

Apellido y Nombres:
 DNI: Padrón: Código Asignatura:
 Cursada. Cuatrimestre: Año: Profesor:
 Correo electrónico:

Análisis Matemático III.

Examen Integrador. Quinta fecha. 3 de septiembre de 2021.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Hallar $u(x, y)$ acotada que sea solución del problema de Dirichlet en el semicírculo $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1, x > 0\}$ con condición en la frontera $u(x, y) = 1$ para $y \geq 0$ y $u(x, y) = 0$ para $y < 0$. ¿Es única? Describir un sistema físico que pueda modelarse mediante este problema.

Ejercicio 2. Resolver:

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_t - u_{xx} &= 0 && \text{en } 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u_x(1, t) &= 0 && \text{para todo } t \geq 0 \\ u(x, 0) &= -4 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right) && \text{para todo } 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) &= 0 && \text{para todo } 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Hallar, si existen, las transformadas de Fourier de f y de g y calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x \cos x - \sin x)^2}{x^4} dx, \text{ previo estudio de convergencia.}$$

Ejercicio 4. Resolver:

$$\begin{cases} u_{xx} = \frac{1}{c} u_t + \phi(x) & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-|x|} & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (c > 0)$$

especificando las condiciones supuestas sobre ϕ .

Ejercicio 5. Obtener $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que para $t \geq 0$ verifican:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -3x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + e^{-t}H(t) \end{cases}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0$$

con $H(t)$ función de Heaviside.