1. Sean $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios en $\mathbb{C}$ tales que grado$(Q) \geq$ grado$(P) + 3$. Probar que la suma de los residuos de todas las singularidades en $\mathbb{C}$ de $g(z) = zP(z)/Q(z)$ es cero.

♣ La función $g(z) = zP(z)/Q(z)$ tiene un número finito de singularidades (los ceros del polinomio Q) y es holomorfa en el entorno reducido de infinito $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$, tomado $R = \max\{|z_i| : Q(z_i) = 0\}$, de modo que infinito es para g, a lo sumo, una singularidad aislada (de hecho, se probará que ∞ es un cero por lo menos doble, y de allí, la nulidad de su residuo en ∞). Sabiendo que $\sum_i \operatorname{Res}(g(z), z_i) + \operatorname{Res}(g(z), \infty) = 0$, si se prueba que $\operatorname{Res}(g(z), \infty) = 0$, se prueba lo pedido. Por la hipótesis acerca de los grados, se tiene que:

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = 0 \text{ y también } \lim_{z\to\infty} zg(z) = 0 \quad \text{y además } \exists \lim_{z\to\infty} z^2 g(z)$$

Pero entonces el desarrollo en serie de Laurent de g en D debe ser el siguiente ($g(z), zg(z)$ y $z^2g(z)$ son acotadas en D):

$$g(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{z^k} = \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \cdots \qquad \text{convergente en } |z| > R$$

Y entonces, por definición, $\operatorname{Res}(g(z), \infty) = 0$, de donde resulta lo pedido, ya que la suma de los residuos en el plano complejo extendido, para una función con un número finito de singularidades (como es el caso de g), debe ser nula:

$$\sum_i \operatorname{Res}(g(z), z_i) + \underbrace{\operatorname{Res}(g(z), \infty)}_{0} = 0 \text{ y entonces } \sum_i \operatorname{Res}(g(z), z_i) = 0$$

`Observación 1.` Muchas consideraciones sencillas con ejemplos muy bien escogidos para mejor vérselas con el residuo en infinito se encuentran en el apartado 21 del libro de texto de Balanzat, M. (2002). Matemática Avanzada para la Física (Primera edición, tercera reimpresión). Buenos Aires: Eudeba.

`Observación 2.` Con frecuencia se apela al recurso de trasladar el cálculo del residuo en ∞ al cálculo del residuo en cero, lo que también puede hacerse aquí. Para una cualquiera g cuya serie de Laurent en $D\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ es $\sum_{-\infty}^{\infty} c_i z_i^k$, por definición es $\operatorname{Res}(g(z), \infty) = -c_1$. Pero entonces, en el entorno reducido $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |w| < 1/R\}$, la función $h(w) \stackrel{\text{def}}{=} -w^{-2}g(1/w)$ tiene (¡verificarlo!) como residuo en $w = 0$ el valor $-c_{-1}$, de modo que $\operatorname{Res}(g(z), \infty) = \operatorname{Res}(h(w), 0)$. Ahora en particular, siendo p y q los grados, respectivamente de P y Q, se tiene que:

$$g(z) = \frac{zP(z)}{Q(z)} = \frac{z\sum_0^p a_k z^k}{\sum_0^q b_k z^k} \text{ de donde } h(w) = -w^{-2}\frac{(1/w)P(1/w)}{Q(1/w)} = -w^{q-p-3}\left(\frac{\sum_0^p a_k w^{p-k}}{\sum_0^q b_k w^{q-k}}\right) \text{es holomorfa en } D_0$$

Y como $q - p - 3 \geq 0$ y además $b_q \neq 0$ se tiene que $w = 0$ es una singularidad evitable de h, ya que el $\lim_{w->0} h(w)$ existe: tiene valor a_p/b_q si $q - p - 3 = 0$, y el valor 0 si $q - p - 3 > 0$. En cualquiera de los dos casos, $\operatorname{Res}(g(z), \infty) = \operatorname{Res}(h(w), 0) = 0$.

