Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.

ANÁLISIS MATEMÁTICO III

BREVE APUNTE SOBRE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

D. Prelat - 2020

§1. INTRODUCCIÓN

En la Introducción del apunte sobre la Transformación de Fourier hemos mencionado que las primeras transformaciones integrales fueron descubiertas (o inventadas) por Leonhard Euler (1707-1783); entre ellas, la que posteriormente terminó llevando el apellido de Laplace. También hemos aclarado que el hecho de que esta transformada integral llevara su apellido nunca fue intención de Laplace, que sentía una profunda admiración por Euler y a quien llamaba «el maestro de todos nosotros».

La razón fundamental de la importancia de la Transformación de Laplace en las aplicaciones prácticas es la de su inmensa capacidad operativa, y la vastedad del espectro de estas aplicaciones se debe principalmente a que su dominio es un espacio de funciones sin demasiados requisitos de admisión. Esta es una ventaja respecto de la Transformación de Fourier, pero paga el precio de una fórmula de inversión menos eficiente. Los textos escritos sobre la Transformación de Laplace llenan bibliotecas enteras. Aquí haremos solamente una presentación introductoria para el curso que estamos cerrando con este apunte, centrándonos en ciertas cuestiones matemáticas que se suelen obviar en los textos para ingeniería. Los aspectos prácticos y los cálculos básicos están desarrollados abundantemente en esos textos. Por otra parte, en la actualidad todos esos cálculos pueden hacerse apretando algunas pocas teclas.

Una notación muy especial que se reserva para la Transformación de Laplace es para los números complejos. En lugar de nuestra familiar notación $z = x + iy$ se utiliza $s = \sigma + i\omega$ (también es habitual la letra p, en lugar de s). Mantendremos esta notación clásica, desde luego, aunque la única razón sea una tradición que se mantiene desde el siglo XIX.

Ya que hemos estudiado la Transformación de Fourier, podemos presentar la Transformación de Laplace a partir de ella. Uno de los problemas prácticos que ya hemos mencionado es que la Transformación de Fourier tiene un dominio muy restringido, pues en los espacios $L^1(\Re,\mathbb{C})$ y $L^2(\Re,\mathbb{C})$ no están, por ejemplo, ni las funciones constantes (no nulas), ni las funciones polinómicas, ni las circulares ni las exponenciales. Existen formas más o menos sofisticadas de resolver esto. Una de ellas es incorporar un factor en la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ que «ayude» con su convergencia.

Un candidato natural es un factor exponencial, es decir: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-i\omega t}dt$, donde σ es una nueva variable real. Pero este factor ayuda siempre y cuando σt sea positivo para todo t, lo cual es imposible. Entonces, lo que puede hacerse - y de hecho es lo que haremos - es considerar funciones f que se anulen en los reales negativos. O bien, equivalentemente, multiplicar el integrando por la función $H:\Re \longrightarrow \{0,1\}$ tal que $H(t)=\begin{cases}0 & si \quad t<0\\ 1 & si \quad t\geq 0\end{cases}$ (volveremos a mencionar esta función en el parágrafo siguiente).

Entonces la integral anterior se reduce a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)H(t)e^{-\sigma t}e^{-i\omega t}dt \;=\; \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-i\omega t}dt$.

Ahora sí, podemos mejorar la convergencia simplemente exigiendo que σ sea positivo. En definitiva, lo que obtenemos (por ahora de manera informal) es una función

$$F(\sigma+i\omega)=\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)H(t)e^{-\sigma t}e^{-i\omega t}dt \tag{1.1}$$

que se denomina *transformada de Laplace* de f. Así como la hemos presentado, para cada $\sigma > 0$ es la transformada de Fourier $\hat{f_\sigma}$ de la función $t\mapsto f_\sigma(t)=f(t)H(t)e^{-\sigma t}$, con lo cual ya tenemos un teorema de inversión servido en la mesa. Lo disfrutaremos más adelante, pues antes tenemos que preparar el terreno. Por ahora, observemos que efectivamente la integral (1.1) alcanza a funciones que no están en $L^1(\Re,\mathbb{C})$ ni $L^2(\Re,\mathbb{C})$: por ejemplo, si f es una función polinómica, para cada $\sigma > 0$ la función f_σ es absolutamente integrable.

Hemos introducido el tema de este apunte a partir de las transformadas de Fourier. Ahora debemos precisar lo que vamos a entender como *Transformación de Laplace*, estableciendo en primer lugar un dominio adecuado para esta transformación.

***Observación sobre la terminología* (*no es importante*)** Recordemos la diferencia entre los términos *transformación* y *transformada*. La *Transformación de Fourier* es la aplicación lineal que a cada función de un determinado espacio (por ejemplo $L^1(\Re,\mathbb{C})$) le asigna su *transformada de Fourier*. Es la misma diferencia que existe entre los términos *trasposición* y *traspuesta*: la trasposición es la transformación lineal que a cada matriz le asigna su traspuesta.

Adelantemos un poco lo que vamos a encontrar a continuación. Esquemáticamente, la transformada de Laplace es una aplicación $Ł:\mathcal{O}\longrightarrow\Im$, de un espacio $\mathcal{O}$ (cuyos elementos se denominan tradicionalmente «funciones objeto») en un espacio $\Im$ de funciones holomorfas, denominadas «funciones imagen», con las siguientes propiedades operativas:

i) $Ł$ es lineal (sobre $\mathbb{C}$), es decir: para todo para de funciones objeto f y g y para todo par de escalares complejos a y b: $Ł(af+bg)=aŁ(f)+bŁ(g)$.

ii) Ⱡ transforma la derivación en una operación algebraica muy sencilla. Más precisamente: si f y f' son funciones objeto, entonces para todo s perteneciente al dominio de sus imágenes se verifica que $Ⱡ(f')(s) = sⱠ(f)(s) - f(0^+)$

iii) Ⱡ transforma el producto de convolución en el producto común de funciones, es decir : $Ⱡ(f * g) = Ⱡ(f)Ⱡ(g)$

Desde luego que estas no son las únicas propiedades operativas importantes de la transformación de Laplace, pero estas tres, por sí solas, bastan para intuir su importancia. Lo que queremos hacer en primer lugar es estudiar los «detalles técnicos» que estas propiedades imponen. En primer lugar la propiedad *i*) (linealidad) solamente puede tener sentido, obviamente, si su dominio $\mathcal{O}$ y su codominio $\Im$ son espacios vectoriales complejos.

§2. EL DOMINIO DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

Indicaremos con $\mathcal{O}$ el conjunto de funciones $f : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$ *seccionalmente continuas, causales* y de *orden exponencial,* tradicionalmente denominadas «funciones objeto». Aclaremos lo que significan cada una de estas tres propiedades.

(*a*) Que la función *f* sea *seccionalmente de clase* C^k significa que para todo intervalo cerrado y acotado $[a,b] \subset \Re$ existe una cantidad finita de puntos $a_1,...,a_n$ tales que $a = a_1 < a_2 < ... < a_n = b$ para los que se verifica: (*i*) la restricción de *f* a cada uno de los intervalos $(a_1,a_2),(a_2,a_3),...,(a_{n-1},a_n)$ es de clase C^k; (*ii*) existen los límites laterales de $f, f', f'',..., f^{(k)}$ en cada uno de los puntos $a_1,...,a_n$. Equivalentemente: las restricciones de las funciones $f, f', f'',..., f^{(k)}$ a cada uno de los intervalos $[a_1,a_2],[a_2,a_3],...,[a_{n-1},a_n]$ son continuas. Recordemos que las funciones de clase C^0 son las funciones continuas. Por lo tanto, las funciones *seccionalmente de clase* C^0 son las funciones *seccionalmente continuas*.

(*b*) Que *f* sea *causal* significa, simplemente, que $\forall t < 0 : f(t) = 0$. Probablemente le llame la atención la connotación metafísica del nombre que tienen esta propiedad, pero no tenemos ninguna intención de iniciar aquí una disquisición epistemológica sobre la causalidad.

(c) Finalmente, que f sea de orden exponencial significa que existen constantes reales α y $M > 0$ tales que $\forall t \in \Re : |f(t)| \leq Me^{\alpha t}$. En esta definición no se requiere que α sea el ínfimo de todos los números con esta propiedad, ínfimo que se denomina «abscisa de convergencia» por razones que veremos enseguida. El cálculo de este ínfimo puede ser bastante difícil, pero en cambio, para las funciones que aparecen habitualmente en la práctica, es muy sencillo encontrar un par de constantes M y α para las cuales f satisface la desigualdad requerida. Esta flexibilidad en la definición permite simplificar el tratamiento posterior.

Ejemplos y contraejemplos de funciones objeto:

(1) La función de Heaviside: $H : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $H(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ 1 & si \quad t \geq 0 \end{cases}$. Es claramente una función objeto. Es muy sencilla pero muy útil para todo lo que sigue.

Esta función lleva el apellido de Oliver Heaviside (1850 - 1925), «físico, ingeniero eléctrico, radiotelegrafista y matemático inglés», como reza la enciclopedia más popular de los últimos tiempos, aunque él mismo no se consideraba *matemático* en el sentido estricto del término. Como puede imaginarse, no pasó a la historia por haber inventado la función que lleva su apellido, sino por sus trabajos de investigación en física aplicada a las telecomunicaciones.

(2) Para cualquier función polinómica $P : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto P(t)H(t)$ es una función objeto. Más generalmente, dadas dos funciones polinómicas $P : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$ y $Q : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$, donde Q no tiene raíces reales no negativas, la función $t \mapsto \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ \dfrac{P(t)}{Q(t)} & si \quad t \geq 0 \end{cases}$ también es una función objeto.

(3) Para cualquier constante real ω, las funciones $t \mapsto \cos(\omega t)H(t)$ y $t \mapsto sen(\omega t)H(t)$ son funciones objeto.

(4) Para cualquier constante compleja γ, $t \mapsto e^{\gamma t}H(t)$ es una función objeto.

