinomios constantes son los de grado 0 (y el polinomio nulo). Es decir que lo único que nos queda por hacer es probar que si $P(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ es acotada. El primer paso es ver que existe (y es un número complejo) el límite $\underset{z \to \infty}{Lim} f(z)$. Lo haremos con cierto detalle a modo de ejercicio. Recordemos que $\underset{z \to \infty}{Lim} f(z) = \underset{w \to 0}{Lim} f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ (por definición). Escribamos $P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_m z^m$, donde $c_m \neq 0$ y (por hipótesis) $m \geq 1$. Entonces, para todo $w \in \mathbb{C} - \{0\}$:

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{c_0 + \dfrac{c_1}{w} + \dfrac{c_2}{w^2} + \ldots + \dfrac{c_m}{w^m}} = \frac{w^m}{c_0 w^m + c_1 w^{m-1} + c_2 w^{m-2} + \ldots + c_{m-1} w + c_m}$$

y por lo tanto $\underset{w \to 0}{Lim} f\left(\dfrac{1}{w}\right) = 0$ (tener presente que $c_m \neq 0$). Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left| f\left(\dfrac{1}{w}\right) \right| < \varepsilon$ para todo $w \in \mathbb{C}$ que verifique $0 < |w| < \delta$. En particular, podemos elegir $\varepsilon = 9$ y entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $w \in \mathbb{C}$ w tal que $0 < |w| < \delta$ se verifica $\left| f\left(\dfrac{1}{w}\right) \right| < 9$. Entonces, volviendo a la variable $z = \dfrac{1}{w}$: si $|z| > \dfrac{1}{\delta}$ entonces $|f(z)| < 9$. Hemos probado que $|f|$ es acotada en el exterior del disco $D(0;\frac{1}{\delta})$, siendo 9 una cota. Pero por ser $|f|$ continua, también es acotada en el cerrado y acotado $\overline{D(0;\frac{1}{\delta})}$. Sea M una cota de $|f|$ en $\overline{D(0;\frac{1}{\delta})}$ (supongo que no hace falta aclarar que estamos hablando de cotas <u>superiores</u> de $|f|$; si no entiende por qué, medite un poco antes de seguir). Entonces, $K = M + 9$ es una cota de $|f|$ en $\mathbb{C}$: si $|z| \leq \dfrac{1}{\delta}$, entonces $|f(z)| \leq M \leq M + 9$, y si $|z| > \dfrac{1}{\delta}$, entonces $|f(z)| \leq 9 \leq M + 9$ ■

Veamos ahora un par de consecuencias importantes de la analiticidad de las funciones holomorfas (Corolario 10.5 del Cap. X). Primero, necesitamos un lema y algunos conceptos necesarios.

***Lema* 11.1**: Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en un abierto <u>conexo</u> $D \subseteq \mathbb{C}$ tal que existe $z_0 \in D$ donde se anulan *f* y todas sus derivadas, es decir: $f(z_0) = 0$ y $f^{(n)}(z_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, *f* es idénticamente nula en todo *D*.

Demostración: Por ser *f* analítica en *D*, existe un radio $r > 0$ (eventualmente infinito) tal que $D(z_0; r) \subseteq D$ y para todo *z* en el disco $D(z_0; r)$:

$$f(z) = f(z_0) + f\,'(z_0)(z - z_0) + \tfrac{1}{2!} f\,''(z_0)(z - z_0)^2 + \tfrac{1}{3} f^{(3)}(z_0)(z - z_0)^3 + \ldots$$

Por hipótesis tenemos entonces que $f(z) = 0$ para todo $z \in D(z_0; r)$. Pero lo que queremos probar es que $f(z) = 0$ para cualquier punto $z \in D$, no solamente para los puntos del disco $D(z_0; r)$. Para probar esto existen algunas ideas sencillas pero un poco ingenuas, pues requieren detalles técnicos demasiados engorrosos para justificarlas. Por otro lado, las formas más eficientes de probar el lema requieren herramientas que están fuera del alcance de este curso, aunque no muy lejos. El resto de la demostración es solamente para los interesados, audaces y mayores de edad. De todos modos, como escribí ya varias veces, puede obviarse olímpicamente.

