Apellido y Nombres: ....,,,,,...
DNI: .... Padrón: .... Código Asignatura: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....
Correo electrónico: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Primera fecha. 11 de septiembre de 2020.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Sabiendo que f admite el siguiente desarrollo de Laurent:

$$\sum_{k=-\infty}^{-1}(-2z)^k+\sum_{k=0}^{\infty}(z/2)^k,$$

decidir, argumentando la respuesta con claridad, si la afirmación $\operatorname{Res}[f,0]=-\frac{1}{2}$, es i) verdadera, ii) falsa o iii) no se puede determinar su valor de verdad.

Ejercicio 2. Sea

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & \text{si} \quad x\in[0,1/2) \\ x+bx^3 & \text{si} \quad x\in[1/2,1] \end{cases}$$

Determinar todos los valores de a y b para los cuales la serie trigonométrica de Fourier de f en $[0,1]$ coincida con f en todo punto de $[0,1]$ salvo exactamente en un punto. Indicar cuál es ese punto y dar el valor de la serie en el mismo.

Ejercicio 3. Considerar el problema del potencial electrostático en la banda infinita:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & -\infty<x<+\infty, \quad 0<y<1 \\ u(x,0)=f_1(x) & -\infty<x<+\infty \\ u(x,1)=f_2(x) & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

Explicar el procedimeinto de resolución para cada uno de los siguientes casos:
a) $f_1(x)=\alpha$ para todo x, $f_2(x)=\beta$ si $x\leqslant 0$ y $f_2(x)=\gamma$ si $x>0$ (α,β y γ constantes),
b) f_1 y f_2 son absolutamente integrables.
Eligir uno de los dos casos y resolverlo.

Ejercicio 4. Mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x+x^3}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}e^{-|x|}\,dx$$

y obtener el valor de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x\,\cos(\alpha x)}{x}\,dx$ para todo α.

Ejercicio 5. Hallar $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ tal que

$$f(t)+\int_0^t f(\tau)\,d\tau=H(t)-H(t-1) \quad \forall t\geqslant 0$$

señalando claramente las propiedades que utiliza e indicando las hipótesis bajo las cuales son válidas.