ANÁLISIS MATEMÁTICO III – PRIMER CUATRIMESTRE 2021
EXAMEN INTEGRADOR – CUARTA FECHA –27/08/2021
RESOLUCIÓN

---

1) Demostrar la convergencia de la integral $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x)}{1+x^3}dx$ y explicar en detalle un método para calcularla, usando variable compleja.

Resolución: Para cada par de números reales ε y b tales que $0<\varepsilon<1<b$:

$$\int_\varepsilon^b\left|\frac{\ln(x)}{1+x^3}\right|dx=\int_\varepsilon^1\frac{|\ln(x)|}{1+x^3}dx+\int_1^b\frac{|\ln(x)|dx}{1+x^3}=\int_\varepsilon^1\frac{-\ln(x)}{1+x^3}dx+\int_1^b\frac{\ln(x)dx}{1+x^3}$$

Ahora, por separado:

(a) $\int_\varepsilon^1\frac{-\ln(x)}{1+x^3}dx<\int_\varepsilon^1[-\ln(x)]dx=[x-x\ln(x)]_{x=\varepsilon}^{x=1}=1-\varepsilon+\varepsilon\ln(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{}1$

(b) $\int_1^b\frac{\ln(x)}{1+x^3}dx<\int_1^b\frac{x}{1+x^3}dx<\int_1^b\frac{1}{x^2}dx\xrightarrow[b\to+\infty]{}1$

Hemos probado que la integral converge absolutamente. Para su cálculo podemos utilizar la función $f(z)=\frac{Log(z)}{1+z^3}$, donde Log es el logaritmo principal, y - para cada par de reales ε y R tales que $0<\varepsilon<1<R$ - el circuito simple positivo

$$\Gamma(\varepsilon,R)=I(\varepsilon,R)\cup C(R)\cup J(\varepsilon,R)\cup C(\varepsilon) \qquad (1.1)$$

indicados en la figura, donde, para cada par de reales ε y R tales que $0<\varepsilon<1<R$:

$$I(\varepsilon,R)=\{x\in\Re:\varepsilon\le x\le R\}$$

$$C(R)=\{Re^{i\theta}:0\le\theta\le\tfrac{2\pi}{3}\}$$

$$J(\varepsilon,R)^{(-)}=\left\{te^{\frac{2\pi}{3}i}:\varepsilon\le t\le R\right\}$$

$$C(\varepsilon)^{(-)}=\{\varepsilon e^{i\theta}:0\le\theta\le\tfrac{2\pi}{3}\}$$

(ver figura a continuación).

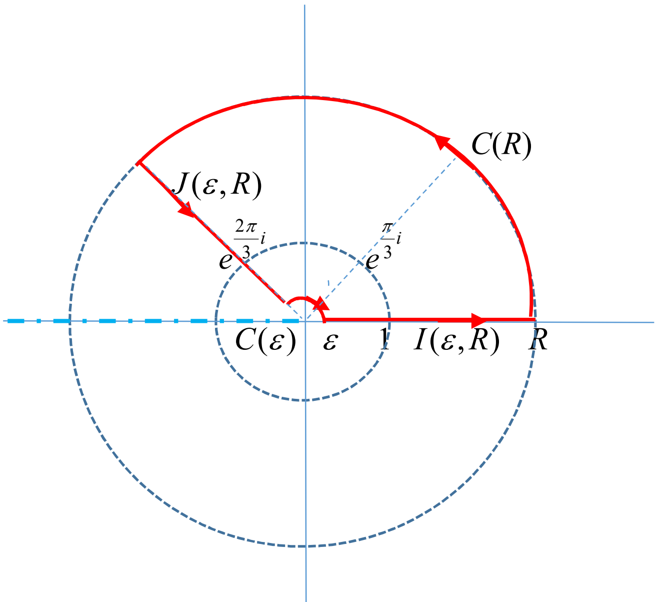

Fig. 1

En el Ejemplo 3 (página 33) de los Apuntes sobre integrales impropias hemos utilizado un circuito similar para el calcular