(5) La función $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{|t|}}H(t)$ no es una función objeto, pues no es seccionalmente continua. Se pueden pensar en muchos otros ejemplos de funciones no seccionalmente continuas, pero este ejemplo va a resultar importante, pues a pesar de no ser una función objeto, admite una transformada de Laplace. El espacio de funciones objeto es lo suficientemente amplio y cómodo como dominio de la transformación de Laplace e

incluye a la mayoría de las funciones que aparecen en la práctica. Pero esto no significa que no pueda extenderse la Transformación de Laplace a funciones más generales. En este apunte introductorio seguiremos la costumbre general de trabajar con funciones objeto y mencionar alguna excepción cuando sea necesario.

(5) La función $t \mapsto e^{t^2} H(t)$ no es una función objeto, pues no es de orden exponencial.

Probemos esto: Si esta función fuera de orden exponencial, existirían constantes reales α y M tales que $\forall t \geq 0 : e^{t^2} \leq M e^{\alpha t}$. Pero esto implicaría que para todo $t \geq 0$: $e^{t^2 - \alpha t} \leq M$, o bien: $e^{(t-\frac{1}{2}\alpha)^2} = e^{t^2 - \alpha t + \frac{\alpha^2}{4}} \leq M e^{\frac{\alpha^2}{4}}$. Absurdo, pues la exponencial $e^{(t-\frac{1}{2}\alpha)^2}$ no es acotada.

A partir de la proposición siguiente, esta pequeña lista de ejemplos se extiende a un vastísimo espacio de funciones, pues todas las combinaciones lineales y productos de funciones objeto resultan ser, también, funciones objeto.

PROPOSICIÓN* 1*:

(*i*) $\mathcal{O}$ es un espacio vectorial complejo de dimensión infinita, con las operaciones habituales de suma y producto por escalar

(*ii*) $\mathcal{O}$ es cerrado sobre el producto, es decir: si *f* y *g* son funciones objeto, también lo es su producto *fg*.

(*iii*) Si *f* es una función objeto, para cualquier constante real *k* > 0, las funciones $t \mapsto f(t-k)$, $t \mapsto f(kt)$ y $t \mapsto f(t+k)H(t)$ son funciones objeto.

(*iv*) $\mathcal{O}$ no es estable respecto de la derivación, es decir: existen funciones objeto derivables cuyas derivadas no son funciones objeto.

(*v*) $\mathcal{O}$ es cerrado sobre la convolución, es decir: si *f* y *g* son funciones objeto, también lo es su convolución $f * g$.

Demostración: Escribiremos solamente algunas de las pruebas que se requieren, pues la mayoría son ejercicios rutinarios. Sean *f* y *g* dos funciones objeto. Que *f* + *g* y *fg* son seccionalmente continuas es uno de los ejercicios rutinarios mencionados, y que son causales es trivial. Veamos que son de orden exponencial: sean *α, β, M* y *L* cuatro constantes tales que $\forall t \in \Re : \; |f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ y $|g(t)| \leq L e^{\beta t}$. Indiquemos con *γ* un número mayor que *α, β*, por ejemplo: *γ* = *α* + *β* o bien $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$. Entonces, para todo $t \in \Re$: $\quad |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq M e^{\alpha t} + L e^{\beta t} \leq M e^{\gamma t} + L e^{\gamma t} = \overbrace{(M+L)}^{cte} e^{\gamma t}$. Hemos probado que *f* + *g* es de orden exponencial. Para el producto, la situación es todavía más fácil: para todo $t \in \Re$: $|f(t)g(t)| = |f(t)||g(t)| \leq Me^{\alpha t} Le^{\beta t} = \overbrace{(ML)}^{cte} e^{(\alpha+\beta)t}$. Para el ítem (*iii*) tenemos $|f(t-k)| \leq Me^{\alpha(t-k)} = \overbrace{(Me^{-\alpha k})}^{cte} e^{\alpha t}$; $|f(t+k)| \leq Me^{\alpha(t+k)} = \overbrace{(Me^{\alpha k})}^{cte} e^{\alpha t}$ y $|f(t+k)| \leq Me^{\alpha(t+k)} = \overbrace{(Me^{\alpha k})}^{cte} e^{\alpha t}$. Para el cuarto, podemos mencionar el ejemplo de la función objeto $h(t) = \left(\int_0^t e^{\theta^2} d\theta \right) H(t) = \left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{2!5} + \frac{t^7}{3!7} + \ldots \right) H(t)$, que es derivable en toda la recta y su derivada $h'(t) = e^{t^2} H(t)$ no es de orden exponencial (ver ejemplo 5 ut supra). Veamos ahora el ítem (*v*). Sean *f* y *g* dos funciones objeto y sean *α, β, M* y *L* cuatro constantes tales que $\forall t \in \Re$: $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ y $|g(t)| \leq Le^{\beta t}$. Por definición la convolución de estas funciones es la función $f * g : \Re \longrightarrow \mathcal{C}$ definida por

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\theta) g(\theta) d\theta \tag{2.1}$$

Hay varias cuestiones para estudiar. La primera es la convergencia de esta integral para cada $\forall t \in \Re$. Por suerte las funciones objeto se anulan en el semieje de los reales negativos, y esto implica que la integral (2.1) no presenta ningún problema de convergencia, pues

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\theta) \overbrace{g(\theta)}^{=\,0\; si\; \theta<0} d\theta = \int_0^{+\infty} \overbrace{f(t-\theta)}^{=\,0\; si\; \theta>t} g(\theta) d\theta = \int_0^t f(t-\theta) g(\theta) d\theta \tag{2.2}$$

Buenísimo. Hasta ahora venimos bien. Pero necesitamos probar todo lo que falta: que *f***g* es seccionalmente continua, causal y de orden exponencial. La parte más delicada es la primera. Esta dificultad ya la hemos encontrado en el apunte sobre la Transformada de Fourier y allí hemos indicado las herramientas (no son triviales) que se pueden utilizar para la demostración. Esas mismas herramientas pueden utilizarse aquí, con la ventaja de que en nuestro caso las integrales involucradas no son impropias. Más aún, puede probarse que la convolución de dos seccionalmente continuas es continua siguiendo las mismas líneas de esa demostración, que no repetiremos aquí. La causalidad es muy sencilla, pues si $t < 0$, para todo $\theta > 0$ es $t - \theta < 0$ y resulta entonces que $f(t-\theta) = 0$ para todo $\theta > 0$ (por lo tanto se anula la integral (2.1)). Para el orden exponencial utilizaremos la constante $\gamma = \alpha + \beta$ (o bien $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$, como prefiera).

$$|(f * g)(t)| = \left| \int_0^t f(t-\theta) g(\theta) d\theta \right| \leq \int_0^t |f(t-\theta)||g(\theta)| d\theta \leq \int_0^t Me^{\alpha(t-\theta)} Le^{\beta\theta} d\theta =$$

$$\leq \int_0^t Me^{\gamma(t-\theta)} Le^{\gamma\theta} d\theta = MLe^{\gamma t} \int_0^t d\theta = MLe^{\gamma t} t \leq MLe^{\gamma t} e^t = MLe^{(\gamma+1)t} \quad \blacksquare$$

***Nota* 2.1**: La convolución es una operación muy importante en las aplicaciones, y se aconseja releer sus propiedades operativas básicas, presentadas en el apunte sobre la Transformación de Fourier, por ejemplo la asociatividad y la conmutatividad. Se recomienda probar estas propiedades para las funciones objeto, y para esto se sugiere el uso de la integral (2.1) en lugar de la (2.2).

§3. CODOMINIO Y DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

Para cada función objeto $f:\Re \longrightarrow \mathbb{C}$ y cada complejo $s=\sigma+i\omega$ estudiemos la convergencia de la integral

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \quad , \tag{3.1}$$

que ya habíamos presentado en el parágrafo anterior, antes de las funciones objeto. Una parte de este estudio es muy sencilla: sean α y $M > 0$ tales que $\forall t \in \Re : |f(t)| \leq Me^{\alpha t}$. Entonces, para cada real $b > 0$:

$$\int_0^b \left|f(t)e^{-st}\right|dt = \int_0^b |f(t)|e^{-\sigma t}dt \leq M\int_0^b e^{(\alpha-\sigma)t}dt \overset{\sigma\neq\alpha}{=} M\,\frac{1-e^{-(\sigma-\alpha)b}}{\sigma-\alpha} \tag{3.2}$$

Se deduce inmediatamente entonces que la integral (3.1) converge absolutamente cuando $\sigma > \alpha$. Por lo tanto, la función F queda bien definida en, <u>por lo menos</u>, el semiplano

$$\mathbb{H}_\alpha = \{\sigma + i\omega \in \mathbb{C} : \sigma > \alpha\} \tag{3.3}$$

Además, ya que estamos, podemos aprovechar a deducir la acotación

$$|F(\sigma+i\omega)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-\sigma t}dt \leq \frac{M}{\sigma-\alpha} \quad , \tag{3.4}$$

válida para todo $\sigma > \alpha$ (y todo $\omega \in \Re$). En el semiplano (3.3) podemos tomar límite para $\sigma \longrightarrow +\infty$ y de (3.4) obtenemos la importante propiedad:

$$\forall \omega \in \Re : \quad \lim_{\sigma \to +\infty} F(\sigma+i\omega) = 0 \tag{3.5}$$

Es la propiedad análoga al Lema de Riemann-Lebesgue que hemos visto para las series y la transformación de Fourier.

Hasta aquí, esta parte es la más fácil. No sabemos si la integral (3.1) puede ser convergente, absoluta o condicionalmente, en un dominio más grande que el semiplano (3.3). Lo que tenemos que estudiar, entonces, es la *región de convergencia* de la integral (3.1), es decir: el conjunto

$$RC(f) = \left\{ s \in \mathbb{C} : \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \ \ converge \right\} \tag{3.6}$$

Este conjunto no es otra cosa que el dominio de la transformada de Laplace de *f* y es muy habitual, en la jerga profesional, designarla con el nombre *ROC*, sigla de *region of convergence*.

