Apellido y Nombres: ....,,,,,,...
DNI: .... Padrón: .... Código Asignatura: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....
Correo electrónico: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Tercera fecha. 9 de abril de 2021.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. La función f tiene a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}(z-1-i)^n$ como desarrollo de Taylor centrado en $z_0 = 1+i$, válido en un entorno D. Dadas las curvas $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| = 1\}$ y $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$, ambas orientadas en sentido positivo, sean $\Gamma_1 = f(\gamma_1 \cap D)$ y $\Gamma_2 = f(\gamma_2 \cap D)$. Verificar que Γ_1 y Γ_2 se intersecan en $f(z_0)$. Obtener $f(z_0)$ y la magnitud del ángulo determinado por Γ_1 y Γ_2 en $f(z_0)$. Estudiar el mismo problema para el caso en que la serie está dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{4^n}(z-1-i)^n$.

Ejercicio 2. Se tiene un condensador que encierra la región del plano:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4,\ \ y \leqslant x\right\}$$

para el cual la función potencial en los bordes satisface:

$$u(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad y = x,\ \ (x-2)^2 + (y-2)^2 < 4 \\ 1 & \text{para} \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4,\ \ y < x \end{cases}$$

Hallar una función T de variable compleja que transforme este condensador en uno equivalente de placas paralelas. Indicar cómo quedan las condiciones de contorno en las placas paralelas (no se pide hallar $u(x,y)$).

Ejercicio 3. Resolver el siguiente problema, indicando las hipótesis consideradas sobre f:

$$\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx} - 3x & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ u_t(x,0) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leqslant 1 \\ e^{-2|x|} & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Probar que existe $\hat{f}$, la transformada de Fourier de f. Determinar si f es cuadrado integrable y calcular el valor de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\, d\omega$.

Ejercicio 5. Obtener y en términos de g, sabiendo que para $t > 0$:

$$y(t) = \phi(t-2)H(t-2) + (H * \phi)(t)$$

$$\phi'(t) = \int_0^t g(\tau)\ d\tau$$

con $\phi(0^+) = 0$, siendo $H(t)$ la función de Heaviside.