ANÁLISIS MATEMÁTICO III – PRIMER CUATRIMESTRE 2021

EXAMEN INTEGRADOR – QUINTA FECHA –03/09/2021

RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

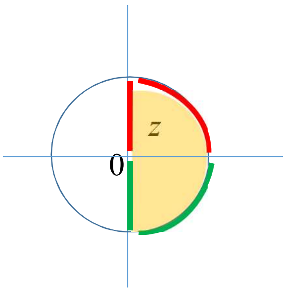
---

1) Hallar $u(x,y)$ acotada que sea solución del problema de Dirichlet en el semicírculo $S = \left\{(x,y)\in\Re^2 : x^2+y^2<1\,,\, x>0\right\}$ con condiciones en la frontera $u(x,y) = 1$ para $y \geq 0$ y $u(x,y) = 1$ para $y < 0$. ¿Es única? Describir un sistema físico que pueda modelarse mediante este problema.

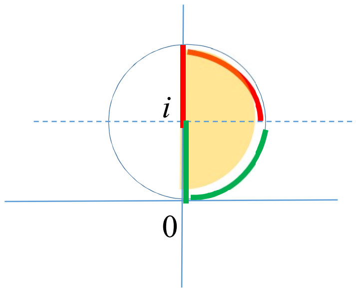
Resolución: Se trata del problema

$$\begin{cases} (i)\ \Delta u(x,y)=0\ , & x^2+y^2<1\,,\, x>0 \\ (ii)\ u(x,y)=1\ , & x^2+y^2=1\,,\, y>0 \\ (ii)\ u(x,y)=0\ , & x^2+y^2=1\,,\, y<0 \end{cases}$$

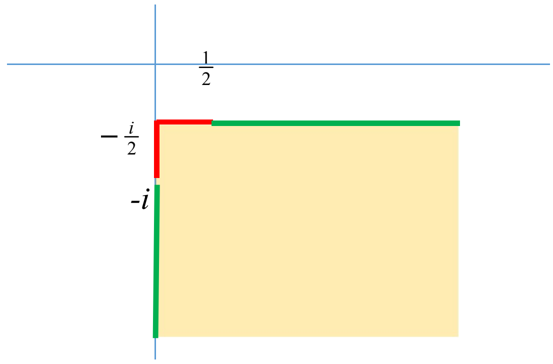
que se puede resolver mediante el método de las transformaciones conformes, dado que las condiciones de frontera son seccionalmente constantes.



