RESOLUCIÓN INTEGRADOR ANÁLISIS MATEMÁTICO III

Primer Cuatrimestre 2020 - Segunda oportunidad - 18/09/2020

Ad usum populorum

EJERCICIO 1: Sabiendo que R_a es el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ y que R_b es el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, ¿qué se puede decir sobre el dominio de holomorfía de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n n b_n (z-z_0)^n$?

Resolución: Por hipótesis, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n [(z-z_0)^2]^n$ converge (absolutamente) si $\left|(z-z_0)^2\right| < R_a$, es decir, si $|z-z_0| < \sqrt{R_a}$. Por otra parte, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n n b_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n b_n [3(z-z_0)]^n$ tiene el mismo radio de convergencia que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n [3(z-z_0)]^n$ (ver, por ejemplo, Capítulo VI de los apuntes del curso), por lo tanto esta serie converge (absolutamente) si $|3(z-z_0)| < R_b$, o sea, si $|z-z_0| < \frac{1}{3} R_b$. Entonces, la suma de las dos series converge absolutamente en el disco

$$D(z_0;\ r) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r \right\}$$

donde $r = \min\left\{ \sqrt{R_a}, \frac{1}{3} R_b \right\}$. Por lo tanto, la función definida por la suma de las series es holomorfa en un dominio que contiene (o es igual) a dicho disco abierto. La pregunta ahora es si no puede ser horlomorfa en un dominio mayor. Simplifiquemos la notación: $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{2n}$, $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n n b_n (z-z_0)^n$ y $f(z) = g(z) + h(z)$. g es holomorfa en el disco $D(z_0;\ r_a)$, donde $r_a = \sqrt{R_a}$ y h es holomorfa en el disco $D(z_0;\ r_b)$, donde $r_b = \frac{1}{3} R_b$ (esto es todo lo que podemos suponer: no se pueden asumir extensiones analíticas más allá de estos discos pues la definición de estas funciones están dadas por las series de potencias, y la definición de una función incluye la especificación de su dominio). Entonces f es holomorfa en el disco $D(z_0;\ r) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r \right\}$, donde $r = \min\{r_a, r_b\}$ y nos preguntamos si f no puede ser holomorfa en un dominio mayor. Supongamos que $r_a < r_b$ y por lo tanto $D(z_0;\ r) = D(z_0; r_a)$. Si f fuera holomorfa en algún punto $z_1 \in D(z_0; r_b) - D(z_0; r_a)$, entonces, dado que h es holomorfa en z_1, f - h sería una extensión analítica de g a un entorno de $z_1 \notin D(z_0; r_a)$. Lo mismo ocurriría, mutatis mutandis g por h, en el caso $r_b < r_a$. Por último, queda por considerar el caso $r_a = r_b$. Pero en este caso, directamente es m $D(z_0; r) = D(z_0; r_b) = D(z_0; r_a)$. Entonces:

Respuesta:

El dominio de holomorfía de la función $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n n b_n (z-z_0)^n$ es el disco abierto $D(z_0;\ r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, donde $r = \min\{\sqrt{R_a}, \frac{1}{3} R_b\}$.

Observación: Recordemos que el dominio de holomorfía de una función es un abierto. En nuestro caso, se trata de un disco abierto. Por otra parte, no se pretende que el alumno desarrolle todo el argumento previo para decidir si la función *f* puede ser holomorfa en un dominio mayor al de la respuesta.

EJERCICIO 2: Decir si es verdad o no que $u(x,y) = \frac{2}{\pi} arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ es la única función armónica en el primer cuadrante que satisface $\lim_{x \to 0+} u(x,y) = 1$ (para todo $y > 0$) y $\lim_{y \to 0+} u(x,y) = 0$ (para todo $x > 0$).

Falso: La función $v(x,y) = xy + \frac{2}{\pi} arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ es armónica en el primer cuadrante y verifica las mismas condiciones en los ejes.

EJERCICIO 3: Considerar el siguiente problema de ecuaciones en derivadas parciales: Resolver, para todo $\lambda \in \Re$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \lambda u(x,t) & -\pi < x < \pi \quad , \quad t > 0 \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\pi < x < \pi \end{cases}$$

con $\lambda \in \Re$ y *f* función impar en $[-\pi, \pi]$. Obtener su solución $u(x, y)$ en términos de los coeficientes del desarrollo trigonométrico de Fourier de *f* en $[-\pi, \pi]$.