2. Resolver el problema del potencial electrostático en el primer cuadrante.

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}x,y) = 0 & x > 0,\, y > 0 \\ u(x,0) = \kappa_{(0,1)}(x) & x \geq 0 \\ u(0,y) = \kappa_{(0,1)}(y) & y \geq 0 \end{cases}$$

♣ La función $w(z) = z^2$ transforma el problema del primer cuadrante del xy-plano ($z = x + iy$) en el correspondiente al semiplano superior del x_1y_1-plano ($w = x_1 + iy_1$) con $u(x_1, 0) = \kappa_{(-1,1)}(x_1)$ que es satisfecho por la función armónica que es la parte real del potencial complejo (¡obtenerlo!) $\Phi = u + iv$:

$$\Phi(w) = -\frac{i}{\pi}\operatorname{Log}\left(\frac{w-1}{w+1}\right) \text{ quedando } u(x_1, y_1) = \operatorname{Re}(\Phi(w)) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2y_1}{x_1^2 + y_1^2 - 1}\right),\ \text{con } 0 \leq \arctan\left(\frac{2y_1}{x_1^2 + y_1^2 - 1}\right) \leq \pi$$

Ahora, siendo $w = x_1 + iy_1$, recordando que $w(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$, es $x_1(x,y) = x^2 - y^2$, $y_1(x,y) = 2xy$, lo que reemplazado en la expresón anterior finalmente resulta:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2 - 1}\right),\ \text{con } 0 \leq \arctan\left(\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2 - 1}\right) \leq \pi$$

`Observación 1.` La parte imaginara del potencial complejo da la correspondiente función de corriente, cuyos conjuntos de nivel son ortogonales a los correspondientes a la función u.

$$\psi(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}\right)$$

`Observación 2`. Este ejercicio, junto a otros de mayor amplitud y con fecundas observaciones, puede encontrarse en muchos libros de texto; por citar alguno de la bibliografía, puede verse como ejercicio 10 del apartado 8.5 del texto de Wunsch, D. (1994). Complex variables with applications (Segunda edición). Wilmington, Delaware: Addison-Wesley Publishing Company. También puede verse espcíficamente el apartado 7.4 del texto de Zill, D. y Shanahan, P. (2003). A first course in complex analysis with applications (Primera edición). Boston: Jones and Bartlett, donde se generaliza mediante las fórmulas integrales de Poisson en el semiplano.

3. Considerar el siguiente problema, elegir el desarrollo de Fourier de h que resulte adecuado para resolver este problema y obtener la solución $u(x,t)$ en términos de los coeficientes de tal desarrollo.

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + 12x^2 & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = 1 & t \geq 0 \\ u(\pi,t) = 3 & t \geq 0 \\ u(x,0) = h(x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

♣ El problema se transforma en homogéneo expresándolo en términos de la nueva variable $v(x,t) = u(x,t) + x^4 + c_1x + c_2$, escogiendo las constantes c_1, c_2 tales que $v(0,t) = u(0,t) + c_2 = 0, v(\pi,t) = u(\pi,t) + \pi^4 + c_1\pi + c_2 = 0$, lo que resulta en $c_1 = -(2+\pi^4)/\pi, c_2 = -1$. De esta manera, el problema en el lenguaje de v, es el siguiente:

$$\begin{cases} v_t(x,t) = v_{xx}(x,t) & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ v(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ v(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ v(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \qquad \text{siendo } f(x) = h(x) + x^4 + c_1x + c_2$$

Este problema clásico homogéneo se resuelve mediante variables separables haciendo $v(x,t) = X(x)T(t)$ que puesto en la ecuación diferencial queda $X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$, que origina una constante de separación a determinar λ tal que $X''(x)/X(x) = \lambda = T'(t)/T(t)$ y con ello dos ecuaciones diferenciales ordinarias: $X''(x) - \lambda X(x) = 0, T'(t) = \lambda T(t)$. La primera tiene, con las condiciones $X(0) = X(\pi) = 0$ solución trivial (y entonces inservible) para $\lambda \geq 0$ (verificar esto), de modo que solo puede ser $\lambda = -\omega^2 < 0$ con $\omega > 0$, en cuyo caso la solución general de $X''(x) + \omega^2 X(x) = 0$ es $X(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ que, debiendo satisfacer $X(0) = X(\pi) = 0$, deja que $A = 0, B\sin(\omega\pi) = 0$, y para evitar la (inútil) solución trivial sirve cualquier $\omega_n = n, n = 1, 2, \ldots$ (y entonces $\lambda_n = -n^2, n = 1, 2, \ldots$). De esta manera se tienen infinitas soluciones $X_n(x) = \sin(nx)$. La segunda ecuación ordinaria tiene entonces también infinitas soluciones $T_n(t) = e^{-n^2t}$ y así es que (linealidad de la ecuación diferencial y suposición de la convergencia de la serie mediante) $v(x,t) = \sum_1^\infty b_n \sin(nx)e^{-n^2t}$ satisface la ecuación diferencial y las dos condiciones de frontera. Solo resta escoger adecuadamente las b_n para satisfacer la condición inicial $v(x,0) = \sum_1^\infty b_n \sin(nx) = f(x)$, lo que no es otra cosa que el desarrollo de Fourier de $f(x)$ en serie de senos en el intervalo $(0,\pi)$, para lo admitamos, por ejemplo que h y h' (y entonces f y f') son continuas por partes en el intervalo $[0,\pi]$.

