ANÁLISIS MATEMÁTICO III – 2C 2021

***Resolución esquemática del integrador* 19-03-2021 (1ª fecha)**

EJERCICIO 1) Calcular el valor principal de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)}{x(x+1)(x^2+1)}dx$. Decidir si la integral impropia es convergente.

Resolución: Primero veamos dónde están las "impropiedades". La función $h:\Re \longrightarrow \Re$ tal que $h(x)=\frac{sen(x)}{x(x^2+1)}$ si $x \neq 0$ y $h(0) = 1$ es continua y absolutamente integrable en toda la recta, pues $|h(x)| \leq \frac{1}{x^2+1}$. Por lo tanto, el punto delicado para estudiar es $x = -1$. Elijamos un $r > 0$ y separemos los problemas:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)}{x(x+1)(x^2+1)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{x+1}dx = \int_{-\infty}^{-1-r} \frac{h(x)}{x+1}dx + \int_{-1-r}^{-1+r} \frac{h(x)}{x+1}dx + \int_{-1+r}^{+\infty} \frac{h(x)}{x+1}dx \qquad (1.1)$$

Ahora estudiemos cada término por separado, dejando el segundo para el final (es el más delicado).

(a) $\int_{-\infty}^{-1-r} \frac{h(x)}{x+1}dx$: para cada $x \leq -1-r$ tenemos $x+1 \leq -r \;\therefore\; |x+1| \geq r \;\therefore \frac{1}{|x+1|} \leq \frac{1}{r}$ y entonces el integrando verifica $\left|\frac{h(x)}{x+1}\right| \leq \frac{|h(x)|}{r} \leq \frac{1}{r(x^2+1)}$. Por lo tanto, la integral $\int_{-\infty}^{-1-r} \frac{h(x)}{x+1}dx$ converge absolutamente.

(b) $\int_{-1+r}^{+\infty} \frac{h(x)}{x+1}dx$: para cada $x \geq -1+r$ tenemos $x+1 \geq r \;\therefore \frac{1}{|x+1|} \leq \frac{1}{r}$ y entonces tenemos la misma acotación anterior: el integrando verifica $\left|\frac{h(x)}{x+1}\right| \leq \frac{|h(x)|}{r} \leq \frac{1}{r(x^2+1)}$. Por lo tanto, la integral $\int_{-1+r}^{+\infty} \frac{h(x)}{x+1}dx$ converge absolutamente.

(c) $\int_{-1-r}^{-1+r} \frac{h(x)}{x+1}dx \overset{definición}{=} \lim_{\delta \to 0+} \int_{-1-r}^{-1-\delta} \frac{h(x)}{x+1}dx + \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{-1+r} \frac{h(x)}{x+1}dx$. Mediante el cambio de variables $t = x+1$:

$$\int_{-1-r}^{-1-\delta}\frac{h(x)}{x+1}dx=\int_{-r}^{-\delta}\frac{h(t-1)}{t}dx=\int_{-r}^{-\delta}\frac{g(t)}{t}dt\ ,\quad \int_{-1+\varepsilon}^{-1+r}\frac{h(x)}{x+1}dx=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{h(t-1)}{t}dx=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{g(t)}{t}dt$$

donde la función $g(t)=h(t\text{-}1)$ es analítica en toda la recta real. En particular, admite el desarrollo en serie $g(t)=g(0)+g'(0)t+\frac{1}{2!}g''(0)t^2+....$ absoluta y uniformemente convergente en el intervalo $[-1-r,-1+r]$. Por lo tanto para todo t no nulo en dicho intervalo podemos escribir

$$\frac{g(t)}{t}=\frac{g(0)}{t}+g'(0)+\tfrac{1}{2!}g''(0)t+....=\frac{g(0)}{t}+g_0(t)$$