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \qquad (1.2)$$

La función f es holomorfa en $\mathbb{C}-\left(\{x\in\Re : x\leq 0\}\cup\left\{e^{\frac{\pi}{3}i},-1,e^{-\frac{\pi}{3}i}\right\}\right)$, pues sus singularidades son los puntos del corte del logaritmo principal y las tres raíces cúbicas de -1. En el recinto interior de cada circuito (1.1), la única singularidad es $z_0=e^{\frac{\pi}{3}i}$, que es un polo simple con residuo

$$\underset{z\to z_0}{Lim}(z-z_0)f(z)=Log(z_0)\underset{z\to z_0}{Lim}\frac{z-z_0}{1+z^3}=Log(z_0)\frac{1}{3z_0^2}=\frac{\pi}{3}i\frac{1}{3e^{\frac{2\pi}{3}i}}=\frac{\pi e^{-\frac{2\pi}{3}i}}{9}i$$

Por lo tanto, para cada uno de los circuitos (1.1) tenemos:

$$\oint_{\Gamma(\varepsilon,R)}f(z)dz=2\pi i Res(f,z_0)=-\frac{2\pi^2 e^{-\frac{2\pi}{3}i}}{9} \qquad (1.3)$$

Es decir:

$$\int_{I(\varepsilon,R)} f(z)dz + \int_{C(R)} f(z)dz + \int_{J(\varepsilon,R)} f(z)dz + \int_{C(\varepsilon)} f(z)dz = -\frac{2\pi^2 e^{-\frac{2\pi}{3}i}}{9} \qquad (1.4)$$

Analicemos el comportamiento de las integrales del primer miembro cuando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ y $R \longrightarrow +\infty$ (el segundo ni se mueve….):

(a) $\int_{I(\varepsilon,R)} f(z)dz = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln(x)}{1+x^3}dx \xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0+} \int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3}dx$ (en los reales positivos, el logaritmo principal coincide con el logaritmo real)

(b) $\int_{C(R)} f(z)dz = \int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{Log(Re^{i\theta})}{1+R^3e^{3i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta = \int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\ln(R)+i\theta}{1+R^3e^{3i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta$: veamos que esta integral tiende a 0 cuando $R \longrightarrow +\infty$:

$$\left|\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\ln(R)+i\theta}{1+R^3e^{3i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta\right| \leq \int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left|\frac{\ln(R)+i\theta}{1+R^3e^{3i\theta}} iRe^{i\theta}\right| d\theta = R\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left|\frac{\ln(R)+i\theta}{1+R^3e^{3i\theta}}\right| d\theta \leq R\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{|\ln(R)|+\theta}{|1+R^3e^{3i\theta}|}d\theta \leq$$

$$\leq R\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{|\ln(R)|+\frac{2\pi}{3}}{|1+R^3e^{3i\theta}|}d\theta = R[\ln(R)+\tfrac{2\pi}{3}]\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\theta}{|1+R^3e^{3i\theta}|} \overset{R>1}{\leq} R[\ln(R)+\tfrac{2\pi}{3}]\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\theta}{R^3-1} =$$

$$= \frac{R[\ln(R)+\frac{2\pi}{3}]}{R^3-1}\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} d\theta = \frac{R[\ln(R)+\frac{2\pi}{3}]}{R^3-1}\frac{2\pi}{3} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

(c) $\int_{J(\varepsilon,R)} f(z)dz = -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{Log(te^{\frac{2\pi}{3}i})}{1+t^3e^{2\pi i}} e^{\frac{2\pi}{3}i}dt = -e^{\frac{2\pi}{3}i}\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln(t)+i\frac{2\pi}{3}}{1+t^3}dt =$

$$= -e^{\frac{2\pi}{3}i}\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln(t)}{1+t^3}dt - \frac{2\pi e^{\frac{2\pi}{3}i}}{3} i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{1+t^3}dt \xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0+} -e^{\frac{2\pi}{3}i}\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^3}dt - \frac{2\pi e^{\frac{2\pi}{3}i}}{3} i\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}dt$$

Esta última integral es exactamente (1.2), por lo tanto

$$\int_{J(\varepsilon,R)} f(z)dz \xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0+} -e^{\frac{2\pi}{3}i}\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^3}dt - \frac{2\pi e^{\frac{2\pi}{3}i}}{3} i\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = -e^{\frac{2\pi}{3}i}\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^3}dt - \frac{4\pi^2 e^{\frac{2\pi}{3}i}}{9\sqrt{3}} i$$