$$v(x,t) = \sum_1^\infty b_n \sin(nx)e^{-n^2t} \text{ con } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x, \text{ siendo } f(x) = h(x) + x^4 + c_1x + c_2$$

Finalmente,

$$u(x,t) = v(x,t) - x^4 - c_1x - c_2$$

`Observación 1`. Para *verificar* que la anterior es *una* solución habría que derivar la respecto a t y dos veces respecto a x. Brevemente, el Lema de Riemann asegura $b_n \to 0$ con $n \to \infty$ y entonces existe $M > 0$ tal que $|b_n| < M$, y además para cualquier $t \geq t_0 > 0$ es $|b_n \sin(nt)e^{-n^2t}| < Me^{-n^2t_0}$ y como la serie numérica de término general $e^{-n^2t_0}$ es convergente, el M-test de Weirstrass asegura la convergencia uniforme de la serie respecto tanto a x como a t en $0 \leq x \leq \pi, t \geq t_0 > 0$. Análogamente se razona con $ne^{-n^2t_0}, n^2e^{-n^2t_0}$, de modo que se tiene la convergencia uniforme para las derivadas.

`Observación 2`. Para hablar de que la anterior sea *la única* solución, hay ya más exigencias con f. Una prueba con f continua y f' continua por partes con $f(0) = f(\pi)$ puede verse, por ejemplo, en la sección 61 del texto Churchill, R. (1977). Series de Fourier y Problemas de Contorno (Primera edición traducida de la segunda edición en inglés Fourier Series And Boundary Value Problems, traducida por L. J. Arrilucea y M. Arjona Brieva). México: McGraw-Hill.

4. Sea $\hat{f}$ la transformada de Fourier de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = e^{-t^2}\sin(t)$. Calcular el valor de las siguientes integrales impropias:

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\,\mathrm{d}w, \qquad (ii) \int_{0}^{\infty} w\hat{f}(w)\,\mathrm{d}w, \qquad (iii) \int_{0}^{\infty} \hat{f}(w)\sin(aw)\,\mathrm{d}w \qquad (a \in \mathbb{R})$$

♣ La función f es de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ además de absolutamente integrable junto con sus derivadas de cualquier orden (la presencia de e^{-t^2} convence a cualquier polinomio). El teorema de inversión permite el cálculo inmediato de la primera integral:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwt}\,\mathrm{d}w, \text{ de donde, poniendo } t = 0 : \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\,\mathrm{d}w = 2\pi f(0) = 0$$

La segunda integral puede obtenerse como la mitad de la integral en todo $\mathbb{R}$, puesto que al ser f real e impar, su transformada $\hat{f}$ es impar (e imaginaria pura), y entonces $w\hat{f}(w)$ es una función par, lo que autoriza a escribir $\int_0^\infty w\hat{f}(w)\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} w\hat{f}(w)\,\mathrm{d}w$ (se anota la prueba de la imparidad de $\hat{f}$ en la línea siguiente):

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)\,\mathrm{d}t}_{0,\text{ pues } f \text{ es impar}} - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(wt)\,\mathrm{d}t = -2i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(wt)\,\mathrm{d}t = 2i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(-wt)\,\mathrm{d}t = -\hat{f}(-w)$$

Recordando la propiedad de la tranformada de la derivada ($\hat{f'}(w) = iw\hat{f}(w)$) cuya prueba es la siguiente línea, ya puede utilizarse, nuevamente, el teorema de inversión para calcular la segunda integral.

$$\hat{f'}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-iwt}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\Big[f(t)e^{-iwt}\Big]_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-iw)e^{-iwt}\,\mathrm{d}t = iw\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\,\mathrm{d}t = iw\hat{f}(w)$$

De lo anterior entonces se tiene:

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} iw\hat{f}(w)e^{iwt}\,\mathrm{d}w, \text{ de donde, poniendo } t = 0 : \int_{0}^{\infty} w\hat{f}(w)\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} w\hat{f}(w)\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{i}f'(0) = \frac{\pi}{i} = -\pi i$$

