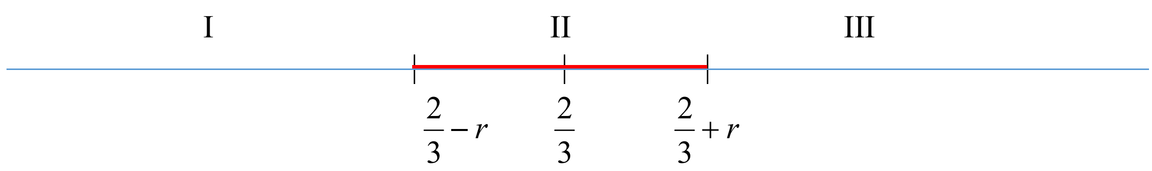
ANÁLISIS MATEMÁTICO III – SEGUNDO CUATRIMESTRE 2021
EXAMEN INTEGRADOR – SEGUNDA FECHA – 18/02/2022
RESOLUCIÓN

---

1. Determinar todos los valores $c \in \Re_{\geq 0}$ para los cuales la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)sen(x)}{(3x-2)^2+c}dx$ converge. Calcular su valor en el caso $c = 1$.

Resolución: Para $c > 0$, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)sen(x)}{(3x-2)^2+c}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(2x)}{(3x-2)^2+c}dx$ es absolutamente convergente, como puede verse fácilmente mediante la acotación $\left|\frac{sen(2x)}{(3x-2)^2+c}\right| \leq \frac{1}{(3x-2)^2+c}$; obsérvese que la integral $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(3x-2)^2+c}$ converge, por ser convergente la integral $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(3x-2)^2}$ (prestar atención al extremo inferior de esta última integral).

Nos queda por ver el caso $c = 0$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)sen(x)}{(3x-2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(2x)}{(3x-2)^2}dx$. Aquí, el denominador del integrando se anula en $x = \frac{2}{3}$. Por lo tanto, para separar los problemas de convergencia, consideremos la siguiente partición de la recta:



Es decir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(2x)}{(3x-2)^2}dx = \overbrace{\int_{-\infty}^{\frac{2}{3}-r} \frac{sen(2x)}{(3x-2)^2}dx}^{I} + \overbrace{\int_{\frac{2}{3}-r}^{\frac{2}{3}+r} \frac{sen(2x)}{(3x-2)^2}dx}^{II} + \overbrace{\int_{\frac{2}{3}+r}^{+\infty} \frac{sen(2x)}{(3x-2)^2}dx}^{III}$$

Las integrales *I* y *III* son absolutamente convergentes, como puede verse fácilmente con la acotación $\left|\frac{sen(2x)}{(3x-2)^2}\right| \leq \frac{1}{(3x-2)^2}$. Para estudiar la convergencia de la integral *II* podemos utilizar el desarrollo centrado en $\frac{2}{3}$:

$$sen(2x) = sen(\tfrac{4}{3}) + 2\cos(\tfrac{4}{3})(x-\tfrac{2}{3}) - \frac{2^2}{2!}sen(\tfrac{4}{3})(x-\tfrac{2}{3})^2 - \frac{2^3}{3!}\cos(\tfrac{4}{3})(x-\tfrac{2}{3})^3 + ...$$

Por lo tanto, para todo $x \neq \frac{2}{3}$:

$$\frac{sen(2x)}{(3x-2)^2}=\frac{sen(2x)}{9(x-\frac{2}{3})^2}=\overbrace{\frac{sen(\frac{4}{3})}{9(x-\frac{2}{3})^2}+\frac{2\cos(\frac{4}{3})}{9(x-\frac{2}{3})}}^{f(x)}+\overbrace{\left(-\frac{2^2}{2!9}sen(\tfrac{4}{3})+\frac{2^3}{3!9}\cos(\tfrac{4}{3})(x-\tfrac{2}{3})+\ldots\right)}^{h(x)}$$