Dada una función, objeto, para cada número real positivo *b*, sea $F_b : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$F_b(s) = \int_0^{b} f(t)e^{-st}dt \tag{3.7}$$

Entonces, por definición, $s \in RC(f)$ sii existe el límite $\underset{b \to +\infty}{Lim} F_b(s) = F(s) \in \mathbb{C}$, y la convergencia de la integral es *uniforme* en un conjunto $S \subseteq RC(f)$ sii

$$\underset{b \to +\infty}{Lim} \sup\left\{ \left| F(s) - F_b(s) \right| : s \in S \right\} = 0 \tag{3.8}$$

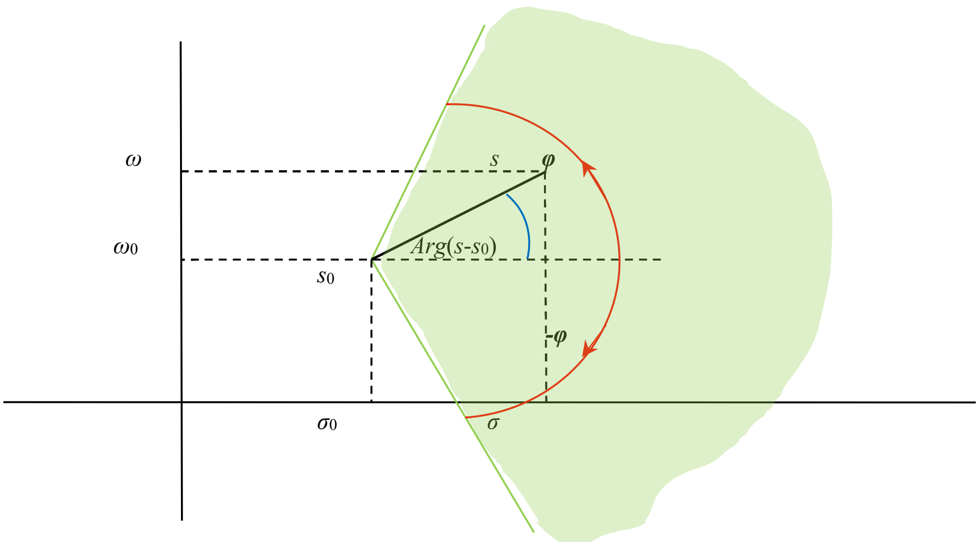
La importancia de la convergencia uniforme es que cada F_b es holomorfa en $\mathbb{C}$ (es decir, cada F_b es entera), como demostraremos a continuación, y el límite uniforme de holomorfas es holomorfa, como hemos visto como corolario del Teorema de Morera en los apuntes sobre análisis de variable compleja. Por lo tanto, en los puntos interiores de un conjunto $S \subseteq RC(f)$ donde se verifique (3.8), la función *F* es holomorfa. Por las dudas, por si usted se hace la pregunta, aclaremos que si bien el mencionado corolario se refiere a límites uniformes de <u>sucesiones</u> de funciones holomorfas, es evidente que (3.8) implica inmediatamente que $\underset{n \in N \to +\infty}{Lim} \sup\left\{ \left| F(s) - F_n(s) \right| : s \in S \right\} = 0$. El siguiente teorema resume todo lo que necesitamos conocer, en este apunte, sobre la región de convergencia de la transformada de Laplace de una función objeto.

TEOREMA 3.1. Dada una función objeto f y un punto $s_0 = \sigma_0 + i\omega_0 \in RC(f)$:

(i) Para cada $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ se verifica

$$\underset{b \to +\infty}{Lim} \sup\{|F(s) - F_b(s)| : s \in S_\varphi\} = 0 \qquad (3.9)$$

donde $S_\varphi = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \sigma_0, -\varphi < Arg(s - s_0) < \varphi\}$ (ver figura 1)



El sector angular $S\varphi$
Fig. 1.

(ii) El semiplano $\mathbb{H}_{\sigma_0} = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \sigma_0\}$ está incluido en la región de convergencia de la integral (3.1), es decir: $\mathbb{H}_{\sigma_0} \subseteq RC(f)$

(iii) O bien $RC(f) = \mathbb{C}$ o bien existe $\sigma_c \in \Re$ (que depende de f) tal que

$$\mathbb{H}_{\sigma_c} \subseteq RC(f) \subseteq \overline{\mathbb{H}_{\sigma_c}} \qquad (3.10)$$

Es decir: la integral (3.1) converge para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(s) > \sigma_c$ y además puede ser convergente en alguno, ninguno o todos los puntos de la recta vertical $\{\sigma_c + i\omega : \omega \in \Re\}$, que es el borde del semiplano $\mathbb{H}_{\sigma_c}$.

[Este número σ_c se denomina *abscisa de convergencia* de la transformada de Laplace de f. El caso $RC(f) = \mathbb{C}$ se representa simbólicamente «$\sigma_c = -\infty$»]

(iv) La transformada de Laplace de f, es decir la función $F: RC(f) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$, es holomorfa en el semiplano $\mathbb{H}_{\sigma_c} = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \sigma_c\}$ y su derivada es $F'(s) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-st}dt$, es decir, la transformada de Laplace de la función objeto $t \mapsto -tf(t)$, con la misma abscisa de convergencia que f.

Demostración: Se recomienda verla en «Análisis Matemático» de Tom Mike Apostol (Editorial Reverté (1960), páginas 471 y siguientes. El título original es Mathematical Analysis y fue editado por Addison-Wesley). Tal vez, en alguna versión posterior de este mismo apunte incluya una demostración, aunque sea esquemática. Mientras tanto, el texto recomendado es excelente, como todos los del mismo autor. Tom M. Apostol fue un ingeniero y matemático especializado en teoría analítica de números, sobre la que escribió dos textos consagrados como clásicos, uno introductorio y otro avanzado. ■

Convención lingüística: Los semiplanos de la forma $\mathbb{H}_\alpha = \{\sigma + i\omega \in \mathbb{C} : \sigma > \alpha\}$ son muy frecuentes en este tema, como hemos visto. Para simplificar la exposición, los llamaremos «semiplanos verticales a derecha».

El Teorema 3.1, además de dar una información muy completa sobre el dominio de la transformada de Laplace de una función objeto, nos indica cómo podemos determinar, en la práctica, las abscisas de convergencia de manera muy sencilla. La clave está en que $\mathbb{H}_{\sigma_c}$ es un semiplano vertical a derecha contenido en el dominio donde la transformada de Laplace de f es holomorfa, y es el *mayor* semiplano vertical a derecha posible con esta propiedad. La expresión *mayor* es utilizada aquí en el sentido de la inclusión: un plano vertical a derecha $\mathbb{H}_\alpha$ es *mayor* que otro plano vertical a derecha $\mathbb{H}_\beta$ sii $\mathbb{H}_\beta \subset \mathbb{H}_\alpha$, lo que claramente equivale a $\alpha < \beta$. Comencemos con tres ejemplos sencillos. El cuarto ejemplo tiene una cierta complejidad.

***Ejemplo* 1**: La transformada de Laplace de la función de Heaviside es

$$\mathcal{L}(H)(s) = \int_0^{+\infty} H(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \underset{b \to +\infty}{Lim} \frac{e^{-sb} - 1}{-s} \overset{\mathrm{Re}(s)>0}{=} \frac{1}{s}$$

La condición Re(s) > 0 es necesaria (y suficiente) para la existencia del límite. La transformada de Laplace de H es, entonces, holomorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$, y el mayor semiplano vertical a derecha contenido en este abierto es, claramente, $\mathbb{H}_0 = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 0\}$, por lo tanto la abscisa de convergencia en este ejemplo es 0.

***Ejemplo* 2**: Sea γ una constante compleja. La transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{\gamma t}H(t)$ es

$$Ł(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{\gamma t}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{(\gamma - s)t}dt = \lim_{b \to +\infty} \frac{e^{(\gamma - s)b} - 1}{\gamma - s} \overset{\mathrm{Re}(\gamma - s) < 0}{=} \frac{1}{\gamma - s}$$

La condición Re(γ - s) < 0 es necesaria (y suficiente) para la existencia del límite. La transformada de Laplace de f es, entonces, holomorfa en $\mathbb{C} - \{\gamma\}$, y el mayor semiplano vertical a derecha contenido en este dominio es $\mathbb{H}_{\mathrm{Re}(\gamma)} = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\gamma)\}$.

***Ejemplo* 3**: Sean a y b dos constantes complejas distintas. La transformada de Laplace de la función $g(t) = (e^{at} - e^{bt})H(t)$ es (dejamos la cuenta como ejercicio: se puede utilizar el ejemplo anterior y - anticipadamente - la linealidad de la transformación de Laplace):

$$Ł(g)(s) = \frac{1}{a - s} - \frac{1}{b - s} = \frac{a - b}{(s - a)(s - b)}$$

Esta función es holomorfa en $\mathbb{C} - \{a, b\}$, por lo tanto el mayor semiplano vertical a derecha contenido en este abierto es $\mathbb{H}_\lambda = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \lambda\}$, donde la abscisa de convergencia es $\lambda = \max\{\mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b)\}$.

