*Cuando el mundo tira para abajo*
*es mejor no estar atado a nada*
*Imaginen a los dinosaurios en la cama"*
*Charly García*

**Presentación Producto Interno.**
**Matriz de Producto Interno. Propiedades**

En $\mathbb{R}^n$ ya conocíamos el producto escalar en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$:

$$X.Y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^TY$$

Este producto escalar, es una función que a cada par de vectors de $\mathbb{R}^n$ le asigna un número real.

O sea $-.-:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Nociones que derivan de este producto escalar:

- **Ortogonalidad**: $v_1 \perp v_2 \Longleftrightarrow v_1.v_2 = 0$
- **Norma:** $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{X.X}$
- **Distancia:** $d(X,Y) = \|X - Y\|$
- **Ángulo entre vectrores :** Si $X$ e $Y$ son vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$, $\alpha(X,Y) = \theta,$ si $0 \leq \theta \leq \pi$ cumple:

$$\cos(\theta) = \frac{X.Y}{\|X\|\|Y\|}$$

Este producto escalar cumple una serie de propiedades:

P1) $(\alpha X + \beta Y).Z = \alpha X.Z + \beta Y.Z$

P2) $(X.Y) = Y.X$

P3) $X.X \geq 0$ y $X.X = 0 \Longleftrightarrow X_{=}0_{\mathbb{R}^n}$

Vamos a poder generalizar estas nociones de ortogonalidad, norma y distancia que conocíamos para $\mathbb{R}^n$ a todo espacio vectorial donde podamos definir una función que, como el producto escalar, cumpla estas propiedades, a la que vamos a llamar producto interno.

**Definición de Producto Interno:** Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, se dice que una función $< .,. >: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ es un producto interno (**P.I.**), si cumple:

- $< \alpha u + \beta v, w >= \alpha < u, w > + \beta < v, w >, \forall u,\ v,\ w \in \mathbb{V}$ y $\forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$
- $< v, u >= \overline{< u, v >},\ \forall u,\ v \in \mathbb{V}$
- $< u, u > > 0, \forall u \in \mathbb{V}, u \neq 0_{\mathbb{V}}$ y $< u, u >= 0 \Longleftrightarrow u = 0_{\mathbb{V}}$

Consecuencias inmediatas:

a $< u, u > \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{V}$

b $< u, \alpha v + \beta w >= \bar{\alpha} < u, v > + \bar{\beta} < u, w >,\ \forall u,\ v,\ w \in \mathbb{V}$

c $< 0_{\mathbb{V}}, u >= 0,\ \forall u \in \mathbb{V}$

## Nociones inducidas por un P.I.

En lo que sigue $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con P.I.

**Norma:** $\|u\| = \sqrt{< u, u >}$ (norma inducida por el P.I.)

Cumple, las propiedades imprescindibles para ser una medida:

1. $\|u\| \geq 0$
2. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
3. $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0_{\mathbb{V}}$

**Distancia:** Si $u, v \in \mathbb{V}$ la distancia entre $u$ y $v$ se define como $d(u, v) = \|u - v\| = \|v - u\|$

**Ortogonalidad:** Si $u$ y $v$ son vectores de $\mathbb{V}$ se dice que $u$ y v son ortogonales si $< u, v >= 0$. (Se nota $u \perp v$)

## Ejemplos

a. Primer ejemplo obvio: El "producto escalar " que ya conocíamos en $\mathbb{R}^n$ y que, de ahora más llamaremos Producto Interno Canónico en $\mathbb{R}^n$, cumple con las condiciones de P.I. Vamos a expresarlo con la fórmula más compacta:

$$\langle X, Y \rangle = Y^T X$$

b. Llamaremos Producto interno canónico en $\mathbb{C}^n$ al producto interno dado por la fórmula:

$$\langle X, Y \rangle = \overline{Y}^T X$$

c. En $\mathbb{V} = C([0,1])$ se define $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$

Es muy fácil ver que cumple las propiedades de conmutatividad y de linealidad.