(d) $\int_{C(\varepsilon)} f(z)dz = \int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{Log(\varepsilon e^{i\theta})}{1+\varepsilon^3e^{3i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta}d\theta = i\varepsilon\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\ln(\varepsilon)+i\theta}{1+\varepsilon^3e^{3i\theta}} e^{i\theta}d\theta = i\varepsilon\ln(\varepsilon)\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{e^{i\theta}}{1+\varepsilon^3e^{3i\theta}}d\theta\ +$

$+\,i\varepsilon\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{i\theta e^{i\theta}}{1+\varepsilon^3e^{3i\theta}}d\theta$: veamos que esta integral tiende a 0 cuando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$:

$$\left|\int_{C(\varepsilon)} f(z)dz\right| = \left| i\varepsilon\ln(\varepsilon)\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{e^{i\theta}}{1+\varepsilon^3 e^{3i\theta}}d\theta + i\varepsilon\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{i\theta e^{i\theta}}{1+\varepsilon^3 e^{3i\theta}}d\theta\right| \le \varepsilon|\ln(\varepsilon)|\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\theta}{\left|1+\varepsilon^3 e^{3i\theta}\right|} +$$

$$+\varepsilon\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\theta d\theta}{\left|1+\varepsilon^3 e^{3i\theta}\right|} \overset{0<\varepsilon<1}{\le} \varepsilon|\ln(\varepsilon)|\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\theta}{1-\varepsilon^3} + \varepsilon\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\theta d\theta}{1-\varepsilon^3} = \varepsilon|\ln(\varepsilon)|\left(\frac{1}{1-\varepsilon^3}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} d\theta + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^3}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \theta d\theta\right)$$

$\longrightarrow 0^+$ cuando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ pues $\underset{\varepsilon\to 0+}{Lim}\,\varepsilon|\ln(\varepsilon)| = 0$

En definitiva, tomando límites en (1.4) para $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ y $R \longrightarrow +\infty$ nos queda:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3}dx - e^{\frac{2\pi}{3}i}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^3}dt - \frac{4\pi^2 e^{\frac{2\pi}{3}i}}{9\sqrt{3}}i = -\frac{2\pi^2 e^{-\frac{2\pi}{3}i}}{9}$$

es decir

$$(1-e^{\frac{2\pi}{3}i})\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3}dx = -\frac{2\pi^2 e^{-\frac{2\pi}{3}i}}{9} + \frac{4\pi^2 e^{\frac{2\pi}{3}i}}{9\sqrt{3}}i = \frac{2\pi^2}{9}\left(\frac{2i}{\sqrt{3}}e^{\frac{2\pi}{3}i} - e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)$$

Antes de despejar la integral, multipliquemos el primer y tercer miembro por $e^{-\frac{\pi}{3}i}$:

$$(e^{-\frac{\pi}{3}i} - e^{\frac{\pi}{3}i})\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3}dx = \frac{2\pi^2}{9}\left(\frac{2i}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{3}i} - e^{-\pi i}\right)$$

Ahora bien: $e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $e^{-\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, por lo tanto

$$-i\sqrt{3}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3}dx = \frac{2\pi^2}{9}\left(\frac{2i}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + 1\right) = \frac{2\pi^2}{9}\left(\frac{i}{\sqrt{3}} - 1 + 1\right) = \frac{2\pi^2}{9\sqrt{3}}i$$

Finalmente, entonces:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3}dx = -\frac{2\pi^2}{27}$$

Observación: Hemos hecho toda la cuenta, lo que no se pide en el enunciado

---

2) Sea $f:[0,1]\longrightarrow\Re$ tal que $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+1 & si \quad 0\le x<\frac{1}{2}\\ x+2 & si \quad \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$ y sea *S* la serie de Fourier de senos de *f* en [0,1]. *i*) Obtener, si existen, todos los valores de *α* para los que *f* y *S* coinciden en todo el intervalo (0,1); *ii*) analizar si para algún valor de *α S* converge uniformemente a *f* en [0,1].