Una de las formas más cortas de demostrar el lema utiliza el conjunto $E \subseteq D$ de todos los puntos de *D* donde se anula *f* y todas sus derivadas, es decir: el conjunto $E = \left\{ z \in D \,/\, \forall n \geq 0 : f^{(n)}(z) = 0 \right\}$. Los pasos son tres:

(*a*) Se prueba que *E* es abierto: dado $z_1 \in E$ existe un disco $D(z_1; \rho) \subset D$ tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_1)(z - z_1)^n$ para todo $z \in D(z_1; \rho)$, pero por ser $z_1 \in E$, $f^{(n)}(z_1) = 0$ para todo $n \geq 0$, y entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in D(z_1; \rho)$, pero esto implica, a su vez, que para todo $n \geq 0$: $f^{(n)}(z) = 0$, pues *f* se anula en todo el abierto $D(z_1; \rho)$. Por lo tanto, hemos demostrado que para cada $z_1 \in E$ existe $\rho > 0$ tal que $D(z_1; \rho) \subseteq E$, es decir: que todos los puntos de *E* son interiores.

(*b*) Se prueba que *E* es cerrado <u>en *D*</u>, es decir: que todo punto $z_1 \in D$ que sea adherente a *E*, pertenece a *E*. Probemos: por ser z_1 adherente a *E*, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un $w_k \in E$ tal que $|z_1 - w_k| < \frac{1}{k}$. Por lo tanto, $\lim_{k \to \infty} w_k = z_1$, y por ser $f^{(n)}$ continua (para todo n), resulta $\underset{k \to \infty}{Lim} f^{(n)}(w_k) = f^{(n)}(z_1)$. Pero cada w_k es un elemento de E, por lo tanto $f^{(n)}(w_k) = 0$ para todo n y todo k. Concluimos entonces que $f^{(n)}(z_1) = 0$ para todo n, es decir, que $z_1 \in E$.

(c) *Broche de oro*: Por ser D conexo, sus únicos subconjuntos abiertos y cerrados (en D) son $\varnothing$ y D (es una caracterización sencilla de los conexos en general). Por lo tanto, o bien $E = \varnothing$ o bien $E = D$. Pero E no puede ser vacío, pues por hipótesis $z_0 \in E$. Por lo tanto, $E = D$, lo que significa que f se anula en todos los puntos de D. ¿No le parece hermosa esta demostración? ■

***Definición* 11.1:** (es una definición larga): Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto $D \subseteq \mathbb{C}$. Un *cero de* f es, sencillamente, un punto $z_0 \in D$ tal que $f(z_0) = 0$ (el término *raíz* se reserva, habitualmente, para los ceros de las funciones polinómicas). Ahora, como hemos demostrado en el capítulo anterior, por ser f holomorfa en D, es analítica en este abierto, es decir: existe un radio $r > 0$ (eventualmente infinito) tal que $D(z_0;r) \subseteq D$ y para todo z en el disco $D(z_0;r)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \overbrace{f(z_0)}^{=0} + f'(z_0)(z-z_0) + \tfrac{1}{2!}f''(z_0)(z-z_0)^2 + \tfrac{1}{3}f^{(3)}(z_0)(z-z_0)^3 + \ldots \\ &= (z-z_0)[\overbrace{f'(z_0) + \tfrac{1}{2!}f''(z_0)(z-z_0) + \tfrac{1}{3!}f^{(3)}(z_0)(z-z_0)^2 + \ldots}^{f_1(z)}] \end{aligned} \tag{11.5}$$

