Apellido y Nombres: ....,,,,,...
DNI: .... Padrón: .... Código Asignatura: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....
Correo electrónico: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Quinta fecha. 5 de febrero de 2021.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Determinar el mayor dominio de holomorfía de $f(z) = 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{3^n(n+1)}$.
Calcular la integral $\displaystyle\int\limits_{\gamma_r^+} \left(1-\frac{3}{z}\right)\cos(z)f'(z)\,dz$ para γ_r la curva simple definida por $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, especificando los valores de r en los que esté bien definida.

Ejercicio 2. Para $D=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1 \quad \text{y} \quad x^2+(y+1)^2<4\}$:

$$\nabla^2 u(x,y) = 0 \quad \text{para} \quad (x,y) \in D$$
$$u(x,y)=\begin{cases} -1 & \text{para} \quad x^2+y^2=1, (x,y)\neq(0,1) \\ 1 & \text{para} \quad x^2+(y+1)^2=4, (x,y)\neq(0,1) \end{cases}$$

hallar $u(x,y)$ y determinar el conjunto de los puntos $(x,y) \in D$ tales que $u(x,y) = 0$.

Ejercicio 3. Resolver:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<\pi,\ 0<y<2\pi \\ u(0,y)=u(\pi,y)=0 & 0\leqslant y\leqslant 2\pi \\ u(x,0)=f(x) & 0\leqslant x\leqslant \pi \\ u(x,2\pi)=\operatorname{sen}(4x) & 0\leqslant x\leqslant \pi \end{cases}$$

sabiendo que $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{n^2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$

Ejercicio 4. Obtener $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w-a)e^{iwt}dw = \begin{cases} |t| & t \in (-a,a) \\ a/2 & |t| = a \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$
con $a > 0$ y siendo $\hat{f}(w)$ la transformada de Fourier de f. ¿Es única? Calcular $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(w)\right|^2 dw$.

Ejercicio 5. Sean $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}t) & \text{si } 0\leqslant t\leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t>1 \end{cases}$ y $g_\alpha(t) = e^{\alpha t^2}f(t)$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.
Analizar para qué valores de α las funciones g_α son de orden exponencial. Resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y''(t)+y'(t)-2y(t) = (f*f)(t) \quad \forall t \geqslant 0$$

con $y(0)=y'(0)=0$.