1)a) El integrando $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+4}=\dfrac{1}{(x-1)^2+3}$ es continuo en toda la recta real y además $\underset{x\to+\infty}{Lim}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{x^2}}=1=\underset{x\to-\infty}{Lim}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{x^2}}$. Por lo tanto la integral converge (y converge absolutamente, por razones obvias: $|f(x)|=f(x)$ para todo x real). Para el cálculo consideramos la función $h(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2+3}=\dfrac{1}{[z-(1+i\sqrt{3})][z-(1-i\sqrt{3})]}$ y, para cada $R>|1+i\sqrt{3}|=2$, el circuito más popular: el intervalo real [-R , R] concatenado con la semicircunferencia de centro en el origen y radio R ubicada en el semiplano superior. Haciendo tender R a $+\infty$, Lema de Jordan mediante, resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2-2x+4}dx=2\pi i\,RES(h,1+i\sqrt{3})=\frac{2\pi i}{1+i\sqrt{3}-(1-i\sqrt{3})}=\frac{2\pi i}{2i\sqrt{3}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

---

1)b) Se trata de la serie geométrica en todo su esplendor:

$$\frac{1}{z-2}=\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\overset{|z|<2}{=}\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

Por lo tanto, $a_n=-\dfrac{1}{2^{n+1}}$ y el radio de convergencia es 2. Recordemos que la convergencia de las series de potencia es absoluta en cada punto del interior del disco de convergencia, y es uniforme en cada subconjunto cerrado y acotado contenido en el interior del disco. En particular, para $z=e^{i\theta}$ de módulo 1, tenemos la serie absolutamente convergente

$$\frac{1}{e^{i\theta}-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2^{n+1}}\right)e^{in\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2^{n+1}}\right)\cos(n\theta)+i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2^{n+1}}\right)sen(n\theta)$$

Por lo tanto, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2^{n+1}}\right)sen(n\theta)=componente\ imaginaria\ de\ \frac{1}{e^{i\theta}-2}\overset{cuentitas}{=}\frac{sen(\theta)}{4\cos(\theta)-5}$

para todo θ real, siendo la convergencia absoluta y uniforme en toda la recta real. (En la práctica hay ejercicios por el estilo)

---

2)a) Aquí todos se quedaron en la continuidad seccional. Repetí hasta el cansancio que para la convergencia de una serie de Fourier de una función en un punto la sola continuidad de la función en ese punto no es suficiente. Las condiciones que vimos en clase, las más sencillas, incluyen la existencia de derivadas laterales finitas en el punto en cuestión, y en ese caso la serie de Fourier converge al promedio de la función en el punto. Alcanza con pedir esto para la función *f*, definida en $[0,1]$, pues si *f* es seccionalmente continua en este intervalo y admite derivadas laterales finitas en cada punto del intervalo, ocurre lo mismo con su extensión periódica impar (de período 2)

----

2)b) Se trata de una cuentita: los coeficientes de la serie exponencial $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ de *f* son

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\pi-\theta)a}e^{-in\theta}d\theta = cuentitas = \frac{e^{i\pi a}sen((a+n)\pi)}{\pi(a+n)}$$

Obsérvese que $a + n$ no se anula para ningún n, pues por hipótesis, a no es entero (ver enunciado). Hasta aquí llegaron algunos sin tropiezos. Lo que no se apiolaron para poder aplicar la identidad de Parseval y terminar de resolver el ejercicio es que:

$$sen((a+n)\pi) = sen(a\pi + n\pi) = sen(a\pi)\cos(n\pi) + \cos(a\pi)sen(n\pi) = (-1)^n sen(a\pi)$$

Por lo tanto, $c_n = \dfrac{(-1)^n e^{i\pi a} sen(a\pi)}{\pi(a+n)}$. Ahora, nuestra *f* tiene módulo constante = 1 y resulta

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{[sen(a\pi)]^2}{\pi^2(a+n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \overset{Parseval}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 1$$