La función h es continua en toda la recta y por lo tanto es integrable en el intervalo $[\frac{2}{2}-r,\frac{2}{3}+r]$. Pero la función f no es integrable en dicho intervalo, como puede verse fácilmente considerando la primitiva $F(x)=-\dfrac{sen(\frac{4}{3})}{9(x-\frac{2}{3})}+\dfrac{2\cos(\frac{4}{3})}{9}\ln(\left|x-\frac{2}{3}\right|)$ y verificando que no existe el límite doble de

$$\int_{\frac{2}{3}-r}^{\frac{2}{3}-\delta}f(x)dx+\int_{\frac{2}{3}+\varepsilon}^{\frac{2}{3}+r}f(x)dx=F(\tfrac{2}{3}-\delta)-F(\tfrac{2}{3}-r)+F(\tfrac{2}{3}+r)-F(\tfrac{2}{3}+\varepsilon)=$$

$$=\frac{sen(\frac{4}{3})}{9\delta}+\frac{2\cos(\frac{4}{3})}{9}\ln(\delta)-\frac{sen(\frac{4}{3})}{9r}-\frac{2\cos(\frac{4}{3})}{9}\ln(r)-\frac{sen(\frac{4}{3})}{9r}+\frac{2\cos(\frac{4}{3})}{9}\ln(r)+\frac{sen(\frac{4}{3})}{9\varepsilon}-\frac{2\cos(\frac{4}{3})}{9}\ln(\varepsilon)$$

Cuando $\delta\longrightarrow 0^+$ y $\varepsilon\longrightarrow 0^+$. Obsérvese que tampoco existe el límite para $\delta=\varepsilon\longrightarrow 0^+$, es decir: f tampoco es integrable en el sentido del valor principal

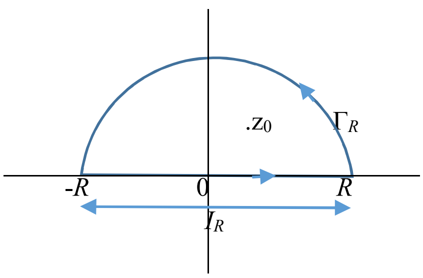
Resumiendo: la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x)sen(x)}{(3x-2)^2+c}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen(2x)}{(3x-2)^2+c}dx$ converge absolutamente si $c>0$, y diverge en todo sentido si $c=0$.

Cálculo de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x)sen(x)}{(3x-2)^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen(2x)}{(3x-2)^2+1}dx$:

Se trata de una típica integral calculable mediante los métodos clásicos de variable compleja. Consideremos la función

$$f(z)=\frac{e^{i\,2z}}{(3z-2)^2+1}=\frac{e^{i2z}}{9(z-z_0)(z-\bar{z}_0)}$$

donde $z_0=\dfrac{2}{3}+\dfrac{i}{3}$. Para cada $R>|z_0|$, consideremos la integral de f sobre el siguiente circuito (muy popular) y apliquemos el teorema de los residuos:



$$\int_{I_R}f(z)dz+\int_{\Gamma_R}f(z)dz=2\pi iRES(f,z_0)\qquad (*R)$$

El plan, como es habitual, es utilizar el hecho de que el segundo miembro de estas integrales no dependen de *R*, mientras que la primera integral del primer miembro

$$\int_{I_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix}}{(3x-2)^2+1}dx = \int_{-R}^{R} \frac{\cos(2x)}{(3x-2)^2+1}dx + i\int_{-R}^{R} \frac{sen(2x)}{(3x-2)^2+1}dx$$

$$\xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{(3x-2)^2+1}dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(2x)}{(3x-2)^2+1}dx$$

tiende a un número complejo cuya parte imaginaria es $2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)sen(x)}{(3x-2)^2+c}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(2x)}{(3x-2)^2+c}dx$.

Resta ver que $\underset{R\to+\infty}{Lim} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$ (es un ejercicio clásico):