***Ejemplo* 4:** En este ejemplo aprovecharemos el ítem (*iv*) del Teorema 3.1 para calcular una transformada de Laplace no trivial. Sea $y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t}H(t)$. Obsérvese que $\lim_{t \to 0+} y(t) = 2$ y por lo tanto es una función objeto (dejamos los detalles restantes como ejercicio). En el ejemplo anterior hemos calculado la transformada de Laplace de $g(t) = (e^{at} - e^{bt})H(t)$ para cualquier par de constantes a y b. En particular, la transformada de Laplace de $g(t) = (e^t - e^{-t})H(t)$ es $G(s) = \frac{2}{(s - 1)(s + 1)} = \frac{2}{s^2 - 1}$, con abscisa de convergencia 1. Ahora bien, $ty(t) = g(t)$, por lo tanto, si $Y(s) = \int_0^{+\infty} y(t)e^{-st}dt$ es la transformada de Laplace de y, su derivada es (aquí utilizamos el Teorema) :

$$Y'(s) = -\int_0^{+\infty} ty(t)e^{-st}dt = -\int_0^{+\infty} g(t)dt = -G(s).$$

Es decir: Y es una primitiva de $-\frac{2}{s^2 - 1} = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s - 1}$, con lo cual tenemos que pensar en algún logaritmo. La primitiva tiene que ser holomorfa en el semiplano

$H_1 = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$, pues Y y G tienen la misma abscisa de convergencia (es parte del ítem (*iv*) del Teorema 3.1). Un logaritmo que es holomorfo en un plano vertical a derecha es el principal (pensar en el corte) y podemos plantear $Y(s) = cte + Log(s+1) - Log(s-1)$. Observe que esta función es, efectivamente, holomorfa en $\mathbb{H}_1$ y que, efectivamente, $Y'(s) = G(s)$ para todo $s \in \mathbb{H}_1$. Ahora, para $s = \sigma \in \Re$ y mayor que 1 es

$$Y(\sigma) = cte + \ln(\sigma+1) - \ln(\sigma-1) = cte + \ln\left(\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)$$

Entonces, para determinar la constante podemos utilizar la propiedad (3.5) eligiendo $\omega = \mathrm{Im}(s) = 0$ y obtenemos que $cte = 0$, pues $\lim_{\sigma \to +\infty} \ln\left(\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right) = 0$. Hemos calculado, por lo tanto, la transformada de Laplace de *y*, que es $Y(s) = Log(s+1) - Log(s-1)$. Tal vez usted se esté preguntando, y con razón, si no podía haberse elegido otro logaritmo, pues se tienen muchos cortes posibles y para cada corte infinitas ramas. ¿Hubiéramos llegado a una transformada de Laplace distinta? La respuesta es no, por suerte. En primer lugar, piense que dos primitivas de la función holomorfa *G* en el abierto conexo $\mathbb{H}_1$ solo pueden diferir en una constante, y en segundo lugar, la constante queda determinada por la propiedad (3.5).

Resumiendo lo que hemos expuesto en este parágrafo, podemos decir que para cada función objeto *f*, su transformada de Laplace es una función *F* holomorfa en un plano vertical a derecha $\mathbb{H}_{\sigma_c}$ (o en todo el plano), que verifica $\lim_{\sigma \to +\infty} F(\sigma + i\omega) = 0$ para cualquier $\omega \in \Re$. La abscisa σ_c depende de la función *F*, por lo tanto podemos indicarla $\sigma(F)$. Para incluir el caso en que *F* es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, convengamos que en ese caso es «$\sigma(F) = -\infty$». Ahora, indiquemos (no es una notación universal) con Λ al conjunto de estas funciones, es decir:

$$\begin{gathered} \Lambda = \text{conjunto de funciones holomorfas } F : \mathbb{H}_{\sigma(F)} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ en algún} \\ \mathbb{H}_{\sigma(F)} = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \sigma(F)\} \text{ tales que } \forall \omega \in \Re : \lim_{\sigma \to +\infty} F(\sigma + i\omega) = 0 \end{gathered} \tag{3.11}$$

La *Transformación de Laplace* es, por definición, la aplicación

$$\begin{gathered} \mathcal{L} : \mathcal{O} \longrightarrow \Lambda \text{ tal que a cada función objeto } f \in \mathcal{O} \text{ le asigna} \\ \text{la función } \mathcal{L}(f) = F \in \Lambda \text{ definida por } F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st}\, dt \end{gathered} \tag{3.12}$$

Esta definición es suficiente para este apunte, aunque - como hemos mencionado - pueda extenderse a un dominio más amplio que el de las funciones objeto.

El problema que se presenta ahora con la estructura del codominio Λ es que las transformadas de dos funciones objeto distintas tienen, en general, dominios distintos, y esto complica un poco la definición de las operaciones básicas con estas transformadas. Por ejemplo, sean F y G las transformadas de Laplace de dos funciones objeto f y g, respectivamente, y sean $\mathbb{H}_{\sigma(F)}$ y $\mathbb{H}_{\sigma(G)}$ los correspondientes dominios. Entonces, la suma $F + G$ y el producto FG están definidas, en general, en la intersección de sus dominios: $\mathbb{H}_{\sigma(F)} \cap \mathbb{H}_{\sigma(G)} = \mathbb{H}_{\sigma(F,G)}$, donde $\sigma(F,G) = \max\{\sigma(F), \sigma(G)\}$. Esta aclaración es necesaria para el próximo parágrafo, donde mencionamos las primeras propiedades básicas de la Transformación de Laplace.

§4. PROPIEDADES BÁSICAS DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

Para las aplicaciones de la Transformación de Laplace es crucial contar con una buena fórmula de inversión. Comencemos con esto. Ya en la introducción hemos presentado a la transformada de Laplace de una función $f : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$ como la transformada de Fourier de $\hat{f}_\sigma$ de la función $t \mapsto f_\sigma(t) = f(t)H(t)e^{-\sigma t}$, pues

$$F(\sigma + i\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)H(t)e^{-\sigma t}e^{-i\omega t}dt \; = \hat{f}_\sigma(\omega) \qquad (4.1)$$

Por lo tanto, podemos utilizar el teorema de inversión para la Transformación de Fourier que hemos enunciado y demostrado en el apunte anterior. Sea f una función objeto y sean M y α dos constantes reales tales que $\forall t \geq 0 : |f(t)| \leq Me^{\alpha t}$. Entonces, para cada $\sigma > \alpha$ la función $t \mapsto f_\sigma(t) = f(t)H(t)e^{-\sigma t}$ es absolutamente integrable en $\Re$, pues se anula en $(-\infty, 0)$ y $\forall t \geq 0 : |f_\sigma(t)| \leq Me^{\alpha t}e^{-\sigma t} = Me^{-(\sigma-\alpha)t}$, y esta última es integrable, precisamente, por ser $\sigma - \alpha > 0$. Más evidente aún es que cada una de estas funciones f_σ es seccionalmente continua. Por último, las condiciones de Dirichlet para la fórmula de inversión en un punto t, requieren la existencia de derivadas laterales finitas de f_σ en dicho punto. Es evidente que f_σ admite derivadas laterales finitas en un punto $t \neq 0$ sii f las admite. Respecto de $t = 0$, las derivadas laterales de H en ese punto son ambas nulas, por lo tanto lo que podemos garantizar - y esto nos alcanza - es que si f admite derivadas laterales en 0, entonces f_σ también. Por lo tanto, dado $\sigma > \alpha$, en cada punto t donde existen las derivadas laterales finitas de f podemos aplicar el mencionado Teorema de Inversión de la Transformación de Fourier, obteniendo

$$\frac{1}{2\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_\sigma(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \tfrac{1}{2}[f_\sigma(t^-) + f_\sigma(t^+)] \qquad (4.2)$$

Es decir, teniendo en cuenta la continuidad de la exponencial:

$$\frac{1}{2\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \tfrac{1}{2}[f(t^-)H(t^-)e^{-\sigma t} + f(t^+)H(t^+)e^{-\sigma t}] \qquad (4.3)$$

Si $t < 0$, el miembro derecho de (4.3) se anula, lo que implica la anulación de la integral del miembro izquierdo, y esto no es para nada evidente ni trivial (al menos para mí).

Para $t = 0$, el miembro derecho es $\tfrac{1}{2} f(0^+)$, pues $f(0^-) = H(0^-) = 0$ y $H(0^+) = 1$, por lo tanto (4.3) para el caso $t = 0$ es

$$\frac{1}{2\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + i\omega) d\omega = \tfrac{1}{2} f(0^+) \qquad (4.4)$$

Esta igualdad es otra consecuencia sorprendente de la identidad (4.3). Por último, para $t > 0$, tenemos $H(t^-) = H(t^+) = 1$ y resulta

$$\frac{1}{2\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \tfrac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)]e^{-\sigma t} \qquad (4.5)$$

(para $t > 0$ y f con derivadas laterales finitas en t)

Acomodando un poco esta última expresión y recordando la definición del valor principal de una integral impropia, obtenemos el siguiente:

TEOREMA 4.1 (*Teorema de Inversión para la Transformación de Laplace*).

Sea f una función objeto y sean M y α dos constantes reales tales que $\forall t \geq 0 : |f(t)| \leq Me^{\alpha t}$. Entonces, para cada $\sigma_0 > \alpha$ y cada $t > 0$ donde f admite derivadas laterales finitas:

$$\lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} F(\sigma_0 + i\omega) e^{(\sigma_0 + i\omega)t} d\omega = \tfrac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)] \qquad (4.6)$$

Demostración: ver deducción de la fórmula (4.5) ut supra. ■

***Observación* 4.1**: A esta altura de los acontecimientos esta observación tendría que ser innecesaria, pero por las dudas aquí va: si además de ser una función objeto y tener derivadas laterales finitas en *t*, la función *f* es continua en el punto *t*, entonces el miembro derecho de (4.6) es, sencillamente, *f*(*t*).

***Nota* 4.1:** La fórmula (4.6) suele escribirse en la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} F(s)e^{st}ds = \tfrac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)] \tag{4.7}$$

pues se trata de la integral de la función holomorfa $s \mapsto F(s)e^{st}$ en la recta $r_{\sigma_0} = \{\sigma_0 + i\omega : -\infty < \omega < +\infty\}$, parametrizada por $s(\omega) = \sigma_0 + i\omega$. Observe que en esta recta es $ds = id\omega$, lo que introduce el factor $\frac{1}{i}$ al pasar de (4.6) a (4.7). De todos modos, la expresión (4.7), aunque bastante clara, es más bien simbólica y debe entenderse en el sentido del valor principal, como lo expresa con mayor precisión (4.6). El hecho de que la fórmula de inversión no dependa de la abscisa σ_0 (siempre y cuando sea $\sigma_0 > \sigma(F)=$ abscisa de convergencia de *F*) está relacionado con el Teorema de Cauchy-Goursat. Veamos un poco cómo es esto.

