ANÁLISIS MATEMÁTICO III – SEGUNDO CUATRIMESTRE 2021

EXAMEN INTEGRADOR – TERCERA FECHA – 25/02/2022

RESOLUCIÓN

---

1. Determinar para qué valores de $\alpha \geq 0$ la integral $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^3}dx$ converge. Calcular su valor en el caso $\alpha = \frac{1}{2}$.

Resolución: Recordemos que para cada $\alpha > 0$ la función $h_\alpha(x) = x^\alpha$ se define como 0 en $x = 0$ y es continua en $[0,+\infty)$ (para $x > 0$ es $h_\alpha(x) = e^{\alpha \ln(x)}$). Para $\alpha = 0$ es $h_0(x) = 1$ para todo $x \in [0,+\infty)$ (en $x = 0$ se le asigna convencionalmente el valor 1) Por lo tanto, para $\alpha = 0$ tenemos la integral $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$, cuya convergencia es muy fácil de probar. Por ejemplo: para todo $b > 1$

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^3}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx + \int_1^b \frac{1}{1+x^3}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx + \int_1^b \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx + arctg(b) - \tfrac{\pi}{4} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{4}$$

Es decir: la función $F(b) = \int_0^b \frac{1}{1+x^3}dx$ es creciente (pues el integrando es positivo) y acotada superiormente. Por lo tanto existe el límite $\underset{b \to +\infty}{Lim} F(b) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$.

Ahora, para $\alpha > 0$ podemos utilizar la misma descomposición del intervalo de integración

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^3}dx = \int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x^3}dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^3}dx$$

y utilizar el criterio de comparación asintótica para estudiar la convergencia de la segunda integral del segundo miembro (la primera no es una integral impropia). El integrando es $k_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{1+x^3}$ y podemos compararlo con $g_\alpha(x) = x^{\alpha-3}$:

$$\underset{x \to +\infty}{Lim} \frac{k_\alpha(x)}{g_\alpha(x)} = \underset{x \to +\infty}{Lim} \frac{x^\alpha}{x^{\alpha-3}(1+x^3)} = \underset{x \to +\infty}{Lim} \frac{x^3}{1+x^3} = 1$$

Por lo tanto, la integral $\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^3}dx$ converge sii $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-3}dx$ converge, es decir: sii $\alpha < 2$. Ahora, calculemos la integral $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^3}dx$.

Para cada $b > 0$ podemos hacer el siguiente cambio de variable en la integral $\int_0^b \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^3}dx$:

$$\int_0^b \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^3}dx \overset{\substack{x=t^2 \\ t=\sqrt{x}}}{=} \int_0^{\sqrt{b}} \frac{t}{1+t^6}2tdt = 2\int_0^{\sqrt{b}} \frac{t^2}{1+t^6}dt$$

Tomando límite para $b \longrightarrow +\infty$ y teniendo en cuenta la paridad del integrando de la última integral, tenemos que

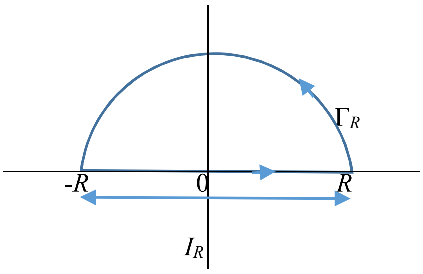
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^3}dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx$$

Se trata de una típica integral calculable mediante los métodos clásicos de variable compleja. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^6} = \frac{z^2}{(z-z_1)(z-\bar{z}_1)(z-z_2)(z-\bar{z}_2)(z-z_3)(z-\bar{z}_3)}$$

donde $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ y sus conjugados son las seis raíces sextas de -1.

Para cada $R > 1$, consideremos la integral de f sobre el siguiente circuito (muy popular) y apliquemos el teorema de los residuos:



$$\int_{I_R} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{3} RES(f, z_k) \qquad (R*)$$

(solamente se tienen en cuenta las singularidades que se encuentran en el interior del recinto). El plan, como es habitual, es utilizar el hecho de que el segundo miembro no depende de R, mientras que la primera integral del primer miembro

$$\int_{I_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^6}dx \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}$$

tiende al valor de que queremos calcular.