Donde g_0 es continua (más aún: analítica) en el intervalo $[-1-r,-1+r]$. Entonces

$$\int_{-1-r}^{-1-\delta}\frac{h(x)}{x+1}dx=\int_{-r}^{-\delta}\frac{g(t)}{t}dt=g(0)\int_{-r}^{-\delta}\frac{dt}{t}+\int_{-r}^{-\delta}g_0(t)dt=-g(0)\ln\left(\frac{r}{\delta}\right)+\int_{-r}^{-\delta}g_0(t)dt \quad (1.2)\ (a)$$

y

$$\int_{-1+\varepsilon}^{-1+r}\frac{h(x)}{x+1}dx=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{g(t)}{t}dt=g(0)\int_{\varepsilon}^{r}\frac{dt}{t}+\int_{\varepsilon}^{r}g_0(t)dt=g(0)\ln\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)+\int_{\varepsilon}^{r}g_0(t)dt \quad (1.2)(b)$$

Puesto que $g(0)=h(-1)=\dfrac{sen(1)}{2}\neq 0$ y que por ser g_0 continua, tenemos los límites $\underset{\delta\to 0+}{Lim}\int_{-r}^{-\delta}g_0(t)dt=\int_{-r}^{0}g_0(t)dt$ y $\underset{\varepsilon\to 0+}{Lim}\int_{\varepsilon}^{r}g_0(t)dt=\int_{0}^{r}g_0(t)dt$, de (1.2) (a) y (b) se deduce que no existe $\int_{-1-r}^{-1+r}\frac{h(x)}{x+1}dx \overset{definición}{=} \underset{\delta\to 0+}{Lim}\int_{-1-r}^{-1-\delta}\frac{h(x)}{x+1}dx+\underset{\varepsilon\to 0+}{Lim}\int_{-1+\varepsilon}^{-1+r}\frac{h(x)}{x+1}dx$ y por lo tanto la integral del enunciado es divergente. Estas mismas igualdades (12)(a) y (b) permiten comprobar la existencia del valor principal:

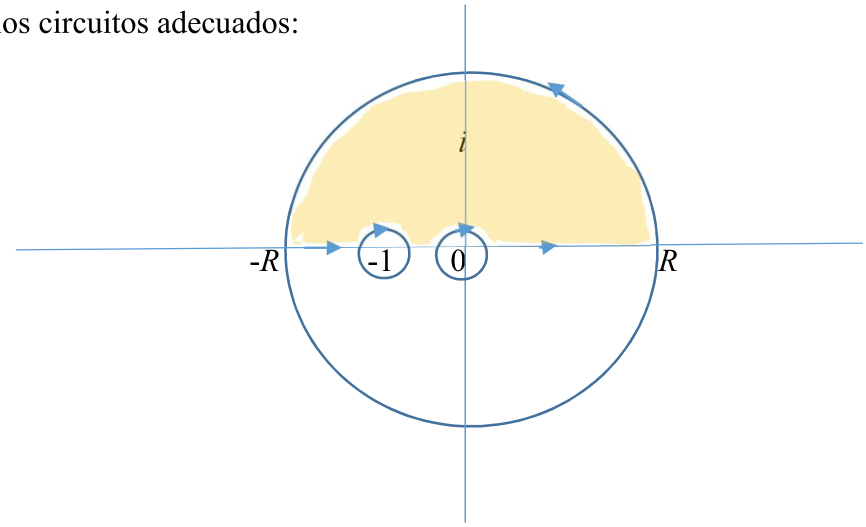
$$vp\int_{-1-r}^{-1+r}\frac{h(x)}{x+1}dx \overset{definición}{=} \underset{\varepsilon\to 0+}{Lim}\int_{-1-r}^{-1-\varepsilon}\frac{h(x)}{x+1}dx+\underset{\varepsilon\to 0+}{Lim}\int_{-1+\varepsilon}^{-1+r}\frac{h(x)}{x+1}dx=$$

$$=\underset{\varepsilon\to 0+}{Lim}\left(-g(0)\ln\left(\tfrac{r}{\varepsilon}\right)+\int_{-r}^{-\varepsilon}g_0(t)dt+g(0)\ln\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)+\int_{\varepsilon}^{r}g_0(t)dt\right)=\int_{-r}^{r}g_0(t)dt$$