Es decir: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a+n)^2} = \frac{\pi^2}{[sen(a\pi)]^2}$

----

3)a) En el ejercicio 1)a) se vio que la función *f* es continua en toda la recta real y absolutamente integrable, por lo tanto existe su transformada de Fourier. Para el cálculo de $\hat{f}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+2x+4}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{(x-1)^2+3}dx$ se puede utilizar la función $h(z) = \dfrac{e^{-i\omega z}}{(z-1)^2+3}$ y el mismo circuito que en el ejercicio 1)a), siempre y cuando $\omega < 0$, caso contrario, la integral sobre la semicircunferencia no tiende a cero cuando R tiende a infinito. Para $\omega > 0$ debe utilizarse la semicircunferencia ubicada en el semiplano inferior. Este es el mismo procedimiento que para el cálculo de la TF de $\dfrac{1}{1+x^2}$ (dicho sea de paso: se podía reducir este ejercicio a este caso mediante un cambio de variables). El resultado final es $\hat{f}(\omega)=\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|\omega|-i\omega}$. Un control que suele ser conveniente es verificar que $\underset{\omega \to +\infty}{Lim}\hat{f}(\omega)=0$ y que $\underset{\omega \to -\infty}{Lim}\hat{f}(\omega)=0$.

---

3)b) Ejercicio recurrente en las prácticas y exámenes. Aplicación clásica de la Transformada de Fourier. Algunos separaron variables, método que es muy efectivo en conjunto con las series de Fourier, <u>siempre y cuando el dominio espacial sea acotado</u> y por lo tanto se pueda extender periódicamente la función buscada (respecto de la variable espacial).

---

4)a) La función, además de ser continua, es acotada en $[0,+\infty)$ y por lo tanto de orden exponencial. El cálculo de su transformada es una cuenta (algunos recordaban la fórmula de la TL de funciones periódicas) y resulta

$$L(f)(s)=\frac{2\pi T}{4\pi^2+T^2s^2}\cdot\frac{1+e^{\frac{-T}{2}s}}{1-e^{-Ts}} \quad , \quad \mathrm{Re}(s)>0$$

(esta respuesta incluye la región de convergencia).

---

4)b) Otro ejercicio que se resuelve haciendo cuentas. Teniendo en cuenta que (para funciones objeto) $\dfrac{d}{ds}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt=-\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-st}dt$, la ecuación dada se transforma, mediante la TL, en

$$-\frac{d}{ds}[s^2Y(s)-s\overbrace{y(0^+)}^{=0}-\overbrace{y'(0^+)}^{=1}]-\frac{d}{ds}[sY(s)-\overbrace{y(0^+)}^{=0}]+Y(s)=0$$

(como es habitual, indicamos con Y la tranformada de Laplace de y). Haciendo las cuentitas, queda

$$(s+1)\frac{d}{ds}Y(s)+2Y(s)=0$$

Se puede resolver esta ecuación de muchas maneras. Probablemente la más transparente es multiplicar por el factor integrante $s+1$, quedando

$$(s+1)^2 \frac{d}{ds} Y(s) + 2(s+1) Y(s) = 0$$

El primer miembro es la derivada de $(s+1)^2 Y(s)$, con lo cual resulta que $(s+1)^2 Y(s)$ es constante (s varía en un semiplano, que es un dominio conexo):

$$Y(s) = \frac{cte}{(s+1)^2} \quad , \mathrm{Re}(s+1) > 0$$

Entonces, $y(t) = cte.te^{-t} H(t)$. Para $t > 0$ tenemos $y'(t) = cte(e^{-t} - te^{-t})$, por lo tanto $y'(0^+) = cte$ debe ser = 1. Por lo tanto, la respuesta es

$$y(t) = te^{-t} H(t)$$

[Puede comprobarse fácilmente que esta es, efectivamente, la solución de la ecuación con las condiciones iniciales requeridas]