Resta ver que $\underset{R \longrightarrow +\infty}{Lim} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$ (es un ejercicio clásico):

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{R^2.e^{2i\theta}}{1+R^6 e^{6i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta \right| \le \int_0^{\pi} \left| \frac{R^2.e^{2i\theta}}{1+R^6 e^{6i\theta}} Rie^{i\theta} \right| d\theta = R^3 \int_0^{\pi} \frac{1}{\left| R^6.e^{6i\theta}+1 \right|} d\theta \overset{(*)}{\le} R^3 \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left| R^6 - 1 \right|} \overset{R>1}{=} \frac{R^3 \pi}{R^6-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

(en el paso (*) hemos utilizado la desigualdad $\frac{1}{|a-b|} \le \frac{1}{\left||a|-|b|\right|}$, válida para todo par de complejos $a \ne b$)

Por lo tanto, tomando límites en (R*) para $R \longrightarrow +\infty$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx \; = \; 2\pi i [RES(f,z_1) + RES(f,z_2) + RES(f,z_3)] \qquad (\infty *)$$

El cálculo de esto residuos es sencillo pues se tratan de tres polos simples:

$$(z-z_1)f(z) = \frac{z-z_1}{z^6+1} z^2 \xrightarrow[z\to z_1]{} \frac{1}{6z_1^5} z_1^2 = \frac{1}{6z_1^3} = \frac{1}{6e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{6i} = -\frac{i}{6}$$

$$(z-z_2)f(z) = \frac{z-z_2}{z^6+1} z^2 \xrightarrow[z\to z_1]{} \frac{1}{6z_2^5} z_2^2 = \frac{1}{6z_2^3} = \frac{1}{6i^3} = -\frac{1}{6i} = \frac{i}{6}$$

$$(z-z_3)f(z) = \frac{z-z_3}{z^6+1} z^2 \xrightarrow[z\to z_1]{} \frac{1}{6z_3^5} z_3^2 = \frac{1}{6z_3^3} = \frac{1}{6e^{i\frac{5\pi}{2}}} = \frac{1}{6i} = -\frac{i}{6}$$

Por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx \; = \; 2\pi i \left(-\frac{i}{6} + \frac{i}{6} - \frac{i}{6} \right) = \frac{\pi}{3}$$

Respuesta 1: Los $\alpha \ge 0$ para los cuales la integral $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^3} dx$ es convergente son los pertenecientes al intervalo [0 , 2). (Suponemos que no hace falta aclarar que la convergencia es absoluta). Para $\alpha = \frac{1}{2}$, es $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^3} dx = \frac{\pi}{3}$

---

2. Comprobar que para todo par de reales a y b, la función

$$u(x,y) = asen(b\ln(\sqrt{x^2+y^2}))\cos(bArg(x+iy))$$

es armónica. Deducir la solución u_p del problema del potencial eléctrico en el recinto

$$R = \left\{ (x,y) \in \Re^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 2 \right\}$$

con condiciones de contorno $u_p(x,y) = 0$ sobre la circunferencia interior y $u_p(x,y) = \cos\left(\tfrac{1}{4} Arg(x+iy)\right)$ sobre la exterior. Determinar, si existen, los puntos de R donde $u = 1$.

Resolución: Se trata del siguiente problema de Dirichlet :

$$\begin{cases} (i)\ \Delta u(x,y) = 0 & , \quad 1 \le x^2+y^2 \le 2 \\ (ii)\ u(\cos(\theta), sen(\theta)) = 0 & , \quad -\pi < \theta \le \pi \\ (iii)\ u(\sqrt{2}\cos(\theta), \sqrt{2}sen(\theta)) = \cos(\tfrac{1}{4}\theta) & , \quad -\pi < \theta \le \pi \end{cases} \qquad (*u)$$

Las condiciones de contorno no son seccionalmente constantes, por lo tanto no parece ser conveniente utilizar el método de las transformaciones conformes. Dada la forma del recinto, podemos intentar plantear el problema en coordenadas polares, es decir, considerar la función $v(r,\theta) = u(r\cos(\theta), rsen(\theta))$ y el correspondiente problema:

$$\begin{cases} (i)_v\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0 & , \quad 1 \le r \le \sqrt{2}\ , -\pi < \theta < \pi \\ (ii)_v\ v(1,\theta) = 0 & , \quad -\pi < \theta \le \pi \\ (iii)_v\ v(\sqrt{2},\theta) = \cos(\tfrac{1}{4}\theta) & , \quad -\pi < \theta \le \pi \end{cases} \qquad (*v)$$

