UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES - FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS MATEMÁTICO III

Segundo cuatrimestre 2020

Respuestas del Integrador 05-02-2021

Ejercicio 1. Determinar el mayor dominio de holomorfía de $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n (n+1)}$.

Calcular la integral $\oint_{C_r} \cos(z)\left(1 - \frac{3}{z}\right) f'(z)dz$ para los valores de $r > 0$ en los que esté bien definida, siendo $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ circuito simple positivo.

Respuesta: Aplicando, por ejemplo, el criterio del cociente, se ve rápidamente que el radio de la serie es 3. Como el centro de la misma es el 0, resulta que el dominio de holomorfía de la función f definida por la serie de potencias es el disco abierto $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\}$. Recordemos que el dominio de holomorfía de una función es siempre abierto, por la definición misma de holomorfia.

Para el cálculo de la integral $\oint_{C_r} \cos(z)\left(1 - \frac{3}{z}\right) f'(z)dz = \oint_{C_r} \frac{\cos(z)(z-3)f'(z)}{z}dz$, podemos utilizar aplicar la primera fórmula integral de Cauchy a la función $h(z) = \cos(z)(z-3)f'(z)$, holomorfa en el disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\}$, dominio que contiene al circuito $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ (siempre y cuando $0 < r < 3$) . Entonces:

$$\oint_{C_r} \cos(z)\left(1 - \frac{3}{z}\right) f'(z)dz = 2\pi i h(0) = 2\pi i \cos(0)(-3) f'(0) = -6\pi i \frac{1}{3.2} = -\pi i$$

Otra posible respuesta para el dominio de holomorfía de f:

Para cada $z \in D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\}$, tenemos que $zf(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{3^n (n+1)}$ y por lo tanto $[zf(z)]' = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} \overset{|z|<3}{=} \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = \frac{3}{3-z}$. Es decir, para todo z en el disco D, $zf(z)$ es <u>la</u> primitiva de $h(z) = \frac{3}{3-z}$ que se anula en $z = 0$ (esta primitiva es única, pues D es simplemente conexo). Entonces, para cada $z \in D$ tenemos que

$$zf(z) = Log(27) - 3Log(3-z) = Log\left(\frac{27}{(3-z)^3}\right)$$

donde Log es el logaritmo principal. El miembro derecho de esta identidad es una función holomorfa en el abierto $\widetilde{D} = \mathcal{C} - \{x \in \Re : x \geq 3\}$, que obviamente contiene al disco D. Por lo tanto, la función f definida por la serie del enunciado es la restricción de la función holomorfa $\widetilde{f} : \widetilde{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} \dfrac{Log(27) - 3Log(3-z)}{z} & si \quad z \in \widetilde{D} - \{0\} \\ 1 & si \quad z = 0 \end{cases}$$

Que esta función es holomorfa en 0 puede probarse comprobando que su límite cuando z tiende a 0 es 1 (y del Teorema de Riemann sobre las singularidades evitables; ver por ejemplo el Capítulo XII, página 21, de los Apuntes de Análisis de Variable Compleja que están en la página de la materia). O bien, directamente observando que en un entorno de 0 admite el desarrollo en series de potencias del enunciado, con radio de convergencia 3.