Obsérvese que la función f_1 es holomorfa en D, pues para todo $z \in D - \{z_0\}$: $f_1(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$, y en el entorno $D(z_0;r)$ admite el desarrollo en serie indicado en (11.5) entre corchetes. Es decir: si $f(z_0) = 0$, tenemos una factorización $f(z) = (z - z_0)f_1(z)$, válida para todo $z \in D$, donde f_1 es holomorfa en D. Si $f_1(z_0) \neq 0$, diremos que z_0 es un *cero simple* o *de orden* 1 de f. Si $f_1(z_0) = 0$, podemos aplicar el mismo razonamiento anterior a la función holomorfa f_1 y deducir que se puede factorizar en la forma $f_1(z) = (z - z_0)f_2(z)$ donde f_2 es holomorfa en D, de donde obtenemos la factorización $f(z) = (z - z_0)^2 f_2(z)$ de f. Ahora, si $f_2(z_0) \neq 0$, diremos que z_0 es un *cero doble* o *de orden* 2 de f. Si $f_2(z_0) = 0$, de manera análoga obtenemos una factorización $f(z) = (z - z_0)^3 f_3(z)$ de f donde f_3 es holomorfa en D. Ya puede adivinar que si $f_3(z_0) \neq 0$, diremos que z_0 es un *cero triple* o *de orden* 3 de f. Podemos seguir, pero no va a ser práctico ni instructivo, más bien monótono. La pregunta es si en algún momento el proceso termina, es decir, si se llega necesariamente a un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$f(z)=(z-z_0)^k f_k(z)$ para todo $z\in D$ y f_k holomorfa en D tal que $f_k(z_0)\neq 0$, caso en que diremos que z_0 es un *cero de orden k* de f. Una observación trivial es que si f es idénticamente nula en un entorno $D(z_0;r')\subseteq D(z_0;r)$, no puede existir tal entero k, pues en ese caso tendríamos $0=f(z)=(z-z_0)^k f_k(z)$ para todo $z\in D(z_0;r')$, de donde resultaría $f_k(z)=0$ para todo $z\in D(z_0;r')-\{z_0\}$, lo que por la continuidad de f_k implicaría que $f_k(z_0)=0$, contra lo supuesto. Por lo tanto, supondremos que f no es nula en un entorno de z_0. Ahora, la clave para saber si existe el famoso entero k y en tal caso poder determinarlo está en las sucesivas derivadas de f en z_0, como se puede ver en (11.5). Si retomamos de allí:

$$f(z)=\overbrace{f(z_0)}^{=0}+f'(z_0)(z-z_0)+\tfrac{1}{2!}f''(z_0)(z-z_0)^2+\tfrac{1}{3}f^{(3)}(z_0)(z-z_0)^3+\ldots$$

$$=(z-z_0)[\overbrace{\underbrace{f'(z_0)}_{f_1(z_0)}+\tfrac{1}{2!}f''(z_0)(z-z_0)+\tfrac{1}{3!}f^{(3)}(z_0)(z-z_0)^2+\ldots}^{f_1(z)}] \quad = \quad (\text{si } f'(z_0)=0)$$

$$=(z-z_0)^2[\overbrace{\underbrace{\tfrac{1}{2!}f''(z_0)}_{f_2(z_0)}+\tfrac{1}{3!}f^{(3)}(z_0)(z-z_0)+\tfrac{1}{4!}f^{(4)}(z_0)(z-z_0)^2\ldots}^{f_2(z)}] \quad = \quad (\text{si } f''(z_0)=0)$$

$$=(z-z_0)^3[\overbrace{\underbrace{\tfrac{1}{3!}f^{(3)}(z_0)}_{f_3(z_0)}+\tfrac{1}{4!}f^{(4)}(z_0)(z-z_0)+\tfrac{1}{5!}f^{(5)}(z_0)(z-z_0)^2+\ldots}^{f_3(z)}] = (\text{si } f^{(3)}(z_0)=0)$$

….

$$=(z-z_0)^{k-1}[\overbrace{\underbrace{\tfrac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(z_0)}_{f_{k-1}(z_0)}+\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(z_0)(z-z_0)+\tfrac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(z_0)(z-z_0)^2+\ldots}^{f_{k-1}(z)}]=$$

$(\text{si } f^{(k-1)}(z_0)=0)$

$$=(z-z_0)^{k}[\overbrace{\underbrace{\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(z_0)}_{f_{k}(z_0)}+\tfrac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(z_0)(z-z_0)+\tfrac{1}{(k+2)!}f^{(k+2)}(z_0)(z-z_0)^2+\ldots}^{f_{k}(z)}]$$

y aquí termina sii $f^{(k)}(z_0)\neq 0$. En este caso, decimos que z_0 es un cero de orden k de f. Es decir: z_0 es un cero de orden k de f sii existe f_k holomorfa en D tal que $f(z)=(z-z_0)^k f_k(z)$ para todo $z\in D$ y $f_k(z_0)\neq 0$, y esto es equivalente a

$$f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\ldots=f^{(k-1)}(z_0)=0\neq f^{(k)}(z_0)$$

En el caso en que todas las derivadas de *f* se anulen en 0, si *D* es conexo, por el lema previo la función *f* es idénticamente nula.

