Apellido y Nombres: ....,,,,,,...
DNI: .... Padrón: .... Código Asignatura: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....
Correo electrónico: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Quinta fecha. 11 de marzo de 2022.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Sea u una función armónica en el disco $B(0,R)$ $(R>1)$. Argumentar la existencia y unicidad de f holomorfa en $B(0,R)$ tal que $\mathrm{Re}(f)=u$ y $\mathrm{Im}f(0)=0$. Sabiendo además que $u(0,0)=1/2$, $u_x(0,0)=2/\pi$ y $u_y(0,0)=0$, calcular

$$i) \int_0^{2\pi} u(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta, \quad ii) \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z}\, dz, \quad iii) \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2}\, dz$$

Ejercicio 2. Hallar u <u>acotada</u> en $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, 0<y<1\}$ que verifique:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x,y) = 0 & \text{para} \quad x>0,\ 0<y<1 \\ u(0,y) = y & \text{para} \quad 0<y<1 \\ u_y(x,0) = 0 & \text{para} \quad x>0 \\ u_y(x,1) = 0 & \text{para} \quad x>0 \end{cases}$$

y describir un sistema físico que pueda modelarse mediante estas ecuaciones.

Ejercicio 3. Considerar el problema de la distribución de temperatura $T(x,y)$ en estado estacionario en una placa plana y homogénea que cubre el semiplano $x\geqslant 0$, sabiendo que la temperatura en el borde coincide con $g(y)$ para todo $y\in\mathbb{R}$. Describir cómo lo resolvería en cada uno de los siguientes casos:

$$i)\ g(y)=e^{-|y|}, \quad ii)\ g(y)=\mathbb{1}_{[-1,1]}(y), \quad iii)\ g(y)=\mathbb{1}_{[0,+\infty]}(y)$$

Ejercicio 4. Hallar $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ tal que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(1-i)\hat{f}(w)e^{iwt}dw = e^{-a|t|}$ $(a>0)$ siendo $\hat{f}(w)=\mathcal{F}[f](w)$. ¿ Es única? Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(w)\right|^2 dw$.

Ejercicio 5. Hallar para $t>0$, mediante transformada de Laplace, $y(t)$ y $\varphi(t)$:

$$\begin{cases} y''(t)-3y'(t)+2 = \varphi(t-1)H(t-1) \\ \varphi'(t)+\int_0^t \varphi(t-x)\, dx = H(t) \end{cases}$$

con $y(0^+)=y'(0^+)=0$, $\varphi(0^+)=0$. $\quad$ ($H(t)$: función de Heaviside).