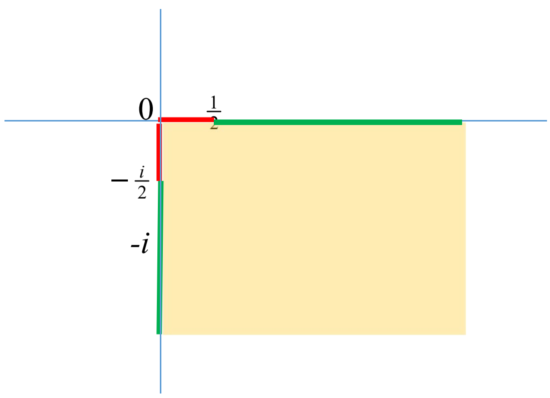
$$z \longrightarrow z+i$$



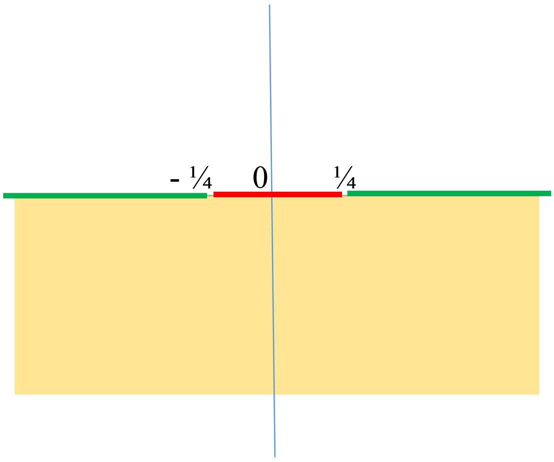
$$z \longrightarrow \frac{1}{z+i}$$



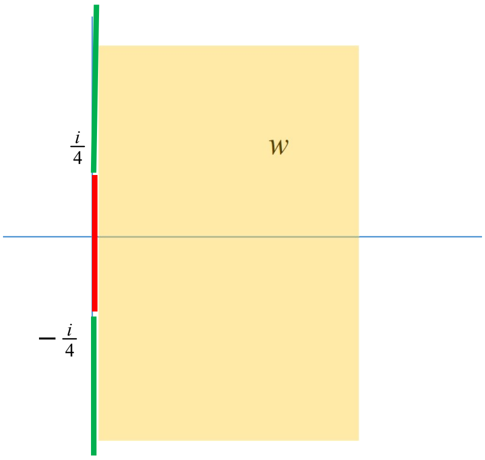
$$z \longrightarrow \frac{i}{2}+\frac{1}{z+i}$$



$$z \longrightarrow \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{z+i}\right)^2$$



$$z \longrightarrow w = i\left(\frac{i}{2} + \frac{1}{z+i}\right)^2$$



Ahora, buscamos u en la forma

$$u(x,y) = aArg\left(w(x+iy) - \frac{i}{4}\right) + bArg\left(w(x+iy) + \frac{i}{4}\right) + c$$

y determinamos las constantes a partir de las ecuaciones

1) $a\frac{\pi}{2} + b\frac{\pi}{2} + c = 0$

2) $-a\frac{\pi}{2} + b\frac{\pi}{2} + c = 1$

3) $-a\frac{\pi}{2} - b\frac{\pi}{2} + c = 0$

y obtenemos $a = -\frac{1}{\pi}$, $b = \frac{1}{\pi}$ y $c = 0$. Por lo tanto,

$$u(x,y) = -\frac{1}{\pi}Arg\left(w(x+iy) - \frac{i}{4}\right) + \frac{1}{\pi}Arg\left(w(x+iy) + \frac{i}{4}\right)$$

Finalmente, dado que $-\frac{\pi}{2} \le Arg\left(w(x+iy) - \frac{i}{4} \right) \le \frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} \le Arg\left(w(x+iy) + \frac{i}{4} \right) \le \frac{\pi}{2}$, podemos utilizar la función arcotangente para el cálculo de los argumentos principales, es decir:

$$u(x,y) = -\frac{1}{\pi} artg\left(\frac{\operatorname{Im}\left(w(x+iy) - \frac{i}{4} \right)}{\operatorname{Re}\left(w(x+iy) - \frac{i}{4} \right)} \right) + \frac{1}{\pi} artg\left(\frac{\operatorname{Im}\left(w(x+iy) + \frac{i}{4} \right)}{\operatorname{Re}\left(w(x+iy) + \frac{i}{4} \right)} \right)$$

donde $w(x+iy) = i\left(\frac{i}{2} + \frac{1}{x+(y+1)i} \right)^2$.

Esta es la única solución acotada del problema planteado, como se prueba en al apéndice de los Apuntes sobre Ecuaciones Diferenciales.

---

2) Resolver:

$$\begin{cases} (i)\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}(x,t) = 0 & : \ 0 < x < 1, t > 0 \\ (ii)\ u(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & : \ t \ge 0 \\ (iii)\ u(x,0) = -4sen(\frac{\pi}{2}x) + 3sen(\frac{5\pi}{2}x) & : \ 0 \le x \le 1 \\ (iv)\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & : \ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

***Resolución**:* Podemos utilizar el popular método de separación de variables – principio de superposición. La condición inicial (*iii*) sugiere buscar, directamente, soluciones de la forma

$$u(x,t) = sen(\tfrac{\pi}{2}x)\alpha(t) + sen(\tfrac{5\pi}{2}x)\beta(t) \qquad (*)$$

Observación: cualesquiera sean las funciones α y β, la función (*) verifica las condiciones de frontera (*ii*), como puede comprobarse directamente.