$< f, f >= \int_0^1 f(t)^2 dt \geq 0 \; \forall f \in C([0,1])$

Además: Si $f$ es la función nula, desde ya $\int_0^1 0dt = 0$

Y si $\int_0^1 f(t)^2 dt = 0$ , como f es continua en $[0,\ 1] \Rightarrow f \equiv 0$ en $[0,\ 1]$

Sean $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = 3x - 2$ Calcular $\|f\|$, $\|g\|$ y $d(f, g)$

Como $\|f\| = \sqrt{< f, f >}$, calculemos primero $< f, f >$:

<f,f>=$\int_0^1 f(t)^2 dt = \int_0^1 (2t-3)^2 dt = \int_0^1 (4t^2 - 12t + 9)dt$

<f,f>=$\left[4\frac{t^3}{3} - 12\frac{t^2}{2} + 9t\right]_0^1 = 4/3 - 6 + 9 = 13/3 \Rightarrow \boxed{\|f\| = \sqrt{13/3}}$

Idem para calcular $\|g\|$:

$$< g, g > = \int_0^1 g(t)^2 dt = \int_0^1 (3t-2)^2 dt = \int_0^1 9t^2 - 12t + 4dt$$
$$< g, g > = \left[9\frac{t^3}{3} - 12\frac{t^2}{2} + 4t\right]_0^1 = 3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \boxed{\|g\| = \sqrt{1} = 1}$$

Calculamos :

$$d(f,g) = \|f-g\| = \|(2x-3)-(3x-2)\| = \|(2x-3)-(3x-2)\| = \|-x-1\|$$
$$d(f,g) = \sqrt{\langle -x-1, -x-1\rangle}$$

Calculemos $d^2(f,g) = \langle -x-1, -x-1\rangle$

$$\langle -x-1, -x-1\rangle = \int_0^1 (-t-1)^2 dt = \int_0^1 t^2 + 2t + 1dt$$
$$\langle -x-1, -x-1\rangle = \left[\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^2}{2} + t\right]_0^1 = 1/3 + 2 \Rightarrow d(f,g) = \sqrt{7/3}$$

Es importante notar que gracias a la definición de un P.I. en el espacio vectorial $C([0\ 1])$, podemos definir una noción de norma y de distancia entre dos funciones.

Otro ejemplo:

En $\mathbb{R}^2$ se define:

$$\boxed{\left\langle (x_1\ x_2)^T, (y_1\ y_2)^T \right\rangle = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}$$

$$\left\langle (x_1\ x_2)^T, (y_1\ y_2)^T \right\rangle = (4x_1 - x_2\ \ -x_1 + 2x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left\langle (x_1\ x_2)^T, (y_1\ y_2)^T \right\rangle = 4x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2.}$$

Nos piden:

*a*) Probar que la fórmula anterior define un P.I. en $\mathbb{R}^2$

*b*) Encuentre y grafique $A = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : X \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Resolución:

*a*) Para demostrar que es un P.I., tenemos que ver que cumple con las condiciones de la definición.

1) Ver que es lineal en la primera coordenada es consecuencia inmediata de la linealidad del producto matricial.
Pues:

$$\left\langle \alpha(x_1\ x_2)^T + \beta(y_1\ y_2)^T, (z_1\ z_2)^T \right\rangle = [\alpha(x_1\ x_2) + \beta(y_1\ y_2)] \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \alpha(x_1\ x_2)^T + \beta(y_1\ y_2)^T, (z_1\ z_2)^T \right\rangle &= \alpha(x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \beta(y_1\ y_2) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \left\langle (x_1\ x_2)^T, (z_1\ z_2)^T \right\rangle + \beta \left\langle (y_1\ y_2)^T, (z_1\ z_2)^T \right\rangle \end{aligned}$$

2) Veamos que la fórmula es conmutativa :

$$\left\langle (x_1\ x_2)^T, (y_1\ y_2)^T \right\rangle = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left\langle (y_1\ y_2)^T, (x_1\ x_2)^T \right\rangle &= (y_1\ y_2) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \left[ (y_1\ y_2) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]^T \\ &= (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \left\langle (x_1\ x_2)^T, (y_1\ y_2)^T \right\rangle \checkmark \end{aligned}$$