***Proposición* 11.4** (*Principo de los Ceros Aislados*) Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en un abierto conexo $D \subseteq \mathbb{C}$ y sea $Z(f) = \{z \in D : f(z) = 0\}$ el conjunto de sus ceros. Si existe $z_0 \in Z(f)$ que es punto de acumulación de $Z(f)$, entonces *f* es idénticamente nula. Equivalentemente: si *f* no es idénticamente nula, todos sus ceros son aislados, es decir, para cada $z_0 \in Z(f)$ existe $r_0 > 0$ tal que $D(z_0;r_0) \subseteq D$ y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D(z_0;r_0) - \{z_0\}$.

Demostración: Si *f* no es idénticamente nula y $f(z_0) = 0$, entonces existe un entero positivo *k* y una función f_k holomorfa en *D* tal que $f(z) = (z - z_0)^k f_k(z)$ para todo $z \in D$ y $f_k(z_0) \neq 0$ (es decir: z_0 es un cero de orden *k* de *f* ; ver definición previa). Ahora bien, por ser $|f_k(z_0)| > 0$ y por ser $|f_k|$ continua, existe $r_0 > 0$ tal que $D(z_0;r_0) \subseteq D$ y $|f_k(z)| > 0$ para todo $z \in D(z_0;r_0)$. Por lo tanto, el único punto del disco $D(z_0;r_0)$ donde se anula *f* es z_0, pues $f(z) = (z - z_0)^k f_k(z)$ para todo $D(z_0;r_0)$ ■

Esta propiedad es muy interesante y en realidad es consecuencia de la analiticidad de las holomorfas. También vale para funciones analíticas de variable real, pero no para las derivables (de variable real). Por ejemplo, la función $f : \Re \longrightarrow \Re$ tal que $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ y $f(x) = x^2$ si $x > 0$, es de clase C^1 en la recta real y sus ceros no son aislados, como puede observarse sin demasiada dificultad. Lo que ocurre con las funciones analíticas es un fenómeno que ya hemos mencionado, y es que el valor que toman en un punto depende de los valores que toman en un entorno de dicho punto. Pero dejemos las disquisiciones metafísicas para otro momento y pasemos a un par de observaciones, algunos ejemplos y una consecuencia muy importante.

Nota* 11.1*: En el enunciado, la hipótesis de que el punto de acumulación de ceros sea un punto del dominio de la función, es indispensable. Por ejemplo, la función $f(z) = sen\left(\frac{\pi}{z}\right)$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$ (que es abierto y conexo) y se anula en todos los puntos $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, que se acumulan en 0. Pero por suerte 0 no está en el dominio de *f* (pues *f* no es idénticamente nula, creo…)

Nota* 11.2*: Que una función holomorfa no nula tenga infinitos ceros no es difícil de ejemplificar: la función *seno* tiene los infinitos ceros $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pero si una función holomorfa en un dominio conexo tiene infinitos ceros en un subconjunto cerrado y acotado de su dominio, es idénticamente nula en dicho dominio. La razón es la siguiente: no es difícil demostrar (a la manera de Bolzano) que un conjunto infinito y acotado de puntos del plano tiene necesariamente un punto de acumulación (que puede o no pertenecer al conjunto). Una formulación equivalente es que un conjunto infinito y acotado $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}$ contiene al menos una sucesión convergente (a un punto que es punto de acumulación del conjunto y puede o no pertenecer al conjunto $\mathcal{X}$). Ahora, supongamos que $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en el abierto conexo $D \subseteq \mathbb{C}$ y que existe un conjunto infinito $\mathcal{X}$ de ceros de f en un subconjunto cerrado y acotado $K \subset D$. Entonces, existe una sucesión $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ de ceros de f en $\mathcal{X}$ que converge a un punto w. Pero $\mathcal{X} \subset K$, por lo tanto w es punto de acumulación de puntos de K, y K es cerrado y por lo tanto $w \in K \subset D$, es decir: $w \in D$. Pero entonces, por ser f continua $f(w) = f(\underset{n \to \infty}{Lim} w_n) \overset{f\ continua}{=} \underset{n \to \infty}{Lim} \overbrace{f(w_n)}^{=0} = 0$. Por lo tanto, w es un punto del dominio de f que es punto de acumulación de ceros.

***Corolario* 11.1:** (*Principio de Prolongación Analítica*)
Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfas en un abierto conexo $D \subseteq \mathbb{C}$, tales que el conjunto de puntos $E_{f,g} = \{z \in D : f(z) = g(z)\}$ tiene al menos un punto de acumulación $z_0 \in E_{f,g}$. Entonces, $f(z) = g(z)$ para todo $z \in D$.