Para la tercera integral, recordando la propiedad del desplazamiento de la función original $f_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t-a)$ cuya transformada es $\hat{f}_a(w) = e^{-iaw}\hat{f}(w)$ cuya prueba es la siguiente línea, ya puede utilizarse, nuevamente, el teorema de inversión.

$$\hat{f}_a(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-iwt}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\Big[f(t)e^{-iwt}\Big]_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-iw)e^{-iwt}\,\mathrm{d}t = iw\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\,\mathrm{d}t = iw\hat{f}(w)$$

La propiedad de desplazamiento de la función original $f_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t-a)$ cuya transformada es $\hat{f}_a(w) = e^{-iaw}\hat{f}(w)$ y el teorema de inversión junto a la imparidad de $\hat{f}$ permite calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\sin(wa)\,\mathrm{d}w$:

$$2\pi f_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{-iwa}e^{iwt}\,\mathrm{d}w \text{ y con } t = 0 : 2\pi f_a(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{-iwa}\,\mathrm{d}w = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\cos(wa)\,\mathrm{d}w}_{0,\text{ pues } \hat{f} \text{ es impar}} - i\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\sin(wa)\,\mathrm{d}w$$

De allí resulta la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\sin(wa)\,\mathrm{d}w = 2\pi i f_a(0) = 2\pi i f(-a) = 2\pi i e^{-a^2}\sin(-a) = -2\pi i e^{-a^2}\sin(a)$. Finalmente, puesto que el integrando es par (el producto la las impares $\hat{f}(w)$ y $\sin(aw)$), la integral pedida es la mitad de la que se acaba de obtener:

$$\int_{0}^{\infty} \hat{f}(w)\sin(wa)\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\sin(wa)\,\mathrm{d}w = -\pi i e^{-a^2}\sin(a)$$

`Observación`. El ejercicio utiliza definiciones (la transformada de Fourier, la convergencia absoluta...) y resultados (teorema de inversión, propiedades de la transformada de la derivada, del desplazamiento de la original...) que se encuentran desarrolladas en detalle en, por ejemplo, en el capítulo 7 del texto Vretblad, A. (2003). Fourier Analysis and Its Applications (Primera edición). New York: Springer.

5. Sea $r : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(t) = t - \lfloor t \rfloor$, siendo $\lfloor t \rfloor = n$ sii $n \leq t < n + 1$, con $n \in \mathbb{Z}$. Calcular la transformada de Laplace de r, especificando su dominio de convergencia. Resolver el siguiente sistema utilizando transformada de Laplace.

$$\begin{cases} x'(t) - y(t) &= 0 \\ x(t) - y'(t) &= r(t) \end{cases} \quad \text{con } x(0^+) = 0,\ y(0^+) = 0$$

♣ La función r (llamada"serrucho", por la forma de su gráfico) es continua por partes y de orden exponencial junto con sus derivadas (es acotada, $\forall t \in \mathbb{R} : 0 \leq r(t) < 1$ con salto unitario en los puntos donde es discontinua (enteros) y además con derivadas laterales $+1, 0$ en esos puntos, y es de período 1, pues para cualquier t es $r(t + 1) = r(t)$. La transformada de Laplace de una función T-periódica se obtiene utilizando una integral sobre un período (en la segunda igualdad se cambió a la variable $x = t - T$ y en la tercera se aprovechó la T-periodicidad $r(x + T) = r(x)$).

$$\int_0^\infty r(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \int_0^T r(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t + \int_T^\infty r(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \int_0^T r(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty r(x+T)e^{-z(x+T)}\,\mathrm{d}x = \int_0^T r(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t + e^{-Tz}\int_0^\infty r(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}x$$

La igualdad anterior equivale a $(1 - e^{-Tz}) \int_0^\infty r(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \int_0^T r(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t$, y entonces, en el semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$ se tiene la transformada de una función T-periódica:

$$R(z) = \frac{1}{1 - e^{-Tz}} \int_0^T r(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{Re}(z) > 0$$

En particular, para este caso con $T = 1$ y siendo $r(t) = t$ en $0 \leq t < 1$, el cálculo de la transformada es:

$$\int_0^1 te^{-tz}\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{e^{-zt}}{z^2}(1 + tz)\right]_0^1 = \frac{1 - e^z - ze^{-z}}{z^2} \text{y de allí queda } R(z) = \frac{1 - e^z - ze^{-z}}{z^2(1 - e^- z)} = \frac{1}{z^2} - \frac{e^{-z}}{z(1 - e^{-z})}$$