3) (Positividad) Calculemos $\left\langle (x_1\ x_2)^T, (x_1\ x_2)^T \right\rangle$

$$\begin{aligned} \left\langle (x_1\ x_2)^T, (x_1\ x_2)^T \right\rangle &= 4x_1^2 - x_2x_1 - x_1x_2 + 2x_2^2 \\ &= \underbrace{4x_1^2}_{\geq 0} - 2x_1x_2 + \underbrace{2x_2^2}_{\geq 0} \\ &= 3x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + x_2^2 \\ &= \underbrace{3x_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x_1 - x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{x_2^2}_{\geq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

Es inmediato que

$$\left\langle (x_1\ x_2)^T, (x_1\ x_2)^T \right\rangle = 0 \Longleftrightarrow 3x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 = 0$$

es una suma de numeros no negativos,esta igualdad sólo se cumple si: $0 = x_1 = x_1 - x_2 = x_2$

Por lo tanto

$$\left\langle (x_1\ x_2)^T, (x_1\ x_2)^T \right\rangle = 0 \Longleftrightarrow (x_1\ x_2) = (0\ 0)$$

✓Luego la función dada es un P.I.

*b*) Busquemos ahora el conjunto $A$, que es el conjunto de los vectores ortogonales a $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para encontrar el conjunto, buscamos $X = (x_1\ x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ tal que

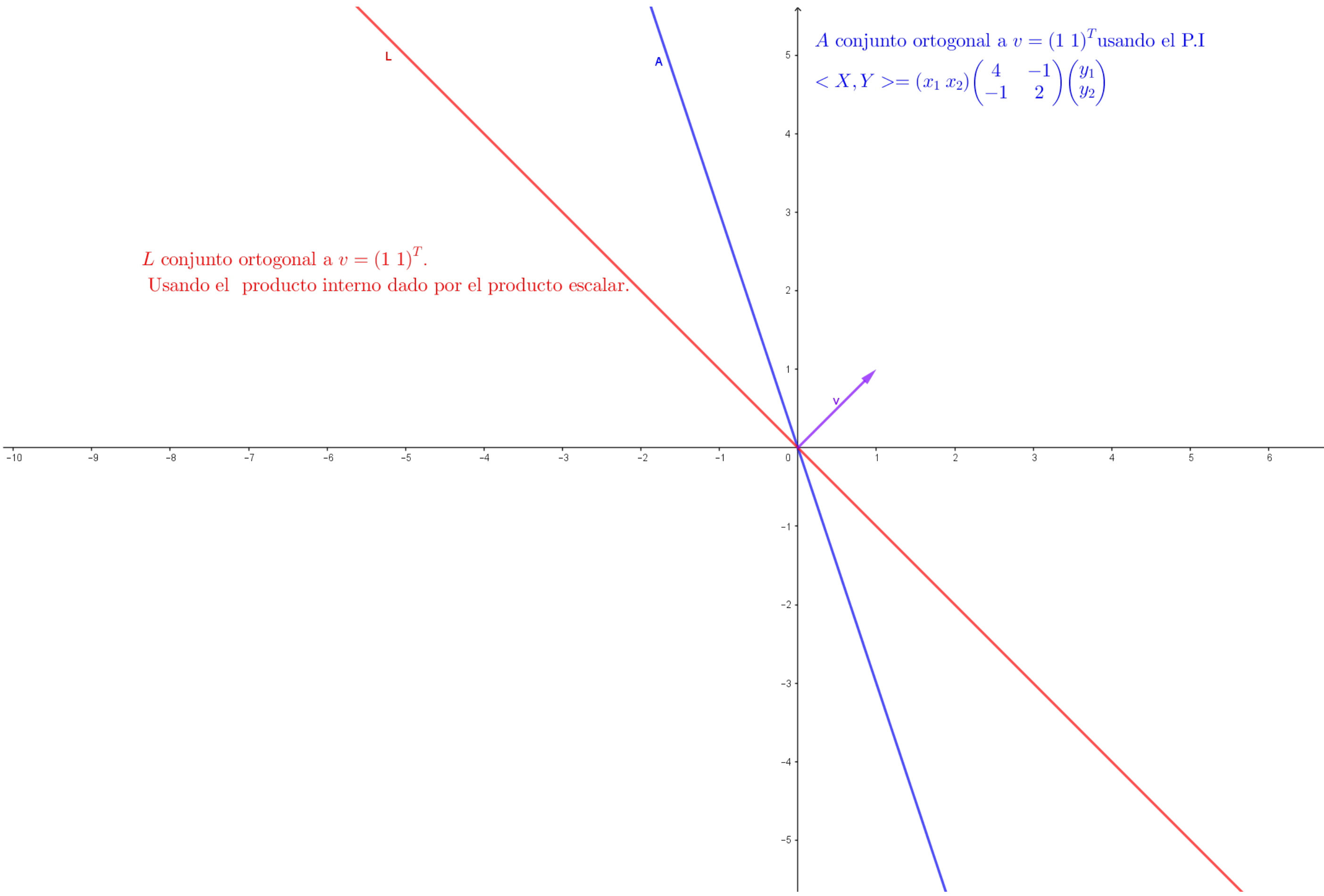
$$\left\langle (x_1\ x_2)^T, (1\ 1)^T \right\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \left\langle (x_1\ x_2)^T, (1\ 1)^T \right\rangle &= 4x_1 - x_2 - x_1 + 2x_2 = 0 \\ &= 3x_1 + x_2 = 0 \end{aligned}$$