Resolución: La serie de Fourier de senos de *f* en [0, 1] es $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(n\pi x)$, donde $b_n=2\int_0^1 f(t)sen(n\pi t)dt$, por lo tanto es la serie de Fourier de la extensión 2-periódica impar de *f*. Indiquemos con $\widetilde{f}$ esta extensión. Cualquiera sea el valor de *α*, $\widetilde{f}$ satisface las condiciones de Dirichlet en todos los puntos de la recta y por lo tanto para cada $x\in\Re$ es $S(x)=\frac{1}{2}[\widetilde{f}(x^-)+\widetilde{f}(x^+)]$. En particular:

$$S(0)=\tfrac{1}{2}[\widetilde{f}(0^-)+\widetilde{f}(0^+)]=\tfrac{1}{2}[-1+1]=0$$

$$S(x)=\tfrac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]=f(x)=\alpha x^2+1 \qquad \text{si} \quad 0<x<\tfrac{1}{2}$$

$$S(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}[f(\tfrac{1}{2}^-)+f(\tfrac{1}{2}^+)]=\tfrac{1}{2}[\alpha\tfrac{1}{4}+1+\tfrac{1}{2}+2]=\frac{\alpha+14}{8}$$

$$S(x)=\tfrac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]=x+2 \qquad \text{si} \quad \tfrac{1}{2}<x<1$$

$$S(1)=\tfrac{1}{2}[\widetilde{f}(1^-)+\widetilde{f}(1^+)]=\tfrac{1}{2}[3-3]=0$$

(No era necesario verificar la anulación de $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(n\pi x)$ en *x* = 0 y en *x* = 1…).

Entonces:

(*i*) $S(x)=f(x)$ para todo $x\in(0,1)$ sii $\frac{\alpha+14}{8}=f(\frac{1}{2})=\frac{5}{2}$, es decir, sii *α* = 6.

(*ii*) Si la serie *S* fuera uniformemente convergente en [0,1], sería uniformemente convergente a $\widetilde{f}$ en [-1,1]. Pero esto es absurdo, pues el límite uniforme de funciones continuas es continua y $\widetilde{f}$ no lo es. Por lo tanto, no existe valor de *α* para el cual *S* sea uniformemente convergente en [0,1].

(Se recomienda hacer algún gráfico de *f* y de $\widetilde{f}$)

---

3) Describir un problema físico modelable mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (1)\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi \ , t > 0 \\ (2)\ u(0,t) = 10 & , \quad t \geq 0 \\ (3)\ u(\pi,t) = 15 & , \quad t \geq 0 \\ (4)\ u(x,0) = h(x) & , \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Resolverlo, introduciendo las hipótesis necesarias sobre *h*.

Resolución: Se trata del modelo clásico de difusión del calor en una varilla de longitud finita con extremos a temperatura constante. Podemos simplificar el problema definiendo la función

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{5}{\pi}x - 10$$

y planteando el problema "más homogéneo":

$$\begin{cases} (1)'\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi \ , t > 0 \\ (2)'\ v(0,t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ (3)'\ v(\pi,t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ (4)'\ v(x,0) = h(x) - \dfrac{5}{\pi}x - 10 & , \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Para cualquier sucesión $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reales convergente a 0 y para cualquier $t > 0$, la serie

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nx) e^{-n^2 t}$$

es maravillosamente convergente y verifica las condiciones (1)', (2)' y (3)'. Respecto de la última, la (4)', debe verificarse la igualdad

$$h(x) - \frac{5}{\pi}x - 10 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nx) \qquad (*)$$

para todo $x \in [0,\pi]$. Para esto, es necesario que los coeficientes $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ de la serie sean los coeficientes de Fourier de la extensión 2π – periódica impar $\widetilde{f}$ de la función $f(x) = h(x) - \frac{5}{\pi}x - 10$, $0 \leq x \leq \pi$, y en este caso, para que valga la igualdad (*) en todos los puntos de $[0,\pi]$ f debe satisfacer las condiciones de Dirichlet y tomar el valor promedio de los saltos en los puntos de discontinuidad (éstas son las condiciones para *h*).