Demostración: Basta con aplicar el Principio de los ceros aislados a la función holomorfa $f - g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ ■

***Nota* 11.3:** La razón por la que este teorema tiene el nombre de *Principio de prolongación analítica* está relacionada con un problema que obsesionó durante mucho tiempo a gente como Riemann. El problema es muy sencillo de plantear: dada una función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica en un dominio abierto $D \subset \mathbb{C}$, dos preguntas surgen de manera natural (natural para Riemann….). La primera (*existencia*): ¿Existe un dominio abierto conexo $\widetilde{D} \subseteq \mathbb{C}$ que contenga estrictamente a D y una función analítica $\widetilde{f} : \widetilde{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\widetilde{f}_{|D} = f$? Si existe, $\widetilde{f}$ se denomina "prolongación analítica" o "extensión analítica" de f al dominio $\widetilde{D}$. La segunda (*unicidad*): Si existe una prolongación analítica de f a $\widetilde{D}$, ¿es única? El Corolario 11.1 resuelve - afirmativamente - el problema de la unicidad con total solvencia: sean $\widetilde{f}_1 : \widetilde{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\widetilde{f}_2 : \widetilde{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ dos extensiones analíticas de f a un dominio $\widetilde{D} \supset D$. Entonces el conjunto $E_{\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2} = \{z \in \widetilde{D} : \widetilde{f}_1(z) = \widetilde{f}_2(z)\}$ contiene al abierto D, y cada punto de un abierto es punto de acumulación del mismo, por lo tanto $\widetilde{f}_1(z) = \widetilde{f}_2(z)$ para todo $z \in \widetilde{D}$. Obsérvese que para esta conclusión lo que utilizamos es la existencia de un abierto no vacío contenido en $E_{\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2} = \left\{z \in \widetilde{D} : \widetilde{f}_1(z) = \widetilde{f}_2(z)\right\}$, y es por eso que una formulación habitual - y más débil - del Principio de Prolongación Analítica es la que presenta como hipótesis la existencia de un entorno de un punto de D donde las funciones f y g coinciden. Respecto de la existencia de prolongaciones analíticas, ya hemos hecho alusión al problema en la Nota 10.2 del Capítulo X, y hemos intuido que en general no es un tema es sencillo. Lo que se busca, en realidad, es un dominio $\widetilde{D}$ *maximal* donde exista una extensión analítica, es decir: una extensión *analítica maximal*, inextendible a dominios más grandes. En algunos casos esto es muy sencillo de resolver, como por ejemplo para la función $f : D(0;1) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Claramente la función $\widetilde{f} : \mathbb{C} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\widetilde{f}(z) = \dfrac{1}{1-z}$ es una extensión analítica maximal de f y por el Principio de Prolongación Analítica, es única. Ahora bien, la función $f : D(0;1) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{z^n}{\ln(n)}$ (la serie tiene radio de convergencia 1), ¿se puede extender más allá del disco de convergencia? ¿Será inextendible? Un problema de existencia de prolongación analítica cuya dificultad es de otro tipo es el que plantea el logaritmo principal, como vimos en la misma Nota 10.2 mencionada más arriba. Pero parece llegado el momento de concluir la nota, pues respecto del problema de la existencia de extesiones analíticas, es todo lo que podemos escribir en estos apuntes (no queremos obsesionarnos).

***Ejemplo* 11.2**: (Ejercicio) Determinar, si existen, todas las funciones holomorfas en el disco $D(0;2)$ que se anulan en los puntos $\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Respuesta: Sea f holomorfa en $D(0;2)$ tal que $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por continuidad de f, también se anula en 0. Como $0 \in D(0;2)$, resulta que 0 es un cero de f que es un punto de acumulación de sus ceros. Por lo tanto, como $D(0;2)$ es conexo, la única función que cumple lo pedido es la función nula.

***Ejemplo* 11.3**: (Ejercicio)

(a) Sea $g:\Re \longrightarrow \Re$ tal que $g(x) = x^3 sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$. Probar que es una función de clase C^1 que se anula en 0 y en $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sea $h:\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $h(z) = z^3 sen\left(\frac{\pi}{z}\right)$ si $z \neq 0$ y $h(0) = 0$. Probar que h no es derivable en 0.