$(x_1\ x_2)^T \in A \Longleftrightarrow (x_1\ x_2)^T = (x_1\ \ -3x_1)^T = x_1\ (1\ \ -3)^T$

Por lo tanto $A =$ gen$\{(1\ \ -3)^T\}$

Si graficamos este conjunto y el conjunto de los vectores ortogonales al $(1\ 1)^T$ considerando el P.I canónico en $\mathbb{R}^2$, obtenemos:



$A$ conjunto ortogonal a $v = (1\ 1)^T$ usando el P.I
$< X, Y >= (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$
$L$ conjunto ortogonal a $v = (1\ 1)^T$.
Usando el producto interno dado por el producto escalar.
L
A
v

**Teorema:** Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial de dimensión finita, todo P.I. queda definido sobre una base de $\mathbb{V}$. Más aún si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, todo P.I. puede escribirse como:

$$\langle u, v\rangle = \overline{[v]^B}^T G_B [u]^B = [u]^{B^T} G_B \overline{[v]^B}$$

Con $G_B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, matriz hermítica y definida positiva.

Recordemos que:

$G_B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es hermítica si y sólo si $G_B = \overline{G_B}^T$
$G_B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es definida positiva si y sólo si $X^T G_B\, X > 0,\ \forall\, X \in \mathbb{K}^n - \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Si $[u]^B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ y $[v]^B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, queda:

$$\langle u, v\rangle = \overline{[y_1\ y_2\ \ldots\ y_n]} G_B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n] G_B \overline{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}$$

$$G_B = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \ldots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \ldots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \ldots & \langle v_n, v_n\rangle \end{bmatrix}$$

Si $[u]^B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ y $[v]^B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ :

$u = x_1 v_1 + \ldots x_n v_n$ y $v = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \cdots + y_n v_n$, por lo tanto:

$$\langle u, v\rangle = \langle x_1 v_1 + \ldots x_n v_n, v\rangle = x_1 \langle v_1, v\rangle + x_2 \langle v_2, v\rangle + \cdots + x_n \langle v_n, v\rangle$$

$$\langle u, v\rangle = [x_1 x_2 \ldots x_n] \begin{bmatrix} \langle v_1, v\rangle \\ \langle v_2, v\rangle \\ \vdots \\ \langle v_n, v\rangle \end{bmatrix} (1)$$