En la ecuación (*i*), e indicando la derivada respecto de *t* mediante un puntito (homenaje permanente a Don Isaac):

$$sen(\tfrac{\pi}{2}x)\ddot{\alpha}(t) + sen(\tfrac{5\pi}{2}x)\ddot{\beta}(t) + sen(\tfrac{\pi}{2}x)\dot{\alpha}(t) + sen(\tfrac{5\pi}{2}x)\dot{\beta}(t) +$$
$$+ \tfrac{\pi^2}{4} sen(\tfrac{\pi}{2}x)\alpha(t) + \tfrac{25\pi^2}{4} sen(\tfrac{5\pi}{2}x)\beta(t) = 0$$

Es decir:

$$sen(\tfrac{\pi}{2}x)[\ddot{\alpha}(t) + \dot{\alpha}(t) + \tfrac{\pi^2}{4}\alpha(t)] + sen(\tfrac{5\pi}{2}x)[\ddot{\beta}(t) + \dot{\beta}(t) + \tfrac{25\pi^2}{4}\beta(t)] = 0$$

Tenemos, entonces, las ecuaciones

$$\ddot{\alpha}(t) + \dot{\alpha}(t) + \tfrac{\pi^2}{4}\alpha(t) = 0 \quad \text{y} \quad \ddot{\beta}(t) + \dot{\beta}(t) + \tfrac{25\pi^2}{4}\beta(t) = 0$$

cuyas soluciones generales (Álgebra II) son, respectivamente,

$$\alpha(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left[A\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2 - 1}\right) + Bsen\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2 - 1}\right)\right]$$

$$\beta(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left[C\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2 - 1}\right) + Dsen\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2 - 1}\right)\right]$$

Por lo tanto, cualesquiera sean las constantes *A*, *B*, *C* y *D*, la función

$$u(x,t) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)e^{-\frac{t}{2}}\left[A\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2 - 1}\right) + Bsen\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2 - 1}\right)\right]$$
$$+ sen\left(\frac{5\pi}{2}x\right)e^{-\frac{t}{2}}\left[C\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2 - 1}\right) + Dsen\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2 - 1}\right)\right]$$

verifica la ecuación (*i*) y también las condiciones de frontera (*ii*), como hemos observado previamente. Veamos ahora las condiciones iniciales (*iii*) y (*iv*):

$$u(x,0) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)A + sen\left(\frac{5\pi}{2}x\right)C \ : \ A = -4 \, , C = 3$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)e^{-\frac{t}{2}}\left[A\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2 - 1}\right) + Bsen\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2 - 1}\right)\right] +$$
$$+ sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)e^{-\frac{t}{2}}\left[-Asen\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2 - 1}\right)\frac{\sqrt{\pi^2 - 1}}{2} + B\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2 - 1}\right)\frac{\sqrt{\pi^2 - 1}}{2}\right] +$$

$$-\frac{1}{2}sen\left(\frac{5\pi}{2}x\right)e^{-\frac{t}{2}}\left[C\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2-1}\right)+Dsen\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2-1}\right)\right]+$$

$$+sen\left(\frac{5\pi}{2}x\right)e^{-\frac{t}{2}}\left[-Csen\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2-1}\right)\frac{\sqrt{25\pi^2-1}}{2}+D\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2-1}\right)\frac{\sqrt{25\pi^2-1}}{2}\right]$$