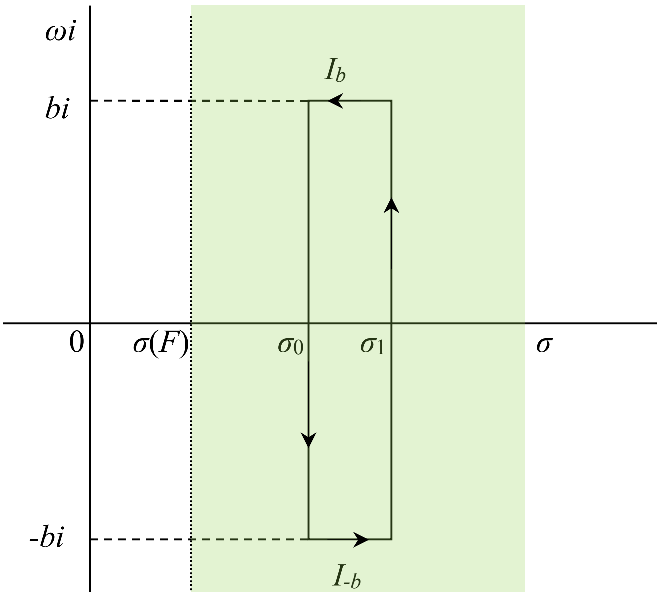


Fig. 2.

La integral de $F(s)e^{st}$ se anula en el circuito cerrado rectangular de la figura 2, cualesquiera sean $b > 0$ y $\sigma_1 > \sigma_0 > \sigma(F)$, pues esta función es holomorfa en $\mathbb{H}_{\sigma(F)}$. Ahora, lo que no es nada sencillo de demostrar directamente es que para cada $\sigma_1 > \sigma_0 > \sigma(F)$ fijos la suma

$$\int_{I_{-b}} F(s)e^{st}ds + \int_{I_b} F(s)e^{st}ds = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} F(\sigma - ib)e^{(\sigma-ib)t}d\sigma - \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} F(\sigma + ib)e^{(\sigma+ib)t}d\sigma$$

tiende a cero cuando $b \longrightarrow +\infty$. Pero no necesitamos probar esto, pues se trata de una consecuencia inmediata del hecho de que la fórmula de inversión (4.7) no depende de $\sigma_0 > \sigma(F)$:

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} F(\sigma - ib)e^{(\sigma-ib)t}d\sigma - \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} F(\sigma + ib)e^{(\sigma+ib)t}d\sigma =$$

$$= \int_{-b}^{b} F(\sigma_1 + i\omega)e^{(\sigma_1+i\omega)t}d\omega - \int_{-b}^{b} F(\sigma_0 + i\omega)e^{(\sigma_0+i\omega)t}d\omega$$

$$\xrightarrow[b\to+\infty]{} vp\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma_1 + i\omega)e^{(\sigma_1+i\omega)t}d\omega - vp\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma_0 + i\omega)e^{(\sigma_0+i\omega)t}d\omega \overset{(4.7)}{=}$$

$$= \tfrac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)] - \tfrac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)] = 0\,.$$

Esta propiedad no es trivial y puede verse como otra forma del Lema de Riemann-Lebesgue. Probablemente una prueba directa pueda obtenerse mediante una adaptación de este Lema.

Existen varios métodos que se utilizan en la práctica para el cálculo de la integral $\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} F(s)e^{st}ds$, conocida como integral de Fourier-Mellin. Algunos utilizan el teorema de los residuos y el popular *contorno de Bromwich*. Nosotros no los mencionaremos aquí por un par de razones. La primera es que este apunte no pretende formar especialistas en transformadas de Laplace, ni desde el punto de vista teórico ni práctico. Su único objetivo es presentar matemáticamente el tema dentro de los límites de un curso que incluye Análisis de Variable compleja, series de Fourier, Transformada de Fourier y algo de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. La otra razón es que en la actualidad las transformadas de Laplace y sus inversas pueden obtenerse en segundos apretando algunas pocas teclas. Para la práctica del estudiante, alcanza con una buena tabla de transformadas, de la misma manera que las tablas de integrales de nuestra infancia.

Para que todas estas disquisiciones sobre la inversión de la Transformación de Laplace tengan sentido, la primera pregunta que tendríamos que habernos hecho de entrada es la obvia: ¿es la Transformación de Laplace inyectiva? Es decir: dos funciones objeto distintas, ¿pueden tener la misma transformada de Laplace? La respuesta es trivialmente afirmativa, pues dos funciones objeto que difieren en una cantidad finita de puntos en cada intervalo acotado de la recta, tienen la misma transformada de Laplace. Un ejemplo casi trivial (ya lo mencionamos con la Transformación de Fourier) es la función característica de los enteros positivos, es decir $f:\Re \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \in \mathbb{N} \\ 0 & si \quad t \notin \mathbb{N} \end{cases}$. Esta función tiene la misma transformada de Laplace que la función nula. Pero, de la misma manera que para la Transformación de Fourier, en el caso continuo se reestablece la inyectividad. El Teorema de Inversión (4.1) requiere la existencia de derivadas laterales finitas. De todos modos, para el caso continuo tenemos el siguiente:

***Teorema* 4.2** (*Matyáš Lerch* - 1903). Sean *f* y *g* dos funciones objeto que son continuas en la semirrecta $[0,+\infty)$ y tales que sus transformadas de Laplace *F* y *G* son iguales en algún semiplano $\mathbb{H}_\alpha \subseteq \mathbb{H}_{\sigma(F)} \cap \mathbb{H}_{\sigma(G)}$. Entonces, *f* y *g* son iguales.

Demostración (incompleta): Para el caso en que *f* y *g*, además de ser continuas, tienen derivadas laterales finitas, este teorema es consecuencia inmediata del Teorema de Inversión (ver Observación 4.1) pues eligiendo $\sigma_0 > \alpha$ tenemos, para todo $t > 0$:

$$f(t) = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} F(\sigma_0 + i\omega) e^{(\sigma_0 + i\omega)t} d\omega \overset{hip}{=} \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} G(\sigma_0 + i\omega) e^{(\sigma_0 + i\omega)t} d\omega = g(t).$$

Sin la hipótesis de la existencia de derivadas laterales finitas, el teorema se demuestra utilizando resultados sobre aproximaciones uniformes que no se han visto en los cursos previos. Por lo tanto, no daremos aquí la demostración del caso general, que puede consultarse en la bibliografía existente en abundancia sobre el tema. ■

Tampoco nos extenderemos aquí sobre el problema de la sobreyectividad, es decir: dada una función $F \in \Lambda$, ¿existe $f \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{L}(f) = F$? Si existe, tiene que estar dada por la fórmula de inversión (4.6). Si quiere algo prolijo, en los puntos de discontinuidad defina a la función *f* por el promedio del salto, es decir por el miembro derecho de la igualdad (4.6). Lo que quedaría por estudiar, entonces, es si para cualquier $F \in \Lambda$, la función *f* dada por (4.6) es una función objeto. Recordemos, por las dudas, que las funciones $F \in \Lambda$ verifican $\lim_{\mathrm{Re}(s) \to +\infty} F(s) = 0$, por lo tanto es evidente que si una función no verifica esta propiedad no puede ser la transformada de Laplace de una función objeto. La pregunta que estamos haciendo es menos trivial: si *F* es holomorfa en un semiplano a derecha y verifica $\lim_{\mathrm{Re}(s) \to +\infty} F(s) = 0$, ¿es la transformada de Laplace de alguna función objeto? Si le resulta interesante, siga adelante por su cuenta. Si no, no hay ningún problema. Tal vez en algún apunte complementario futuro podamos escribir algo al respecto.

Pasemos, ahora sí a las propiedades operativas de la transformación de Laplace. Recordemos que la suma *F* + *G* y el producto *FG* de las transformadas de Laplace de dos funciones objeto *f* y *g*, respectivamente, están definidas y son holomorfas en - al menos (ver observación a continuación) - la intersección de sus dominios, es decir, en $\mathbb{H}_{\sigma(F)} \cap \mathbb{H}_{\sigma(G)} = \mathbb{H}_{\sigma(F,G)}$, donde $\sigma(F,G) = \max\{\sigma(F), \sigma(G)\}$.

***Observación* 4.2**. Puede ocurrir que *F* + *G* y *FG* tengan abscisas de convergencia menores que $\sigma(F,G) = \max\{\sigma(F), \sigma(G)\}$. Por ejemplo si *g* = - *f*, *F*+*G* es la función nula, y lo mismo ocurre con *FG* si *g* = 0.

PROPIEDADES BÁSICAS:

La siguiente es una lista no exhaustiva de propiedades, que fueron bautizadas con nombres que se refieren a las aplicaciones clásicas de la Transformación de Laplace. En los casos en que la propiedad se refiera a las transformadas de dos funciones, es necesario tener cuidado con los dominios de estas transformadas, por lo observado precedentemente. No aclararemos esto en cada caso. Las demostraciones son muy sencillas y solo requieren un cambio de variables o integración por partes. Solamente demostraremos la última y dejamos el resto como ejercicio.