Sugerencias para (b): Observe que si h fuera derivable en 0, entonces sería holomorfa en todo el plano. Pero h se anula en 0 y en todos los puntos $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Por el Principio de los Ceros Aislados, sería la función nula… Si usted quiere adaptar la demostración de que g es derivable en 0 a la "demostración" de que h es derivable en 0, se va a encontrar con la siguiente "pequeña diferencia": las funciones *seno* y *coseno* son acotadas en $\Re$ pero no en $\mathbb{C}$

***Ejemplo* 11.4**: En la primera clase hemos presentado informalmente la exponencial compleja y sus propiedades más importantes. Más tarde, luego de presentar las series de potencias, le extendimos el certificado de nacimiento. Claramente, lo que hicimos (lo hizo Euler) fue extender la exponencial real $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ al plano complejo utilizando la misma serie: $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, que tiene radio de convergencia infinito. Esto puede verse como una extensión analítica, pero no de una función definida en un abierto del plano complejo, sino de una función analítica real. La pregunta que podemos hacernos es si puede o no existir <u>otra</u> función $f:\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que restringida a $\Re$ sea la exponencial real. Y la respuesta es no, y la razón la tiene, nuevamente, el Principio de Prolongación Analítica (Corolario 11.1) tal cual lo formulamos: el conjunto de ceros de la función $f - \exp$ es toda la recta real, cuyos puntos son todos de acumulación. Como se puede imaginar, esto se generaliza de manera inmediata: sea $h: I \longrightarrow \Re$ una función analítica en un intervalo real $I \subseteq \Re$, sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo que contiene al intervalo *I*, y sean $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g: D \longrightarrow \mathbb{C}$ dos holomorfas tales que $f_{|I} = h$ y también $g_{|I} = h$. Entonces, $f(z) = g(z)$ para todo $z \in D$, por la misma razón: el conjunto de ceros de f - g contiene al intervalo *I*.

***Ejemplo* 11.5**: (*Persistencia de las Identidades*) En realidad no me acuerdo si esta propiedad se llama así. De todos modos, es un nombre expresivo, y si quiere puede bautizarla de otra manera. El siguiente ejemplo de lo que estamos denominando «persistencia» es muy sencillito y puede explicar porqué elegimos ese nombre: sea $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ la función entera $f(z)=sen(z)^2+\cos(z)^2-1$. Entonces, el conjunto de ceros de esta función contiene a la recta real (supongo que se acuerda de eso). Por lo tanto, por el Principio de los Ceros Aislados, f se anula en todo el plano complejo, es decir: $\forall z\in\mathbb{C}: sen(z)^2+\cos(z)^2=1$. Hemos probado una identidad sin hacer cuentas, lo que es siempre agradable. Un enunciado general de esta propiedad podría ser el siguiente. Sean $f_1,f_2,...,f_m$ holomorfas en un abierto conexo $D\subseteq\mathbb{C}$ que contiene un intervalo real $I\subseteq\Re$, y sea $F:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times...\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ una función de m variables complejas, holomorfa respecto de cada una de estas variables. Entonces, si para todo $x\in I$ se verifica $F(f_1(x),f_2(x),...,f_m(x))=0$, entonces también se verifica la identidad $F(f_1(z),f_2(z),...,f_m(z))=0$ para todo $z\in D$. Este enunciado no es el más general posible, pues F podría estar definida en un dominio más pequeño y esto exigiría agregar varios detalles técnicos inevitables. Lo único que se necesita, realmente, es que quede bien definida y sea holomorfa en D la función $h(z)=F(f_1(z),f_2(z),...,f_m(z))$, para aplicarle el Principio de los Ceros Aislados. El caso más sencillo (y el que aparece en el ejemplo que dimos) es el caso en que F es una función polinómica de varias variables. En el nuestro ejemplo inicial, teníamos $m = 2$, : $F(w_1,w_2)=w_1^{\;2}+w_2^{\;2}-1$, $f_1(z)=sen(z)$ y $f_2(z)=\cos(z)$.

Ahora, veamos una consecuencia muy popular de la analiticidad de las holomorfas.

