ANÁLISIS MATEMÁTICO III – SEGUNDO CUATRIMESTRE 2021

EXAMEN INTEGRADOR – PRIMERA FECHA – 11/02/2022

RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

---

1. Determinar para qué valores de $\beta \in \Re$ la integral $\int_0^{+\infty} \frac{x^{2\beta}}{1+x^2}dx$ es convergente. Calcular la integral para el caso $\beta = \frac{1}{4}$.

Resolución: Para $\beta = 0$ la integral es claramente convergente, pues

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx = artg(b) \xrightarrow[b\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Para $\beta > 0$ el integrando $f(x) = \frac{x^{2\beta}}{1+x^2}$ es continuo y positivo en cada intervalo $[0,b]$ y por lo tanto podemos utilizar el criterio de comparación asintótica con la función $g(x) = \frac{x^{2\beta}}{x^2} = x^{2(\beta-1)}$. Recordemos (una vez más), que por ser *f* continua en cada intervalo $[0,b]$, la integral $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge sii es convergente la integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ (o cualquiera de las integrales $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, con $a > 0$).

La integral $\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} x^{2(\beta-1)}dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2(1-\beta)}}$ converge sii $2(1-\beta) > 1$ [Ejemplo 5 (a) – página 6 – Apunte sobre Integrales Impropias], es decir, sii $\beta < \frac{1}{2}$. Por otra parte,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^{2\beta}}{x^{2\beta-2}(1+x^2)} = \frac{x^2}{1+x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

El criterio de comparación asintótica permite concluir, entonces, que para $\beta > 0$, la integral converge sii $\beta < \frac{1}{2}$.

Veamos, por último, el caso $\beta < 0$. Pongamos $\beta = -\alpha$ con $\alpha > 0$ y estudiemos la convergencia de

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2\beta}}{1+x^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}(1+x^2)} = \overbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^{2\alpha}(1+x^2)}}^{A} + \overbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}(1+x^2)}}^{B}$$

La integral

$$A = \int_0^1 \frac{dx}{x^{2\alpha}(1+x^2)} \overset{x=\frac{1}{t}}{=} -\int_{+\infty}^1 \frac{t^{2\alpha}}{1+t^{-2}}\frac{dt}{t^2} = \int_1^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{t^2+1}$$

converge sii $\alpha < \frac{1}{2}$, como hemos visto previamente (en el caso $\beta > 0$), mientras que la integral $B = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}(1+x^2)}$ converge cualquiera sea $\alpha > 0$, pues el integrando está acotado (para cada x en la semirrecta $[1,+\infty)$) por $\frac{1}{1+x^2}$, función integrable en $[1,+\infty)$, si las hay.

Por lo tanto, en el caso $\beta < 0$, la integral $\int_0^{+\infty} \frac{x^{2\beta}}{1+x^2}dx$ converge sii $-\beta = \alpha < \frac{1}{2}$, es decir: sii $\beta > -\frac{1}{2}$.

Resumiendo: la integral $\int_0^{+\infty} \frac{x^{2\beta}}{1+x^2}dx$ converge sii $-\frac{1}{2} < \beta < \frac{1}{2}$.

Cálculo para el caso $\beta = \frac{1}{4}$: se trata de calcular el valor de la integral impropia

$$\Lambda = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx \overset{x=t^2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^4}2tdt = 2\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt \overset{\substack{Integrando\\ par}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt$$