Para la función $u(x,y) = asen(b\ln(\sqrt{x^2+y^2}))\cos(bArg(x+iy))$, es

$$v(r,\theta) = asen(b\ln(r))\cos(b\theta) \qquad (**v)$$

y las cuentas son directas:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{ab}{r}\cos(b\ln(r))\cos(b\theta)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = -\frac{ab}{r^2}\cos(b\ln(r))\cos(b\theta) - \frac{ab^2}{r^2}sen(b\ln(r))\cos(b\theta)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = -ab^2 sen(b\ln(r))\cos(b\theta)$$

y entonces

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = -\frac{ab}{r^2}\cos(b\ln(r))\cos(b\theta) - \frac{ab^2}{r^2} sen(b\ln(r))\cos(b\theta) +$$
$$+\frac{ab}{r^2}\cos(b\ln(r))\cos(b\theta) - \frac{ab^2}{r^2} sen(b\ln(r))\cos(b\theta) = 0$$

Por lo tanto, cualesquiera sean las constantes a y b, la función (**) satisface la ecuación $(i)_v$ en el dominio indicado. También satisface la condición de contorno $(ii)_v$, obviamente. Por lo tanto, solamente tenemos que encontrar a y b para satisfacer la condición $(iii)_v$:

$$a sen(b\ln(\sqrt{2}))\cos(b\theta) = \cos(\tfrac{1}{4}\theta)$$

Basta elegir $b = \frac{1}{4}$ y $a = \dfrac{1}{sen(\frac{1}{4}\ln(\sqrt{2}))} = \dfrac{1}{sen(\frac{1}{8}\ln(2))}$ y obtenemos la solución

$$u_p(r\cos(\theta), r sen(\theta)) = v(r,\theta) = \frac{1}{sen(\frac{1}{8}\ln(2))} sen(\tfrac{1}{4}\ln(r))\cos(\tfrac{1}{4}\theta)$$

Nota: La siguiente parte de la resolución no utiliza la sugerencia dada en el enunciado y se agrega en esta resolución solamente a efectos ilustrativos.

Las condiciones de contorno sugieren buscar la solución de $(*v)$ en la forma

$$v(r,\theta) = f(r)\cos(\tfrac{1}{4}\theta)$$

donde f es una función a determinar por las ecuaciones:

$$\begin{cases} (i)_f \;\; f''(r)\cos(\frac{1}{4}\theta) + \frac{1}{r} f'(r)\cos(\frac{1}{4}\theta) - \frac{1}{16}\frac{1}{r^2} f(r)\cos(\frac{1}{4}\theta) = 0 \quad , \quad 1 \le r \le \sqrt{2}\,, -\pi < \theta < \pi \\ (ii)_f \;\; f(1) = 0 \\ (iii)_f \;\; f(\sqrt{2}) = 1 \end{cases}$$

Obsérvese que se trata de una versión sintética del método de separación de variables. Dado que la ecuación $(i)_f$ debe verificarse para todo θ, este sistema es equivalente a

$$\begin{cases} (i)_f \;\; f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)-\frac{1}{16}\frac{1}{r^2}f(r)=0 \quad , \quad 1\le r\le\sqrt{2} \\ (ii)_f \;\; f(1)=0 \\ (iii)_f \;\; f(\sqrt{2})=1 \end{cases} \qquad (*f)$$

La ecuación diferencial para *f*, es decir, $r^2 f''(r)+rf'(r)-16f(r)=0$, se resuelve mediante el cambio de variable $f(r)=h(\ln(r))$, pues entonces la ecuación para *h* resulta

$$r^2\left(\overbrace{\frac{1}{r^2}h''(\ln(r))-\frac{1}{r^2}h'(\ln(r))}^{f''(r)}\right)+r\overbrace{\frac{1}{r}h'(\ln(r))}^{f'(r)}-\frac{1}{16}\overbrace{h(\ln(r))}^{f(r)}=0$$

es decir: $h''(\ln(r))-\frac{1}{16}h(\ln(r))=0$, o bien: $h''(t)-\frac{1}{16}h(t)=0$, donde $r=e^t$. La solución general es

$$h(t)=A\cos(\tfrac{1}{4}t)+Bsen(\tfrac{1}{4}t)$$

donde *A* y *B* son dos constantes cualesquiera. Tenemos entonces, que *f* es de la forma

$$f(r)=A\cos(\tfrac{1}{4}\ln(r))+Bsen(\tfrac{1}{4}\ln(r))$$

Las constantes quedan determinadas por las condiciones de contorno de ($*f$):

$$f(1)=A\cos(\tfrac{1}{4}\ln(1))+Bsen(\tfrac{1}{4}\ln(1))=0$$

$$f(\sqrt{2})=A\cos(\tfrac{1}{4}\ln(\sqrt{2}))+Bsen(\tfrac{1}{4}\ln(\sqrt{2}))=1$$