***Proposición* 11.4** (*Regla de l'Hôpital*)

Sean $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ y $g:D\longrightarrow\mathbb{C}$ dos funciones holomorfas en un abierto $D\subseteq\mathbb{C}$ y un punto $z_0\in D$, tales que $f(z_0)=g(z_0)=0$ y $g(z)\neq 0$ para todo $z\in D-\{z_0\}$. Entonces, existe $\underset{z\to z_0}{Lim}\dfrac{f(z)}{g(z)}$ (finito) si y solamente si existe $\underset{z\to z_0}{Lim}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}$ (finito), y en ese caso ambos límites son iguales.

Demostración: Lo único que necesitamos es desarrollar en serie ambas funciones en torno de z_0. Sea $r > 0$ tal que $D(z_0;r)\subseteq D$. Entonces, para todo $z\in D(z_0;r)-\{z_0\}$:

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\overbrace{f(z_0)}^{=0}+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{1}{2!}f''(z_0)(z-z_0)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(z_0)(z-z_0)^3+\dots}{\underbrace{g(z_0)}_{=0}+g'(z_0)(z-z_0)+\frac{1}{2!}g''(z_0)(z-z_0)^2+\frac{1}{3!}g^{(3)}(z_0)(z-z_0)^3+\dots}=$$
$$=\frac{f'(z_0)+\frac{1}{2}f''(z_0)(z-z_0)+\frac{1}{3!}f^{(3)}(z_0)(z-z_0)^2+\dots}{g'(z_0)+\frac{1}{2!}g''(z_0)(z-z_0)+\frac{1}{3!}g^{(3)}(z_0)(z-z_0)^2+\dots} \qquad (11.6)$$

Mientras que

$$\frac{f'(z)}{g'(z)}=\frac{f'(z_0)+f''(z_0)(z-z_0)+\frac{1}{2!}f^{(3)}(z_0)(z-z_0)^2+\dots}{g'(z_0)+g''(z_0)(z-z_0)+\frac{1}{2!}g^{(3)}(z_0)(z-z_0)^2+\dots} \qquad (11.7)$$

(Recordemos que el radio de convergencia de la serie de Taylor de una función holomorfa es siempre mayor o igual que el radio de cualquier disco contenido en el dominio de la función). Dejo a usted completar los detalles que faltan a partir de (11.6) y (11.7) ■

Pregunta* 11.1 *: ¿Qué pasa si $f'(z_0)=g'(z_0)=0$?

***Observación* 11.3:** Solamente hemos presentado la versión compleja del caso «$\frac{0}{0}$». En mi opinión, la regla de l’Hôpital es peligrosísima y hay que manejarla con extrema prudencia, observando detenidamente las condiciones de aplicación. Pero mucho más peligroso que el caso «$\frac{0}{0}$» es el caso «$\frac{\infty}{\infty}$». Aconsejo con fervor alejarse rápidamente, por ejemplo cambiando $\frac{f}{g}$ por $\frac{\frac{1}{g}}{\frac{1}{f}}$ para pasar al caso «$\frac{0}{0}$», un poco menos peligroso.

***Observación* 11.4**: Un par de cuestiones prácticas:

(*a*) Es muy frecuente, lamentablemente, el uso abusivo de la regla de l’Hôpital. Por ejemplo en su aplicación al cálculo de límites de la forma $\underset{z\to z_0}{Lim}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. No es que no se pueda aplicar, pero se está utilizando la regla de l’Hôpital para calcular una derivada, y a su vez se necesita la derivada para aplicar la regla de l’Hôpital. Dicho de otro modo, si utiliza la regla de l’Hôpital para calcular el límite de $\frac{e^z-1}{z}$ cuando z tiende a 0 está utilizando la derivada de la exponencial para definir su derivada en 0…

(b) Otra cuestión práctica que suele suceder es el exceso de cuentas innecesarias en la aplicación de la regla de l'Hôpital. Un ejemplo: para calcular (si existe) el límite de $\frac{[1-\cos(z)]e^z}{z^2[i+sen(z)]}$ cuando z tiende a 0, no se le ocurra aplicar la regla de l'Hôpital a todo el cociente, pues va a estar largo rato haciendo cuentas sin sentido. Lo que tiene que observar es que ni e^z ni $i + sen(z)$ se anulan en 0, y que por lo tanto la función $h(z)=\frac{e^z}{i+sen(z)}$ es continua (y no nula) en un entorno de 0. La continuidad de h implica que $\underset{z\to 0}{Lim}\, h(z)=h(0)=\frac{1}{i}=-i$. Entonces, lo que hay que estudiar es el límite de $\frac{1-\cos(z)}{z^2}$ cuando z tiende a 0, lo que es realmente sencillito (nostalgias de Análisis I). Aplicando la regla de l'Hôpital dos veces a $\frac{1-\cos(z)}{z^2}$ resulta que $\underset{z\to 0}{Lim}\frac{1-\cos(z)}{z^2}=\frac{1}{2}$