Para $t = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=-\frac{1}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)A+sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)B\frac{\sqrt{\pi^2-1}}{2}+$$

$$-\frac{1}{2}sen\left(\frac{5\pi}{2}x\right)C+sen\left(\frac{5\pi}{2}x\right)D\frac{\sqrt{25\pi^2-1}}{2}=$$

$$=sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left[-\frac{A}{2}+\frac{B\sqrt{\pi^2-1}}{2}\right]+sen\left(\frac{5\pi}{2}x\right)\left[-\frac{C}{2}+\frac{D\sqrt{25\pi^2-1}}{2}\right]$$

Es decir:

$$A=-4\,,\;C=3\,,\;B=\frac{A}{\sqrt{\pi^2-1}}=-\frac{4}{\sqrt{\pi^2-1}}\;\text{ y }\;D=\frac{C}{\sqrt{25\pi^2-1}}=\frac{3}{\sqrt{25\pi^2-1}}$$

Por lo tanto, la solución del problema es

$$u(x,t)=-4sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)e^{-\frac{t}{2}}\left[\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2-1}\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi^2-1}}sen\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2-1}\right)\right]$$

$$+3sen\left(\frac{5\pi}{2}x\right)e^{-\frac{t}{2}}\left[\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2-1}\right)+\frac{1}{\sqrt{25\pi^2-1}}sen\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2-1}\right)\right]$$

---

3) Sean $f:\Re \longrightarrow \Re$ tal que y $g:\Re \longrightarrow \Re$ tales que

$$f(x)=\begin{cases} x & si\ |x|\le 1 \\ 0 & si\ |x|>1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{x\cos(x)-sen(x)}{x^2} & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$$

Hallar, si existen, las transformadas de Fourier de f y de g y calcular la integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[x\cos(x)-sen(x)]^2}{x^4}dx$, previo estudio de convergencia.

Resolución: Es evidente que *f* es seccionalmente continua y absolutamente integrable, por lo tanto admite transformada de Fourier. Ahora, estudiemos la existencia de la transformada de Fourier de *g*, que es claramente continua en $\Re - \{0\}$. Veamos si lo es en 0. Para todo $x \neq 0$, es

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - ...\right) - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ...\right)}{x^2} = \\
&= \frac{(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!})x^3 + (\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!})x^5 - (-\frac{1}{6!} + \frac{1}{7!})x^7 ...}{x^2} = \\
&= \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right)x + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}\right)x^5 + ...
\end{aligned}
$$

y por lo tanto *g* es continua en *x* = 0, pues $\underset{x \to 0}{Lim}\, g(x) = 0 = g(0)$. Ahora, respecto de la existencia de su transformada de Fourier, para cada real *b* > 1:

$$
\int_{-b}^{b} g(x)e^{-i\omega x}dx = \int_{-1}^{1} g(x)e^{-i\omega x}dx + \int_{-b}^{-1} g(x)e^{-i\omega x}dx + \int_{1}^{+b} g(x)e^{-i\omega x}dx =
$$

$$
= \int_{-1}^{1} g(x)e^{-i\omega x}dx + \int_{-b}^{-1} \frac{\cos(x)}{x}e^{-i\omega x}dx - \int_{-b}^{-1} \frac{sen(x)}{x^2}e^{-i\omega x}dx + \int_{1}^{b} \frac{\cos(x)}{x}e^{-i\omega x}dx - \int_{1}^{b} \frac{sen(x)}{x^2}e^{-i\omega x}dx
$$

La primera integral no es impropia, pues *g* es continua; las integrales tercera y quinta convergen absolutamente (cuando $b \longrightarrow +\infty$), pues para todo $x \neq 0$: $\left|\frac{sen(x)e^{-i\omega x}}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$.