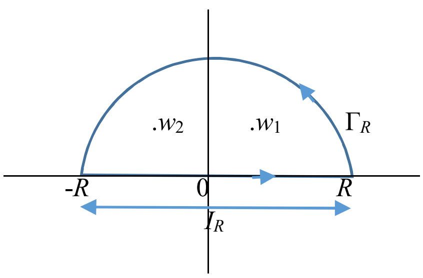
Se trata de una típica integral calculable mediante los métodos clásicos de variable compleja. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{z^2}{(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)(z-w_4)}$$

donde

$$w_1 = e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}},\ w_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}},\ w_3 = -e^{\frac{\pi}{4}i} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \text{ y } w_4 = -e^{\frac{3\pi}{4}i} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

son las cuatro raíces cuartas de -1. Para cada $R > 1$, consideremos la integral de f sobre el siguiente circuito (ya muy popular) y aplicamos el teorema de los residuos:



$$\int_{I_R} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i[RES(f,w_1) + RES(f,w_2)] \qquad (*R)$$

El plan es utilizar el hecho de que el segundo miembro de estas integrales no dependen de *R*, mientras que la primera integral del primer miembro

$$\int_{I_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}dx \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \Lambda$$

Resta ver que $\underset{R\to+\infty}{Lim} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$ (es un ejercicio clásico):

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{R^2.e^{2i\theta}}{1+R^4e^{4i\theta}} Rie^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^{\pi} \left|\frac{R^2.e^{2i\theta}}{1+R^4e^{4i\theta}} Rie^{i\theta}\right| d\theta =$$

$$= R^3\int_0^{\pi} \left|\frac{1}{1+R^4e^{4i\theta}}\right| d\theta = R^3\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left|R^4e^{4i\theta}-(-1)\right|} \le R^3\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left\|R^4e^{4i\theta}\right|-\left|-1\right\|} \overset{R>1}{=} \frac{R^3}{R^4-1}\int_0^{\pi} d\theta \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Por lo tanto, tomando límites en (**R*) para $R \longrightarrow +\infty$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = 2\pi i[RES(f,w_1) + RES(f,w_2)]$$

El cálculo de estos residuos es sencillo pues se trata de dos polos simples:

$$(z-w_1)f(z) = \frac{z-w_1}{1+z^4}.z^2 \xrightarrow[z\to w_1]{} \frac{1}{4w_1^3}w_1^2 = \frac{1}{4w_1} \overset{|w_1|=1}{=} \frac{\overline{w_1}}{4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i)$$

$$(z-w_2)f(z) = \frac{z-w_2}{1+z^4}.z^2 \xrightarrow[z\to w_1]{} \frac{1}{4w_2^3}w_2^2 = \frac{1}{4w_2} \overset{|w_2|=1}{=} \frac{\overline{w_2}}{4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-i)$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = 2\pi i[RES(f,w_1) + RES(f,w_2)] = 2\pi i\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i) - \frac{1}{4\sqrt{2}}(1+i)\right) = \frac{\pi i}{2\sqrt{2}}(-2i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

***Respuesta* 1:** La integral $\int_0^{+\infty} \frac{x^{2\beta}}{1+x^2}dx$ converge sii $-\frac{1}{2} < \beta < \frac{1}{2}$ y $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Nota sobre los cambios de variables en integrales impropias hechos en esta resolución:

Uno de los cambios de variable fue:

$$A=\int_0^1 \frac{dx}{x^{2\alpha}(1+x^2)} \overset{x=\frac{1}{t}}{=} -\int_{+\infty}^{1} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^{-2}}\frac{dt}{t^2} = \int_1^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{t^2+1}dt$$

Dado que el cambio de variables en integrales impropias debe hacerse con mucha delicadeza, la forma correcta (y segura) de hacer este cambio es trabajar con un parámetro ε (tal que $0<\varepsilon<1$) y tomar límite:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^{2\alpha}(1+x^2)} \overset{x=\frac{1}{t}}{=} -\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{1} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^{-2}}\frac{dt}{t^2} = \int_1^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{t^{2\alpha}}{t^2+1}dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{t^2+1}dt$$

En el otro cambio, $\Lambda=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx \overset{x=t^2}{=} \int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^4}2tdt$, hay que considerar las integrales