Resolviendo, nos queda $A=0$ y $B=\dfrac{1}{sen(\frac{1}{8}\ln(2))}$. Es decir:

$$f(r)=\frac{1}{sen(\frac{1}{8}\ln(2))}sen(\tfrac{1}{4}\ln(r))$$

$$v(r,\theta)=f(r)\cos(\tfrac{1}{4}\theta)=\frac{1}{sen(\frac{1}{8}\ln(2))}sen(\tfrac{1}{4}\ln(r))\cos(\tfrac{1}{4}\theta)$$

y, finalmente,

$$u(r\cos(\theta), rsen(\theta)) = \frac{1}{sen(\frac{1}{8}\ln(2))} sen(\tfrac{1}{4}\ln(r))\cos(\tfrac{1}{4}\theta)$$

Es muy sencillo comprobar que esta función satisface las condiciones de contorno (*ii*) y (*iii*) del sistema ($*u$). Lleva un poquito más de tiempo pero no tanto calcular su laplaciano en coordenadas porlares y verificar que, efectivamente, u es armónica.

Para determinar, si existen, los puntos de R donde u toma el valor 1, podemos aplicar el Principio del Módulo máximo para las armónicas: u alcanza su máximo en el borde de R. Dado que en la circunferencia interior u es nula y en la circunferencia exterior es $u(\sqrt{2}\cos(\theta), \sqrt{2}sen(\theta)) = \cos(\frac{1}{4}\theta)$ el máximo de u es, precisamente 1 (el mínimo -1) y se alcanza en los puntos cuyo argumento principal $\theta \in (-\pi, \pi]$ verifica $\cos(\frac{1}{4}\theta) = 1$, es decir: $\theta = 0$.

***Respuesta* 2**: La solución es $u(r\cos(\theta), rsen(\theta)) = \dfrac{1}{sen(\frac{1}{8}\ln(2))} sen(\frac{1}{4}\ln(r))\cos(\frac{1}{4}\theta)$. El único punto de R donde u toma el valor 1 es $(\sqrt{2}, 0)$.

---

3. Siendo $c_n = \alpha_n + i\beta_n$ para todo $n \in Z$ y $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ la serie exponencial de Fourier en $[-\pi, \pi]$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} & si \quad -\pi \le x < 0 \\ \frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} & si \quad 0 \le x \le \pi \end{cases},$$

calcular α_0 , β_0 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$, y $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$

Resolución: Obsérvese que f es seccionalmente de clase C^1, que $f(-\pi) = f(\pi) = -\frac{\pi}{6}$ y que el promedio del salto de discontinuidad en 0 es $\frac{1}{2}[f(0^-) + f(0^+)] = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{12}$. Por lo tanto, f verifica las condiciones de Dirichlet y podemos afirmar entonces que su serie de Fourier f converge puntualmente, en toda la recta, a la extensión 2π-periódica de la función

$$\not{f}(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} & si \quad -\pi \le x < 0 \\ -\frac{\pi}{12} & si \quad x = 0 \\ \frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} & si \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$$

Las funciones f y $\not{f}$ tienen la misma serie de Fourier (solo difieren en el punto $x = 0$) y los coeficientes c_n son , para cada $n \in Z$:

$$c_n = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta - i\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)sen(n\theta)d\theta$$

Puesto que para todo $\theta \in [-\pi,\pi]$, $f(\theta)$ es real, las dos integrales del segundo miembro son números reales. Entonces , para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha_n = \mathrm{Re}(c_n) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta \ , \quad \alpha_{-n} = \alpha_n$$

$$\beta_n = \mathrm{Im}(c_n) = -\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)sen(n\theta)d\theta \ , \quad \beta_{-n} = -\beta_n \qquad (*1)$$

$$c_n = \alpha_n + i\beta_n \quad , \quad c_{-n} = \alpha_{-n} + i\beta_{-n} = \alpha_n - i\beta_n = \bar{c}_n$$