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{2iR\cos(\theta)-2Rsen(\theta)}}{9(R.e^{i\theta}-z_0)(R.e^{i\theta}-\bar{z}_0)} Rie^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^{\pi} \left|\frac{e^{2iR\cos(\theta)-2Rsen(\theta)}}{9(R.e^{i\theta}-z_0)(R.e^{i\theta}-\bar{z}_0)} Rie^{i\theta}\right|d\theta =$$

$$= \frac{R}{9}\int_0^{\pi} \frac{e^{-2Rsen(\theta)}}{\left|R.e^{i\theta}-z_0\right|\left|R.e^{i\theta}-\bar{z}_0\right|}d\theta = \frac{R}{9}\int_0^{\pi} \frac{e^{-2Rsen(\theta)}d\theta}{\left|R.e^{i\theta}-z_0\right|\left|R.e^{i\theta}-(-\bar{z}_0)\right|} \overset{(*)}{\le} \frac{R}{9}\int_0^{\pi} \frac{e^{-2Rsen(\theta)}d\theta}{\left\|R\right|-\left|z_0\right\|\left\|R\right|-\left|\bar{z}_0\right\|} \overset{R>|z_0|=|\bar{z}_0|}{=}$$

$$= \frac{R}{9(R-|z_0|)^2}\int_0^{\pi} e^{-2Rsen(\theta)}d\theta \overset{\substack{Lema\\ de\ Jordan}}{\le} \frac{R}{9(R-|z_0|)^2}.\frac{\pi}{2R} = \frac{\pi}{18(R-|z_0|)^2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

(en el paso (*) hemos utilizado la desigualdad $\frac{1}{|a-b|} \le \frac{1}{\left\||a|-|b|\right\|}$, válida para todo par de complejos $a \ne b$)

Por lo tanto, tomando límites en (**R*) para $R \longrightarrow +\infty$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{(3x-2)^2+1}dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(2x)}{(3x-2)^2+1}dx = 2\pi iRES[f,z_0]$$

El cálculo de este residuo es sencillo pues se trata de un polo simple:

$$(z-z_0)f(z)=\frac{e^{i2z}}{9(z-\bar{z}_0)}\xrightarrow[z\to z_0]{}\frac{e^{i2z_0}}{9(z_0-\bar{z}_0)}=\frac{e^{i2\left(\frac{2}{3}+\frac{i}{3}\right)}}{9.\frac{2i}{3}}=-\frac{i}{6}e^{\frac{4}{3}i-\frac{2}{3}}=$$

$$=-\frac{ie^{-\frac{2}{3}}}{6}\left(\cos\left(\frac{4}{3}\right)+i.sen\left(\frac{4}{3}\right)\right)=\frac{e^{-\frac{2}{3}}}{6}sen\left(\frac{4}{3}\right)-\frac{i}{6}e^{-\frac{2}{3}}\cos\left(\frac{4}{3}\right)$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{(3x-2)^2+1}dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen(2x)}{(3x-2)^2+1}dx=2\pi i\left(\frac{e^{-\frac{2}{3}}}{6}sen\left(\frac{4}{3}\right)-\frac{i}{6}e^{-\frac{2}{3}}\cos\left(\frac{4}{3}\right)\right)=$$

$$=i\pi\frac{e^{-\frac{2}{3}}}{3}sen\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{\pi}{3}e^{-\frac{2}{3}}\cos\left(\frac{4}{3}\right)$$

y entonces

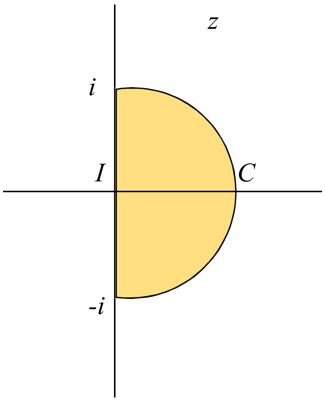
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x)sen(x)}{(3x-2)^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen(2x)}{(3x-2)^2+1}dx=\frac{\pi}{6}e^{-\frac{2}{3}}sen\left(\frac{4}{3}\right)$$

Respuesta 1: La integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x)sen(x)}{(3x-2)^2+c}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen(2x)}{(3x-2)^2+c}dx$ converge absolutamente si $c>0$ y diverge en todo sentido si $c=0$. Para $c=1$, es $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x)sen(x)}{(3x-2)^2+1}dx=\frac{\pi}{6}e^{-\frac{2}{3}}sen\left(\frac{4}{3}\right)$.