Cálculo del valor principal: El procedimiento ya es clásico. Se trata de elegir la función compleja adecuada:

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z(z+1)(z^2+1)}=\frac{e^{iz}}{z(z+1)(z-i)(z+i)}$$

y los circuitos adecuados:



Para cada $R>1$ y cada ε tal que $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, se trata del borde de la región sombreada e indicado con flechas en la figura, es decir:

$$C_{R,\varepsilon}=\overbrace{\{x\in\Re:-R\le x\le -1-\varepsilon\}}^{I_{R,\varepsilon}}\cup\overbrace{\{-1+\varepsilon e^{i\theta}:0\le\theta\le\pi\}}^{-C_\varepsilon}\cup\overbrace{\{x\in\Re:-1+\varepsilon\le x\le-\varepsilon\}}^{J_{R,\varepsilon}}\cup$$

$$\cup\overbrace{\{\varepsilon e^{i\theta}:0\le\theta\le\pi\}}^{-C'_\varepsilon}\cup\overbrace{\{x\in\Re:\varepsilon\le x\le R\}}^{K_{R,\varepsilon}}\cup\overbrace{\{Re^{i\theta}:0\le\theta\le\pi\}}^{\Gamma_R}$$

Por el teorema de los residuos, para todo $R>1$ y todo $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$:

$$\oint_{C_{R,\varepsilon}} f(z)dz=2\pi i RES(f,i)=2\pi i\frac{e^{-1}}{i(i+1)2i}=\frac{\pi}{e(-1+i)}=-\frac{\pi}{2e}(1+i) \qquad (1.3)$$

(es un polo simple y el residuo se calcula muy fácilmente). Como siempre en estos casos la idea es tomar límite en el primer miembro cuando $R\longrightarrow+\infty$ y $\varepsilon\longrightarrow 0+$, aprovechando que el último miembro no depende de R ni de ε. Veamos qué ocurre en cada segmento regular del circuito:

(1) $$\int_{I_{R,\varepsilon}} f(z)dz+\int_{J_{R,\varepsilon}} f(z)dz+\int_{K_{R,\varepsilon}} f(z)dz=\int_{-R}^{-1-\varepsilon} f(x)dx+\int_{-1+\varepsilon}^{-\varepsilon} f(x)dx+\int_{\varepsilon}^{R} f(x)dx=$$

$$\xrightarrow[\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0+}]{} vp\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}dx}{x(x+1)(x^2+1)}dx =$$

$$= vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)dx}{x(x+1)(x^2+1)} + ivp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)dx}{x(x+1)(x^2+1)}$$

No hemos demostrado la existencia del valor principal de la parte real de esta integral, pero vamos a ver cómo se deduce directamente del cálculo que sigue.

$$(2)\ \int_{-C_\varepsilon} f(z)dz = -\int_0^{\pi} \frac{e^{i[-1+\varepsilon[\cos(\theta)+isen(\theta)]]}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta}{(-1+\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon e^{i\theta}[(-1+\varepsilon e^{i\theta})^2+1]} = -i\int_0^{\pi} \frac{e^{i[-1+\varepsilon[\cos(\theta)+isen(\theta)]]}d\theta}{(-1+\varepsilon e^{i\theta})[(-1+\varepsilon e^{i\theta})^2+1]}$$

(este paso debe justificarse y puede hacerse observando que el integrando admite un desarrollo uniformemente convergente en serie de potencias de ε en torno de 0) $\xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} -i\int_0^{\pi} \frac{e^{-i}}{-2}d\theta = \frac{i}{2e^i}\int_0^{\pi} d\theta = \frac{i\pi e^{-i}}{2} = \frac{\pi}{2}[sen(1)+i\cos(1)]$

$$(3)\ \int_{-C'_\varepsilon} f(z)dz = -\int_0^{\pi} \frac{e^{i\varepsilon[\cos(\theta)+isen(\theta)]}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}(1+\varepsilon e^{i\theta})[(\varepsilon e^{i\theta})^2+1]} = -i\int_0^{\pi} \frac{e^{i\varepsilon[\cos(\theta)+isen(\theta)]}d\theta}{(1+\varepsilon e^{i\theta})[(\varepsilon e^{i\theta})^2+1]}$$