		Función objeto	***Transformada de Laplace***	***Observaciones***
		$f(t)$	$F(s)$	abscisa de convergencia σ_f
		$g(t)$	$G(s)$	abscisa de convergencia σ_g
1	Linealidad	$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$	a y b : constantes complejas.
2	Derivación en frecuencias	$tf(t)$	$-F'(s)$	
3	n-ésima derivación en frecuencias	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	
4	Derivación en tiempo	$f'(t)$	$sF(s)-f(0^+)$	f y f' deben ser funciones objeto
5	Segunda derivación en tiempo	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0^+)-f'(0^+)$	f , f' y f'' deben ser funciones objeto
6	n-ésima derivación en tiempo	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0^+)$	f , f',…,$f^{(n)}$ deben ser funciones objeto
7	Factor de escala temporal	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$	α : constante real positiva
8	Desplazamiento en frecuencias	$e^{s_0 t} f(t)$	$F(s - s_0)$	s_0: constante compleja. $\mathrm{Re}(s-s_0) > \sigma(F)$
9	Desplazamiento temporal	$f(t-t_0)H(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}F(s)$	t_0: constante real
10	Convolución	$(f*g)(t)$	$F(s)G(s)$	

Algunas propiedades de la Transformación de Laplace
Tabla 1

***Prueba de la propiedad* 10**: recordemos (ver (2.2)) que

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\theta)g(\theta)d\theta = \int_{0}^{t} f(t-\theta)g(\theta)d\theta$$

y por lo tanto no tenemos problemas de convergencia. Entonces:

$$Ł[f*g](s)=\int_{0}^{+\infty}(f*g)(t)e^{-st}dt \overset{\substack{(f*g)(t)=0 \\ si\ t<0}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\theta)g(\theta)e^{-st}d\theta dt =$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\theta)e^{-st}dt\right)g(\theta)d\theta \overset{\lambda=t-\theta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)e^{-s(\lambda+\theta)}d\lambda\right)g(\theta)d\theta =$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)e^{-s\lambda}d\lambda\right)g(\theta)e^{-s\theta}d\theta \overset{\substack{f(\lambda)=0 \\ si\ \lambda<0}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{0}^{+\infty} f(\lambda)e^{-s\lambda}d\lambda\right)g(\theta)e^{-s\theta}d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s)g(\theta)d\theta =$$

$$=F(s)\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)e^{-s\theta}d\theta \overset{\substack{g(\theta)=0 \\ si\ \theta<0}}{=} F(s)\int_{0}^{+\infty} g(\theta)d\theta = F(s)G(s) \ \blacksquare$$

Observe que de esta propiedad y la casi-inyectividad de la transformación de Laplace se pueden deducir la asociatividad y la conmutatividad de la convolución. También se deduce la inexistencia de un elemento neutro para la convolución, pues la transformada de tal elemento sería la constante 1, que no tiende a cero cuando $\mathrm{Re}(s) \longrightarrow +\infty$.

Agregamos un par de propiedades interesantes que se suelen mencionar como teoremas. Existen varias versiones de estos dos teoremas; probablemente las que damos a continuación sean las más sencillas.

Teorema del Valor Inicial: Si f y f' son funciones objeto, entonces

$$f(0^+) = \lim_{\mathrm{Re}(s)\to +\infty} sF(s) \tag{4.8}$$

Demostración: La transformada de Laplace de f' es $Ł(f')(s) = sF(s) - f(0^+)$, y por el Lema de Riemann-Lebesgue (3.5) aplicado a $Ł(f')$ resulta inmediatamente (4.8) ■

Teorema del Valor Final: Sea f una función objeto con abscisa de convergencia $\sigma_c \le 0$ tal que existe (y es finito) el límite $\lim_{t\to +\infty} f(t)$. Entonces:

$$\lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{\sigma\to 0+} \sigma F(\sigma) \tag{4.9}$$

(El límite del miembro derecho es el límite de $sF(s)$ cuando s tiende a 0 en la semirrecta real $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(s) = 0, \mathrm{Re}(s) > 0\}$).

Demostración: (Optativa, como casi todas las que requieren más de tres renglones. Esta, en particular, la escribo con detalle para control de alumnos y colegas, pues no encontré ninguna que me convenciera realmente. Si alguno de ustedes encuentra un error, por favor avíseme.Gracias)

Sea $\gamma = \underset{t \to +\infty}{Lim} f(t)$. Para cada $\sigma > 0 \geq \sigma_c$: $F(\sigma) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\sigma t} dt \overset{\lambda = \sigma t}{=} \int_0^{+\infty} f(\tfrac{\lambda}{\sigma}) e^{-\lambda} \tfrac{1}{\sigma} d\lambda$,

es decir: $\sigma F(\sigma) = \int_0^{+\infty} f(\tfrac{\lambda}{\sigma}) e^{-\lambda} d\lambda$. Teniendo en cuenta que $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda} d\lambda = 1$:

$$|\sigma F(\sigma) - \gamma| = \left| \int_0^{+\infty} f(\tfrac{\lambda}{\sigma}) e^{-\lambda} d\lambda - \gamma \overbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda} d\lambda}^{=1} \right| = \left| \int_0^{+\infty} [f(\tfrac{\lambda}{\sigma}) - \gamma] e^{-\lambda} d\lambda \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(\tfrac{\lambda}{\sigma}) - \gamma| e^{-\lambda} d\lambda$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $t_\varepsilon > 0$ tal que para todo $t \geq t_\varepsilon$: $|f(t) - \gamma| < \varepsilon$. Ahora, sea K_ε una cota superior de $|f(t) - \gamma|$ en $[0, t_\varepsilon]$. Entonces, $K = \varepsilon + K_\varepsilon$ es una cota superior de $|f(t) - \gamma|$ en toda la recta. Retomando la desigualdad anterior:

$$|\sigma F(\sigma) - \gamma| \leq \int_0^{+\infty} |f(\tfrac{\lambda}{\sigma}) - \gamma| e^{-\lambda} d\lambda = \int_0^{t_\varepsilon \sigma} |f(\tfrac{\lambda}{\sigma}) - \gamma| e^{-\lambda} d\lambda + \int_{t_\varepsilon \sigma}^{+\infty} |f(\tfrac{\lambda}{\sigma}) - \gamma| e^{-\lambda} d\lambda$$

En la segunda integral tenemos $\lambda \geq t_\varepsilon \sigma$, es decir $\frac{\lambda}{\sigma} \geq t_\varepsilon$ y por lo tanto $|f(\tfrac{\lambda}{\sigma}) - \gamma| < \varepsilon$. En la primera vamos a utilizar la cota K para el integrando:

$$|\sigma F(\sigma) - \gamma| \leq \int_0^{t_\varepsilon \sigma} K \overbrace{e^{-\lambda}}^{\leq 1} d\lambda + \int_{t_\varepsilon \sigma}^{+\infty} \varepsilon e^{-\lambda} d\lambda \leq K t_\varepsilon \sigma + \varepsilon \int_{t_\varepsilon \sigma}^{+\infty} e^{-\lambda} d\lambda \leq K t_\varepsilon \sigma + \varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-\lambda} d\lambda = K t_\varepsilon \sigma + \varepsilon .$$

Ahora, para $0 < \sigma < \dfrac{\varepsilon}{K t_\varepsilon}$, resulta $|\sigma F(\sigma) - \gamma| < \varepsilon$. ■

En las aplicaciones es importante el siguiente teorema, cuya demostración no daremos aquí: la dejamos como ejercicio optativo, pues es más engorrosa que difícil y está al alcance de cualquier alumno voluntarioso.

Teorema de la Imagen Racional: La transformada de Laplace $F(s)$ de una función objeto $f(t)$ es una función racional [(1)] si y solamente si $f(t)$ es una combinación lineal (finita) de funciones de la forma $t^m e^{\lambda t} H(t - t_0)$, donde m es un entero positivo (o nulo).

[(1)] Recordemos que F es racional sii es de la forma $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, donde P y Q son polinomios. Dado que $\underset{\mathrm{Re}(s) \to}{Lim} F(s) = 0$, el grado de P es estrictamente menor que el de Q. La abscisa de convergencia es, claramente, el máximo de las partes reales de las raíces de Q.

Demostración: Ejercicio optativo. ■

Terminamos este parágrafo con una pequeña tabla de transformadas de Laplace. Los cálculos de estas transformadas quedan como ejercicios. La mayoría es muy sencilla. Con esta tabla y con las propiedades operativas de la Transformación de Laplace (Tabla 1), se pueden calcular las transformadas de la mayoría de las funciones que aparecen en la práctica, así como las inversas. De hecho, puede observarse que si tenemos en cuenta las propiedades de la tabla anterior, algunas de las transformadas que damos en la siguiente tabla son redundantes. Luego daremos algunas transformadas notables no tan sencillas.

	Función objeto	***Transformada de Laplace***	***RC***	***Observaciones***
	$f(t)$	$F(s)$		
1	$H(t)$	$\frac{1}{s}$	Re(s) > 0	
2	$H(t-t_0)$	$\frac{e^{-t_0 s}}{s}$	Re(s) > 0	$t_0 > 0$
3	$tH(t)$	$\frac{1}{s^2}$	Re(s) > 0	
4	$t^n H(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	Re(s) > 0	*n: entero positivo o nulo. Para exponentes no enteros, ver función gamma.*
5	$e^{-kt}H(t)$	$\frac{1}{s+k}$	Re(s) > -k	*k: constante real.*
6	$(t-t_0)^n e^{-k(t-t_0)} H(t-t_0)$	$\frac{n!e^{-t_0 s}}{(s+k)^{n+1}}$	Re(s) > -k	$t_0 > 0$ *k: constante real.*
7	$sen(\alpha t)H(t)$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$	Re(s) > 0	*α: constante real.*
8	$\cos(\alpha t)H(t)$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$	Re(s) > 0	*α: constante real.*
9	$senh(\alpha t)H(t)$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$	Re(s) > $\lvert\alpha\rvert$	*α: constante real.*
10	$\cosh(\alpha t)H(t)$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$	Re(s) > $\lvert\alpha\rvert$	*α: constante real.*

Algunas transformadas de Laplace
Tabla 2

§5. APLICACIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE A LA RESOLUCION DE CIERTAS ECUACIONES DIFERENCIALES.

El título es más extenso que lo que vamos a exponer en este parágrafo. Presentaremos las ecuaciones de una forma general que - se supone - no debe inducir al pánico, pues los ejemplos a resolver están en las guías de ejercicios y son casos más o menos sencillos de las que siguen.

(*I*) $*$ Ecuación: $y^{(n)}(t)+c_{n-1}y^{(n-1)}(t)+c_{n-2}y^{(n-2)}(t)+....+c_1y'(t)+c_0y(t)=f(t)$

(5.1)

$*$ Condiciones iniciales $y(0^+)=y_0\ ,\ y'(0^+)=y_1,\ldots,y^{(n-1)}(0^+)=y_{n-1}$.