Mediante el cambio de variable de integración *x* = - *t* en la segunda integral, la suma de las integrales segunda y cuarta nos queda

$$
\begin{aligned}
&\int_{-b}^{-1} \frac{\cos(x)}{x}e^{-i\omega x}dx + \int_{1}^{b} \frac{\cos(x)}{x}e^{-i\omega x}dx = \int_{b}^{1} \frac{\cos(-t)}{-t}e^{i\omega t}(-dt) + \int_{1}^{b} \frac{\cos(x)}{x}e^{-i\omega x}dx = \\
&= \int_{b}^{1} \frac{\cos(t)}{t}e^{i\omega t}dt + \int_{1}^{b} \frac{\cos(x)}{x}e^{-i\omega x}dx = -\int_{1}^{b} \frac{\cos(t)}{t}e^{i\omega t}dt + \int_{1}^{b} \frac{\cos(x)}{x}e^{-i\omega x}dx = \\
&= \int_{1}^{b} \frac{\cos(x)}{x}[e^{-i\omega x} - e^{i\omega x}]dx = -2i\int_{1}^{b} \frac{\cos(x)sen(\omega x)}{x}dx
\end{aligned}
$$

La convergencia de esta integral (cuando $b \longrightarrow +\infty$) puede probarse mediante el criterio de Dirichlet (página 9 de los Apuntes sobre Integrales Impropias). Hemos comprobado la existencia de la transformada de Fourier de *g* en el sentido del valor principal, es decir: la existencia de $vp\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{i\omega x}dx$ para todo $\omega \in \Re$.

Ahora, calculemos:

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-1}^{1} xe^{-i\omega x}dx \overset{\omega\neq 0}{=} \int_{-1}^{1}\left\{\frac{d}{dx}\left[\frac{xe^{-i\omega x}}{-i\omega}\right]+\frac{e^{-i\omega x}}{i\omega}\right\}dx=$$

$$=\left[\frac{xe^{-i\omega x}}{-i\omega}\right]_{x=-1}^{x=1}+\frac{1}{i\omega}\int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}dx=\frac{e^{-i\omega x}-(-1)e^{i\omega x}}{-i\omega}+\frac{1}{i\omega}\left[\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\right]_{x=-1}^{x=1}=$$

$$=\frac{e^{-i\omega x}+e^{i\omega x}}{-i\omega}+\frac{e^{-i\omega x}-e^{i\omega x}}{\omega^2}=i\frac{e^{-i\omega x}+e^{i\omega x}}{\omega}-\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{\omega^2}=$$

$$=2i\frac{\cos(\omega)}{\omega}-2i\frac{sen(\omega)}{\omega^2}=2i\frac{\omega\cos(\omega)-sen(\omega)}{\omega^2}$$

Ahora, para $\omega=0$, $\hat{f}(0)=\int_{-1}^{1} xdx=0$ y resulta, finalmente,

$$\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\omega\cos(\omega)-sen(\omega)}{\omega^2} & si\ \omega\neq 0\\ 0 & si\ \omega=0\end{cases}$$

Es decir: $\hat{f}(\omega)=g(\omega)$. Ahora, f es seccionalmente continua y admite derivadas laterales finitas en todos los puntos de su dominio, por lo tanto podemos, aplicar el Teorema de Inversión (página 5 de los Apuntes sobre la Transformación de Fourier): para todo $x\in\Re$ se verifica

$$\frac{1}{2\pi}vp\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$$

Indiquemos con $\not{f}$ la función del segundo miembro, es decir:

$$\not{f}(x)=\begin{cases}0 & si \quad x<-1\\ -\frac{1}{2} & si \quad x=-1\\ x & si \quad -1<x<1\\ \frac{1}{2} & si \quad x=1\\ 0 & si \quad x>1\end{cases}$$

Entonces, $\not f(x)=\frac{1}{2\pi}vp\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}vp\int_{-\infty}^{+\infty}g(\omega)e^{i\omega x}d\omega \quad x\in\Re$. Por lo tanto, para todo $x\in\Re$: $vp\int_{-\infty}^{+\infty}g(\omega)e^{-i\omega x}d\omega=2\pi\not f(-x)$, y renombrando las variables obtenemos la transformada de Fourier de g:

$$\hat{g}(\omega)=vp\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{-it\omega}dt=2\pi\not f(-\omega)=\begin{cases}0 & si \quad \omega<-1\\ \frac{1}{2} & si \quad \omega=-1\\ -\omega & si \quad -1<\omega<1\\ -\frac{1}{2} & si \quad \omega=1\\ 0 & si \quad \omega>1\end{cases}$$