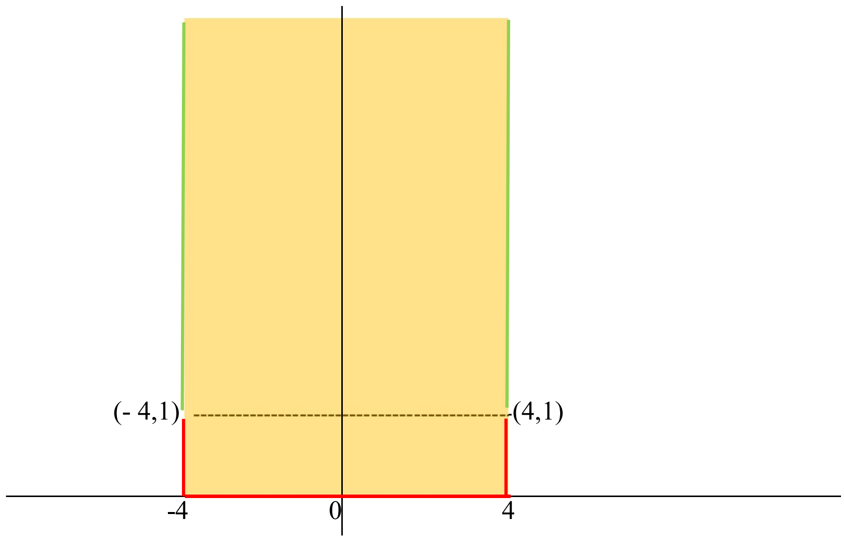
$$\Lambda(b)=\int_0^{b}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx \overset{x=t^2}{=} \int_0^{\sqrt{b}}\frac{t}{1+t^4}2tdt = 2\int_0^{\sqrt{b}}\frac{t^2}{1+t^4}dt \overset{\substack{Integrando\\ par}}{=} \int_{-\sqrt{b}}^{+\sqrt{b}}\frac{t^2}{1+t^4}dt$$

y tomar límite cuando $b \longrightarrow +\infty$.

---

2. Considerar el problema de temperatura en estado estacionario en una placa plana y homogénea que coincide con el conjunto del plano $A=\left\{(x,y)\in\Re^2 : |x|\le 4\ ,\ y\ge 0\right\}$, con temperatura de valor constante 1 en los puntos del borde de *A* con ordenada >1 y 0 en los de ordenada <1. Formularlo en términos de una ecuación diferencial con condiciones de contorno. Obtener su solución *u*(*x*,*y*) y analizar su simetría respecto del eje de ordenadas.

Resolución: Se trata del problema de Dirichlet esquematizado en el siguiente gráfico:

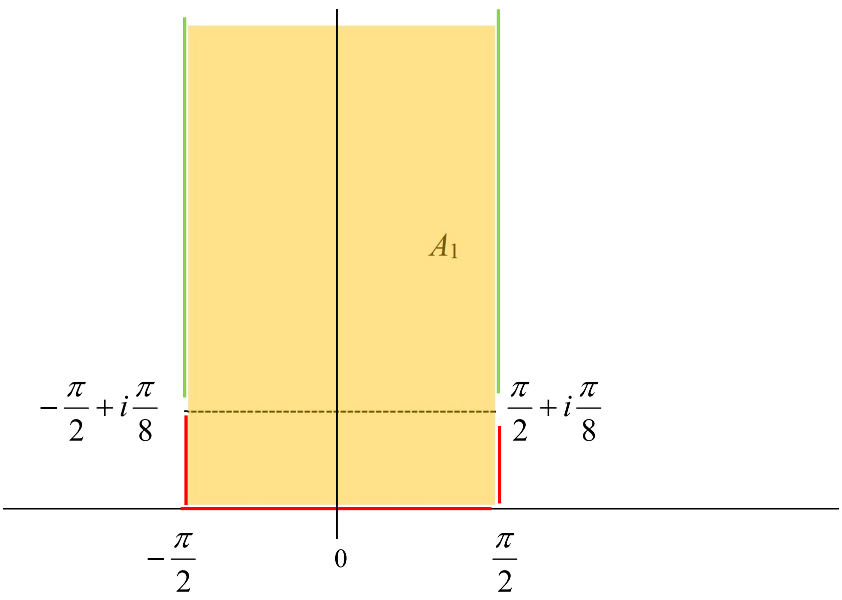


$$\left.\begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ en el interior de la banda} \\ u = 1 \text{ en las semirrectas verdes} \\ u = 0 \text{ en los segmentos rojos} \end{array}\right. \qquad (*)$$