En particular:

$$c_0 = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta = \tfrac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\theta}{3})d\theta + \int_{0}^{\pi}(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{\theta}{2})d\theta\right) = \tfrac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\theta}{3})d\theta + \int_{0}^{\pi}(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{\theta}{2})d\theta\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2\pi}\left(-\left\{\tfrac{\pi}{2}\theta + \tfrac{1}{6}\theta^2\right\}_{\theta=-\pi}^{\theta=0} + \left\{\tfrac{\pi}{3}\theta - \tfrac{1}{4}\theta^2\right\}_{\theta=0}^{\theta=\pi}\right) = \tfrac{1}{2\pi}\left(-\left\{-\tfrac{\pi}{2}(-\pi) - \tfrac{1}{6}(-\pi)^2\right\} + \left\{\tfrac{\pi}{3}(\pi) - \tfrac{1}{4}(\pi)^2\right\}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2\pi}\left(-\left\{\tfrac{\pi^2}{2} - \tfrac{\pi^2}{6}\right\} + \left\{\tfrac{\pi^2}{3} - \tfrac{\pi^2}{4}\right\}\right) = \tfrac{1}{2\pi}\left(-\tfrac{\pi^2}{3} + \tfrac{\pi^2}{12}\right) = \tfrac{1}{2\pi}\left(-\tfrac{\pi^2}{4}\right) = -\tfrac{\pi}{8}$$

Dado que $c_n = \alpha_0 + i\beta_0$, tenemos que $\alpha_0 = -\tfrac{\pi}{8}$ y $\beta_0 = 0$ (esta última igualdad se puede ver directamente en la segunda línea de $(*1)$).

Ahora, para cada $x \in [-\pi,\pi]$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{inx} + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \overbrace{c_{-n}}^{\bar{c}_n} e^{-inx} + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{inx} =$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}[\bar{c}_n e^{-inx} + c_n e^{inx}] = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}[\overline{c_n e^{inx}} + c_n e^{inx}] = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\,\mathrm{Re}(c_n e^{inx})$$

Es decir: para todo $x \in [-\pi,\pi]$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \alpha_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n \cos(nx) - \beta_n sen(nx)] \qquad (*2)$$

(Obsérvese que los coeficientes α_n y β_n *no* son los coeficientes de la serie de Fourier de f, aunque la relación es muy sencilla: $a_n = 2\alpha_n$ y $b_n = -2\beta_n$. Además, tener muy presente que la igualdad $(*2)$ solamente es válida si f toma valores reales).

Ahora, dado que tenemos convergencia puntual en todo $x \in [-\pi,\pi]$, de (*2) tenemos (ya hemos calculado α_0 previamente): $-\frac{\pi}{12} = f(0) = \alpha_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = -\frac{\pi}{8} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, y por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = -\tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{2}(-\tfrac{\pi}{12} + \tfrac{\pi}{8}) = -\tfrac{\pi}{12}$$

Análogamente, $-\frac{\pi}{6} = f(\pi) = \alpha_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\alpha_n = -\frac{\pi}{8} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, y entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha_n = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\alpha_n = -\tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{2}(-\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{8}) = -\tfrac{7\pi}{48}$$

La sumatoria $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2$ puede calcularse mediante la identidad de Parseval de la siguiente manera:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 = |c_0|^2 + \tfrac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{c}_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\right) \overset{c_{-n}=\overline{c}_n}{=} |c_0|^2 + \tfrac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|c_{-n}|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\right) =$$

$$= |c_0|^2 + \tfrac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}|c_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\right) = \tfrac{1}{2}|c_0|^2 + \tfrac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}|c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\right) = \tfrac{1}{2}|c_0|^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2 \overset{Parseval}{=}$$

$$= \tfrac{1}{2}|c_0|^2 + \tfrac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 dx = \frac{\pi^2}{128} + \tfrac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 dx = \frac{\pi^2}{128} + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{13\pi^3}{108} + \frac{\pi^3}{36}\right) = \frac{155}{3.456}\pi^2$$

***Respuesta* 3**: $\alpha_0 = -\frac{\pi}{8}$ y $\beta_0 = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = -\frac{\pi}{12}$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha_n = -\frac{7\pi}{48}$ y $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 = \frac{155}{3.456}\pi^2$.

---

4. Resolver:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) & -\infty < x < +\infty \ ,\ t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{x^2+1} & -\infty < x < +\infty \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

(dar explícitamente la solución en términos de sus variables reales).

