EJEMPLO:

Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2x2}$ y el conjunto $\mathrm{S} = \{\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{2\mathrm{x}2} : \mathrm{A} = \mathrm{A}^{\mathrm{t}}\}$ (matrices simétricas)

1. Probar que S es subespacio de $\mathbb{V}$.

   (a) $0_{\mathbb{V}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$??

   $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ la matriz nula verifica la condición del conjunto, por lo tanto es un elemento de S.

   (b) Sean $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{S} \Longrightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathrm{S}$??? (suma de matrices simétricas resulta matriz simétrica?)

   $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{\mathrm{t}} \underset{\text{propiedad}}{=} \mathrm{A}^{\mathrm{t}} + \mathrm{B}^{\mathrm{t}} \underset{\text{hipótesis}}{=} \mathrm{A} + \mathrm{B}$ $\rightarrow$ verifica la condición del conjunto.

   (c) Sean $\mathrm{A} \in \mathrm{S}, \mathrm{k} \in \mathbb{R} \Longrightarrow \mathrm{kA} \in \mathrm{S}$??? (múltiplo de matriz simétrica resulta matriz simétrica?)

   $(\mathrm{kA})^{\mathrm{t}} \underset{\text{propiedad}}{=} \mathrm{kA}^{\mathrm{t}} \underset{\text{hipótesis}}{=} \mathrm{kA}$ $\rightarrow$ verifica la condición del conjunto.

   Concluimos que S es subespacio.

2. Hallar un sistema de generadores de S.

   $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{2\mathrm{x}2} \rightarrow \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ debe cumplir: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de donde: $\mathrm{b} = \mathrm{c}$

   $\mathrm{A} \in \mathrm{S} \rightarrow \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ con $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{d} \in \mathbb{R}$

   Podemos descomponer la matriz de la siguiente forma:

   $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Así logramos escribir una matriz del subespacio como combinación lineal de ciertas matrices fijas (todas pertenecientes a S)

$$S = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

3. Dar una base y dimensión de S.

   Analizamos independencia lineal del conjunto generador :

$$\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

   Resolviendo esta igualdad de matrices: $\alpha = 0$; $\beta = 0$; $\gamma = 0$

   El conjunto $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ es l.i. por lo tanto una base de S

   y $\dim(S) = 3$