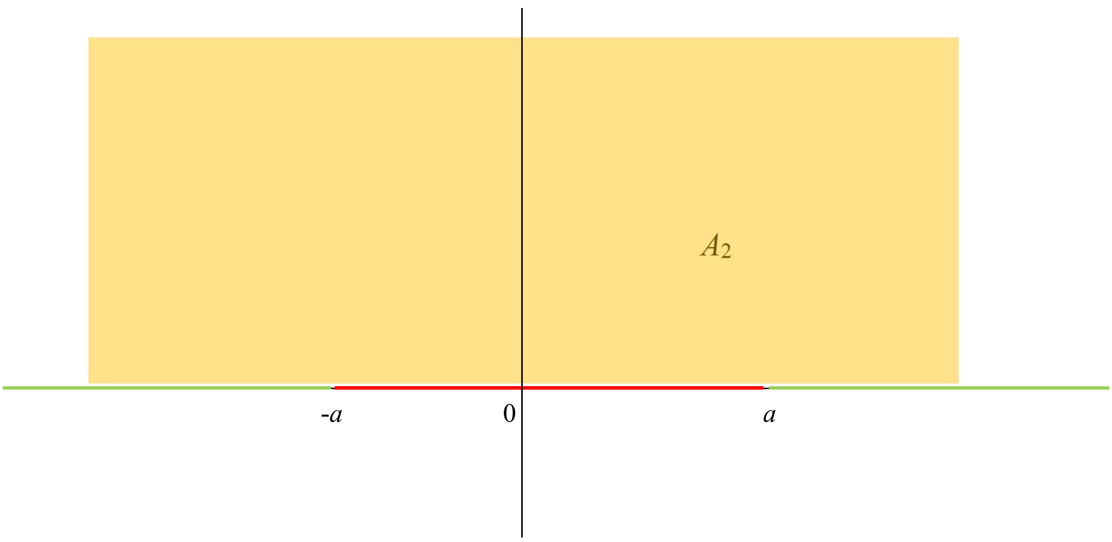
Además, vamos a considerar que u es acotada en A, con lo cual existe una única solución de este problema (el recinto A no es acotado, por lo tanto (*) no tiene solución única, pero sí una única solución acotada).

Para resolver este problema, donde las condiciones de contorno son seccionalmente constantes, podemos utilizar el método de las transformaciones conformes.

Primera transformación: $z \mapsto z_1 = \frac{\pi}{8} z$:



Segunda transformación: $z_1 \mapsto z_2 = sen(z_1)$:

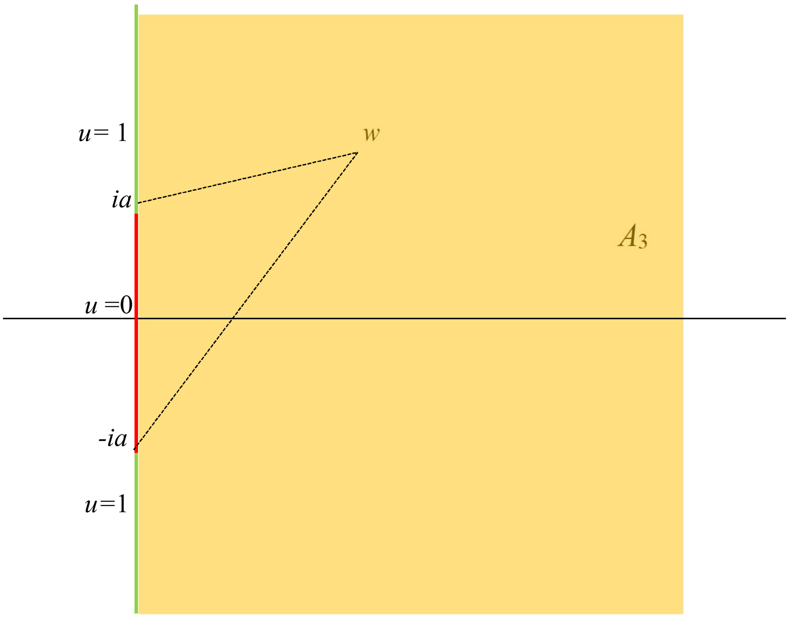


donde

$$a = sen\left(\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{8}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)senh\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cosh\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 1{,}078$$

(obsérvese que $sen\left(-\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{8}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)senh\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\cosh\left(\frac{\pi}{8}\right) = -a$)

Tercera transformación: $z_2 \mapsto w = -iz_2$:



Resumiendo: $w = -iz_2 = -isen(z_1) = -isen\left(\frac{\pi}{8}z\right)$ y $a = \cosh\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Ahora, buscamos u en la forma $u = A\arg(w - ia) + B\arg(w + ia) + C$ y determinamos las constantes de manera que se verifiquen las condiciones de contorno:

(1) semirrecta verde superior: $A\frac{\pi}{2} + B\frac{\pi}{2} + C = 1$

(2) segmento rojo: $-A\frac{\pi}{2} + B\frac{\pi}{2} + C = 0$

(3) semirrecta verde inferior: $-A\frac{\pi}{2} - B\frac{\pi}{2} + C = 1$

Resolviendo (sumar y restar ecuaciones ayuda….) resultan $A = \frac{1}{\pi}$, $B = -\frac{1}{\pi}$ y $C = 1$. Finalmente, entonces:

$$u = \frac{1}{\pi}\arg(w - ia) - \frac{1}{\pi}\arg(w + ia) + 1 = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(w - ia)}{\operatorname{Re}(w - ia)}\right) - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(w + ia)}{\operatorname{Re}(w + ia)}\right) + 1$$

(por favor, no confundir argumentos con arcotangentes….) Observemos que aquí podemos utilizar la función arcotangente pues los argumentos de *w-ia* y de *w+ia* varían entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Se puede completar la cuenta para obtener la forma explícita de u como función de x e y, es decir: de la parte real y de la parte imaginaria de z. Hagamos las cuentitas:

$$w=-iz_2=-isen(z_1)=-isen\left(\frac{\pi}{8}z\right)=-isen\left(\frac{\pi}{8}x+i\frac{\pi}{8}\right)=$$

$$=-i\left[sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)-isen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right)$$

$$w-ia=\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)-i\left(sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right)+a\right)$$

$$w+ia=\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)-i\left(sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right)-a\right)$$

Por lo tanto:

$$u=\frac{1}{\pi}\arctan\left(-\frac{sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right)+a}{\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)}\right)-\frac{1}{\pi}\arctan\left(-\frac{sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right)-a}{\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)}\right)+1$$

Dado que la función arcotangente es impar y teniendo en cuenta que $a=\cosh\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

$$u(x,y)=-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right)+\cosh\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)}\right)+\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right)-\cosh\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)}\right)+1$$

(Se puede comprobar con cierto trabajo que esta función es solución del problema de Dirichlet planteado. Observe que es acotada, por lo tanto es la única solución *acotada* de dicho problema. En particular:

Estudio de la simetría de *u* respecto del eje de ordenadas, es decir, de la igualdad $u(-x,y)=u(x,y)$:

$$u(-x,y)=-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{sen\left(-\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right)+\cosh\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)}\right)+\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{sen\left(-\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right)-\cosh\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)}\right)+1$$

$$=-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{-sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right)+\cosh\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)}\right)+\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{-sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right)-\cosh\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)}\right)+1=$$

(arctg es impar)

$$= \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right)-\cosh\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)}\right)-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right)+\cosh\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)}\right)+1 = u(x,y)$$

Es decir: efectivamente u es simétrica respecto del eje de ordenadas.