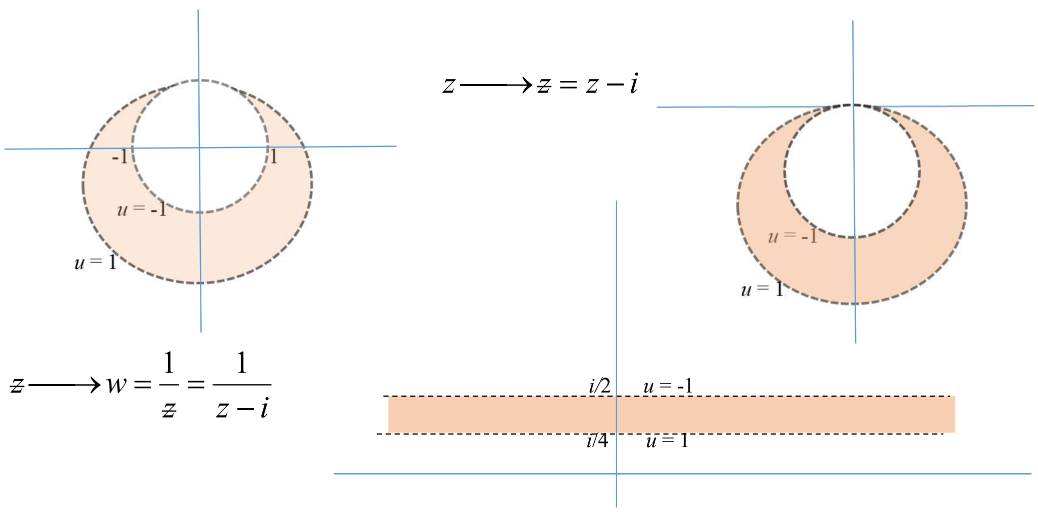
Ejercicio 2. Para $D = \{(x,y) \notin \Re^2 : x^2 + y^2 > 1 \, , \, x_2 + (y+1)^2 > 4\}$, resolver:

(i) $\quad \Delta u(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in D$

$$(ii) \quad u(x,y) = \begin{cases} -1 & si \quad x^2 + y^2 = 1 \, , (x,y) \neq (0,1) \\ \;\;1 & si \quad x^2 + (y+1)^2 = 4 \, , (x,y) \neq (0,1) \end{cases}$$

Dar como respuesta una función explícita de las variables reales x e y.

Respuesta: Mediante una traslación y una inversión, el dominio se transforma en una banda horizontal.



Ahora, el resto es sencillo: buscamos u en la forma $u = a\,\mathrm{Im}(w) + b$ donde a y b son dos constantes a determinar por las condiciones de borde, es decir $\begin{cases} a\frac{1}{2} + b = -1 \\ a\frac{1}{4} + b = 1 \end{cases}$. Resulta inmediatamente que a = -8 y b = 3, por lo tanto

$$u(x,y) = -8\,\mathrm{Im}\overbrace{\left(\frac{1}{x+yi-i}\right)}^{w} + 3 \overset{cuentitas}{=} 8\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2} + 3$$

Puede comprobarse directamente que esta función es armónica y que verifica las condiciones de borde. Por lo tanto, es la única solución del problema

---

Ejercicio 3. Resolver:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & 0 < x < \pi\ , 0 < y < 2\pi \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 & 0 < y < 2\pi \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < \pi \\ u(x,2\pi) = sen(4x) & 0 < x < \pi \end{cases}$$

sabiendo que $f:[0,\pi] \longrightarrow \Re$ es seccionalmente continua y que $\int_0^{\pi} f(x)sen(nx)dx = \frac{1}{n^2}$ para cada entero positivo n.

Respuesta: Puesto que la suma de armónicas es armónica, la resolución de este problema se simplifica un poco buscando la solución en la forma $u = v + w$, donde v y w son soluciones de

$$\begin{cases} \Delta v(x,y) = 0 & 0 < x < \pi\ , 0 < y < 2\pi \\ v(0,y) = v(\pi,y) = 0 & 0 < y < 2\pi \\ v(x,0) = 0 & 0 < x < \pi \\ v(x,2\pi) = sen(4x) & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta w(x,y) = 0 & 0 < x < \pi\ , 0 < y < 2\pi \\ w(0,y) = w(\pi,y) = 0 & 0 < y < 2\pi \\ w(x,0) = f(x) & 0 < x < \pi \\ w(x,2\pi) = 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Para la primera encontramos directamente $v(x,y)=\frac{1}{senh(8\pi)}sen(4x)senh(4y)$. Para la segunda, consideremos la extensión impar $\tilde{f}$ 2π-periódica de *f*. Su serie de Fourier es $\sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nx)$, donde

$$b_n=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(t)sen(nt)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overbrace{\tilde{f}(t)sen(nt)}^{\text{función par}}dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\tilde{f}(t)sen(nt)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(t)sen(nt)dt\overset{\text{hipótesis}}{=}\frac{2}{\pi n^2}$$