Finalmente, la convergencia de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[x\cos(x)-sen(x)]^2}{x^4}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|^2dx$ se puede probar observando que g es continua (lo hemos probado arriba) y que para $|x|>1$, es

$$\frac{[x\cos(x)-sen(x)]^2}{x^4}\le\frac{(|x|+1)^2}{x^4}=\frac{1}{x^2}+\frac{2}{|x|^3}+\frac{1}{x^4}$$

Por lo tanto, la integral converge y para calcularla podemos utilizar la identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[x\cos(x)-sen(x)]^2}{x^4}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|g(\omega)|^2d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2d\omega= \quad \text{(Teorema de Parseval)}$$

$$=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx=2\pi\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{4\pi}{3}$$

---

4) Dada una constante real $c>0$ y una función $\phi:\Re\longrightarrow\Re$, resolver

$$\begin{cases}(i)\ \frac{\partial^2u}{\partial x^2}(x,y)=\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\phi(x) & : \quad -\infty<x<+\infty\,,\, t>0\\ (ii)\ u(x,0)=e^{-|x|} & : \quad -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

especificando las condiciones supuestas sobre ϕ.

Resolución: Vamos a suponer que ϕ admite transformada de Fourier y que puede recuperarse mediante la fórmula de inversión. Ahora, respecto de la función u, vamos a suponer que es maravillosamente integrable y derivable. Aplicando la transformación de Fourier en (i) (respecto de x, obviamente):

$$-\omega^2\hat{u}(\omega,t)=\frac{1}{c}\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(\omega,t)+\hat{\phi}(\omega)$$

donde $\hat{u}(\omega,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}dx$. Una de las condiciones que hemos supuesto sobre *u* es la posibilidad de intercambiar su transformación de Fourier con la derivación respecto de *t*. Ahora, multiplicando la ecuación

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(\omega,t)+c\omega^2\hat{u}(\omega,t)+c\hat{\phi}(\omega)=0 \qquad (*1)$$

por el factor integrante $e^{c\omega^2 t}$:

$$e^{c\omega^2 t}\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(\omega,t)+e^{c\omega^2 t}c^2\omega^2\hat{u}(\omega,t)+e^{c\omega^2 t}c^2\hat{\phi}(\omega)=0$$

resulta que para todo $\omega\neq 0$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{c\omega^2 t}\hat{u}(\omega,t)+\frac{e^{c\omega^2 t}}{\omega^2}\hat{\phi}(\omega)\right]=0$$

Dado que esto es válido para todo $t\in(0,+\infty)$, la función entre corchetes es constante respecto de *t*, es decir:

$$e^{c\omega^2 t}\hat{u}(\omega,t)+\frac{e^{c\omega^2 t}}{\omega^2}\hat{\phi}(\omega)=\alpha(\omega)$$

para alguna función *α*, es decir:

$$\hat{u}(\omega,t)=\alpha(\omega)e^{-c\omega^2 t}-\frac{\hat{\phi}(\omega)}{\omega^2} \quad , \quad \omega\neq 0,\, t\geq 0 \qquad (*2)$$

Para $\omega=0$, la ecuación (*1) queda $\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(0,t)+c\hat{\phi}(0)=0$, entonces existe una constante *k* tal que

$$\hat{u}(0,t)=-tc\hat{\phi}(0)+k \quad , \; t\geq 0 \qquad (*3)$$

Ahora, de la condición inicial (*ii*):

$$\hat{u}(\omega,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,0)e^{-i\omega x}dx\overset{(ii)}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|-i\omega x}dx=\frac{2}{1+\omega^2}$$