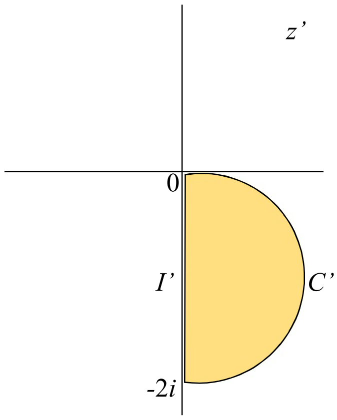
---

2. Considerar la distribución de temperatura en estado estacionario en una placa plana y homogénea ubicada en la región $D=\left\{(x,y)\in\Re^2: x^2+y^2<1\,,\,x>0\right\}$, sabiendo que la temperatura tiene valor constante 1 sobre la parte del borde de D coincidente con circunferencia y que es igual a 0 en la parte correspondiente al segmento de recta vertical. Describir el sistema matemático que lo modela y representar gráficamente. Hallar la distribución u de la temperatura en el interior de la placa y explicar por qué allí es $0<u(x,y)<1$.

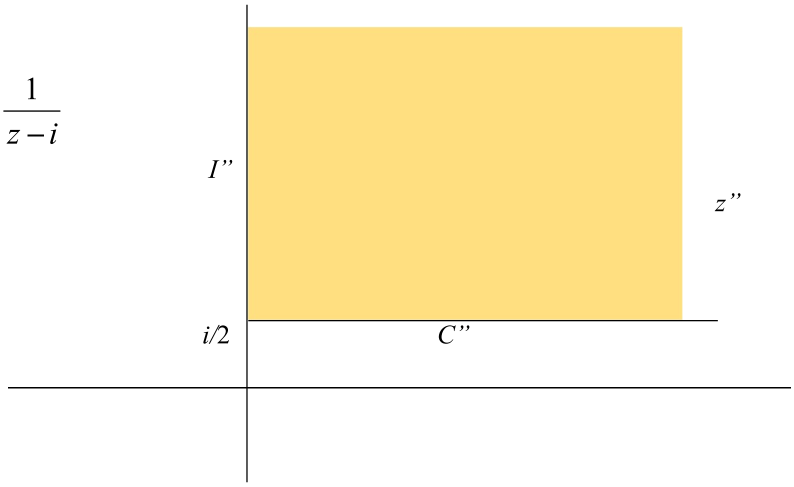
Resolución: La distribución de temperaturas, en función de las coordenadas cartesianas x e y, es la función u que satisface la ecuación de Laplace en el interior de D, toma el valor constante 1 en la semicircunferencia $C=\left\{(x,y)\in\Re^2: x^2+y^2=1\,,\,x>0\right\}$ y es nula en el segmento $I=\left\{(x,y)\in\Re^2: x=0, -1<y<1\right\}$. En los puntos (0,-1) y (0,1), u tiene discontinuidades de salto finito. Dado que se trata de un problema de Dirichlet en el plano con condiciones de contorno seccionalmente constantes, podemos utilizar el método de la transformación conforme estudiado en el curso.



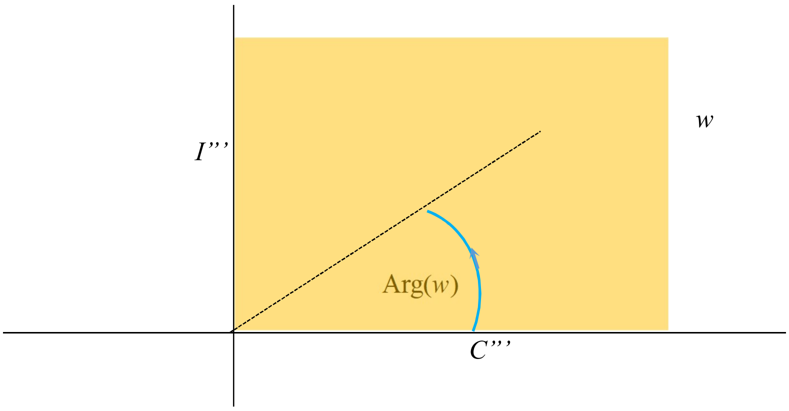
$$z \longrightarrow z' = z - i$$



$$z' \longrightarrow z'' = \frac{1}{z'} = \frac{1}{z-i}$$



$$z'' \longrightarrow w = z'' - \frac{i}{2} = \frac{1}{z-i} - \frac{i}{2}$$



Ahora, buscamos u en la forma $u = aArg(w) + b$ y determinamos las constantes de manera que se verifiquen las condiciones de contorno:

(1) En C''': $b = 1$

(2) En I''': $a\frac{\pi}{2} + b = 0$

Resulta inmediatamente que $u = -\frac{2}{\pi} Arg(w) + 1$, es decir:

$$u=-\frac{2}{\pi}Arg\left(\frac{1}{z-i}-\frac{i}{2}\right)+1=-\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{i}{2}\right)}{\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{i}{2}\right)}\right)+1 \qquad (*1)$$

(por favor, no confundir argumentos con arcotangentes….) Observemos que aquí podemos utilizar la función arcotangente pues el argumento de $w=\frac{1}{z-i}-\frac{i}{2}$ varía entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Se puede completar la cuenta para obtener la forma explícita de u como función de x e y, es decir: de la parte real y de la parte imaginaria de z. Hagamos las cuentitas:

$$\frac{1}{z-i}-\frac{i}{2}=\frac{\bar{z}+i}{|z-i|^2}-\frac{i}{2}=\frac{x}{x^2+(y-1)^2}+\left(\frac{-y+1}{x^2+(y-1)^2}-\frac{1}{2}\right)i=\frac{x}{x^2+(y-1)^2}+\frac{-2y+2-[x^2+(y-1)^2]}{2[x^2+(y-1)^2]}i$$

$$=\frac{x}{x^2+(y-1)^2}+\frac{-2y+2-x^2-y^2+2y-1}{2[x^2+(y-1)^2]}i=\frac{x}{x^2+(y-1)^2}+\frac{1-(x^2+y^2)}{2[x^2+(y-1)^2]}i$$

Por lo tanto:

$$u(x,y)=-\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1-(x^2+y^2)}{2x}\right)+1 \qquad (*2)$$

Para comprobar que $0<u(x,y)<1$ en el interior de la placa, basta aplicar el Principio del Módulo Máximo par armónicas. Desde luego, también se puede utilizar la forma explícita (*2) y un hecho conocido desde nuestra más tierna infancia: $\forall t>0: 0<\arctan(t)<\frac{\pi}{2}$. Pero el principio mencionado nos permite responder la pregunta sin necesidad de calcular la solución.

Observación: Es muy sencillo comprobar que, efectivamente, u satisface las condiciones de contorno requeridas. Es más engorroso verificar que u es armónica calculando su laplaciano. Pero sabemos que u es armónica por ser la parte imaginaria de una función holomorfa $f(z)=i-\frac{2}{\pi}Log\left(\frac{1}{z-i}-\frac{i}{2}\right)$ (ver (*1))

---

3. Sabiendo que $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos(n\pi x)$ es el desarrollo trigonométrico de Fourier en [-1,1] de

$$f(x)=\begin{cases} xsen(3\pi x)+3 & si \quad |x|<\frac{1}{2} \\ xsen(2\pi x)+2 & si \quad \frac{1}{2}\le|x|\le 1 \end{cases}$$

calcular a_0, $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n}$. ¿Es la serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos(n\pi x)$ uniformemente convergente en la recta real?

Resolución: La función f es par, como puede verse directamente en su definición, y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$ es la serie de Fourier $\frac{A_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\pi x)$ de la extensión 2-periódica de f. Indiquemos con $\tilde{f}$ esta extensión. Es decir:

$$a_0 = \frac{A_0}{2} = \int_{-1}^{1} \tilde{f}(\theta)d\theta = 2\int_{0}^{1} f(\theta)d\theta \quad \text{y} \quad a_n = A_n = \int_{-1}^{1} \tilde{f}(\theta)\cos(n\pi\theta)d\theta = 2\int_{0}^{1} f(\theta)\cos(n\pi\theta)d\theta$$

Cálculo de a_0:

$$a_0 = 2\int_{0}^{1} f(\theta)d\theta = 2\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}} [xsen(3\pi x) + 3]dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} [xsen(2\pi x) + 2]dx \right) =$$

$$\left(-\frac{x}{3\pi}\cos(3\pi x) + \frac{sen(3\pi x)}{9\pi^2} \right)_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} + \left(-\frac{x}{2\pi}\cos(2\pi x) + \frac{sen(2\pi x)}{4\pi^2} \right)_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} =$$

$$= -\frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{4\pi} = -\frac{1}{9\pi^2} - \frac{3}{4\pi}$$

