Apellido y Nombres: ....,,,,,...
DNI: .... Padrón: .... Código Asignatura: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....
Correo electrónico: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Segunda fecha. 13 de agosto de 2021.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Sean $R=\{(x,y) : |x|+|y|<1\}$ y u solución del problema dado por:

$$\nabla^2 u(x,y) = 0 \quad \text{para} \quad (x,y) \in R$$
$$u(x,y)=\begin{cases} xy & \text{para} \quad |x|+|y|=1, y\geqslant 0 \\ -xy & \text{para} \quad |x|+|y|=1, y<0 \end{cases}$$

Obtener el máximo valor de $|u(x,y)|$ en $\overline{R}$

Ejercicio 2. Explicar por qué la serie trigonométrica de Fourier en $[-1,1]$ de la función $f(x) = x^4\log(1+x^2)$ se reduce a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\cos(n\pi x)$ y analizar si converge uniformemente. Calcular $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha_n$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n\alpha_{2n+1}$

Ejercicio 3. Describir un problema físico que pueda modelarse como:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<2,\ t>0 \\ u(x,0)=g(x) & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ u(0,t)=1 & t\geqslant 0 \\ u_x(2,t)=0 & t\geqslant 0 \end{cases}$$

y resolverlo, sabiendo que $g(x)=1+\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{4}\pi x\right)$ para todo $x\in[0,2]$.

Ejercicio 4. A partir de la transformada de Fourier de

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(t) & \text{si } t\in[0,\pi] \\ 0 & \text{si } t\notin[0,\pi] \end{cases},$$

calcular el valor de la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+\cos(w\pi))\cos(w\pi t)}{1-w^2}dw$ en $t=\dfrac{\pi}{2}$, previo estudio de convergencia.

Ejercicio 5. Dada $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} t & \text{si } t>\frac{\pi}{2} \end{cases}$, analizar la existencia de la transformada de Laplace de f y dar su dominio de convergencia. Resolver, aplicando transformada de Laplace a la ecuación:

$$y''(t)-2y'(t)+2y(t)=f(t) \quad t>0$$

con condiciones iniciales $y(0)=y'(0)=0$.