Todavía puede escribirse la transformada obtenida de un modo más compacto, que es su modo más frecuente en los textos:

$$R(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{e^{-z/2}}{2z\sinh(z/2)}, \qquad \mathrm{Re}(z) > 0$$

Ahora, en cuanto al sistema, llamando X, Y a las transformadas de Laplace de las funciones x, y (suponemos x, y de orden exponencial y continuas en $t > 0$ con derivadas x', y' continuas por parte en cualquier intervalo finito de $t > 0$) y recordando la transformada de la derivada de una tal función f:

$$\mathcal{L}(f')(z) = \int_0^\infty f'(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[f(t)e^{-zt}\right]_0^\infty}_{0 - f(0^+)} - \int_0^\infty f(t)(-z)e^{-zt}\,\mathrm{d}t = -f(0^+) + z\underbrace{\int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t}_{F(z)} = zF(z) - f(0^+)$$

Aplicada esta propiedad, el sistema original queda transformado en el sistema siguiente, que permite obtener las transformadas de Laplace de las funciones buscadas.

$$\begin{cases} zX(z) - Y(z) &= 0 \\ X(z) - zY(z) &= R(z) \end{cases} \quad \text{resultando así} \quad \begin{cases} X(z) &= -R(z)/(z^2 - 1) \\ Y(z) &= -zR(z)/(z^2 - 1) \end{cases}$$

Reconociendo $1/(z^2 - 1), z/(z^2 - 1)$ como las transformadas de Laplace, respectivamente, de $\sinh(t), \cosh(t)$ en $\mathrm{Re}(z) > 0$, se tiene que las soluciones buscadas se obtienen de la convolución de estas funciones con la función $r(t)$, esto es que, finalmente, $x(t) = -r(t) \star \sinh(t), y(t) = -r(t) \star \cosh(t)$.

$$\begin{cases} x(t) &= -\sinh(t) \star r(t) = -\int_0^t \sinh(u)\, r(t - u)\,\mathrm{d}u \\ y(t) &= -\cosh(t) \star r(t) = -\int_0^t \cosh(u)\, r(t - u)\,\mathrm{d}u \end{cases}, \qquad t \geq 0$$

`Observación 1`. La ejecución del producto de convolución lleva dificultades que exigen precaución al momento de efectuar la integral, para tener en cuenta la periodicidad de r. Las funciones así obtenidas resultarán continuas (a pesar de no serlo la señal de entrada r), pero se advertirán puntos angulosos (y entonces discontinuidades en las derivadas x', y') en correspondencia con las discontinuidades de r. Para el primer tramo de la solución $0 < t < 1$, prescindiendo de Laplace, se observa que despejando de la primera ecuación $y(t) = x'(t)$ y reemplazando en la segunda queda la ecuación ordinaria de segundo orden $x(t) - x''(t) = t$ cuya solución general $x(t) = C_1 \cosh(t) + C_2 \sinh(t) + t$, de modo que $y(t) = x'(t) = C_1 \sinh(t) + C_2 \cosh(t) + 1$; imponiendo las condiciones iniciales queda $C_1 = 0, C_2 = -1$, de modo que la solución en este tramo es:

$$\begin{cases} x(t) &= -\sinh(t) + t \\ y(t) &= -\cosh(t) + 1 \end{cases} \quad \text{en } 0 \leq t < 1$$

Si se quisiera proseguir la estrategia anterior en el segundo tramo, habría de considerarse como condiciones iniciales en $t = 1$ los valores que le deja este tramo, para enganchar con continuidad la solución (esto es poner $x(1) = -\sinh(1)+1, y(1) = -\cosh(1)+1$), y reiniciar el proceso teniendo en cuenta que en este tramo es $r(t) = -1 + t, 1 \leq t < 2$...

`Observación 2`. Las varias definiciones y propiedades que atraviesan el ejercicio se encuentran en abundantes obras del tema. De sencilla lectura es el libro de texto de Schiff, J. (1999). The Laplace transform: theory and applications (Primera edición). New York: Springer.

Remisión bibliográfica. La asignatura comprende temas que necesariamente residen en textos diversos, tanto en propósitos y alcance, como lenguaje y notación. Que exista un excelente texto que en apenas 363 páginas recorra todo y a distancia de un *click* es un improbable acontecimiento hecho posible por el esfuerzo extraordinario del profesor Daniel Prelat.

Prelat (2020). Notas acerca de variable compleja, series de Fourier y transformadas integrales (click → bibliografía)