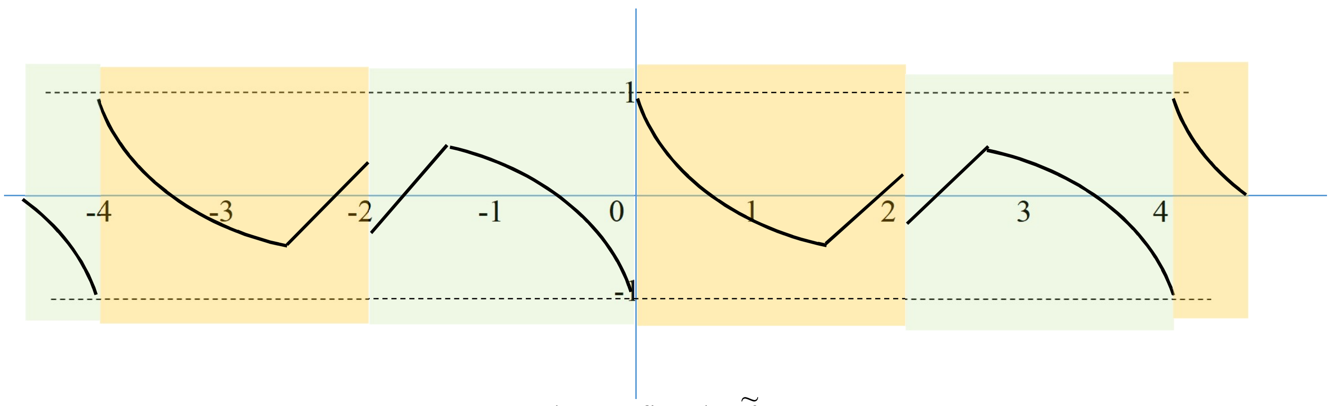
Otra forma de probar la paridad de u respecto de x: Ya hemos mencionado la unicidad de la solución acotada del problema de Dirichlet en cuestión. Ahora, consideremos la función $v: A \longrightarrow \Re$ tal que $v(x,y) =$ $= \frac{1}{2}[u(x,y)+u(-x,y)]$ (esta función está bien definida pues A es simétrico respecto del eje de ordenadas). La función v es claramente armónica en el interior de A (la comprobación es muy sencilla), es acotada y verifica las mismas condiciones de contorno que u. Por la mencionada unicidad, podemos afirmar entonces que v = u, lo que equivale a la identidad $u(x,y) = u(-x,y)$. Observe que esta forma de probar la paridad de u respecto de x no utiliza la forma explícita de u, por lo tanto esta propiedad es válida para cualquier problema de Dirichlet en un dominio simétrico respecto del eje de ordenadas y con condiciones de contorno simétricas respecto de este mismo eje.

---

3. Sea $f:[0,2] \longrightarrow \Re$ continua y con derivada continua a trozos, con desarrollo seno de Fourier dado por $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n^2} sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$. Indicar en qué valores $x \in [0,2]$ la serie converge a *f*(*x*) y en cuáles no. Resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} (i)\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & 0<x<2 \quad ,t>0 \\ (ii)\ u(0,t)=u(2,t)=0 & t \geq 0 \\ (iii)\ u(x,0)=f(x) & 0 \leq x \leq 2 \\ (iv)\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Resolución: La serie de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n^2} sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ es la serie de Fourier de la extensión impar de *f* con período 4. Indiquemos con $\tilde{f}$ esta extensión.