Resolución: Vamos a suponer, para comenzar, que u admite, respecto de x (y para todo t), transformada de Fourier y que además verifica las hipótesis del Teorema de Inversión. Lo mismo para sus derivadas parciales involucradas en la ecuación diferencial. Aplicando la transformación de Fourier a la ecuación obtenemos (utilizando propiedades conocidas): $-\omega^2\hat{u}(\omega,t) = \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial t^2}(\omega,t)$ para todo $\omega \in \Re$ y todo $t > 0$. La solución general de esta ecuación es $\hat{u}(\omega,t) = A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)sen(\omega t)$, donde A y B son dos funciones a determinar por las condiciones iniciales. Tenemos, de partida, las siguientes igualdades:

$$\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx \quad , \quad u(x,t) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega,t)e^{i\omega x}dx \quad , \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-i\omega x}dx \qquad (*1)$$

En particular:

$$A(\omega) = \hat{u}(\omega,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)e^{-i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{1+x^2}dx = \pi\, e^{-|\omega|}$$

(el cálculo de esta última integral es un ejercicio sencillo y puede hacerse mediante los procedimientos habituales de variable compleja o bien mediante el uso del teorema de inversión, como puede verse, por ejemplo, en la página 10 de los Apuntes sobre la Transformación de Fourier). El cálculo de la función B es más sencillo…:

$$B(\omega) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)e^{-i\omega x}dx = 0$$

Por lo tanto,

$$\hat{u}(\omega,t) = \pi\cos(\omega t)e^{-|\omega|}$$

Aplicando el teorema de inversión:

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2\pi}vp\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega = \tfrac{1}{2}vp\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-|\omega|}e^{i\omega x}d\omega$$

Puede intentarse la cuenta (dividiendo el intervalo de integración en la forma obvia; las primitivas involucradas son elementales). De todos modos (no se enoje), la forma más rápida de encontrar la solución es la que utilizaba D'Alembert hace ya bastante tiempo: expresar u como superposición de ondas planas:

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t) \qquad (*1)$$

donde $f:\Re \longrightarrow \Re$ y $g:\Re \longrightarrow \Re$ son dos funciones de clase C^2 a determinar por las condiciones iniciales del problema (cualesquiera sean f y g, $(*1)$ es solución de la ecuación de ondas). Imponiendo estas condiciones es fácil ver que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(x+t)^2} + \frac{1}{1+(x-t)^2}\right) \qquad (*2)$$

es la solución acotada del problema planteado, sin necesidad de hacer la cuenta precedente.

---

5. Hallar f tal que $f(t) = 3t^2 + \int_0^t f'(\tau)(t-\tau)^3 d\tau$ para todo $t > 0$.

Resolución: Dado que la ecuación se plantea para $t > 0$, podemos considerar que $f(t) = 0$ para todo $t \le 0$. Más aún, supondremos que f y su derivada son seccionalmente continuas y de orden exponencial. Entonces, la ecuación dada es

$$f(t) = p(t) + (f' * q)(t) \qquad (*1)$$

donde $p(t) = 3t^2 H(t)$ y $q(t) = t^3 H(t)$. Aplicando la transformación de Laplace:

$$F(s) = P(s) + [sF(s) - f(0^+)]Q(s) \qquad (*2)$$

donde, como hacemos habitualmente, indicamos las transformadas de Laplace con mayúsculas. La ecuación $f(t) = 3t^2 + \int_0^t f'(\tau)(t-\tau)^3 d\tau$ implica que $f(0^+) = 0$. Por otra parte, las transformadas de p y q son muy sencillas: $P(s) = \frac{6}{s^3}$ y $Q(s) = \frac{6}{s^4}$. Por lo tanto, de $(*2)$ tenemos

$$F(s) = \frac{6}{s^3} + sF(s)\frac{6}{s^4} = \frac{6}{s^3} + F(s)\frac{6}{s^3}$$

Despejando: $F(s) = \frac{6}{s^3 - 6}$. Podemos factorizar $s^3 - 6 = (s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)$, donde

$$\alpha = \sqrt[3]{6} \quad , \quad \beta = \alpha\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \gamma = \overline{\beta} = \alpha\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

son las tres raíces de $s^3 - 6$, y descomponer en fracciones simples

$$F(s) = \frac{6}{s^3 - 6} = \frac{A}{s-\alpha} + \frac{B}{s-\beta} + \frac{C}{s-\gamma}$$

y resulta, finalmente:

$$f(t) = [Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} + Ce^{\gamma t}]H(t)$$

(algunas de las constantes no son reales, pero no desarrollamos las cuentas aquí)
