ANÁLISIS MATEMÁTICO III – PRIMER CUATRIMESTRE 2021
EXAMEN INTEGRADOR – SEGUNDA FECHA –13/08/2021
RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

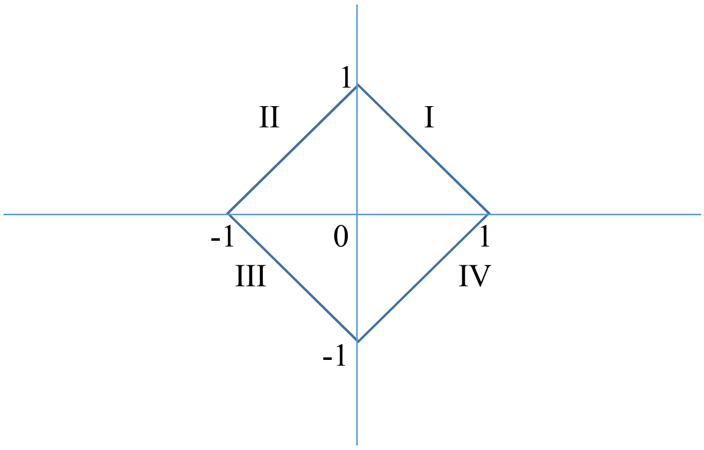
1. Sean $R = \{(x,y) \in \Re^2 : |x| + |y| < 1\}$ y u solución del problema dado por:

$$(i)\ \Delta u(x,y) = 0 \quad si \quad (x,y) \in R$$

$$(ii)\ u(x,y) = \begin{cases} xy & si \quad |x|+|y| = 1,\ y \geq 0 \\ -xy & si \quad |x|+|y| = 1,\ y < 0 \end{cases}$$

Obtener el máximo valor de $|u(x,y)|$ en $\overline{R}$.

Resolución: Se trata de un problema de Dirichlet con condiciones continuas en la frontera, pues en los puntos (x,y) de esta frontera es $u(x,y) = x|y|$. Por lo tanto, la (única) solución del problema es una función armónica en *R* y continua en su borde. Por el Principio del Máximo para armónicas (ver, por ejemplo, página 14 del Apunte sobre Ecuaciones Diferenciales, de acceso libre y gratuito en la página de la asignatura), *u* alcanza su valor máximo y su valor mínimo en el borde de *R*.



Estudiemos la función en cada uno de los lados rectilíneos del borde de *R* indicados como en la figura:

I: $x = t$, $y = 1 - t$, $0 \leq t \leq 1$: $u = xy = t(1-t)$. El máximo de esta función cuadrática en el segmento [0 , 1] se verifica en $t_{\max} = \frac{1}{2}$ y su valor es $\frac{1}{4}$. El mínimo, en el mismo segmento, se alcanza en los extremos: $t = 0$ y $t = 1$, donde la función se anula.

II : $x = -t$, $y = 1 - t$, $0 \leq t \leq 1$: $u = xy = -t(1-t) = t(t-1)$. El máximo de esta función cuadrática en el segmento [0 , 1] se verifica en sus extremos, donde se anula, y su mínimo se alcanza en $t_{min} = \frac{1}{2}$ y su valor es $-\frac{1}{4}$.

III: $x = -t$, $y = t - 1$, $0 \le t \le 1$: $u = -xy = t(t-1)$. Es la misma función que en el segmento II. Su máximo se verifica en sus extremos, donde se anula, y su mínimo se alcanza en $t_{mín} = \frac{1}{2}$ y su valor es -$\frac{1}{4}$.

IV: $x = t$, $y = t - 1$, $0 \le t \le 1$: $u = -xy = -t(t-1) = t(1-t)$. Es la misma función que en el segmento I. Su máximo se verifica en $t_{\max} = \frac{1}{2}$ y su valor es $\frac{1}{4}$. El mínimo se alcanza en los extremos del segmento: t = 0 y t = 1, donde la función se anula.

