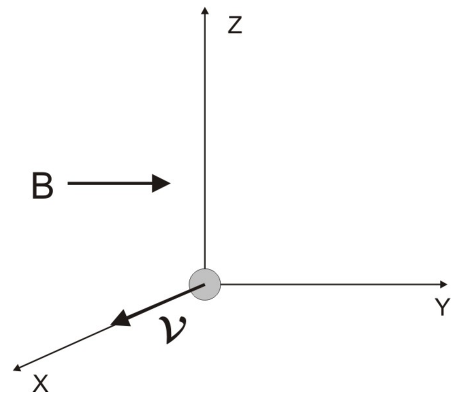
Problema

Una partícula de masa $m$ y carga $q$, con velocidad $\mathbf{v} = v_0\hat{\mathbf{x}}$, entra en una región del espacio donde existe una inducción magnética uniforme $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{y}}$, como se muestra en la figura.




Calcular la trayectoria de la partícula.

Solución:

Desde el instante en que el partícula ingresa en la región de campo $\mathbf{B}$, la ecuación para su trayectoria es

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}}{m} \tag{1}$$

donde $\mathbf{x}$ =$(x, y, z)$ es el vector posición de la partícula

y

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = q(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\times\mathbf{B}) \tag{2}$$

es la fuerza que actúa sobre la partícula. De este modo, (1) representa tres ecuaciones, una para cada componente de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{B}$.

Las condiciones son

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t=0) = \mathbf{v}(t=0) = v_0\hat{\mathbf{x}} \tag{3}$$

y

$$\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \tag{4}$$

Escribimos ahora las ecuaciones de cada componente. Para esto, escribamos con mas detalle el vector $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} =&\; q(\tfrac{d\mathbf{x}}{dt}\times\mathbf{B}) \\
=&\; q\left[\left(\tfrac{dx}{dt},\tfrac{dy}{dt},\tfrac{dz}{dt}\right)\times(0,B_0,0)\right] \\
=&\; q\left[(v_x\hat{\mathbf{x}}\times B_0\hat{\mathbf{y}}) + (v_y\hat{\mathbf{y}}\times B_0\hat{\mathbf{y}}) + (v_z\hat{\mathbf{z}}\times B_0\hat{\mathbf{y}})\right] \\
=&\; q\left[v_xB_0\,(\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}}) + v_yB_0\,(\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{y}}) + v_zB_0\,(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{y}})\right] \\
=&\; q\left[v_xB_0\hat{\mathbf{z}} - v_zB_0\hat{\mathbf{x}}\right] \\
=&\; qB_0\left[-v_z\hat{\mathbf{x}} + v_x\hat{\mathbf{z}}\right]
\end{aligned}$$

de modo que la ecuación (1) escrita en componentes resulta

$$\begin{array}{rclcll}
\frac{d^2x}{dt^2} &=& -\frac{qB_0}{m}\frac{dz}{dt} &=& -\omega_0\frac{dz}{dt} & (5.a) \\
\frac{d^2y}{dt^2} &=& 0 & & & (5.b) \\
\frac{d^2z}{dt^2} &=& \frac{qB_0}{m}\frac{dx}{dt} &=& \omega_0\frac{dx}{dt} & (5.c)
\end{array} \tag{5}$$

donde definimos $\omega_0 \equiv \frac{qB_0}{m}$. Se trata ahora de resolver las ecuaciones (5) con las condiciones iniciales

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0$$

y

$$\frac{dx}{dt}(0) = v_0 \;\; ; \;\; \frac{dy}{dt}(0) = \frac{dz}{dt}(0) = 0$$

La segunda ecuación de (5) es la mas fácil de resolver:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0 = y(t) = A_y t + B_y$$

donde $A_y$ y $B_y$ son constantes que dependen de las condiciones iniciales. Para obtenerlas planteamos

$$\frac{dy}{dt}(0) = 0 \Longrightarrow A_y = 0$$

y

$$y(0) = 0 \Longrightarrow B_y = 0$$

de manera que

$$\boxed{y(t) = 0 \qquad \forall t \geq 0}$$

Las ecuaciones (5.a) y (5.c) estan acopladas. Derivando (5.c) y reemplazando (5.a) resulta

$$\frac{d^3z}{dt^3} = -\omega_0^2 \frac{dz}{dt}$$

o bien

$$\frac{d^3z}{dt^3} + \omega_0^2 \frac{dz}{dt} = 0 \tag{6}$$

Resolvemos (6) proponiendo un asolución exponencial $z(t) = e^{\alpha t}$ y reemplazando, con lo que resulta

$$\alpha^3 + \omega_0^2 \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha \left(\alpha^2 + \omega_0^2\right) = 0$$

de donde las posibles soluciones para $\alpha$ son

$$\begin{aligned} \alpha = & \quad 0 \\ \alpha = & \quad \pm j\omega_0 \end{aligned}$$

La solución general de (6) es la combinación lineal de todas estas posibles soluciones

$$z(t) = A_z e^{0t} + B_z e^{j\omega_0 t} + C_z e^{-j\omega_0 t} = A_z + B_z e^{j\omega_0 t} + C_z e^{-j\omega_0 t} \tag{7}$$

Aplicamos a (7) las condiciones iniciales

$$\frac{dz}{dt}(0) = 0 \Longrightarrow j\omega_0 B_z + (-j\omega_0) C_z = 0 \Longrightarrow B_z = C_z$$

con lo cual

$$z(t) = A_z + C_z \left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) = A_z + 2C_z \cos(\omega_0 t)$$

ademas,

$$z(0) = 0 \Longrightarrow A_z + 2C_z = 0 \Longrightarrow A_z = -2C_z$$

de modo que

$$z(t) = -2C_z + 2C_z \cos(\omega_0 t) = -2C_z \left[1 + \cos(\omega_0 t)\right] \tag{8}$$

La constante $C_z$ se determina mas adelante.

Volvemos a considerar la ecuación para $x(t)$ reemplazando (8) en (5.c)

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left\{-2C_z\left[1+\cos(\omega_0 t)\right]\right\} = \omega_0 \frac{dx}{dt}$$

o bien

$$\frac{dx}{dt} = 2C_z\omega_0\cos(\omega_0 t)$$

de donde

$$x(t) = 2C_z\sin(\omega_0 t) + A_x \tag{9}$$

Aplicamos a (9) las condiciones iniciales

$$\frac{dx}{dt}(0) = v_0 \Longrightarrow 2C_z\omega_0 = v_0 \Longrightarrow C_z = \frac{v_0}{2\omega_0} \tag{10}$$

y

$$x(0) = 0 \Longrightarrow A_x = 0$$

con lo cual resulta

$$\boxed{x(t) = \tfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \qquad \forall t \geq 0} \tag{11}$$

Reeemplazando (10) en (8) resulta

$$\boxed{z(t) = -\tfrac{v_0}{\omega_0}\left[1+\cos(\omega_0 t)\right] \qquad \forall t \geq 0} \tag{12}$$

Para interpretar la solución, recordemos que la ecuación de una circunferencia en el plano $x-z$ de radio $R$ con centro en el punto $(x_0, 0, z_0)$ está dada por

$$(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

A partir de (11) y (12) vemos que

$$x^2(t) + \left[z(t) + \frac{v_0}{\omega_0}\right]^2 = \left[\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right]^2 + \left[-\frac{v_0}{\omega_0}\cos(\omega_0 t)\right]^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2$$

de manera que la trayectoria del partícula es una circunferencia en el plano $x-z$, de radio $R = \frac{v_0}{\omega_0}$ con centro en el punto $(0, 0, -\frac{v_0}{\omega_0})$