Por lo tanto, podemos plantear

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2sen(nx)}{\pi n^2}\left[c_n e^{ny}+d_n e^{-ny}\right]$$

donde los coeficientes c_n, d_n deben determinarse a partir de las condiciones de contorno: para y = 0 tenemos las ecuaciones $c_n+d_n=1$ y para $y=2\pi$, $c_n e^{2n\pi}+d_n e^{-2n\pi}=0$. Haciendo las cuentas obtenemos $c_n=\frac{1}{1-e^{4n\pi}}$ y $d_n=\frac{-e^{4n\pi}}{1-e^{4n\pi}}$. Por lo tanto,

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2sen(nx)}{\pi n^2}\frac{e^{ny}-e^{4n\pi}e^{-ny}}{1-e^{4n\pi}} \qquad (*)$$

Nota obsesiva: Esta no es la expresión más elegante posible para la función *w*, pero es cómoda para estudiar la convergencia de la serie (*). Si bien no se pide este estudio en el enunciado, se trata de una inquietud inevitable para el desasosiego de quien redacta estas respuestas. Veamos. Para todo $y\in(0,2\pi)$ y todo $n\geq 1$:

$$\left|\frac{e^{ny}-e^{4n\pi}e^{-ny}}{1-e^{4n\pi}}\right|=e^{-ny}\left|\frac{e^{2ny}-e^{4n\pi}}{1-e^{4n\pi}}\right|\overset{0<y<2\pi}{=}e^{-ny}\frac{e^{4n\pi}-e^{2ny}}{e^{4n\pi}-1}=e^{-ny}\frac{1-e^{2ny-4n\pi}}{1-e^{-4n\pi}}=e^{-ny}\frac{1-e^{-2n(2\pi-y)}}{1-e^{-4n\pi}}$$

Tenemos entonces que $\left|\frac{e^{ny}-e^{4n\pi}e^{-ny}}{1-e^{4n\pi}}\right|<e^{-ny}\frac{1}{1-e^{-4n\pi}}$ para todo $y\in(0,2\pi)$. Ahora, para todo $n\geq 1$: $e^{4n\pi}=1+4n\pi+\frac{(4n\pi)^2}{2!}+\ldots>1+4n\pi>2$, por lo tanto $e^{-4n\pi}<\frac{1}{2}\ \therefore\ -e^{-4n\pi}>-\frac{1}{2}\ \therefore\ 1-e^{-4n\pi}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ \therefore\ \frac{1}{1-e^{-4n\pi}}<2$. Entonces,

$$\left|\frac{e^{ny}-e^{4n\pi}e^{-ny}}{1-e^{4n\pi}}\right| < e^{-ny}\frac{1}{1-e^{-4n\pi}} < 2e^{-ny}$$

y la convergencia de la serie (*) es maravillosa, pues para cada $n \geq 1$

$$\left|\frac{sen(nx)}{n^2}\frac{e^{ny}-e^{4n\pi}e^{-ny}}{1-e^{4n\pi}}\right| = \frac{|sen(nx)|}{n^2}\left|\frac{e^{ny}-e^{4n\pi}e^{-ny}}{1-e^{4n\pi}}\right| \leq \frac{2e^{-ny}}{n^2}$$

Esta acotación implica una convergencia absoluta y uniforme de la serie (*). Si bien el desasosiego del escriba ha desaparecido, no ha sido confirmada la posibilidad de derivar la serie término a término dos veces: se supone que *w* es armónica, y por lo tanto debería admitir derivadas parciales no cruzadas de segundo orden. Tal vez algún alumno inquieto pueda probar que esta operación es posible.