Resumiendo: el valor máximo de u en el borde de R es $\frac{1}{4}$ y el valor mínimo es $-\frac{1}{4}$. Por lo tanto, el máximo de $|u|$ en el borde de R (y por lo tanto en $\overline{R}$) es $\frac{1}{4}$. Para mayor información, este máximo se alcanza en los cuatro puntos medios de los lados del cuadrado: $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

Observación 1: el cálculo del valor mínimo de u en el borde de R era necesario: si este mínimo hubiera sido -3, por ejemplo, entonces el valor máximo de $|u|$ hubiera sido 3.

Observación 2: Si usted recuerda el gráfico del paraboloide hiperbólico (alias *silla de montar*), le puede resultar fácil de visualizar el resultado obtenido graficando la superficie $\{ (x,y,z) \in \Re^3 : z = x|y| \}$ y su intersección con el cilindro $\{ (x,y,z) \in \Re^3 : |x| + |y| = 1 \}$.

Respuesta: El máximo de $|u|$ en el borde de R (y por lo tanto en $\overline{R}$) es $\frac{1}{4}$. Para mayor información, este máximo se alcanza en los cuatro puntos medios de los lados del cuadrado: $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

---

2. Explicar por qué la serie trigonométrica de Fourier en $[-1,1]$ de la función $f(x) = x^4 \log(1+x^2)$ se reduce a $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(n\pi x)$ y analizar si converge uniformemente. Calcular $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n \alpha_{2n+1}$.

Resolución: La extensión 2-periódica de f es una función continua (en el interior del intervalo $[-1,1]$ es de clase C^∞ y toma el mismo valor, log(2), en ambos extremos), y además su derivada es seccionalmente continua (tiene discontinuidades de salto finito en los extremos de $[-1,1]$). Por lo tanto, la serie de Fourier de f converge uniformemente a f en toda la recta: Teorema 5.b, página 22 de los Apuntes sobre Series de Fourier, de acceso libre y gratuito en la página de la asignatura. Insistimos, una vez más, que la continuidad de f es condición necesaria pero no suficiente para la convergencia uniforme de su serie de Fourier. En este caso, la condición suficiente es que *f*, además de ser continua, tiene derivada seccionalmente continua.

La serie trigonométrica de f, en el intervalo dado, es $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\pi x)+b_n sen(n\pi x)]$ donde $b_n=\int_{-1}^{1}f(t)sen(n\pi t)dt$. Puesto que *f* es una función par, todas estas integrales se anulan, pues los integrandos son impares y el intervalo de integración es simétrico respecto del origen. Obsérvese que denominando $a_0=2\alpha_0$ y $a_n=\alpha_n$ para todo $n\geq 1$, tenemos $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\cos(n\pi x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\pi x)$

Puesto que la serie de Fourier converge uniformemente a *f* en toda la recta, en particular converge puntualmente en $x = 1$ (y en todos los puntos…). Por lo tanto, vale la igualdad

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\pi)=f(1)=\log(2)$$

Para la extensión 2-periódica $\tilde{f}'$ de la derivada de *f*, podemos aplicar el teorema de convergencia puntual de Dirichlet: la serie $-\pi\sum_{n=1}^{\infty}na_n sen(n\pi x)$ converge puntualmente a $\frac{1}{2}[\tilde{f}'(x^+)+\tilde{f}'(x^-)]$ para todo *x*. En particular, para los puntos $x\in(-1,1)$ es $\tilde{f}'(x)=f'(x)$ y por lo tanto, para $x=\frac{1}{2}$:

$$-\pi\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)a_{2k+1}(-1)^k=-\pi\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)a_{2k+1}sen\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)=-\pi\sum_{n=1}^{\infty}na_n sen(n\pi\tfrac{1}{2})=$$

$$=f'(\tfrac{1}{2})=\left(4x^3\log(1+x^2)+\frac{2x^5}{1+x^2}\right)\Bigg|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{4}{2^3}\log(1+\tfrac{1}{2^2})+\frac{\frac{2}{2^5}}{1+\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{2}\log\left(\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{20}\ .$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)a_{2k+1}(-1)^k=-\frac{1}{\pi}\left(\log\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+\frac{1}{20}\right)$$