(este paso debe justificarse y puede hacerse observando que el integrando admite un desarrollo uniformemente convergente en serie de potencias de ε en torno de 0) $\xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} -i\int_0^{\pi} d\theta = -i\pi$

$$(4)\quad \int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iR[\cos(\theta)+isen(\theta)]}iRe^{i\theta}d\theta}{Re^{i\theta}[Re^{i\theta}+1][(Re^{i\theta})^2+1]} = i\int_0^{\pi} \frac{e^{-Rsen(\theta)}e^{iR\cos(\theta)}d\theta}{[Re^{i\theta}+1][R^2e^{i2\theta}+1]},$$ por lo tanto

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{-Rsen(\theta)}e^{iRsen(\theta)}d\theta}{[R\,e^{i\theta}+1][R^2e^{i2\theta}+1]}\right| \le \int_0^{\pi} \frac{\left|e^{-Rsen(\theta)}e^{iRsen(\theta)}\right|d\theta}{\left|Re^{i\theta}+1\right|\left|R^2e^{i2\theta}+1\right|} = \int_0^{\pi} \frac{\left|e^{-Rsen(\theta)}\right|d\theta}{\left|Re^{i\theta}+1\right|\left|R^2e^{i2\theta}+1\right|}$$

Mediante acotaciones habituales y el Lema de Jordan se prueba entonces que $\int_{\Gamma_R} f(z)dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$.

En definitiva,

$$-\frac{\pi(1+i)}{2e} \overset{(1.3)}{=} \underset{R\to\infty}{Lim}\ \underset{\varepsilon\to 0+}{Lim} \oint_{C_{R,\varepsilon}} f(z)dz =$$

$$= vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)dx}{x(x+1)(x^2+1)} + ivp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)dx}{x(x+1)(x^2+1)} + \frac{\pi}{2}[sen(1)+i\cos(1)] - i\pi$$

Igualando partes reales e imaginarias de ambos miembros:

(A) $-\dfrac{\pi}{2e} = vp\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)dx}{x(x+1)(x^2+1)} + \frac{\pi}{2}sen(1)$

(B) $-\dfrac{\pi}{2e} = vp\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)dx}{x(x+1)(x^2+1)} + \frac{\pi}{2}\cos(1) - \pi$

Por lo tanto, $vp\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)dx}{x(x+1)(x^2+1)} = \pi - \frac{\pi}{2}\cos(1) - \frac{\pi}{2e}$.

Bonus: Si usted revisa cuidadosamente los pasos anteriores, puede rastrear la prueba de la existencia del valor principal del segundo miembro de (A), igualdad que permite calcular fácilmente su valor: $vp\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)dx}{x(x+1)(x^2+1)} = -\frac{\pi}{2}sen(1) - \frac{\pi}{2e}$.

EJERCICIO 2. Determinar el mayor dominio abierto D de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$. Explicar por qué $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$ es holomorfa en D y dar una expresión de $f(z)$ para todo $z \in D$.

Resolución: La homografía $z \mapsto w = \dfrac{1+z}{1-z}$ transforma el semiplano abierto $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}$ en el disco $D(0;1) = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ y el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}w^n$ es 1, como puede comprobarse muy fácilmente mediante el criterio del cociente. Por lo tanto, el mayor dominio <u>abierto</u> donde converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}w^n$ es el disco $D(0;1)$, pues la serie converge condicionalmente en algunos puntos del borde de este disco (por ejemplo en $w = i$) y diverge en todos los puntos del exterior de dicho disco. Por lo tanto, la función $g(w) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}w^n$ es analítica (y por lo tanto holomorfa) en el disco $D(0;1)$, lo que significa que el mayor dominio abierto de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$ es, efectivamente, el semiplano $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Para encontrar una expresión de *f* en este semiplano observemos que para todo $w \in D(0;1)$ se verifica que $g'(w) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w^{n-1} = 1 + w + w^2 + ... = \frac{1}{1-w}$. Por lo tanto, *g* es una primitiva de $\dfrac{1}{1-w}$ definida en el disco $D(0;1)$, por ejemplo: $g(w) = -Log(1-w)$, donde *Log* es el logaritmo principal. Entonces, para todo $z \in H$ es $w = \dfrac{1+z}{1-z} \in D(0;1)$ y en este dominio

$$f(z) = g\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = -Log\left(1 - \frac{1+z}{1-z}\right) = -Log\left(\frac{2z}{z-1}\right).$$

