Apellido y Nombres: ....,,,,,...
DNI: .... Padrón: .... Código Asignatura: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....
Correo electrónico: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Tercera fecha. 25 de febrero de 2022.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Determinar para qué valores de $r \geqslant 0$, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^r}{1+x^3}\, dx$ es convergente.

Calcular la integral para el caso $r = 1/2$.

Ejercicio 2. Comprobar que para todo a y b reales:

$$u(x,y) = a\,\mathrm{sen}(b \ln \sqrt{x^2+y^2}) \cos(b \mathrm{Arg}(x+iy))$$

es armónica. Deducir la solución u_p del problema del potencial eléctrico en el recinto $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2\}$ con condiciones de contorno $u_p(x,y) = 0$ sobre la circunferencia interior y $u_p(x,y) = \cos(\mathrm{Arg(x+iy)}/4)$ sobre la circunferencia exterior. Determinar, si existen, los puntos de R donde $u_p(x,y) = 1$

Ejercicio 3. Siendo $c_n = \alpha_n + i\beta_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ y $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ la serie exponencial de Fourier en $[-\pi, \pi]$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} & \text{si} \quad -\pi \leqslant x < 0 \\ \frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases},$$

calcular α_0, β_0, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$, y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$.

Ejercicio 4. Resolver la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u_t(x,0) = 0 & -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2} & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

(dar explícitamente la solución en término de sus variables reales).

Ejercicio 5. Hallar $f(t)$ tal que:

$$f(t) = 3\,t^2 + \int\limits_0^t f'(\tau)\,(t-\tau)^3 d\tau \quad \forall t > 0$$