Es decir: con estas condiciones y con los coeficientes

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overbrace{\widetilde{f}(\theta)sen(n\theta)}^{par}d\theta = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\widetilde{f}(\theta)sen(n\theta)d\theta = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[h(\theta)-\frac{5}{\pi}\theta-10\right]sen(n\theta)d\theta$$

obtenemos la solución:

$$u(x,t) = \frac{5x}{\pi}+10+\sum_{n=1}^{\infty}b_n sen(nx)e^{-n^2 t}$$

---

4) Determinar si existe una función $f:[0,+\infty)\longrightarrow\Re$ tal que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx = \begin{cases} 1-e^{-(\omega^2-4)} & si \quad |\omega|<2 \\ 0 & si \quad |\omega|\geq 2 \end{cases}$$

y obtener $\int_0^{+\infty} u(x,t)\cos(\omega x)dx$ sabiendo que $\begin{cases} (1)\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0<x<+\infty\ , t>0 \\ (2)\ u(x,0) = f(x)\ , & x\geq 0 \\ (3)\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 & , \quad t\geq 0 \end{cases}$

Resolución: Este ejercicio puede resolverse mediante la transformación de Fourier o bien mediante la transformación de Fourier-coseno. En esta resolución elegimos la primera.

La función $h:\Re\longrightarrow\Re$ tal que $h(\omega) = \begin{cases} 1-e^{-(\omega^2-4)} & si \quad |\omega|<2 \\ 0 & si \quad |\omega|\geq 2 \end{cases}$ es par (y además, es continua y absolutamente integrable en la recta). Por lo tanto si existe una función $f:[0,+\infty)\longrightarrow\Re$ que verifica las condiciones del enunciado, considerando su extensión par $\widetilde{f}:(-\infty,+\infty)\longrightarrow\Re$ tenemos

$$h(\omega) = \int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}(x)\cos(\omega x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}(x)\cos(\omega x)dx - \frac{i}{2}\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}(x)sen(\omega x)dx}^{=0} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}(x)e^{-i\omega x}dx$$

Es decir: $2h$ es la transformada de Fourier de $\widetilde{f}$, por lo tanto, para encontrar una f que verifique las condiciones del enunciado, podemos intentar con el Teorema de Inversión:

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{2\pi}vp\int_{-\infty}^{+\infty}2h(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-2}^{+2}[1-e^{-(\omega^2-4)}]e^{i\omega x}d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-2}^{+2}e^{i\omega x}d\omega-\frac{e^4}{\pi}\int_{-2}^{+2}e^{-\omega^2}e^{i\omega x}d\omega=\frac{2}{\pi}\frac{sen(2x)}{x}-\frac{e^4}{\pi}\int_{-2}^{+2}e^{-\omega^2}e^{i\omega x}d\omega=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{sen(2x)}{x}-\frac{e^4}{\pi}\left[\int_{-2}^{+2}e^{-\omega^2}\cos(\omega x)d\omega+\overbrace{i\int_{-2}^{+2}e^{-\omega^2}sen(\omega x)d\omega}^{=0}\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{sen(2x)}{x}-\frac{e^4}{\pi}\int_{-2}^{+2}e^{-\omega^2}\cos(\omega x)d\omega$$

Esta función es, efectivamente, una función par que toma valores reales. Por lo tanto, una de las funciones posibles que verifican las condiciones del enunciado es

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\frac{sen(2x)}{x}-\frac{e^4}{\pi}\int_{-2}^{+2}e^{-\omega^2}\cos(\omega x)d\omega \quad , \quad x\geq 0$$

Observación: Nos falta probar, en realidad, la convergencia de la integral

$$\int_{0}^{+\infty}f(x)\cos(\omega x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{sen(2x)\cos(\omega x)dx}{x}-\frac{e^4}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-2}^{+2}e^{-\theta^2}\cos(\theta x)d\theta\right]\cos(\omega x)dx$$

para cada $\omega\in\Re$. Para esta comprobación puede aplicarse el Teorema de Inversión a la función *h*, que verifica las condiciones de Dirichlet y cuya transformada de Fourier es $2\pi\tilde{f}$ (tener presente que $\tilde{f}$ es par). Con este razonamiento logramos garantizar la convergencia de $\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(t)\cos(\omega t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(t)e^{i\omega t}dt$ en valor principal; pero esto implica, precisamente, la convergencia de $\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos(\omega t)dt=\frac{1}{2}vp\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(t)\cos(\omega t)dt$. (*Fin de la observación*)

Desde luego, esta f no es la única que satisface las condiciones requeridas: cualquier otra función $g:[0,+\infty)\longrightarrow\Re$ que difiera de *f* en una cantidad finita de puntos, por ejemplo, verifica $\int_{0}^{+\infty}g(x)\cos(\omega x)dx=\int_{0}^{+\infty}f(x)\cos(\omega x)dx$.

