Apellido y Nombres: ....,,,,,...
DNI: .... Padrón: .... Código Asignatura: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....
Correo electrónico: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Segunda fecha. 26 de marzo de 2021.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Sean $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios en $\mathbb{C}$ con $grado(Q) \geqslant grado(P)+3$. Probar que la suma de lo residuos de todas las singularidades en $\mathbb{C}$ de $\dfrac{zP(z)}{Q(z)}$ es cero.

Ejercicio 2. Resolver el problema del potencial electrostático en el primer cuadrante:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & x>0, \quad y>0 \\ u(x,0)=\mathbb{1}_{(0,1)}(x) & x\geqslant 0 \\ u(0,y)=\mathbb{1}_{(0,1)}(y) & y\geqslant 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3. Considerar el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}+12x^2 & 0<x<\pi, \; t>0 \\ u(0,t)=1 & t\geqslant 0 \\ u(\pi,t)=3 & t\geqslant 0 \\ u(x,0)= h(x) & 0\leqslant x\leqslant \pi \end{cases}$$

Elegir el desarrollo de Fourier de $h(x)$ que resulte adecuado para resolver este problema. Obtener su solución $u(x,t)$ en términos de los coeficientes de dicho desarrollo.

Ejercicio 4. Sea $\hat{f}$ la transformada de Fourier de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(t)=e^{-t^2}\operatorname{sen} t$. Obtener el valor de las siguientes integrales impropias:

$$i)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\,d\omega, \quad ii)\int_{0}^{\infty}\omega\hat{f}(\omega)\,d\omega, \quad iii)\int_{0}^{\infty}\hat{f}(\omega)\operatorname{sen}(\alpha\omega)\,d\omega \quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

Ejercicio 5. Sea $r:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $r(t)=t-[t]$ siendo $[t]=n$ sii $n\leqslant t<n+1$ para $n\in\mathbb{Z}$ (parte entera de t).
Calcular la transformada de Laplace de r, especificando su dominio de convergencia.
Resolver el siguiente sistema utilizando transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x'(t)-y(t)=0 \\ x(t)-y'(t)=r(t) \end{cases} \quad \text{con } x(0^+)=0,\; y(0^+)=0$$