Ahora, veamos si $\tilde{f}$ es seccionalmente de clase C^1, para poder aplicar el Teorema de Dirichlet sobre convergencia puntual de series de Fourier. Dada la periodicidad y paridad de $\tilde{f}$, basta estudiarla en el intervalo [0,1], donde coincide con f. Para eso, consideremos las funciones

$$f_1 : [0,\tfrac{1}{2}] \longrightarrow \Re, \text{ tal que } f_1(x) = xsen(3\pi x) + 3$$

y

$$f_2 : [\tfrac{1}{2},1] \longrightarrow \Re, \text{ tal que } f_2(x) = xsen(2\pi x) + 2$$

Es claro que f_1 es continua en $[0,\frac{1}{2}]$ y de clase C^1 en el abierto $(0,\frac{1}{2})$, con derivada

$$f_1'(x) = sen(3\pi x) + 3\pi x\cos(3\pi x).$$

Las derivadas laterales en los extremos del intervalo son $f_1'(0^+) = 0$ y $f_1'(\frac{1}{2}^-) = -1$ (es decir: finitas). Análogamente, la función f_2 es continua en $[\frac{1}{2},1]$ y de clase C^1 en el abierto $(\frac{1}{2},1)$, con derivada

$$f_2'(x) = sen(2\pi x) + 2\pi x\cos(\pi x)$$

Las derivadas laterales en los extremos del intervalo también son finitas: $f_2'(\frac{1}{2}^+) = 1$ y $f_2'(1^-) = -2\pi$.

Por lo tanto, se verifican las condiciones de Dirichlet para la convergencia puntual de su serie de Fourier. Observemos que

$$f(\tfrac{1}{2}^-) = -\tfrac{1}{2} + 3 = \tfrac{5}{2} \qquad \text{y} \qquad f(\tfrac{1}{2}^+) = 2$$

Por lo tanto, en el punto $x = \frac{1}{2}$, la serie de Fourier de *f* converge al promedio $\frac{1}{2}(\frac{5}{2} + 2) = \frac{9}{4}$. En el resto de los puntos *x* del intervalo [0,1], la serie de Fourier de *f* converge a *f*(*x*).

En particular:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi 0) = \tfrac{1}{2}[\tilde{f}(0^-) + \tilde{f}(0^+)] = f(0) = 3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi 1) = \tfrac{1}{2}[\tilde{f}(1^-) + \tilde{f}(1^+)] = f(1) = 2 \ \ (\tilde{f} \text{ es continua en } x = 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n} = a_0 - a_2 + a_4 - ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}[\tilde{f}(\tfrac{1}{2}^-) + \tilde{f}(\tfrac{1}{2}^+)] = \tfrac{1}{2}[f(\tfrac{1}{2}^-) + f(\tfrac{1}{2}^+)] = \tfrac{9}{4}$$

Finalmente, si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$ fuera uniformemente convergente (en la recta real), sería uniformemente convergente a $\tilde{f}$ (pues la convergencia uniforme implica la convergencia puntual). Pero esto es imposible, pues $\tilde{f}$ no es continua y el límite uniforme de funciones continuas es continua (uno de los teoremas de Weierstrass; en este caso, las funciones continuas son las sumas parciales de la serie). ***Atención***: insistimos una vez más en que la continuidad de una función periódica no garantiza la convergencia (ni puntual ni mucho menos uniforme) de su serie de Fourier. Lo que el teorema de Weierstrass permite afirmar es la recíproca: si la serie converge uniformemente a $\tilde{f}$, entonces $\tilde{f}$ es continua.

---

4. Resolver: $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + g(x) & -\infty < x < +\infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2} & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

introduciendo sobre *g* las hipótesis necesarias. Indicar, si corresponde, toda condición adicional supuesta sobre la función incógnita.