Los datos son las constantes $c_0,c_1,...,c_{n-1}$ (estos coeficientes son, por lo general, reales), las condiciones iniciales $y_0,y_1,...,y_{n-1}$ y la función objeto *f*. Se busca como solución una función objeto $y:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$ de clase C^n tal que sus derivadas hasta el orden *n* sean, también, funciones objeto. Para explicar el método, comencemos con una ecuación de segundo orden, es decir, el caso $n = 2$, que es el más frecuente en las aplicaciones:

$*$ Ecuación: $y''(t)+c_1y'(t)+c_0y(t)=f(t)$

(5.2)

$*$ Condiciones iniciales $y(0^+)=y_0\ ,\ y'(0^+)=y_1$

Aplicando la Transformación de Laplace en la ecuación diferencial, y teniendo en cuenta las propiedades (1), (4) y (5) de la Tabla 1, obtenemos:

$$s^2Y(s)-sy(0^+)-y'(0^+)+c_1[sY(s)-y(0^+)]+c_0Y(s)=F(s) \qquad (5.3)$$

Esta identidad es válida para un Re(s) > σ_0 a determinar cuando encontremos la soluciónn del problema (5.2). Este es uno de los tantos momentos en que agradecemos un buen teorema de unicidad. Acomodando un poco el primer miembro de (5.3) y utilizando las condiciones iniciales obtenemos

$$(s^2+c_1s+c_0)Y(s)-sy_0-y_1-c_1y_0=F(s),$$

de donde resulta:

$$Y(s)=\overbrace{\frac{(s+c_1)y_0+y_1}{s^2+c_1s+c_0}}^{A(s)}+\overbrace{\frac{1}{s^2+c_1s+c_0}}^{B(s)}F(s)=A(s)+B(s)F(s) \qquad (5.4)$$

Ya tenemos la transformada de Laplace de la solución. Obsérvese que las funciones $A(s)$ y $B(s)$ son funciones racionales, por lo tanto son las transformadas de Laplace de funciones objeto $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ cuya forma está dada por el Teorema de la Imagen Racional (página 20). Finalmente, teniendo en cuenta que $B(s)F(s)$ es la transformada de Laplace de la convolución, resulta que la solución del problema (5.2) es

$$y(t) = \alpha(t) + (\beta * f)(t) \tag{5.5}$$

En el caso general (5.1) de una ecuación de orden n, el método es exactamente el mismo y se obtiene una expresión análoga a (5.4), donde los denominadores de $A(s)$ y $B(s)$ son polinomios de grado n (y los denominadores tienen grados menores) y la solución se puede expresar, también, en la forma (5.5). Las dificultades prácticas residen en los cálculos de $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ a partir de sus transformadas de Laplace $A(s)$ y $B(s)$. Obsérvese que cuando las condiciones iniciales son nulas, $A(s)$ es idénticamente nula y resulta (teorema de Lerch): $y(t) = (\beta * f)(t)$. En muchos casos, lo que interesa calcular es la transformada de Laplace $B(s)$, denominada habitualmente como «función de transferencia».

(*II*) $*$ Ecuación:

$$y^{(n)}(t) + c_{n-1}y^{(n-1)}(t) + c_{n-2}y^{(n-2)}(t) + ... + c_1 y'(t) + c_0 y(t) + \int_0^t y(t-\theta)g(\theta)d\theta = f(t)$$

$*$ Condiciones iniciales $y(0^+) = y_0$, $y'(0^+) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0^+) = y_{n-1}$.

Los datos son las constantes $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ (estos coeficientes son, por lo general, reales), las condiciones iniciales $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ y las funciones objeto f y g. Se busca como solución una función objeto $y : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$ de clase C^n tal que sus derivadas hasta el orden n sean, también, funciones objeto.

La diferencia con la ecuación anterior es el término integral $\int_0^t y(t-\theta)g(\theta)d\theta$, que no es otra cosa que la convolución $(y * g)(t)$. Este término puede aparecer en la forma $\int_0^{+\infty} y(t-\theta)g(\theta)d\theta$, pero si se buscan soluciones causales, es exactamente lo mismo. La aplicación de la Transformación de Laplace en ambos miembros de la ecuación introduce - comparando con la ecuación anterior - la transformada de $(y * g)(t)$, que es el producto $Y(s)G(s)$ de las transformadas de y y de g. El resultado es una ecuación algebraica de la forma $Q(s)Y(s) + P(s) + Y(s)G(s) = F(s)$, donde P y Q son funciones polinómicas, el grado de Q es n, y P es un polinomio de grado menor que n y que depende de las condiciones iniciales. Despejando tenemos

$$Y(s)=\overbrace{\frac{-P(s)}{Q(s)+G(s)}}^{A(s)}+\overbrace{\frac{1}{Q(s)+G(s)}}^{B(s)}F(s) \tag{5.5}$$

La forma de la transformada de Laplace de la solución es la misma que en el caso anterior, es decir: $y(t)=\alpha(t)+(\beta * f)(t)$. Si $G(s)$ es racional, también lo son $A(s)$ y $B(s)$, y la situación es análoga a la del problema anterior.

(*III*)

$*$ Sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases}(1)\ x_1'(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+...+a_{1n}x_n(t)+f_1(t)\\(2)\ x_2'(t)=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+...+a_{2n}x_n(t)+f_2(t)\\...\\(n)\ x_n'(t)=a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+...+a_{nn}x_n(t)+f_n(t)\end{cases} \tag{5.6}$$

$*$ Condiciones iniciales $x_1(0^+)=x_1^0,\ x_2(0^+)=x_2^0,\ \ldots,\ x_n(0^+)=x_n^0$.

Los datos son los coeficientes a_{ij} de la matriz del sistema (estos coeficientes son, por lo general, reales), las condiciones iniciales $x_1^0,x_2^0,...,x_n^0$ y las funciones objeto $f_1,f_2,...,f_n$. Se busca como solución un vector de funciones objeto $x_i:\Re\longrightarrow\mathbb{C}$ de clase C^1 tales que sus derivadas sean, también, funciones objeto. Este tipo de problemas ya se estudiaron en Álgebra II, pero volvemos a presentarlos para ilustrar otra aplicación de la Transformación de Laplace. Aplicando esta transformación en cada ecuación del sistema y utilizando las condiciones iniciales se obtiene

$$\begin{cases}(1)\ sX_1(s)-x_1^0=a_{11}X_1(s)+a_{12}X_2(s)+...+a_{1n}X_n(s)+F_1(s)\\(2)\ sX_2(s)-x_2^0=a_{21}X_1(s)+a_{22}X_2(s)+...+a_{2n}X_n(s)+F_2(s)\\...\\(n)\ sX_n(s)-x_n^0=a_{n1}X_1(s)+a_{n2}X_2(s)+...+a_{nn}X_n(s)+F_n(s)\end{cases}$$

Despejando:

$$\begin{cases}(1)\quad (s-a_{11})X_1(s)-a_{12}X_2(s)-a_{13}X_3(s)-...-a_{1n}X_n(s)=x_1^0+F_1(s)\\(2)-a_{21}X_1(s)+(s-a_{22})X_2(s)-a_{23}X_3(s)-...-a_{2n}X_n(s)=x_2^0+F_2(s)\\...\\(n)-a_{n1}X_1(s)-a_{n2}X_2(s)-a_{n3}X_3(s)-...+(s-a_{nn})X_n(s)=x_n^0+F_n(s)\end{cases}$$

Con la notación matricial obvia, este sistema es:

$$(sI-A)\vec{X}(s)=\vec{X}_0+\vec{F}(s) \tag{5.7}$$

Por lo tanto, si s no es un autovalor de la matriz A, la matriz sI - A es inversible y por lo tanto tenemos las transformadas de Laplace de las soluciones del sistema:

$$\vec{X}(s) = (sI - A)^{-1}[\vec{X}_0 + \vec{F}(s)] \tag{5.8}$$

Esta expresión es válida para todo s cuya parte real es mayor que las abscisas de convergencia de $f_1, f_2, ..., f_n$ y mayor, también, que las partes reales de los autovalores de A. Los coeficientes de la matriz $(sI - A)^{-1}$ son de la forma $R_{ij}(s) = \dfrac{Q_{ij}(s)}{\det(sI - A)}$, donde cada $Q_{ij}(s)$ es un polinomio de grado menor que n, mientras que el polinomio característico $det(sI\text{-}A)$ es de grado n. Por lo tanto, las funciones racionales $R_{ij}(s)$ son transformadas de Laplace de funciones objeto $r_{ij}(t)$ (ver Teorema de la Imagen Racional). En componentes, (5.8) es

$$\begin{cases} (1)\ X_1(s) = R_{11}(s)(x_1^0 + F_1(s)) + R_{12}(s)(x_2^0 + F_2(s)) + ... + R_{1n}(s)(x_n^0 + F_n(s)) \\ (2)\ X_2(s) = R_{21}(s)(x_1^0 + F_1(s)) + R_{22}(s)(x_2^0 + F_2(s)) + ... + R_{2n}(s)(x_n^0 + F_n(s)) \\ ... \\ (n)\ X_n(s) = R_{n1}(s)(x_1^0 + F_1(s)) + R_{n2}(s)(x_2^0 + F_2(s)) + ... + R_{nn}(s)(x_n^0 + F_n(s)) \end{cases}$$

La solución es, entonces, de la forma:

$$\begin{cases} (1)\ x_1(t) = r_{11}(t)x_1^0 + (r_{11} * f_1)(t) + r_{12}(t)x_2^0 + (r_{12} * f)_2(t) + ... + r_{1n}(t)x_n^0 + (r_{1n} * f_1)(t) \\ (2)\ x_2(t) = r_{21}(t)x_1^0 + (r_{21} * f_1)(t) + r_{22}(t)x_2^0 + (r_{22} * f_2)(t) + ... + r_{2n}(t)x_n^0 + (r_{2n} * f_2)(t) \\ ... \\ (n)\ x_n(t) = r_{n1}(t)x_1^0 + (r_{n1} * f_1)(t) + r_{n2}(t)x_2^0 + (r_{n2} * f_2)(t) + ... + r_{nn}(t)x_n^0 + (r_{nn} * f_n)(t) \end{cases}$$

Con una notación matricial bastante natural, podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & ... & r_{1n}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) & ... & r_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ r_{n1}(t) & r_{n2}(t) & ... & r_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ ... \\ x_n^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & ... & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & ... & r_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ r_{n1} & r_{n2} & ... & r_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ ... \\ f_n \end{bmatrix} (t)$$

Damos por cerrada esta pequeña lista con una aclaración innecesaria pero conveniente: no se trata de una lista exhaustiva. Usted mismo puede pensar en, por ejemplo, sistemas de ecuaciones diferenciales de orden mayor con términos convolucionales como en el problema *II*. Creemos que para una primera aproximación al tema, por ahora es suficiente.