Resolución: La solución buscada (es única) es de clase C^2 en el interior de su dominio y continua en el borde del mismo, por lo tanto vamos a asumir que la función f es continua en $[-\pi, \pi]$ y seccionalmente de clase C^1, de manera que admite desarrollo de

Fourier puntualmente convergente en dicho intervalo. Por ser impar, este desarrollo es de la forma $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nx)$.

Se puede proceder directamente por separación de variables sobre la función u o bien llevarlo al problema

$$\begin{cases} (i)\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)-\dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t)=0 & -\pi<x<\pi \quad , \quad t>0 \\ (ii)\ v(-\pi,t)=v(\pi,t)=0 & t\geq 0 \\ (iii)\ v(x,0)=f(x) & -\pi<x<\pi \end{cases}$$

donde $v(x,t)=e^{\lambda t}u(x,t)$. En efecto:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial t}=e^{\lambda t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\lambda e^{\lambda t}u-e^{\lambda t}\frac{\partial u}{\partial t}=e^{\lambda t}\overbrace{\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}-\lambda u\right]}^{=0}$$

Además, $v(-\pi,t)=e^{\lambda t}u(-\pi,t)=0$, $v(\pi,t)=e^{\lambda t}u(\pi,t)=0$ y $v(x,0)=u(x,0)=f(x)$. Ahora, separando variables y aplicando el principio de superposición como en todos los ejemplos y ejercicios de la guía, obtenemos la solución de (i):

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}[A_n\cos(nx)+B_n sen(nx)]e^{-n^2 t}$$

donde quedan por determinar los coeficientes. La condición (ii) se sastisface si los coeficientes A_n son nulos y por lo tanto las funciones

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n sen(nx)e^{-n^2 t}$$

satisfacen (i) y (ii). Finalmente, la condición (iii) $B_n=b_n$. Por lo tanto, la respuesta es

$$u(x,t)=e^{-\lambda t}v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n sen(nx)e^{-(n^2+\lambda)t}$$

EJERCICIO 4: Deducir que la solución del problema de conducción del calor en una varilla infinita dado por

$$\begin{cases} (i)\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0 \quad , \quad -\infty < x < +\infty \quad , \quad t > 0 \\ (ii)\ u(x,0) = (E * g)(x) \qquad , \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

donde $E(x) = e^{-x^2}$ y g es una función absolutamente integrable en $(-\infty,+\infty)$ es de la forma $u(x,t) = (\varphi_t * g)(x)$; especificar la función φ_t (para cada $t > 0$)

Resolución: Asumimos que u es lo suficientemente suave en su dominio como para permitir las siguientes operaciones:

$$\hat{u}(\omega, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx \quad , \quad u(x,t) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega,t) e^{i\omega x} d\omega \quad ,$$

$$\widehat{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}(\omega,t) = -\omega^2 \hat{u}(\omega,t)\,, \qquad \widehat{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}(\omega,t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega,t)\,,$$

Aplicando la transformación de Fourier a la ecuación (i) respecto de x:

$$-\omega^2 \hat{u}(\omega,t) - \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega,t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{u}(\omega,t) = A(\omega) e^{-\omega^2 t}$$

donde A es una función a determinar por la condición inicial:

$$\hat{u}(\omega,0) = A(\omega) = \hat{h}(\omega)$$

donde $h = E * g$. Por el teorema de convolución de la transformación de Fourier,

$$\hat{h}(\omega) = \hat{E}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

[Ver página 19 del Apunte sobre la Transformación de Fourier; aquí es necesaria la hipótesis de que g sea acotada, lo que no se deduce de la hipótesis de que es absolutamente integrable en $(-\infty,+\infty)$]. Por lo tanto,

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{g}(\omega)\hat{E}(\omega) e^{-\omega^2 t}$$