---

3. Describir un problema físico que pueda modelarse como

$$\begin{cases} (i)\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & 0 < x < 2 \quad , \quad t > 0 \\ (ii)\ u(x,0) = g(x) & 0 \le x \le 2 \\ (iii)\ u(0,t) = 1 & t \ge 0 \\ (iv)\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(2,t) = 0 & t \ge 0 \end{cases}$$

y resolverlo, sabiendo que $g(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} c_k sen\left(\frac{2k+1}{4}\pi x\right)$ para todo $x \in [0,2]$. (Se supone que los coeficientes c_k son datos del problema).

Resolución: Se trata de un clásico problema de difusión de calor en una varilla homogénea de longitud 2, con un extremo a temperatura constante y otro aislado térmicamente.

Mediante separación de variables y principio de superposición se obtiene

$$u(x,t) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} c_k sen\left(\tfrac{2k+1}{4}\pi x\right) e^{-\left(\frac{2k+1}{4}\right)^2 \pi^2 t} \tag{3.1}$$

La convergencia de esta serie, para $t > 0$, es absoluta y uniforme y es derivable término a término. Es fácil ver que cada término de (3.1) es una solución de la ecuación (*i*); la condición (*ii*) se verifica inmediatamente tomando $t = 0$ en (3.1), y finalmente, en cuanto a la condición (*iv*):

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \sum_{k=0}^{\infty} -\tfrac{2k+1}{4}\pi\, c_k \cos\left(\tfrac{2k+1}{4}\pi x\right) e^{-\left(\frac{2k+1}{4}\right)\pi^2 t}$$

es claramente nula para $x = 2$.

---

4. Calcular la transformada de Fourier de $f(t)=\begin{cases} sen(t) & si \quad t\in[0,\pi] \\ 0 & si \quad t\notin[0,\pi] \end{cases}$ y calcular el valor de la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[1+\cos(\omega\pi)]\cos(\omega t)}{1-\omega^2}d\omega$ para $t=\frac{\pi}{2}$. Previamente, estudie su convergencia.

Observación: En la resolución hemos analizado la convergencia y hemos calculado el valor principal para todo $t\in\Re$. No se pretende que el alumno haga el desarrollo detallado que sigue a continuación.

Resolución: El integrando de $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[1+\cos(\omega\pi)]\cos(t\omega)}{1-\omega^2}d\omega$ tiene un problema en $\omega=1$ y en $\omega=-1$. En ambos casos, $1+\cos(\omega\pi)=0$. Podemos utilizar la regla de l'Hôpital para obtener el límite del integrando cuando $\omega\longrightarrow 1$ y cuando $\omega\longrightarrow -1$: en ambos casos el límite es el mismo (no debe sorprender: se trata de una función par….):

$$\frac{1+\cos(\pi\omega)}{1-\omega^2}\xrightarrow[\omega\to 1]{}\frac{-\pi\, sen(\pi)}{-2}=0$$

$$\frac{1+\cos(\pi\omega)}{1-\omega^2}\xrightarrow[\omega\to -1]{}\frac{-\pi\, sen(\pi)}{2}=0$$

Por lo tanto, podemos asumir que el integrando es continuo en toda la recta. Ahora, para $|\omega|>1$, tenemos la acotación:

$$\left|\frac{[1+\cos(\pi\omega)]\cos(t\omega)}{1-\omega^2}\right|\leq\frac{2}{|1-\omega^2|}\overset{\omega^2>1}{=}\frac{2}{\omega^2-1}$$

y la integral $\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2-1}d\omega$ converge para cualquier a > 1 (se puede ver, por ejemplo, mediante el criterio de comparación asintótica con $\frac{1}{\omega^2}$, o bien calculando la integral directamente, que no es tan terrible). Podemos concluir, entonces, que para cualquier $t\in\Re$ la integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[1+\cos(\pi\omega)]\cos(t\omega)}{1-\omega^2}d\omega$ converge absolutamente.