§6. LA FUNCIÓN GAMMA DE EULER

Iniciamos un momento cultural: homenaje y celebración al mismo tiempo, de una de las mentes más brillantes de la toda la historia.

Para cada número real $\lambda \geq 0$, sea $f_\lambda : \Re \to \Re$ tal que

$$f_\lambda(t) = t^\lambda H(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ t^\lambda & si \quad t \geq 0 \end{cases}. \tag{6.1}$$

Cada una de estas funciones es una función objeto cuya transformada de Laplace es

$$Ⱡ(f_\lambda)(s) = F_\lambda(s) = \int_0^{+\infty} t^\lambda e^{-st} dt \tag{6.2}$$

con abscisa de convergencia $\sigma_\lambda \leq 0$, pues la integral converge si $\text{Re}(s) > 0$. Ahora tenemos, para todo $\underline{t > 0}$:

$$f_{\lambda+1}'(t) = (\lambda+1)t^\lambda = (\lambda+1) f_\lambda(t) \tag{6.3}$$

Por lo tanto:

$$sF_{\lambda+1}(s) - f_{\lambda+1}(0^+) = Ⱡ(f_{\lambda+1}')(s) \overset{(6.3)}{=} (\lambda+1)Ⱡ(f_\lambda)(s) = (\lambda+1)F_\lambda(s)$$

Dado que para todo $\lambda + 1 > 0$ es $f_{\lambda+1}(t) = \underset{t \to 0+}{Lim} t^{\lambda+1} = 0$, resulta

$$sF_{\lambda+1}(s) = (\lambda+1)F_\lambda(s) \tag{6.4}$$

$$[\ \text{Re}(s) > 0\ , \quad \lambda \geq 0\ ]$$

Entonces, aplicando recurrentemente esta identidad:

$$F_\lambda(s) = \frac{1}{s}\lambda F_{\lambda-1}(s) = \frac{1}{s^2}\lambda(\lambda-1)\lambda F_{\lambda-2}(s) = \frac{1}{s^3}\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)F_{\lambda-3}(s) = ...$$

Obtenemos**:**

$$F_\lambda(s) = \frac{1}{s^{k+1}}\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-k)F_{\lambda-k-1}(s) \tag{6.5}$$

$$[\ \mathrm{Re}(s) > 0\ ,\ \ k \in \mathbb{N}\ \ ,\ \lambda - k - 1 \geq 0\ \ ]$$

En particular, para $s = 1$:

$$F_\lambda(1) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-k)F_{\lambda-k-1}(1) \tag{6.6}$$

$$[\ \mathrm{Re}(s) > 0\ ,\ \ k \in \mathbb{N}\ \ ,\ \lambda - k - 1 \geq 0\ \ ]$$

Si elegimos $\lambda = n \in \mathbb{N}$, y $k = n$ -1:

$$F_n(1) = n!F_0(1) = n! \tag{6.7}$$

Pues $F_0(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$. Es decir: la función $\lambda \mapsto F_\lambda(1)$ extiende la función factorial $n \mapsto n!$ a valores no enteros $\lambda \in [0,+\infty)$. La función gamma de Euler es la función

$$\lambda \mapsto \Gamma(\lambda) = F_{\lambda-1}(1) = \int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}e^{-t}dt \tag{6.8}$$

En principio esta función está definida en la semirrecta real $[1,+\infty)$, pero para λ real tal que $0 < \lambda < 1$, se puede verificar fácilmente que la integral (6.8) converge. Además, veremos más adelante que puede extenderse a todos los reales negativos no enteros (ver Observación 6.1 en la página 28). De todos modos, mencionemos que la función Γ puede extenderse a una función holomorfa en todo el plano complejo menos los puntos 0, -1, -2, -3, …., donde tiene polos simples. Esta y muchas propiedades más de esta función pueden consultarse en cualquier texto o manual sobre «funciones especiales», como por ejemplo el clásico *Handbook of Mathematical Functions*, de Milton Abramowitz e Irene A. Stegun [Applied Mathematic Series * 55. National Bureau of Standards. United States Department of Commerce. La novena edición es de 1970]. En particular, la extensión holomorfa de Γ fue utilizada por Riemann en sus profundos trabajos en teoría de números.

Algunas propiedades básicas de la función gamma:

(1) $\Gamma(1)=1$ y para todo entero positivo n: $\Gamma(n+1)=n!$

Dem: Se deduce de (6.7) ■

(2) Para todo $\lambda > 0$: $\Gamma(\lambda+1)=\lambda\Gamma(\lambda)$ (Ver Observación 6.1 abajo)

Dem: Se deduce de (6.4) o bien se prueba directamente integrando por partes:

$$\Gamma(\lambda+1)=\int_0^{+\infty} t^{\lambda}e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}\left\{\tfrac{d}{dt}[-t^{\lambda}e^{-t}]+\lambda t^{\lambda-1}e^{-t}\right\}dt=$$

$$=[-t^{\lambda}e^{-t}]_{t\to 0+}^{t\to+\infty}+\lambda\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}e^{-t}dt=0+\lambda\Gamma(\lambda) \qquad ■$$

(3) $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ y para todo entero positivo n: $\Gamma(\frac{2n+1}{2})=\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3.1}{2^n}\sqrt{\pi}$ **.**

Dem: $\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt \overset{x=\sqrt{t}}{=} \int_0^{+\infty}\frac{1}{x}e^{-x^2}2xdx=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$. Ahora, de la propiedad anterior, tenemos $\Gamma(\frac{3}{2})=\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Nuevamente, $\Gamma(\frac{5}{2})=\Gamma(\frac{3}{2}+1)=$ $=\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$. Se puede completar la prueba por inducción. ■

***Observación* 6.1:** la propiedad (2) permite extender la función Γ a los reales negativos no enteros. Por ejemplo, $\sqrt{\pi}=\Gamma(\frac{1}{2})=\Gamma(1-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2})$, es decir: $\Gamma(-\frac{1}{2})=-2\sqrt{\pi}$.

(4) Para cada par de números reales positivos λ, μ se verifica

$$\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}=\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}dx \qquad (6.9)$$

***Nota* 6.1**: La función de dos variables definida por la expresión del segundo miembro se llama *función Beta* o *integral euleriana de primera especie*, y se la indica con la letra beta (era previsible….), es decir: $\beta(\lambda,\mu)=\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}dx$. Mediante el cambio de variable $x=sen(\theta)^2$ se tiene $\beta(\lambda,\mu)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(\theta)^{2\lambda-1}\cos(\theta)^{2\lambda-1}d\theta$, otra expresión clásica de esta función.

Dem: $\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)=\left(\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}e^{-t}dt\right)\left(\int_0^{+\infty}\theta^{\mu-1}e^{-\theta}d\theta\right)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}\theta^{\mu-1}e^{-(t+\theta)}dtd\theta=(*)$

Cambio de variables en la integral doble:

$$\begin{cases} t=u(1-v)\\ \theta=uv\end{cases}\qquad \begin{cases} u=t+\theta\\ v=\dfrac{\theta}{t+\theta}\end{cases}\qquad \begin{cases} 0<u<+\infty\\ 0<v<1\end{cases}\qquad \textit{Jacobiano}:\ \det\begin{bmatrix}1-v & -u\\ v & u\end{bmatrix}=u$$

$$(*)=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^1 [u(1-v)]^{\lambda-1}[uv]^{\mu-1}e^{-u}dv\right)udu=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^1 (1-v)^{\lambda-1}v^{\mu-1}dv\right)u^{\lambda-1}u^{\mu-1}ue^{-u}du=$$

$$=\left(\int_0^1 (1-v)^{\lambda-1}v^{\mu-1}dv\right)\left(\int_0^{+\infty} u^{\lambda+\mu-1}e^{-u}du\right)=\left(\int_0^1 (1-v)^{\lambda-1}v^{\mu-1}dv\right)\Gamma(\lambda+\mu)\overset{v=1-x}{=}$$

$$=\left(\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}dx\right)\Gamma(\lambda+\mu)\qquad\blacksquare$$

La función gamma tiene muchas propiedades sorprendentes. La siguiente es una pequeña lista. No se pretende que usted las demuestre, desde luego. Simplemente obsérvelas.

(i) (*Euler*): $\Gamma(\lambda)=\underset{n\to+\infty}{Lim}\dfrac{n^{\lambda}n!}{\lambda(\lambda+1)...(\lambda+n)}$

(ii) (*Stirling*) : $\underset{\lambda\to+\infty}{Lim}\dfrac{\Gamma(\lambda+1)e^{\lambda}}{\lambda^{\lambda}\sqrt{\lambda}}=\sqrt{2\pi}$

(iii) (*Riemann*): $\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)=\dfrac{\pi}{sen(\lambda\pi)}$

(iv) (*Fórmula de duplicación*): $\Gamma(2\lambda)=\dfrac{2^{2\lambda-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})$

(v) $\dfrac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}-\gamma$, donde $\gamma=\underset{n\to+\infty}{Lim}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}-\ln(n)\right)$ se denomina *constante de Euler* o constante de *Euler-Mascheroni*. Su valor aproximado es 0.577215 y hasta hoy se desconoce si es racional o irracional, siendo éste uno de los problemas abiertos más importantes de la matemática.

▒◊▼▲♠♫▒◊▼▲♠♫▒◊▼▲♠♫▒◊▼▲♠♫▒◊▼▲♠♫▒◊▼▲♠♫▒◊▼▲♠♫▒