Explicitando cada coeficiente del vector columna que aparece en $(1)$:

$$\langle v_1, v\rangle = \langle v_1, y_1v_1 + y_2v_2 + \cdots + y_nv_n\rangle = \overline{y_1}\,\langle v_1, v_1\rangle + \overline{y_2}\,\langle v_1, v_2\rangle + \cdots + \overline{y_n}\,\langle v_1, v_n\rangle$$

$$\langle v_1, v\rangle = [\langle v_1, v_1\rangle \ \ \langle v_1, v_2\rangle \ldots \langle v_1, v_n\rangle] \begin{bmatrix} \bar{y_1} \\ \bar{y_2} \\ \vdots \\ \bar{y_n} \end{bmatrix}$$

$$\langle v_2, v\rangle = [\langle v_2, v_1\rangle \ \ \langle v_2, v_2\rangle \ldots \langle v_2, v_n\rangle] \begin{bmatrix} \bar{y_1} \\ \bar{y_2} \\ \vdots \\ \bar{y_n} \end{bmatrix}$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\langle v_n, v\rangle = [\langle v_n, v_1\rangle \ \ \langle v_n, v_2\rangle \ldots \langle v_n, v_n\rangle] \begin{bmatrix} \bar{y_1} \\ \bar{y_2} \\ \vdots \\ \bar{y_n} \end{bmatrix}$$

Entonces el vector columna en $(1)$, podemos reemplazarlo por el producto de una matriz por un vector columna y obtenemos:

$$\langle u, v\rangle = [x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n] \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \ldots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \ldots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \ldots & \langle v_n, v_n\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y_1} \\ \bar{y_2} \\ \vdots \\ \bar{y_n} \end{bmatrix}$$

Por las propiedades de P.I es inmediato que:
$G_B$ es una matriz hermítica ($G_B = \bar{G_B}^T$) pues $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$.

Y además, por la propiedad de "positividad" del P.I ($\langle u, u > 0 \ \forall u \neq 0$) se tiene que cumplir que :
$X^T G_B \overline{X} > 0 \ \ \forall X \in \mathbb{C}^n - \{0_{\mathbb{C}^n}\}$ (Definida positiva).

Entonces la formula anterior define un P.I. en $\mathbb{V} \Leftrightarrow G_B$ es una matriz hermítica definida positiva.

La recíproca se demuestra verificando que la fórmula

$$\langle u, v\rangle = \overline{[v]^B}^T G_B [u]^B = [u]^{B^T} G_B \overline{[v]^B}$$

cumple con la definición de P.I, siendo $B$ una base cualquiera de un espacio vectorial.
Escribamos este resultado, más formalmente:

Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial de dimensión finita, con $B$ una base de $\mathbb{V}$ todo P.I. puede escribirse:

$$\langle u, v\rangle = \overline{[v]^B}^T G_B [u]^B = [u]^{B^T} G_B \overline{[v]^B}$$

Con $G_B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, matriz hermítica y definida positiva.

Propiedades:

En todo espacio vectorial $\mathbb{V}$ con producto interno, valen las siguientes propiedades:

a. **Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz**:

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||\,||v||, \quad \forall\, u,\ v \in \mathbb{V}.$$

Más aún: $\begin{cases} |\langle u, v\rangle| = ||u||\,||v|| \Leftrightarrow u \text{ y } v \text{ son l.d.} \\ |\langle u, v\rangle| < ||u||\,||v|| \Leftrightarrow u \text{ y } v \text{ son l.i.} \end{cases}$

Demostración:

$\boxed{\text{Si } u \text{ y } v \text{ son l.d.}}$ $\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{K}$ tal que $u = kv \Rightarrow |\langle u, v\rangle| = |\langle kv, v\rangle| = |k\langle v, v\rangle| =$

$= |k|||v||^2| = \underbrace{|k|||v||}_{=||u||}||v|| = ||u||||v||.$

$\boxed{\text{Si } u \text{ y } v \text{ son l.i.}}$ $\Rightarrow 0 < ||u + kv||^2\ \forall k \in \mathbb{K}.$

Ahora supongamos que $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 < ||u + kv||^2$ y supongamos $k \in \mathbb{R}$.

$0 < ||u + kv||^2 = \langle u + kv, u + kv\rangle = \langle u, u + kv\rangle + k\langle v, u + kv\rangle$

$0 < ||u + kv||^2 = \langle u, u\rangle + \overline{k}\langle u, v\rangle + k\{\langle v, u\rangle + \overline{k}\langle v, v\rangle\}$

$0 < ||u + kv||^2 = ||u||^2 + \overline{k}\langle u, v\rangle + k\langle v, u\rangle + k\overline{k}||v||^2$

Como estamos suponiendo que $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ y $\overline{k} = k$.