Ahora que estamos tranquilos, calculemos:

(a) $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{0}^{\pi} sen(t)e^{-i\omega t}dt \overset{\omega\notin\{-1,1\}}{=} \left\{\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-1}[\cos(t)+i\omega sen(t)]\right\}_{t=0}^{t=\pi} =$

$$=\frac{e^{-i\omega\pi}}{\omega^2-1}[-1]-\frac{1}{\omega^2-1}[1]=\frac{-e^{-i\omega\pi}-1}{\omega^2-1}=\frac{e^{-i\omega\pi}+1}{1-\omega^2}=$$

$$=\frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2}-i\frac{sen(\omega\pi)}{1-\omega^2}$$

Es decir: para todo $\omega\notin\{-1,1\}$: $\hat{f}(\omega)=\dfrac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2}-i\dfrac{sen(\omega\pi)}{1-\omega^2}$.

Ahora, para $\omega=1$:

$$\hat{f}(1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it}dt=\int_{0}^{\pi} sen(t)e^{-it}dt=\int_{0}^{\pi} sen(t)\cos(t)dt-i\int_{0}^{\pi} sen(t)^2dt=$$

$$=\left\{\tfrac{1}{2}sen(t)^2\right\}_{t=0}^{t=\pi}-i\left\{\tfrac{1}{2}[t-sen(t)\cos(t)]\right\}_{t=0}^{t=\pi}=-i\frac{\pi}{2}$$

y análogamente:

$$\hat{f}(-1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it}dt=\int_{0}^{\pi} sen(t)e^{it}dt=\int_{0}^{\pi} sen(t)\cos(t)dt+i\int_{0}^{\pi} sen(t)^2dt=\ldots=i\frac{\pi}{2}.$$

Hemos completado el cálculo de $\hat{f}$:

$$\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2}-i\dfrac{sen(\omega\pi)}{1-\omega^2} & si \quad \omega^2\neq 1\\ -i\dfrac{\pi}{2} & si \quad \omega=1\\ i\dfrac{\pi}{2} & si \quad \omega=-1\end{cases} \tag{4.1}$$

(b) La transformada $\hat{f}$, dada por (4.1) , es continua (puede comprobarse fácilmente mediante la regla de l'Hôpital) y absolutamente integrable. Para verificar esto último, se pueden seguir las líneas del estudio hecho al principio de la resolución de este ejercicio.

Podemos aplicar, entonces, el teorema de inversión (la función *f* verifica las condiciones de Dirichlet):

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \overset{(1)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2}-i\frac{sen(\omega\pi)}{1-\omega^2}\right)[\cos(\omega t)+isen(\omega t)]d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2}\cos(\omega t)+\frac{sen(\omega\pi)}{1-\omega^2}sen(\omega t)\right)d\omega+$$

$$+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2}sen(\omega t)-\frac{sen(\omega\pi)}{1-\omega^2}\cos(\omega t)\right)d\omega$$

Puesto que f toma valores reales, la componente imaginaria del último miembro es necesariamente nula (de hecho, el integrando es impar). Por lo tanto, para todo t:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[1+\cos(\omega\pi)]\cos(\omega t)}{1-\omega^2}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen(\omega\pi)sen(\omega t)}{1-\omega^2}d\omega=$$

$$=\begin{cases} sen(t) & si \quad t\in[0,\pi] \\ 0 & si \quad t\notin[0,\pi] \end{cases}$$

En particular:

$$0=f(-\tfrac{\pi}{2})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[1+\cos(\omega\pi)]\cos(-\omega\frac{\pi}{2})}{1-\omega^2}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen(\omega\pi)sen(-\omega\frac{\pi}{2})}{1-\omega^2}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[1+\cos(\omega\pi)]\cos(\omega\frac{\pi}{2})}{1-\omega^2}d\omega-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen(\omega\pi)sen(\omega\frac{\pi}{2})}{1-\omega^2}d\omega$$

y

$$1=f(\tfrac{\pi}{2})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[1+\cos(\omega\pi)]\cos(\omega\frac{\pi}{2})}{1-\omega^2}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen(\omega\pi)sen(\omega\frac{\pi}{2})}{1-\omega^2}d\omega$$