Resolución: Vamos a suponer, para comenzar, que *g* admite transformada de Fourier y que además verifica las hipótesis del Teorema de Inversión. Lo mismo para *u* respecto de *x* (y para todo *t*) y para sus derivadas parciales involucradas en la ecuación diferencial. Aplicando la transformación de Fourier a la ecuación obtenemos (utilizando propiedades conocidas) $-\omega^2 \hat{u}(\omega,t) = \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t) + \hat{g}(\omega)$ para todo $\omega \in \Re$ y todo $t > 0$.

Equivalentemente, $\omega^2 \hat{u}(\omega,t) + \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t) + \hat{g}(\omega) = 0$. Resolvemos:

$$\omega^2\hat{u}(\omega,t)+\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(\omega,t)+\hat{g}(\omega)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \omega^2 e^{t\omega^2}\hat{u}(\omega,t)+e^{t\omega^2}\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(\omega,t)+e^{t\omega^2}\hat{g}(\omega)=0 \quad\overset{\omega\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{t\omega^2}\hat{u}(\omega,t)+\frac{1}{\omega^2}e^{t\omega^2}\hat{g}(\omega)\right)=0\,.$$

Este último paso vale para $\omega\neq 0$, obviamente. Puesto que la última igualdad se verifica para todo $t > 0$ (y todo $\omega\neq 0$), existe una función $\alpha(\omega)$ (constante respecto de t) tal que

$$e^{t\omega^2}\hat{u}(\omega,t)+\frac{1}{\omega^2}e^{t\omega^2}\hat{g}(\omega)=\alpha(\omega) \quad , \quad \omega\neq 0 \ \ , t>0.$$

Es decir: $$\hat{u}(\omega,t)=\alpha(\omega)e^{-t\omega^2}-\frac{\hat{g}(\omega)}{\omega^2} \quad , \quad \omega\neq 0 \ \ , t>0.$$

Para $t\longrightarrow 0+$, $\hat{u}(\omega,0)=\alpha(\omega)-\dfrac{\hat{g}(\omega)}{\omega^2}=\hat{h}(\omega)$, la transformada de Fourier de $h(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ (por la condición inicial del problema: si $\hat{u}(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}dx$, es $\hat{u}(x,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,0)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)e^{-i\omega x}dx$). Por lo tanto, $\alpha(\omega)=\dfrac{\hat{g}(\omega)}{\omega^2}+\hat{h}(\omega)$ y entonces

$$\hat{u}(\omega,t)=\left(\frac{\hat{g}(\omega)}{\omega^2}+\hat{h}(\omega)\right)e^{-t\omega^2}-\frac{\hat{g}(\omega)}{\omega^2}=\hat{h}(\omega)e^{-t\omega^2}+\hat{g}(\omega)\frac{e^{-t\omega^2}-1}{\omega^2} \quad , \quad \omega\neq 0 \ \ , t>0.$$

Ahora bien, para todo $\omega\neq 0 \ \ , t>0$ es

$$\frac{e^{-t\omega^2}-1}{\omega^2}=\frac{1}{\omega^2}\left(\overbrace{1-t\omega^2+\tfrac{1}{2!}t^2\omega^4-\tfrac{1}{3!}t^3\omega^6+\ldots}^{e^{-t\omega^2}}-1\right)=-t+\tfrac{1}{2!}t^2\omega^2-\tfrac{1}{3!}t^3\omega^4+\ldots$$

donde el último miembro es una serie absoluta y uniformemente convergente en todo el plano de las variables ω y t .

Aplicando el Teorema de Inversión:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}vp\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}vp\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\hat{h}(\omega)e^{-t\omega^2}-\hat{g}(\omega)\frac{e^{-t\omega^2}-1}{\omega^2}\right)e^{i\omega x}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}vp\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{h}(\omega)e^{-t\omega^2+i\omega x}d\omega-\frac{1}{2\pi}vp\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(\omega)\frac{e^{-t\omega^2}-1}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega$$

donde $\hat{h}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega x}}{(1+x^2)^2}dx$.