(la última igualdad es una cuenta bastante sencilla y puede verse en el Ejemplo 3 de los Apuntes Sobre la Transformada de Fourier, página 9). Reemplazando en (*2):

$$\frac{2}{1+\omega^2}=\alpha(\omega)-\frac{\hat{\phi}(\omega)}{\omega^2}$$

podemos despejar la función α y entonces, para todo $\omega\neq 0, t\geq 0$:

$$\hat{u}(\omega,t)=\left[\frac{2}{1+\omega^2}+\frac{\hat{\phi}(\omega)}{\omega^2}\right]e^{-c\omega^2 t}-\frac{\hat{\phi}(\omega)}{\omega^2}=\frac{2e^{-c\omega^2 t}}{1+\omega^2}+\frac{e^{-c\omega^2 t}-1}{\omega^2}\hat{\phi}(\omega) \qquad (*4)$$

Obsérvese que:

(a) el primer término, $\dfrac{2e^{-c\omega^2 t}}{1+\omega^2}$, es solución del caso $\hat{\phi}=0$ (es decir: el caso homogéneo) de la ecuación (*1) con la condición inicial $\hat{u}(\omega,0)=\dfrac{2}{1+\omega^2}$;

(b) el segundo término,

$$\frac{e^{-c\omega^2 t}-1}{\omega^2}\hat{\phi}(\omega)=\frac{1}{\omega^2}\left[-c\omega^2 t+\tfrac{1}{2!}(c\omega^2 t)^2-\tfrac{1}{3!}(c\omega^2 t)^3+\ldots\right]\hat{\phi}(\omega) =$$

$$=\left[-ct+\tfrac{1}{2!}(ct)^2\omega^2-\tfrac{1}{3!}(ct)^3\omega^4+\ldots\right]\hat{\phi}(\omega)$$

tiende a $-ct\hat{\phi}(0)$ cuando $\omega\longrightarrow 0$. Por lo tanto, $\underset{\omega\to 0}{Lim}\,\hat{u}(\omega,t)\overset{(*4)}{=}2-ct\hat{\phi}(0)$. Comparando con (*3), la elección k = 2 implica la continuidad de $\hat{u}$ en la semirrecta de ecuación $\omega=0$ de su dominio.

Finalmente, obtenemos

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{2e^{-c\omega^2 t}}{1+\omega^2}+\frac{e^{-c\omega^2 t}-1}{\omega^2}\hat{\phi}(\omega)\right]e^{i\omega x}d\omega$$

(alguna cuenta más se puede hacer).

---

5) Obtener $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que para $t \geq 0$ verifican

$$\begin{cases} (1)\ \ x_1'(t) = -3x_1(t) + x_2(t) \\ (2)\ \ x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + e^{-t}H(t) \end{cases}$$

con las condiciones $x_1(0) = x_2(0) = 0$, siendo H la función de Heaviside.

Resolución: La matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ es diagonalizable en los reales y por lo tanto el sistema se puede resolver con facilidad utilizando los métodos aprendidos en Álgebra II. Nosotros utilizaremos en esta resolución la transformación de Laplace.

Transformando el sistema y utilizando mayúsculas para las transformadas de Laplace de las funciones involucradas, tenemos (dadas las condiciones iniciales $x_1(0) = x_2(0) = 0$):

$$\begin{cases} (\tilde{1})\ sX_1(s) = -3X_1(s) + X_2(s) \\ (\tilde{2})\ sX_2(s) = X_1(s) - 2X_2(s) + \dfrac{1}{s+1} \end{cases} \quad , \quad \operatorname{Re}(s) > -1$$

