Apellido y Nombres: ....,,,,,...
DNI: .... Padrón: .... Código Asignatura: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....
Correo electrónico: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Primera fecha. 6 de agosto de 2021.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Dado un punto $z_0 \in \mathbb{C}$. considerar una función f holomorfa en $\mathbb{C}-\{z_0\}$. Establecer hipótesis sobre f que permitan calcular el valor principal de la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ a partir del $\operatorname{Res}[f(z),z_0]$ y mostrar cómo se relacionan.¿Puede asegurarse la convergencia de la integral impropia?

Ejercicio 2. Modelar el problema del potencial electrostático en la banda infinita $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>y, -x-1<y<-x+1\}$ si en la frontera toma el valor 0, salvo en el segmento de puntos (x,x) donde es igual a 1. Dar las ecuaciones de las líneas equipotenciales y de las líneas de corriente.

Ejercicio 3. Dada $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0\leqslant x<\pi/2 \\ -x+\pi & \text{si } \pi/2\leqslant x\leqslant\pi \end{cases}$, encontrar constantes reales a,b,c de modo que: $\int_0^{\pi} |f(x)-a-b\operatorname{sen}(4x)-c\operatorname{sen}(10x)|^2\,dx$ sea mínimo y explicar por qué es el mínimo. Resolver:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<\pi,\ 0<y<2\pi \\ u(0,y)=u(\pi,y)=0 & 0\leqslant y\leqslant 2\pi \\ u(x,0)=f(x) & 0\leqslant x\leqslant\pi \\ u(x,2\pi)=\operatorname{sen}(2x) & 0\leqslant x\leqslant\pi \end{cases}$$

Ejercicio 4. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $\mathcal{F}[f](\omega)=\dfrac{4-w^3}{(w^2+4)^7}$. Determinar a qué convergen cada una de las siguientes integrales:

$i)\ \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sen} t)\, f'\left((t-5)/2\right) e^{-i\omega t}\,dt, \qquad ii)\ \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{-3|\tau|}\,d\tau\right)e^{-i\omega t}dt.$

Ejercicio 5. Sea $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ continua a trozos y de orden exponencial tal que

$$f(t)=3t^2-e^{-\alpha t}-\int_0^t f(\tau)\,e^{(t-\tau)}d\tau \quad \forall t\geqslant 0$$

Determinar, si existen, los valores de α para los que la abscisa de convergencia de la transformada de Laplace de f resulta igual a cero. Hallar f en el caso $\alpha=1$.