$0 < ||u + kv||^2 = \underbrace{||u||^2 + 2k\langle u, v\rangle + k^2||v||^2}_{f(k)},\ \forall k \in \mathbb{R}.$

$f(k) = k^2||v||^2 + +2k\langle u, v\rangle + ||u||^2 > 0$, es una función cuadrática que siempre es positiva.

Entonces, si $f(k) = ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0$.

En nuestro caso entonces, se cumple:

$(2\langle u, v\rangle)^2 - 4||v||^2||u||^2 < 0 \Rightarrow 4(\langle u, v\rangle)^2 < 4||v||^2||u||^2 \Rightarrow (\langle u, v\rangle)^2 < ||v||^2||u||^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\langle u, v\rangle| < ||u||||v||$.

Entonces, si $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$ la desigualdad se cumple.

Veamos que también se cumple si $\langle u, v\rangle \in \mathbb{C}$ :

Si $\langle u, v\rangle \in \mathbb{C} \Rightarrow \langle u, v\rangle \neq 0 \Rightarrow$ si $z = \langle u, v\rangle\,,\ \exists z^{-1}$ y como $0 < ||u + kv||^2\ \forall k \in \mathbb{C}$ en particular si $k = z^{-1}$ :

$\langle z^{-1}u, v\rangle = z^{-1}\langle u, v\rangle = z^{-1}z = 1 \in \mathbb{R}$.

Y como ya demostramos que si el producto interno entre dos vectores es real la desigualdad vale, entonces:

$1 = |\langle z^{-1}u, v\rangle| < ||z^{-1}u||\ ||v|| = |z^{-1}|\ ||u||\ ||v||$.

$1 < \frac{||u||||v||}{|z|} \Rightarrow |\langle u, v\rangle| < ||u||\ ||v||$.

Luego demostramos que si $u$ y $v$ son l.i, vale que $|\langle u, v\rangle| < ||u||\ ||v||$

b. **Desigualdad triangular**:

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||,\ \ \forall\, u,\ v \in \mathbb{V}.$$

$$0 \leq ||u + v||^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle\,.$$

$$0 \leq ||u + v||^2 = ||u||^2 + \langle u, v\rangle + \overline{\langle u, v\rangle} + ||v||^2 = ||u||^2 + 2\text{Re}(\langle u, v\rangle) + ||v||^2.(a)$$

Como Re$(\langle u, v\rangle) \leq |\langle u, v\rangle| \leq ||u||\ ||v||$ por la desigualdad de C-B-S, Acotando en $(a)$:

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + 2\text{Re}(\langle u, v\rangle) + ||v||^2 \leq ||u||^2 + 2||u||\ ||v|| + ||v||^2$$

$$||u + v||^2 \leq ||u||^2 + 2||u||\ ||v|| + ||v||^2 = (||u|| + ||v||)^2$$

Entonces:

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||,\ \ \forall\, u,\ v \in \mathbb{V}.$$

c. **Teorema de Pitágoras** : Si $\langle u,v\rangle = 0 \Rightarrow ||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

$$\langle u,v\rangle = 0 \Rightarrow ||u+v||^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,v\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v,u\rangle}_{=0} + \langle v,v\rangle$$

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

Como consecuencia de la desigualdad de C-B-S, si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial, tenemos:

$$-||u||\ ||v|| \leq \ \langle u,v\rangle \ \leq ||u||\ ||v||, \ \ \forall\, u,\ v \in \mathbb{V}.$$

Si $u \neq 0_{\mathbb{V}} \neq v:\ -1 \leq \ \dfrac{\langle u,v\rangle}{||u||\ ||v||} \leq 1.$

Entonces, podemos extender la definición de ángulo, para cualquier $\mathbb{R}$-espacio vectorial:

Definición: Si $u$ y $v \in \mathbb{V}$ , $\mathbb{R}$ espacio vectorial, $u \neq 0_{\mathbb{V}} \neq v$, se dice que $\theta$ es el **ángulo que forman** $u$ **y** $v$ si :

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u,v\rangle}{||u||\ ||v||}, \ \ 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Se nota $\alpha(u,v) = \theta$.