Acomodando un poco las ecuaciones

$$\begin{cases} (\tilde{\tilde{1}})\ (s+3)X_1(s) - X_2(s) = 0 \\ (\tilde{\tilde{2}}) - X_1(s) + (s+2)X_2(s) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

y despejando:

$$X_1(s) = \frac{\det\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{s+1} & s+2 \end{bmatrix}}{s^2 + 5s + 5} = \frac{1}{(s+1)(s^2 + 5s + 5)}$$

$$X_2(s) = \frac{\det\begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ -1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}}{s^2 + 5s + 5} = \frac{s+3}{(s+1)(s^2 + 5s + 5)}$$

Factorizamos

$$(s+1)(s^2+5s+5)=(s+1)(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)$$

donde $\lambda_1=\frac{1}{2}(-5+\sqrt{5})$ y $\lambda_2=\frac{1}{2}(-5-\sqrt{5})$ son las raíces de s^2+5s+5 (es decir: los autovalores de la matriz A ¡oh, casualidad!). Es importante observar que $\lambda_2<\lambda_1<-1$, pues estamos trabajando con la condición $\mathrm{Re}(s)>-1$ y por lo tanto $s^2+5s+5\neq 0$.

Ahora, cualesquiera sean las constantes *a*, *b* y *c* (distintas) se verifican las identidades

$$\frac{\frac{1}{(a-b)(a-c)}}{s-a}+\frac{\frac{1}{(b-a)(b-c)}}{s-b}+\frac{\frac{1}{(c-a)(c-b)}}{s-c}=\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (*1)$$

$$\frac{\frac{a+3}{(a-b)(a-c)}}{s-a}+\frac{\frac{b+3}{(b-a)(b-c)}}{s-b}+\frac{\frac{c+3}{(c-a)(c-b)}}{s-c}=\frac{s+3}{(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (*2)$$

para cada $s\in\mathbb{C}-\{a,b,c\}$(vieja y conocida descomposición en fracciones simples). Por lo tanto,

$$X_1(s)=\frac{\frac{1}{(a-b)(a-c)}}{s-a}+\frac{\frac{1}{(b-a)(b-c)}}{s-b}+\frac{\frac{1}{(c-a)(c-b)}}{s-c} \quad \text{y} \quad X_2(s)=\frac{\frac{a+3}{(a-b)(a-c)}}{s-a}+\frac{\frac{b+3}{(b-a)(b-c)}}{s-b}+\frac{\frac{c+3}{(c-a)(c-b)}}{s-c}$$

donde $a=-1$, $b=\lambda_1=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ y $c=\lambda_2=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$. Finalmente, entonces,

$$x_1(t)=\left[\frac{e^{at}}{(a-b)(a-c)}+\frac{e^{bt}}{(b-a)(b-c)}+\frac{e^{ct}}{(c-a)(c-b)}\right]H(t)$$

$$x_2(t)=\left[\frac{(a+3)e^{at}}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b+3)e^{bt}}{(b-a)(b-c)}+\frac{(c+3)e^{ct}}{(c-a)(c-b)}\right]H(t)$$

Observación: para comprobar que $x_1(0^+)=x_2(0^+)=0$ debemos verificar que

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$$

y $$\frac{a+3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b+3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c+3}{(c-a)(c-b)}=0$$

Para ahorrar cuentas, podemos utilizar las identidades (*1) y (*2). Multiplicando estas identidades por s - a, para cada $s \in \mathbb{C}-\{a,b,c\}$ resulta

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}\left(\frac{s-a}{s-b}\right)+\frac{1}{(c-a)(c-b)}\left(\frac{s-a}{s-c}\right)=\frac{1}{(s-b)(s-c)}$$

$$\frac{a+3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b+3}{(b-a)(b-c)}\left(\frac{s-a}{s-b}\right)+\frac{c+3}{(c-a)(c-b)}\left(\frac{s-a}{s-c}\right)=\frac{s+3}{(s-b)(s-c)}$$

Tomando s real (por ejemplo) y tendiendo a ∞ obtenemos

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$$

y $$\frac{a+3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b+3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c+3}{(c-a)(c-b)}=0$$

respectivamente.