Por lo tanto, si φ_t verifica

$$\hat{\varphi}_t(\omega) = \hat{E}(\omega)e^{-\omega^2 t}$$

de la expresión $\hat{u}(\omega,t) = \hat{g}(\omega)\hat{\varphi}_t(\omega)$ se deduce que

$$u(x,t) = (g * \varphi_t)(x)$$

Ahora, tenemos que estudiar un poco esta misteriosa función $\varphi_t : \Re \longrightarrow \Re$ (en realidad es una función para cada $t > 0$, o bien puede verse como una función $\varphi : \Re \times (0,+\infty) \longrightarrow \Re$. ¿Existe? ¿Cómo es? Son demasiados misterios como para irse a dormir sin conocer las respuestas. De todos modos, no es tan complicado: de $\hat{\varphi}_t(\omega) = \hat{E}(\omega)e^{-\omega^2 t}$ deducimos que $\varphi_t = E * \Phi_t$, donde $E(x) = e^{-x^2}$ y $\hat{\Phi}_t(\omega) = e^{-\omega^2 t}$. Por lo tanto (Teorema de Inversión):

$$\Phi_t(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\Phi}_t(\omega)e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\omega^2 t + i\omega x}d\omega \overset{(1)}{=} \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

[La integral (1) ha sido «calculada en clase» y puede verse con todo detalle en la página 21 de los Apuntes sobre Integrales Impropias. Una propiedad importantísima de las exponenciales gaussianas es que son autovectores de la transformación de Fourier.]

Por lo tanto, para cada $t > 0$ y todo $x \in \Re$:

$$\varphi_t(x) = (E * \Phi_t)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\theta)^2}e^{-\frac{\theta^2}{4t}}d\theta \overset{cuentitas}{=} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{x^2}{1+4t}} = \frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{x^2}{1+4t}}$$

Las cuentitas consisten en completar cuadrados en el exponente del integrando y un sencillo cambio de variables para poder utilizar la identidad $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2\alpha^2}d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{k}$.

Momento cultural: En el camino de esta cuenta hemos encontrado lo que se conoce como *heat kernel* (*heat* = calor, *kernel* = núcleo) lo que no es nada casual por cierto. La función Φ_t es exactamente el núcleo para la ecuación que hemos resuelto y no depende de la condición inicial.

EJERCICIO 5: Hallar la φ definida en $(0,+\infty)$ tal que

$$\int_0^t \frac{\varphi(x)}{\sqrt{t-x}}dx = 1$$

para todo $t > 0$, estableciendo las condiciones necesarias sobre φ. ¿Cumple la función obtenida tales condiciones?

Resolución: La integral del primer miembro es la convolución de φ con la función $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}H(t)$. Si bien esta función no es una función objeto, admite transformada de Laplace (ver el ejemplo 5, página 4 del apunte sobre la Transformación de Laplace). Veamos:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}dt = \underset{\delta \to 0+}{Lim} \int_\delta^{+\infty} \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}dt \overset{t=\theta^2}{=} \underset{\delta \to 0+}{Lim} \int_{\sqrt{\delta}}^{+\infty} \frac{e^{-s\theta^2}}{\theta} 2\theta d\theta = 2\int_0^{+\infty} e^{-s\theta^2} d\theta$$

Para $s = \sigma$ real positivo:

$$F(\sigma) = 2\int_0^{+\infty} e^{-\sigma\theta^2} d\theta \overset{\theta = \frac{x}{\sqrt{\sigma}}}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{\sigma}} = \frac{2}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\sigma}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}}$$

Dado que la extensión analítica al semiplano de convergencia es única, lo que resulta es que $F(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$ donde $\sqrt{s} = e^{\frac{1}{2}Log(s)}$ (Log es el logaritmo principal). Ahora, aplicando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación $\int_0^t \frac{\varphi(x)}{\sqrt{t-x}}dx = 1$ tenemos, para todo s tal que $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\Phi(s)\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} = \frac{1}{s}$$

(donde Φ es la transformada de Laplace de φ). Por lo tanto, es:

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{s}}$$

Hemos visto que $F(s)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$ es la transformada de Laplace de $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}H(t)$; por el Teorema de Lerch, resulta entonces $\Phi(s)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{s}}$ es la transformada de Laplace de $\varphi(t)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{t}}$.

Observación: Sería muy bienvenido algún comentario del alumno sobre la validez del Teorema de Convolución para la transformada de Laplace cuando una de las funciones involucradas es la función $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}H(t)$. No se espera una demostración, desde luego, pero por lo menos una inquietud.
