Matriz de cambio de base

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real con bases $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ y B'. La matriz de cambio de base $M_B^{B'}$ verifica:

- $M_B^{B'} = \begin{pmatrix} [v_1]^{B'} & [v_2]^{B'} & \cdots & [v_n]^{B'} \end{pmatrix}$
- $M_B^{B'} \cdot [v]^B = [v]^{B'}$ para todo $v \in \mathbb{V}$.
- $M_B^{B'}$ es inversible y $[M_B^{B'}]^{-1} = M_{B'}^B$

1. Dadas $B = \{1 + 2x - x^2; 1 - x; 2 - x + 2x^2\}$ y $B' = \{1 + x; 1 - x; x^2\}$ bases de $\mathbb{R}_2[x]$

    a) Hallar la matriz de cambio de base $M_B^{B'}$.

    b) Sabiendo que $[p]^B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcular $[p]^{B'}$.

1. La matriz de cambio de base $M_B^{B'}$ se calcula

$$M_B^{B'} = \begin{pmatrix} [1 + 2x - x^2]^{B'} & [1 - x]^{B'} & [2 - x + 2x^2]^{B'} \end{pmatrix}$$

.

Calculemos las coordenadas que necesitamos:

- $[1 + 2x - x^2]^{B'} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow 1 + 2x - x^2 = \alpha(1 + x) + \beta(1 - x) + \gamma x^2$

  Resolviendo el sistema: $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = 2 \\ \gamma = -1 \end{cases}$ obtenemos $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = -1$.

  Luego $[1 + 2x - x^2]^{B'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

  - $[1 - x]^{B'} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow 1 - x = \alpha(1 + x) + \beta(1 - x) + \gamma x^2$

    Es inmediato que $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$.

    Luego $[1 - x]^{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  - $[2 - x + 2x^2]^{B'} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2 - x + 2x^2 = \alpha(1 + x) + \beta(1 - x) + \gamma x^2$

    Resolviendo el sistema: $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha - \beta = -1 \\ \gamma = 2 \end{cases}$ obtenemos $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$, $\gamma = 2$.

Luego $[1+2x-x^2]^{B'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

Entonces

$$M_B^{B'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Para calcular $[p]^{B'}$ sabiendo que $[p]^B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, podemos usar que $M_B^{B'} \cdot [p]^B = [p]^{B'}$. En este caso:

$$[p]^{B'} = M_B^{B'} \cdot [p]^B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Si $M_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, siendo E la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

a) Hallar la base B.

b) Sea $B' = \{(1,1,1),(1,1,0),(-1,0,0)\}$ otra base de $\mathbb{R}^3$. Hallar los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ que tienen las mismas coordenadas en las bases B y B'.

1. Para hallar la base B presentaremos dos maneras:

- Forma 1: Sabemos que $M_B^{B'} = [M_{B'}^B]^{-1}$, entonces

$$M_B^E = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(Omitimos los cálculos pero ustedes pueden verificarlo)
Por otro lado, si $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, la matriz de cambio de base de B a E es:

$$M_B^E = \begin{pmatrix} [v_1]^E & [v_2]^E & [v_3]^E \end{pmatrix}$$

Como $[v]^E = v$ para todo vector $v \in \mathbb{R}^3$, comparando ambas expresiones, obtenemos que

$$B = \{(1,0,0)^t, (5,2,-3)^t, (-4,-1,2)^t\}.$$

- Forma 2: Llamemos $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ a la base que queremos hallar. Sabemos que

$$M_E^B = \begin{pmatrix} [(1,0,0)]^B & [(0,1,0)]^B & [(0,0,1)]^B \end{pmatrix}$$

Tenemos: $[(1,0,0)]^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $(1,0,0)^t = v_1$.

$[(0,1,0)]^B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, entonces $(0,1,0)^t = 2v_1 + 2v_2 + 3v_3$ y de acá obtenemos que

$$2v_2 + 3v_3 = (-2,1,0)^t$$

$[(0,0,1)]^B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, entonces $(0,0,1)^t = 3v_1 + v_2 + 2v_3$ y de acá obtenemos que

$$v_2 + 2v_3 = (-3,0,1)^t$$

Operando se obtiene $v_2 = (5,2,-3)^t$ y $v_3 = (-4,-1,2)^t$.
Luego,

$$B = \{(1,0,0)^t, (5,2,-3)^t, (-4,-1,2)^t\}.$$

a) Buscamos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $[v]^B = [v]^{B'} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Esto es, los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$v = \alpha(1,0,0)^t + \beta(5,2,-3)^t + \gamma(-4,-1,2)^t = \alpha(1,1,1)^t + \beta(1,1,0)^t + \gamma(-1,0,0)^t$$

Igualando coordenada a coordenada tenemos que:

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta - 4\gamma &= \alpha + \beta - \gamma \\ 2\beta - \gamma &= \alpha + \beta \\ -3\beta + 2\gamma &= \alpha \end{cases}$$

Reagrupando tenemos el sistema

$$\begin{cases} 4\beta - 3\gamma &= 0 \\ -\alpha + \beta - \gamma &= 0 \\ -\alpha - 3\beta + 2\gamma &= 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es $\alpha = -\frac{1}{4}\gamma$, $\beta = \frac{3}{4}\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$.
Luego los vectores buscados son de la forma:

$$v = -\frac{1}{4}\gamma(1,1,1)^t + \frac{3}{4}\gamma(1,1,0)^t + \gamma(-1,0,0)^t = \gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)^t,$$

con $\gamma \in \mathbb{R}$.