Observación adicional: La función *f*, definida en principio en el semiplano *H*, puede extenderse analíticamente al dominio abierto

$$D = \mathbb{C} - \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{2z}\right) = 0 \ , \ \mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{2z}\right) \leq 0 \right\} \overset{cuentas}{=} \mathbb{C} - \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0 \ , \ 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1 \}$$

Es claro que f no puede extenderse analíticamente a un dominio mayor pues el Logaritmo principal no puede extenderse analíticamente a un dominio que incluya puntos del corte $\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0 \ , \ \mathrm{Re}(z) \leq 0 \}$. Por último, el dominio *D* no es el único máximo posible, pues el logaritmo principal no es el único logaritmo que puede elegir para definir $g(w) = -\log(1-w)$: lo único que debe cumplirse es que el dominio incluya el disco $D(0;1)$.

EJERCICIO 3. Plantear el problema de la distribución de temperatura en estado estacionario en la semifranja $\{(x,y) \in \Re^2 : 0 < x < \pi \ , \ y > 0\}$, con los lados verticales perfectamente aislados y el lado inferior con temperatura *f*(*x*) en cada $x \in (0,\pi)$. ¿Qué condición garantiza la unicidad de la solución? Resolver dicho problema, introduciendo las hipótesis necesarias sobre *f*.

Resolución: La ecuación de distribución de temperaturas en estado estacionario es la ecuación de Laplace. Por lo tanto, el problema es:

$$\begin{cases} (i) \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi \quad , \quad y > 0 \\ (ii) \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0 \quad , \quad y > 0 \\ (iii) \ u(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \tag{3.1}$$

Existen muchas formas para resolver este problema, que no tiene solución única, pero sí una única acotada. Buscaremos, entonces, esta solución acotada considerando que para cualquier entero positivo *n* la función $u_n(x,y) = e^{-ny}\cos(nx)$ es solución de (*i*) y (*ii*), que son condiciones lineales (combinación lineal de soluciones de (*i*) y (*ii*) también es solución). Podemos aplicar entonces el principio de superposición, con lo cual los coeficientes de $u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-ny}\cos(nx)$ quedan determinados por la condición (*iii*): $u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx) = f(x)$. Si *f* es seccionalmente continua en el intervalo $[0,\pi]$, su extensión 2π-periódica par $\widetilde{f}:\Re \longrightarrow \Re$ admite la serie de Fourier $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$,

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \widetilde{f}(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$$

Para «estimular» la convergencia de la serie podemos pedir – por ejemplo – que f sea seccionalmente C^1 (o C^2, ya que estamos) y entonces la solución que obtenemos es

$$u(x,y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ny}\cos(nx) \quad , \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$$

Es decir: $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$ y $c_n = a_n$ para todo $n \geq 1$.

EJERCICIO 4. Resolver el siguiente problema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$\begin{cases} (i)\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0 \quad , \quad 0 < x < +\infty \quad , \quad t > 0 \\ (ii)\quad u(0,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ (iii)\quad u(x,0) = 1_{(0,1)}(x) \quad , \quad 0 \leq x < +\infty \end{cases}$$