Sumando miembro a miembro, obtenemos $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[1+\cos(\omega\pi)]\cos(\omega\frac{\pi}{2})}{1-\omega^2}d\omega=1$, es decir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[1+\cos(\omega\pi)]\cos(\omega\frac{\pi}{2})}{1-\omega^2}d\omega=\pi \quad .$$

---

5. Sea f $f:[0,+\infty)\longrightarrow\Re$ tal que $f(t)=\begin{cases}1 & si \quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}\\ sen(t) & si \quad t>\frac{\pi}{2}\end{cases}$. Analizar la existencia de la transformada de Laplace de f y dar su dominio de convergencia. Resolver la ecuación

$$y''(t)-2y'(t)+2y(t)=f(t)\quad,\qquad t>0$$

con las condiciones iniciales $y(0)=y'(0)=0$.

Resolución: f es continua (en el punto $t=\frac{\pi}{2}$ los límites laterales de f coinciden con $f(\frac{\pi}{2})=1$) y de orden exponencial, pues para todo $t\ge 0:\left|f(t)\right|\le e^{t}$. Ahora, su transformada de Laplace es

$$F(s)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-st}dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}sen(t)e^{-st}dt\overset{\operatorname{Re}(s)>0}{=}\left\{-\frac{e^{-st}}{s}\right\}_{t=0+}^{t=\frac{\pi}{2}}+\tfrac{1}{2i}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}[e^{it-st}-e^{-it-st}]dt=$$

$$=-\frac{e^{-s\frac{\pi}{2}}-1}{s}+\tfrac{1}{2i}\left\{\frac{e^{it-st}}{i-s}+\frac{e^{-it-st}}{i+s}\right\}_{t=\frac{\pi}{2}}^{t\to+\infty}=\frac{1-e^{-s\frac{\pi}{2}}}{s}+\tfrac{1}{2i}\left(-\frac{ie^{-s\frac{\pi}{2}}}{i-s}-\frac{-ie^{-s\frac{\pi}{2}}}{i+s}\right)=$$

$$=\frac{1-e^{-s\frac{\pi}{2}}}{s}+\tfrac{1}{2}\left(-\frac{e^{-s\frac{\pi}{2}}}{i-s}+\frac{e^{-s\frac{\pi}{2}}}{i+s}\right)=\frac{1-e^{-s\frac{\pi}{2}}}{s}+\tfrac{1}{2}e^{-s\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{i-s}+\frac{1}{i+s}\right)=$$

$$=\frac{1-e^{-s\frac{\pi}{2}}}{s}+\tfrac{1}{2}e^{-s\frac{\pi}{2}}\frac{-2s}{-1-s^2}=\frac{1-e^{-s\frac{\pi}{2}}}{s}+\frac{se^{-s\frac{\pi}{2}}}{1+s^2}$$

El dominio de convergencia es el semiplano $\mathbb{H}=\left\{s\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}(s)>0\right\}$: las singularidades de F son 0, i y $-i$.

Ahora, aplicando la tranformación de Laplace a la ecuación, teniendo en cuenta las condiciones iniciales e indicando con Y la transformada de Laplace de y:

$$s^2Y(s)-2sY(s)+2Y(s)=F(s)$$

Resulta entonces: $Y(s)=\dfrac{F(s)}{s^2-2s+2}$ y por lo tanto, $y=g*f$, donde g es una función cuya transformada de Laplace es $G(s)=\dfrac{1}{s^2-2s+2}=\dfrac{-\frac{i}{2}}{s-(1+i)}+\dfrac{\frac{i}{2}}{s-(1-i)}$. Entonces, si elegimos g continua en $[0,+\infty)$: $g(t)=-\frac{i}{2}e^{(1+i)t}+\frac{i}{2}e^{(1-i)t}$ para todo $t\geq 0$.