Idea gráfica de $\tilde{f}$

Esta función es continua a trozos en toda la recta y con derivadas laterales finitas en todo punto. Por lo tanto, verifica las condiciones de Dirichlet, por lo que podemos afirmar que para todo $x \in \Re$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^2} sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x^+) + \tilde{f}(x^-)]$$

En particular, para todo $x \in (0,2)$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^2} sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x^+) + \tilde{f}(x^-)] = \tilde{f}(x) = f(x)$ (pues $\tilde{f}$ es continua en (0,2), por serlo f. (Atención: no estamos diciendo que la continuidad de f garantice la convergencia de su serie de Fourier en todo punto. Hemos repetido hasta el cansancio que la continuidad no es condición suficiente. Pero f, además de ser continua, tiene derivadas laterales finitas, lo que garantiza la convergencia puntual). Ahora, para $x = 0$ y $x = 2$, obviamente la serie converge a 0, pues todos sus términos se anulan. Por lo tanto, en estos puntos la serie converge a $f(0)$ y $f(2)$ respectivamente sii $f(0) = f(2) = 0$, caso contrario no.

Resumiendo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^2} sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ converge a $f(x)$ para todo $x \in (0,2)$; si $x \in \{0,2\}$, la serie converge a $f(x)$ sii $f(0) = f(2) = 0$.

Observación: Si $f(0) = f(2) = 0$, $\tilde{f}$ resulta continua en toda la recta real. Por lo tanto, si la sucesión $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada, la serie converge absolutamente (es un ejercicio muy sencillo) y resulta entonces uniformemente convergente a $\tilde{f}$ en toda la recta (Teorema 5.a – Apuntes sobre series de Fourier, página 22).

Resolución del problema: mediante el tradicional método de separación de variables y el principio superposición, se obtiene la solución

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^2} sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \cos\left(\sqrt{3}\,\frac{n\pi t}{2}\right)$$

Obsérvese que si $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada, la convergencia de esta serie es muy bonita.

---

4. Hallar $f : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}\,'(\omega) e^{i\omega t} d\omega = sh(t)\mathbb{1}_{(-1,1)}(t)$, siendo $\hat{f}$ la transformada de Fourier de f. ¿Es única? . Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}\,'(\omega)\right|^2 d\omega$.

Resolución: Como puede leerse en los Apuntes sobre la Transformada de Fourier (apuntes del curso), página 14, propiedad 6, si las funciones $f(x)$ y $xf(x)$ son absolutamente integrables, entonces $\hat{f}$ es derivable, y su derivada es la transformada de Fourier de $-ixf(x)$. Tendríamos, entonces, por el teorema de inversión, que

$$vp\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}\,'(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 2\pi[-ixf(x)]$$

En nuestro caso, tendríamos que $2\pi[-ixf(x)] = senh(x)\mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$, es decir:

$$f(x) = \frac{isenh(x)}{2\pi x}\mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$$

Observación: En $x = 0$ podemos definir $f(0) = \frac{i}{2\pi}$ y f resulta continua en este punto; por otra parte, para poder aplicar el teorema de inversión en los puntos $x = -1$ y $x = 1$, el valor de f debe ser el promedio del salto de discontinuidad, es decir: $f(-1) = f(1) = \frac{i}{4\pi}senh(1)$.

Esta función verifica todas las condiciones necesarias para la aplicación de las propiedades mencionadas y por lo tanto satisface las condiciones requeridas en el enunciado. Desde luego que no es única, pues modificando el valor de f en algún punto cualquiera (por ejemplo, en $x = 18$) se obtiene una función con la misma transformada de Fourier que f y por lo tanto satisface las mismas condiciones del enunciado.