En definitiva, $\underset{z\to 0}{Lim}\frac{[1-\cos(z)]e^z}{z^2[i+sen(z)]}=\underset{z\to 0}{Lim}\frac{1-\cos(z)}{z^2}\ \underset{z\to 0}{Lim}\frac{e^z}{i+sen(z)}=\frac{1}{2}(-i)=\frac{-i}{2}$.

Terminamos el capítulo con otra propiedad sorprendente de las funciones holomorfas.

***Proposición* 11.5** (*Principio del Módulo Máximo*)
Sea $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ holomorfa en un abierto conexo $D\subseteq\mathbb{C}$ y supongamos que en $z_0\in D$ su módulo alcanza un máximo local, es decir: existe un disco $D(z_0;R)\subseteq D$ tal que

$$\forall z\in D(z_0;R):\quad |f(z)|\le|f(z_0)| \ . \tag{11.8}$$

Entonces, f es constante en D. Es decir: el módulo de una función holomorfa no constante en un abierto conexo no puede alcanzar un máximo local en un punto interior de D.

Demostración: En el disco $D(z_0;R)\subseteq D$ se tiene el desarrollo $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, donde, en particular: $c_0=f(z_0)$. Ahora:

$$|f(z)|^2=f(z)\overline{f(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}c_n\overline{c_m}(z-z_0)^n(\overline{z}-\overline{z}_0)^m \tag{11.9}$$

Dado un número real r tal que $0 < r < R$, para todo $\theta \in [0,2\pi]$, el punto $z = z_0 + re^{i\theta}$ es un punto del disco $D(z_0;R)$. Reemplazando en (11.9):

$$\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_n \overline{c_m}\, r^{n+m} e^{i(n-m)\theta} \tag{11.10}$$

Integrando ambos miembros respecto de $\theta \in [0,2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_n \overline{c_m}\, r^{n+m} \overbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta}^{=0\ si\ n\neq m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \overline{c_n} r^{2n} 2\pi = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \tag{11.11}$$

Es decir:

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 r^2 + |c_2|^2 r^4 + |c_3|^2 r^6 + \ldots = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right|^2 d\theta \overset{(11.8)}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|^2 d\theta = |f(z_0)|^2 = |c_0|^2$$

Se deduce inmediatamente que $c_1 = c_2 = c_3 = ... = 0$, lo que significa que *f* es constante en el disco $D(z_0;R)$. Ahora, la función $f - c_0$ es analítica en el abierto conexo $D \subseteq \mathbb{C}$ y se anula en el disco abierto $D(z_0;R)$. Por el *Principio de los Ceros Aislados*, $f - c_0$ es idénticamente nula en D. ■

***Corolario* 11.2** (*Principio del Módulo Mínimo*) (es un chiste)
Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en un abierto conexo $D \subseteq \mathbb{C}$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D$, y supongamos que en $z_0 \in D$ su módulo alcanza un mínimo local, es decir: existe un disco $D(z_0;R) \subseteq D$ tal que

$$\forall z \in D(z_0;R): \quad |f(z)| \geq |f(z_0)| \ . \tag{11.12}$$

Entonces, *f* es constante en *D*. Es decir: el módulo de una función holomorfa no constante en un abierto conexo no puede alcanzar un mínimo local en un punto interior de *D*, salvo que ese mínimo sea 0.

Demostración: Si $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D$, entonces la función $\dfrac{1}{f}$ es holomorfa en *D*. Ahora, basta con aplicar el Principio del Módulo Máximo a esta función $\dfrac{1}{f}$ ■

En la práctica veremos ejercicios de aplicación del Principio del Módulo Máximo, pero podemos comenzar intentando imaginar el gráfico del módulo de una función holomorfa en un dominio abierto conexo. Es una superficie que se encuentra encima del nivel 0 (el « plano *xy* ») y que no tiene ni «picos», tampoco «valles» salvo que toque el nivel 0 (en los ceros de la función). Es decir: si la función no se anula en ningún punto, esa superficie es local y globalmente *alabeada*.