Resolución: También en este caso hay varias formas de resolver el problema (esto ocurre con todos los problemas matemáticos…). Vamos a elegir una forma que se adapte a lo que aprendimos en el curso, que es considerar la extensión impar de u respecto de x a toda la recta real, es decir:

$$v(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & si \quad x \geq 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ -u(-x,t) & si \quad x \leq 0 \quad , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Obsérvese la consistencia de la definición en $x = 0$, pues $u(0,t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Entonces, planteamos el problema

$$\begin{cases} (\widetilde{i})\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) = 0 \quad , \quad -\infty < x < +\infty \quad , \quad t > 0 \\ (\widetilde{ii})\ \ v(0,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ (\widetilde{iii})\ v(x,0) = -1_{(-1,0)}(x) + 1_{(0,1)}(x) \quad , \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

donde el segundo miembro de $(\widetilde{iii})$ es la extensión impar del segundo miembro de (*iii*). Ahora asumimos que *v* (y por lo tanto *u*) es lo suficientemente suave en su dominio como para permitir las siguientes operaciones:

$$\hat{v}(\omega,y)=\int_{-\infty}^{+\infty} v(x,t)e^{-i\omega x}dx \quad , \quad v(x,t)=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{v}(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega \quad ,$$

$$\widehat{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)}(\omega,t)=-\omega^2\hat{v}(\omega,t)\,, \qquad \widehat{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)}(\omega,t)=\frac{\partial}{\partial t}\hat{v}(\omega,t)\,,$$

Aplicando la transformación de Fourier a la ecuación (*i*) extendida en forma impar respecto de *x*:

$$-\omega^2\hat{v}(\omega,t)-\frac{\partial}{\partial t}\hat{v}(\omega,t)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{v}(\omega,t)=A(\omega)e^{-\omega^2 t}$$

donde A es una función a determinar por la condición inicial:

$$\hat{v}(\omega,0)=A(\omega)=\hat{h}(\omega)$$

donde $h(x)=-1_{(-1,0)}(x)+1_{(0,1)}(x)$. En definitiva tenemos que $\hat{v}(\omega,t)=\hat{h}(\omega)e^{-\omega^2 t}$ y por lo tanto

$$v(x,t)=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{h}(\omega)e^{-\omega^2 t+i\omega x}d\omega$$

Ahora, para volver a nuestra función original, recordemos que por ser *h* impar (además de absolutamente integrable), su transformada de Fourier

$$\hat{h}(\omega)=\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\cos(\omega x)dx}^{=0}+i\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)sen(\omega x)dx=2i\int_{0}^{+\infty} h(x)sen(\omega x)dx=$$

$$=2i\int_{0}^{+\infty}(1_{(0,1)}(x)sen(\omega x)dx=2i\int_{0}^{1} sen(\omega x)dx \overset{\omega\neq 0}{=} 2i\frac{1-\cos(\omega)}{\omega}$$

Obsérvese que $\hat{h}(0)=0$, valor que coincide con $\underset{\omega\to 0}{Lím}\,2i\frac{1-\cos(\omega)}{\omega}$, es decir: $\hat{h}$ es continua en 0. Además, obsérvese que $\hat{h}$ es impar. Entonces, para todo $x > 0$:

$$u(x,t)=v(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{h}(\omega)e^{-\omega^2 t+i\omega x}d\omega=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{h}(\omega)e^{-\omega^2 t}\cos(\omega x)d\omega + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{h}(\omega)e^{-\omega^2 t}sen(\omega x)d\omega =$$

(la primera integral se anula por ser impar su integrando; el integrando de la segunda es par)

$$= \frac{i}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\hat{h}(\omega)e^{-\omega^2 t}sen(\omega x)d\omega = \frac{i}{\pi}\int_{0}^{+\infty}2i\frac{1-\cos(\omega)}{\omega}e^{-\omega^2 t}sen(\omega x)d\omega$$

Es decir:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(\omega)-1}{\omega}e^{-\omega^2 t}sen(\omega x)d\omega \qquad (4.1)$$

Obsérvese que, efectivamente se verifica la condición $u(0,t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

***Observación* 1**: El factor exponencial en el integrando colabora estupendamente con la convergencia de la integral (4.1) siempre y cuando $t > 0$. Para $t = 0$, esto no ocurre y la convergencia es condicional.