Finalmente, para calcular $\int_{0}^{+\infty}u(x,t)\cos(\omega x)dx$, podemos considerar la extensión par

$$v:(-\infty,+\infty)\times[0,+\infty)\longrightarrow\Re$$

de *u* respecto de la variable *x* (es decir: $v(-x,t)=v(x,t)=u(x,t)$ para todo $x\geq 0$ y todo $t\geq 0$). Asumiendo que *v* es de clase C^1 (vamos a asumir mucho más), resulta que $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ es impar (respecto de *x*) y por lo tanto $\dfrac{\partial v}{\partial x}(0,t)=0$ para todo $t\geq 0$ (es decir: la condición (3) ya se verifica). Ahora, el resto es clásico y muy conocido. Lo expondremos brevemente, sin explicitar las justificaciones necesarias. Aplicando la transformación de Fourier en $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\dfrac{\partial v}{\partial t}$ (respecto de la primera variable) obtenemos la ecuación $-\omega^2\hat{v}(\omega,t)=\dfrac{\partial\hat{v}(\omega,t)}{\partial t}$, de donde se deduce que $\hat{v}(\omega,t)=k(\omega)e^{-\omega^2 t}$ para alguna función *k*. Recuperamos *v* mediante el Teorema de Inversión:

$$v(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}k(\omega)e^{-\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega$$

Para $t = 0$: $v(x,0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}k(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\tilde{f}(x)$ (= extensión par de *f*). Por lo tanto, *k* es la transformada de Fourier de $\tilde{f}$, es decir: la función 2*h*, como hemos visto anteriormente. Por lo tanto:

$$\hat{v}(\omega,t)=k(\omega)e^{-\omega^2 t}=2h(\omega)e^{-\omega^2 t}$$

y obtenemos, finalmente:

$$2h(\omega)e^{-\omega^2 t}=\hat{v}(\omega,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}v(x,t)e^{-i\omega x}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\overbrace{v(x,t)\cos(\omega x)}^{par}dx-i\int_{-\infty}^{+\infty}\overbrace{v(x,t)sen(\omega x)}^{impar}dx=$$

$$=2\int_{0}^{+\infty}v(x,t)\cos(\omega x)dx=2\int_{0}^{+\infty}u(x,t)\cos(\omega x)dx=$$

Por lo tanto,

$$\int_{0}^{+\infty}u(x,t)\cos(\omega x)dx=h(\omega)e^{-\omega^2 t}=\begin{cases}[1-e^{-(\omega^2-4)}]e^{-\omega^2 t} & si\quad |\omega|<2\\ 0 & si\quad |\omega|\geq 2\end{cases}$$

---

5) Estudiar para qué valores de *s* es válida siguiente igualdad:

$$\mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f_n\right)(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\mathcal{L}(f_n)(s) \qquad (*)$$

donde para cada $n \geq 0$ y cada $t \in \Re$: $f_n(t) = t^n H(t)$, siendo H la función de Heaviside.

Resolución: Para cada $t \geq 0$ es $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f_n(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^n = e^{-t}$, (y es = 0 para cada t < 0) por lo tanto: $\mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f_n\right)(s)=\frac{1}{s+1}$, con abscisa de convergencia -1. Por otra parte, para cada $n \geq 0$, $\mathcal{L}(f_n)(s)=\frac{n!}{s^{n+1}}$, con abscisa de convergencia 0. Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\mathcal{L}(f_n)(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{n!}{s^{n+1}}=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{s}\right)^n \overset{(**)}{=} \frac{1}{s}\frac{1}{1+\frac{1}{s}}=\frac{1}{s+1}$$

donde la igualdad (**) es válida sii $|s|>1$ (se trata de una serie geométrica). Por lo tanto, las condiciones de la validez de la igualdad (lo que incluye la existencia de ambos miembros) son $\mathrm{Re}(s)>0$ y $|s|>1$ (la primera implica Re(*s*) > -1, condición de existencia del miembro izquierdo de (*)).