Cálculo de $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}\,'(\omega)\right|^2 d\omega$: Puesto que $-ixf(x)$ es claramente de cuadrado absolutamente integrable, podemos utilizar la identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}\,'(\omega)\right|^2 d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\left|-ixf(x)\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left|senh(x)\right|^2 dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} senh(x)^2 dx = \frac{1}{\pi}[\cosh(x)senh(x) - x]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\pi}[\cosh(1)senh(1) - 1]$$

---

5. Obtener la transformada de Laplace de la solución de la ecuación $xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) = 0$ para todo $x > 0$, con las condiciones iniciales $y(0+) = 1$, $y'(0+) = 0$.

Resolución: Indiquemos con F la transformada de Laplace de y. Entonces (páginas 18 y 21 del Apunte sobre la Transformada de Laplace):

1) la transformada de Laplace de $xy(x)$ es $-F'(s)$
2) la transformada de Laplace de $y'(x)$ es $sF(s) - y(0+) = sF(s) - 1$
3) la transformada de Laplace de $y''(x)$ es $s^2F(s) - sy(0+) - y'(0+) = s^2F(s) - s$
4) la transformada de Laplace de $xy''(x)$ es

$$-[s^2F(s) - sy(0+) - y'(0+)]' = -2sF(s) - s^2F'(s) + y(0+) = -2sF(s) - s^2F'(s) + 1$$

Transformando la ecuación tenemos entonces (siempre y cuando $\mathrm{Re}(s) > 0$):

$$-2sF(s) - s^2F'(s) + 1 + 2sF(s) - 2 - F'(s) = 0$$

Es decir: $(1 + s^2)F'(s) + 1 = 0$, $\mathrm{Re}(s) > 0$

Para $s=\sigma$ real y positivo, una primitiva de $-\dfrac{1}{1+\sigma^2}$ en $(0,+\infty)$ es $-arctg(\sigma)$. Puesto que $(0,+\infty)$ es conexo, existe una constante c tal que $F(\sigma)=c-arctg(\sigma)$. Puesto que debe verificarse $\underset{\sigma\to+\infty}{Lim} F(\sigma)=0$, necesariamente es $c=\dfrac{\pi}{2}$, es decir: $F(\sigma)=\dfrac{\pi}{2}-arctg(\sigma)$ para todo $\sigma>0$. Dado que F es holomorfa en el semiplano $H=\{s\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(s)>0\}$, existe una única extensión analítica de $arctg(\sigma)=\dfrac{\pi}{2}-F(\sigma)$ a dicho semiplano. Indiquemos con *Arctg* dicha extensión. Tenemos entonces que la transformada de Laplace de *y* es

$$F(s)=\frac{\pi}{2}-Arctg(s).$$

Observación: Podemos obtener información sobre nuestra función *Arctg* de una manera más artesanal: despejando *w* en función de *s* de la ecuación $s=tg(w)$, donde *w* – obviamente - debe pertenecer al dominio de la función tangente.

$$s=\frac{sen(w)}{\cos(w)}=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{i(e^{iw}+e^{-iw})}\Leftrightarrow is=\frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1}\Leftrightarrow ise^{2iw}+is=e^{2iw}-1\Leftrightarrow 1+is=(1-is)e^{2iw}\Leftrightarrow e^{2iw}=\frac{1+is}{1-is}$$

Aquí debemos elegir alguno de los infinitos logaritmos posibles. Resulta, para cualquiera de estos logaritmos y en el dominio correspondiente:

$$artg(s)=w=\frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+is}{1-is}\right)$$

Para elegir el logaritmo adecuado para nuestro problema, debemos estudiar primero en qué se transforma el semiplano $H=\{s\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(s)>0\}$ mediante la transformación $s\mapsto\dfrac{1+is}{1-is}$, para elegir el corte logarítmico. Luego, la rama logarítmica correspondiente a ese corte debe elegirse de manera que $\dfrac{1}{2i}\log\left(\dfrac{1+is}{1-is}\right)\xrightarrow[\mathrm{Re}(s)\to+\infty]{}\dfrac{\pi}{2}$ …. Un bonito trabajo.