***Observación* 2**: En esta resolución no hemos mencionado la transformación de Fourier-seno (no es necesaria) pero desde luego que puede utilizarse, y si la conoce puede reconocerla en la fórmula final:

$$u(x,t) = \tfrac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{0}^{+\infty}f(\lambda)sen(\omega\lambda)d\lambda\right)e^{-\omega^2 t}sen(\omega x)d\omega$$

También se puede utilizar la transformación de Laplace, pero el problema es que no hay una fórmula de inversión tan bonita.

EJERCICIO 5: Estudiar si las funciones $f:(0,+\infty)\longrightarrow\Re$ y $g:(0,+\infty)\longrightarrow\Re$ tales que $f(x) = sen(e^{x^2})$ y $g(x) = xe^{x^2}sen(e^{x^2})$ para todo $x > 0$ son de orden exponencial. Para cada una, analizar si existe su transformada de Laplace y en caso afirmativo, das su abscisa de convergencia.

Resolución: Que f es de orden exponencial es obvio, pues para todo $x > 0$ es $|f(x)| \leq 1 = 1.e^{0x}$. Ahora, respecto de *g*, Si existieran constantes reales *M* y *α* tales que $|g(x)| \leq Me^{\alpha x}$ para todo $x > 0$, entonces tendríamos $\left|sen(e^{x^2})\right| \leq \dfrac{Me^{\alpha x - x^2}}{x}$ para todo $x > 0$. Pero esto implica que $\underset{x\to+\infty}{Lim} sen(e^{x^2}) = 0$: absurdo (por ejemplo, para

$x_n = \sqrt{\ln\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}$, con n entero positivo, es $\left|sen(e^{x_n^2})\right| = 1$. Por lo tanto, g no es de orden exponencial. Por definición, su transformada de Laplace está definida para los complejos s para los cuales la integral $G(s) = \int_0^{\infty} g(x)e^{-sx}dx = \underset{b \to +\infty}{Lim} \int_0^b g(x)e^{-sx}dx$ es convergente. Veamos:

$$\int_0^b g(x)e^{-sx}dx = \int_0^b xe^{x^2} sen(e^{x^2})e^{-sx}dx = -\frac{1}{2}\int_0^b [\frac{d}{dx}\cos(e^{x^2})]e^{-sx}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^b \left(\frac{d}{dx}[\cos(e^{x^2})e^{-sx}] + s\cos(e^{x^2})e^{-sx}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^b \frac{d}{dx}[\cos(e^{x^2})e^{-sx}]dx - \frac{1}{2}s\int_0^b \cos(e^{x^2})e^{-sx}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}[\cos(e^{b^2})e^{-sb} - 1] - \frac{1}{2}s\int_0^b \cos(e^{x^2})e^{-sx}dx \qquad (5.1)$$

Ahora bien, la función $w(x) = \cos(e^{x^2})H(x)$ es obviamente una función objeto y verifica la acotación $|w(x)| \le 1 = 1.e^{0x}$ y no existen otras constantes M y $\alpha < 0$ tales que $|w(x)| \le Me^{\alpha x}$ para todo $x > 0$: si $\alpha < 0$, entonces $\underset{x \to +\infty}{Lim} Me^{\alpha x} = 0$. Por lo tanto w tiene su transformada de Laplace $W(s) = \int_0^{\infty} \cos(e^{x^2})e^{-sx}dx = \underset{b \to +\infty}{Lim}\int_0^b \cos(e^{x^2})e^{-sx}dx$ con abscisa de convergencia 0. Entonces, de (5.1) deducimos que existe el límite $\underset{b \to +\infty}{Lim}\int_0^b g(x)e^{-sx}dx$ sii $\mathrm{Re}(s) > 0$, pues en ese caso $\underset{b \to +\infty}{Lim} e^{-sb} = 0$ y obtenemos

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(x)e^{-sx}dx = \underset{b \to +\infty}{Lim}\int_0^b g(x)e^{-sx}dx = \frac{1}{2} - \frac{s}{2}W(s)$$

con abscisa de convergencia 0. Finalmente, la abscisa de convergencia de F es la misma que la de W, por las mismas razones expuestas previamente para probar que la abscisa de convergencia de W es 0.