Sigamos con la respuesta. Podemos expresar, de manera más «elegante»:

$$\frac{e^{ny}-e^{4n\pi}e^{-ny}}{1-e^{4n\pi}} = \frac{e^{-2n\pi}e^{ny}-e^{2n\pi}e^{-ny}}{e^{-2n\pi}-e^{2n\pi}} = \frac{e^{-n(2\pi-y)}-e^{n(2\pi-y)}}{e^{-2n\pi}-e^{2n\pi}} = \frac{senh(n(2\pi-y))}{senh(n2\pi)}$$

y entonces la respuesta del problema es

$$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y) = \frac{1}{senh(8\pi)}sen(4x)senh(4y) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2sen(nx)}{\pi n^2}\frac{senh(n(2\pi-y))}{senh(n2\pi)}$$

Ejercicio 4. Obtener $f:\Re \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega-a)e^{i\omega t}d\omega = \begin{cases} |t| & si \quad t\in(-a,a) \\ \frac{a}{2} & si \quad t\in\{-a,a\} \\ 0 & si \quad t\notin[-a,a] \end{cases}$,

donde $a>0$ y $\hat{f}$ es la transformada de Fourier de *f*. ¿Es única?. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega$.

Respuesta: Mediante un cambio de variables evidente, tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega - a)e^{i\omega t}dt \overset{\theta=\omega-a}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\theta)e^{i(\theta+a)t}d\theta = e^{iat}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\theta)e^{i\theta t}d\theta \overset{\text{Teorema de Invesión}}{=} e^{iat}2\pi f(t).$$ Por lo tanto $2\pi e^{iat}f(t) = \begin{cases} |t| & si \quad t \in (-a,a) \\ \dfrac{a}{2} & si \quad t \in \{-a,a\} \\ 0 & si \quad t \notin [-a,a] \end{cases}$ y entonces $f(t) = \begin{cases} \dfrac{|t|e^{-iat}}{2\pi} & si \quad t \in (-a,a) \\ \dfrac{ae^{ia^2}}{4\pi} & si \quad t = -a \\ \dfrac{ae^{-ia^2}}{4\pi} & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \notin [-a,a] \end{cases}$.

Esta función verifica las condiciones del enunciado. No es la única, pues cualquier otra función que difiera con *f* en una cantidad finita de puntos en cada intervalo acotado tiene la misma transformada de Fourier que *f*.
Ahora, para la integral pedida utilizamos la identidad de Parseval, lo que es lícito pues $f \in L^1(\Re,\mathcal{C}) \cap L^2(\Re,\mathcal{C})$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 = 2\pi\int_{-a}^{a} \frac{|t|^2\left|e^{-iat}\right|^2}{4\pi^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-a}^{a} t^2dt = \frac{\pi}{2}.\frac{2a^3}{3} = \frac{\pi}{3}a^3$$

Ejercicio 5. Sea $f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t<0 \\ sen\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) & si \quad 0 \le t \le 1 \\ 1 & si \quad t>1 \end{cases}$. Analizar para qué valores de α las funciones $g_\alpha : \Re \longrightarrow \mathcal{C}$ tales que $g_\alpha(t) = e^{\alpha t^2}f(t)$ son de orden exponencial. Resolver la siguiente ecuación: $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = (f * f)(t)$, $t \ge 0$, con las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$

Respuesta (*incompleta*): Dado que $f(t) = 1$ para todo $t > 1$ (y *f* es acotada en toda la recta), g_α solamente puede ser de orden exponencial si $\alpha \le 0$ (o bien, considerando valores complejos, $\mathrm{Re}(\alpha) \le 0$). Si α es un real positivo, entonces para todo $t > 1$ y cualquier constante *k*, $\dfrac{g_\alpha(t)}{e^{kt}} = \dfrac{e^{\alpha t^2}}{e^{kt}} = e^{\alpha t^2 - kt}$ no es acotada.
Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales y el Teorema de Convolución, resulta

$$s^2Y(s) + sY(s) - 2Y(s) = F^2(s) \quad (*)$$

donde Y es la transformada de Laplace de y y F la de f. Para especificar el dominio de validez de la ecuación debe tenerse en cuenta la abscisa de convergencia de F. En dicho dominio (y con la eventual restricción adicional $\operatorname{Re}(s) > 1$) tenemos

$$Y(s) = \frac{F^2(s)}{s^2 + s - 2} = \frac{F(s)}{(s-1)} \cdot \frac{F(s)}{(s+2)}$$

Esta expresión permite expresar $y = y_1 * y_2$, donde la transformada de Laplace de y_1 es $\dfrac{F(s)}{s-1}$ y la transformada de Laplace de y_2 es $\dfrac{F(s)}{s+2}$