Obsérvese que el primer término, $u_h(x,t)=\frac{1}{2\pi}vp\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{h}(\omega)e^{-t\omega^2+i\omega x}d\omega$ es la solución de la ecuación homogénea (con la misma condición inicial)

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & -\infty<x<+\infty\ ,\ t>0\\ u(x,0)=\frac{1}{(x^2+1)^2} & -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

y que el segundo término, $u_p(x,t)=-\frac{1}{2\pi}vp\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(\omega)\frac{e^{-t\omega^2}-1}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega$ es la solución de la ecuación no homogénea con condición inicial nula:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+g(t) & -\infty<x<+\infty\ ,\ t>0\\ u(x,0)=0 & -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

---

5. Resolver para $t > 0$, usando transformada de Laplace:

$$\begin{cases}x'(t)=3x(t)+4y(t)+\cos(t)\\ y'(t)=x(t)-3y(t)+(H*H_1)(t)\end{cases}$$

con condiciones iniciales nulas, siendo H la función de Heaviside y $H_1(t)=H(t-1)$ para todo t.

Resolución: Indicando con $X(s)$ e $Y(s)$ las transformadas de Laplace de x e y, tenemos (utilizando propiedades muy conocidas):

$$\begin{cases}sX(s)-\overbrace{x(0+)}^{=0}=3X(s)+4Y(s)+\frac{s}{s^2+1}\\ sY(s)-\overbrace{y(0+)}^{=0}=X(s)-3Y(s)+\frac{1}{s}.\frac{e^{-s}}{s}\end{cases}\quad,\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

Acomodando un poco

$$\begin{cases}(s-3)X(s)-4Y(s)=\frac{s}{s^2+1}\\ -X(s)+(s+3)Y(s)=\frac{e^{-s}}{s^2}\end{cases}$$

y despejando, obtenemos

$$X(s)=\frac{\det\begin{pmatrix}\frac{s}{s^2+1} & -4\\ \frac{e^{-s}}{s^2} & s+3\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}s-3 & -4\\ -1 & s+3\end{pmatrix}}=\frac{1}{s^2-13}\left(\frac{s(s+3)}{s^2+1}+\frac{4e^{-s}}{s^2}\right)$$

$$Y(s)=\frac{\det\begin{pmatrix}s-3 & \frac{s}{s^2+1}\\ -1 & \frac{e^{-s}}{s^2}\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}s-3 & -4\\ -1 & s+3\end{pmatrix}}=\frac{1}{s^2-13}\left(\frac{(s-3)e^{-s}}{s}+\frac{s}{s^2+1}\right)$$

Descomponiendo las fracciones convenientemente (resumimos las cuentas):

$$X(s)=\frac{1}{s^2-13}\left(\frac{s(s+3)}{s^2+1}+\frac{4e^{-s}}{s^2}\right)=$$
$$=\frac{3}{14}\frac{s}{s^2-13}+\frac{13}{14}\frac{1}{s^2-13}-\frac{3}{14}\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{14}\frac{1}{s^2+1}-\frac{4}{13}\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{4}{13}\frac{e^{-s}}{s^2-13}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2-13}\left(\frac{s}{s^2+1}+\frac{(s-3)e^{-s}}{s}\right)=$$
$$=\frac{1}{14}\frac{s}{s^2-13}-\frac{1}{14}\frac{s^2}{s^2+1}+\frac{e^{-s}}{s^2-13}+\frac{3}{13}\frac{e^{-s}}{s}-\frac{3}{13}\frac{se^{-s}}{s^2-13}$$

Ahora, utilizando una tabla básica de transformadas de Laplace, obtenemos:

$$x(t)=\frac{3}{14}\cosh(\sqrt{13}\,t)H(t)+\frac{\sqrt{13}}{14}senh(\sqrt{13}\,t)H(t)-\frac{3}{14}\cos(t)H(t)+$$
$$+\frac{1}{14}sen(t)H(t)-\frac{4}{13}(t-1)H(t-1)+\frac{4}{13\sqrt{13}}senh(\sqrt{13}(t-1))H(t-1)$$

$$y(t)=\frac{1}{14}\cosh(\sqrt{13}\,t)H(t)-\frac{1}{14}\cos(t)H(t)+\frac{1}{\sqrt{13}}senh(\sqrt{13}(t-1))H(t-1)$$
$$+\frac{3}{13}H(t-1)-\frac{3}{13}\cosh(\sqrt{13}(t-1))H(t-1)$$
